

теорема допускает исключения: есть особые точки, и мы увидим, что они играют самую главную роль. При первом знакомстве с фазовыми траекториями положим (временно), что трения нет, т.е. $k = 0$. Тогда сохраняется полная энергия шарика E — сумма кинетической и потенциальной энергий:

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgy(x). \quad (3)$$

Согласно этому равенству, каждому значению E отвечает линия на плоскости (x, v) . Действительно, равенство (3) можно переписать, например, в виде

$$v = \pm \sqrt{2 \left(\frac{E}{m} - gy(x) \right)} \quad (4)$$

и строить графики $v(x)$ для разных E . Эти графики — фазовые траектории — изображены на рисунке 3.

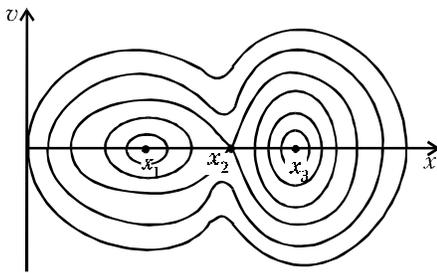


Рис. 3

Они напоминают горизонтали на топографической карте с двумя котловинами, разделенными перевалом.

Пусть энергия шарика немного больше, чем mgy_1 , где y_1 — ордината точки x_1 на рисунке 1. Тогда его фазовой траекторией будет замкнутая кривая, охватывающая точку x_1 , как это показано на рисунке 3. В самой левой точке этой траектории скорость равна нулю, а потенциальная энергия равна E . Затем шарик приближается к точке равновесия x_1 , скорость его растет и достигает максимума в точке равновесия. Далее, по мере того как шарик отклоняется от равновесия вправо, скорость падает и обращается в ноль при максимальном отклонении, когда потенциальная энергия вновь равна E . Теперь шарик движется справа налево ($v < 0$) до тех пор, пока не вернется в исходную точку (в которой был, когда

мы начали следить за ним). Потом все повторяется — движение колебательное. Таким образом, замкнутые траектории на фазовой плоскости отвечают колебательному движению.

На рисунке 3 есть траектории, охватывающие точку x_1 , точку x_3 и обе эти точки. Пока $E < mgy_2$, где y_2 — высота точки неустойчивого равновесия ($y_2 = y(x_2)$), шарик колеблется в пределах одной из ям — той, в которую его поместили в начальный момент. Если энергию увеличивать, то размах колебаний скачком возрастет при $E = E_2 = mgy_2$, когда появляется возможность перекачаться через горб (см. рис.1). Траектории малого и большого размахов на рисунке 3 разделяет линия (отвечающая $E = E_2$) в форме восьмерки, лежащей на боку. Это — сепаратриса (от separate — разделять). Ее значение в жизни нашей рулетки так велико, что давайте сделаем небольшое математическое усилие и найдем форму этой кривой вблизи точки x_2 .

В окрестности x_2 ординату представим в виде

$$y(x) = y_2 - b\delta^2, \quad (5)$$

где $b > 0$, а δ — малая разность $x - x_2$. Действительно, величины δ^3 , δ^4 и т.д. слишком малы и ими можно пренебречь. Почему, однако, нет слагаемого $a\delta$? Если такой член включить, то функция $y(x)$ в одну сторону от точки x_2 будет убывать, а в другую — возрастать. Но она убывает в обе стороны от x_2 . Поэтому должно быть $a = 0$ и $b > 0$. Подставляя выражение (5) в формулу (4), получаем

$$v = \pm \sqrt{2bg\delta}. \quad (6)$$

Конечно, это равенство пригодно лишь при малых δ . Важно, что через точку $(x_2, 0)$ фазовой плоскости проходят две траектории, а не одна. Потом эти линии соединяются, образуя петли сепаратрисы, но для свойств точки $(x_2, 0)$ это не имеет значения. Особая точка, через которую проходят две траектории, называется седловой, так что сепаратриса — это траектория, проходящая через седловую точку. Другие особые точки на рисунке 3 — точки $(x_1, 0)$ и $(x_3, 0)$ — характеризуются тем, что через них не проходит ни одна траектория. Заметим еще, что если взять две близкие точки на фазовой плоскости,

то проходящие через них траектории тоже близки, но за одним исключением. Когда такие точки разделены сепаратрисой, близкие первоначально траектории подходят вместе с ней к седловой точке, а там «разбегаются».

Идеальный мир сохраняющейся механической энергии не подходит, конечно, в качестве модели рулетки. Запущенный в желоб шарик будет вечно там колебаться, не желая выбирать между двумя ямками. Покидая этот воображаемый мир, обратим внимание на то, что в нем нельзя различить прошлое и будущее. По фазовой траектории можно вращаться по (или против) часовой стрелке, проходя одни и те же состояния. Имеет место симметрия траекторий относительно оси x . Это свойство обусловлено тем, что сила F_1 , в отличие от силы трения F_2 , не зависит от скорости. Выражающее второй закон Ньютона равенство

$$ma = F_1, \quad (7)$$

где $a = d^2x/dt^2$ — ускорение шарика, оказывается симметричным относительно преобразования $t \rightarrow -t$.

В реальном мире (с трением) у шарика есть будущее. Его энергия убывает со временем, колебания затухают, достигается равновесие. Фазовые траектории больше не являются замкнутыми линиями, они превращаются в спирали, скручивающиеся к точкам x_1 и x_3 , так что через каждую из точек проходит бесконечное множество траекторий. Говорят, что точки равновесия «притягивают» траектории. Что касается седловой точки, то ее природа не меняется: по-прежнему через эту точку проходят две траектории.

Теперь у читателя, которому еще не надоела рулетка, имеются две возможности. Либо поверить утверждению о двух траекториях и пропустить следующий абзац. Либо познакомиться с доказательством. (Тому, кого привлекает исследовательская работа, стоит быть недоверчивым.)

В законе Ньютона учтем силу трения и запишем

$$ma = -mg \frac{dy}{dx} - kv. \quad (8)$$

Вблизи точки x_2 используем для функции $y(x)$ приближенное выражение (5), так что $dy/dx = dy/d\delta = -2b\delta$. Из определений $v = dx/dy$,