

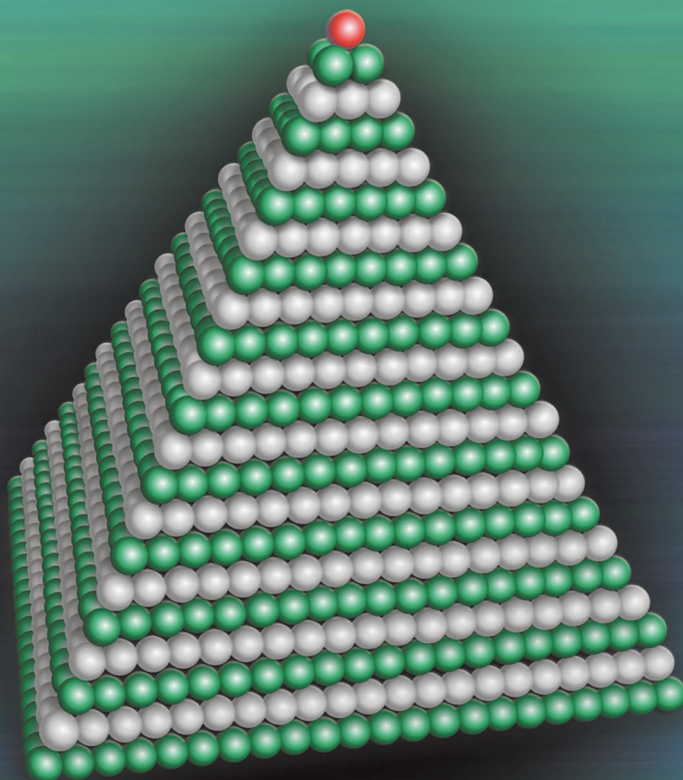
ISSN 0130-2221

2024 · № 1

ЯНВАРЬ

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



1540

1771

2300

2600

2024



КАЛЕНДАРЬ-ГОЛОВОЛОМКА

Предлагаем вниманию читателей головоломку, придуманную норвежскими изобретателями из DragonFjord. Головоломка называется «Один день – одна головоломка» (*A Puzzle-A Day*).

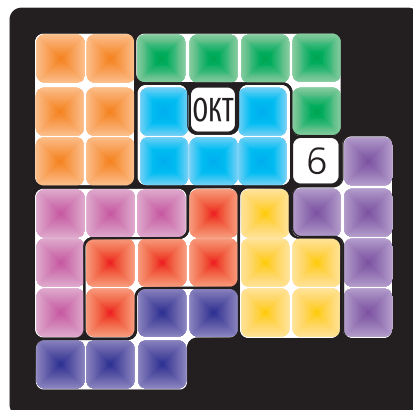
Головоломка представляет собой поле, разбитое на квадраты, в которых написаны числа от 1 до 31 и названия двенадцати месяцев. Цель – уложить детали головоломки, семь пентамино и прямоугольник 2 на 3, в поле так, чтобы непокрытыми остались два квадрата, один с числом и один с месяцем.

Каждый день можно начинать с зарядки для ума: собирать головоломку с очередной датой. Каждая дата собирается несколькими способами. Есть лишь семь способов собрать 6 октября и целых 191 способ собрать 25 января! Изучить, сколькими способами собирается та или иная дата, можно на сайте <https://etudes.ru/models/puzzle-calendar/>. Интересно, что заметны определенные закономерности между числом сборок и расположением даты. Например, наименьшим числом способов можно собрать 6-е число и 24-е. Наибольшим – 28-е, 7-е и 31-е. Легче всего собирать даты в январе, а сложнее всего – в октябре. Таким образом, здесь головоломка тоже дает повод для размышлений.

Желаем успеха!

Н. Панюнин

ЯНВ	ФЕВ	МАР	АПР	МАЙ	ИЮН	
ИЮЛ	АВГ	СЕН	ОКТ	НОЯ	ДЕК	
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				



В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук

Математический институт
им. В.А.Стеклова РАНФизический институт
им. П.Н.Лебедева РАНМосковский
физико-технический институтМосковский центр непрерывного
математического образования

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,
М.Н.Бондаров, А.А.Варламов,
С.Д.Варламов, А.П.Веселов,
А.Н.Виленин, Н.П.Долбилин,
С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,
А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов,
П.А.Кожевников, С.П.Коновалов,
К.П.Кохась, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,
А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,
А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,
А.В.Устинов (заместитель главного
редактора), А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора)**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, В.И.Берник,
А.А.Боровой, В.В.Козлов,
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.КикоинПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА**А.Н.Колмогоров**

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

- 2 Кинематика случайного блуждания и освоение
человечеством Галактики. *М.Никитин,
А.Тепляков, А.Львова*
- 7 Корни многочленов и касательные
к окружностям. *А.Рябичев, К.Щербаков*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 11 Задачи М2778–М2781, Ф2785–Ф2788
12 Решения задач М2762–М2769, Ф2769–Ф2776

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 29 Задачи

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 30 Обрученные многогранники. *Н.Даурцева,
К.Сторожук*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Когда фигурные числа совпадают

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 36 Гравитация внутри Земли и ее физические
характеристики. *Б.Мукушев*

ОЛИМПИАДЫ

- 41 Международная физическая олимпиада

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 49 Физико-математическая олимпиада «Физтех».
Физика

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 53 Задачи 17–20
- 53 Ответы, указания, решения
Любопытно, что... (10)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к Калейдоскопу «Кванта»*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

Кинематика случайного блуждания и освоение человечеством Галактики

М.НИКИТИН, А.ТЕПЛЯКОВ, А.ЛЬВОВА

СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДЕНИЕ – ЭТО движение какого-либо объекта, когда он по тем или иным причинам случайным образом со временем меняет направление своего движения. Характерным примером случайного блуждания служит броуновское движение мельчайших частичек в жидкости или газе. Свое название этот тип движения получил в честь английского ботаника Роберта Броуна, который описал его характерные особенности. Они хорошо отражены на рисунке 1. Как видно из рисунка, коллоидные микрочастицы совершают беспорядочные перемещения, резко меняя направления своего движения. Такое беспорядочное движение микрочастиц происходит по причине тепलो-

го движения атомов или молекул вещества раствора, которые сталкиваются с микрочастицами и передают им импульсы, меняющиеся случайным образом по направлению и величине.

Из-за того что случайное движение броуновских частиц определяется тепловым движением атомов и молекул вещества, измерения особенностей этого движения позволяют подтвердить основные положения молекулярно-кинетической теории строения вещества. Впервые на это указали в своих теоретических работах А.Эйнштейн и М.Смолуховский, а Ж.Перрен и Т.Сведберг подтвердили их выводы своими оригинальными экспериментами. (Увлекательная история создания теории броуновского движения описана в статье А.Габовича «Мариан Смолуховский и броуновское движение», опубликованной в журнале «Квант» №6 за 2002 год.)

В опыте Ж.Перрена измерялась концентрация броуновских частиц из гуммигута в растворах сахара и глицерина на различных уровнях раствора. Полученное в эксперименте распределение концентрации броуновских частиц оказалось аналогичным по математической записи высотному распределению концентрации газов в атмосфере Земли:

$$n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}},$$

где n_0 – число броуновских частиц в единице объема на уровне $h = 0$, m – масса броуновской частицы в эмульсии, k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура. Как видно, измеряя массу

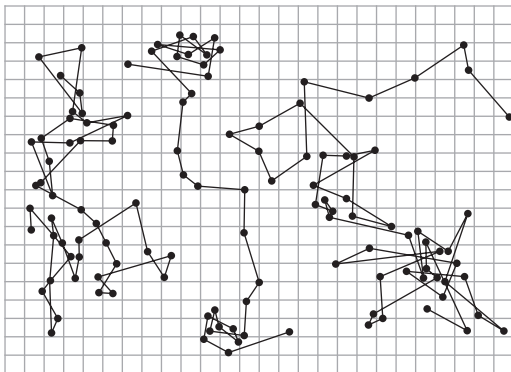


Рис. 1. Траектории движения трех коллоидных частиц радиусом 0,53 мкм, наблюдавшиеся под микроскопом Ж. Перреном. Последовательные положения частиц отмечены через каждые 30 секунд, шаг сетки 3,2 микрометра

броуновских частиц и их концентрацию на двух высотных уровнях, можно определить постоянную Больцмана и число Авогадро $N_A = R/k$. Перрен проделал подобные опыты на различных эмульсиях и нашел, что N_A лежит в диапазоне от $6,5 \cdot 10^{23}$ до $7,2 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹.

Еще одним важным результатом опыта Перрена был вывод о том, что энергия теплового движения броуновских частиц равна тепловой энергии молекул эмульсии (т.е. окружающего раствора). Этим подтверждается закон равномерного распределения энергии по степеням свободы (закон Больцмана) для молекулярных систем, находящихся в термодинамическом равновесии, причем броуновские частицы являются сверхмассивными «молекулами».

Рассмотрим теперь случайное движение атомов или молекул в газе. На рисунке 2

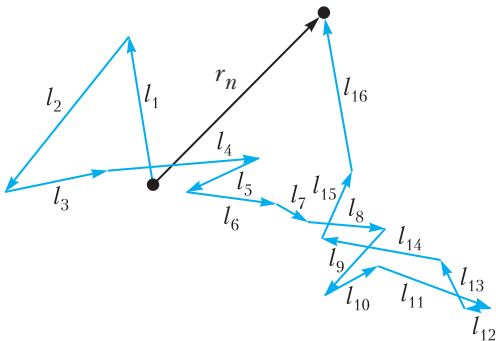


Рис. 2. Движение выделенной броуновской частицы

показана траектория некоторой частицы, состоящая из большого числа звеньев \vec{l}_{ij} , где \vec{l}_{ij} – векторный отрезок, соединяющий две точки последовательных столкновений, в которых случайным образом меняется направление движения. Пусть через n столкновений (где n – очень большое число) частица сместится из начального положения в точку, задаваемую радиус-вектором \vec{r}_n . Тогда

$$\vec{r}_n = \sum_{i=1}^n \vec{l}_i.$$

Найдем квадрат удаления частицы от начальной точки:

$$\vec{r}_n^2 = \left(\sum_{i=1}^n \vec{l}_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n \vec{l}_i^2 + \sum_{i \neq j} \vec{l}_i \vec{l}_j.$$

Введем среднюю длину пробега частицы между двумя столкновениями:

$$l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i.$$

С учетом этой величины с хорошим приближением выражение для квадрата удаления можно переписать в виде

$$\vec{r}_n^2 = r_n^2 \approx nl^2 + l^2 \sum_{i,j} \cos \varphi_{ij},$$

где φ_{ij} – угол между векторами \vec{l}_i и \vec{l}_j . Здесь фигурирует сумма косинусов углов между векторами. Учитывая случайный характер движения частиц, $\sum_{i,j} \cos \varphi_{ij} = 0$, так как в сумме с равной вероятностью будут углы самых разных значений. В результате получим

$$r_n^2 \approx nl^2.$$

Средняя длина пробега частиц газа связана со средним временем свободного движения τ следующим соотношением:

$$\tau = \frac{l}{v},$$

где v – средняя тепловая скорость движения частиц. С помощью параметра τ найдем полное число столкновений рассматриваемой частицы за время t :

$$n = \frac{t}{\tau} = \frac{vt}{l}.$$

Тогда

$$r_n^2 \approx nl^2 \approx vlt.$$

Это выражение можно записать в виде

$$r_n^2 \approx Dt,$$

где $D = vl$ – коэффициент диффузии, характеризующий направленное движение атомов или молекул в газе за счет хаотического теплового движения. Знак \approx в формулах говорит о том, что квадрат радиус-вектора для одной частицы не точно равен произведению Dt , а приближенно. Это связано со случайным характером движения броуновской частицы, когда на некоторых участках частица (как показано на рисунках 1 и 2) может двигаться вспять или вбок. Если же проследить за движением большого числа одинаковых броуновских частиц, то усредненный для

них квадрат расстояния будет строго равен Dt .

Радиус-вектор в декартовой системе координат выражается через координаты x , y и z следующим образом:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

В силу равной вероятности движения броуновской частицы в любом из трех ортогональных направлений, средние значения квадратов координат x , y и z будут равны друг другу. В соответствии с этим,

$$r_n^2 = 3x_n^2 = 3y_n^2 = 3z_n^2 = Dt,$$

или, например,

$$x_n^2 = D_x t,$$

где $D_x = D/3 = vl/3$ – коэффициент диффузии броуновских частиц в направлении оси x , характеризующий смещение частиц вдоль этой оси за счет хаотического движения.

Как было показано, усредненный по большому числу броуновских частиц квадрат расстояния, на которое пробная частица смещается за счет случайного (броуновского) движения, меняется линейным образом от времени. Причем темп увеличения r_n^2 пропорционален средней тепловой скорости движения частиц и длине свободного пробега. Увеличение одной из этих величин приводит к увеличению смещения частицы от своего начального положения. Отметим, что по усредненному квадрату расстояния можно найти параметр диффузии в броуновских системах, а с его помощью – тепловую скорость движения броуновских частиц и среднюю длину свободного пробега.

Примечательным примером проявления закономерностей случайного блуждания может служить задача о расселении человечества в будущем в нашей Галактике. Подобное расселение, если оно когда-либо начнется, скорее всего, будет проходить по следующей схеме.

Космические межзвездные корабли отправятся по разным направлениям к ближайшим звездам. Достигнув и освоив экзопланеты этих звезд, люди отправятся дальше к соседним звездам. Выбор мар-

шрутов при этом будет осуществляться с учетом минимизации затрат на время полета и на топливо, т.е. по кратчайшим межзвездным путям. Из-за слабой упорядоченности звезд в Галактике траектории звездолетов будут иметь вид ломаных линий, характерных для движения броуновских частиц. В соответствии с законом случайного блуждания, звездолеты будут улетать все дальше и дальше от Солнца, причем квадрат их удаления от Солнца должен быть пропорционален времени освоения Галактики человечеством.

Авторы данной статьи решили проверить подобную броуновскую модель расселения человечества в Галактике с помощью карты распределения звезд нашей Галактики, полученной на основе наблюдений космического телескопа оптического диапазона Европейского космического агентства Gaia (Global Astrometric Interferometer for Astrophysics). Главная задача телескопа – составление подробной карты распределения звезд нашей Галактики. В настоящее время по данным Gaia составлена самая детализированная трехмерная карта Млечного пути, содержащая информацию о точном положении и передвижении 1,8 миллиардов звезд.

Каталог звезд Gaia предоставляет следующую информацию о каждой звезде:

- *id* – это номер звезды в каталоге;
- α – прямое восхождение, угол в плоскости небесного экватора между кругом склонений звезды и направлением на точку весеннего равноденствия (это одна из координат второй экваториальной системы, которая используется для описания положения объектов на небесной сфере);
- δ – склонение, угол между направлением на звезду и плоскостью небесного экватора (это другая координата второй экваториальной системы);
- *parallax* – изменение видимого положения звезды относительно удаленного фона в зависимости от положения наблюдателя (измеряется в угловых секундах, причем чем меньше параллакс, тем дальше звезда).

Для моделирования движения звездолета в Галактике удобнее использовать систему координат, в которой основной плос-

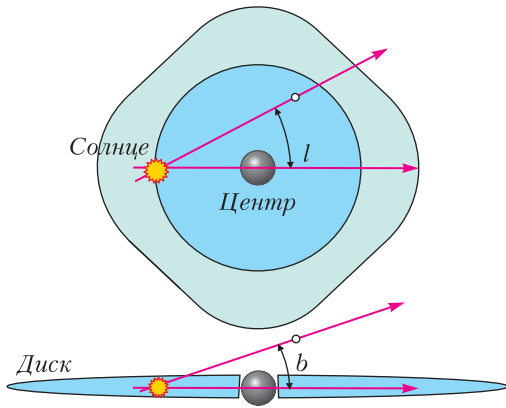


Рис. 3. Галактические координаты

костью является плоскость галактического диска (рис. 3). Это галактическая система координат, и в ней можно задать положение звезды с помощью двух углов:

- l – галактическая долгота, угол между направлением на звезду и направлением на центр Галактики (в проекции на плоскость галактического диска);

- b – галактическая широта, угол между направлением на звезду и плоскостью галактического диска.

Формулы перехода от второй экваториальной системы координат к галактической системе координат можно найти в интернете (https://ru.wikipedia.org/wiki/Галактическая_система_координат).

Для удобства визуального отображения траекторий звездолета все звезды проецируются на галактическую плоскость с помощью соотношения

$$r_{\text{п}} = r \cos b,$$

где $r = \frac{1}{\text{parallax}} \cdot 3,26156$ задается в световых годах. Визуализация звезд на рисунке осуществляется с помощью декартовой системы координат:

$$x = r_{\text{п}} \cos l,$$

$$y = r_{\text{п}} \sin l.$$

В приведенных далее расчетах учитывалось 10000 ближайших к Солнцу звезд, которые заключались в сфере радиусом около 100 световых лет. В качестве «случайно блуждающей частицы» использовался звездолет, который стартовал с Зем-

ли к ближайшей от Солнца звезде и летел дальше с постоянной скоростью. Достигнув светила, звездолет без остановки продолжил полет к новой ближайшей звезде, и подобный режим движения продолжался до границы рассматриваемой области Галактики.

На рисунке 4 представлены результаты расчетов «случайного блуждания» звездолета, летящего в Галактике со скоростью 0,2 с, где c – скорость света. При проведении расчетов сделано два предположения: 1) повторное посещение звезд звездолетом исключено; 2) ближайшие звезды в пространстве распределены случайным образом. Ломаная линия на рисунке 4 показывает зависимость квадрата радиус-вектора звездолета в световых годах от времени полета по мере достижения новых звезд. Прямая линия – аппроксимация ломаной линейным соотношением $r_n^2 = Dt$. На эту же линию хорошо лягут точки, полученные в результате усреднения r_n^2 для большого числа звездолетов, улетающих с Земли по разным направлениям.

Анализ рисунка 4 позволяет сделать два важных вывода. Во-первых, полет звездолета можно рассматривать как процесс случайного блуждания. Хорошо отображена общая линейная тенденция возрастания среднего расстояния со временем. Ломаная линия также хорошо передает случайный характер перемещения звездолета, в котором имеют место резкие изменения направления движения, не меняющие общей линейной тенденции. Во-вто-

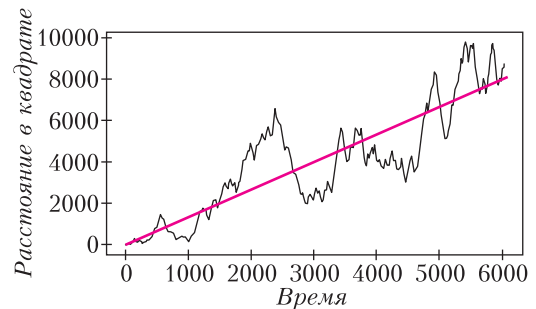


Рис. 4. Зависимость удаления звездолета от времени в предположении «случайного» выбора. Время и расстояние заданы в годах и световых годах соответственно.

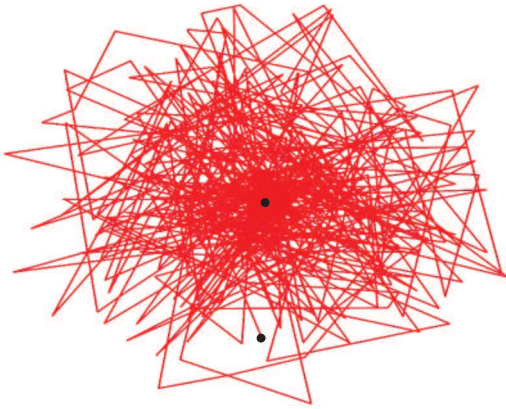


Рис. 5. Проекция межзвездных участков полета звездолета на галактическую плоскость. Черная точка в центре — исходная стартовая точка, совпадающая с Солнцем. Черная точка в нижней части рисунка — положение звезды, на которой заканчивается полет

рых, полученное в ходе расчетов значение коэффициента диффузии, равное 1,33, хорошо согласуется с данными о среднем расстоянии между звездами в Галактике, равном 5 световым годам. Несколько завышенное значение, полученное в представленных расчетах, возможно, связано с запретом звездолету дважды посещать одну и ту же звезду.

Проекция межзвездных участков полета на галактическую плоскость показаны на рисунке 5. Хорошо виден хаотический характер движения звездолета от одной звезды к другой в условиях перелета по кратчайшему расстоянию. С учетом того что общее время полета звездолета составило 6000 лет, за время полета звездолет посетил более 1000 звезд, что составляет 1/10 от общего числа звезд, учитываемых в расчетах.

Представленные на рисунках 4 и 5 расчеты получены в предположении, что звездолет отправляется к следующей звезде без задержки. Учет задержки на время τ приводит к уменьшению угла наклона прямой $r = Dt$, причем в коэффициент диффузии вместо параметра l войдет $l^* = l + \tau t$. Таким образом, время расселения возрастет на величину l^*/l .

Кривые удаления звездолета от Солнца, полученные для трех значений скорости:

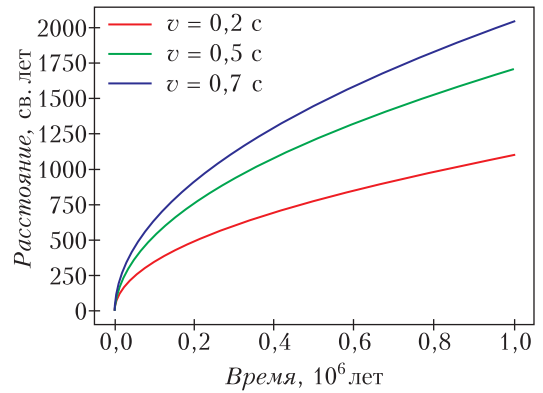


Рис. 6. Зависимости удаления звездолета от Солнца со временем для трех разных скоростей полета

60000, 150000 и 210000 км/с в предположении, что $r = \sqrt{vlt}$, представлены на рисунке 6. Как видно из рисунка, даже для релятивистских скоростей потребуются сотни тысяч и миллионы лет, чтобы достичь звезд, которые находятся на расстоянии более 2000 световых лет.

Результаты расчетов случайного блуждания звездолета в Галактике служат хорошей иллюстрацией особенностей движения броуновских частиц и диффузии, связанной с этим движением. Они также указывают на то, что процесс освоения Галактики человечеством, если он когда-нибудь начнется, скорее всего, будет проходить по диффузионному сценарию. Причем коэффициент диффузии будет зависеть от целого ряда важных факторов, не учтенных в нашем моделировании. Перечислим лишь основные: количество звездолетов, участвующих в освоении Галактики, вероятность того, что полеты к звездам будут успешными, время, требуемое на освоение экзопланет и создание на них необходимой астро-инженерной технологической базы для организации новых экспедиций, и, конечно же, количество экзопланет, пригодных для заселения. Как видно из приведенного списка, одни из этих факторов могут ускорять процесс проникновения людей все дальше и дальше в глубины Галактики, другие, напротив, будут тормозить его и делать все более сложным и медленным.

Корни многочленов и касательные к окружностям

А.РЯБИЧЕВ, К.ЩЕРБАКОВ

Правильный треугольник

Рассмотрим многочлен третьей степени от одной переменной $f(x)$, имеющий три корня. Отметим эти корни на оси абсцисс и проведем через них вертикальные прямые k_1, k_2, k_3 . Легко показать, что существует правильный треугольник $A_1A_2A_3$ с вершинами на соответствующих прямых (рис. 1).

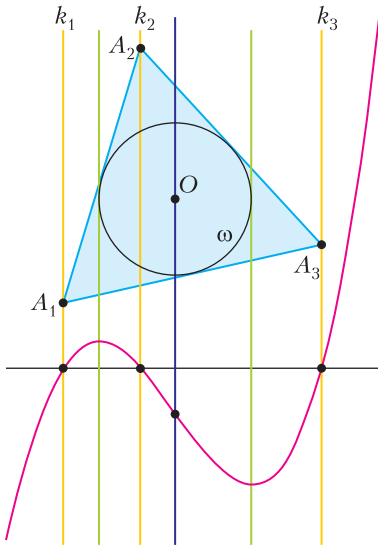


Рис. 1

Оказывается (как было замечено математиком Дэвидом Мейером), если построить вписанную окружность ω треугольника $A_1A_2A_3$, то вертикальные касательные к ω пройдут через точки экстремума $f(x)$, а вертикальная прямая, проходящая через центр ω , пройдет через точку перегиба $f(x)$.

Этот замечательный факт можно пытаться доказать напрямую. Однако часто мате-

матические утверждения легче доказывать, если обобщить их, понять общий «принцип работы». Давайте попробуем сформулировать аналог данного наблюдения для многочленов произвольной степени.

Правильный n -угольник

К сожалению, для многочленов большей степени даже первый шаг построения не проходит.

Задача 1. Если $n \geq 4$, то найдутся n параллельных прямых, для которых не существует правильного n -угольника с вершинами на этих прямых. Докажите это.

Поступим иначе: возьмем правильный n -угольник $A_1 \dots A_n$ и спроецируем его вершины на ось абсцисс, обозначим получившиеся точки через x_1, \dots, x_n (рис. 2; здесь

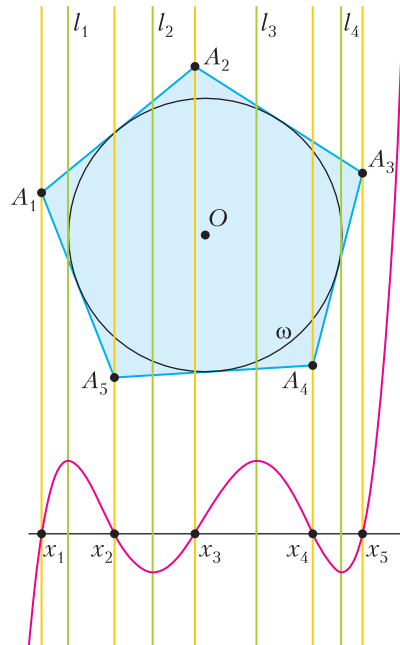


Рис. 2

$n = 5$). Пусть $f(x)$ – многочлен степени n , имеющий набор корней x_1, \dots, x_n (некоторые корни могут оказаться кратными; все многочлены с таким условием пропорциональны, нам подойдет любой из них). Отметим корни производной $f'(x)$ на оси абсцисс и проведем через них вертикальные прямые l_1, \dots, l_{n-1} . Поскольку корни $f(x)$ имеют кратность не больше 2, все эти прямые различны.

Следующий факт можно обнаружить, проделав построения, например, в Geogebra.

Теорема 1. *Самая левая и самая правая прямые из набора l_1, \dots, l_{n-1} касаются окружности ω , вписанной в многоугольник $A_1 \dots A_n$.*

Другими словами, если правильный n -угольник вращается вокруг своего центра, то корни $f(x)$ будут меняться, но самый большой и самый маленький из корней $f'(x)$ остаются неизменными.

Зададимся вопросом: чему соответствуют остальные корни производной $f'(x)$? Мысленно вращая n -угольник, можно заметить, что $f(x)$ имеет кратные корни ровно в те моменты, когда некоторые диагонали n -угольника вертикальны. Это наблюдение диктует нам следующие построения, приводящие к верной гипотезе.

Отметим все окружности $\omega_1, \omega_2, \dots$ с центром в центре O многоугольника $A_1 \dots A_n$ и касающиеся какой-нибудь диагонали многоугольника $A_1 \dots A_n$. Всего мы проведем $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$ окружностей, включая ω .

Теорема 2. *Каждой из окружностей ω, ω_1, \dots касаются две прямые из набора l_1, \dots, l_{n-1} (рис.3).*

При четном n остается одна лишняя прямая, проходящая через O (это следует из соображений симметрии).

Отметим, что теорема 1 является частным случаем теоремы 2. А она, в свою очередь, поскольку $f'(x)$ имеет степень $n-1$, равносильна следующей теореме.

Теорема 3. *Будем вращать правильный многоугольник $A_1 \dots A_n$ вокруг O и в каждый момент строят приведенный многочлен $f(x)$ описанным выше способом. Тогда все коэффициенты получаемого многочлена, кроме свободного члена, не изменяются.*

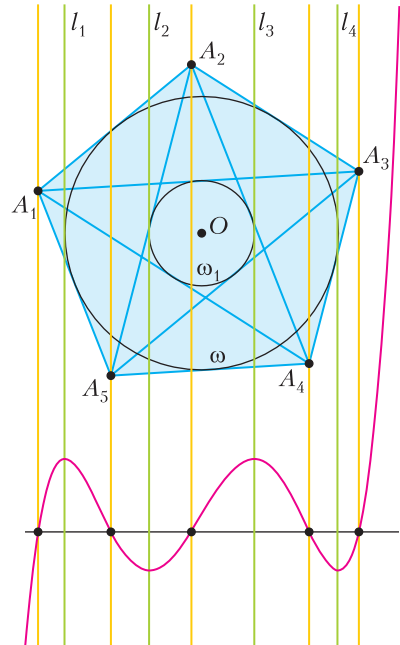


Рис. 3

Действительно, условие из теоремы 2 однозначно определяет корни $f'(x)$, а значит, и сам $f'(x)$, если $f(x)$ приведенный. Из этого следует теорема 3.

Наоборот, условие теоремы 3 фиксирует корни $f'(x)$ при вращении многоугольника $A_1 \dots A_n$. Заметим, что каждая его диагональ в некоторый момент становится вертикальной, тогда она по построению $f(x)$ проходит через его кратный корень, т.е. через экстремум, откуда следует теорема 2.

Начнем с прямого доказательства теоремы 3, требующего умения работать с комплексными числами.

Рассмотрим комплексную плоскость. Пусть вершины многоугольника $A_1 \dots A_n$, пронумерованные против часовой стрелки, лежат на единичной окружности и выражаются комплексными числами a_1, \dots, a_n , причем $a_1 = 1$. Проекция единичного по модулю комплексного числа a на ось абсцисс равна $\text{Re}(a) = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right)$.

Задача 2. Докажите это равенство.

Таким образом, $f(x)$ принимает вид
$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{1}{a_1} \right) \right) \cdot \dots \cdot \left(x - \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) \right).$$

Вращения в комплексной плоскости задаются умножением на комплексное число t , по модулю равное 1. (За подробным объяснением этого факта отсылаем читателей к статье [1].) Тогда вершины повернутого многоугольника выражаются числами ta_1, \dots, ta_n , а соответствующий многочлен имеет вид

$$f_t(x) = \left(x - \frac{1}{2} \left(ta_1 + \frac{1}{ta_1} \right)\right) \cdot \dots \cdot \left(x - \frac{1}{2} \left(ta_n + \frac{1}{ta_n} \right)\right).$$

Теорема 3 равносильна тому, что все коэффициенты $f_t(x)$, кроме свободного члена, не зависят от t . Докажем это.

Задача 3. Докажите, что коэффициент при x^{n-1} в $f_t(x)$ равен нулю для всех t .

Рассмотрим коэффициент в $f_t(x)$ при x^{n-k} , где $0 < k < n$. Он принимает вид

$$\pm \frac{1}{2^k} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left(ta_{i_1} + \frac{1}{ta_{i_1}} \right) \cdot \dots \cdot \left(ta_{i_k} + \frac{1}{ta_{i_k}} \right).$$

Сгруппируем эту сумму по степеням t (которые изменяются от $-k$ до k) и рассмотрим коэффициент при t^m , $m \neq 0$. Он будет состоять из суммы всевозможных слагаемых вида

$$\frac{a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_j}}{a_{i_{j+1}} \cdot \dots \cdot a_{i_k}},$$

где $m = j - (k - j)$, а индексы выбраны и разбиты на множества $i_1 < \dots < i_j$ и $i_{j+1} < \dots < i_k$ всеми возможными способами (число таких способов равно $C_n^k \cdot C_k^j$). Обозначим этот коэффициент через S . Вообще говоря, число S является комплексным.

Пусть $\beta = e^{2\pi i/n}$ – корень n -й степени из единицы. Заменим в сумме S каждое a_i на $a_i\beta$. Очевидно, S при такой подстановке превратится в $S\beta^m$. Но, с другой стороны, $a_1\beta = a_2$, $a_2\beta = a_3$, ..., $a_n\beta = a_1$, поэтому S не изменится. Следовательно, раз $\beta^m \neq 1$, имеем $S = 0$. Итак, коэффициенты при t^m , $m \neq 0$, равны нулю. Значит, коэффициенты при x^{n-k} , $0 < k < n$, не зависят от t . Что и требовалось доказать.

Использованное нами рассуждение с симметрическими многочленами довольно стандартно. Вот другой, более простой пример.

