

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ





В языке N на месте русских слов *да* и *нет* имеется также два слова, но употребляются они немного иначе.

Выписанный ниже диалог – это перевод с языка N, выполненный неопытным переводчиком, который не заметил этого различия и всегда передавал одно из данных слов русским *да*, а другое – русским *нет*.

- 1 – Сегодня не пятница? – НЕТ.
- 2 – Не четырнадцатое? – ДА.
- 3 – Мы находимся здесь меньше недели? – ДА.
- 4 – Но ведь десятого был понедельник? – НЕТ.
- 5 – Мы приехали не восьмого? – НЕТ.
- 6 – Мы приехали в субботу? НЕТ. Мы приехали в воскресенье.
- 7 – Ты не ошибаешься? – ДА. Я хорошо помню, что второго был понедельник.

ЗАДАНИЕ. Сформулируйте правила, по которым употребляются в языке N слова, соответствующие русским *да* и *нет*.

Примечание. Предполагается, конечно, что участники диалога не допускают ни намеренной лжи, ни логических ошибок.

В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук
Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН

Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

Московский
физико-технический институт
Московский центр непрерывного
математического образования

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,
М.Н.Бондаров, А.А.Варламов,
С.Д.Варламов, А.П.Веселов,
А.Н.Виленин, Н.П.Долбиллин,
С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,
А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов,
П.А.Кожевников, С.П.Коновалов,
К.П.Кохась, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,
А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,
А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,
А.В.Устинов (заместитель главного
редактора), А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора)**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, В.И.Берник,
А.А.Боровой, В.В.Козлов,
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

- 2 Кирхгоф (к 200-летию со дня рождения).
Л.Белопухов
11 Последовательности Сомоса (окончание).
А.Устинов

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 10 Задачи 1–4

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 20 Задачи M2762–M2765, Ф2769–Ф2772
22 Решения задач M2750–M2753, Ф2757–Ф2760

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 29 Задачи

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 30 Платные веса. *А.Грибалко, А.Заславский*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Физика + музыка

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 34 Таутохронизм, или Два путника и линза.
А.Стасенко

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 35 Физика гитарного эффекта. *Д.Богатова,
И.Пылев, С.Пылев*

ОЛИМПИАДЫ

- 38 Избранные задачи XXVIII Турнира имени А.П.Савина
39 Заключительный этап LVI Всероссийской
олимпиады школьников по физике
43 XXIX и XXX Международные олимпиады
школьников «Туймаада». Физика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 46 Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова.
Профильный экзамен по физике
48 Ответы, указания, решения
Вниманию наших читателей (19)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к Калейдоскопу «Кванта»*
II *Лингвистические задачи*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогнулки с физикой*

Кирхгоф

(к 200-летию со дня рождения)

Л. БЕЛОПУХОВ

КИРХГОФ ВХОДИТ В ПЛЕЯДУ выдающихся немецких физиков 19-го столетия – наряду с Майером, Гельмгольцем, Клаузиусом и Больцманом. Он был удивительно разносторонним ученым. В учебниках физики (вузовских и школьных) встречается его имя и при расчете электрических цепей (правила Кирхгофа), и при изучении законов теплового излучения (теорема Кирхгофа), и при знакомстве с основами спектрального анализа. А кроме того, ему принадлежат и один из законов термохимии, и уточненные формулы дифракции волн, и расчеты упругих свойств тонких пластин, и открытие многих химических элементов на Солнце, и обнаружение в земных минералах неизвестных ранее элементов.

Кирхгоф был не только талантливым экспериментатором. Глубокое знание математической физики (так тогда называли теоретическую физику) помогло ему стать блестящим университетским профессором в самом престижном немецком университете. Выслушать циклы его лекций приезжали студенты и преподаватели из многих немецких вузов. Созданный им 4-томный курс теоретической физики стал основой физического образования для многих ученых 19-го века. Кирхгофа следует считать не только выдающимся физиком, но и химиком, астрономом, механиком, педагогом.

Густав Роберт Кирхгоф родился 12 марта 1824 года в Кёнигсберге, в Восточной Пруссии. До 1846 года Восточная Пруссия являлась германским анклавом в прибалтийских землях, здесь когда-то была база тевтонского рыцарского ордена. А с 1824

года Кёнигсберг стал центром провинции Пруссия Прусского королевства.

Еще в 1544 году в Кёнигсберге открылся университет, названный «Альбертина» (в честь принца Альбрехта, его основавшего). Несмотря на то, что этот университет был уже 90-м в Европе и 13-м в Германии, он быстро приобрел известность. Здесь на философском факультете было физико-математическое отделение. Профессором этого факультета долгие годы был знаменитый философ Иммануил Кант (1724–1804), имя которого сейчас носит федеральный Балтийский университет этого города, ныне (с 1946 года) называющегося Калининградом. В городе восстанавливается атмосфера высокой культуры и науки, которая сложилась в те годы, когда там жил и работал знаменитый философ.

Отец Кирхгофа был известным юристом и мечтал о таком же поприще для своего младшего сына, который рос живым и общительным ребенком. Но в гимназии, в отличие от братьев (ставших впоследствии юристами), его не увлекали гуманитарные дисциплины. Больше всего ему нравилась математика, физику же он считал скучной и неинтересной. Но все изменилось уже на первом курсе университета.

На физико-математическом отделении философского факультета в это время работал (и был деканом) знаменитый математик Фридрих Вильгельм Бессель (1784–1846). Он привлек в Кёнигсбергский университет талантливых математиков и физиков. Под влиянием профессора фон Неймана Кирхгоф увлекся физикой и уже на первом курсе, в 1844 году, сделал свою первую научную работу о протекании электрического тока не по проводу, а по тонким пластинам. А его выпускной

магистерской работой стало исследование прохождения тока по разветвленным электрическим цепям, давшее знаменитые «правила Кирхгофа». Для простой разветвленной цепи, параллельного соединения проводников, это было ранее сделано Георгом Омом. Но в 1840-е годы в Европе началось массовое внедрение телеграфной связи, где использовались более сложные соединения проводников и источников тока (химических батарей).

Правила Кирхгофа

Первое правило Кирхгофа простое: в узлах цепи (точках, где сходятся несколько проводов) алгебраическая сумма токов в отдельных проводах должна равняться нулю: $\sum I_i = 0$. Иными словами, какой суммарный ток втекает в узел, такой же вытекает из него. Кирхгофу было ясно, что это правило следует из постоянства общего электрического заряда, вырабатываемого источниками тока в цепи при их установившейся работе.

Второе правило Кирхгофа более сложное. Оно относится к замкнутым контурам, которые можно выделить в электрической цепи, состоящим из нескольких участков (звеньев), где могут быть и источники тока. Правило заключается в том, что алгебраическая сумма падений напряжения на всех участках контура должна быть равна алгебраической сумме электродвижущих сил источников тока, находящихся в этом контуре: $\sum I_i R_i = \sum \mathcal{E}_j$. Если в первом правиле со знаками токов все достаточно ясно, то во втором правиле дело обстоит несколько сложнее. Знаки токов могут быть такими, какие были выбраны по первому правилу. А знак электродвижущей силы должен быть положительным, если направление тока, вырабатываемого данным источником, совпадает с направлением, выбранным для первого правила. Кирхгоф показал, что второе правило вытекает из закона Ома для участка цепи с источником тока (в учебниках часто называемый законом Ома для неоднородной цепи). Позднее стало

ясно, что второе правило Кирхгофа в неявном виде содержит закон сохранения энергии для электрической цепи.

