Плавно тормозясь в разреженном газе, спутник переходит на более низкую орбиту. Но при меньших R, как следует из формулы (1), скорость орбитального движения спутника должна быть больше, чем на первоначальной более высокой орбите. Получается, что сила сопротивления, направленная против движения, может ускорить спутник в направлении этого же движения! Более того, оказывается (как мы увидим дальше из расчетов), что тангенциальное ускорение, т.е. ускорение вдоль траектории, точно равно силе сопротивления, деленной на массу спутника. Этот интересный факт и называется аэродинамическим парадоксом спутника, к объяснению которого мы сейчас перейдем.

Заметим, что с этой, казалось бы, непростой задачей можно справиться, используя только законы сохранения и проводя элементарные вычисления.

Увеличение скорости спутника при его торможении в верхних слоях атмосферы имеет простую причину. Спутник, теряя первоначальную круговую скорость, попросту говоря, падает в гравитационном поле Земли, приближаясь к ней, так как сила притяжения $F = GMm/R^2$ становится больше силы mv^2/R, необходимой для того, чтобы удержать спутник на прежней орбите. Но падает космический аппарат не отвесно (как кирпич с крыши высокого дома), а по плавной кривой – спирали, виток за витком медленно приближаясь к земной поверхности, причем каждый виток спирали мало отличается от окружности. А в поле тяжести, как мы знаем, при падении тел их скорость увеличивается. Для такого движения космического аппарата уменьшение его потенциальной энергии не только компенсирует работу сил трения на орбите, т.е. сил сопротивления среды, но и служит причиной увеличения его скорости v и кинетической энергии $mv^2/2$. Так что ускоряет падающий спутник земное притяжение, а вовсе не силы трения спутника на орбите. Последние лишь помогают «сбросить» космический аппарат с более высокой орбиты на более низкую. (Вспомните простенький пример с шариком на упругом подвесе, о котором шла речь в начале статьи.)

Обратимся к рисунку 1, где показаны траектория искусственного спутника в разреженной атмосфере и силы, действующие на него. Движение происходит в плоскости при медленном уменьшении радиуса орбиты, т.е. по плавно закручивающейся к Земле спирали с малым шагом по сравнению с высотой полета спутника $h = R - R_0$. Здесь $\vec{F}_{\text{грав}}$ — сила гравитационного притяжения спутника к Земле, $\vec{F}_{\text{сопр}}$ — сила сопротивления со стороны атмосферы и $\vec{F}_{\text{пол}}$ — векторная сумма сил $\vec{F}_{\text{грав}}$ и $\vec{F}_{\text{сопр}}$. Поскольку траекторией движения является спираль, каждый виток которой хотя и мало, но все же отличается от окружности, силу $\vec{F}_{\text{пол}}$ можно разложить на две составляющие: $\vec{F}_{\text{н}}$ и $\vec{F}_{\text{т}}$, т.е. нормальную и тангенциальную (касательную) к траектории космического аппарата. Сила $\vec{F}_{\text{т}}$, действующая вдоль траектории спутника, увеличивает его скорость таким образом, что в данной точке траектории мгновенное ускорение в направлении вектора $\vec{v}$ равно по модулю $F_{\text{т}}/m$. Покажем, что $F_{\text{т}} = F_{\text{сопр}}$.

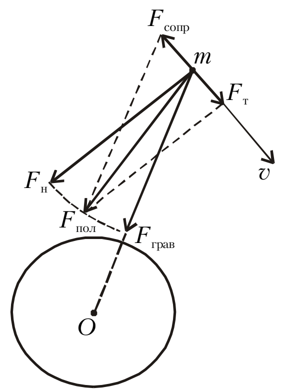

Рис. 1

Пусть на некоторой орбите радиусом R на спутник действует сила торможения $F_{\text{сопр}}$, определяемая формулой (2), в которой плотность $\rho(R)$ на всем витке считается малой и постоянной величиной. Определим увеличение скорости спутника Δv и уменьшение радиуса его орбиты ΔR на одном витке полета. Воспользуемся законом сохранения энергии с учетом работы силы сопротивления. Напомним, что потенциальная энергия спутника на орбите равна $W_1 = -GMm/R = -mv^2$, кинетическая энергия равна $W_2 = mv^2/2 = -W_1/2$, а полная энергия составляет $W_1 + W_2 = -mv^2/2$. Запишем баланс полной энергии спутника в начале и в конце витка:

$$-\frac{mv^2}{2} - 2\pi R F_{\text{сопр}} = -\frac{m(v + \Delta v)^2}{2}. \quad (3)$$

Откуда, с учетом условия $\Delta v \ll v$, следует

$$\Delta v = \frac{2\pi F_{\text{сопр}} R}{mv} = \frac{2\pi F_{\text{сопр}} \sqrt{R}}{m\sqrt{g}},$$

или

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{2\pi F_{\text{сопр}}}{mg}. \quad (4)$$

Поскольку продолжительность витка составляет $\Delta t = 2\pi R/v$, тангенциальное ускорение пролетающего в разреженной атмосфере спутника равно

$$a_{\text{т}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2\pi F_{\text{сопр}} R}{mv} \frac{v}{2\pi R} = \frac{F_{\text{сопр}}}{m}. \quad (5)$$

Отсюда

$$F_{\text{т}} = ma_{\text{т}} = m\frac{F_{\text{сопр}}}{m} = F_{\text{сопр}},$$

что и требовалось установить.

Итак, чем больше сопротивление, которое оказывает разреженный газ на спутник при его движении, тем быстрее увеличивается скорость спутника! (Когда катаешься на санках с горки, такое и не приснится. Кстати, подумайте, почему. Ведь санки и спутник двигаются в одном и том же поле гравитации Земли.)

Найдем теперь уменьшение радиуса орбиты ΔR на одном витке. Связь между ΔR и Δv легко получается из формулы (1):

$$\Delta v = -\frac{v}{2R}\Delta R,$$

а величину Δv мы уже определили. Поэтому получаем

$$\frac{\Delta R}{R} = -\frac{4\pi F_{\text{сопр}}}{mg}. \quad (6)$$

Заметим, что относительное уменьшение высоты полета точно в два раза превышает соответствующее увеличение относительной скорости спутника.

Обратим внимание на формулу (6). Если мысленно развернуть окружность радиусом R и траекторию спутника на одном витке полета в прямые отрезки AB и AC (рис.2), расположив их так, чтобы отрезок BC был равен по величине $\Delta R = 4\pi F_{\text{сопр}} R/(mg)$, то станет ясно, что

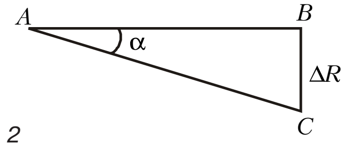

Рис. 2