Задача 4. Пусть $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ – вершины правильного n -угольника с центром в нуле. Докажите, что

$$\text{а) } \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_k} = 0 \text{ для любого } k = 1, \dots, n-1;$$

$$\text{б) } \sum_{i \neq j} a_i^2 \cdot a_j = 0 \text{ при } n > 3.$$

Многочлены Чебышева

Оказывается, есть более явный способ задать многочлен $f_t(x)$, и это сильно упрощает рассуждение.¹

Обозначим через \tilde{t} аргумент комплексного числа t . По построению $f_t(x)$ обнуляется в n (с учетом кратности) точках вида $x = \cos(\tilde{t} + 2\pi k/n)$ и только в них. Мы строим $f_t(x)$ по его корням, а они все находятся на отрезке $[-1; 1]$, поэтому можно положить $x = \cos y$. Тогда равенство $f_t(\cos y) = 0$ равносильно равенству

$$\cos(y) = \cos(\tilde{t} + 2\pi k/n),$$

что выполняется ровно тогда же, когда верно равенство $\cos(ny) = \cos(n\tilde{t})$. Таким образом, у функции $f_t(\cos y)$ корни такие же, как и у уравнения

$$\cos(ny) - \cos(n\tilde{t}) = 0.$$

Теорема 4. Для каждого n существует единственный многочлен $T_n(x)$ такой, что

$$T_n(\cos y) = \cos ny.$$

Многочлены T_n называются *многочленами Чебышева первого рода*. Их существование можно вывести из формулы Муавра:

$$(\cos y + i \sin y)^n = \cos(ny) + i \sin(ny).$$

Раскрывая скобки в левой части по биному и разделяя выражение на действительную и мнимую части, получим, что $\cos(ny)$

¹ Авторы благодарят А.Заславского и А.Устинова за это ценное замечание.

выражается как некоторый многочлен от функций $\cos y$ и $\sin y$. Остается заметить, что $\sin y$ входит только в четных степенях, и применить замену $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$.

Иначе теорему 4 можно доказать по индукции, используя при $n \geq 1$ соотношение

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Задача 5. Докажите это соотношение.

Задача 6. Докажите, что старший коэффициент в $T_n(x)$ равен 2^{n-1} .

Таким образом, и многочлен $f_t(x)$, и многочлен $\frac{1}{2^{n-1}}(T_n(x) - \cos(n\tilde{t}))$ имеют степень n и обнуляются в одних и тех же n точках (с учетом кратности). Из задачи 6 следует, что они приведенные. Это значит, что они совпадают:

$$f_t(x) = \frac{1}{2^{n-1}}(T_n(x) - \cos(n\tilde{t})).$$

Из полученного равенства видно, что лишь свободный член $f_t(x)$ зависит от t . Это дает еще одно доказательство теоремы 3.

Многочлены Чебышева обладают массой интересных свойств. Для дальнейшего ознакомления с ними отсылаем читателей к статьям [2], [3] и [4].

Дальнейшие вопросы и замечания

Из задачи 2 можно вывести следующее обобщение утверждения из первого разде-

ла нашей статьи про центр треугольника.

Задача 7. Проекция центра многоугольника O на ось абсцисс совпадает с корнем $f^{(n-1)}(x)$.

Также отметим следующий факт.

Задача 8. Коэффициенты при степенях x^{n-3}, x^{n-5}, \dots в многочлене $f(x)$ равны нулю (кроме свободного члена, если n нечетно).

Как мы понимаем из теоремы 3, вторая и последующие производные многочлена $f(x)$ также не меняются при поворотах многоугольника $A_1 \dots A_n$.

Вопрос. Проведем вертикальные прямые l'_1, \dots, l'_{n-2} через корни $f''(x)$, отмеченные на оси абсцисс. Как по $A_1 \dots A_n$ построить окружности, касающиеся l'_1, \dots, l'_{n-2} , не прибегая к функции $f(x)$?

Аналогичные вопросы можно ставить и для остальных производных многочлена $f(x)$. Авторам на момент написания статьи ответы на них неизвестны.

Литература

1. С. Дориченко. Комплексные числа. – «Квант», 2008, №5.
2. Н. Васильев, А. Зелевинский. Многочлены Чебышева и рекуррентные соотношения. – «Квант», 1982, №1.
3. С. Гашков. Задача Чебышева и тригонометрические многочлены. – «Квант», 1990, №6.
4. С. Табачников. Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля. – «Квант», 1990, №6.

ЛЮБОПЫТНО, ЧТО...

Чтобы найти уравнение касательной к многочлену $P(x)$ в некоторой точке x_0 , можно пойти прямым путем: найти производную в x_0 , она даст угловой коэффициент. После чего написать уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0, P(x_0))$, с полученным угловым коэффициентом.

Но можно поступить иначе. Разделим $P(x)$ на $(x - x_0)^2$ с остатком:

$$P(x) = (x - x_0)^2 Q(x) + R(x).$$

Тогда $y = R(x)$ – это и есть уравнение касательной!

Докажем этот сколь простой, столь и неожиданный факт.

Заметим, что прямая $y = R(x)$ проходит через нужную точку. Кроме того,

$P'(x) = 2(x - x_0)Q(x) + (x - x_0)^2 Q'(x) + R'(x)$, значит,

$$P'(x_0) = R'(x_0).$$

Но $R(x)$ – многочлен первой степени, его производная – коэффициент при x . Значит, прямая $y = R(x)$ имеет угловой коэффициент, совпадающий с производной $P(x)$ в точке x_0 , следовательно, она является касательной.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: *math@kvant.ras.ru* и *phys@kvant.ras.ru* соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи M2780, M2781 предлагались на XVII Южном математическом турнире.

Задачи M2778–M2781, Ф2785–Ф2788

M2778. На координатной плоскости (рис. 1) нарисованы парабола (график квадратичной функции) и гипербола (график дроб-

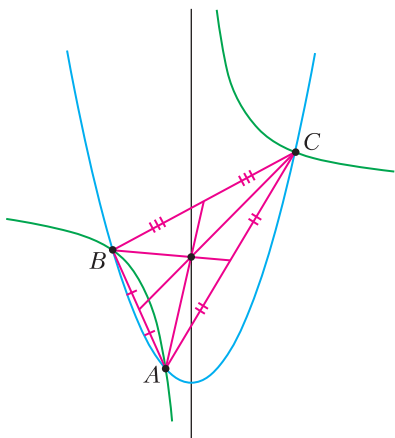


Рис. 1

но-линейной функции). При этом графики пересекаются в трех точках A , B , C , а ось параболы является асимптотой гиперболы. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABC лежит на оси параболы.
Фольклор

M2779. Докажите, что для любого натурального k найдется натуральное n такое, что

$$\begin{aligned} \text{НОК}(1, 2, 3, \dots, n) &= \\ &= \text{НОК}(1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots, n+k). \end{aligned}$$

Фольклор

M2780. Хроматическим числом графа называется минимальное количество цветов, в которое можно покрасить его вершины так, чтобы любые две вершины, соединенные ребром, были покрашены в разные цвета. Дано натуральное число $n \geq 3$ и граф G с хроматическим числом $\chi(G) = n$, у которого больше чем n вершин. Докажите, что в G найдутся два не пересекающихся по вершинам подграфа G_1 и G_2 такие, что $\chi(G_1) + \chi(G_2) \geq n + 1$.

В. Дольников

M2781. Пусть точка A_1 – середина меньшей дуги BC описанной около остроугольного треугольника ABC окружности (рис. 2). Точку A_1 отразили относительно стороны BC , а затем ее образ отразили относительно биссектрисы угла BAC и

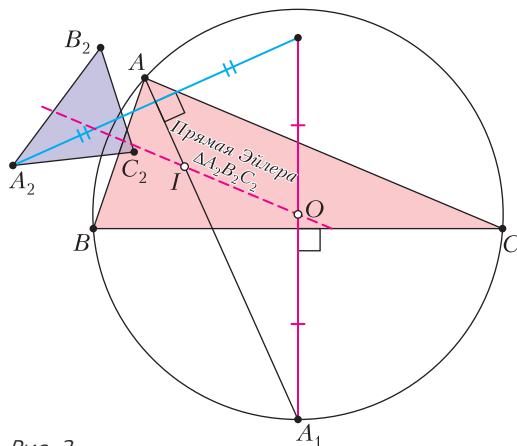


Рис. 2

получили точку A_2 . Аналогично получили точки B_2 и C_2 . Докажите, что прямая Эйлера треугольника $A_2B_2C_2$ проходит через центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC .

А.Терёшин

Ф2785. Астроном-любитель Вася вычислил, что 21.03.2103 года ожидается интересное явление: с Земли будет видно, как Венера пройдет на фоне Солнца по его диаметру, и начнется это прохождение в 08:00:00 по московскому времени. В течение какого времени смогут наблюдать это явление жители Москвы, Нью-Йорка и Пекина, если им повезет и небо над их головами будет безоблачным? Географические координаты Москвы: $55^\circ 45' 21''$ с.ш., $37^\circ 37' 04''$ в.д.; Нью-Йорка: $40^\circ 42'$ с.ш., $-74^\circ 0'$ в.д.; Пекина: $39^\circ 54' 27''$ с. ш., $116^\circ 23' 49.2''$ в.д. Известно, что Венера делает оборот вокруг Солнца за 243 земных суток, а Земля за 365,25 суток. Среднее расстояние от Венеры до Солнца 108 млн км, а среднее расстояние от Земли до Солнца 150 млн км.

В.Астрономов

Ф2786. Жесткую конструкцию с указанными на рисунке 3 значениями масс точечных массивных грузов на концах и длин участков невесомых стержней удерживают в неподвижности, а выпрямленная длинная невесомая и нерастяжимая веревка прикреплена верхним концом к потолку и занимает вертикальное положение. Конструкцию отпускают, не придав ей движения. С какими ускорениями будут двигаться грузы сразу после освобождения?

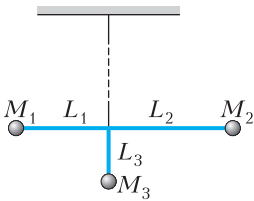


Рис. 3

ных массивных грузов на концах и длин участков невесомых стержней удерживают в неподвижности, а выпрямленная длинная невесомая и нерастяжимая веревка

Д.Грузов

Ф2787. Точки A , B , C находятся на оси симметрии однородно заряженной полусферы (рис. 4): точка A вблизи «дна» полусферы, точка B в ее центре, точка C на расстоянии радиуса полусферы от точки B . Из точки A стартует с нулевой началь-

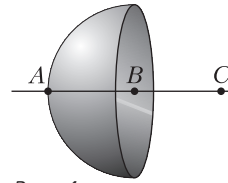


Рис. 4

ной скоростью заряженная частица. Знаки всех зарядов одинаковы. В точке B частица движется со скоростью v_B . Найдите скорость v_C частицы в точке C .

В.Плис

Ф2788. На заходе или восходе видимая форма полной Луны мало (но все-таки заметно) отличается от круга при наблюдении с поверхности Земли. А вот при



Рис. 5

съемке этого же события с борта космической станции Луна приобретает форму «булочки», такой, что радиус кривизны в ее верхней (над Землей) части гораздо меньше радиуса кривизны в нижней (обращенной к Земле) стороне (рис. 5). Как это можно объяснить?

С.Лунин

Решения задач М2762–М2769, Ф2769–Ф2776

М2762. Сумма $n = 100$ ненулевых вещественных чисел (не обязательно различных) равна нулю. Для каждого из способов выбрать несколько (не менее одного)

из этих чисел подсчитали сумму выбранных чисел и все полученные суммы выписали в строку в невозрастающем порядке. Первое число в строке равно S . Найдите наименьшее возможное значение второго числа в строке.

Ответ: $\frac{49S}{50}$.

Пусть $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_m > 0 > x_{m+1} \geq x_{m+2} \geq \dots \geq x_n$ – данные числа. По условию $x_1 + x_2 + \dots + x_m = S = -(x_{m+1} + x_{m+2} + \dots + x_n)$. Если $m \geq n/2 = 50$, то x_m не превышает среднего арифметического чисел x_1, x_2, \dots, x_m , откуда $x_m \leq \frac{S}{m} \leq \frac{S}{50}$. Тогда

оценим сумму S' , следующую по величине после S , так:

$$S' \geq x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1} = S - x_m \geq S - \frac{S}{50} = \frac{49S}{50}.$$

Иначе $m \leq n/2$, тогда $n - m \geq n/2$ и, значит, x_{m+1} не меньше среднего арифметического чисел x_{m+1}, \dots, x_n , откуда $x_{m+1} \geq -\frac{S}{n-m} \geq -\frac{S}{50}$. Тогда оценим S' так: $S' \geq x_1 + x_2 + \dots + x_m + x_{m+1} = S + x_{m+1} \geq S - \frac{S}{50} = \frac{49S}{50}$.

Остается привести пример, в котором достигается это значение: 50 данных чисел равны $\frac{S}{50}$, а остальные 50 равны $-\frac{S}{50}$.

А. Голованов

M2763. Дано натуральное число $k \geq 2$. Докажите, что натуральные числа с четной суммой цифр дают все возможные остатки при делении на k .

Считаем, что $k \geq 2$. Покажем, что требуемым свойством обладают как числа с четной, так и числа с нечетной суммой цифр. Через $S(n)$ обозначаем сумму цифр числа n . Теперь можно считать, что k не делится на 10 (иначе реализуем все остатки по модулю $k/10$ в обеих четностях сумм цифр, а затем припишем к ним последнюю цифру всеми способами).

Если предпоследняя цифра в k – девятка,

то в $11k$ уже нет. Обозначим через l то из чисел k и $11k$, у которого предпоследняя цифра не 9. Пусть s – последняя цифра l , а t – количество цифр в l .

Если $S(l)$ нечетна, то любой остаток a реализуется как a и $\overline{1a}$, у этих чисел суммы цифр разной четности.

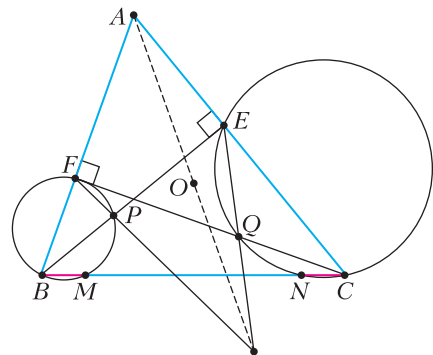
Если $S(l)$ четна, то для данного остатка a выберем $(t+1)$ -значное число M , начинающееся с цифры $10-s$ и дающее остаток a при делении на k (такое есть!). Тогда в сумме $M + 10^t l$ будет ровно один перенос, поэтому числа M и $M + 10^t l$ имеют разные четности сумм цифр и оба дают остаток a при делении на k .

Тем самым, наше утверждение доказано и задача решена.

Можно оценить, насколько велики числа в приведенных конструкциях, и понять, что в условии задачи достаточно брать натуральные числа с четной суммой цифр и не превосходящие $200k^2$. Именно в такой усиленной формулировке задача предлагалась на олимпиаде участникам учебно-тренировочных сборов кандидатов в команду на Международную математическую олимпиаду.

П. Козлов, И. Богданов

M2764. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BE , CF (см. рисунок). Пусть O – центр описанной окружности. Точки M и N выбраны на стороне BC так, что $BM = CN$. Прямая BE пересекает окружность (MBF) вторично в точке P , а прямая CF пересекает окружность (NCE) вторично в точке Q .



Докажите, что прямые PF , QE и AO пересекаются в одной точке.

Из вписанности следует $\angle FPB = \angle FMB$, значит, $\angle FPE = \angle FMC$. С другой стороны, $\angle FEP = \angle FCM$ (из вписанности $BCEF$), отсюда следует подобие $EPF \sim CMF$ и, следовательно, $\frac{PE}{MC} = \frac{EF}{CF}$.

Аналогично, $\frac{FQ}{BN} = \frac{EF}{BE}$. Значит, поскольку

ку $MC = BN$, имеем $\frac{PE}{BE} = \frac{QF}{CF}$ (т.е. точки

P и Q делят высоты BE и CF в одном и том же отношении). С учетом $\frac{BE}{CF} = \frac{AE}{AF}$ получим $\frac{PE}{FQ} = \frac{AE}{AF}$, следовательно, треуголь-

ники AEP и AFQ подобны. Получаем $\angle FAQ = \angle EAP$, иначе говоря, прямые AP и AQ симметричны относительно биссектрисы угла BAC .

Теперь решение можно завершить, используя *теорему об изогоналях* (см., например, статью А.Куликова и Д.Прокопенко «Теорема об изогоналях» в «Кванте» № 4, 5 за 2018 г.) для четырехсторонника $EPFQ$ и центра A : пары прямых AE и AF , AP и AQ изогональны в угле BAC (т.е. симметричны относительно биссектрисы угла BAC). Значит, прямые AN и AG , где $N = PE \cap QF$ и $G = PF \cap QE$, также изогональны. Но N – ортоцентр треугольника ABC , а, как известно (и несложно посчитать в углах), прямые AN и AO изогональны относительно угла BAC . Получается, что прямые AO и AG совпадают, что завершает решение.

Из решения видно, что задачу можно обобщить: основания высот E и F можно заменить на любые точки E и F на сторонах AC и AB такие, что точки B , C , E , F лежат на одной окружности, а точку O – на точку, изогонально сопряженную с точкой $PE \cap QF$.

Отметим также, что применение теоремы об изогоналях может быть заменено вычислениями, например с помощью техники двойных отношений.

Люю Донг

M2765*. Даны 101 монета и двухчашечные весы. За одно взвешивание можно сравнить веса двух монет. Назовем большинством подмножество из 51 монеты одинакового веса. За какое наименьшее количество взвешиваний можно с гарантией определить, существует ли среди данных монет большинство?

Ответ: за 150 взвешиваний.

Алгоритм

Этап 1. На этом этапе мы ищем такую монету, что если большинство есть, то она в нем. Такую монету будем называть *этапоном*.

Будем поддерживать следующую ситуацию: монеты, уже участвовавшие во взвешиваниях, разбиваются на *группы*. В каждой группе, кроме, возможно, одной, ровно половина монет имеет одинаковый вес a , а остальные имеют веса, отличные от a (про их взаимные соотношения может быть не известно ничего). Оставшаяся группа (если она есть, назовем ее *исключительной*) устроена так же, но одинаковых монет в ней больше половины. Вначале групп просто нет.

Если исключительной группы нет, сравним две новые монеты. Эти монеты образуют новую группу: обычную, если они не равны, и исключительную, если равны.

Если исключительная группа есть и большинство монет в ней имеют вес a , сравним с одной монетой веса a новую монету. При любом исходе эта монета добавляется в группу (которая может перестать быть исключительной).

Этап заканчивается либо когда все монеты попали в группы (из соображений четности одна из них должна быть исключительной), либо когда исключительной группы нет, а осталась одна не взвешенная монета. Тогда можно считать, что она образует исключительную группу.

Итого, в конце этапа в каждой из обычных групп не больше половины монет одного веса, а в исключительной – больше половины монет какого-то веса a . Значит, эти монеты веса a и являются эталонами.

Заметим, что в каждой группе граф взвешиваний является деревом. Значит, если

образовалось k обычных и одна исключительная группа, то взвешиваний мы провели $100 - k$.

Этап 2. Осталось выяснить, какие монеты совпадают с эталоном, — это позволит ответить на вопрос о большинстве. Про все монеты исключительной группы мы это уже знаем. Для каждой из k обычных групп, если в ней $2t$ монет, на нее требуется $t + 1$ взвешиваний. Значит, если в исключительной группе y монет, то нам нужно еще $(101 - y)/2 + k \leq 50 + k$ взвешиваний. Итого мы справимся за $(100 - k) + (50 + k) = 150$ взвешиваний.

Оценка

По любому алгоритму взвешиваний мы, действуя «со стороны весов», укажем, какие (возможные!) результаты они могут показывать, чтобы требуемое не удалось менее чем за 150 взвешиваний.

Время от времени мы будем объявлять какую-то монету *отброшенной*, называя ее при этом либо *слишком тяжелой*, либо *слишком легкой*. Это означает, что слишком тяжелая монета тяжелее каждой, кроме объявленных слишком тяжелыми ранее (аналогично со слишком легкой). Это не будет противоречить результатам уже сделанных взвешиваний и автоматически определит результат любого дальнейшего взвешивания любой монеты с отброшенной, так что такие действия неинформативны, и мы считаем, что их не происходит. Ясно, что отброшенные монеты не принадлежат большинству.

Все неотброшенные (*активные*) монеты будут делиться на *группы* равных монет (про которые больше ничего не известно) и *пары* монет; в каждой паре монеты сравнивались и одна оказалась тяжелее другой, а больше про эти монеты ничего не известно. Исходно есть 101 группа по одной монете. Обозначим через d суммарное количество пар и монет в группах в настоящий момент.

Если монета a из пары (для определенности более тяжелая в паре) сравнивается с активной монетой b , мы говорим, что a тяжелее b и объявляем a слишком тяжелой (а ее бывшую парную — группой из одной

монеты). При этом мы сопоставляем монете a два взвешивания, не дающих информации об оставшихся активными монетах: взвешивание из ее бывшей пары, а также текущее. (Если обе взвешиваемые монеты из пар, то в качестве a выбирается одна из них произвольно.)

Осталось разобраться со взвешиваниями, в которых участвуют монеты из групп (ясно, что из разных). Пока $d > 51$, каждая из этих групп будет состоять из одной монеты, и при таком взвешивании весы будут отвечать, что монеты не равны, создавая из них пару. Только при этой операции значение d уменьшается на 1, при всех остальных оно остается неизменным.

Это закончится, когда d станет равным 51. Начиная с этого момента, если сравниваются монеты из разных групп, то весы говорят, что они равны. При этом d остается равным 51.

Если еще не организовалось группы из 51 монеты, возможны две ситуации: а) монеты в каждой группе имеют свой вес, все остальные монеты различны (и большинства нет), б) монеты во всех группах весят поровну, и в каждой паре вес одной из монет равен тому же (большинство есть, так как $d \geq 51$). Значит, нельзя определить требуемое.

Когда же группа из 51 монеты образуется, это значит, что $d = 51$; следовательно, кроме этой группы, активных монет нет. Для того чтобы эта группа образовалась, потребовалось 50 взвешиваний пар монет из этой группы. Кроме них, каждой отброшенной монете (коих 50) сопоставлено еще по два взвешивания. Итого произошло хотя бы 150 взвешиваний.

К. Кноп

M2766. Дано натуральное число n . Поле для «Мастер-судоку» представляет собой $n(n + 1)/2$ клеток квадрата $n \times n$, лежащих на главной диагонали либо под ней. Мастер загадывает n клеток этого поля, по одной в каждом столбце, и сообщает ученику про каждую строку, сколько загаданных клеток лежит в ней (ученик также в курсе, что в каждом столбце

ровно одна загаданная клетка). Ученик должен иметь возможность по этой информации наверняка восстановить клетки, загаданные Мастером. Сколько различных таких sudoku может составить Мастер?

Ответ: 2^{n-1} .

Занумеруем строки сверху вниз и столбцы слева направо. Все загаданные клетки нижней строки расположены одним блоком, примыкающим к правой границе. Действительно, клетка (n, n) (в правом нижнем углу) точно загадана.

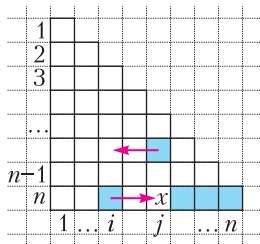


Рис. 1

Если бы нашлись такие $i < j$, что клетка (n, i) загадана, а клетка (n, j) – нет (рис. 1), то можно заменить две загаданные клетки в столбцах i и j на две другие клетки в тех же двух строках и тех же двух столбцах, при этой замене количество клеток, загаданных в каждой строке, не изменится (т.е. такое sudoku не годится).

Итак, пусть в нижней строке загаданы клетки $(n, j + 1), (n, j + 2), \dots, (n, n)$, а клетки $(n, 1), \dots, (n, j)$ – нет. Тогда в строках $j + 1, \dots, n - 1$ нет загаданных клеток, иначе такую загаданную клетку вместе с клеткой $(n, j + 1)$ можно было бы заменить на две другие клетки в тех же двух строках и тех же двух столбцах. Мысленно вычеркнем последние $n - j$ строк и получим sudoku, удовлетворяющее условию, для поля sudoku с j строками. Продолжая далее, получим sudoku, которое однозначно задается загаданными клетками на главной диагонали: если на главной диагонали загаданы клетки $(j_1, j_1), (j_2, j_2), \dots, (j_k, j_k)$ для некоторой

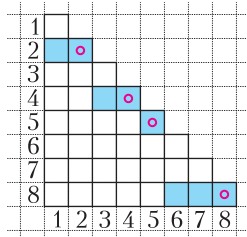


Рис. 2

последовательности $0 = j_0 < j_1 < j_2 < \dots < j_k = n$, то все загаданные клетки расположены в строках j_1, j_2, \dots, j_k , причем в строке j_t – в последних $(j_t - j_{t-1})$ клетках (на рисун-

ке 2 – пример для $n = 8, \{j_1, \dots, j_k\} = \{2, 4, 5, 8\}$). Найденных sudoku 2^{n-1} штук, так как каждая диагональная клетка, кроме (n, n) , может входить или нет в множество $\{j_1, \dots, j_k\}$.

Наоборот, каждое sudoku указанного выше вида однозначно восстанавливается по количеству загаданных клеток в строках – это восстановление легко провести по строкам сверху вниз (отбрасывая столбцы, в которых уже найдены клетки, слева направо).

П. Кожевников

M2767. Несложно доказать, что в прямоугольном треугольнике сумма радиусов вписанной и трех внеписанных окружностей равна периметру. Докажите, что верно и обратное утверждение.

Используем стандартные обозначения для элементов треугольника: a, b, c – длины сторон, p – полупериметр, α, β, γ – углы, R – радиус описанной окружности, r, r_a, r_b, r_c – радиусы вписанной и внеписанных окружностей, I, I_a, I_b, I_c – их центры. В любом треугольнике

$$r_a + r_b = c \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}. \tag{1}$$

Это равенство можно установить непосредственно, подставив известные формулы $r_a = \frac{S}{p - a}, r_b = \frac{S}{p - b}$ и выполнив несложные тригонометрические преобразования. Геометрическое объяснение равенства (1) состоит в следующем. Известно, что середина N дуги ACB описанной окружности является серединой отрезка $I_a I_b$, а значит, расстояние от нее до прямой AB равно среднему арифметическому расстояний от I_a и I_b до AB , т.е. равно $\frac{r_a + r_b}{2}$. С другой стороны, из равнобедренного треугольника ANB с углом $\angle ANB = \gamma$ это расстояние равно $\frac{c}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$. Также верно

$$r + r_c = (a + b) \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}. \tag{2}$$

Это можно доказать похожим образом, пользуясь тем, что середина отрезка II_c – это середина дуги AB описанной окружности.

Итак, в любом треугольнике

$$r + r_a + r_b + r_c = (a + b) \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + c \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}. \quad (3)$$

Нам дано, что $r + r_a + r_b + r_c = a + b + c$, значит,

$$a + b + c = (a + b) \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + c \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2},$$

$$(a + b) \left(1 - \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right) = c \left(\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} - 1 \right).$$

Если $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 1$, то $\frac{\gamma}{2} = 45^\circ$ и $\gamma = 90^\circ$. Иначе,

сокращая на $\left(1 - \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right)$, имеем $a + b = c \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$,

или

$$\frac{a + b}{c} = \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}. \quad (4)$$

Используя теорему синусов, преобразуем:

$$\begin{aligned} \frac{a + b}{c} &= \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = \\ &= \frac{2 \sin \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2} \right) \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}. \end{aligned}$$

Теперь видим, что из (4) следует равенство $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \cos \frac{\gamma}{2}$, откуда имеем (так как оба аргумента из интервала $(-90^\circ; 90^\circ)$)

$$\pm \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}, \text{ следовательно,}$$

$\alpha = 90^\circ$ или $\beta = 90^\circ$, что завершает решение.

Возможны и другие подходы к задаче, например, с использованием известного равенства $r_a + r_b + r_c = r + 4R$.

В завершение укажем еще несколько соотношений в прямоугольном треугольнике (далее считаем, что c — гипотенуза): $r = p - c$, $r_c = p$, $r_a = p - b$, $r_b = p - a$, откуда, в частности, $r + r_a + r_b = r_c$. Далее, отсюда несложно получить соотношение $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 + r^2 = 2c^2$. Домножив на π и учитывая, что $c = 2R$, этому равенству

можно придать следующий геометрический смысл: сумма площадей вписанного круга и внеписанных кругов прямоугольного треугольника равна восьми площадям описанного круга.

И. Вайнштейн

M2768*. Дано натуральное число n . Парно различные ненулевые целые числа a_1, \dots, a_n таковы, что число $(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)$ делится на число $a_1 a_2 \dots a_n$ при любом целом x . Найдите наибольшее возможное значение a_n .

Ответ: $\frac{n!}{b!c!}$, где $b = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, $c = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$.

Положим $b = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, $c = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$, $T = \frac{n!}{b!c!}$.

Оценка. Рассмотрим многочлен $f_0(x) = \frac{x + a_1}{a_1} \dots \frac{x + a_n}{a_n}$ со старшим коэффициентом $q = \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n}$. Он принимает в целых точках целые значения. Значит, то же

верно для разностного многочлена $f_1(x) = f(x + 1) - f(x)$ степени $n - 1$ со старшим коэффициентом nq . Продолжая далее с разностными многочленами $f_2(x) = f_1(x + 1) - f_1(x)$ и т.д., получаем на n -м шаге, что $f_n(x) \equiv n!q - (\text{ненулевое})$

целое число, поэтому $|a_1 a_2 \dots a_n| = 1/|q| \leq n!$. С другой стороны, $|a_1 a_2 \dots a_{n-1}|$ не меньше произведения $n - 1$ самых маленьких по абсолютной величине ненулевых целых чисел, т.е. не меньше $b!c!$. Отсюда $a_n \leq \frac{n!}{b!c!} = T$.

Пример. Ясно, что $T > b$. Рассмотрим числа $-1, -2, \dots, -c, 1, 2, \dots, b, T$. Они различны, и мы утверждаем, что они удовлетворяют условию. Произведение этих чисел равно $(-1)^c n!$, поэтому нужно доказать, что произведение

$f(x) = (x - 1)(x - 2) \dots (x - c) \times (x + 1)(x + 2) \dots (x + b) \cdot (x + T)$

кратно $n!$ при любом целом x . Имеем

$$f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-c) \times \\ \times (x+1)(x+2)\dots(x+b) + T(x-1)(x-2)\dots \\ \dots(x-c) \cdot (x+1)(x+2)\dots(x+b).$$

Первое слагаемое кратно $n!$ как произведение n последовательных целых чисел, второе кратно $T \cdot c! \cdot b! = n!$ как произведение числа T , c последовательных целых чисел и b последовательных целых чисел.

Ф.Петров, К.Сухов

M2769*. Вписанная окружность Ω треугольника ABC касается сторон BC , CA и AB в точках D , E и F соответственно (рис. 1). Пусть окружность ω касается

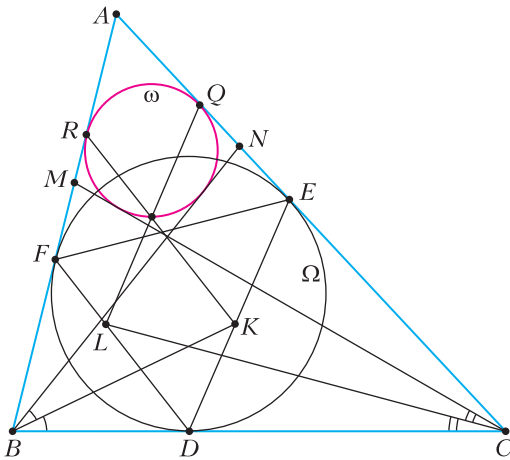


Рис. 1

отрезков CA и AB в точках Q и R соответственно, а точки M и N выбраны на отрезках AB и AC соответственно так, что отрезки CM и BN касаются ω . Биссектрисы углов NBC и MCB пересекают соответственно отрезки DE и DF в точках K и L . Докажите, что прямые RK и QL пересекаются на ω .

В качестве леммы используем задачу M2615 (см. «Квант» № 8 за 2020 г.):

В треугольнике ABC вписанная окружность касается сторон CA и AB в точках B_1 и C_1 соответственно. На стороне AB выбрана произвольная точка D . Точка L – центр вписанной окружности треугольника BCD . Пусть биссектриса угла ACD пересекает прямую B_1C_1 в точке M . Тогда $\angle CML = 90^\circ$.