Записав правила Кирхгофа для данной цепи, получаем систему линейных уравнений с числом неизвестных, равным числу участков цепи (числу отдельных токов). Остается только решить эту систему.

Внедрение телеграфной связи потребовало изучения цепей переменного тока, рождаемого в колебательных контурах. Кирхгоф показал, что его правила применимы и для таких токов. Он назвал их «квазистационарными», имея в виду, что переменность тока происходит одновременно во всех участках цепи. При этом он сделал предположение о том, что всякое изменение тока в цепи (в том числе и простое включение или выключение) распространяется по проводам с огромной скоростью – возможно, со скоростью света. Никакие самые точные секундомеры, которые были в его распоряжении, не смогли измерить время задержки распространения сигнала по электрической цепи.

В этом предположении Кирхгофа фактически содержалась идея о возможности волнового характера электромагнитных явлений. Но только через четверть века Джеймсом Максвеллом теоретически была доказана возможность существования электромагнитных волн со скоростью распространения, равной скорости света. И еще прошло 15 лет до первого экспериментального подтверждения Генрихом Герцем существования этих волн в природе. Вполне возможно, что и Максвелл, и Герц опирались при этом на факт применимости правил Кирхгофа для цепей переменного тока.

Выступить с этими правилами, которые уже начали применяться электротехниками, на европейской арене Кирхгофу предлагалось в Парижском королевском обществе. Кирхгоф уже проходил оформление на стажировку в Парижском университете, когда в 1847 году стало ясно, что из-за политической и экономической обстановки во Франции (перед революцией 1848 года) осуществить парижскую стажировку не было возможности. И вместо Парижа Кирхгоф едет в Берлин, где в Универ-



Кирхгоф в Бреслау (еще без бороды)

ситете Фридриха Вильгельма (ныне Берлинский университет Гумбольдта) защищает диссертацию и в 23 года становится доктором философии (по физике) и приват-доцентом этого университета.

В Берлине Кирхгоф продолжает свои работы по электричеству: распределение заряда в проводниках различной формы, разряд конденсатора, расчеты сопротивления подводных кабелей для трансатлантической телеграфии. Но экспериментальная база в берлинском университете оказалась очень слабой, в нем развивались прежде всего гуманитарные направления. И Кирхгоф принимает предложение профессорской должности от Силезского университета Фридриха-Вильгельма в восточно-германском городе Бреслау (ныне – польский город Вроцлав и, соответственно, Вроцлавский университет).

Этот университет, ровесник кирхгофского alma mater, был уже широко известен своими естественнонаучными исследова-

ниями, особенно по химии и геологии. Он и сейчас остается одним из ведущих университетов Европы. На доске почетных выпускников Вроцлавского университета значатся, в частности, имена нобелевского лауреата по физике Макса Борна, одного из создателей квантовой механики, и знаменитой польско-советской певицы Анны Герман (училась на геологическом отделении). А в списке почетных преподавателей – имя Густава Кирхгофа.

Спектральный анализ

Когда Кирхгоф приехал в Бреслау, там работал химик Роберт Вильгельм Бунзен (1815–1885), уже получивший известность своими работами по горению газов и изобретению безопасного светильника для шахтных работ (бунзеновская горелка), не приводящего к инициированию взрыва метано-воздушной смеси. Бунзена интересует химия реакций в газовых смесях, возможность применения к анализу этих смесей особенностей их свечения, оптических спектров. А это область не химического, а скорее физического эксперимента, в котором Бунзен не имел опыта. И он уговаривает нового молодого университетского профессора, уже известного своим талантом экспериментатора, заняться спектроскопическими исследованиями.

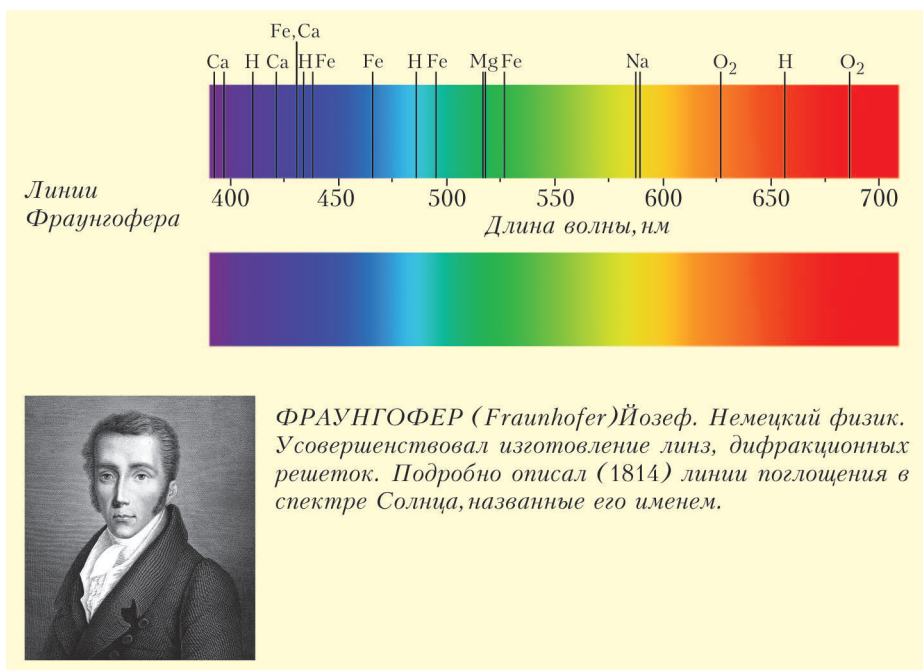
На физическом отделении университета с оборудованием для электротехнических исследований дело обстояло еще хуже, чем в Берлинском университете, – оно полностью отсутствовало. И Кирхгоф решает на изменение своего научного электрофизического профиля. Тем более, что он предвидел большое практическое значение спектроскопических работ. Для него было очень важно, чтобы экспериментальные исследования не только служили развитию физики, а и могли иметь практическое значение (как это, например, было с его «Правилами»). Он принимает предложение Бунзена и начинает создавать спектроскопическую лабораторию. Бунзен потрясен искусством, с которым Кирхгоф сделал первый простейший, но достаточно точный спектроскоп.

Кирхгоф и Бунзен становятся коллегами по работе и большими друзьями на много лет вперед. Этой дружбе не помешала разница их возрастов и внешностей – Бунзен на голову выше и на аршин шире в плечах, его масса раза в два больше. Попробуйте представить их научные споры! К сожалению, не сохранилось свидетельств об этих спорах. Но в них родилась истина – был создан метод спектрального анализа химических элементов и их соединений. Кирхгоф больше 150 лет назад дал чеканную формулировку этого метода исследования: «Твердое тело при высокой температуре, окруженное разреженным газом при более низкой температуре, излучает свет в непрерывном спектре с промежутками на дискретных длинах волн, положение которых зависит от химического состава газа». Эти промежутки (темные линии на фоне сплошного цветного спектра) называются фраунгоферовыми линиями. Они были открыты еще в 1802 году английским физиком и химиком Уильямом Волластоном и исследованы и описаны немецким физиком Йозефом Фраунгофером в 1814 году. Но именно Кирхгоф

объяснил их происхождение, тот факт, что они являются как бы визитной карточкой химического элемента или соединения.

