пространством, если пересечение конечного числа и объединение любого числа множеств из τ принадлежит системе τ, все множество X и пустое множество также принадлежат τ. Множества из τ называют *открытыми*; множества из τ, содержащие некоторую точку, называются *окрестностями* этой точки. Далее всегда топологическое пространство будем предполагать *хаусдорфовым*, когда любые две различные точки имеют непересекающиеся окрестности.

Множество, являющееся дополнением к открытому множеству, называется *замкнутым.* Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих данное множество A, называется *замыканием* A и обозначается $\overline{A}$. (Первая аксиоматика топологического пространства, данная Куратовским в 1922 году, исходила именно из понятия замыкания.)

Внутренность множества A – это наибольшее открытое множество, содержащееся в A, *граница* множества – это разность между замыканием и внутренностью. Отображение f: $X \to Y$ одного топологического пространства в другое *непрерывно*, если прообраз любого открытого в Y множества открыт в X. Всякое подмножество A топологического пространства X может рассматриваться как топологическое пространство, в котором открытые множества – это пересечения открытых в X множеств с A.

Понятие топологического пространства выкристаллизовалось не сразу, на это ушли многие десятилетия. В его окончательном формировании приняли участие (среди многих других) немецкий математик Ф.Хаусдорф, французский математик М.Фреше и польский математик К.Куратовский. А именно в той форме, которая была приведена нами, понятие топологического пространства было сформулировано другом Павла Самуиловича Урысона П.С.Александровым в 1925 году.

Во времена, предшествовавшие рождению топологии, основным объектом, в котором изучали свойства непрерывности, были *метрические пространства*. Что это такое? Пусть снова X — некоторое множество, и имеется определенная на нем *функция расстояния*, которая каждой паре (x, y) точек из X ставит в соответствие число $d(x, y)$ (расстояние между x и y), удовлетворяющее трем свойствам: a) $d(x, x) = 0$ и $d(x, y) > 0$, если $x \neq y$; b) $d(x, y) = d(y, x)$ и, наконец, c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (Последнюю аксиому называют *аксиомой треугольника.*) Пару (X, d) с описанными свойствами и называют *метрическим пространством.*

Каждое метрическое пространство является топологическим пространством. Открытые множества в метрическом пространстве X определяются как объединения *открытых шаров* вида $B(x, r) = \{y \in Y | d(x, y) < r\}$. Например, на числовой прямой $\boldsymbol{R}$ с метрикой $d(x, y) = |x - y|$ открытые множества – это объединения открытых интервалов.

И сразу же возник один из центральных вопросов общей топологии: *когда топологическое пространство можно метризовать*, т.е. ввести на нем метрику, задающую ту же топологию, что изначальная?

Урысону принадлежит основополагающий результат в этой области, получивший название теоремы метризации Урысона. Для его формулировки надо дать два определения.

Топологическое пространство называется *нормальным*, если для любой пары замкнутых непересекающихся множеств существуют два непересекающихся открытых множества, одно из которых содержит первое замкнутое множество, а другое — второе.

Говорят, что топологическое пространство *имеет счетную базу*, если имеется счетное семейство открытых множеств, объединяя которые можно получить любое открытое множество. Для метрического пространства наличие счетной базы равносильно *сепарабельности*, т.е. наличию в нем счетного множества, замыкание которого совпадает со всем пространством.

Имеет место

Метризационная теорема Урысона. *Нормальное топологическое пространство со счетной базой метризуемо.*

Центральным местом в доказательстве этого результата является следующее утверждение, известное как *лемма Урысона*, авторское доказательство которой производит большое эстетическое впечатление, а заложенный в него прием построения бесчисленное число раз в различных формах использовался в математических исследованиях.

Лемма Урысона. *Пусть A и B — два замкнутых непересекающихся подмножества нормального пространства X. Тогда существует непрерывная функция f, определенная на всем X, принимающая значение нуль на A, единица на B и удовлетворяющая неравенству $0 \leq f(x) \leq 1$ для любого x.*

Наметим доказательство этой леммы. Пусть U_1 — дополнительное к B множество. Оно открыто и содержит A. Из определения нормальности вытекает, что для всякой пары (F, G), где F – замкнутое множество в X, а G – содержащее F открытое множество, существует открытое множество V, содержащее F и содержащееся в G вместе со своим замыканием. Применяя это рассуждение к паре (A, U_1), найдем открытое множество U_0, для которого $A \subset U_0 \subset \overline{U_0} \subset U_1$.

Далее находим открытое множество $U_{1/2}$, которое содержит $\overline{U_0}$ и с замыканием содержится в U_1. Затем построим два открытых множества $U_{1/4}$ и $U_{3/4}$ относительно пар $\left(\overline{U_0}, U_{1/2}\right)$ и $\left(\overline{U_{1/2}}, U_1\right)$. Продолжая далее этот процесс, построим семейство $\{U_r\}$, где r пробегает совокупность всех двоично-рациональных чисел (т.е. рациональных чисел, знаменатель которых – степень двойки), расположенных между нулем и единицей. Остается положить $f(x)$ равным нижней грани тех (двоично-рациональных) чисел r, при которых $x \in U_r$. Без труда доказывается, что построенная функция непрерывна и обладает всеми перечисленными свойствами.

Но основным вкладом Урысона в математику явилось построение им теории размерности. В создании теории размерности основополагающую роль сыграли пять математиков. Это А.Пуанкаре, один из величайших ученых всех времен, голландский математик Л.Брауэр, упомянутый нами французский математик А.Лебег, австрийский математик К.Менгер и П.С.Урысон.

Как придать точный смысл утверждению, что плоскость двумерна, а пространство трехмерно? У Пуанкаре есть цикл статей, написанных незадолго до его смерти. Одна из них называется «Почему пространство имеет три измерения». Пуанкаре писал там: «Я попытаюсь обосновать определение числа измерений на по-