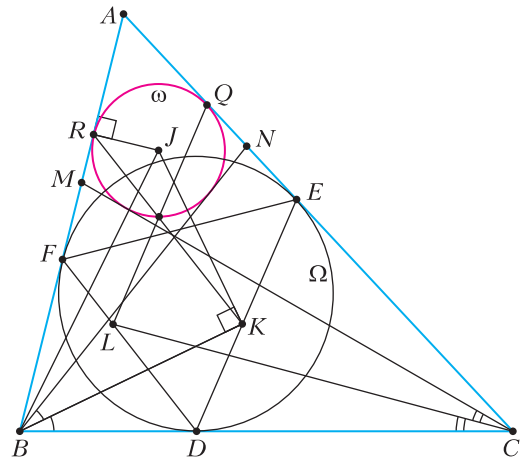


Рис. 2

Пусть I и J – центры окружностей Ω и ω . Из леммы следует, что $\angle JKB = 90^\circ$ (рис. 2). Далее, так как $JR \perp AB$, четверка точек B, R, J, K лежит на одной окружности (с диаметром BJ). Отсюда

$$\begin{aligned} \angle JRK &= \angle JBK = \angle JBN + \angle NBK = \\ &= \frac{1}{2} \angle ABN + \frac{1}{2} \angle NBC = \frac{1}{2} \angle ABC. \end{aligned}$$

Но тогда

$$\begin{aligned} \angle BRK &= 90^\circ - \angle JBK = \\ &= 90^\circ - \frac{1}{2} \angle ABC = \angle BFD, \end{aligned}$$

Получается, что $RK \parallel FD$. Отсюда следует, что гомотетия с центром A , переводящая Ω в ω , переводит прямую FD в прямую RK (поскольку гомотетия переводит F в R , а прямую переводит в параллельную ей прямую). Значит, вторая точка пересечения RK и ω – это образ точки D при указанной выше гомотетии. Повторяя все предыдущие рассуждения, понимаем, что прямая QL также проходит через ту же точку. Этим завершается решение.

В заключение укажем в данной конструкции еще несколько интересных фактов.

Пусть $P = BN \cap CM$, так что $X = CL \cap BK$ – центр вписанной окружности треугольника PBC (рис. 3). В силу описанности $ANPM$ имеем $AC - AB = PC - PB$, откуда несложным подсчетом отрезков касательных можно вывести, что вписанная окружность треугольника PBC касается BC так-

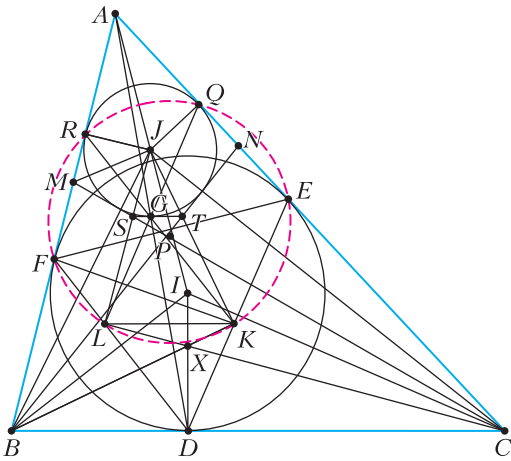


Рис. 3

же в точке D . Отсюда $XD \perp BC$ или, эквивалентно, X лежит на ID . Из подсчета углов можно вывести подобие $JLC \sim IDC$, причем $S = CM \cap JL$ и X – соответственные точки этих треугольников, так что $JS/SL = IX/XD$. Аналогично, $JKBT \sim IDBX$, где $T = BN \cap JK$ и $JT/TK = IX/XD$. Из равенства отношений следует параллельность $ST \parallel KL$.

На самом деле можно заметить, что ST касается ω (в точке $G = RK \cap QL$) и $ST \parallel BC$. Действительно, вторая касательная SG' из S к ω симметрична SM относительно JL , и несложный подсчет углов дает $SG' \parallel BC$. Аналогично рассуждаем с касательной из точки T .

Можно доказать (подсчетом углов), что шесть точек Q, R, F, L, K, E лежат на одной окружности, при этом коллинеарность точек A, D, G согласуется с теоремой Паскаля.

Чан Куанг Хунг

Ф2769. У кубического тонкостенного аквариума ($a \times a \times a$) разбилась боковая стенка. Новую стенку ($a \times a$) решили прижать пружинными фиксаторами. Первую пружину жесткостью $2k$ закрепили у середины верхнего ребра новой стенки, а вторую пружину жесткостью k – у середины нижнего ребра. После этого аквариум придвинули к вертикальной стене (рис. 1). Все поверхности в местах контакта новой стенки с аквариумом плоские и гладкие. Новая стенка жесткая, полностью перекрывает приле-

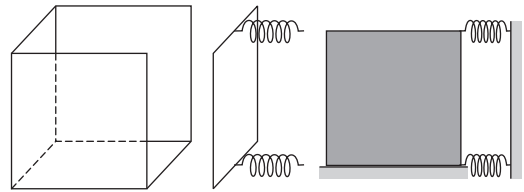


Рис. 1

гающие боковые стенки и дно и параллельна плоскости стены. Сила трения в месте контакта стенки со столом пренебрежимо мала. Длины пружин в недеформированном состоянии одинаковы. Каким должно быть минимальное сжатие пружин, чтобы аквариум можно было наполнить водой плотностью ρ до краев? Во время заполнения аквариум неподвижен, а вода не просачивается в местах контакта стенки с аквариумом. Каким станет минимальное сжатие пружин, если их поменять местами? Ускорение свободного падения g считать известным.

1) Воспользуемся методом виртуальных перемещений для определения сил. Для этого найдем изменение потенциальной энергии, равное работе силы тяжести. Представим, что жидкость переходит из верхнего слоя в образовавшееся пространство, тогда $A_T = -\Delta E_{\text{п}} \leq -A_{\text{д пр}}$. Масса перешедшей жидкости $m = \rho a^2 \delta x$. Для равнодействующей сил давления пружин получаем

$$(2k\Delta x + k\Delta x)\delta x \geq (\rho a^2 \delta x) g \frac{a}{2}, \text{ или } k\Delta x \geq \frac{\rho g a^3}{6}.$$

Для моментов сил давления относительно верхнего ребра получаем, что центр тяжести слоя жидкости опускается на $\frac{2a}{3}$ (рис. 2,а):

$$k\Delta x \delta x \geq \frac{\rho a^2 \delta x}{2} g \frac{2a}{3}, \text{ или } k\Delta x \geq \frac{\rho g a^3}{3}.$$

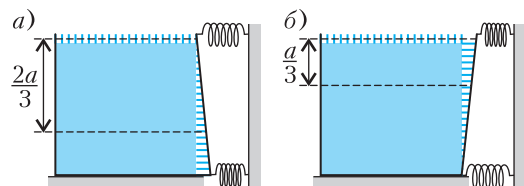


Рис. 2

Для моментов сил давления относительно нижнего ребра получаем, что центр тяжести слоя жидкости опускается на $\frac{a}{3}$ (рис. 2,б):

$$2k\Delta x \delta x \geq \frac{\rho a^2 \delta x}{2} g \frac{a}{3}, \text{ или } k\Delta x \geq \frac{\rho g a^3}{12}.$$

В заполненном аквариуме на боковую стенку действует сила давления воды $F_d = \frac{1}{2} \rho g a^3$. Для решения необходимо определить точку приложения этой силы. Поскольку по горизонтали давление воды на одном и том же уровне одинаково, очевидно, что эта точка будет находиться на срединной вертикали. По вертикали давление распределяется линейно от нуля наверху до $\rho g a$ внизу. Известно, что центр тяжести треугольника расположен в точке пересечения его медиан. Используя аналогию распределения давления по вертикали в нашем случае с распределением по высоте массы полосок одинаковой ширины, на которые параллельно основанию мысленно разрезан равнобедренный треугольник, можно утверждать, что точка приложения силы находится на расстоянии $a/3$ от дна сосуда.

Строгий математический расчет силы и моментов сил можно провести с помощью интегрирования. Определим давление как функцию глубины y от поверхности жидкости: $p(y) = \rho g y$. Суммарная сила давления воды:

$$F_d = \int_0^a p(y) a dy = \frac{\rho g a^3}{2}.$$

Момент силы относительно верхней кромки:

$$M_b = \int_0^a y p(y) a dy = \frac{\rho g a^4}{3}.$$

Момент силы относительно нижней кромки:

$$M_n = \int_0^a (a - y) p(y) a dy = \frac{\rho g a^4}{6}.$$

Условия для отсутствия протечек можно записать в виде неравенств:

$$3k\Delta x \geq \frac{\rho g a^3}{2} \text{ (условие на направление ре-$$

зультирующей силы),

$$k\Delta x \cdot a \geq \frac{\rho g a^4}{3} \text{ (отсутствие поворота вокруг верхнего ребра),}$$

$$2k\Delta x \cdot a \geq \frac{\rho g a^4}{6} \text{ (отсутствие поворота вокруг нижнего ребра).}$$

Очевидно, неравенство $k\Delta x \geq \frac{\rho g a^3}{3}$ наиболее жесткое, откуда получаем

$$\Delta x_{\min} = \frac{\rho g a^3}{3k}.$$

2) Отметим, что, поскольку пружины сжимаются одинаково, суммарная сила, с которой они будут давить на стенку аквариума, в 2 раза больше силы давления воды. Если пружины поменять местами, условия отсутствия протечек примут такой вид:

$$3k\Delta x \geq \frac{\rho g a^3}{2} \text{ (условие на направление ре-$$

$$2k\Delta x \cdot a \geq \frac{1}{3} \rho g a^3 \text{ (отсутствие поворота вокруг верхнего ребра),}$$

$$k\Delta x \cdot a \geq \frac{1}{6} \rho g a^3 \text{ (отсутствие поворота вокруг нижнего ребра).}$$

Отсюда получаем

$$\Delta x_{\min} = \frac{\rho g a^3}{6k}.$$

При этом суммарная сила, с которой пружины будут давить на стенку аквариума, в точности совпадает с силой давления воды.

А.Евсеев

Ф2770. В поле находится лунка, из которой вылетает маленький шарик (рис. 1). Непосредственно перед вылетом скорость шарика равна v_0 и направлена вертикально вверх. В момент вылета шарик абсо-

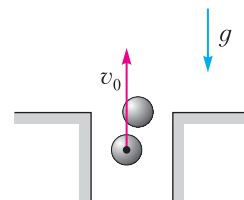


Рис. 1

лютно упруго сталкивается со вторым таким же шариком, который перед ударом покоился на уровне поверхности поля. После удара шарики движутся под действием только силы тяжести и падают где-то в поле. Удар шариков о поле абсолютно неупругий. Найдите максимально возможное расстояние l_{\max} между точками падения шариков. Найдите также максимально возможное расстояние s_{\max} от лунки до места падения одного из шариков. Поверхность поля считайте горизонтальной. Размеры лунки и шариков малы по сравнению с l_{\max} и s_{\max} .

1) Воспользуемся законами сохранения импульса и энергии при соударении:

$$m\vec{v}_0 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2,$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}.$$

Возведем первое равенство в квадрат и получим

$$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2.$$

Из второго равенства следует, что

$$\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2.$$

Поскольку $v_1^2 + v_2^2 = v_0^2$ и $\vec{v}_0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, то треугольник скоростей является прямоугольным и вписан в окружность с диаметром v_0 (рис. 2).

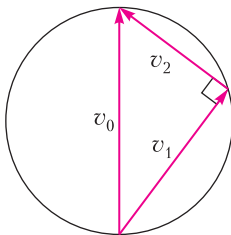


Рис. 2

Введем в точке старта систему координат yx , где ось y направлена вертикально вверх, а ось x направлена горизонтально. Далее под $v_{x(i)}$ и $v_{y(i)}$ подразумеваются соответственно модули горизонтальной и вертикальной составляющих компонент скоростей i -го шарика сразу после удара. Отметим, что $v_{x(1)} = v_{x(2)} = v_x$.

Найдем дальность полета i -го шарика:

$$t_i = \frac{2v_{y(i)}}{g}, \quad l_i = v_x t_i = \frac{2v_x v_{y(i)}}{g}.$$

Для расстояния между точками падения шариков имеем

$$l = l_1 + l_2 = \frac{2v_x (v_{y(1)} + v_{y(2)})}{g} = \frac{2v_0 v_x}{g}.$$

Таким образом, расстояние между точками падения максимально при максимальном значении v_x , равном радиусу окружности, или $v_0/2$. Следовательно,

$$l_{\max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

2) Максимальная дальность полета одного из шариков соответствует максимальному значению произведения $v_x v_{y(i)}$, следовательно, будет одинаковой для обоих шариков. Произведение $v_x v_y$ геометрически представляет собой площадь прямоугольника со сторонами v_x и v_y . В свою очередь, данная площадь равна площади равнобедренного треугольника с равными сторонами $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ и основанием $2v_x$ (рис. 3).

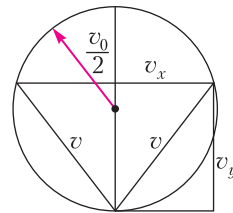


Рис. 3

Этот треугольник вписан в окружность радиусом $v_0/2$. Максимум площади треугольника, вписанного в окружность радиусом R , достигается в случае равностороннего треугольника и равен $\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$, следовательно,

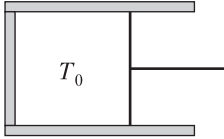
$$(v_x v_y)_{\max} = \frac{3\sqrt{3}v_0^2}{16},$$

откуда

$$l_{i(\max)} = \frac{3\sqrt{3}v_0^2}{8g}.$$

В.Ерин

Ф2771. В горизонтальный цилиндрический сосуд герметично вставлен поршень, перемещающийся с помощью прикрепленной к нему рукоятки (см. рисунок). В сосуде находится насыщенный



пар воды при температуре $T_0 = 333 \text{ К}$. Жидкой фазы воды в сосуде нет. Водяной пар можно считать идеальным многоатомным газом. Удельная теплота парообразования воды при температуре T_0 равна $L = 2,36 \text{ МДж/кг}$ и в рамках задачи может считаться не зависящей от температуры. Универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$. Молярная масса воды $M = 18,0 \text{ г/моль}$. Считайте известным, что малые относительные изменения давления насыщенного пара и его абсолютной температуры вблизи значений $p_0(T_0)$ и T_0 соответственно связаны соотношением $\epsilon_p = \Delta p/p_0 = \alpha \epsilon_T = \alpha \Delta T/T_0$, где $\alpha = 15,3$. Температуру в сосуде начинают медленно изменять. Объем сосуда изменяется таким образом, что все вещество в сосуде все время остается в газообразном состоянии, при этом водяной пар является насыщенным. Чему равна молярная теплоемкость водяного пара в данном процессе? Теперь рассмотрим адиабатически изолированный сосуд. Найдите изменение температуры ΔT_1 в сосуде при медленном относительном уменьшении его объема на величину $\beta = 5\%$. Найдите также изменение температуры ΔT_2 в сосуде при медленном относительном увеличении его объема на величину $\beta = 5\%$.

1) Запишем первое начало термодинамики для вещества под поршнем:

$$\delta Q = dU + \delta A = dU + p dV = dU + d(pV) - V dp.$$

Далее используем выражение для внутренней энергии идеального газа и уравнение Менделеева–Клапейрона:

$$U = \nu C_V T, \quad pV = \nu RT.$$

Поскольку вещество в сосуде целиком остается в газообразной фазе, то

$$d(pV) = \nu R dT.$$

Тогда получим

$$\delta Q = \nu C_V dT + \nu R dT - V dp = \nu C_p dT - V dp,$$

где $C_p = C_V + R = 4R$ – молярная теплоемкость идеального многоатомного газа при постоянном давлении.

Для теплоемкости идеального газа, выраженной через параметры (p, T) , имеем

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = \nu C_p - V \frac{dp}{dT} = \nu C_p - \frac{\nu RT}{p} \frac{dp}{dT} = \nu \left(C_p - R \frac{\epsilon_p}{\epsilon_T} \right).$$

Тогда молярная теплоемкость насыщенного пара равна

$$C_{\text{нас}} = C_p - \alpha R = R(4 - \alpha) = -93,9 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}.$$

2) При изменении объема сосуда возможны два принципиально различных физических процесса.

1. Если относительное изменение давления водяного пара под поршнем меньше относительного изменения давления насыщенного пара при том же относительном изменении температуры, т.е. если $\epsilon_p < \epsilon_p(\text{нп}) = \alpha \epsilon_T$, то вещество в сосуде целиком остается в газообразном состоянии, а пар перестает быть насыщенным.

2. Если описанное условие соотношения относительных изменений давлений при одинаковом относительном изменении температуры не выполняется – пар в сосуде будет оставаться насыщенным и при этом частично конденсироваться.

Найдем относительное изменение давления пара под поршнем, считая, что он целиком остается в газообразном состоянии. Из уравнения Менделеева–Клапейрона получим

$$pV = \nu RT, \quad p dV + V dp = \nu R dT = \frac{pV dT}{T},$$

$$\epsilon_p + \epsilon_V = \epsilon_T.$$

Запишем первое начало термодинамики:

$$dU = -\delta A, \nu C_V dT = -pdV = -\frac{\nu RT dV}{V},$$

$$\varepsilon_T = -\frac{R\varepsilon_V}{C_V}.$$

Обратим внимание, что $\varepsilon_T > 0$, поскольку $\varepsilon_V < 0$. Далее находим

$$\varepsilon_p = \varepsilon_T - \varepsilon_V = \varepsilon_T \left(1 + \frac{C_V}{R}\right) = \frac{C_p \varepsilon_T}{R} = 4\varepsilon_T < \alpha \varepsilon_T.$$

Таким образом, все вещество под поршнем остается газообразным. Значит, полученное выражение для ε_T является применимым и температура увеличивается на

$$\Delta T = T_0 \frac{\beta}{C_V/R} = \frac{\beta T_0}{3} \approx 5,6 \text{ К}.$$

3) Из предыдущего решения также следует, что при увеличении объема без конденсации температура в сосуде должна уменьшиться. Тогда пар в сосуде будет оставаться насыщенным и при этом частично конденсироваться, поскольку иначе давление пара в сосуде станет выше давления насыщенного пара при той же температуре, что невозможно. Продифференцируем уравнение Менделеева–Клапейрона с учетом изменения газообразного количества вещества в сосуде:

$$pV = \nu RT, \varepsilon_p + \varepsilon_V = \varepsilon_\nu + \varepsilon_T,$$

$$\varepsilon_T (\alpha - 1) + \varepsilon_V = \varepsilon_\nu,$$

поскольку в рассматриваемом процессе $\varepsilon_p = \alpha \varepsilon_T$. Из первого начала термодинамики:

$$\delta Q_{\text{нас}} + Ldm = 0,$$

где $Q_{\text{нас}}$ – количество теплоты, полученное неконденсирующимся насыщенным паром, а $dm = Mdv$ – изменение массы водяного пара. Поскольку состояние неконденсирующегося водяного пара в координатах (p, T) описывается кривой фазового равновесия, его теплоемкость равна теплоемкости $C_{\text{нас}}$, полученной при решении первого пункта, поэтому для количества теплоты $\delta Q_{\text{нас}}$ имеем

$$\delta Q_{\text{нас}} = C_{\text{нас}} dT.$$

Возвращаясь к первому началу термодинамики для системы, получим

$$\nu C_{\text{нас}} dT + L M dv = 0, \varepsilon_\nu = -\frac{C_{\text{нас}} T \varepsilon_T}{ML},$$

откуда

$$\varepsilon_T (\alpha - 1) + \varepsilon_V = -\frac{C_{\text{нас}} T \varepsilon_T}{ML}.$$

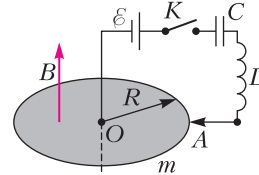
Окончательно находим

$$\Delta T = -T_0 \frac{\beta}{\alpha - 1 + \frac{(C_p - \alpha R) T_0}{ML}} =$$

$$= -T_0 \frac{\beta}{\alpha - 1 + \frac{(4 - \alpha) R}{ML}} \approx -1,2 \text{ К}.$$

А.Уймин

Ф2772. На рисунке показана схема электрической цепи, состоящей из источника с электродвижущей силой \mathcal{E} , конденсатора емкостью C , катушки индуктивностью L , ключа K и металлического диска радиусом R . Диск может вращаться вокруг своей оси без трения. Диск расположен в однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} , направленном вдоль оси диска так, как показано на рисунке. Практи-



чески вся масса m диска сосредоточена в его тонком ободе. Источник соединен с диском в его центре O , а катушка индуктивности соединена с диском с помощью неподвижного скользящего контакта A . Омическим сопротивлением контура, по которому течет ток, и наличием у него индуктивности (дополнительно к L) можно пренебречь. Изначально ключ K разомкнут, диск неподвижен, ток в катушке отсутствует, а конденсатор не заряжен. Ключ K замыкают. Определите максимальную угловую скорость диска ω_{max} после замыкания ключа, а также время τ после замыкания ключа, через которое угловая скорость диска впервые достигает значения ω_{max} .

Пусть диск вращается с угловой скоростью ω в направлении против часовой стрелки. У носителей зарядов, находящихся на

расстоянии r от оси диска, появляется коллективная скорость ωr , перпендикулярная оси диска, и, соответственно, появляется одинаковая (не зануляющаяся при суммировании по всем носителям) составляющая силы Лоренца, которая вызовет перераспределение носителей по радиусу до стационарного состояния, в котором разность потенциалов в точках, находящихся на расстояниях r и $r + dr$ от оси диска равна $d\phi = \omega B r dr$. Таким образом, присутствие магнитного поля вызовет появление во вращающемся диске ЭДС индукции, равной

$$\varepsilon_{\text{инд}} = \omega B \int_0^R r dr = \frac{\omega B R^2}{2}, \quad (1)$$

а по знаку противоположной ЭДС источника.

Запишем второй закон Кирхгофа для контура электрической цепи:

$$\varepsilon + \varepsilon_{\text{инд}} = \varepsilon - \frac{\omega B R^2}{2} = Lq' + \frac{q}{C}, \quad (2)$$

где q – заряд конденсатора. Далее запишем закон изменения энергии в электрической цепи, учитывая, что магнитное поле не совершает работы:

$$A_{\text{ист}} = \varepsilon \Delta q = \Delta W_C + \Delta W_L + \Delta E_k,$$

где $W_C = \frac{q^2}{2C}$ и $W_L = \frac{Lq'^2}{2}$ – энергии конденсатора и катушки индуктивности соответственно, а $E_k = \frac{mR^2\omega^2}{2}$ – кинетическая энергия вращения обода диска. Дифференцируя по времени закон сохранения энергии, получим

$$\varepsilon q' = \frac{qq'}{C} + Lq'q'' + mR^2\omega\omega'. \quad (3)$$

Умножая уравнение (2) на q' и вычитая из него уравнение (3), получим следующее соотношение между ω' и q' :

$$\frac{BR^2q'}{2} = mR^2\omega', \text{ или } \omega = \frac{qB}{2m}. \quad (4)$$

В последнем переходе мы воспользовались начальными условиями $\omega(0) = 0$, $q(0) = 0$.

Таким образом, возможны три комбинации двух физических законов, приводящие к решению задачи.

1. Закон электромагнитной индукции и закон сохранения энергии.

2. Уравнение динамики вращательного движения и закон электромагнитной индукции.

3. Уравнение динамики вращательного движения и закон сохранения энергии.

Для определения максимальной угловой скорости заметим, что она достигается в момент, когда сила тока в цепи оказывается равной нулю. Тогда из закона изменения энергии имеем

$$\varepsilon q = \frac{q^2}{2C} + \frac{mR^2\omega_{\text{max}}^2}{2},$$

$$\frac{2m\omega_{\text{max}}\varepsilon}{B} = \frac{\omega_{\text{max}}^2}{2} \left(\frac{4m^2}{B^2C} + mR^2 \right),$$

откуда получаем

$$\omega_{\text{max}} = \frac{4BC\varepsilon}{4m + B^2R^2C}.$$

Комбинируя уравнения (2) и (4), находим

$$\varepsilon = \omega' \frac{2mL}{B} + \omega \left(\frac{BR^2}{2} + \frac{2m}{BC} \right).$$

Вводя переменную

$$\omega_1 = \omega - 2BC\varepsilon / (4m + B^2R^2C),$$

получим уравнение гармонических колебаний

$$\omega_1'' = -\omega_1 \left(\frac{1}{LC} + \frac{B^2R^2}{4mL} \right) = -\Omega_0^2\omega_1,$$

где

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{B^2R^2}{4mL}},$$

откуда

$$\omega_1(t) = \overline{A} \cos(\overline{\Omega_0}t + \varphi_0).$$

Определим A и φ_0 из начальных условий:

$$\omega(0) = \frac{2BC\varepsilon}{4m + B^2R^2C} + A \cos \varphi_0 = 0,$$

$$\omega'(0) = -\Omega_0 A \sin \varphi_0 = 0,$$

$$\varphi_0 = \pi, A = \frac{2BC\varepsilon}{4m + B^2R^2C}.$$

Окончательно для $\omega(t)$ имеем

$$\omega(t) = \frac{2BC\xi}{4m + B^2R^2C} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{B^2R^2}{4mL}} t \right).$$

Угловая скорость впервые достигает значения ω_{\max} , когда $\cos \Omega_0 \tau = -1$, т.е. при $\omega_0 \tau = \pi$. Тогда получаем

$$\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{B^2R^2}{4mL}}}.$$

А. Уймин

Ф2773. Невесомая пружина имеет большое число витков, но изначально только $N \gg 1$ витков могут деформироваться, а остальные – скреплены между собой. Груз на этой пружине совершает свободные колебания с периодом T_0 и амплитудой A_0 . Начиная с некоторого момента, при каждом прохождении грузом положения равновесия освобождают по одному из скрепленных витков пружины (длина пружины в недеформированном состоянии при этом не изменяется). Определите амплитуду A колебаний груза после увеличения числа свободных витков на $\Delta N \gg 1$. Оцените (приблизительно) время t , прошедшее с момента освобождения первого из изначально скрепленных витков до момента завершения колебаний с амплитудой A .

Все изменения числа свободных витков и, соответственно, жесткости пружины происходят в положении равновесия, когда пружина не деформирована, причем длина пружины остается прежней, поэтому координата положения равновесия и энергия системы сохраняются. Пусть k – жесткость одного витка, тогда равенство энергий в крайних положениях при изначальных колебаниях и после освобождения ΔN витков имеет вид

$$\frac{k}{N} \frac{A_0^2}{2} = \frac{k}{N + \Delta N} \frac{A^2}{2},$$

откуда находим искомую амплитуду:

$$A = A_0 \sqrt{1 + \frac{\Delta N}{N}}.$$

Пусть m – масса груза, а периоды колебаний до начала освобождения витков и после освобождения n витков равны

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{mN}{k}} \text{ и } T_n = 2\pi \sqrt{\frac{m(N+n)}{k}}.$$

Отсюда получаем соотношение

$$T_n = T_0 \sqrt{1 + \frac{n}{N}}.$$

К искомому моменту времени t груз совершит по половине колебания с каждым числом витков от $(N + 1)$ до $(N + \Delta N)$ включительно:

$$t = \frac{1}{2} (T_1 + T_2 + \dots + T_{\Delta N}) = \frac{T_0}{2} \sum_{n=1}^{\Delta N} \sqrt{1 + \frac{n}{N}}.$$

На основании условий $N \gg 1$ и $\Delta N \gg 1$ это выражение можно упростить:

$$t \approx \frac{T_0}{2} \int_0^{\Delta N} \sqrt{1 + \frac{n}{N}} dn = \frac{T_0}{2} \left(1 + \frac{n}{N} \right)^{3/2} \Big|_0^{\Delta N} = \frac{T_0}{2} \left(\left(1 + \frac{\Delta N}{N} \right)^{3/2} - 1 \right).$$

Обратите внимание на различие между пределами суммы и интеграла: оно необходимо для правильного учета площадей крайних столбиков. Точность была бы чуть выше при симметричной корректировке, т.е. при выборе пределов от 0,5 до $\Delta N + 0,5$, но в условиях задачи это не принципиально.

А. Власов

Ф2774. Из разных кусков нихромовой проволоки, покрытой одинаковой изоляцией одной и той же толщины, изготовили пять резисторов, соединили их по мостовой схеме (рис. 1) и подключили к источнику постоянного напряжения. В каждом из четырех описанных ниже опытов найдите разность между максимальной и минимальной температурами рези-

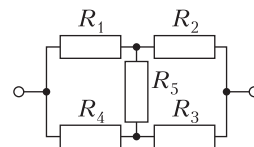


Рис. 1

сторов, если температура центрального резистора в тот же момент времени была выше комнатной на $\Delta T_5 = 10 \text{ мК}$. В качестве ответа укажите численные значения, округленные до целого числа милликельвинов.

1) Диаметры всех кусков проволоки одинаковы, а длины пропорциональны номерам резисторов. Измерение всех температур производится через малое время после замыкания цепи.

2) Диаметры всех кусков проволоки одинаковы, а длины пропорциональны номерам резисторов. Измерение всех температур производится через большое время после замыкания цепи.

3) Длины всех кусков проволоки одинаковы, а диаметры пропорциональны номерам резисторов. Измерение всех температур производится через малое время после замыкания цепи.

4) Длины всех кусков проволоки одинаковы, а диаметры пропорциональны номерам резисторов. Измерение всех температур производится через большое время после замыкания цепи.

Обозначим через I_1, I_2, I_3, I_4 и I_5 силы токов, текущих через соответствующие резисторы, и будем считать положительными направления, указанные на схеме стрелочками (рис. 2). Из формулы для

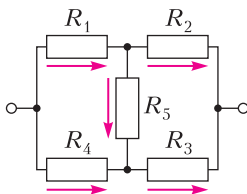


Рис. 2

удельного сопротивления следует, что сопротивление резистора прямо пропорционально его длине (номеру резистора в пунктах 1 и 2 задачи) и обратно пропорционально площади сечения (квадрату номера резистора в пунктах 3 и 4 задачи). Правила Кирхгофа для пунктов 1 и 2 задачи имеют вид

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_5, \\ I_4 + I_5 &= I_3, \end{aligned}$$

$$1 \cdot I_1 + 5 \cdot I_5 = 4 \cdot I_4,$$

$$5 \cdot I_5 + 3 \cdot I_3 = 2 \cdot I_2,$$

откуда находим связи между силами токов:

$$I_1 = 11I_5, \quad I_2 = 10I_5, \quad I_3 = 5I_5, \quad I_4 = 4I_5.$$

Правила Кирхгофа для пунктов 3 и 4 задачи запишем в виде

$$I_1 = I_2 + I_5,$$

$$I_4 + I_5 = I_3,$$

$$\frac{I_1}{1^2} + \frac{I_5}{5^2} = \frac{I_4}{4^2},$$

$$\frac{I_5}{5^2} + \frac{I_3}{3^2} = \frac{I_2}{2^2},$$

откуда находим связи между силами токов:

$$I_1 = -\frac{17}{55} I_5, \quad I_2 = -\frac{72}{55} I_5,$$

$$I_3 = -\frac{909}{275} I_5, \quad I_4 = -\frac{1184}{275} I_5.$$

Если измерение температур производится через малое время после замыкания цепи (пункты 1 и 3 задачи), то можно пренебречь теплотерями и считать, что выделившееся количество теплоты идет на нагревание проволоки, поэтому прирост ΔT_n температуры резистора R_n равен

$$\Delta T_n = k_{13} \frac{I_n^2 R_n}{L_n D_n^2},$$

где k_{13} – коэффициент пропорциональности. С учетом известного значения ΔT_5 удобно записать этот же результат в виде

$$\frac{\Delta T_n}{\Delta T_5} = \left(\frac{I_n}{I_5} \right)^2 \frac{R_n}{R_5} \frac{L_5}{L_n} \left(\frac{D_5}{D_n} \right)^2 = \left(\frac{I_n}{I_5} \right)^2 \left(\frac{D_5}{D_n} \right)^4.$$

Если измерение температур производится через большое время после замыкания цепи (пункты 2 и 4 задачи), то превышение ΔT_n температуры резистора R_n над окружающей средой будет определяться равенством мощностей тепловыделения и теплоотдачи, которые пропорциональны площади поверхности проволоки (длине L_n и диаметру D_n) и ΔT_n , откуда получаем

$$\Delta T_n = k_{24} \frac{I_n^2 R_n}{L_n D_n},$$

где k_{24} – коэффициент пропорциональности. С учетом известного значения ΔT_5 удобно записать этот же результат в виде

$$\frac{\Delta T_n}{\Delta T_5} = \left(\frac{I_n}{I_5}\right)^2 \frac{R_n L_5 D_5}{R_5 L_n D_n} = \left(\frac{I_n}{I_5}\right)^2 \left(\frac{D_5}{D_n}\right)^3.$$

Таким образом, мы рассмотрели влияние каждого фактора по отдельности, а результаты их сведения воедино представлены в таблице 1 (пояснение расчета) и таблице 2 (итог расчета). Наименьшей во

Таблица 1

N	Формулы опыта	Относительные повышения температур			
		$\Delta T_1/\Delta T_5$	$\Delta T_2/\Delta T_5$	$\Delta T_3/\Delta T_5$	$\Delta T_4/\Delta T_5$
1	(1) + (3)	$11^2 \cdot 1^4$	$10^2 \cdot 1^4$	$5^2 \cdot 1^4$	$4^2 \cdot 1^4$
2	(1) + (4)	$11^2 \cdot 1^3$	$10^2 \cdot 1^3$	$5^2 \cdot 1^3$	$4^2 \cdot 1^3$
3	(2) + (3)	$\left(\frac{17}{55}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{1}\right)^4$	$\left(\frac{72}{55}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^4$	$\left(\frac{909}{275}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^4$	$\left(\frac{1184}{275}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^4$
4	(2) + (4)	$\left(\frac{17}{55}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{1}\right)^3$	$\left(\frac{72}{55}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3$	$\left(\frac{909}{275}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^3$	$\left(\frac{1184}{275}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3$

Таблица 2

N	Формулы опыта	Превышения, мК			
		ΔT_1	ΔT_2	ΔT_3	ΔT_4
1	(1) + (3)	1210	1000	250	160
2	(1) + (4)	1210	1000	250	160
3	(2) + (3)	597	669	843	453
4	(2) + (4)	119	268	506	362

всех опытах оказалась температура центрального резистора, поэтому окончательные ответы имеют вид

$$\max\{\Delta T_1; \Delta T_2; \Delta T_3; \Delta T_4\} - \Delta T_5.$$

Ответы с учетом указанного в условии округления: {1200; 1200; 833; 496}.