В 1852 году Бунзен был приглашен в Гейдельбергский университет, где в это время происходило превращение прославленного гуманитарного университета в математический и естественнонаучный европейский центр. Кирхгоф и Бунзен стали профессорами этого университета. Кирхгоф проработал в нем 20 лет, там им были сделаны важные работы по спектральному анализу. Прежде всего он тщательно изучил фраунгоферовы линии солнечной короны и определил наличие на Солнце многих химических элементов, в частности натрия, магния, цинка, железа, меди. Вместе с Бунзеном им в водах минеральных источников (в немецком городе Бад-Дюркхайме, знаменитом своим климатом, лечебными водами и винами) были открыты такие элементы, как рубидий и цезий. Названия им были даны по цветам спектра – «насыщенно красный» и «сине-голубой».

Кирхгоф вначале использовал только призматический спектр в видимой области. Он понимал, что важно иметь очень



Спектр поглощения Солнца и фраунгоферовы линии

хорошо отполированные поверхности призм – от этого зависела точность определения углов преломления, а значит, показателей преломления и длин волн. Свои основные экспериментальные исследования спектров он сделал, используя призмы, отполированные (на старости лет) самим Фраунгофером, самым лучшим европейским мастером этого дела.

Но для волн фиолетового и ультрафиолетового диапазонов призматические спектры использовать было нельзя – стекло почти не пропускает эти лучи. И Кирхгоф переходит к использованию дифракционных спектров. До него никто этого не делал, и даже не было строгой математической теории дифракции – существовал только приближенный метод зон Френеля. Кирхгоф создает строгую теорию дифракции и применяет ее для определения параметров дифракционной решетки, которые давали бы необходимую точность определения длин волн спектральных линий. Он намного опередил при этом исследования Джона Рэлея о разрешающей способности решетки. Им были преодолены и трудности изготовления дифракционных решеток с большой разрешающей способностью.

Через несколько десятков лет методика спектрального анализа с помощью дифракционной решетки, разработанная Кирхгофом, легла в основу тех точных измерений длин волн спектров солнечного водорода и солнечного гелия, которые были использованы Нильсом Бором при создании квантовой теории атома.

Спектральный анализ позволил в настоящее время создать для всех изотопов химических элементов и сотен тысяч химических соединений «картотеку» их спектров в ультрафиолетовом, видимом и инфракрасном диапазонах. Недаром в спектроскопии и сейчас существует премия Бунзена–Кирхгофа, присуждаемая за важные спектроскопические исследования. И, конечно, совершенно очевидно значение спектрального анализа для астрономии и космологии – ведь это единственный способ узнать, «из чего сделаны» звезды.



Кирхгоф и Бунзен

Закон Кирхгофа для теплового излучения

Но, пожалуй, наиболее важными для развития физики стали исследования Кирхгофа, связанные с тепловым излучением. Условно говоря, современная физика «родилась» в декабре 1900 года после введения в науку Максом Планком понятия «квант электромагнитной энергии колебаний излучающей частицы» (так называемого гармонического осциллятора). Эта революционная для физики гипотеза Планка сделана им на основе анализа экспериментальных данных о тепловом излучении абсолютно черного тела.

Понятие «абсолютно черное тело» было введено в физику (теоретическую и экспериментальную) Кирхгофом для формулировки открытого им в 1859 году закона теплового излучения. Это не такой простой для понимания закон, поэтому количественная его формулировка в школьном курсе не рассматривается, но мы попробу-

ем разобраться. Кирхгоф рассматривал баланс между падающей на горячее тело энергией электромагнитных волн и тепловым излучением самого тела. Падающая энергия может частично отражаться и частично поглощаться. Для теплового излучения Кирхгоф ввел специальную энергетическую характеристику – отношение энергии ΔR , излучаемой телом с единицы площади в единицу времени в очень узком диапазоне длин волн $\Delta\lambda$, к величине этого диапазона: $r = \Delta R/\Delta\lambda$. Он назвал величину r испускательной способностью, коэффициент поглощения a – поглощательной способностью, а энергию R – энергетической светимостью. Физический смысл энергетической светимости R – поверхностная плотность мощности (или потока) энергии излучения, а испускательной способности r – спектральная плотность энергетической светимости. Выбор букв R и r был сделан Кирхгофом от латинского *radiatorum* (излучение), буквы a – от немецкого *absorption* (поглощение).

Применяя законы термодинамики, Кирхгоф установил, что отношение испускательной способности тела $r(\lambda, T)$ для данной длины волны и температуры к поглощательной способности тела $a(\lambda, T)$ для такой же длины волны и температуры одинаково для всех тел независимо от их состояния и химического состава:

$$\frac{r(\lambda, T)}{a(\lambda, T)} = \text{const.}$$

Без формулы этот закон можно выразить так: чем лучше тело поглощает свет некоторой длины волны, тем оно способно больше излучить света с такой же длиной волны. И наоборот. Качественно это заключалось уже в самом факте наличия фраунгоферовых линий в спектре – линия поглощения как раз соответствует линии испускания. Но от этого факта очень далеко до простого количественного соотношения в законе Кирхгофа. Ему нужно было проделать много точных измерений. И главная трудность этих измерений заключалась в том, что каждый раз нужно было выделять очень маленький интервал длин волн $\Delta\lambda$, подбирать соответствующие све-

тофильтры. При этом уменьшалась освещенность, а точность измерений должна быть очень большой. Экспериментальное искусство Кирхгофа помогло ему преодолеть все трудности – закон был доказан на опыте, а не только выведен теоретически. Понятно, что излучающие тела должны находиться при достаточно высокой температуре, иначе энергии излучения будет совсем мало.

Проверить качественно этот закон можно даже в домашних условиях. Для этого нужно взять, например, белое керамическое блюдо с темным узором, часто узор имеет синий цвет. И понятно, что там, где есть этот узор, поглощение света (в оптическом диапазоне длин волн) сильнее, а там, где узора нет, белая поверхность почти ничего не поглощает, все уходит в отражение. Но если блюдо раскалить докрасна (удобно сделать это на электрической плите), то бывший темный узор, наоборот, будет светиться гораздо ярче светлого фона блюда (главное при этом – не обжечь ненароком руки раскаленным блюдцем). Когда я впервые сделал этот простой опыт, он показался мне гораздо убедительнее, чем формула закона Кирхгофа.

