Физика рулетки

Э.РУМАНОВ

РУЛЕТКА манит возможностью быстро разбогатеть без особого труда — достаточно лишь «поймать удачу». Погоня за удачей создает драматические ситуации, изображение которых так обжигающе правдиво у Ф.М.Достоевского (в «Игроке»). Мы же обратимся не к человеческим страстям и порокам, а к их объекту — самой рулетке.

Почему нельзя заранее определить, куда попадет шарик? Если известны начальные условия — положение и скорость шарика в тот момент, когда его запускает крупье, — то, казалось бы, интегрируя уравнения Ньютона, можно узнать всю траекторию и, в частности, ту точку, где шарик остановится. П.Лаплас (1749 — 1827) думал, что предсказывать будущее мешают чисто технические трудности: нет такого демона, который смог бы проинтегрировать множество уравнений для всех частиц Вселенной. Демона действительно нет, зато появились компьютеры, способные справиться с объемом вычислений, какой во времена Лапласа едва ли можно было представить. Тем не менее, наша способность делать точные (а не вероятностные — типа «ожидается переменная облачность, местами возможен кратковременный дождь») предсказания с тех пор практически не возросла. Что же мешает изгнать случайность из нашей жизни? Попробуем разобраться.

С этой целью вместо настоящей рулетки рассмотрим весьма упрощенную, но вполне работоспособную ее модель. Пусть шарик движется по желобу, изогнутому, как показано на рисунке 1. Ускорение в каждой точке определяется действием силы тяжести и силы трения. Но часть силы тяжести компенсируется реакцией дна желоба, ускорение создает только проекция на направление движения (вспомните наклонную плоскость). На рисунке 2 изображен малый участок дна желоба, который приближенно можно считать кусочком наклонной плоскости. Пусть размер этого кусочка dx. Проекция силы тяжести на направление движения равна $F_1 = mg\cos\alpha$, где m — масса шарика. Перемещаясь по желобу на расстояние dx, шарик опускается на $dy = dx\cos\alpha$. Поэтому

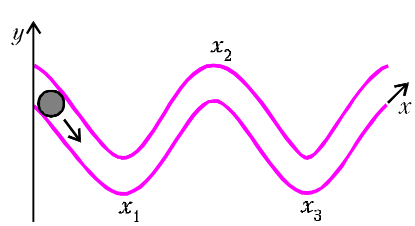

Рис. 1

Иллюстрация А.Балдина

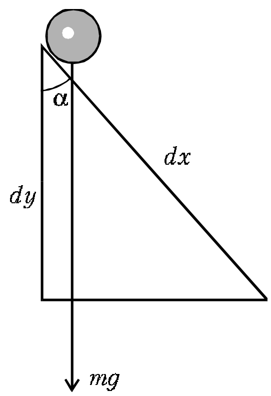

Рис. 2

$$F_1 = -mg\frac{dy}{dx}. \qquad (1)$$

Силу трения запишем в виде

$$F_2 = -kv\,, \qquad (2)$$

где $v = dx/dt$ — скорость шарика, а величину k называют коэффициентом трения. Направления скорости и силы трения всегда противоположны, отсюда знак «минус» в формуле.

Согласно рисунку 1, имеются три точки x_1, x_2, x_3, в которых производная dy/dx, а значит и сила F_1, обращается в ноль. В окрестности точки равновесия x_1 сила тяжести стремится приблизить шарик к этой точке (при $x < x_1$ величина F_1 положительна, а при $x > x_1$ — отрицательна). Такое равновесие называют устойчивым. Равновесие в точке x_3 тоже устойчивое, а в точке x_2 — неустойчивое: малейшее отклонение от этой точки под действием силы тяжести будет увеличиваться. Очевидно, движение шарика может окончиться только в точке устойчивого равновесия. Поэтому для системы с одной точкой равновесия конечный результат вообще не зависит от начальных условий. Но поскольку в желобе таких точек две, множество возможных начальных условий разбивается на две части. Условия, принадлежащие одной из них, приводят шарик в точку x_1, другие — в x_3. Эти части называют областями притяжения точек x_1 и x_3 соответственно. Теперь мы можем четче сформулировать задачу: нужно найти области притяжения, точнее говоря, — границу между ними. Ставки сделаны, господа!

Плоскость, на которой расположена эта граница, называется фазовой плоскостью. Сейчас мы с ней познакомимся. В каждый момент времени шарик находится в какой-либо точке x и имеет скорость v. Начертив на листе оси x и v, скажем, что каждому состоянию шарика, т.е. каждой паре (x, v), отвечает точка на плоскости. Это и есть фазовая плоскость. Она как бы состоит из множества точек — «представителей» разных состояний шарика («фаза» и «состояние» имеют практически одинаковый смысл). Про фазовую плоскость можно сказать и иначе. Пусть x_0, v_0 — координата и скорость шарика в начальный момент, так что состояние изображается точкой (x_0, v_0). По мере движения x и v меняются, точка будет рисовать линию — фазовую траекторию. Если выбрать другую начальную точку, получится другая траектория. Продолжая выбор начальных точек, покроем тракториями весь лист. Поэтому фазовую плоскость можно представить составленной из множества траекторий, отвечающих разным начальным условиям.

Математики доказали теорему о том, что через каждую точку фазовой плоскости проходит лишь одна траектория, так что выбора у шарика, как будто, нет. Однако эта