С. Варламов

Ф2775. Вдоль ребер куба различными способами прокладывают тонкую проволоку и пускают по ней ток. Индуктивность замкнутого контура из четырех ребер, принадлежащих одной грани, равна L_{41} . Индуктивность замкнутого контура из шести ребер, принадлежащих двум смежным граням, равна L_{62} .

1) Найдите индуктивность L_{63} замкнутого контура из шести ребер, принадлежащих трем попарно смежным граням.

2) Найдите индуктивность L_{83} замкну-

того контура из восьми ребер, принадлежащих трем граням, две из которых параллельны друг другу, а третья является смежной с каждой из двух других.

3) Вдоль ребер двух противоположных граней проложены две замкнутые проволоки. По одному проволочному контуру идет переменный ток силой $I(t) = I_0 \cos \omega t$. В другой проволочный контур вставлен идеальный маленький вольтметр. Найдите зависимость $U(t)$ показаний вольтметра от времени.

Обозначим через M взаимную индуктивность двух проволочных контуров, расположенных вдоль ребер двух смежных граней куба, а через m – взаимную индуктивность двух проволочных контуров, расположенных вдоль ребер двух противоположных граней куба. (Взаимная индуктивность – это коэффициент пропорциона-

льности между магнитным потоком в одном контуре и силой тока в другом.) Есть пустить ток по четырем ребрам одной грани куба, то магнитный поток, входящий в куб через эту грань, будет равен суммарному магнитному потоку, выходящему из куба через четыре смежные грани и одну противоположную, откуда получаем первое соотношение между индуктивностями:

$$L_{41} = 4M + m.$$

Есть пустить ток по шести ребрам двух смежных граней куба, то магнитный поток, входящий в куб через этот контур, будет равен суммарному магнитному потоку, выходящему из куба через четыре оставшиеся грани, две из которых являются смежными с каждой из двух граней, образующих контур, а каждая из двух других является смежной с одной из граней, образующих контур, и противоположной другой, откуда получаем второе соотношение между индуктивностями:

$$L_{62} = 2(M + M) + 2(M + m) = 6M + 2m.$$

(Можно получить то же самое соотношение по-другому: мысленно добавим два

противоположно направленных тока той же самой силой I вдоль общего ребра двух граней, образующих рассматриваемый контур, тогда его можно разбить на два контура, каждый из которых добавляет магнитный поток $L_{41}I$ через себя и вычитает магнитный поток MI через второй контур.)

Решая полученные уравнения совместно, находим взаимные индуктивности:

$$M = L_{41} - \frac{L_{62}}{2}, \quad m = 2L_{62} - 3L_{41}.$$

Выразим каждую из искоемых индуктивностей L_{63} и L_{83} обоими показанными выше способами (запасной способ – ради интереса и для самопроверки):

$$L_{63} = 3(2M + m) = 6M + 3m,$$

$$L_{63} = 3(L_{41} - 2M) = 6M + 3m,$$

$$L_{83} = 2 \cdot 3M + (2M + m) = 8M + m,$$

$$L_{83} = 3L_{41} - 2M - 2(M + m) = 8M + m.$$

После подстановки выражений для M и m получаем первые два ответа:

$$L_{63} = 6M + 3m = 3L_{62} - 3L_{41},$$

$$L_{83} = 8M + m = 5L_{41} - 2L_{62}.$$

В третьем пункте задачи выразим магнитный поток через второй контур:

$$\Phi = mI(t) = mI_0 \cos \omega t$$

и найдем показания вольтметра через ЭДС индукции:

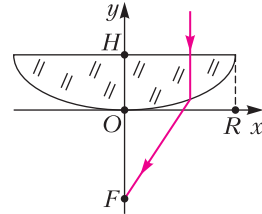
$$U(t) = \mathcal{E} = -\dot{\Phi} = \omega m I_0 \sin \omega t = \\ = \omega(2L_{62} - 3L_{41})I_0 \sin \omega t.$$

С.Варламов

Ф2776. На плоскую поверхность плоско-выпуклой линзы, изготовленной из стекла с показателем преломления $n = 1,5$ и расположенной в воздухе, падает вдоль нормали параллельный пучок лучей. Определите форму выпуклой поверхности линзы, если плоская имеет форму круга радиусом $R = 0,5$ м, а все преломленные линзой лучи прошли через одну точку F , расположенную на расстоянии $f = 1$ м от ближайшей к ней точки O линзы. В качестве ответа укажите толщину H линзы

(максимальное расстояние от точки выпуклой поверхности до плоской).

Чтобы все падающие лучи после прохождения линзы пересеклись в одной точке F , у них должны быть одинаковые оптические длины путей. Введем показанную на рисунке систему координат Oxy и запишем



равенство оптической длины пути произвольного луча, преломившегося на выпуклой поверхности линзы в точке с координатами $(x; y)$, и оптической длины пути луча, прошедшего вдоль оси симметрии линзы:

$n \cdot (H - y) + 1 \cdot \sqrt{x^2 + (y + f)^2} = n \cdot H + 1 \cdot f$, откуда после упрощения получаем квадратное уравнение

$$(n^2 - 1)y + 2f(n - 1)y - x^2 = 0.$$

Его положительное (осмысленное) решение имеет вид

$$y = \frac{f}{n + 1} \left(\sqrt{1 + \frac{(n + 1)x^2}{(n - 1)f^2}} - 1 \right).$$

Искомая величина H – это значение y в точке $x = R$, поэтому

$$H = \frac{f}{n + 1} \left(\sqrt{1 + \frac{(n + 1)R^2}{(n - 1)f^2}} - 1 \right) = 0,2 \text{ м}.$$

Примечание. Предлагаем читателям самостоятельно подумать над следующими вопросами. Как называется найденная нами математическая форма выпуклой поверхности линзы в пространстве? Почему обычно используют сферические линзы, хотя из нашего решения следует, что для идеальности линзы поверхность должна иметь не сферическую форму? Почему в тексте задачи мы намеренно не использовали термины «фокус», «фокусное расстояние» и «оптическая сила»?

А.Власов

Задачи

1. В кружке занимаются 19 школьников. На праздник 8 Марта каждый из мальчиков послал по одной открытке



некоторым девочкам из кружка (хотя бы одной). Оказалось, что любые два мальчика послали разное число открыток. Какое наибольшее число мальчиков могло быть в кружке?

О.Южак

2. На праздник в классе открыли 5 коробок с конфетами и расположили эти коробки в ряд. Назовем конфеты *соседними*, если они лежат в одной коробке или в двух соседних коробках. В конце праздника оказалось, что в каждой коробке осталась хотя бы

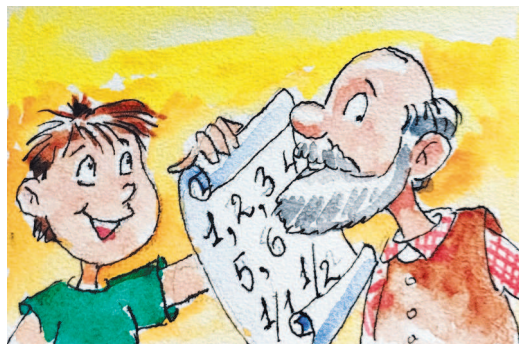


Задачи 1–3 предлагались на муниципальном этапе Всероссийской олимпиады по математике в Московской области. Задача 4 предлагалась на XXVIII Турнире математических боев имени А.П.Савина.

одна конфета и у любой оставшейся конфеты есть либо 4, либо 8 соседних конфет. Сколько конфет осталось в конце праздника?

Фольклор

3. Есть набор из 18 чисел: 1, 2, 3, ..., 9 и $1/1$, $1/2$, $1/3$, ..., $1/9$. Их разбили на 6



групп по 3 числа и числа в каждой группе перемножили. Какое наибольшее количество из этих 6 произведений могло оказаться целыми числами?

О.Подлипский

4. По кругу встали 600 жителей острова рыцарей и лжецов. Путешественник спросил каждого из них: «Правда ли, что твои соседи – рыцарь и лжец?». По полученным ответам путешественник смог определить, сколько именно в круге рыцарей. Так сколько же?

А.Тутубалина



Обрученные многогранники

Н.ДАУРЦЕВА, К.СТОРОЖУК

Часть первая: практика

Кто любит практику, тот в искусстве достигнет знания.

Альбрехт Дюрер

В книге польского математика Гуго Штейнгауза «Математический калейдоскоп» описывается любопытная модель додекаэдра [1]. Модель представляет из себя развертку двух половинок додекаэдра, их можно вырезать из плотного картона. Для демонстрации необходимо сложить вместе эти две половинки и перетянуть их упругим растягивающимся «обручем» – канцелярской резинкой. Если подбросить эту конструкцию, то обруч, укорачиваясь, стянет модель в объемное тело. Стать еще короче обруч уже не может, поэтому он остается на поверхности. Об этой модели интересно и наглядно написано в разделе «Модели» сайта «Математические этюды» [2].

Линия, по которой прилегает обруч после складывания, является *геодезической*. О геодезических линиях на многогранниках можно прочесть на страницах «Кванта» в статье [3] и в разделе «Этюды» сайта «Математические этюды» [4].

На других правильных многогранниках также есть замкнутые геодезические (зеленые линии на рисунке 1), это наводит на мысль, что и для них можно придумать модели, аналогичные модели Штейнгауза.

Начнем с куба. Многие бывают удивлены, узнав, что существует плоское шестиуголь-

ное сечение куба. Соответствующая линия является геодезической, на нее и ляжет обруч в нашей модели. Однако провести полную аналогию с моделью Штейнгауза, составив куб из пары трехлепестковых половинок, невозможно – квадраты, соединенные всего лишь точкой, рассыпаются. Можно заменить проблемную вершину небольшой треугольной площадкой.

Две одинаковые детали такой модели удобно выполнить, используя упаковку из-под йогурта. Разрежем коробку по ребрам, не доходя до вершины (рис. 2). Скрепим две

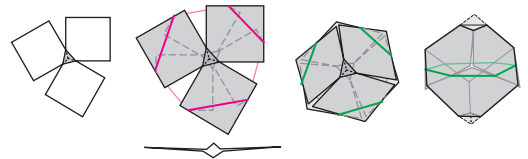


Рис. 2

заготовки обручем, как показано на рисунке, получив нечто похожее на «летающую тарелку». Можно слегка выгнуть ее в одну из сторон для фиксации. Если уронить такую заготовку горизонтально на стол, она волшебным образом превратится в куб. Красным цветом на рисунке 2 обозначен обруч на расплющенной модели, а зеленым цветом – на сложенном (не до конца) кубе.

Можно предложить другую модель, складывающуюся из плоских частей развертки куба. Для этого сложим и скрепим две Г-образные детали так, как показано на рисунке 3. Подбросим эту модель – она сложится в куб!

Тетраэдр и октаэдр также можно опоясать плоским обручем-геодезической. Модели для

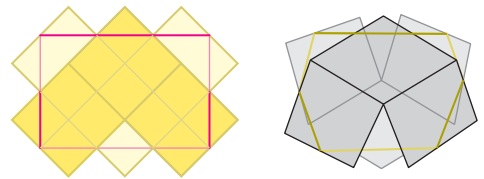


Рис. 3

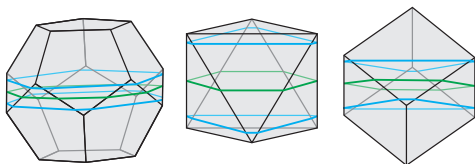
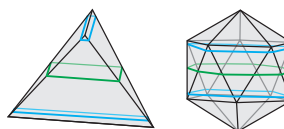


Рис. 1



этих тел устроены аналогично моделям додекаэдра и куба. На рисунке 4 изображены модели в процессе складывания. Модели для тетраэдра и

октаэдра складываются несколько хуже, они часто замирают недособранными. Простую модель складывающегося икосаэдра нам при-

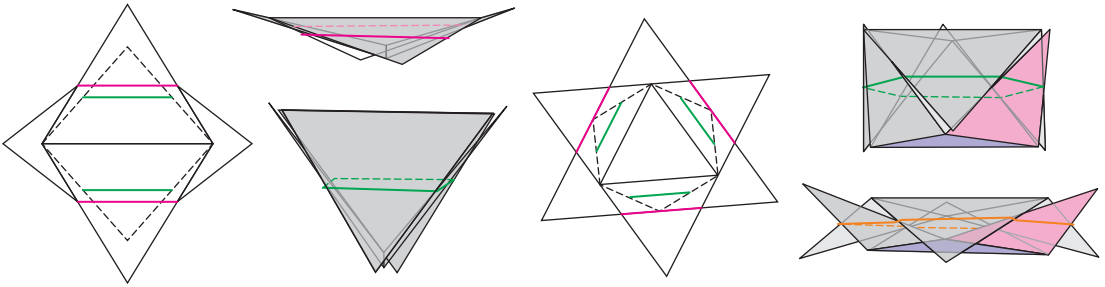


Рис. 4

думать не удалось. Предлагаем это в качестве задачи читателям.

Реализация обсуждаемых моделей представлена на рисунке 5.

В следующей части статьи мы выведем соотношения, которые помогут изучать динамику процесса сборки.



Рис. 5

Часть вторая: теория

Практика не может быть учителем, если у вас нет теории, чтобы ее направлять и научить правильно понимать.

Альбрехт Дюрер

Когда модель складывается, длина L обруча уменьшается, а высота модели (расстояние H между серединами двух заготовок) растет. Выведем формулу, связывающую L и H . Сделаем это для октаэдра, длина ребра которого предполагается равной единице.

Рассмотрим два треугольника из нижней заготовки октаэдра в динамике. В процессе стягивания модели в октаэдр один треугольник лежит в горизонтальной плоскости, а второй образует с ней двугранный угол β .

На рисунке 6 изображен вид нашего фрагмента сверху и сбоку. Буквами R обозначены точки, где к ребрам примыкает обруч-

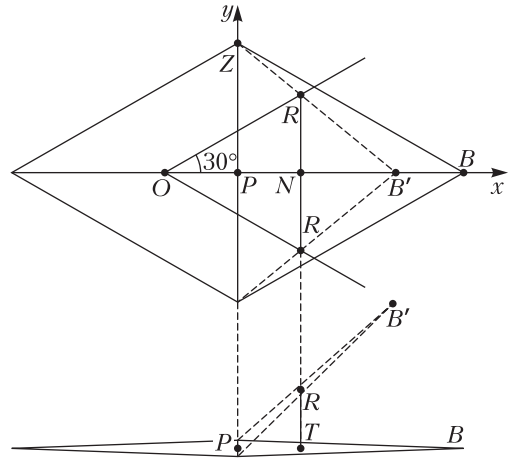


Рис. 6

резинка. Точка N – середина одной из сторон правильного шестиугольника, а точка O – центр этого шестиугольника, совпадающий с центром горизонтальной грани. В этих обозначениях периметр L шестиугольника равен $12 NR$, а длина отрезка TR равна половине высоты H складываемой фигуры.

Удобно, исследуя вид сверху, ввести прямоугольную систему координат, в которой $P = (0; 0)$ – середина линии сгиба, $Z = \left(0; \frac{1}{2}\right)$ – конец линии сгиба. Вершина B полностью плоской заготовки имеет координаты $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, а точка O – координаты $\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}; 0\right)$.

В процессе складывания точка B перемещается в точку B' , при этом $\angle B'PB = \beta$, а координаты B' при виде сверху равны

(Продолжение см. на с. 34)

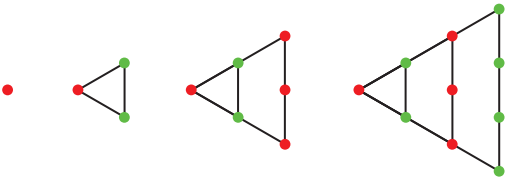
$$T_n = 1/6(n+1)(n+2)$$

Когда фигурные числа совпадают

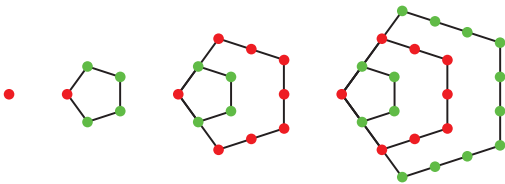
Фигурными числами в математике называются числа, связанные с геометрическими образами.

Возьмем n точек. Если их удастся расположить в виде равностороннего треугольника, то такое n называется треугольным.

Вот первые треугольные числа: 1, 3, 6, 10, ... и их геометрическая интерпретация:



Похожим образом получается последовательность пятиугольных чисел 1, 5, 12, 22, ..., имеющая следующую геометрическую интерпретацию:



Каждый раз мы добавляем точки очередного слоя так, чтобы получался пятиугольник со стороной на 1 больше.

Аналогично определяются k -угольные числа для произвольного k . Подробнее о k -угольных числах можно прочитать в статье А. Бендукидзе «Фигурные числа» («Квант» №8 за 1974 г.). Там же можно найти явную формулу для n -го k -угольного числа F_n^k :

$$F_n^k = \frac{n((k-2)n - (k-4))}{2}$$

Зададимся вопросом, могут ли совпадать k -угольные числа для разных k . Например, могут ли треугольные числа являться квадратными?

На языке алгебры эта задача формулируется так: найти решения в целых числах уравнения

$$\frac{n(n+1)}{2} = m^2$$

Выделяя полный квадрат, приходим к уравнению $(2n+1)^2 - 8m^2 = 1$, которое после замены сводится к уравнению Пелля:

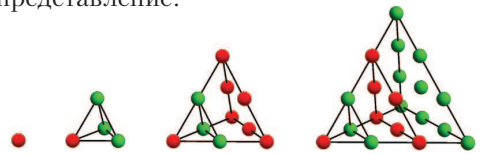
$$x^2 - 2y^2 = 1$$

Вот первые несколько квадратов чисел, которые являются треугольными: 1, 36, 1225, 41616, ... Эта задача была решена еще Эйлером.

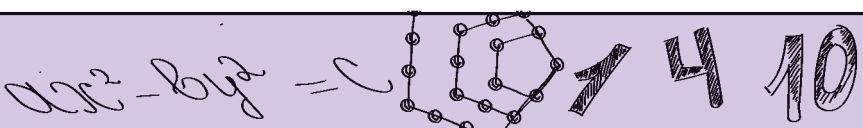
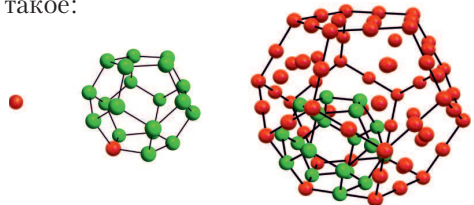
В общем случае задача отыскания чисел, которые являются одновременно и k -угольными, и l -угольными, сводится к решению в целых числах уравнений вида $ax^2 - by^2 = c$. Такие уравнения хорошо изучены, есть алгоритмы их решения.

В случае пространственных фигурных чисел получаются уравнения выше второй степени; таким образом, задача сильно усложняется.

Пространственные фигурные числа определяются аналогично плоским. Например, тетраэдральные числа 1, 4, 10, 20, ... имеют следующее геометрическое представление:



А додекаэдральные числа 1, 20, 84, ... такое:



Снова каждый следующий слой точек получается из предыдущего увеличением ребра многогранника на 1. На гранях n -го слоя точки образуют n -е двумерное k -угольное число с k , равным числу углов грани.

Интересную историю имеет задача об отыскании чисел, которые могут быть представлены одновременно и в виде пирамиды с квадратным основанием, и в виде квадрата. Эта сложная задача известна как задача о пушечных ядрах. Оказывается, ее единственным решением, кроме очевидного решения $n = 1$, является $n = 70^2$.

Рассмотрим, когда кубическое число является треугольным. Снова получаем уравнение в целых числах:

$$\frac{n(n+1)}{2} = m^3,$$

преобразовать которое можно так:

$$(2n+1)^2 - (2m)^3 = 1.$$

Таким образом, мы приходим к задаче о том, когда степени двух чисел отличаются на 1, т.е. к знаменитой гипотезе Каталана (а после 2002 года – теореме П. Михайлеску), которая говорит, что единственными решениями будут $n = m = 1$.

Красивую геометрическую интерпретацию имеет задача о поиске тетраэдральных чисел T_n , которые одновременно являются додекаэдральными D_n . Справедливы следующие явные формулы для этих чисел:

$$T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6},$$

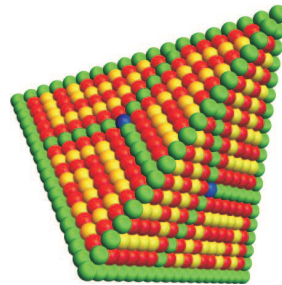
$$D_n = \frac{n(3n-1)(3n-2)}{2},$$

их доказательство оставим в качестве задачи.

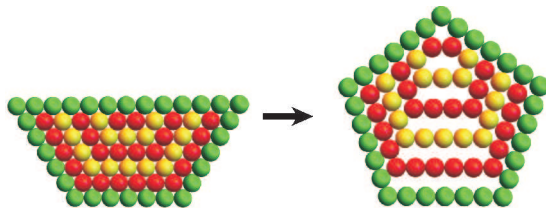
Можно заметить, что $(3n+1)$ -е тетраэдральное число является $(n+1)$ -м додекаэдральным. Таким образом, в этом случае задача оказалась совсем простой. Суть того, почему $T_{3n+1} = D_{n+1}$, можно показать

геометрически. Сделаем это для $n = 6$.

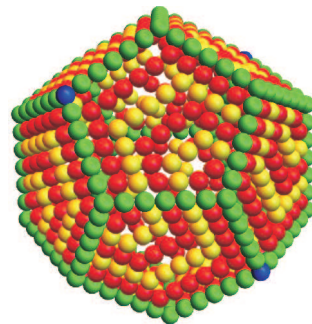
Разобьем каждую грань тетраэдра на три трапеции:



Затем будем деформировать тетраэдр так, чтобы каждая трапеция перешла в правильный пятиугольник:

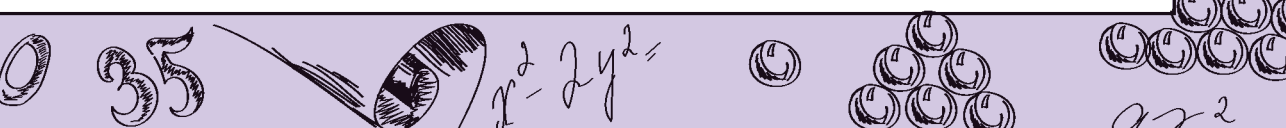
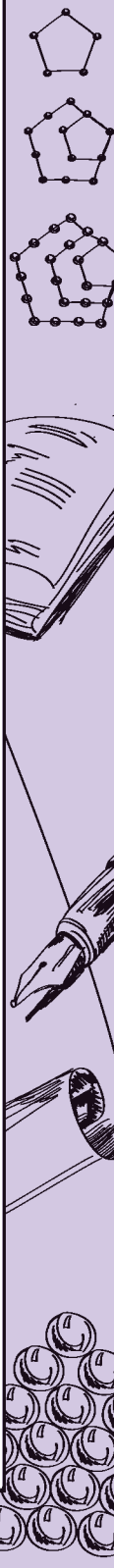


Тогда каждая грань тетраэдра даст три грани будущего додекаэдра. В итоге получим додекаэдр:



Проделав эту операцию с каждым слоем, мы перейдем от тетраэдрального представления числа к додекаэдральному.

*Материал подготовили Н. Панюнин,
А. Устинов*



(Начало см. на с. 30)

$\left(\lambda \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, где $\lambda = \cos\beta$. Точка R лежит на отрезке BZ , поэтому вектор \overline{PR} равен $t\overline{PB} + (1-t)\overline{PZ}$ для некоторого t , и точка R имеет координаты $\left(t\lambda \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1-t}{2}\right)$.

Угол RON равен 30° , поэтому его тангенс $\frac{RN}{ON}$ равен $\frac{1}{\sqrt{3}}$. При этом $ON = OP + PN = \frac{\sqrt{3}}{6} + t\lambda \frac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда $\frac{1-t}{2\left(t\lambda \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

т.е. $\lambda = \frac{2-3t}{3t}$. Далее, $H = 2TR = 2PN \operatorname{tg}\beta = 2\lambda \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - 1} = t\sqrt{3(1-\lambda^2)}$. Подставляя выражение λ через t , получаем $H^2 = \frac{12t-4}{3}$.

Но в то же время $L = 12NR = 6(1-t)$, значит, $H^2 = \frac{8-2L}{3}$.

В исходном положении минимальная высота $H = 0$, а $L = 4$. Когда L укорачивается до 3, высота готового октаэдра равна расстоянию между гранями $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Для моделей тетраэдра, куба, додекаэдра, изображенных на рисунке 1, зависимость $H^2(L)$ имеет вид квадратного трехчлена $H^2 = aL^2 + bL + c$. Схема вывода формул такая же, но вычисления более громоздкие.

Соберем в таблицу формулы для моделей с ребром длины 1. В случае куба мы пренебрегли размером d треугольной площадки (общая формула слишком длинная).

Модель	$H^2(L)$	L_{\max}	L_{\min}
Тетраэдр	$\frac{1}{8}L^2 - \frac{3}{2}L + 3$	$6 - 2\sqrt{3} \approx 2,5$	2
Октаэдр	$-\frac{2}{3}L + \frac{8}{3}$	4	3
Куб	$\frac{1}{18}L^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}L + 8$	$6(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \approx 6,2$	$3\sqrt{2} \approx 4,2$
Додекаэдр	$\frac{1}{5\sqrt{5}}L^2 + \frac{2}{5}L + \left(4 + \frac{8}{\sqrt{5}}\right)$	$5 + 3\sqrt{5} = 11,7$	$\frac{5 + 5\sqrt{2}}{2} = 8,1$

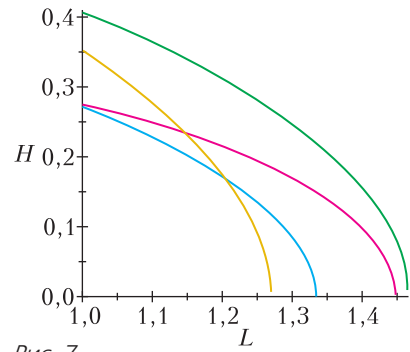


Рис. 7

На рисунке 7 изображены графики зависимости $H(L)$ при условии, что длина обруча L_{\min} равна 1. Тетраэдру соответствует желтая кривая, октаэдру — синяя, кубу — зеленая, а додекаэдру — красная. Интересно, что кривая зависимости $H(L)$ для тетраэдра лежит на гиперболе, для октаэдра — на параболе, а для куба и додекаэдра — на эллипсе!

Следующий красивый факт позволяет упростить вычисления длин плоских сечений многогранников. Сформулируем его в виде упражнения.

Упражнение 1. Пересечем многогранник тремя параллельными плоскостями, расстояния между которыми равны. Докажите, что если внутри слоя между крайними плоскостями нет вершин многогранника, то периметры сечений образуют арифметическую прогрессию.

Этот факт позволяет заметить, что для каждого тела на рисунке 1 длины всех трех сечений совпадают.

Упражнения

2. Посчитайте в уме длины обручей на кубе, октаэдре и тетраэдре, если длина ребра равна единице.

3. Будет ли держаться обруч на горизонтальном сечении икосаэдра, если икосаэдр поставлен а) на вершину, как наш куб; б) на ребро, как наш тетраэдр; в) на грань, как октаэдр и додекаэдр?

4. Вычислите зависимость H от L для модели куба, складывающейся из двух Г-образных деталей.

Зная зависимость $H(L)$, можно оценить силу F , необходимую для «расплющивания» модели обратно в плоскую

заготовку. Работа по сплющиванию модели на малую величину dH равна произведению силы на перемещение, т.е. FdH . При этом упругий обруч удлинится на малую величину dL . Чтобы сила F преодолела силу упругости $F_{\text{упр}}$, необходимо, чтобы $F_{\text{упр}}dL < FdH$. Согласно закону Гука, сила упругости равна $k(L - L_0)$, где k – коэффициент упругости резинки, а L_0 – ее «расслабленная» длина. Итак, чтобы модель сложилась, необходимо сжимать ее, выполняя условие

$|k(L - L_0)| < F \left| \frac{dH}{dL} \right|$. Математически величина $\frac{dH}{dL}$ – это производная $H'(L)$. Если вы не знакомы с понятием производной, то не беда: геометрически величина $\frac{dH}{dL}$ – это тангенс угла наклона (крутизна) графика в соответствующей точке. Чем круче график и чем слабее натянутость обруча $k(L - L_0)$, тем легче сжать модель. Например, мы уже говорили, что тетраэдр и октаэдр складываются более «капризно». Это связано, в частности, с тем, что графики для них более круты и суммарный «ход» резинки меньше.

Наша физическая модель весьма идеализирована, поскольку мы пренебрегли и толщиной объектов, и сопротивлением сгибанию, и, самое главное, не учитывали силы трения. Трение препятствует и расплющиванию, и росту. Аккуратно рассчитать трение ребер модели друг о друга и трение обруча о ребра и грани довольно сложно.

Именно из-за трения модели «застревают» на полпути к сборке. Для уменьшения трения можно обклеить ребра модели скользким скотчем. Если резинка слишком тугая, предотвратить смятие модели можно, сшив центры заготовок ниткой, но не очень туго.

Упражнение 5. Собранную модель немного расплющили, руки убрали, а модель не складывается. По ней легко щелкнули – и она сложилась. Почему так происходит?

Надеемся, что читатель получит удовольствие и от постройки моделей, и от самостоятельного вывода математических формул, и от строгого обоснования физических выводов. Предлагаем подумать о моделях для других многогранников, не обязательно правильных.

Отметим, что существуют и другие способы получать разнообразные самоскладывающиеся многогранники, используя резинки, уголки, каркасы, стерженьки и т.п. В качестве обзорной статьи по этим методам можно порекомендовать статью [5].

Еще одно наблюдение. Довольно естественно относиться к обручу на многограннике как к окружности на сфере. В частности, естественно обозначить буквой π отношение длины обруча к высоте многогранника, ведь для сферы это будет настоящее π .

Упражнение 6. Вычислите π для тетраэдра, октаэдра, честного куба и додекаэдра, а также среднее арифметическое этих чисел.

Одни числа получатся заметно меньше настоящего π (для тех многогранников, высотой которых является расстояние между гранями), другие – больше. Однако среднее арифметическое четырех наших «пи» отличается от настоящего π меньше чем на 0,001! Будем считать это совпадение залогом того, что из разных видов геодезических мы выбрали именно те, которые нужно.

Литература

1. Г.Штейнгауз. Математический калейдоскоп. – М.–Л.: Гостехиздат, 1949. – [Переиздание: 1981].
2. <https://etudes.ru/models/steinhaus-dodecahedron>
3. В.Протасов. Кратчайшие пути и гипотеза Пуанкаре. – «Квант», 2020, № 11–12.
4. <https://etudes.ru/etudes/platonic-solids-geodesics>
5. S. Louise Gould. Using Geometer's Sketchpad to Construct Pop-up Polyhedra as a Tool for Classroom Study of Geometry. – Bridges 2009: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture.

Гравитация внутри Земли и ее физические характеристики

Б. МУКУШЕВ

В ОСНОВЕ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИОННОГО поля лежит открытый Ньютоном закон всемирного тяготения. Этот закон гласит: каждая из двух материальных точек притягивается к другой с силой, направленной по прямой, соединяющей эти точки, пропорциональной массе каждой точки, т.е. пропорциональной произведению их масс, и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. В векторном виде этот закон записывается так:

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}.$$

Здесь \vec{r}_{12} – радиус-вектор массы m_2 относительно массы m_1 , \vec{F}_{12} – сила тяготения массы m_2 к массе m_1 (очевидно, что $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$), $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$ – гравитационная постоянная. Эта формула пригодна также для расчета тяготения тел со сферически симметричным распределением масс (в частности, однородных шаров).