Абсолютно черное тело

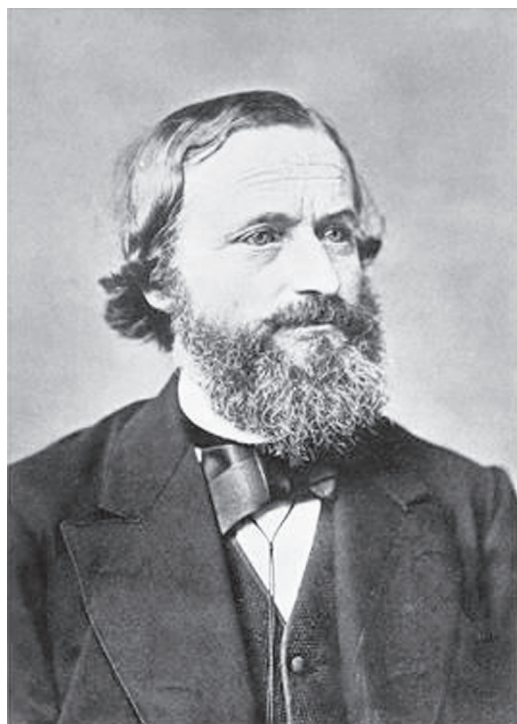
Экспериментируя с различными телами, Кирхгоф заметил, что у некоторых тел коэффициент отражения очень маленький для всех длин волн (и не только в видимой области). Кстати, сажа (уголь) не относится к таким телам. Если в видимой области коэффициент отражения у сажи почти нулевой («черный, как сажа»), то в инфракрасной области он равен 0,3–0,5. И Кирхгоф предположил, что могут быть в природе такие объекты, которые совсем не отражают электромагнитное излучение ни в видимом, ни в ультрафиолетовом, ни в инфракрасном диапазонах длин волн. Он понял, что таким объектом может быть раскаленная звезда, не имеющая резко очерченной границы, например – солнце. Кирхгоф назвал такое тело *абсолютно черным*. Испускательная способность такого тела и будет константой r^* в законе

Кирхгофа, поскольку для него $a = 1$. А для любых других тел закон принимает вид $r = ar^*$. Зная коэффициенты поглощения (поглощательные способности) тел, можно находить энергетические характеристики их излучения (испускаемые способности). Нужно лишь хорошо измерить испускательную способность r^* абсолютно черного тела, проведя тщательные измерения энергии солнечного излучения в различных диапазонах длин волн $\Delta\lambda$. Но это будет только часть работы. Ведь температура излучателя (солнца) при этом фиксирована (порядка 6000 К). А как быть с опытами при других температурах?

И Кирхгоф после многих опытов создает замечательно простую модель лабораторного абсолютно черного тела – полость (пещеру) с очень маленьким отверстием. Свет, попадающий в полость через это отверстие, практически не будет выходить обратно, а будет, многократно отражаясь от стенок полости, «метаться» внутри и постепенно поглощаться этими стенками. Это означает, что поглощательная способность такого устройства равна единице для всех длин волн и температур. И если устройство будет нагрето, то тепловое излучение внутренних стенок полости в небольшой доле будет обязательно выходить из отверстия. Его энергетическая характеристика $r(\lambda, T)$ будет достаточно близкой к испускательной способности абсолютно черного тела.

Современному человеку это изобретение кажется очень простым – вспоминается пример из школьного учебника о том, что окна комнат снаружи выглядят темными, хотя внутри в комнатах достаточно светло. Но ведь и изобретение колеса кажется на первый взгляд очень простым. Однако понадобились тысячи лет, чтобы какой-то безвестный гений шумерского народа, глядя на вращающийся гончарный круг, догадался насадить такие круги на ось и сделать первую телегу. Или, говоря по-современному, – соединить вращательное движение с поступательным.

Кирхгоф хорошо понимал главное практическое применение своего закона – использование знания зависимости испуска-



Кирхгоф в Гейдельберге (уже с бородой)

тельной способности от температуры для бесконтактного (телеметрического) измерения высоких температур (оптическая пирометрия) В то же время ему было ясно, что для этого нужно создавать экспериментальную базу, различную для излучений в видимом, ультрафиолетовом и инфракрасном диапазонах. А для ее создания необходимы немалые средства.

Кирхгоф не стал заниматься исследованием зависимости испускательной способности абсолютно черного тела от длины волны излучения и от температуры. Но прошло 30 лет, и эти исследования развернулись в нескольких университетских центрах. Нашлись спонсоры, выделившие необходимые средства. Этими спонсорами были крупные металлургические корпорации и стекольная промышленность.

В конце 19-го века началось производство новых видов стали для химических заводов (нержавеющих) и для военных целей (броневых). Небольшие добавки редких и редкоземельных элементов, вводимые в расплав для этих сталей, требовали точного знания температуры расплава.

А в стекольной промышленности произошла настоящая революция. Вместо плавки стекла в сравнительно небольших «горшках» появились огромные стекловаренные печи – наподобие мартеновских сталелитейных. Дело в том, что оконное стекло сотни лет производили выдуванием бутылок и последующим распрямлением их стенок в еще неостывшем пластичном состоянии. Понятно, что такие оконные стекла имели небольшой размер, поэтому окна или были тоже очень маленькими, или состояли из многих кусков стекла. Оконные стекла современного размера делались литьем и длительной последующей шлифовкой и стоили баснословно дорого. Они назывались «цельными» и были признаком богатства владельцев домов с такими окнами. (Помните, когда Евгений Онегин подъезжает к дому, где идет великосветский бал, он видит, что «по цельным окнам тени ходят».) Появившийся в конце 19-го века в архитектуре стиль «модерн», требовал для внутренних помещений жизненного удобства, в частности – больших окон. И бельгийский инженер Эмиль Фурко изобрел способ непрерывного производства оконного стекла вытягиванием стеклянного листа вверх из расплавленной стекломассы. За несколько лет оконное стекло подешевело на порядок.

В этих примерах хорошо прослеживается взаимосвязь всех сторон культуры общества – жизненных потребностей, развития технологий, искусства и науки.

Еще о жизни и деятельности Кирхгофа

Уже отмечалось, что сам Кирхгоф не имел возможности развивать свои работы по тепловому излучению. Он вернулся к спектральному анализу и другим работам. Часть из них касалась проблем механики – расчеты и опыты по устойчивым формам при деформации тонких пластинок, опыты по деформации вращающихся тел. В частности, он получил выражения для формы земного шара при различных моделях распределения земного вещества. Кирх-

гоф изучал деформации твердых тел под действием электричества и магнетизма (магнитострикцию и электрострикцию). Проводил исследования и в термохимии, получив важные результаты о связи теплоемкости газов с энергиями некоторых экзотермических реакций для этих газов (термохимический закон Кирхгофа).

Кирхгоф был блестящим педагогом. Прослушать циклы его лекций приезжали студенты и преподаватели из многих университетов. Лекции отличались хорошо продуманной структурой изложения, а главное – в них были теоретические обоснования тех физических явлений, о которых он рассказывал. Прекрасное знание математики позволяло ему находить достаточно строгое, но при этом доступное слушателям математическое обоснование физических законов. На его лекциях рождалась новая научная дисциплина – теоретическая физика. На основе своих лекций Кирхгоф написал первый в истории физики четырехтомный курс теоретической физики. Он назвал его «Лекции по математической физике» (термина «теоретическая физика» еще не существовало). На несколько десятков лет этот курс стал основным учебником для будущих физиков. По нему осваивали серьезную физику и Герц, и Планк, и Эйнштейн. (Аналогичная ситуация повторилась в 20-м веке, когда Л.Ландау и Е.Лифшицем был создан знаменитый десяти томный курс современной теоретической физики.)

