нятии сечения. Представим себе замкнутую кривую, т.е. непрерывность одного измерения. Если мы отметим на этой кривой две какие-нибудь точки, через которые мы запретим себе переступать, то кривая окажется разделенной на две части, и невозможно будет перейти из одной части в другую, оставаясь на кривой. Возьмем, наоборот, замкнутую поверхность, образующую непрерывность двух измерений. Мы можем отметить на этой поверхности одну, две, любое число запретных точек, поверхность от этого не окажется разбитой на две части. Можно будет перейти от одной ее точки к другой, не встречая препятствий, так как всегда можно будет обойти запретные точки.

Но если мы проведем на нашей поверхности одну или несколько замкнутых кривых и если мы будем рассматривать их как сечения, которые нельзя переступать, то поверхность может быть рассечена на несколько частей». И далее Пуанкаре аналогично объясняет, что пространство имеет три измерения.

Эти высказывания выражают суть дела, но не могут, разумеется, служить точным определением размерности. Первым, кто дал строгое определение, был Л.Брауэр. Его подход основан на понятии перегородки. Пусть X – топологическое пространство, A и B – непересекающиеся множества в X. Замкнутое множество C называют *перегородкой* между A и B, если дополнение к C в X можно представить в виде объединения двух непересекающихся открытых множеств U и V, из которых первое содержит A, а второе – B. Теперь индукцией по n определим, что значит выражение «пространство имеет размерность $\le n$» (обозначается $\operatorname{Ind}X \le n$). Пустое множество (и только оно) имеет размерность -1. Пространство X имеет размерность $\le n$, если между любыми двумя замкнутыми непересекающимися множествами в X существует перегородка размерности $\le n-1$. Положим $\operatorname{Ind}X = n$, если неравенство $\operatorname{Ind}X \le n$ имеет место, а неравенство $\operatorname{Ind}X \le n-1$ – нет.

Нетрудно показать, что для евклидова пространства $\boldsymbol{R}^n$ выполняется неравенство $\operatorname{Ind}\boldsymbol{R}^n \le n$. Значительно сложнее установить, что на самом деле имеет место равенство $\operatorname{Ind}\boldsymbol{R}^n = n$. Это равенство связано с *теоремой Брауэра о неподвижной точке*: если B – замкнутый шар в $\boldsymbol{R}^n$ и $f\colon B \to B$ — непрерывное отображение, то найдется точка $x \in B$, для которой $f(x) = x$.

Урысон исходил из несколько иного определения размерности: он рассматривал перегородки не между произвольными замкнутыми множествами, а между точками и замкнутыми множествами. Определим *малую индуктивную размерность* $\operatorname{ind}X$ аналогично тому, как мы определили $\operatorname{Ind}X$. Полагаем $\operatorname{ind}X \le n$, если для любой точки $x \in X$ и любого замкнутого множества $F \subset X$, не содержащего точки x, существует перегородка C между x и F размерности $\le n-1$. Эквивалентно: $\operatorname{ind}X \le n$ тогда и только тогда, когда у каждой точки $x \in X$ есть сколь угодно малая окрестность, граница которой имеет размерность $\le n-1$. Равенство $\operatorname{ind}X = 0$ означает, что у каждой точки $x \in X$ есть сколь угодно малая окрестность с пустой границей, т.е. окрестность, являющаяся одновременно открытым и замкнутым множеством. Например, непустое подмножество прямой нульмерно тогда и только тогда, когда оно не содержит никакого интервала. Для сепарабельных метрических пространств большая индуктивная размерность совпадает с малой.

Существует еще один подход к размерности, восходящий к Лебегу и основанный на понятии кратности покрытия. Один из наиболее значительных результатов Урысона заключается в том, что размерность, определенная с помощью кратности покрытий, совпадает с индуктивной размерностью.

Пусть S – система подмножеств X. Скажем, что S имеет *кратность* $\le n$, если любая точка из X принадлежит не более чем n множествам из S. Лебег доказал, что всякое покрытие плоскости замкнутыми ограниченными множествами имеет кратность ≥ 3 (покрытия кратности 3, очевидно, существуют – достаточно замостить плоскость шестиугольниками). Это вытекает из такого утверждения: если треугольник со сторонами a_1, a_2, a_3 покрыт тремя замкнутыми множествами F_1, F_2, F_3, причем F_i не пересекается с a_i ($i = 1, 2, 3$), то множества F_1, F_2, F_3, имеют общую точку. Аналогичное утверждение справедливо для $\boldsymbol{R}^n$ при любом n. Например, всякое покрытие пространства $\boldsymbol{R}^n$ замкнутыми ограниченными множествами имеет кратность $\ge n+1$.

Пусть X – замкнутое ограниченное множество в некотором евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^k$. Скажем, что размерность dim (*размерность, определенная с помощью кратности покрытий*) метрического пространства X не превосходит n, если для любого $\varepsilon > 0$ существует покрытие S пространства X конечным числом замкнутых множеств диаметра $< \varepsilon$, такое, что кратность S не превосходит $n+1$. Как и в случае индуктивной размерности, равенство $\dim X = n$ означает, что неравенство $\dim X \le n$ имеет место, а неравенство $\dim X \le n-1$ нарушается.

Урысон доказал, что $\dim X = \operatorname{ind}X$. Таким образом, два совершенно разных подхода к определению размерности — через понятие перегородки и через кратность покрытий – приводят к одному и тому же числу. Размерность dim можно определить для произвольных метрических пространств, при этом для сепарабельных метрических пространств X все три размерности совпадают: $\dim X = \operatorname{ind}X = \operatorname{Ind}X$. Для несепарабельных метрических пространств равенство $\dim X = \operatorname{Ind}X$ по-прежнему выполняется, но при этом малая индуктивная размерность может оказаться строго меньше большой.

Таким образом, каждому подмножеству X евклидова пространства $\boldsymbol{R}^n$ можно сопоставить целое число ≥ -1 — размерность $\dim X$. При этом $\dim X = n$ тогда и только тогда, когда X имеет внутренние точки (т.е. содержит некоторый шар), в противном случае $\dim X < n$ (Урысон).

Приведем замечательный пример одномерного замкнутого множества в $\boldsymbol{R}^3$. Возьмем единичный куб F_0 в $\boldsymbol{R}^3$. Разделим его естественным образом на 27 равных кубиков со стороной $1/3$. Пусть F_1 — объединение тех 20 из них, которые имеют общие точки с ребрами куба F_0 (остальные 7 – это центральный кубик и еще шесть, примыкающих к нему по граням). С каждым из 20 кубиков, из которых слагается F_1, проделаем аналогичную операцию. Получим 400 кубиков с ребром $1/9$. Пусть F_2 — их объединение. Продолжая эту конструкцию, получаем убывающую последовательность множеств $F_0 \supset F_1 \supset \ldots F_n \ldots$ Пересечение M всех множеств F_n называется *кривой Менгера*. Можно показать, что кривая Менгера одномерна. Кроме того, M является универсальной кривой в следующем смыс-