Напряженностью \vec{g} поля тяготения в данной его точке называется векторная величина, равная силе, действующей на единичную массу, помещенную в эту точку. Для поля тяготения материальной точки или тела со сферически симметричным распределением массы (когда r_{21} больше или равно радиусу этой сферы) из закона тяготения имеем

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} = -G \frac{m_1}{r_{21}^2} \vec{r}_{21}.$$

Напряженность поля тяготения направлена всегда к массе, создающей это поле.

В случае Земли напряженность поля тяготения представляет собой ускорение свободного падения. Принимая Землю за шар мас-

сой M и радиусом R , получим формулу для модуля ускорения свободного падения (или ускорение силы тяжести) на любом расстоянии $r > R$ от центра Земли:

$$g(r) = G \frac{M}{r^2}.$$

Ускорение свободного падения к Земле на ее поверхности равно $g_R = G \frac{M}{R^2}$.

Если поле тяготения создано не одной, а несколькими массами, то напряженность такого поля тяготения находится, согласно принципу суперпозиции, как векторная сумма напряженностей полей \vec{g}_i , создаваемых отдельными массами:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \dots + \vec{g}_n = \sum_{i=1}^n \vec{g}_i.$$

Рассмотрим гравитационное поле точечной массы m (рис. 1). Окружим ее воображаемой сферой радиусом R и подсчитаем поток напряженности через поверхность этой сферы. Для этого разобьем сферу на малые участки площадью ΔS , которые можно считать плоскими, вычислим поток через каждый участок, потом найдем сумму этих потоков. Условимся считать, что перпендикуляр \vec{n} к каждому из участков направлен изнутри сферы наружу. Этот единичный вектор называется внешней нормалью к поверхности. Напряженность поля точечной массы m на поверхности постоянна ($g = Gm/R^2$) и направлена в сторону, противоположную внешней нормали. Поток вектора напряженности через сферу равен

$$\Phi = -4\pi R^2 g = -4\pi G m.$$

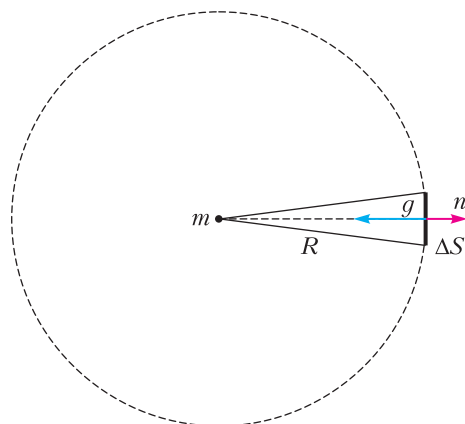


Рис. 1. Гравитационное поле точечной массы

Поток вектора напряженности не зависит от радиуса сферы, а значит, и от формы поверхности, внутри которой находится m . Если поместить внутрь замкнутой поверхности любой формы произвольно расположенные точечные массы m_1, m_2, \dots, m_k , то, в соответствии с принципом суперпозиции, полный поток напряженности через эту поверхность будет равен

$$\Phi = -4\pi G \sum_{i=1}^k m_i.$$

Это утверждение называется законом Гаусса. Если Землю считать шаром со сферически симметричным распределением массы, то гравитационный потенциал нашей планеты выражается в таком виде:

$$\varphi(r) = G \frac{M}{r},$$

где $r \geq R$, R – радиус Земли. Гравитационный потенциал – скалярная величина. Согласно принципу суперпозиции, гравитационный потенциал в данной точке поля равен алгебраической сумме гравитационных потенциалов всех n материальных точек, создающих это поле:

$$\varphi = G \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \dots + \frac{m_n}{r_n} \right) = G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i}.$$

Достаточно хорошо исследованы физические параметры гравитационного поля Земли, Солнца и других планет в пространстве Солнечной системы. Однако имеется очень мало научных данных, характеризующих гравитацию внутри Земли, хотя внутренние физические характеристики Земли исследуются уже более 300 лет. На основе теоретических и экспериментальных геофизических исследований созданы многочисленные модели, в которых представлены предположительные значения плотности, давления, напряженности гравитационного поля (ускорения силы тяжести) в зависимости от глубины Земли (см. таблицу).

Физические параметры внутренних слоев Земли

Расстояние от центра, км	6371	6171	5324	4311	3451	2416	1380	0
Давление, ГПа	0	6,50	39,90	88,90	138,6	244,5	323,9	365,7
Плотность, кг/м ³	3100	3460	4580	5120	5560-10080	11460	12280	12800
Ускорение силы тяжести, м/с ²	9,81	9,91	9,86	9,90	10,20	7,79	5,90	0

Рассмотрим ряд примеров, посвященных анализу характеристик гравитационного поля внутри Земли.

Пример 1. Докажите, что гравитационное поле, создаваемое тонким сферическим слоем, однородным по поверхностной плотности, внутри сферы, окруженной этим слоем, отсутствует.

Анализ. Рассмотрим шаровой слой, толщина которого мала. Поместим в произвольную точку внутри сферы точечную пробную массу m (рис. 2). Выделим на поверхности

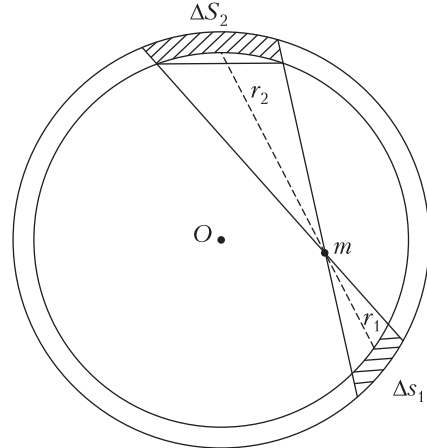


Рис. 2. Пробное тело в гравитационном поле, создаваемом тонким сферическим слоем

слоя площадку ΔS_1 , построим конус с вершиной в m и основанием ΔS_1 и продолжим боковую поверхность конуса до нового пересечения со слоем. Эта поверхность «вырежет» из слоя площадку ΔS_2 . Нужно выбрать площадки настолько малыми, чтобы соответствующие массы Δm_1 и Δm_2 по отношению к пробной массе m можно было считать точечными массами. Тогда m притягивается этими массами силами

$$F_1 = G \frac{m\Delta m_1}{r_1^2} \text{ и } F_2 = G \frac{m\Delta m_2}{r_2^2}.$$

Эти силы направлены в противоположные

стороны. Поскольку ΔS_1 и ΔS_2 малы по сравнению с площадью сферы, выделенные участки можно считать плоскими. Тогда

$$\frac{\Delta S_1}{\Delta S_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{\Delta m_1}{\Delta m_2}. \text{ Приходим к выводу, что}$$

$F_1 = F_2$, т.е. равнодействующая сил взаимодействия m с массами Δm_1 и Δm_2 равна нулю. Поскольку весь шаровой слой можно разбить на пары элементов, обладающих этим свойством, сила взаимодействия m со слоем равна нулю и не зависит от положения точки m внутри слоя. Следовательно, поле внутри слоя отсутствует.

Пример 2. а) Считая, что Земля является однородным жидким шаром плотностью $\rho = 5500 \text{ кг/м}^3$, определите давление в центре Земли (теоретическая модель строится при $\rho = \text{const}$). Вращением Земли пренебречь.

б) Постройте график изменения давления внутри Земли в зависимости от расстояния до ее центра, используя теоретическую модель. На основе экспериментальных данных о давлении Земли на различных глубинах, представленных в таблице, постройте реальный график изменения давления внутри Земли в зависимости от расстояния до ее центра.

Анализ. а) Известно, что гравитационное поле, создаваемое однородным по плотности тонким сферическим слоем, внутри сферы, окруженной этим слоем, отсутствует. Выделим внутри Земли тонкий сферический слой, концентричный земной поверхности и удаленный от центра планеты на расстояние x . Если Δx – толщина слоя, примем, что $\Delta x \ll x$, чтобы поле тяготения в пределах слоя можно было считать однородным. На малую площадку ΔS этого слоя действует сила тяготения, направленная к центру и равная

$$\Delta F_x = \frac{G \cdot \frac{4}{3} \pi x^3 \rho \cdot \Delta x \cdot \Delta S \cdot \rho}{x^2} = \frac{4}{3} G \pi \rho^2 x \Delta x \Delta S.$$

Давление, которое оказывает этот слой на нижележащие слои, равно

$$\Delta p_x = \frac{\Delta F_x}{\Delta S} = \frac{4}{3} G \pi \rho^2 x \Delta x.$$

Считаем, что Земной шар состоит из тонких концентрических слоев. Тогда давление $p(x)$ на расстоянии r от центра можно представить как сумму давлений всех слоев:

$$p(x) = \frac{4}{3} G \pi \rho^2 \cdot \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_i x_i \Delta x_i,$$

где i – номер слоя и суммирование выполняется для всех слоев, у которых $r \leq x_i \leq R$ (R – радиус Земли). Получаем

$$p(x) = \frac{4}{3} G \pi \rho^2 \int_r^R x dx = \frac{2}{3} G \pi \rho^2 (R^2 - r^2).$$

Давление в центре Земли равно

$$p(0) = \frac{2}{3} G \pi \rho^2 R^2 \approx 1,7 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2 = 170 \text{ ГПа}.$$

б) С помощью пакета прикладных программ Mathcad 15 построим теоретический и экспериментальный графики изменения давления внутри Земли (рис. 3; красная и синяя линии соответственно). В центре Земли экс-

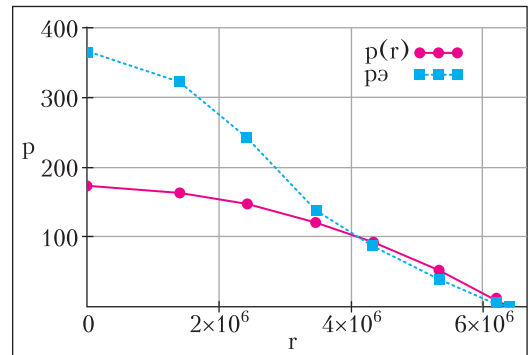


Рис. 3. Теоретический и экспериментальный графики изменения давления внутри Земли в зависимости от расстояния до ее центра

периментальное значение давления равно 365,7 ГПа. Хотя вблизи поверхности Земли теория и эксперимент согласуются, но на большой глубине, вследствие быстрого роста плотности, давление растет быстрее, чем в теоретической модели Земли.

Пример 3. На основе экспериментальных данных о плотности Земли на различных глубинах, представленных в таблице, постройте теоретический и экспериментальный графики изменения плотности Земли в зависимости от расстояния до ее центра.

Анализ. Опираясь на экспериментальные данные, приходим к выводу, что плотность Земли не постоянная величина – она с глубиной возрастает. Будем считать это возрастание линейным, т.е. с расстоянием r от центра Земли плотность меняется по закону $\rho(r) = \rho_0 - \alpha r$, где $\rho_0 = 12800 \text{ кг/м}^3$ – плотность в центре Земли, $\rho(R) = 3100 \text{ кг/м}^3$ – плотность на ее поверхности, $\alpha > 0$ – постоянная величина. Вычисление дает

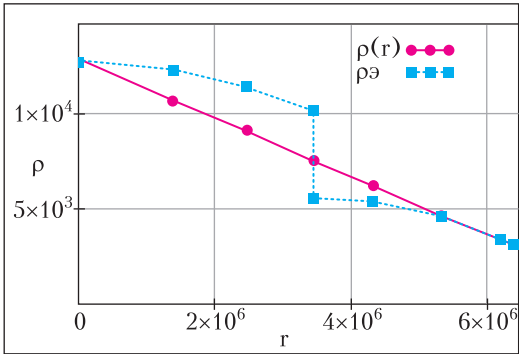


Рис. 4. Теоретический и экспериментальный графики плотности внутри Земли в зависимости от расстояния до ее центра

$$\alpha = \frac{\rho_0 - \rho(R)}{R} \approx 1,52 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^4.$$

Построим график линейной зависимости плотности Земли от расстояния до ее центра (красная линия на рисунке 4) и график экспериментальных данных о плотности Земли на различных глубинах (синие квадратики).

Пример 4. Постройте график зависимости ускорения силы тяжести $g(r)$ (или напряженности гравитационного поля) в поле тяготения Земли в зависимости от расстояния до центра планеты. Плотность Земли считайте постоянной величиной.

Анализ. Уже говорилось о том, что однородный шар вне себя создает такое поле тяготения, как если бы вся его масса была сосредоточена в центре. Таким образом, вне Земли ускорение меняется по закону $g(r) = G \frac{M}{r^2}$. Поместим единичную пробную массу в точку A на расстоянии $r < R$ от центра (рис. 5). Как отмечалось в первом примере,

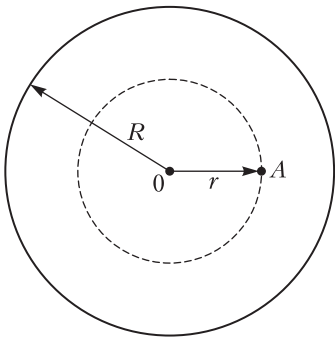


Рис. 5. Взаимодействие между единичной пробной массой и шаром радиусом r

сила взаимодействия этой массы с окружающим ее сферическим слоем равна нулю. Следовательно, пробная масса взаимодействует только с шаром, масса которого равна $m(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = Mr^3/R^3$, где ρ – плотность, M – масса, R – радиус Земли, и ускорение в точке A равно

$$g(r) = G \frac{m(r)}{r^2} = G \frac{Mr}{R^3} = g_R \frac{r}{R},$$

где $r \leq R$ и $g_R = G \frac{M}{R^2} \approx 9,81 \text{ м/с}^2$ – ускорение силы тяжести на поверхности Земли. Таким образом, внутри Земли ускорение меняется прямо пропорционально расстоянию от центра планеты. А вне Земли

$$g(r) = G \frac{m(R)}{r^2} = g_R \frac{R^2}{r^2}, \text{ где } r \geq R.$$

Графики этих зависимостей представлены на рисунке 6.

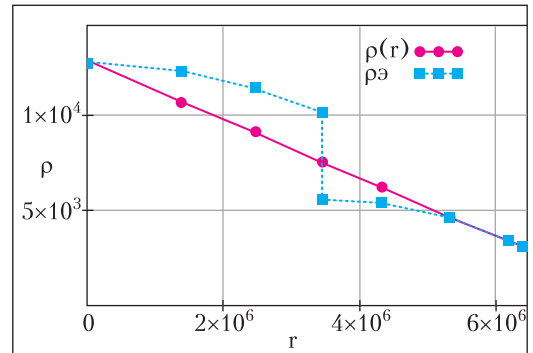


Рис. 6. Графики ускорения силы тяжести внутри (красная линия) и вне Земли (синяя линия)

Формулу $g(r) = g_R \frac{r}{R}$ для определения ускорения силы тяжести внутри Земли в условиях, когда плотность планеты считается постоянной, можно называть *первой теоретической моделью* напряженности гравитационного поля внутри Земли. Опираясь на экспериментальные данные (пример 3), мы приходим к выводу о несостоятельности теоретической модели, которая была рассмотрена на примере 4. Плотность Земли не постоянная величина, она в зависимости от глубины возрастает, что будет учтено в следующей теоретической модели.

Пример 5. Нужно создать теоретическую модель напряженности гравитационного поля

внутри Земли с учетом линейного возрастания плотности Земли в зависимости от расстояния до ее центра.

Анализ. Для оценочного расчета выберем простейший линейный закон изменения плотности (см. пример 3). Вычислим массу шара радиусом r внутри Земли, центр которого совпадает с центром Земли, $r < R$:

$$m(r) = \int \rho(r) dV = \int (\rho_0 - \alpha r) \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi r^3 \left(\frac{\rho_0}{3} - \frac{\alpha}{4} r \right) + C, \\ m(0) = 0 = C,$$

$$g(r) = G \frac{m(r)}{r^2} = \frac{4\pi G}{3} \left(\rho_0 r - \frac{3\alpha r^2}{4} \right).$$

Поскольку $g_R = G \frac{M}{R^2} = \frac{4\pi G R \rho_{cp}}{3}$, получим

$$g(r) = g_R \left(\frac{\rho_0}{\rho_{cp}} \frac{r}{R} - \frac{3}{4} \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_{cp}} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right).$$

Эта формула есть *вторая теоретическая модель* напряженности гравитационного поля внутри Земли. Исследуя эту функцию с помощью пакета прикладных программ Mathcad 15, можно получить графики, представленные на рисунке 7. Зеленая линия соответствует первой теоретической модели, кривая красного цвета – второй теоретической модели, синие квадратики – экспериментальные данные ускорения силы тяжести внутри Земли. Заметим, что физические характеристики второй теоретической модели напряженности гравитационного поля внутри Земли более близки к результатам эксперимента.

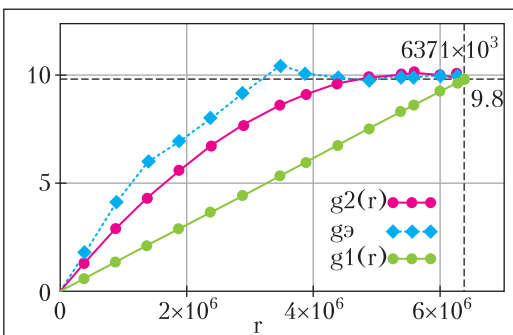


Рис. 7. Графики ускорения силы тяжести на различных глубинах Земли в зависимости от расстояния до ее центра

Пример 6. Постройте график потенциала поля тяготения Земли в зависимости от расстояния до центра планеты. Землю можно считать однородным шаром.

Анализ. На тело массой m действует сила $F(r) = -GmMr^3/R^3$ при $r < R$ (см. пример 4). Эта сила направлена к центру Земли. Используем соотношение $F = -\frac{dU}{dr}$, где U – потенциальная энергия тела в гравитационном поле Земли. Отсюда $U(r) = -\int Fdr + C$, или $U(r) = \int GmMrdr/R^3 + C$. Константа C находится из граничного условия $U(R) = -GmM/R$. После подстановки получим $C = -3GmM/(2R)$, следовательно,

$$U(r) = G \frac{mM}{R} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 - \frac{3}{2} \right).$$

Поскольку потенциал гравитационного поля численно равен потенциальной энергии тела единичной массой, потенциал внутри Земли запишем в таком виде:

$$\varphi(r) = G \frac{M}{R} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 - \frac{3}{2} \right).$$

Известно, что при $r \geq R$ потенциал вне Земли равен $\varphi(r) = -G \frac{M}{r}$. Зависимости $\varphi(r)$ внутри и вне Земли показаны на рисунке 8. На поверхности Земли потенциал гравитационного поля равен $\varphi(R) = -G \frac{M}{R}$, а в центре Земли он равен $\varphi(0) = -3G \frac{M}{2R}$.

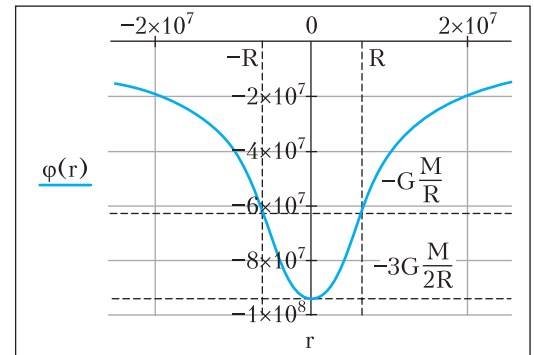


Рис. 8. График потенциала в поле тяготения Земли в зависимости от расстояния до центра планеты

Международная физическая олимпиада

С 10 по 17 июля 2023 года в Токио (Япония) проходила 53-я Международная олимпиада школьников по физике (IPhO-2023). В этом самом престижном мировом состязании среди учащихся средних школ приняли участие более 80 стран. Сборная России выступала под олимпийским флагом, т.е. как сборная индивидуальных участников.

Россию представляли пять школьников, которые прошли многоэтапные испытания и успешно выступили на национальных и международных состязаниях и отборах:



Слева направо: А.Ершов, В.Доля, Р.Бурцев, В.Бобков, Е.Потапов

Вячеслав Бобков – Москва, школа 1589,
Роман Бурцев – Московская область,
Физико-технический лицей имени П.Л. Капицы,

Всеволод Доля – Московская область,
Физико-технический лицей имени П.Л. Капицы,

Александр Ершов – Московская область,
Физико-технический лицей имени П.Л. Капицы,

Егор Потапов – Москва, Школа Центра педагогического мастерства.

Сборная России традиционно показала высочайший результат и завоевала пять золотых медалей.

Ниже приводятся условия задач теоретического тура олимпиады.

Теоретический тур

Задача 1. Свойства коллоидных частиц (10 баллов)

Наука о коллоидных системах полезна для определения свойств частиц почвы, так как основная их часть может быть рассмотрена как коллоидные частицы микрометрового размера. Например, броуновское движение (случайные движения коллоидных частиц) может быть использовано для измерения размера частицы.

Часть А. Движение коллоидных частиц (1,6 балла)

Рассмотрим одномерное броуновское движение коллоидной частицы массой M . Уравнение движения для скорости частицы $v(t)$ выглядит следующим образом:

$$M\dot{v} = -\gamma v(t) + F(t) + F_{\text{вн}}(t), \quad (1)$$

где γ – коэффициент, характеризующий сопротивление, $F(t)$ – сила, возникающая из-за случайных столкновений с молекулами воды, $F_{\text{вн}}(t)$ – внешняя сила. В части А будем считать, что $F_{\text{вн}}(t) = 0$.

A1. Рассмотрим ситуацию, когда молекула воды сталкивается с частицей в момент времени $t = t_0$ и передает импульс I_0 . После столкновения $F(t) = 0$. Если до столкновения $v(t) = 0$, то после столкновения $v(t) = v_0 e^{-(t-t_0)/\tau}$ для времен $t > t_0$. Найдите v_0 и τ , используя I_0 и необходимые параметры из выражения (1).

В следующем пункте вы можете выражать ответы через τ .

A2. На самом деле происходит множество столкновений молекул воды с частицей, одно за другим. Столкновение с номером i передает импульс I_i и происходит в момент времени

t_i . Найдите $v(t)$ при условии, что $v(0) = 0$. Явно укажите неравенство для t_i , которое должно быть выполнено для заданного t . В листе ответов не обязательно указывать данный диапазон в выражении для $v(t)$.

Часть В. Эффективное уравнение движения (1,8 балла)

Предыдущие результаты показывают, что скорости частицы $v(t)$ и $v(t')$ могут рассматриваться как некоррелированные случайные величины при условии $|t - t'| \gg \tau$. Исходя из этого, для описания одномерного броуновского движения можно предложить модель случайных изменений скорости в каждый временной интервал $\delta (\gg \tau)$, т.е.

$$v(t) = v_n \quad (t_{n-1} < t \leq t_n),$$

где $t_n = n\delta$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) и v_n – случайная величина. Эта случайная величина удовлетворяет условию

$$\langle v_n \rangle = 0, \quad \langle v_n v_m \rangle = \begin{cases} C & (n = m), \\ 0 & (n \neq m), \end{cases} \quad (2)$$

где параметр C зависит от δ . Здесь $\langle X \rangle$ обозначает среднее значение величины X . Другими словами, если выбирать случайную величину X бесконечное количество раз, то среднее значение этой выборки будет $\langle X \rangle$.

Рассмотрим смещение частицы $\Delta x(t) = x(t) - x(0)$ для $t = N\delta$, где N – некоторое целое число.

В1. Найдите $\langle \Delta x(t) \rangle$ и $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$, результаты выразите через C , δ , и t .

В2. Величина $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ называется среднеквадратичным смещением. Эта величина наблюдается в случае броуновского движения и в предельном случае $\delta \rightarrow 0$. Можно показать, что $C \propto \delta^\alpha$ и $\langle \Delta x(t)^2 \rangle \propto t^\beta$. Найдите численные значения α и β .

Часть С. Электрофорез (2,7 балла)

Электрофорез – перенос заряженных частиц в электрическом поле. Взвесь коллоидных частиц массой M и зарядом $Q (> 0)$ помещается в узкий канал с поперечным сечением A (рис. 1,а). Мы пренебрегаем взаимодействием между частицами, влиянием стенок, жидкости и ионов в ней, а также гравитацией.

Если приложить однородное электрическое поле напряженностью E в направлении

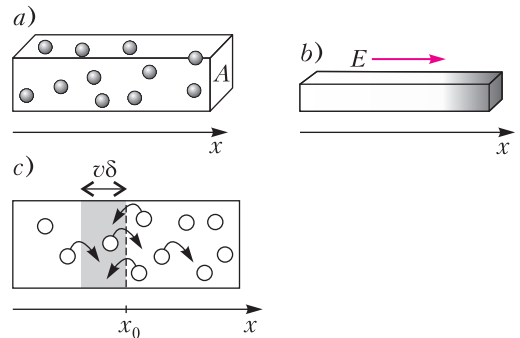


Рис. 1. Иллюстрации для части С

оси x , частицы сдвигаются и их концентрация $n(x)$ (количество частиц на единицу объема) становится неоднородной (рис. 1,б). Если затем электрическое поле E убрать, то неоднородность со временем пропадает. Это происходит из-за броуновского движения частиц. Если $n(x)$ неоднородна, то количества частиц, переходящих слева направо и справа налево, отличаются (рис. 1,с). Это приводит к наличию потока частиц $J_D(x)$. Последняя величина есть среднее количество частиц, которые имеют координату x и движутся вдоль оси x , деленное на площадь поперечного сечения и интервал времени. Поток удовлетворяет соотношению

$$J_D(x) = -D \frac{dn}{dx}(x), \quad (3)$$

где D – коэффициент диффузии.

Для простоты предположим, что одна половина частиц имеет скорость $+v$, а вторая половина имеет скорость $-v$. Пусть $N_+(x_0)$ – количество частиц, имеющих скорость $+v$, которые пересекают плоскость x_0 слева направо через единичную площадь в единицу времени. Частицы со скоростями $+v$, которые пересекут плоскость x_0 за временной интервал δ , находятся в темной области (см. рис. 1,с). Так как величина δ мала, получаем, что $n(x) \approx n(x_0) + (x - x_0) \frac{dn}{dx}(x_0)$ в этой области.

С1. Найдите $N_+(x_0)$, выразите через v , δ , $n(x_0)$ и $\frac{dn}{dx}(x_0)$.

Определим $N_-(x_0)$ по аналогии с $N_+(x_0)$ для скоростей $-v$. Тогда полный поток $J_D(x_0) = \langle N_+(x_0) - N_-(x_0) \rangle$. Согласно выражению (2), $\langle v^2 \rangle = C$.

С2. Найдите $J_D(x_0)$, при необходимости выразите через C , δ , $n(x_0)$ и $\frac{dn}{dx}(x_0)$. Используя это и выражение (3), выразите D через C и δ . Также найдите $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ через D и t .

Далее рассмотрим явления, связанные с осмотическим давлением p . Оно находится по формуле $p = \frac{n}{N_A} RT = nkT$, где N_A – постоянная Авогадро, R – универсальная газовая постоянная, T – температура, $k = \frac{R}{N_A}$ – постоянная Больцмана. Рассмотрим неоднородную концентрацию, которая образовалась под действием электрического поля E (см. рис. 1, *b*). Так как $n(x)$ зависит от x , то и $p(x)$ тоже. Сила, связанная с $p(x)$ и $p(x + \Delta x)$, должна быть уравновешена силой электрического поля E , действующей на частицу (рис. 2). Здесь мы рассматрива-

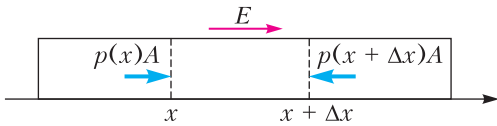


Рис. 2. Равенство сил

ем малый интервал Δx , поэтому внутри этого интервала можно считать $n(x)$ постоянным, тогда как $n(x + \Delta x) - n(x) \approx \Delta x \frac{dn}{dx}(x)$.

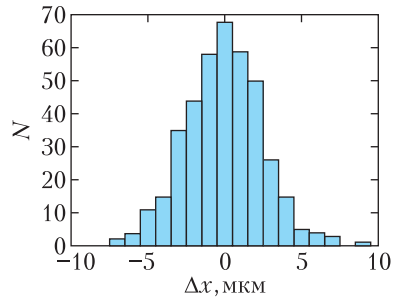
С3. Выразите $\frac{dn}{dx}(x)$ через $n(x)$, T , Q , E и k .

Теперь рассмотрим условие баланса потоков. Кроме потока $J_D(x)$ из-за броуновского движения, присутствует поток $J_Q(x)$ из-за наличия электрического поля. Он равен $J_Q(x) = n(x)u$, где u – установившаяся скорость частиц, движущихся под действием поля.

С4. Для определения u будем использовать выражение (1), в котором $F_{\text{вн}}(t) = QE$. Так как $v(t)$ флуктуирует, будем рассматривать $\langle v(t) \rangle$. Считая $\langle v(0) \rangle = 0$ и $\langle F(t) \rangle = 0$, найдите $\langle v(t) \rangle$ и получите $u = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle v(t) \rangle$.

С5. Условие баланса потоков записывается как $J_D(x) + J_Q(x) = 0$. Выразите коэффициент диффузии D через k , γ и T .

Часть D. Среднеквадратичное смещение (2,4 балла)



Δx	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4
N	0	0	0	2	4	11	15

Δx	-3	-2	-1	0	1	2	3
N	35	44	58	68	59	50	26

Δx	4	5	6	7	8	9	10
N	15	5	4	3	0	1	0

Рис. 3. Гистограмма для смещений

Предположим, что мы наблюдаем в воде броуновское движение отдельной сферической коллоидной частицы радиусом $a = 5,0$ мкм. На рисунке 3 показана гистограмма смещений Δx , измеренных вдоль оси x каждые $\Delta t = 60$ с. Коэффициент, характеризующий сопротивления, равен $\gamma = 6\pi\eta a$, где $\eta = 8,9 \cdot 10^{-4}$ Па · с – вязкость воды. Температура $T = 25$ °С.

D1. Оцените значение N_A с точностью до двух значащих цифр, не используя тот факт, что это постоянная Авогадро. Используйте данные рисунка 3. Универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(К · моль). Не используйте значение постоянной Больцмана k из таблицы констант. Имейте в виду, что вы можете получить значение постоянной Авогадро, отличное от табличного.

Теперь мы расширим модель из части В так, чтобы она описывала движение частиц с зарядом Q в электрическом поле E . Скорость частицы теперь должна быть заменена на $v(t) = u + v_n(t_{n-1} < t \leq t_n)$, где v_n удовлетворяет выражению (2) и u – установившаяся скорость.

D2. Выразите среднеквадратичное смещение $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ через u , D , и t . Получите приближенные степенные выражения для маленьких t и больших t . Кроме того, получите характерное время t_* , при котором

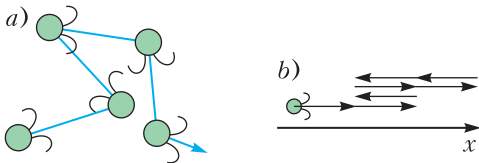


Рис. 4. а) Движение плавающего микроба, б) одномерное движение микроба

происходит изменение. Нарисуйте качественный график зависимости среднев квадратичного смещения от времени в логарифмических координатах. Укажите на нем положение t_* .

Рассмотрим теперь плавающего микроба (рис. 4,а). Для упрощения будем использовать одномерное движение (рис. 4,б). Считаем, что это сферические частицы радиусом a . Микроб плавает со скоростью либо $+u_0$, либо $-u_0$, знак выбирается случайно через интервал времени δ_0 , корреляция отсутствует. Наблюдаемое движение есть комбинация смещения из-за активного перемещения микроба и смещения из-за броуновского движения.

Д3. Рисунок 5 иллюстрирует среднев квадратичное смещение $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ микроба. Для маленьких, больших и промежуточных t

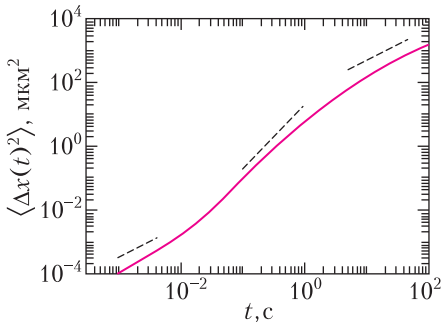


Рис. 5. Среднев квадратичное смещение микроба

выполняются разные степенные законы. Получите эти выражения для каждого диапазона. Выразите выражения через D, u_0, δ_0 и t .

Часть Е. Очистка воды (1,5 балла)

В этой части обсуждается очистка воды от коллоидных частиц почвы при помощи добавления электролитов с целью коагуляции (слипания). Частицы почвы взаимодействуют друг с другом с силами Ван-дер-Ваальса и электростатическими силами. Последние учитывают как поверхностные заряды, так и окружающие их заряды противоположного

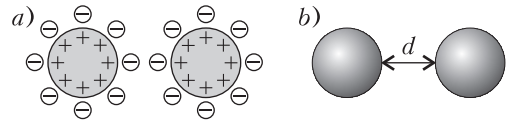


Рис. 6. а) Поверхностный заряд коллоидной частицы и противоионы, б) определение расстояния d

знака (такие заряды называются противоионы, а получившийся слой зарядов – это двойной электрический слой (рис. 6,а)). В результате потенциальная энергия взаимодействия между частицами на расстоянии d (рис. 6,б) равна

$$U(d) = -\frac{A}{d} + \frac{B\epsilon(kT)^2}{q^2} e^{-d/\lambda},$$

где A и B – положительные константы, ϵ – диэлектрическая проницаемость воды, λ – толщина двойного электрического слоя. Считая, что заряды ионов $\pm q$, верно выражение

$$\lambda = \sqrt{\frac{\epsilon kT}{2N_A q^2 c}},$$

где c – молярная концентрация ионов.