Подготовка лекций и написание учебника стали основной деятельностью Кирхгофа. Экспериментальные исследования он был вынужден прекратить. В середине 60-х годов из-за несчастного случая (неудачного падения) он почти полностью потерял подвижность ног и мог перемещаться только в инвалидном кресле или с большим трудом на костылях. Он расстался с Гейдельбергом и переезжает в Берлин, заняв должность заведующего кафедрой математической физики в Берлинском университете. Преподавал он теперь не в большой лекционной аудитории, а для небольшой группы будущих физиков-теоретиков. У Кирхгофа были и ученики –

будущие физики-экспериментаторы. Самым талантливым из них (по мнению самого Кирхгофа) был русский физик Александр Григорьевич Столетов (1839–1896), основавший первую в России научную физическую лабораторию при Московском университете. Он дважды работал в лаборатории Кирхгофа (еще в Гейдельберге) и под его руководством подготовил докторскую диссертацию по электрическим и магнитным свойствам веществ.

Кирхгоф был дважды женат. Первый раз он женился в 30-летнем возрасте, когда стал профессором Гейдельбергского университета. Но в 1869 году жена умерла, оставив пятерых детей (от четырех до четырнадцати лет). И Кирхгоф был вынужден сам воспитывать детей. Положение осложнялось тем, что в это время он уже потерял подвижность. Второй раз Кирхгоф женился в 1872 году. Жена окру-

жила его и его детей вниманием и заботой, обеспечив ему возможность еще 15 лет успешно продолжать теоретические работы, преподавать, писать научные статьи и учебники и руководить кафедрой математической физики.

Кирхгоф скончался в Берлине 17 октября 1887 года. Память о нем сохраняется в названиях улиц в Берлине, Гейдельберге и Бад-Дюркнхайме, а также в именах лунного кратера и астероида. Но главная память – законы, которым научная общность присвоила имя Кирхгофа и внесла во все серьезные учебники физики, химии и электротехники. Восстанавливается память о нем и в его родном бывшем немецком Кёнигсберге, ныне российском городе Калининграде, и в Балтийском федеральном университете имени Иммануила Канта.

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Мы начинаем очередной конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на учащихся начиная с 8–9 класса, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт kvantik.com).

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, по адресу: savin.contest@gmail.com. Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором учитесь.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest. Желаем успеха!

1. Чему может равняться сумма наименьшего и наибольшего из углов одного треугольника? Укажите множество возможных значений.

Е.Бакаев

2. У Фелониуса Грю живут 33 миньона, все они весят одинаково. Однажды один из них стащил у Грю банан и съел его, но Грю не знает, кто это сделал. У него есть большие чашечные весы без гирь, на которых он может взвешивать любое количество миньонов. Однако если миньоны оказываются на одной чаше весов, они ссорятся и больше на одну чашу одновременно их ставить нельзя. Как Грю за четыре взвешивания найти воришку, если после съеденного банана он весит больше остальных?

А.Грибалко

3. Каменщик выложил стенку без дырок и полостей из одинаковых кирпичей $1 \times 1 \times 2$. Но некоторые кирпичи он положил вдоль, некоторые поперек, некоторые вертикально, т.е. длинное ребро кирпича параллельно одному из трех направлений. Могло ли оказаться, что кирпичей каждого из трех типов поровну, если размеры стенки:

- а) $3 \times 8 \times 10$;
- б) $3 \times 9 \times 10$?

М.Евдокимов

4. Таблица 100×100 заполнена целыми числами. Для каждой пары $1 \leq i \leq 100$, $1 \leq j \leq 100$ найдется прямоугольник $i \times j$ с нулевой суммой чисел. Какое наименьшее количество нулей может быть в таблице?

Е.Бакаев

Последовательности Сомоса

А. УСТИНОВ

Сомос-4 есть Сомос-5

Одним из основных свойств последовательностей Сомос-4 является то, что они также являются последовательностями Сомос- k для любого $k \geq 5$. Более точно этот результат можно сформулировать следующим образом: для любого $j \geq 2$ можно предъявить такие числа $\alpha_j, \beta_j, \tilde{\alpha}_j, \tilde{\beta}_j$, что будут выполняться равенства

$$s_{n+j}s_{n-j} = \alpha_j s_{n+1}s_{n-1} + \beta_j s_n^2 \quad (k = 2j),$$

$$s_{n+j+1}s_{n-j} = \tilde{\alpha}_j s_{n+2}s_{n-1} + \tilde{\beta}_j s_{n+1}s_n \quad (k = 2j + 1).$$

Мы ограничимся рассмотрением случая $k = 5$, поскольку этого будет достаточно для доказательства теорем 1 и 2. Доказательство общего результата см. в [6, 7].

Теорема 5. Пусть последовательность Сомос-4 задана рекуррентным соотношением (1) и имеет инвариант T . Тогда эта последовательность является последовательностью Сомос-5 и удовлетворяет уравнению

$$s_{n+3}s_{n-2} = \tilde{\alpha}s_{n+2}s_{n-1} + \tilde{\beta}s_{n+1}s_n \quad (25)$$

с коэффициентами

$$\tilde{\alpha} = -\beta \quad \text{и} \quad \tilde{\beta} = \alpha^2 + \beta T. \quad (26)$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 4, перейдем к более удобным переменным f_n , см. (20). Поделим уравнение (25) на $s_{n+1}s_n$ и заметим, что

$$\frac{s_{n+2}s_{n-1}}{s_{n+1}s_n} = f_n f_{n+1}, \quad \frac{s_{n+3}s_{n-2}}{s_{n+1}s_n} = f_{n+2} f_{n+1} f_n^2 f_{n-1}.$$

В новых переменных уравнение (25) примет вид

$$f_{n+2} f_{n+1}^2 f_n^2 f_{n-1} = \tilde{\alpha} f_n f_{n+1} + \tilde{\beta}.$$

Попробуем подобрать коэффициенты $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ так, чтобы это равенство действительно

выполнялось. Из рекуррентного соотношения (21) следует, что

$$f_{n+2} f_{n+1} f_n = \alpha + \frac{\beta}{f_{n+1}}, \quad f_{n+1} f_n f_{n-1} = \alpha + \frac{\beta}{f_n}.$$

Перемножив эти равенства, получаем, что $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ при любом n должны удовлетворять соотношению

$$\left(\alpha + \frac{\beta}{f_{n+1}} \right) \left(\alpha + \frac{\beta}{f_n} \right) = \tilde{\alpha} f_n f_{n+1} + \tilde{\beta},$$

которое можно переписать в виде

$$\tilde{\beta} - \alpha^2 = -\tilde{\alpha} f_n f_{n+1} + \alpha \beta \left(\frac{1}{f_n} + \frac{1}{f_{n+1}} \right) + \frac{\beta^2}{f_n f_{n+1}}. \quad (27)$$

Правая часть этого равенства оказывается похожа на формулу (22) для инварианта T . С учетом этой формулы получаем, что $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ должны быть связаны равенством

$$\tilde{\beta} - \alpha^2 = \beta T - (\beta + \tilde{\alpha}) f_n f_{n+1}.$$

Так как произведение $f_n f_{n+1}$ может принимать разные значения, для выполнения последнего равенства необходимо, чтобы $\tilde{\alpha} = -\beta$. После этого находим, что $\tilde{\beta} = \alpha^2 + \beta T$. Полученные необходимые условия на $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ являются и достаточными для того, чтобы выполнялась формула (27), равносильная уравнению (25).

Задача 11. Докажите, что произвольная последовательность Сомос-2 является последовательностью Сомос- k при любом $k \geq 2$.

Задача 12. Докажите, что произвольная последовательность Сомос-3 является последовательностью Сомос- k при любом $k \geq 3$.

Как находить скрытые инварианты?

Найти инвариант T можно, зная теорему 5. Тот факт, что всякая последовательность Сомос-4 является и последователь-

ностью Сомос-5, можно обнаружить экспериментально. Рассматривая произвольную последовательность Сомос-4, по ее первым элементам можно найти значения предполагаемых коэффициентов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$. Если равенство (25) будет выполнено для многих значений n , то можно предположить, что оно действительно верное, и попробовать его доказать. В процессе доказательства неизбежным образом появится инвариант T , подобно тому, как он появился в процессе доказательства теоремы 5.

После того как формула (22) выписана, инвариантность величины T_n можно доказать, не используя замысловатые выкладки, приведенные выше. Достаточно рассмотреть разность $T_{n+1} - T_n$ и упростить полученное выражение, используя рекуррентное соотношение (21) (ничего другого у нас нет!):

$$T_{n+1} - T_n = f_{n+1}f_n + \frac{\alpha}{f_{n+1}} + \frac{\beta}{f_n f_{n+1}} - f_n f_{n-1} - \frac{\alpha}{f_{n-1}} - \frac{\beta}{f_{n-1}f_n}. \quad (28)$$

Приведа все к общему знаменателю, получим выражение, которое раскладывается на множители:

$$T_{n+1} - T_n = \frac{1}{f_{n-1}f_n f_{n+1}} (f_{n+1} - f_{n-1})(f_n - f_n^2 f_{n+1} - \alpha f_n - \beta). \quad (29)$$

Теперь из рекуррентного соотношения (21) следует, что $T_{n+1} - T_n = 0$.

Еще два доказательства целочисленности последовательности Сомос-(4)

Второе доказательство теоремы 1. Для последовательности Сомос-(4) значение инварианта T равно 4. По теореме 5 эта последовательность удовлетворяет уравнению

$$s_{n+2}s_{n-3} = -s_{n+1}s_{n-2} + 5s_n s_{n-1}. \quad (30)$$

Доказательство целочисленности последовательности Сомос-(4) будем проводить по индукции. В качестве базы будем использовать целочисленность элементов

s_0, \dots, s_4 . Для проведения шага индукции предположим, что $n \geq 3$, целочисленность s_0, \dots, s_{n+1} уже доказана, и проверим, что s_{n+2} также будет целым числом. Пользуясь равенствами (6) и (30), мы можем выписать два представления для s_{n+2} :

$$s_{n+2} = \frac{s_{n+1}s_{n-1} + s_n^2}{s_{n-2}},$$

$$s_{n+2} = \frac{-s_{n+1}s_{n-2} + 5s_n s_{n-1}}{s_{n-3}}.$$

Пусть d – это знаменатель того рационального числа, которое получается после сокращения этих дробей. Из первого равенства следует, что d делит s_{n-2} . Из второго равенства – что d делит s_{n-3} . Но, согласно лемме 1, s_{n-2} и s_{n-3} – взаимно простые числа, значит, $d = 1$ и s_{n+2} – целое. Теорема доказана.

В процессе доказательства теоремы 4 для инварианта T у нас появилось представление (23). В исходных переменных s_n оно принимает вид

$$\frac{s_{n-2}s_{n+1}}{s_{n-1}s_n} + \frac{s_{n-1}s_{n+2}}{s_n s_{n+1}} + \frac{\alpha s_n^2}{s_{n-1}s_{n+1}} = T. \quad (31)$$

Это равенство можно интерпретировать как рекуррентное соотношение третьего порядка, задающее исходную последовательность $\{s_n\}$:

$$s_{n+2} = (T s_{n+1} s_n s_{n-1} - s_{n+1}^2 s_{n-2} - \alpha s_n^3) s_{n-1}^{-2}. \quad (32)$$

С его помощью можно предъявить еще одно доказательство теоремы 1.

Третье доказательство теоремы 1. Как отмечалось в предыдущем доказательстве, для последовательности Сомос-(4) значение инварианта T равно 4. Снова будем предполагать, что $n \geq 3$ и что целочисленность элементов s_0, \dots, s_{n+1} уже доказана. Тогда для проверки того, что s_{n+2} – целое число, запишем равенства (6) и (32):

$$s_{n+2} = \frac{s_{n+1}s_{n-1} + s_n^2}{s_{n-2}},$$

$$s_{n+2} = \frac{4s_{n+1}s_n s_{n-1} - s_{n+1}^2 s_{n-2} - \alpha s_n^3}{s_{n-1}^2}.$$

Теперь, как и во втором доказательстве теоремы 1, из взаимной простоты знамена-

телей s_{n-1}^2 и s_{n-2} следует, что s_{n+2} – целое число.

Периодичность последовательностей Сомоса

Пусть $m = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_l^{\gamma_l}$ – каноническое разложение числа m на простые множители. Тогда периодичность последовательности по модулю m равносильна тому, что последовательность периодична по каждому из модулей вида $p_i^{\gamma_i}$ ($i = 1, 2, \dots, l$). Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением модулей, которые являются степенями простого числа.

Задача 13. Последовательность $\{a_n\}$ периодически повторяется по каждому из модулей $p_i^{\gamma_i}$ ($i = 1, 2, \dots, l$). Докажите, что последовательность $\{a_n\}$ будет периодической и по модулю $m = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_l^{\gamma_l}$.

Попробуем выяснить, как ведет себя произвольная последовательность Сомос-4 по модулю p^γ , где p – простое число и $\gamma \geq 1$.

Будем далее предполагать, что $\{s_n\}$ – это целочисленная последовательность. Если все элементы последовательности делятся на простое p , то от $\{s_n\}$ имеет смысл перейти к последовательности $\{s_n p^{-k}\}$, где k – максимально возможная степень p , на которую делятся все числа s_n . Такой переход равносильен изменению начальных условий, рекуррентное соотношение, задающее последовательность, при этом не изменится. Эту операцию можно проделать для всех простых чисел p . В итоге получится последовательность, все элементы которой не имеют общих делителей. Будем называть такие последовательности *примитивными*.

Теорему 2 мы докажем в следующей, немного более общей формулировке.

Теорема 6. Пусть p – простое число, $\gamma \geq 1$ и $\{s_n\}$ – примитивная последовательность Сомос-4, удовлетворяющая рекуррентному соотношению (1), в котором $(\alpha\beta, p) = 1$. Тогда остатки, которые элементы последовательности $\{s_n\}$ дают при делении на p^γ , периодически повторяются.