Е1. Добавление хлорида натрия (NaCl) в суспензию приводит к коагуляции коллоидных частиц. Определите минимальную концентрацию NaCl, необходимую для коагуляции. Достаточно рассмотреть две частицы в отсутствие тепловых флуктуаций, т.е. $F(t) = 0$ в уравнении движения (1). Считайте, что для данного потенциала конечная скорость достигается мгновенно.

Задача 2. Нейтронные звезды (10 баллов)

Мы обсудим стабильность тяжелых ядер и оценим массу нейтронных звезд теоретически и из экспериментальных данных.

Часть А. Масса и стабильность ядер (2,5 балла)

Энергия покоя $m(Z, N)c^2$ ядра, состоящего из Z протонов и N нейтронов, меньше суммы энергий покоя протонов и нейтронов, далее будем называть их нуклонами, на энергию связи $B(Z, N)$. Здесь c – скорость света в вакууме. Игнорируя малые поправки, мы можем приблизить энергию связи суммой объемного вклада с коэффициентом a_V , поверхностного вклада с коэффициентом a_S , электростатической (кулоновской) энер-

гии с коэффициентом a_K и симметричного слагаемого с коэффициентом $a_{\text{сим}}$ следующим образом:

$$m(Z, N)c^2 = Am_Nc^2 - B(Z, N),$$

$$B(Z, N) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_K \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{сим}} \frac{(N - Z)^2}{A}, (*)$$

где $A = Z + N$ – массовое число, m_N – масса нуклона. При вычислениях используйте $a_V \approx 15,8$ МэВ, $a_S \approx 17,8$ МэВ, $a_K \approx 0,711$ МэВ и $a_{\text{сим}} \approx 23,7$ МэВ (1 МэВ = 10^6 электрон-вольт).

A1. При условии $Z = N$ определите значение A , при котором энергия связи на один нуклон B/A максимальна.

A2. Если A постоянно, зарядовое число наиболее стабильного атома Z^* можно определить, максимизируя $B(Z, A - Z)$. При $A = 197$ вычислите Z^* , используя уравнение (*).

A3. Ядро с большим A может разделиться на более легкие ядра, чтобы минимизировать общую энергию покоя. Для простоты мы рассмотрим только один способ деления, при котором ядро с параметрами (Z, N) распадается на два одинаковых ядра $(Z/2, N/2)$. Это возможно, если выполняется следующее соотношение между энергиями:

$$m(Z, N)c^2 > 2m(Z/2, N/2)c^2.$$

Пусть это соотношение записано в виде

$$Z^2/A > C_{\text{дел}} \frac{a_S}{a_K},$$

получите $C_{\text{дел}}$ с двумя значащими цифрами.

Часть В. Нейтронная звезда как гигантское ядро (1,5 балла)

Очень тяжелые ядра с массовым числом $A > A_{\text{ц}}$, где $A_{\text{ц}}$ – пороговое значение, могут оставаться стабильными относительно распада при достаточно большой гравитационной энергии связи.

B1. Будем считать, что $N = A$ и $Z = 0$ при достаточно больших A и что уравнение (*) продолжает выполняться, если добавить к нему гравитационную энергию связи. Гравитационная энергия связи равна

$$B_{\text{грав}} = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{r},$$

где $M = m_N A$ – масса ядра, $r = r_0 A^{1/3}$ с коэффициентом $r_0 \approx 1,1 \cdot 10^{-15}$ м = 1,1 фм – радиус

ядра. Для гравитационной энергии связи $B_{\text{грав}} = a_{\text{грав}} A^{5/3}$ получите коэффициент $a_{\text{грав}}$ в МэВ с одной значащей цифрой. Затем, игнорируя поверхностный вклад в энергию, оцените $A_{\text{ц}}$ с одной значащей цифрой. При вычислениях используйте $m_N c^2 \approx 939$ МэВ и $G = \hbar c / M_p^2$, где $M_p c^2 \approx 1,22 \cdot 10^{22}$ МэВ и $\hbar c \approx 197$ МэВ · фм.

Часть С. Нейтронная звезда в двойной системе (6,0 баллов)

Некоторые нейтронные звезды являются пульсарами, испускающими электромагнитные волны, которые мы для простоты будем называть светом, с постоянным периодом. Нейтронные звезды часто образуют двойные системы с белыми карликами. Рассмотрим конфигурацию звезд, показанную на рисунке 7. Импульс света от нейтронной звезды **N**

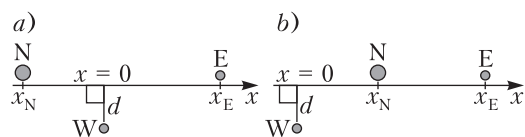


Рис. 7. Конфигурация с осью x вдоль линии, соединяющей **N** и **E**, а) при $x_N < 0$ и б) при $x_N > 0$

движется к Земле **E** и проходит мимо белого карлика **W** в двойной системе. Проводя измерения с этими импульсами, можно точно определить массу **W**, как это объясняется дальше, с помощью чего можно оценить массу **N**.

C1. Как показано на рисунке 8, поместим двое одинаковых неподвижных часов в положения I и II, назовем их часы-I и часы-II, разность высот этих часов $\Delta h (> 0)$, ускорение свободного падения g постоянно. Также будем рассматривать такие же свободно падающие часы-**F**. Будем считать, что изначально наблюдатель находится с часами-**F** и расположен на той же высоте, что и часы-I, его начальная скорость равна нулю. Поскольку часы одинаковые, при измерении они дают одинаковые промежутки времени $\Delta\tau_F = \Delta\tau_I$. Затем часы-**F** начинают свободно падать. Будем работать в свобод-

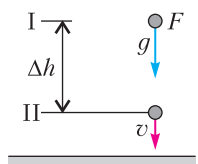


Рис. 8. Схема мысленного эксперимента

но падающей системе отсчета F , которую считаем инерциальной. В этой системе отсчета часы- Π пролетают мимо часов- F со скоростью v , так что величину замедления времени часов- Π можно определить с помощью преобразований Лоренца. Тогда для F , пока проходит время $\Delta\tau_I$ по часам- F , по часам- Π проходит время $\Delta\tau_{II}$. Выразите $\Delta\tau_{II}$ через $\Delta\tau_I$ с точностью до членов первого порядка по $\Delta\phi/c^2$, где $\Delta\phi = g\Delta h$ – разность гравитационных потенциалов, т.е. гравитационных энергий, приходящихся на единичную массу.

C2. Если гравитационный потенциал равен ϕ , замедление времени приводит к изменению эффективной скорости света $c_{\text{эф}}$, измеряемой наблюдателем, находящимся на бесконечности. Если $\phi(r = \infty) = 0$, эффективная скорость света с точностью до членов первого порядка по ϕ/c^2 равна

$$c_{\text{эф}} \approx \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)c$$

с учетом эффектов изменения длины, которые не рассматривались в С1. При этом луч света можно с достаточной точностью приблизить прямой. Как показано на рисунке 7,а, выберем ось x вдоль направления распространения света от нейтронной звезды \mathbf{N} к Земле \mathbf{E} и поместим начало координат $x = 0$ в точке, где белый карлик \mathbf{W} ближе всего к световому лучу. Пусть $x_N (< 0)$ – x -координата \mathbf{N} , $x_E (> 0)$ – координата \mathbf{E} и d – расстояние между \mathbf{W} и световым лучом. Найдите изменение времени распространения света Δt от \mathbf{N} к \mathbf{E} , вызванное белым карликом массой $M_{\text{бк}}$, и упростите полученный ответ, пренебрегая членами высших порядков по следующим малым параметрам: $d/|x_N| \ll 1$, $d/x_E \ll 1$ и $GM_{\text{бк}}/(c^2 d) \ll 1$. Если потребуется, используйте следующую формулу:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + d^2} + x}{\sqrt{x^2 + d^2} - x} \right) + C.$$

C3. Как показано на рисунке 9, в двойной системе \mathbf{N} и \mathbf{W} движутся по круговым орбитам вокруг центра масс G в плоскости орбиты. Пусть ε – угол наклона орбиты, измеряемый между плоскостью орбиты и линией, направленной к \mathbf{E} от G , L – расстояние между \mathbf{N} и \mathbf{W} , $M_{\text{бк}}$ – масса белого

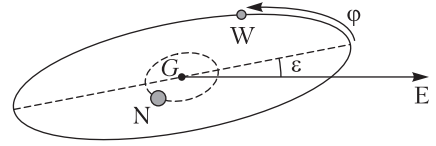


Рис. 9. Двойная звездная система

карлика. Далее будем считать $\varepsilon \ll 1$. Мы наблюдаем световые импульсы, распространяющиеся от \mathbf{N} к \mathbf{E} далеко от \mathbf{N} . Путь света к \mathbf{E} меняется со временем с изменением конфигурации \mathbf{N} и \mathbf{W} . Время задержки светового импульса на пути до \mathbf{E} достигает максимального значения Δt_{max} при $x_N \approx -L$ и достигает минимального значения Δt_{min} при $x_N \approx L$ (см. конфигурацию на рисунке 7,б). Вычислите $\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}}$ в упрощенной форме, пренебрегая высшими порядками малых параметров, указанных в С2. Заметим, что вклады в задержку от звездных объектов, отличных от \mathbf{W} , сокращаются при вычислении разности $\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}}$.

C4. На рисунке 10 показана зависимость наблюдаемого времени задержки от орби-

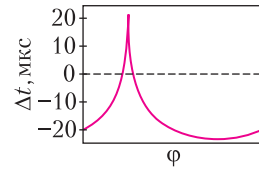


Рис. 10. Наблюдаемое время задержки как функция орбитальной фазы ϕ , задающей положение двойной звезды на орбите

тальной фазы ϕ для двойной звездной системы с $L \approx 6 \cdot 10^6$ км и $\cos \varepsilon \approx 0,99989$. Оцените $M_{\text{бк}}$ в единицах солнечной массы $M_{\text{С}}$ и приведите значение $M_{\text{бк}}/M_{\text{С}}$ с одной значащей цифрой. Вы можете использовать приближенное значение $GM_{\text{С}}/c^3 \approx 5$ мкс.

C5. В двойной системе нейтронных звезд звезды теряют энергию и момент импульса за счет излучения гравитационных волн и в конце концов сталкиваются и объединяются. Для простоты будем рассматривать только движение по окружности радиусом R с угловой скоростью ω , тогда формула $\dot{\omega} = \chi R^p$ выполняется для некоторой постоянной χ , которая не зависит ни от ω , ни от R , если не учитывать релятивистские эффекты. Определите значение p .

C6. Амплитуда гравитационной волны от двойной системы из С5 пропорциональна $R^2 \omega^2$. Рисунок 11 качественно показывает

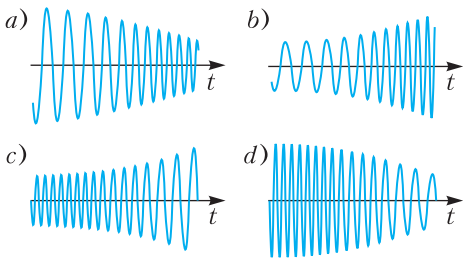


Рис. 11. Наблюдаемая зависимость от времени для гравитационных волн

зависимости гравитационных волн от времени перед столкновением двух звезд. Выберите наиболее подходящую зависимость из а) – д).

Задача 3. Вода и предметы (10 баллов)

В данной задаче мы рассмотрим явления, вызванные взаимодействием воды и предметов, связанным с поверхностным натяжением. В части А изучается движение, а части В и С посвящены статике. При необходимости вы можете использовать факт, что если функция $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''(x) = ay(x)$ (a – положительная постоянная), то общее решение этого уравнения будет $y(x) = Ae^{\sqrt{a}x} + be^{-\sqrt{a}x}$, где A и B – произвольные постоянные.

Часть А. Слияние капель воды (2,0 балла)

Как показано на рисунке 12, мы рассматриваем две стационарные сферические кап-

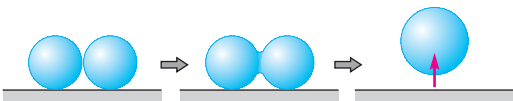


Рис. 12. Слияние двух капель воды и подпрыгивание слитой капли

ли воды на поверхности из абсолютно несмачиваемого материала. Первоначально находящиеся рядом две сферические капли воды с одинаковыми радиусами помещены на поверхность; затем эти две капли сливаются после касания друг друга и образуют большую сферическую каплю воды, которая неожиданно подпрыгивает.

А1. Радиусы a обеих капель воды перед слиянием равны 100 мкм . Плотность воды ρ равна $1,00 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Коэффициент поверхностного натяжения σ равен $7,27 \cdot 10^{-2} \text{ Дж/м}^2$. Доля k от ΔE (изменения поверхностной энергии) преобразуется в кинетическую энер-

гию подпрыгивающей капли воды. Определите начальную скорость подпрыгивания v слитой капли воды с точностью до двух значащих цифр при $k = 0,06$. В процессе слияния объем воды не изменяется.

Часть В. Вертикальная пластина (4,5 балла)

Плоская пластина вертикально погружена в воду. На рисунке 13 показаны формы поверхности воды в случаях смачиваемой и

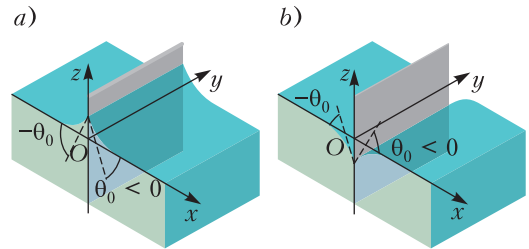


Рис. 13. Вертикально погруженные в воду пластины: а) смачиваемая пластина, б) несмачиваемая пластина

несмачиваемой пластин. Пренебрегайте толщиной пластины. Поверхность пластины совпадает с плоскостью yz , а горизонтальная поверхность воды далеко от пластины совпадает с плоскостью xy . Форма поверхности не зависит от координаты y . Пусть $\theta(x)$ – угол между поверхностью воды и горизонтальной плоскостью в точке (x, z) на поверхности воды в плоскости xz . Здесь $\theta(x)$ измеряется по отношению к положительному направлению оси x и вращение против часовой стрелки считается положительным. Пусть $\theta(x)$ равен θ_0 в точке контакта пластины с поверхностью воды ($x = 0$). Далее θ_0 не меняется вследствие свойств материала пластин. Плотность воды ρ постоянна и коэффициент поверхностного натяжения σ одинаков. Ускорение свободного падения обозначим через g . Атмосферное давление p_0 предполагается всегда неизменным. Определим форму поверхности воды в несколько шагов. Заметьте, что коэффициент поверхностного натяжения измеряется в Дж/м^2 или Н/м .

В1. Рассмотрим смачиваемую пластину (см. рис. 13, а). Атмосферное давление p_0 считается всегда постоянным. Заметим, что давление воды p удовлетворяет неравенствам $p < p_0$ для $z > 0$ и $p = p_0$ для $z = 0$. Выразите p от z через ρ , g , z , и p_0 .

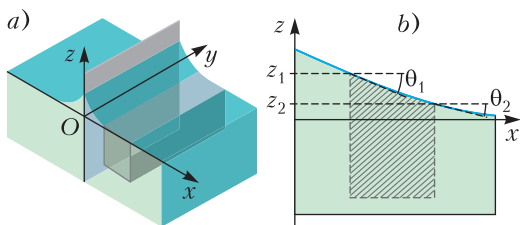


Рис. 14. Выделенный объем воды вблизи ее поверхности: а) вид в изометрии, б) вид в разрезе

В2. Рассмотрим выделенный объем воды, изображение которого затенено на рисунке 14,а. Его сечение плоскостью xz показано в виде заштрихованной области на рисунке 14,б. Пусть z_1 и z_2 соответственно координаты левого и правого краев границы (поверхность воды) между объемом воды и воздухом. Получите горизонтальную компоненту (компоненту x) силы f_x , которая действует на выделенный объем воды из-за давления, на единицу длины вдоль оси y , выразив ее через ρ , g , z_1 и z_2 . Заметьте, что атмосферное давление p_0 не создает горизонтальной силы, действующей на этот объем воды.

В3. Сила поверхностного натяжения, действующая на объем воды, уравновешивается силой f_x , которая обсуждалась в В2. Обозначим соответственно через θ_1 и θ_2 углы между поверхностью воды и горизонтальной плоскостью на левом и правом краях. Выразите f_x через σ , θ_1 и θ_2 .

В4. Следующее уравнение выполняется в произвольной точке (x, z) на поверхности воды:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{z}{l} \right)^a + \cos \theta(x) = \text{const.}$$

Определите показатель степени a и выразите постоянную l через σ и ρ . Заметьте, что это уравнение выполняется независимо от того, является пластина смачиваемой или несмачиваемой.

В5. В уравнении в разделе В4 мы предполагали, что изменения положения поверхности воды небольшие. Разложите $\cos \theta(x)$ по $z'(x)$ до второго порядка. Затем, дифференцируя полученное уравнение по x , получите дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет $z(x)$. Решите это дифференциальное уравнение и определите $z(x)$ при $x \geq 0$, выразив его через $\text{tg } \theta_0$ и l . Заметь-

те, что вертикальные направления на рисунках 13 и 14 увеличены для большей наглядности и они не удовлетворяют условию $|z'(x)| \ll 1$.

Часть С. Взаимодействие двух стержней (3,5 балла)

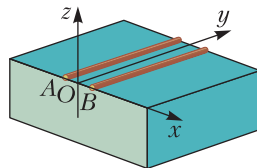


Рис. 15. Два стержня А и В, плавающие на поверхности воды

оси y (рис. 15).

С1. Как показано на рисунке 16, обозначим координаты по оси z через z_a и z_b в точках контактов между стержнем В и поверхностью воды, а также соответствующие углы

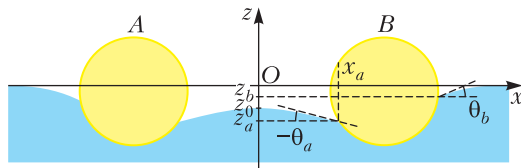


Рис. 16. Вертикальное сечение двух стержней, плавающих на поверхности воды

обозначим θ_a и θ_b . Определите горизонтальную компоненту силы F_x , действующую на стержень В, на единицу длины вдоль оси y , выразив ее через θ_a , θ_b , z_a , z_b , ρ , g , и σ .

С2. Определим координату z поверхности воды в средней точке между двумя стержнями в плоскости как z_0 . Выразите силу F_x , полученную в разделе С1, не используя θ_a , θ_b , z_a , и z_b .

С3. Пусть x_a – координата точки контакта поверхности воды и стержня В слева от стержня. Используя дифференциальное уравнение, полученное в разделе В4, выразите координату уровня воды z_0 в точке посередине между этими двумя стержнями А и В через x_a и z_a . Вы можете использовать постоянную l , введенную в разделе В4.

Публикацию подготовил М.Есин

Физико-математическая олимпиада «Физтех»

Физика

9 класс

1. Пловец трижды переплывает реку. Движение пловца прямолинейное. Скорость пловца в подвижной системе отсчета, связанной с водой, во всех заплывах одинакова по модулю. В двух первых заплывах A – точка старта, B – точка финиша (рис. 1; v – неизвестная скорость течения реки). Ширина реки $AC = d = 50$ м, снос, т.е. расстояние, на которое пловец смещается вдоль реки к моменту достижения противоположного берега, $CB = L = 120$ м. Продолжительность первого заплыва $T_1 = 100$ с, продолжительность второго заплыва $T_2 = 240$ с.

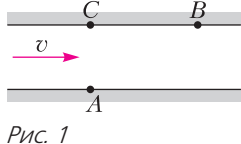


Рис. 1

1) Найдите скорости v_1 и v_2 пловца в лабораторной системе отчета в первом и втором заплывах.

2) Найдите скорость v течения реки.

В третьем заплыве пловец стартует из точки A и движется так, что снос наименьший.

3) На каком расстоянии s от точки B выше по течению финиширует пловец в третьем заплыве?

2. Футболист на тренировке наносит удары по мячу, лежащему на горизонтальной площадке, и направляет мяч к вертикальной стенке. После абсолютно упругого соударения со стенкой на высоте $h = 5,4$ м мяч падает на площадку. Расстояние от точки старта до стенки в 3 раза больше расстояния от стенки до точки падения мяча на площадку.

1) Найдите наибольшую высоту H , на которой мяч находится в полете.

2) Через какое время t_1 после соударения со стенкой мяч упадет на поле?

Допустим, что в момент соударения мяча со стенкой на той же высоте h стенка движется навстречу мячу. Расстояние между точками падения мяча на поле в случаях, когда стенка покоится и стенка движется, $d = 1,8$ м.

3) Найдите скорость u стенки в момент соударения.

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Сопротивление воздуха пренебрежимо мало. Соударения мяча со стенкой абсолютно упругие. Траектории мяча лежат в вертикальной плоскости, перпендикулярной стенке.

3. Однородный стержень удерживается на шероховатой наклонной плоскости горизонтальной нитью, прикрепленной к стержню в его наивысшей точке (рис. 2). Сила натяжения нити $T = 17,3$ Н. Угол между стержнем и плоскостью прямой. Наклонная плоскость образует с горизонтальной плоскостью угол $\alpha = 30^\circ$.

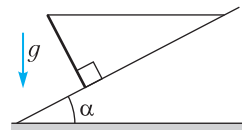


Рис. 2

1) Найдите массу стержня.

2) Найдите силу $F_{\text{тр}}$ трения, действующую на стержень.

3) При каких значениях коэффициента трения скольжения μ стержень будет находиться в покое?

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

4. Воду объемом $V = 1$ л нагревают на электроплитке. Начальная температура воды $\tilde{t}_0 = 16$ °С. Сопротивление спирали электроплитки $R = 25$ Ом, напряжение источника $U = 100$ В. Зависимость мощности P тепловых потерь от P , Вт

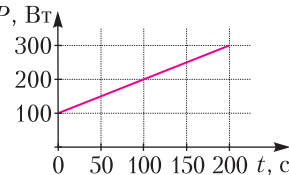


Рис. 3

1) Найдите мощность нагревателя $P_{\text{н}}$.

2) Найдите температуру \tilde{t}_1 воды через $T = 180$ с после начала нагревания.

Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³, удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг · °С).

5. В электрической цепи, схема которой представлена на рисунке 4, четыре резистора, у двух из которых сопротивление по 30 Ом, у двух других сопротивление по 60 Ом. Сопротивление амперметров пренебрежимо мало. После подключения к клем-

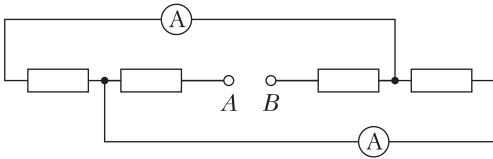


Рис. 4

мам A и B источника постоянного напряжения показания амперметров оказались различными. Большее показание $I_1 = 2A$.

- 1) Найдите показание I_2 второго амперметра.
- 2) Какова мощность P источника?

10 класс

1. Футболист наносит удар по мячу, лежащему на горизонтальной площадке. Вектор начальной скорости мяча образует угол $\alpha = 45^\circ$ с горизонтальной плоскостью. Горизонтальное перемещение мяча за время полета $L = 20$ м.

- 1) Найдите начальную скорость v_0 мяча.

Если футболист направляет мяч под различными углами к горизонту из той же точки с начальной скоростью v_0 к высокой вертикальной стенке, то наибольшая высота, на которой происходит соударение мяча со стенкой, равна $H = 3,6$ м.

- 2) На каком расстоянии s от точки старта находится стенка?

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Мяч движется в плоскости, перпендикулярной стенке. Сопротивление воздуха считайте пренебрежимо малым.

2. Лента транспортера, предназначенного для подъема грузов, образует с горизонтальной плоскостью угол α такой, что $\sin \alpha = 0,6$ (рис. 5). В первом опыте небольшую коробку ставят на покоящуюся ленту транспортера и сообщают коробке начальную скорость $v_0 = 6$ м/с. Коэффициент трения скольжения коробки по ленте $\mu = 0,5$. Движение коробки прямолинейное.

- 1) Какой путь s пройдет коробка в первом опыте к моменту времени $T = 1$ с?

Во втором опыте коробку ставят на ленту транспортера, движущуюся со скоростью $u = 1$ м/с, и сообщают коробке скорость $v_0 = 6$ м/с.

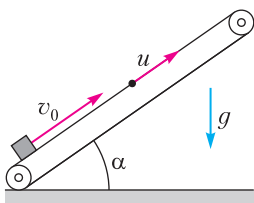


Рис. 5

2) Через какое время T_1 после старта скорость коробки во втором опыте будет равна $u = 1$ м/с?

3) На каком расстоянии L от точки старта скорость коробки обратится в ноль во втором опыте?

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Все кинематические величины измерены в лабораторной системе отсчета.

3. Санки дважды разгоняют из состояния покоя до одной и той же кинетической энергии K на одинаковых участках пути. В первом случае санки тянут, действуя постоянной по модулю силой, направленной под углом α к горизонту (рис. 6). Во втором случае такая же по модулю сила, приложенная к санкам, направлена горизонтально. После достижения кинетической энергии K действие внешней силы прекращается.

- 1) Найдите коэффициент μ трения скольжения санок по горизонтальной поверхности.

- 2) Найдите перемещение s санок в процессе торможения до остановки.

Ускорение свободного падения g . Санки находятся на горизонтальной поверхности. Движение санок прямолинейное.

4. Тепловой двигатель работает по циклу 1-2-3-1. Рабочее вещество – один моль одноатомного идеального газа. Для вычисления КПД цикла ученик десятого класса построил график зависимости молярной теплоемкости C газа (в единицах универсальной газовой постоянной) от температуры в процессах: 1-2, 2-3, 3-1 (рис. 7). Температура газа в состоянии 1 равна $T_1 = 200$ К, универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль · К).

- 1) Найдите работу A_{31} внешних сил над газом в процессе 3-1.

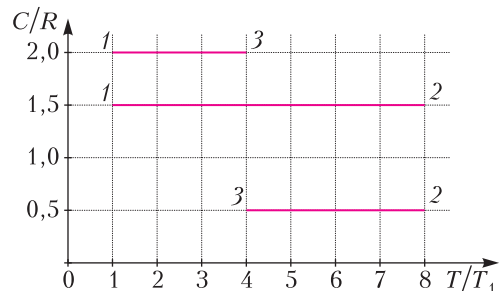


Рис. 7

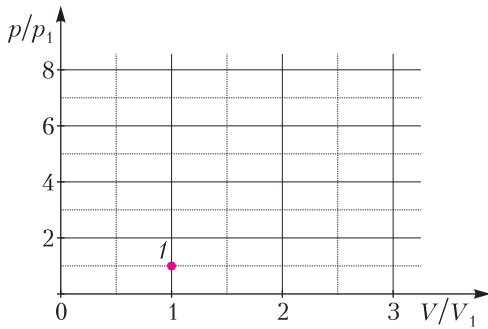


Рис. 8

- 2) Найдите КПД η цикла.
- 3) Постройте график цикла в координатах $(p/p_1, V/V_1)$, где p_1 и V_1 – давление и объем в состоянии 1. Для построения графика воспользуйтесь рисунком 8, где точка 1 на графике соответствует состоянию 1 газа в цикле.
5. Четыре заряженных шарика связаны легкими нерастяжимыми нитями так, что шарики находятся в вершинах квадрата со стороной a (рис. 9). Сила натяжения каждой нити T .

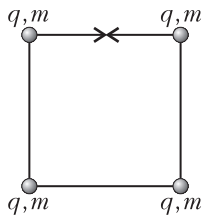


Рис. 9

- 1) Найдите абсолютную величину $|q|$ заряда каждого шарика.
- Одну нить пережигают.
- 2) Найдите кинетическую энергию K любого выбранного вами шарика в тот момент, когда шарики будут находиться на одной прямой.
- 3) На каком расстоянии d от точки старта будет находиться в этот момент любой из двух шариков, изначально расположенных сверху (на рисунке)?

Электрическая постоянная ϵ_0 . Действие сил тяжести считайте пренебрежимо малым.

11 класс

1. Мотоциклист массой (вместе с мотоциклом) $m = 300$ кг движется с постоянной скоростью и затем разгоняется на прямолинейном горизонтальном участке дороги так, что мощность, передаваемая от двигателя на ведущее колесо, остается постоянной. График зависимости скорости от времени при

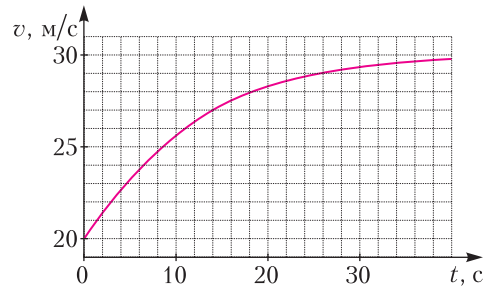


Рис. 10

разгоне показан на рисунке 10. В конце разгона сила сопротивления движению равна $F_k = 405$ Н.

- 1) Используя график, найдите ускорение мотоцикла при скорости $v_1 = 27$ м/с.
 - 2) Найдите силу сопротивления движению F_1 при скорости v_1 .
 - 3) Какая часть мощности, передаваемой на ведущее колесо, идет на преодоление силы сопротивления движению при скорости v_1 ?
- Требуемая точность численного ответа на первый вопрос ориентировочно 10%.

2. Герметичный вертикальный цилиндрический сосуд объемом V разделен тонким невесомым теплопроводящим герметичным поршнем (диск, соосный с сосудом) на две равные части. Поршень может перемещаться без трения. В верхней части цилиндра находится азот, а в нижней – вода и углекислый газ. В начальный момент система была в равновесии при комнатной температуре T_0 . При этом жидкость занимала объем $V/4$. Затем цилиндр медленно нагрели до $T = 4T_0/3 = 373$ К. Установившийся объем его верхней части стал равен $V/6$. По закону Генри, при заданной температуре количество Δv растворенного газа в объеме жидкости w пропорционально парциальному давлению p газа: $\Delta v = kpw$. Объем жидкости при этом практически неизменен. Для углекислого газа константа Генри для данной комнатной температуры $k \approx 0,6 \cdot 10^{-3}$ моль/($\text{м}^3 \cdot \text{Па}$). При конечной температуре T углекислый газ в воде практически не растворяется. Можно принять, что $RT \approx 3 \cdot 10^3$ Дж/моль, где R – универсальная газовая постоянная. Давлением водяных паров при комнатной температуре и изменением объема жидкости в процессе нагревания пренебречь. Все газы считать идеальными.

1) Найдите отношение количеств вещества в газообразном состоянии в верхней и нижней частях цилиндра до нагревания.

2) Определите конечное давление в сосуде p . Ответ выразите через $p_{\text{атм}}$ (нормальное атмосферное давление) с числовым коэффициентом в виде обыкновенной дроби.

3. Три проводящие плоские мелкие сетки находятся друг напротив друга на расстояниях d и $d/3$ (рис. 11). Размеры сеток значи-

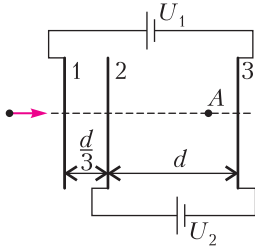


Рис. 11

тельно больше d . Изначально сетки не заряжены. К сеткам подсоединили источники с напряжениями $U_1 = 2U$ и $U_2 = U$. Частица массой m и зарядом $q > 0$ движется по направлению к сеткам и перпендикулярно сеткам, имея скорость v_0 на расстоянии от сеток, намного большем их размеров. Частица пролетает через сетки, не отклоняясь от прямолинейной траектории. Заряд q намного меньше модуля зарядов сеток.

1) Найдите модуль ускорения частицы в области между сетками 2 и 3.

2) Найдите разность $K_3 - K_2$, где K_2 и K_3 – кинетические энергии частицы при пролете сеток 2 и 3.

3) Найдите скорость частицы в точке A на расстоянии $2d/3$ от сетки 2.

4. Параметры цепи указаны на рисунке 12, все элементы идеальные. Ключ разомкнут, режим в цепи установился. Затем ключ замыкают.

1) Найдите ток I_{20} через резистор сопротивлением $2R$ при разомкнутом ключе.

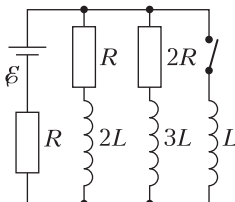


Рис. 12

2) Найдите скорость возрастания тока в катушке индуктивностью L сразу после замыкания ключа.