Из равенства (32) следует, что для того, чтобы значение величины T было коррек-

тно определено по модулю p^γ ($\gamma \geq 1$), достаточно, чтобы в последовательности $\{s_n\}$ нашлось три подряд идущих члена s_{n-1}, s_n, s_{n+1} , взаимно простых с p . Оказывается, что для примитивных последовательностей (при дополнительном условии на коэффициент β) это всегда возможно. Следующее утверждение представляет собой модификацию леммы 1.

Лемма 2. Пусть p – простое число и $\{s_n\}$ – примитивная последовательность Сомос-4, удовлетворяющая рекуррентному соотношению (1) с целыми коэффициентами такими, что $(\alpha\beta, p) = 1$. Тогда в этой последовательности всегда можно выбрать три подряд идущих элемента, взаимно простых с p .

Доказательство. Отметим сначала, что в последовательности $\{s_n\}$ не может быть двух подряд идущих элементов, кратных p . Действительно, если $p|s_{n-2}$ и $p|s_{n-1}$, то из уравнения (1) и условия $(\beta, p) = 1$ следует, что $p|s_n$. Повторяя это рассуждение, мы получаем, что все элементы последовательности $\{s_n\}$ делятся на p . Таким образом, сделанное предположение противоречит условию примитивности последовательности $\{s_n\}$.

Если найдутся два числа, кратные p , у которых номера отличаются на три, то снова приходим к противоречию. Действительно, если $p|s_{n-2}$ и $p|s_{n+1}$, то из уравнения (1) и условия $(\beta, p) = 1$ следует, что $p|s_n$. Значит, два подряд идущих элемента s_n и s_{n+1} делятся на p , что, как мы уже доказали, невозможно.

Предположим, что в последовательности $\{s_n\}$ найдутся два элемента, кратных p и идущих через один. Если $p|s_{n-2}$ и $p|s_n$, то из уравнения (1) и условия $(\alpha, p) = 1$ следует, что $p|s_{n-1}s_{n+1}$. Тогда p делит s_n и один из соседних элементов, что снова приводит к противоречию: на p делятся либо два соседних элемента последовательности, либо два элемента, номера которых отличаются на три.

Из доказанных утверждений следует, что номера двух элементов последователь-

ности, делящихся на p , отличаются по крайней мере на 4. Значит, всегда можно выбрать три подряд идущих элемента, взаимно простых с p .

Следствие 2. В условиях леммы 2 для последовательности $\{s_n\}$ корректно определено значение $T \pmod{p^y}$. Иначе говоря, T – постоянное рациональное число, знаменатель которого не кратен p .

Доказательство. По лемме 2 в последовательности $\{s_n\}$ найдутся три подряд идущих элемента, взаимно простых с p . Это позволяет найти значение $T \pmod{p^y}$ по формуле (31).

Отметим, что вместе с T по модулю p^y будут корректно определены и коэффициенты $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ уравнения (25), см. формулы (26).

Доказательство теоремы 6. Проверим, что значение $s_{n+2} \pmod{p^y}$ однозначно определяется остатками, которые при делении на p^y дают $s_{n+1}, s_n, s_{n-1}, s_{n-2}, s_{n-3}$. Действительно, для нахождения $s_{n+2} \pmod{p^y}$ будем применять рекуррентные соотношения (1) и (25), записанные в виде (напомним, что в сравнениях обратный элемент вычисляется по модулю данного числа)

$$s_{n+2} \equiv (\alpha s_{n+1} s_{n-1} + \beta s_n^2) s_{n-2}^{-1} \pmod{p^y}, \tag{33}$$

$$s_{n+2} \equiv (\tilde{\alpha} s_{n+1} s_{n-2} + \tilde{\beta} s_n s_{n-1}) s_{n-3}^{-1} \pmod{p^y}.$$

Первое из соотношений имеет смысл, если $(s_{n-2}, p) = 1$. Второе – если $(s_{n-3}, p) = 1$. Но хотя бы одно из этих условий всегда выполнено, так как два соседних элемента последовательности $\{s_n\}$ не могут делиться на одно и то же простое число p одновременно (см. доказательство леммы 2).

Теперь остается повторить те рассуждения, которые мы вспоминали при доказательстве периодичности линейных рекуррентных последовательностей. Если мы рассмотрим первые p^{5y} пятерок вида $(s_{n-3}, s_{n-2}, s_{n-1}, s_n, s_{n+1})$, то среди них найдутся по крайней мере две, в которых все пять чисел дают одни и те же остатки от деления на p^y . Из формул (33) следует, что последовательность по модулю p^y закружится.

Замечание 2. Для доказательства теоремы 6 вместо рекуррентного соотношения пятого порядка (25) можно использовать рекуррентное соотношение четвертого порядка

$$s_{n+2} s_{n-1}^2 = T s_{n-1} s_n s_{n+1} - s_{n-2} s_{n+1}^2 - \alpha s_n^3,$$

получающееся из равенства (31) умножением на $s_{n-1} s_n s_{n+1}$.

Задача 14. Докажите, что в теореме 6 нельзя отбросить условие $(\alpha\beta, p) = 1$.

Эллиптические кривые

Попытки привести равенство (24) к уравнению эллипса, параболы или гиперболы обречены на неудачу. Однако, сделав замены $x = X, y = XY$, уравнение (24) можно свести к уравнению третьей степени вида

$$f(x, y) = ax^3 + bx^2y + \dots + cy + d = 0.$$

Кривые, задаваемые такими уравнениями, называются *кривыми третьего порядка*. Можно доказать, что они делятся на два больших класса.

К первому классу относятся кривые, которые имеют точку возврата (как точка $(0;0)$ у полукубической параболы $y^2 = x^3$, рис.3), точку самопересечения (как точка $(0;0)$ у декартового листа $y^2 = x^3 + x^2$, рис.4), а также кривые, для которых многочлен $f(x, y)$ представим в виде $f(x, y) = f_1(x, y) f_2(x, y)$, где $f_1(x, y), f_2(x, y)$ – многочлены меньших степеней (рис.5). Назовем такие кривые *вырожденными*.

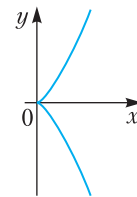


Рис. 3

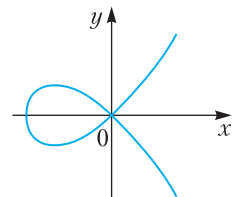


Рис. 4

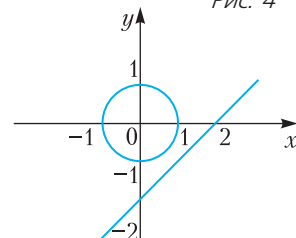


Рис. 5

Второй класс образуют все остальные, невырожденные кривые, которые называются *эллиптическими*. Известно, что каждую такую кривую с помощью замены переменных можно привести к каноническому виду (форме Вейерштрасса)

$$y^2 = x^3 + ax + b. \quad (34)$$

Таким образом, уравнение (24) (за исключением некоторых вырожденных случаев, которые как раз и соответствуют элементарным последовательностям Сомос-4) неизбежно приводит нас в мир эллиптических кривых. В частности, отсюда следует, что последовательности Сомос-4 – неэлементарные объекты. Для полного описания их свойств требуется использование эллиптических функций, которые связаны с эллиптическими кривыми так же, как тригонометрические функции – с окружностью.