3) Какой заряд протечет через резистор сопротивлением $2R$ при замкнутом ключе?

Ответы дайте с числовыми коэффициентами в виде обыкновенных дробей.

5. Оптическая система состоит из двух призм с показателями преломления n_1 и n_2 и находится в воздухе с показателем преломления $n_b = 1,0$. Точечный источник света S расположен на расстоянии $a = 200$ см от системы и рассматривается наблюдателем так, что источник и глаз наблюдателя находятся на прямой, перпендикулярной наружным поверхностям призм (рис. 13). Угол

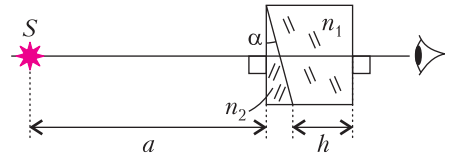


Рис. 13

$\alpha = 0,05$ рад можно считать малым, толщина $h = 9$ см. Толщина призмы с показателем преломления n_2 на прямой «источник–глаз» намного меньше h . Отражения в системе не учитывать.

1) Считая $n_1 = n_b = 1,0$, $n_2 = 1,6$, найдите, на какой угол отклонится системой луч, идущий от источника перпендикулярно левой грани системы.

2) Считая $n_1 = n_b = 1,0$, $n_2 = 1,6$, найдите расстояние между источником и его изображением, которое будет видеть наблюдатель.

3) Считая $n_1 = 1,8$, $n_2 = 1,6$, найдите, на каком расстоянии от источника будет его изображение, которое увидит наблюдатель.

Публикацию подготовили

В.Бабинцев, Л.Колдунов, В.Плис,
В.Усков, В.Чивилёв, И.Юдин, Ю.Юрьев

КОНКУРС ИМЕНИ А. П. САВИНА

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на учащихся начиная с 8–9 класса, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт kvantik.com).

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, по адресу: savin.contest@gmail.com. Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором учитесь.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest. Желаем успеха!

17. Можно ли какой-нибудь пятиугольник разрезать на три равносторонних треугольника (не обязательно равных)?

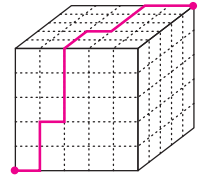
Е. Бакаев

18. Десятизначное число не содержит нулей и обладает такими свойствами: между любыми двумя единицами (если таковые имеются) расположено не менее одной другой цифры, между любыми двумя двойками (если таковые имеются) расположено не менее двух других цифр и так далее, вплоть до девяток. Найдите наибольшее и наименьшее числа, удовлетворяющие этим условиям (ответ объясните).

И. Акулич

19. Длина стороны куба равна n . Каждая грань куба разделена сеткой на квадраты со стороной 1. Муравей сидит в одной из вершин

куба и хочет проползти по поверхности куба по линиям сетки в противоположную вершину. При этом длина маршрута муравья должна быть равна $3n$. Сколько существует различных таких маршрутов? (На рисунке показан пример маршрута для $n = 5$.)



В. Расторгуев

20. На прямой l , лежащей в плоскости, отмечены n точек. При каких n на этой плоскости гарантированно можно выбрать единичный отрезок и ввести декартовы координаты так, чтобы у каждой отмеченной точки хотя бы одна из координат была целой и чтобы при этом ни одна из осей координат не была параллельна l ?

Е. Бакаев

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

Конкурс имени А.П.Савина

(см. «Квант» №10)

5. Они равны.

Обруч состоит из частей, плотно прилегающих к угловым бочкам, и частей между точками, где соседние бочки касаются обруча (рис. 1). Части

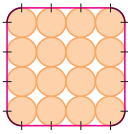
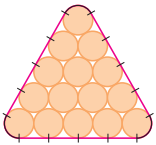


Рис. 1

второго вида равны (расстоянию между центрами соседних бочек), в треугольнике их по 4 на трех сторонах, а в квадрате по 3 на четырех сторонах – поровну. Части первого вида, если их соединить, и в случае треугольника, и в случае квадрата образуют кольцо вокруг одной бочки.

6. Нельзя.

Предположим противное и рассмотрим первый момент, когда в одном из стаканов стало поровну молока и кофе. Так как всего напитков поровну,

то и во втором стакане их поровну. Всего молока и кофе $\frac{4}{3}$ стакана, поэтому оба стакана не пустые. Но тогда до переливания во втором стакане также было поровну кофе и молока – раньше первого такого момента!

7. 63 фигурки первого типа и по 0 фигурок второго и третьего типа или 55 фигурок первого типа и по 3 фигурки второго и третьего типа.

Пусть x , y , z – количества фигурок первого, второго и третьего типа соответственно. Общее количество клеток в фигуре равно $15^2 - 4 \cdot 3^2 = 225 - 36 = 189$, с другой стороны, оно равно $3x + 4y + 4z$. Отсюда следует, в частности, что $8y$ делится на 3, а значит, и y делится на 3.

Отметим некоторые клетки, как показано на рисунке 2.

Заметим, что в одной фигурке не может быть двух отмеченных клеток.

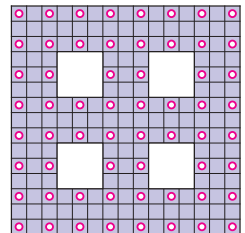


Рис. 2

Следовательно, общее количество фигурок не меньше количества отмеченных клеток, т.е. $x + 2y \geq 60$.

Получаем

$$2y = 189 - 3(x + 2y) \leq 189 - 3 \cdot 60 = 9.$$

Итак, y не превосходит 4 и делится на 3. Следовательно, y равно 0 или 3.

Случаи $x = 63, y = 0$ и $x = 55, y = 3$ возможны – см. рисунки 3 и 4 (прямоугольник 2×3 легко разрезается на две фигурки первого типа).

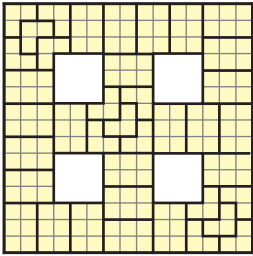


Рис. 3

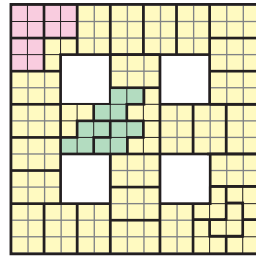


Рис. 4

8. а) Да, всегда.

Пусть изначально Петя загадал число a .

Первое решение. Пусть Вася в качестве догадок называет числа $f(0), f(1), f(2), \dots$, где $f(x) = 3x/2$ при четных x и $f(x) = (x-1)/2$ при нечетных x :

$$0, 0, 3, 1, 6, 2, 9, 3, 12, \dots$$

Рассмотрев два случая, покажем, что если a неотрицательно, то Вася отгадает число после четного числа увеличений, а если отрицательно – то после нечетного.

После x увеличений, где x четно, Петино число будет равняться $a + x$, а Васино будет равняться $3x/2$. Эти числа равны при $x = 2a$, т.е. при отрицательном a Вася отгадает число после $2a$ увеличений.

После x увеличений, где x нечетно, Петино число будет равняться $a + x$, а Васино будет равняться $(x-1)/2$. Эти числа равны при $x = -1 - 2a$, т.е. при отрицательном a Вася отгадает число после $-1 - 2a$ увеличений.

Второе решение. Вася на каждом шаге знает, сколько увеличений сделал Петя. Он может «сделать поправку» на эти увеличения и перебрать все возможные значения a . Пусть функция $s(x)$ при целых неотрицательных x перечисляет все целые числа в любом порядке, например

$$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, \dots$$

Тогда пусть Вася говорит числа $s(x) + x$:

$$0, 0, 3, 1, 6, 2, 9, 3, 12, \dots$$

Заметим, что это рассуждение привело к такой же последовательности, какая была в первом решении. Но при другом выборе функции s

последовательность Васи получилась бы, конечно, другой.

б) Нет.

Предположим, у Васи есть стратегия, т.е. Вася в конце последовательности догадок называет число a и обязательно угадывает. Но если Петя сделает свое последнее действие другим (вместо увеличения будет уменьшать и наоборот), то Вася ошибется.

в) Да, всегда.

Пусть изначально Петя загадал число a .

Первое решение. Пусть Вася в качестве догадок называет числа $f(0), f(1), f(2), \dots$, где $f(x) = 3x/2$ при четных x и $f(x) = (-1 - 3x)/2$ при нечетных x :
 $0, -2, 3, -5, 6, -8, 9, -11, 12, \dots$

Рассмотрев два случая, покажем, что если a неотрицательно, то Вася отгадает число после четного числа увеличений, а если отрицательно – то после нечетного. При положительном a Петя будет только увеличивать числа, пока Вася не отгадает его число, а при отрицательном – только уменьшать.

После x изменений числа, где x четно, Петино число будет равняться $a + x$, а Васино будет равняться $3x/2$. Эти числа равны при $x = 2a$, т.е. при неотрицательном a Вася отгадает число после $2a$ увеличений.

После x изменений числа, где x нечетно, Петино число будет равняться $a - x$, а Васино будет равняться $(-1 - 3x)/2$. Эти числа равны при $x = -1 - 2a$, т.е. при отрицательном a Вася отгадает число после $-1 - 2a$ увеличений.

Второе решение. Вася на каждом шаге знает, какие догадки он делал до этого, и он может назвать такую догадку, чтобы отгадать на этом шаге число, при условии, что изначально заданное Петей число равно именно a .

Пусть функция $s(x)$ при целых неотрицательных x перечисляет все целые числа в любом порядке, например

$$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, \dots$$

И пусть Вася после x изменений числа говорит, что получилось бы у Пети, если бы изначально было загадано число $s(x)$.

Физико-математическая олимпиада «Физтех» Математика

(см. «Квант» №11-12 за 2023 г.)

10 класс

Вариант 1

1. $2^{26} \cdot 7^{37}$.

Чтобы произведение abc было минимальным, числа a, b, c не должны иметь простых делите-

лей, отличных от 2 и 7. Пусть $a = 2^{\alpha_1} 7^{\beta_1}$, $b = 2^{\alpha_2} 7^{\beta_2}$, $c = 2^{\alpha_3} 7^{\beta_3}$ (показатели всех степеней – целые неотрицательные числа). Тогда $abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}$. Рассмотрим отдельно делимость на 2 и на 7.

1) Из того, что ab делится на 2^{14} , следует, что $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 14$. Аналогично, $\alpha_2 + \alpha_3 \geq 17$ и $\alpha_1 + \alpha_3 \geq 20$. Сложив эти три неравенства и разделив пополам, получаем $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \frac{14 + 17 + 20}{2} = 25,5$. Значит, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 26$.

Покажем, что значение $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 26$ достигается. Для этого возьмем $\alpha_1 = 8$, $\alpha_2 = 6$, $\alpha_3 = 12$ (эти значения могут быть получены как решения системы уравнений $\alpha_1 + \alpha_2 = 14$, $\alpha_1 + \alpha_3 = 20$ и $\alpha_2 + \alpha_3 = 18$).

2) Из того, что ac делится на 7^{37} , следует, что $\beta_1 + \beta_3 \geq 37$. Заметим, что $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \beta_1 + \beta_3 \geq 37$, причем $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ может равняться 37, если, например, $\beta_1 = 18$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 19$.

Так как минимум каждой из сумм $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ не зависит от другого, то и минимальное значение abc равно $2^{\min(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} 7^{\min(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)} = 2^{26} 7^{37}$.

2. 8.

Пусть $d = \text{НОД}(a^2 - 6ab + b^2; a + b)$. Так как $a^2 - 6ab + b^2 = a(a + b) - 7ab + b^2 = a(a + b) - 7ab + b^2 = a(a + b) - 7b(a + b) + 8b^2$, т.е. $8b^2 = (a^2 - 6ab + b^2) + (7b - a)(a + b)$, из этого равенства следует, что $8b^2$ делится нацело на d . Аналогично доказывается, что $8a^2$ делится нацело на d . Поэтому $d \leq \text{НОД}(8b^2; 8a^2) = 8 \cdot \text{НОД}(a^2; b^2) \leq 8$, так как числа a и b взаимно просты и $\text{НОД}(a; b) = 1$. Докажем, что значение $d = 8$ может достигаться. Для этого достаточно взять $a = 1$, $b = 7$ – при этом дробь равна $\frac{8}{8} = 1$.

3. $AB = 8$.

Пусть точки D и E – центры ω и Ω соответственно (рис. 5), а точки K и M – проекции точки E на прямые CD и AB соответственно. Так как ω касается прямой AB в точке C , то $\angle KCM = 90^\circ$;

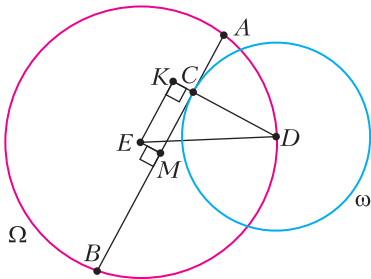


Рис. 5

тогда в четырехугольнике $CMEK$ три угла прямые, и он прямоугольник. Обозначим $AB = 8x$, $ME = y$. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам, поэтому M – середина AB ; тогда $BM = \frac{1}{2}AB = 4x$, $EK = CM = BM - BC = = BM - \frac{1}{8}AB = 4x - x = 3x$ и $DK = DC + CK = = DC + EM = 1 + y$. Запишем теорему Пифагора для треугольников BEM и DEK и решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} (4x)^2 + y^2 = 5^2, \\ ((1+y)^2 + (3x)^2 = 5^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{25}{16} - \frac{y^2}{16}, \\ 1 + 2y + y^2 + \frac{225}{16} - \frac{9y^2}{16} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{25}{16} - \frac{y^2}{16}, \\ 7y^2 + 32y - 159 = 0. \end{cases}$$

Последнее уравнение имеет одно положительное решение $y = 3$; отсюда $x = 1$ и $AB = 8x = 8$.

4. $x = \frac{2}{7}$.

Заметим, что правая часть уравнения есть разность подкоренных выражений в левой части уравнения. Обозначим $u = \sqrt{2x^2 - 5x + 3}$, $v = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$. Тогда $2 - 7x = u^2 - v^2$, и уравнение принимает вид

$$u - v = u^2 - v^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (u - v)(1 - u - v) = 0 \Leftrightarrow u = v, u + v = 1.$$

Первое уравнение имеет единственное решение $x = \frac{2}{7}$ (принадлежащее области допустимых значений). Покажем, что левая часть второго уравнения $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$ больше правой при всех допустимых значениях x (что означает, что у уравнения нет решений). Если $\sqrt{2x^2 + 2x + 1} > 1$, то утверждение очевидно. Рассмотрим случай, когда $\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \leq 1$. Это выполняется при $0 \leq 2x^2 + 2x + 1 \leq 1$, т.е. при $x \in [-1; 0]$. При таких значениях аргумента $2x^2 - 5x \geq 0$, поэтому $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \geq \sqrt{3}$ и

$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} > 1$. Итак, уравнение имеет единственное решение $x = \frac{2}{7}$.

5. 2986.

Запишем исходное условие на координаты точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ в виде $2x_2 + y_2 - 12 = 2x_1 + y_1$. Так как координаты точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ являются целыми числами, то левая и правая части этого равенства могут принимать только целочисленные значения k . Пара точек $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ с целочисленными координатами удовлетворяет условию тогда и только тогда, когда они лежат на параллельных прямых $y = -2x + k$ и $y = -2x + k + 12$ соответственно.

Далее найдем подходящие значения параметра k . Стороны OP и QR параллелограмма лежат на прямых $y = -2x$ и $y = -2x + 30$, поэтому они параллельны прямым $y = -2x + k$ и $y = -2x + k + 12$. Эти прямые пересекают параллелограмм при $0 \leq k \leq 30$ и $0 \leq k + 12 \leq 30$, поэтому $k \in [0; 18]$.

Выясним количество точек с целочисленными координатами на каждой из прямых вида $y = -2x + b$. Если b четное, т.е. $b = 2l$, то получаем прямую $y = 2(-x + l)$. При любом целом x получится целое значение y , а чтобы точка оказалась внутри параллелограмма, нужно, чтобы $0 \leq y \leq 24 \Leftrightarrow l - 12 \leq x \leq l$. При любом l этому неравенству удовлетворяет 13 целых значений x . Если b нечетное, т.е. $b = 2l + 1$, имеем $0 \leq -2x + 2l + 1 \leq 24 \Leftrightarrow l - \frac{23}{2} \leq x \leq l + \frac{1}{2}$. Учитывая, что $x \in \mathbb{Z}$, получаем $l - 11 \leq x \leq l$ - всего 12 целочисленных значений.

Если $k = 2l$ (таких значений 10), то на каждой из двух прямых $y = -2x + k$ и $y = -2x + k + 12$ можно выбрать по 13 точек - всего $10 \cdot 13 \cdot 13 = 1690$ способов. Если $k = 2l + 1$ (таких значений 9), то на каждой из двух прямых $y = -2x + k$ и $y = -2x + k + 12$ можно выбрать по 12 точек - имеем $9 \cdot 12 \cdot 12 = 1296$ способов. Итого получаем $1690 + 1296 = 2986$ способов.

$$6. a \in \left\{ \pm \frac{1}{3\sqrt{7}}; \pm \frac{3}{\sqrt{55}} \right\}.$$

Рассмотрим неравенство системы. Его левая часть обращается в ноль на окружностях $(x + 8)^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$. Внутри каждой из окружностей один из множителей в левой части положителен, а второй - отрицателен. В области вне окружностей оба множителя положительны. Таким образом, неравенство определяет совокупность двух кругов Ω и ω с центрами в точках $O(0; 0)$ и $Q(-8; 0)$ с радиусами 2 и 1 соответственно (рис. 6). Первое уравнение системы определяет прямую $y = ax + 10b$ с угловым коэффициентом $k = a$. При

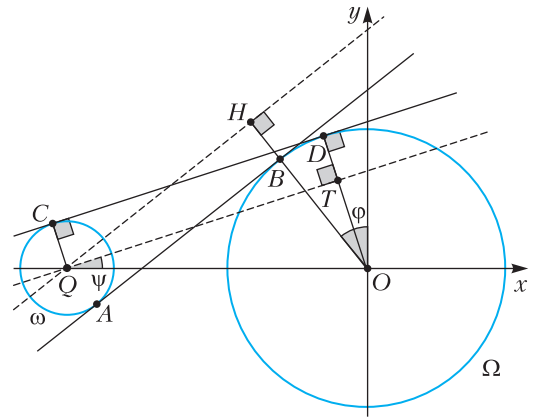


Рис. 6

фиксированном значении a - т.е. при фиксированном угле наклона - и при $b \in \mathbb{R}$ получаем всевозможные прямые с угловым коэффициентом $k = a$.

Чтобы система имела ровно 2 решения, прямая должна касаться обеих кругов. Это возможно в том и только том случае, когда угловой коэффициент прямой по модулю равен угловому коэффициенту общей касательной к окружностям (тогда за счет выбора параметра b можно подобрать такое положение прямой, чтобы она касалась обеих окружностей).

Проведем общую внутреннюю касательную AB к окружностям, имеющую положительный наклон (пусть A и B - точки касания этой прямой с ω и Ω соответственно). Пусть l - прямая, параллельная AB и проходящая через точку Q ; пусть также $l \cap OB = H$, $\angle HQO = \varphi$ ($QH \parallel AB$, поэтому φ - угол наклона общей внутренней касательной). Так как $OQ = 8$, $HO = HB + BO = QA + BO = QA + BO = 1 + 2 = 3$, то из прямоугольного треугольника HOQ имеем $QH = \sqrt{OQ^2 - HO^2} = \sqrt{55}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{HO}{QH} = \frac{3}{\sqrt{55}}$.

Аналогично рассматриваем случай общей внешней касательной. Пусть CD - общая внешняя касательная с положительным наклоном (C и D - ее точки касания с ω и Ω соответственно). Опускаем из точки Q перпендикуляр QT на радиус DO большей окружности. Тогда $\psi = \angle OQT$ и есть угол наклона общей внешней касательной. Имеем $OT = OD - QC = 1$, $QT = \sqrt{OQ^2 - OT^2} = \sqrt{63}$, $\operatorname{tg} \psi = \frac{OT}{QT} = \frac{1}{3\sqrt{7}}$.

Так как подходят и положительные, и отрицательные значения наклона, окончательно получаем $a = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$ или $a = \pm \frac{1}{3\sqrt{7}}$.

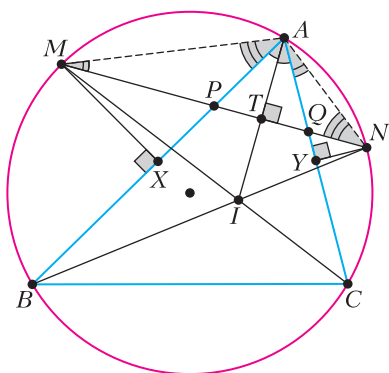


Рис. 7

7. 6.

Пусть отрезок MN пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно (рис. 7); I – центр вписанной окружности треугольника; X и Y – проекции точек M и N на стороны AB и AC соответственно. Обозначим также точку пересечения прямых AI и MN через T .

Углы AMN и CAN равны как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги; аналогично, $\angle BAM = \angle ANM$. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle APQ = \angle PAM + \angle PMA$, а $\angle AQP = \angle QAN + \angle QNA$, поэтому $\angle APQ = \angle AQP$. Значит, треугольник APQ равнобедренный, AI – его биссектриса, следовательно, $AI \perp PQ$.

Далее рассмотрим три пары подобных треугольников и запишем пропорциональность сторон в них:

$$\Delta AQN \sim \Delta MPA \Rightarrow \frac{AQ}{MP} = \frac{QN}{AP},$$

$$\Delta QAT \sim \Delta QNY \Rightarrow \frac{AT}{YN} = \frac{AQ}{QN};$$

$$\Delta ATP \sim \Delta MXP \Rightarrow \frac{MX}{AT} = \frac{MP}{AP}.$$

Разделив второе равенство на третье, получаем $\frac{AT^2}{MX \cdot YN} = \frac{AP \cdot AQ}{MP \cdot NQ}$. Но из первого равенства следует, что $AP \cdot AQ = MP \cdot QN$, откуда $AT^2 = MX \cdot YN = 9$. Остается отметить, что $\angle MNB = \angle MNA$ (так как эти углы опираются на равные дуги), поэтому NM – биссектриса угла ANB . Значит, в треугольнике ANI отрезок NT – биссектриса и высота, треугольник равнобедренный, а NT также является его медианой и $AT = TI$. Итак, $AI = 2AT = 2\sqrt{9} = 6$.

11 класс

Вариант 1

1. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, x = -\arctg \frac{1}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим два случая.

1) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Тогда справедливы формулы $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ и $\operatorname{tg}\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{1 + \operatorname{tg} x}$. (Отметим, что при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

правые части формул не определены – именно поэтому этот случай необходимо рассмотреть отдельно.) Подставляем полученные величины в исходное уравнение и решаем его:

$$\frac{6\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 1 = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{1 + \operatorname{tg} x} \Leftrightarrow \frac{4\operatorname{tg} x + 2}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\arctg \frac{1}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Подстановкой убеждаемся, что эти значения являются решениями уравнения.

2. 20402.

Найдем сначала количество троек натуральных чисел. Пусть $a = 2^{x_1} 3^{y_1}, b = 2^{x_2} 3^{y_2}, c = 2^{x_3} 3^{y_3}$, где x_i, y_i – целые неотрицательные числа. Тогда $x_1 + x_2 + x_3 = 150$ и $y_1 + y_2 + y_3 = 150$. Числа a, b, c составляют в указанном порядке геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $b^2 = ac$, откуда $2x_2 = x_1 + x_3$ и $2y_2 = y_1 + y_3$. Из полученных уравнений $x_2 = y_2 = 50, x_1 + x_3 = 100, y_1 + y_3 = 100$. Посчитаем количество решений этой системы. Есть 101 способ выбрать пару чисел $(x_1; x_3)$ – действительно, x_1 можно взять любым целым числом из отрезка $[0; 100]$, после чего x_3 определяется однозначно. Аналогично, пару $(y_1; y_3)$ можно выбрать 101 способом. Перемножая, получаем $101^2 = 10201$ способ.

Если рассматривать также отрицательные значения переменных, то можно заметить, что подходят все тройки чисел вида $(-a; b; -c)$, где a, b, c положительны и составляют геометрическую прогрессию. Таких троек ровно столько, сколько и в первом случае, поэтому окончательно имеем 20402 тройки.

3. $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \{1\}$.

Преобразуем левую часть неравенства:

$$\begin{aligned} \ln^2 x - (x - 1) \ln(2x) + (\ln 2) \ln x &= \\ &= \ln^2 x - (x - 1) \ln 2 - (x - 1) \ln x + (\ln 2) \ln x = \\ &= (\ln 2)(\ln x - x + 1) + (\ln x)(\ln x - x + 1)(\ln x - x + 1) = \\ &= (\ln x - (x - 1))(\ln x + \ln 2) = (\ln x - x + 1) \ln(2x). \end{aligned}$$

Заметим, что $\ln x - x + 1 \leq 0$ при всех $x > 0$, при-

чем равенство достигается только при $x = 1$. Для этого рассмотрим функцию $\psi(x) = \ln x - x + 1$. Она определена при $x > 0$, а ее производная равна $\frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$. На интервале $(0;1)$ производная положительна и функция возрастает, а на луче $(1;+\infty)$ производная отрицательна и функция убывает. Так как $\psi(1) = 0$, то отсюда следует, что $\psi(x) < 0$ при $x > 0, x \neq 1$.

Таким образом, неравенство равносильно следующему:

$$\ln x - x + 1 = 0, \ln(2x) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1, 0 < 2x \leq 1 \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup \{1\}.$$

4. $a = \frac{257}{60}, S = \frac{289}{30}$.

Пусть A и B – вершины квадрата, лежащие в первой и четвертой четвертях соответственно; O – начало координат. По условию, точка B лежит на прямой $y = -4x$. Если x_0 – абсцисса точки B , то $x_0 > 0$, а координаты точки B – это $(x_0; -4x_0)$. Так как точка A получается из B поворотом на 90° против часовой стрелки, то ее координаты $(4x_0; x_0)$. Поскольку обе точки лежат на графике $y = x^3 - ax$, получаем и решаем систему уравнений (учитываем, что $x_0 \neq 0$):

$$\begin{cases} -4x_0 = x_0^3 - ax_0, \\ x_0 = 64x_0^3 - 4ax_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x_0^2 + 4, \\ 4a = 64x_0^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x_0^2 + 4, \\ 4x_0^2 + 16 = 64x_0^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 = \frac{17}{60}, \\ a = \frac{257}{60}. \end{cases}$$

Пусть $OA = d$ – половина диагонали квадрата. Тогда $OA^2 = (4x_0)^2 + x_0^2 = 17x_0^2$, а площадь квадрата S равна полупроизведению его диагоналей, т.е. $S = \frac{1}{2} \cdot 2d \cdot 2d = 2d^2 = \frac{289}{30}$.

5. $\angle B = 90^\circ, \angle C = \arccos \frac{1}{7}, \angle A = \arcsin \frac{1}{7}$.

Поскольку CG – биссектриса угла ACB (рис.8), то дуги AG и GB равны, а также равны одноименные им хорды. Значит, треугольник AGB равнобедренный, и его медиана GE является также и высотой. Поскольку DE – средняя линия треугольника ABC , то $DE \parallel BC$ и $\angle ABC = \angle AED = 90^\circ$ как соответственные. Пусть $CB = 2a, \angle ACB = 2\alpha$.

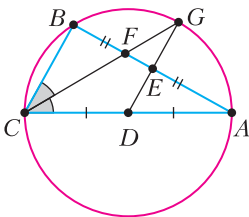


Рис. 8

Тогда $CF = \frac{2a}{\cos \alpha}$,

$$AC = \frac{2a}{\cos 2\alpha}, CD = \frac{a}{\cos 2\alpha}, DF = 2CF = \frac{4a}{\cos \alpha}.$$

По теореме косинусов для треугольника CDF имеем $DF^2 = CF^2 + CD^2 - 2CF \cdot CD \cos \alpha$. Подставляя сюда выражения для сторон, найденные выше, получаем уравнение

$$\frac{16a^2}{\cos^2 \alpha} = \frac{4a^2}{\cos^2 \alpha} + \frac{a^2}{\cos^2 2\alpha} - 2 \frac{2a}{\cos \alpha} \cdot \frac{a}{\cos 2\alpha} \cos \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{12}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2 2\alpha} + \frac{4}{\cos 2\alpha} = 0.$$

Умножая обе части уравнения на $2 \cos^2 2\alpha \cos^2 \alpha$, имеем

$$24 \cos^2 2\alpha - 2 \cos^2 \alpha + 8 \cos 2\alpha \cos^2 \alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24 \cos^2 2\alpha - (1 + \cos 2\alpha) + 4 \cos 2\alpha (1 + \cos 2\alpha) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 28 \cos^2 2\alpha + 3 \cos 2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2\alpha = -\frac{1}{4}, \cos 2\alpha = \frac{1}{7}.$$

Так как 2α – острый угол прямоугольного треугольника, то $\cos 2\alpha > 0$, поэтому $\angle C = 2\alpha = \arccos \frac{1}{7}$. Тогда угол A треугольника равен $\arcsin \frac{1}{7}$.

6. $\sqrt{7}$.

Перепишем исходную цепочку равенств в виде системы уравнений

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = \frac{7}{z^3} - \frac{7}{y^3}, \\ y^3 - z^3 = \frac{7}{x^3} - \frac{7}{z^3}, \\ z^3 - x^3 = \frac{7}{y^3} - \frac{7}{x^3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = \frac{7(y^3 - z^3)}{y^3 z^3}, \\ y^3 - z^3 = \frac{7(z^3 - x^3)}{x^3 z^3}, \\ z^3 - x^3 = \frac{7(x^3 - y^3)}{x^3 y^3}. \end{cases}$$

Заметим, что числа x, y, z попарно различны. Действительно, если, к примеру, $z = x$, то третье уравнение системы принимает вид $0 = \frac{7(x^3 - y^3)}{x^3 y^3}$,

поэтому $x = y$ и все три числа совпадают, что противоречит условию.

Перемножая все уравнения системы, имеем

$$(x^3 - y^3)(y^3 - z^3)(z^3 - x^3) =$$

$$= \frac{343(x^3 - y^3)(y^3 - z^3)(z^3 - x^3)}{x^6 y^6 z^6}.$$

Так как числа попарно различны, то $(xyz)^6 = 343$, т.е. $xyz = \pm\sqrt{7}$.

Покажем, что у исходной системы существует решение $(x_0; y_0; z_0)$ такое, что $x_0 y_0 z_0 = -\sqrt{7}$. (Строго говоря, выше мы получили, что если система имеет решения, то для этих решений либо $xyz = \sqrt{7}$, либо $xyz = -\sqrt{7}$. Может оказаться так, что у системы решений нет вовсе, или так, что для любого решения системы произведение xyz равно $\sqrt{7}$.)

Возьмем, например, $y_0 = -\sqrt[6]{7}$ и оставим только первые два уравнения системы (третье уравнение является их следствием). Она принимает вид

$$\begin{cases} x^3 + \sqrt{7} = \frac{7}{z^3} + \sqrt{7}, \\ -\sqrt{7} - z^3 = \frac{7}{x^3} - \frac{7}{z^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = \frac{7}{z^3}, \\ 2z^6 + \sqrt{7}z^3 - 7 = 0. \end{cases}$$

У этой системы есть решение $z_0 = \sqrt[6]{\frac{7}{4}}$, $x_0 = \sqrt[6]{28}$.

Итак, для тройки чисел $\left(\sqrt[6]{28}; -\sqrt[6]{7}; \sqrt[6]{\frac{7}{4}}\right)$ выражение xyz достигает минимального значения $\sqrt{7}$.

7. а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, б) $\frac{\sqrt{3}}{5 + \sqrt{3}}$.

а) Предположим, что четырехугольник $ABCD$ выпуклый, а E – точка пересечения его диагоналей. Тогда $BD = EB + ED = \sqrt{AB^2 - \frac{AC^2}{4}} + \sqrt{AD^2 - \frac{AC^2}{4}} = 2 + 1 = 3$, значит, $DA + DB = 3 + \sqrt{2} > 2 + \sqrt{5} = SA + SB$. Однако $SA > DA$ и $SB > DB$ (SDA и SDB – прямоугольные треугольники с прямым углом при вершине D), т.е. $SA + SB > DA + DB$ – противоречие. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ невыпуклый (рис. 9), а так как треугольники ABC и ADC равнобедренные с общим основанием AC и $AD < AB$, то точка D лежит внутри треугольника ABC .

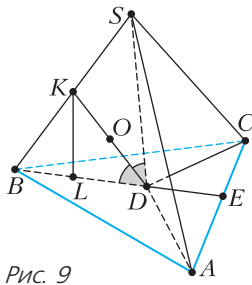


Рис. 9

Далее имеем $BD = EB - ED = 2 - 1 = 1$, откуда

$$\begin{aligned} SA + SB &= \sqrt{SD^2 + AD^2} + \sqrt{SD^2 + DB^2} = \\ &= \sqrt{SD^2 + 2} + \sqrt{SD^2 + 1} = 2 + \sqrt{5}, \end{aligned}$$

поэтому $SD = \sqrt{3}$, $SB = 2$, $SA = SC = \sqrt{5}$. Тогда $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{CBD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = 1$, и в итоге

находим объем пирамиды $V_{SACBD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SD = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

б) Существует единственный такой шар, причем в силу симметрии пирамиды относительно плоскости SBD центр шара лежит в этой плоскости. Так как шар касается граней пирамиды, то его центр O лежит внутри треугольника SBD , а он касается отрезков SD и BD . Отсюда следует, что точка O лежит на биссектрисе DK треугольника SBD .

Пусть L – основание перпендикуляра из точки K на отрезок BD . Тогда из подобия треугольников BKL и BSD имеем

$$KL = SD \cdot \frac{BK}{BS} = SD \cdot \frac{BD}{BD + SD} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}.$$

Значит, расстояние от точки O до прямой BD (т.е. радиус шара) равно $KL \cdot \frac{OD}{KD} = \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \cdot \frac{OD}{KD}$.

С другой стороны, мы можем найти радиус шара как расстояние от точки O до плоскости SBC . Для этого сначала найдем длину высоты DM в треугольной пирамиде $SBCD$. Объем этой пирамиды равен $V_{SBCD} = \frac{1}{2} V_{SABCD} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Из $SB = BC = \sqrt{5}$ и $SA = 2$ получаем $S_{SBC} = 2$. Тогда

$$V_{SBCD} = \frac{1}{3} \cdot DM \cdot S_{SBC},$$

откуда $DM = \frac{3V_{SBCD}}{S_{SBC}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Значит, расстояние от точки до плоскости SBC равно

$$DM \cdot \frac{OK}{KD} = DM \left(1 - \frac{OD}{KD}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 - \frac{OD}{KD}\right).$$

Теперь приравняем два полученных выражения для радиуса шара:

$$\frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \cdot \frac{OD}{KD} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 - \frac{OD}{KD}\right) \Rightarrow \frac{OD}{KD} = \frac{1 + \sqrt{3}}{5 + \sqrt{3}}.$$

Итого, радиус шара равен

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{OD}{KD} = \frac{\sqrt{3}}{5 + \sqrt{3}}.$$

Вариант 2

1. $2^{21} 3^{21} 5^{30}$.

Решение аналогично решению задачи 1 для 10 класса.

2. $\frac{16}{3}$.

Соединим точку B с точками E и F (рис. 10). Так как $AB \parallel EF$, то $\angle ABE = \angle FEB$, а $\angle CBF = \angle FEB$ по теореме об угле между касательной и хордой.

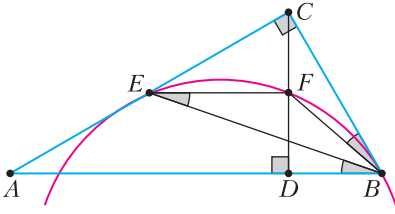


Рис. 10

Поэтому $\angle ABE = \angle CBF$. Следовательно, BE и BF – соответствующие элементы в подобных прямоугольных треугольниках ABC и CBD . Значит, $\frac{AE}{CE} = \frac{CF}{DF}$. По теореме Фалеса $\frac{AE}{EC} = \frac{DF}{CF}$. Из полученных равенств следует, что $CF = DF$, поэтому F – середина CD , а так как $EF \parallel AD$, то EF – средняя линия треугольника ACD . Отсюда $S_{ACD} = 4S_{CEF}$ и

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{S_{ABC}}{0,25S_{ACD}} = \frac{4 \cdot 0,5 \cdot AB \cdot CD}{0,5 \cdot AD \cdot CD} = \frac{4AB}{AD} = 4 \left(\frac{AD}{AD} + \frac{DB}{AD} \right) = 4 \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{16}{3}.$$

3. $x \in \left\{ -3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi \right\}$.

По определению равенство $b = \arcsin a$ эквивалентно соотношениям $\sin b = a$, $-\frac{\pi}{2} \leq b \leq \frac{\pi}{2}$, поэтому получаем

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right), \\ -\frac{\pi}{2} \leq \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{x}{5}\right), \\ -\frac{3\pi}{5} \leq \frac{x}{5} \leq \frac{2\pi}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pm x = \frac{2\pi}{5} - \frac{x}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ -3\pi \leq x \leq 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi n}{3}, x = \frac{5\pi n}{2} - \frac{\pi}{2}, -3\pi \leq x \leq 2\pi, \Leftrightarrow x \in \left\{ -3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi \right\}.$$

4. $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}} \right)$.

Решение аналогично решению задачи 6 для 10 класса.

5. $\frac{1}{5}$.

Обозначим $\log_3 x = u$, $\log_3(5y) = v$. Так как $\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{u}$, $\log_x 243 = \frac{5}{2} \log_x 3 = \frac{5}{2u}$, $\log_{5y} 3 = \frac{1}{\log_3 5y} = \frac{1}{v}$, $\log_{25y^2}(3^{11}) = \frac{11}{2} \log_{5y} 3 = \frac{11}{2v}$, то ис-

ходные уравнения можно записать в виде

$$\begin{cases} u^4 + \frac{6}{u} = \frac{5}{2u} - 8, \\ v^4 + \frac{2}{v} = \frac{11}{2v} - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u^5 + 16u + 7 = 0, \\ 2v^5 + 16v - 7 = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы. В левой части стоит возрастающая функция, а в правой части число, поэтому уравнение имеет не более одного решения. С другой стороны, любой многочлен нечетной степени имеет по крайней мере один действительный корень. Отсюда следует, что уравнение имеет ровно одно решение. Аналогично, второе уравнение имеет ровно одно решение. Если во втором уравнении сделать замену $v = -w$, то оно принимает вид $-2w^5 - 16w - 7 = 0$, т.е. $2w^5 + 16w + 7 = 0$, что эквивалентно первому уравнению. Это означает, что корни уравнений противоположны, следовательно, их сумма равна нулю. Тогда $\log_3 x + \log_3(5y) = 0$, $\log_3(5xy) = 0$, $5xy = 1$, $xy = \frac{1}{5}$.

6. 5778.

Решение аналогично решению задачи 5 для 10 класса.

7. а) 2430; б) $2\arctg \frac{3}{5}$.

а) Поскольку SL – касательная к сфере Ω (рис.11,а), а SP и SQ – секущие к ней, то по теореме о касательной и секущей $SL^2 = SP \cdot SQ$. Аналогично, $MK^2 = MP \cdot MQ$, а поскольку $MQ = SP$, то $SP \cdot SQ = MP \cdot MQ$. В итоге получаем $SL^2 = SP \cdot SQ = MP \cdot MQ = MK^2$, т.е. $SL = MK$. Так как $AL = AK$ как касательные к сфере Ω , проведенные из точки A , то $AM = AK + MK = AL + SL = SA = 12$, а поскольку медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины, то $AA_1 = \frac{3}{2}AM = 18$.

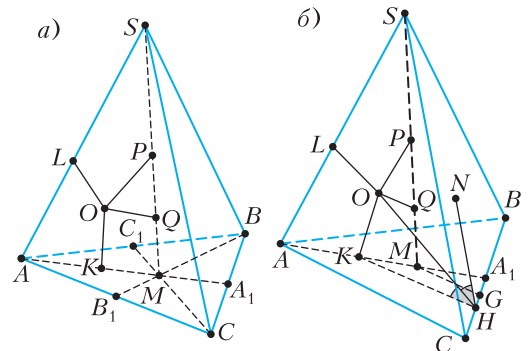


Рис. 11

Кроме того, $A_1M = \frac{AM}{2} = 6$. При этом $A_1B = A_1C = \frac{BC}{2} = 6$, т.е. $A_1M = A_1B = A_1C$. Отсюда треугольник BMC прямоугольный и $\angle BMC = 90^\circ$.

Далее имеем

$$S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot CM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2BB_1}{3} \cdot \frac{2CC_1}{3} \Rightarrow BB_1 \cdot CC_1 = \frac{3}{2} S_{ABC} = 135,$$

откуда $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 18 \cdot 135 = 2430$.

б) Пусть G и H – проекции точек M и K на прямую BC соответственно (рис.11,б). Заметим, что $NH \perp BC$, потому что N и K – точки касания сферы Ω со сторонами двугранного угла пирамиды при ребре BC . Поэтому искомый угол равен $\angle NHK = 2\angle OHK$, где O – центр сферы Ω .

Далее имеем $S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot MG$, откуда $MG = \frac{2S_{ABC}}{3BC} = 5$. Так как $SL = SN = 4$ как касательные к Ω , то $AK = AL = SA - SL = 8$, откуда получаем $A_1K = AA_1 - AK = 10$. Из подобия треугольников A_1MG и A_1KH имеем $KH = MG \cdot \frac{A_1K}{A_1M} = \frac{25}{3}$. Окончательно, $\text{tg}\angle OHK = \frac{OK}{KH} = \frac{3}{5}$ и $\angle NHK = 2\angle OHK = 2\text{arctg}\frac{3}{5}$.

Физика

9 класс

1. 1) $v_1 = \frac{\sqrt{d^2 + L^2}}{T_1} = 1,3 \text{ м/с}, v_2 = \frac{\sqrt{d^2 + L^2}}{T_2} \approx 0,54 \text{ м/с}.$

2) $v = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \frac{\sqrt{d^2 + L^2}}{L} \approx 1 \text{ м/с}.$

Скорость пловца в подвижной системе отсчета, связанной с водой, равна (рис. 12)

$$u = \sqrt{\left(\frac{v_1 - v_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{v_1 + v_2}{2} \frac{d}{L}\right)^2} \approx 0,54 \text{ м/с}.$$

3) Геометрия движения при заплыве на минималь-

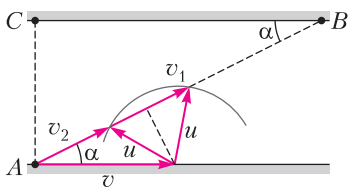


Рис. 12

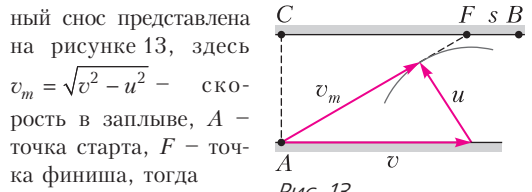


Рис. 13

ный снос представлена на рисунке 13, здесь $v_m = \sqrt{v^2 - u^2}$ – скорость в заплыве, A – точка старта, F – точка финиша, тогда

$$s = L - d \frac{\sqrt{v^2 - u^2}}{u} \approx 42 \text{ м}.$$

2. Из условия следует, что время полета мяча от старта до соударения со стенкой в три раза больше времени полета после соударения. Следовательно, продолжительность полета от высшей точки траектории до соударения равна времени полета после соударения. Тогда при движении вниз вертикальные перемещения за эти промежутки времени отличаются в три раза.

1) $H = \frac{4h}{3} = 7,2 \text{ м}.$

2) $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{3g}} = 0,6 \text{ с}.$

После соударения модуль горизонтальной скорости мяча увеличится на $2u$.

3) $u = \frac{d}{2t_1} = 1,5 \text{ м/с}.$

3. 1) Из условия равенства моментов сил относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости рисунка 14 через точку O ,

$$TL \cos \alpha = mg \frac{L}{2} \sin \alpha,$$

$$m = \frac{2T}{g \text{tg} \alpha} \approx 6 \text{ кг}.$$

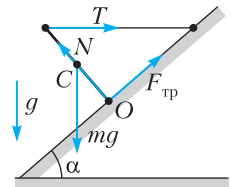


Рис. 14

2) Из условия равенства моментов сил относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости рисунка через точку C ,

$$F_{\text{тр}} \frac{L}{2} = T \frac{L}{2} \cos \alpha, F_{\text{тр}} = T \cos \alpha \approx 15 \text{ Н}.$$

3) Сумма сил по вертикали равна нулю: $mg = N \cos \alpha + F_{\text{тр}} \sin \alpha$, сила трения $F_{\text{тр}} \leq \mu N$, откуда

$$\mu \geq \frac{\cos \alpha}{2 - \sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{7} \approx 0,25.$$

4. 1) $P_{\text{н}} = \frac{U^2}{R} = 400 \text{ Вт}.$

2) По графику в условии,

$$P(t) = 100 + \frac{300 - 100}{200} t = 100 + t \text{ (Вт)}.$$

За любой промежуток времени от t до $t + \Delta t$ в окружающую среду уходит количество теплоты $\Delta Q = P\Delta t$, тогда за время от 0 до t в окружающую среду уходит количество теплоты, численно равное площади под графиком зависимости $P(t)$ за время от 0 до t :

$$Q(t) = \frac{100 + 100 + t}{2} t = (100 + 0,5t)t.$$

Закон сохранения энергии в тепловых процессах имеет вид

$$\frac{U^2}{R} T = \rho V c (\tilde{t}_1 - \tilde{t}_0) + (100 + 0,5T)T.$$

Отсюда

$$\tilde{t}_1 = \tilde{t}_0 + \frac{U^2 T - (100 + 0,5T)T}{\rho V c} = 25^\circ \text{C}.$$

5. Схема электрической цепи показана на рисунке 15.

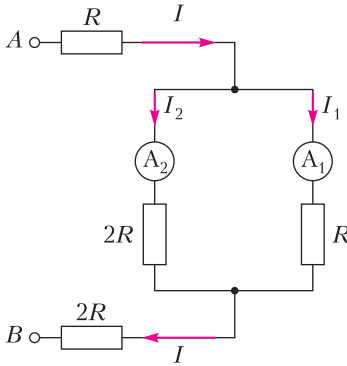


Рис. 15

1) Из равенства напряжений на параллельно соединенных резисторах следует

$$I_2 = 0,5I_1 = 1 \text{ A}.$$

2) В неразветвленной части цепи сила тока $I = I_1 + I_2 = 1,5I_1$. В этой части цепи резисторы R и $2R$ можно поменять местами. Эквивалентное сопротивление цепи равно

$$R_{\text{экв}} = R + 2R + \frac{2}{3}R = \frac{11}{3}R, \text{ где } R = 30 \text{ Ом},$$

мощность источника равна

$$P = I^2 R_{\text{экв}} = \left(\frac{3}{2}I_1\right)^2 \cdot \frac{11}{3}R = \frac{33}{4}I_1^2 R = 990 \text{ Вт}.$$

10 класс

1. 1) $v_0 = \sqrt{gL} \approx 14 \text{ м/с}$.

2) Мяч движется по параболе

$$y(x) = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

При соударении со стенкой

$$x = s, y(s) = \frac{gs^2}{2v_0^2} \left(\operatorname{tg} \alpha \cdot \left(2 \frac{v_0^2}{gs} - \operatorname{tg} \alpha \right) - 1 \right),$$

наибольшая высота H точки соударения достигается при $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{gs}$, поэтому

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{v_0^2}{g} - \frac{gs^2}{v_0^2} \right) = \frac{L}{2} \left(1 - \left(\frac{s}{L} \right)^2 \right).$$

Окончательно

$$s = L \sqrt{1 - \frac{2H}{L}} = 16 \text{ м}.$$

2. 1) В первом опыте коробка через время $t_1 = \frac{v_0}{g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} = 0,6 \text{ с}$ остановится на расстоянии $s_1 = 0,5v_0 t_1 = 1,8 \text{ м}$ от точки старта. После остановки за время $T - t_1$ перемещение коробки составит $s_2 = \frac{1}{2}g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)(T - t_1)^2 = 0,16 \text{ м}$. Тогда $s = s_1 + s_2 = 1,96 \text{ м}$.

2) Во втором опыте до момента остановки ускорение коробки относительно ленты равно $a_1 = g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$, поэтому

$$T_1 = \frac{v_0 - u}{g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} = 0,5 \text{ с}.$$

3) После этого сила трения сонаправлена с вектором скорости транспортера, тогда $a_2 = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$ и

$$L = \frac{1}{2g} \left(\frac{v_0^2 - u^2}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} + \frac{u^2}{\sin \alpha - \mu \cos \alpha} \right) = 2 \text{ м}.$$

3. Из равенства приращений кинетической энергии на равных путях следует равенство сил

$$F \cos \alpha - \mu(mg - F \sin \alpha) = F - \mu mg.$$

$$1) \mu = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$2) s = \frac{K}{\mu mg}.$$

4. 1) Поскольку $\Delta Q = C\Delta T$, в каждом процессе количество теплоты (подведенное или отведенное) численно равно площади под графиком зависимости $C(T)$. В процессе 3-1, по первому началу термодинамики,

$$Q_{31} = U_1 - U_3 + A_{\text{газа } 31}.$$

Работа внешних сил над газом в процессе 3-1 равна

$$A_{31} = -A_{\text{газа}31} = -(Q_{31} - (U_1 - U_3)) = -\left(2R(T_1 - T_3) - \frac{3}{2}R(T_1 - T_3)\right) = -\frac{1}{2}R(T_1 - T_3).$$

По графику, $T_3 = 4T_1$. Поэтому

$$A_{31} = \frac{3}{2}RT_1 \approx 2,5 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

2) По графику в условии сразу виден ответ:

$$\eta = 1 - \frac{Q_{\text{отв}}}{Q_{\text{подв}}} = 1 - \frac{0,5RT_1(8-4) + 2RT_1(4-1)}{1,5RT_1(8-1)} = \frac{5}{21} \approx 0,24.$$

3) График цикла в pV -координатах, нормированных на p_1 и V_1 соответственно, приведен на рисунке 16.

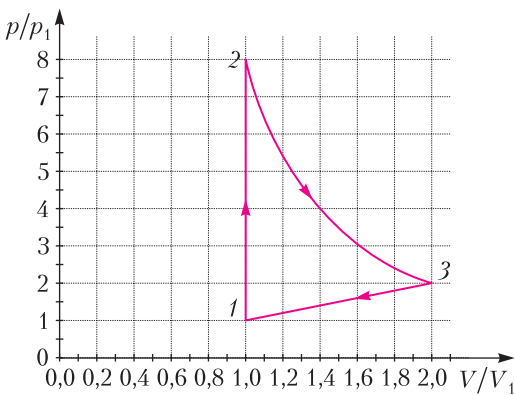


Рис. 16

5. 1) В состоянии покоя

$$\sqrt{2}T = \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2},$$

откуда

$$|q| = 2a\sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 T}{1 + 2^{-3/2}}}.$$

2) В тот момент, когда шарики находятся на одной прямой (рис. 17), скорости всех шариков одинаковы по модулю вследствие симметрии и закона сохранения импульса системы материальных точек. Закон сохранения энергии

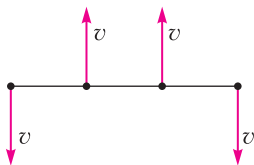


Рис. 17

имеет вид

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a} + 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{\sqrt{2}a} = 4K + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{3a} + 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{2a}.$$

Отсюда

$$K = \frac{3\sqrt{2}-1}{12} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a} \approx 0,27 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a}.$$

3) Центр масс системы не смещается, поэтому

$$d = \frac{\sqrt{5}}{2} a \approx 1,1a.$$

11 класс

1. 1) $a_1 = 0,29 \text{ м/с}^2$; допустимые пределы: $0,25 \text{ м/с}^2 < a_1 < 0,33 \text{ м/с}^2$.

2) Из графика $v_k = 30 \text{ м/с}$. Пусть $F_{т1}$ и $F_{тк}$ — силы тяги при скорости v_1 и в конце разгона, $F_{т1} - F_1 = ma_1$, $F_{т1}v_1 = F_{тк}v_k$, $F_{тк} = F_k$. Отсюда $F_1 = \frac{F_k v_k}{v_1} - ma_1 = 363 \text{ Н}$. Допустимым пределам ускорения соответствуют допустимые пределы силы сопротивления $351 \text{ Н} < F_1 < 375 \text{ Н}$.

3) $x = \frac{F_1 v_1}{F_k v_k} = \frac{121}{150} \approx 0,81$; допустимым пределам ускорения соответствуют допустимые пределы $0,78 < x < 0,84$.

2. 1) $\frac{p_0 V}{2} = v_2 RT_0$, $\frac{p_0 V}{4} = v_1 RT_0$, откуда $\frac{v_2}{v_1} = 2$.

2) В конце давление p , объем газа под поршнем $V - V/6 - V/4 = 7V/12$. Для верхней части цилиндра $\frac{p_0 V/2}{T_0} = \frac{pV/6}{T}$, откуда $p = 4p_0$. По закону Дальтона, $p = p_{\text{атм}} + p_1 + p_v$. Здесь $p_{\text{атм}}$ — давление насыщенных паров воды, p_1 — давление от количества v_1 газа, p_v — давление от вышедшего из воды в конце количества Δv газа. Далее,

$$\frac{p_1 \cdot 7V/12}{T} = \frac{pV/6}{T}, \text{ откуда } p_1 = \frac{4}{7} p_0;$$

$$\frac{p_v \cdot 7V/12}{T} = \frac{p_0 V/4}{T_0}, \text{ откуда } p_v = \frac{3}{7} k p_0 RT.$$

$$p = p_{\text{атм}} + \frac{4}{7} \frac{p}{4} + \frac{3}{7} k \frac{p}{4} RT = \frac{7p_{\text{атм}}}{6 - 3kRT/4} = \frac{140}{93} p_{\text{атм}}.$$

Итак,

$$p = p_{\text{атм}} + \frac{4}{7} \frac{p}{4} + \frac{3}{7} k \frac{p}{4} RT = \frac{7p_{\text{атм}}}{6 - 3kRT/4} = \frac{140}{93} p_{\text{атм}}.$$

3. 1) $a = \frac{(U_2/d)q}{m} = \frac{Uq}{md}.$

2) $K_3 - K_2 = qU$.

3) Можно показать, что $\varphi_3 = -\varphi_1$. Имеем $\varphi_1 - \varphi_3 = 2U$, откуда $\varphi_3 = -U$. Тогда

$$\varphi_A = \varphi_3 + \frac{1}{3}U_2 = -\frac{2}{3}U,$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = q(0 - \varphi_A),$$

$$v_A = \sqrt{v_0^2 + \frac{4}{3} \frac{qU}{m}}.$$

4. 1) Ток через источник $I_0 = \frac{3}{5} \frac{\mathcal{E}}{R}$, а через указанный резистор

$$I_{20} = I_0 \frac{R}{R + 2R} = \frac{1}{5} \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

2) Сразу после замыкания ключа все токи не изменяются, ЭДС индукции в двух левых катушках равна нулю, поэтому

$$-LI' = -I_{20} \cdot 2R, \quad I' = \frac{2}{5} \frac{\mathcal{E}}{L}.$$

3) Для контура, содержащего L и $3L$, имеем

$$-L \frac{\Delta I}{\Delta t} + 3L \frac{\Delta I_2}{\Delta t} = I \cdot 0 - I_2 \cdot 2R,$$

$$-L\Delta I + 3L\Delta I_2 = -2R\Delta q.$$

Суммируем:

$$-L \left(\frac{\mathcal{E}}{R} - 0 \right) + 3L(0 - I_{20}) = -2Rq$$

и получаем

$$q = \frac{4}{5} \frac{L\mathcal{E}}{R^2}.$$

5. 1) $\varphi_1 = (n_2 - 1)\alpha = 0,03$.

2) Изображение сместится перпендикулярно линии «источник–глаз» на $L_1 = a\varphi_1 = 6$ см.

3) Оптическая система состоит из плоскопараллельной пластины толщиной h с показателем преломления n_1 и двух призм с углом α и показателями преломления n_1 и n_2 . Призмы отклоняют луч на угол $\varphi = (n_1 - 1)\alpha - (n_2 - 1)\alpha = (n_1 - n_2)\alpha = 0,01$, смещая изображение перпендикулярно линии «источник–глаз» на

$$x = a\varphi = 2 \text{ см.}$$

Пластина приближает изображение на

$$\Delta = h - \frac{h}{n_1} = 4 \text{ см.}$$

Расстояние между источником и его изображением в системе

$$L_2 = \sqrt{\Delta^2 + x^2} = 2\sqrt{5} \text{ см.}$$

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

М.Н.Грицук

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

**Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во ПИ №ФС77-54256**

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»**

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

**в соответствии с предоставленными
материалами**

**в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8**

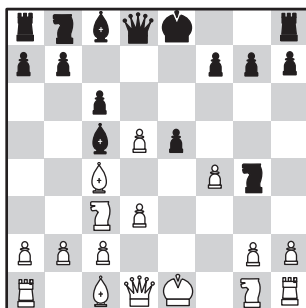
Тел.: (831) 218-40-40

В духЕ СТАРИННЫХ МАСТЕРОВ

Традиционный шахматный турнир в Вейк-ан-Зее, прошедший в январе 2024 года, запомнится любителям шахмат обилием результативных партий. Самую яркую из них разыграли в духе старинных мастеров китайский гроссмейстер Вэй И, ставший победителем соревнований, и представитель Нидерландов Макс Вермердам.

Вэй И – М.Вермердам
Вейк-ан-Зее, 2024

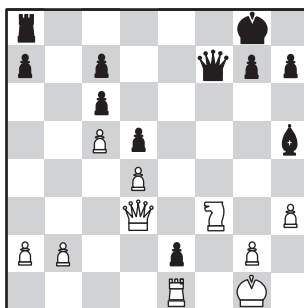
1. e4 e5 2. ♘c4 ♗f6 3. d3 ♘c5 4. ♘c3 c6 5. f4 d5. Принципиальнее 5...ef!? со сложной игрой после 6. e5 d5! 7. ef ♗f6 8. ♗e2+! ♗d8. 6. ed ♗g4.



7. ♗f3 0-0. Сразу забирать ладью слишком рискованно: 7...♗f2 8. ♗e2 ♗h1 9. ♗e5+ ♗f8 10. ♘e3! с опасной атакой. 8. fe ♗f2 9. ♗e2 ♗h1 10. ♗g5! ♗a5 11. d6 ♗g4 12. ♗e7 ♗d7?! Сильнейшее 12...♗a3! 13. ♗f8 ♗b2 14. e6! ♘c3+ вело к «компьютерной ничьей» на 21 ходу, но рассчитать такое за доской человеку не под силу. 13. e6 ♗a3! 14. ef+ ♗h8 15. 0-0-0 ♗c3 16. ba ♗f3? Решающая ошибка, спасало 16...a5!! 17. ♗f8 ♗f8 18. ♗e1 ♗a3+ 19. ♗d1 ♗d6. 17. gf ♗e5 18. ♗b1 ♗d4 19. ♗h1 ♗c4 20. dc ♗b6+ 21. ♗c1 ♗f7 22. ♗d1 ♗ff8 23. d7 ♗g8 24. ♗e5 ♗ad8 25. f4 c5 26. ♗d8 ♗d8 27. ♗c5, черные сдались.

Цзюй Вэньцзюнь – А.Фирузджа
Вейк-ан-Зее, 2024

1. d4 e6 2. e4 d5 3. ed ed 4. ♗f3 ♗d6 5. c4 ♗f6 6. c5 ♗e7 7. ♗d3 0-0 8. 0-0 ♗g4 9. h3 ♗h5 10. ♗e3 ♗c6 11. ♗bd2 ♗e8 12. ♗b5 ♗e4! 13. ♗a4 ♗d2 14. ♗d2 ♗g5 15. ♗c6 bc 16. ♗ae1 ♗e3 17. ♗e3 ♗e3 18. fe ♗e8 19. ♗e1 f5 20. ♗a6 f4 21. ♗f1 fe 22. ♗d3 e2? (сильнее 22...♗b8, активизируя ферзя после 23. ♗e3 ♗b2) 23. ♗f3? (ответная любезность – 23. g4! ♗g6 24. ♗e2 позволяло захватить линию e) ♗f7? Грубый просчет, к ничейной позиции вело простое 23...♗f3.

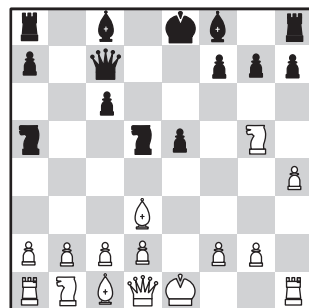


24. ♗g5! На этот раз белые не прощают черных, форсируя переход в эндшпиль с «хорошим» конем против «плохого» слона. 24...♗g6 25. ♗g6 ♗g6 26. ♗e2 h6 27. ♗f3 ♗e4 28. ♗e5 a5 29. ♗c6 a4 30. ♗e3 ♗a6 31. ♗b4 ♗g6 32. g3 h5 33. ♗a3?! План победы белых состоит в блокировке пешки посредством a3 и переводе коня на c3. 33...♗f8 34. ♗f2 ♗f6+ 35. ♗e2 ♗g6 36. h4 ♗e8 37. ♗e3 ♗d7 38. a3 ♗e6 39. ♗d2?! (сильнее 39. ♗a2, реализуя план, приведенный выше) ♗f6 40. ♗e2 ♗f8 41. b3 ab 42. ♗b3 ♗g2?! 43. ♗e3 ♗e4 44. ♗a2 ♗b8 45. ♗c3 ♗b2+ 46. ♗e1 ♗b3 47. ♗f2 ♗h1 48. ♗d1 ♗b8 49. ♗e5 g6 50. ♗e1 ♗e4 51. ♗c3 ♗f8+ 52. ♗g1 ♗f3? Решающая ошибка. После точного 52...♗c6 53. ♗e3 ♗f6 54. a4 ♗f8 белым трудно усилить позицию. 53. ♗e4 de 54. ♗g2 ♗a3 55. ♗e4

♗d3 56. ♗f2 c6 57. ♗g2! ♗d1 (черные в цугцванге: 57...♗a3 58. ♗e5) 58. ♗f3 ♗f1+ 59. ♗e3 ♗f7 60. ♗f4 ♗g7 61. ♗d3 ♗e6 62. ♗f8 ♗a7 63. ♗e4 ♗a1 64. ♗d8, черные сдались.

Рашембабу П. – Цзюй Вэньцзюнь
Вейк-ан-Зее, 2024

1. e4 e5 2. ♗f3 ♗c6 3. ♗c4 ♗f6 4. ♗g5 d5 5. ed ♗a5 6. ♗b5+ c6 7. dc bc 8. ♗d3 ♗d5 9. h4 ♗c7

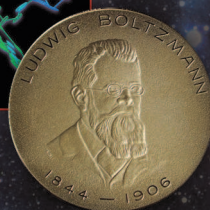
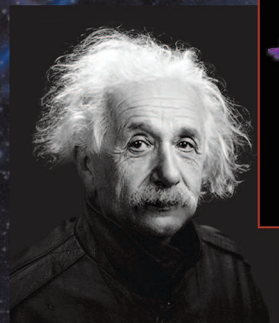
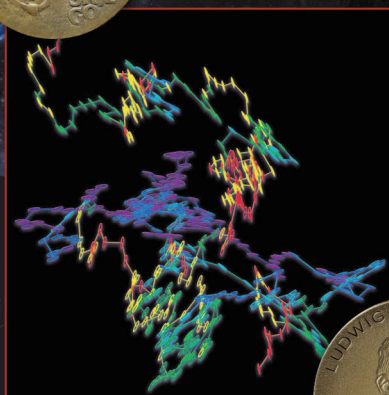


10. b3. Новинка на 10 ходу в дебюте, который подробно изучают почти 200 лет! 10...h6 11. ♗e4 f5 12. ♗ec3 ♗f6 (аккуратнее 12...♗f4 13. ♗f1 ♗e7 14. g3 c5! с нападением на ладью h1) 13. ♗b2 (сильнее 13. ♗e2!, вынуждая черных ослабить большую диагональ после 13...g6 14. ♗b2) ♗d6?! (точнее 13...♗b4! – «исчезающий ход», отнимающий поле a3 у коня, после 14. a3 ♗d6) 14. ♗a3 e4 15. ♗e2 0-0 16. ♗a6 ♗e6? Необходимо 16...♗a6 17. ♗a6 ♗g4!, создавая угрозы пешке f2. 17. ♗c4 ♗b4 18. 0-0-0 ♗b7 19. ♗b7 ♗b7 20. f3 ♗ae8 21. ♗e5 c5 22. ♗he1 ef 23. gf ♗h5 24. ♗g1 c4 25. ♗c4 ♗e7 26. a3 ♗c3 27. ♗c3 ♗h4 28. ♗e5! Угрозы пешке g7 решают исход партии. 28...♗e7 29. ♗de1 ♗d7 30. ♗d6 ♗e7 31. ♗h2 ♗f6 32. ♗h6 ♗d6 33. ♗f6, черные сдались.

А.Русанов

Уроки с физикой

СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДЕНИЯ



Оказывается, есть нечто общее между движением мельчайших пылинок в жидкости и расселением человечества в будущем в нашей Галактике.

ISSN 0130-2221 24001



(ПОДРОБНЕЕ — НА С. 2 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)