Кривая (34) невырождена тогда и только тогда, когда многочлен $x^3 + ax + b$ не имеет кратный корень. Это условие, в свою очередь, можно переписать в виде $4a^3 + 27b^2 \neq 0$.

Основное свойство любой эллиптической кривой E состоит в том, что на ней определена операция сложения точек.

Рассмотрим две точки P и Q на эллиптической кривой, не симметричные друг другу относительно оси абсцисс (рис.6). Определим сумму $P + Q$ следующим образом: проведем через P и Q прямую, рассмотрим третью точку R' пересечения этой прямой с нашей эллиптической кривой (она может совпадать с P или Q), отразим R' симметрично относительно оси абсцисс (отметим, что наша кривая симметрична относитель-

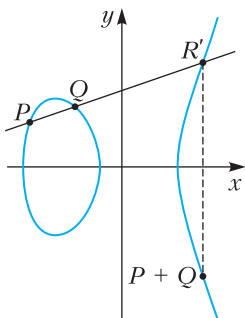


Рис. 6

но оси абсцисс). Полученную точку R назовем *суммой* точек P и Q , записывая это как $R = P + Q$.

Лемма 3 (формулы сложения). Пусть $P = (x_1; y_1)$ и $Q = (x_2; y_2)$ – точки кривой $y^2 = x^3 + ax + b$, причем $x_1 \neq x_2$, и $(x_3; y_3)$ – координаты точки $P + Q$. Тогда

$$\begin{cases} x_3 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)^2 - x_1 - x_2, \\ y_3 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x_1 - x_3) - y_1. \end{cases} \quad (35)$$

Доказательство. Нас интересуют решения системы

$$\begin{cases} y^2 = x^3 + ax + b, \\ y = kx + b_1, \end{cases}$$

в которой числа k и b_1 выбраны так, чтобы точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ лежали на прямой $y = kx + b_1$, т.е.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (36)$$

и $b_1 = y_1 - ax_1$. Уравнение $x^3 + ax + b = (kx + b_1)^2$ имеет корни x_1, x_2, x_3 , поэтому по теореме Виета должно выполняться равенство $x_1 + x_2 + x_3 = k^2$. Из него вытекает первое уравнение системы (35). Второе уравнение системы (35) получается исходя из того, что точка $(x_3; -y_3)$ должна лежать на прямой $y = kx + b_1$:

$$\begin{aligned} -y_3 &= kx_3 + b_1 = kx_3 + y_1 - kx_1 = \\ &= k(x_3 - x_1) + y_1. \end{aligned}$$

Если складываемые точки совпадают, то вместо секущей нужно рассматривать касательную. Формулы для координат суммы точек становятся немного другими.

Лемма 4 (формулы удвоения). Пусть $P = Q = (x_1; y_1)$. Тогда координаты $(x_3; y_3)$ точки $2P$ находятся с помощью равенств

$$\begin{cases} x_3 = \left(\frac{3x_1^2 + a}{2y_1} \right)^2 - 2x_1, \\ y_3 = \frac{3x_1^2 + a}{2y_1} (x_1 - x_3) - y_1. \end{cases} \quad (37)$$

Доказательство. Пусть касательная к кривой $y^2 = x^3 + ax + b$ в точке $(x_1; y_1)$

задается уравнением $y = kx + b$. Тогда значение k можно найти, перейдя в формуле (36) к пределу при $x_2 \rightarrow x_1$:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \\ &= \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{\sqrt{x_2^3 + ax_2 + b} - \sqrt{x_1^3 + ax_1 + b}}{x_2 - x_1} = \\ &= \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{x_2^3 - x_1^3 + ax_2 - ax_1}{\left(\sqrt{x_2^3 + ax_2 + b} + \sqrt{x_1^3 + ax_1 + b}\right)(x_2 - x_1)} = \\ &= \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 + a}{y_2 + y_1} = \frac{3x_1^2 + a}{2y_1}. \end{aligned}$$

Остальные вычисления проводятся так же, как и в доказательстве леммы 3. Таким образом, лемма доказана.

Добавим к нашей эллиптической кривой еще одну точку, бесконечно удаленную. Будем считать, что это точка пересечения всех вертикальных прямых. Она будет «нулем», нейтральным элементом по сложению: если $P = 0$, то $-P = 0$ и $P + Q = Q$ для любой точки Q данной кривой. Точки, симметричные относительно оси абсцисс, будем считать противоположными: если $P = (x; y)$, то $-P = (x; -y)$ и $P + (-P) = 0$. В остальных случаях координаты точки $P + Q$ вычисляются по формулам (35) или (37). Во всех случаях определение устроено так, что сумма этих трех точек, лежащих на одной прямой, равна нулю.

После того как сложение определено, необходимо проверить, что оно обладает свойством ассоциативности: $A + (B + C) = (A + B) + C$. Это – нетривиальная теорема, доказательство которой можно найти в статье [8]. Дополнительные сведения об эллиптических кривых можно найти в статьях [9, 10].

Задача 15. а) Во что перейдет уравнение (24) при замене переменных

$$\begin{aligned} X &= -\frac{x}{4\alpha}, \\ Y &= \frac{1}{2X^2} \left(TX - \alpha - \frac{y}{4\alpha} \right) = -\frac{2\alpha}{x^2} (Tx + 4\alpha^2 + y)? \end{aligned}$$

б) Как привести полученное уравнение к форме Вейерштрасса (34)?

Интерпретация последовательностей Сомос-4 в терминах эллиптических кривых

Предположим, что есть эллиптическая кривая E , заданная уравнением (34), и точка $P = (x; y)$ на ней. Если посчитать первые точки

$$P_n = nP = \underbrace{P + P + \dots + P}_n,$$

то окажется, что их координаты имеют специальный вид. Всегда найдется такой многочлен $\psi_n = \psi_n(x, y)$ с коэффициентами,

зависящими от a и b , что $nP = \left(\frac{\dots}{\psi_n^2}, \frac{\dots}{\psi_n^3} \right)$.

Вот первые элементы этой последовательности:

$$\psi_0 = 0, \psi_1 = 1, \psi_2 = 2y,$$

$$\psi_3 = 3x^4 + 6ax^4 + 12bx - a^2,$$

$$\begin{aligned} \psi_4 &= 4y \left(x^6 + 5ax^4 + 20bx^3 - \right. \\ &\quad \left. - 5a^2x^2 - 4abx - 8b^2 - a^3 \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Следующие значения ψ_5, ψ_6, \dots можно находить с помощью рекуррентного соотношения, совпадающего с уравнением (17):

$$\begin{aligned} \psi_1^2 \psi_{n+2} \psi_{n-2} &= \\ &= \psi_2^2 \psi_{n+1} \psi_{n-1} - \psi_1 \psi_3 \psi_n^2 \quad (n \geq 3). \end{aligned} \quad (39)$$

Многочлены $\psi_n(x, y)$, связанные с эллиптической кривой E , называются *полиномами деления*. Для конкретной кривой с выбранной на ней точкой последовательность $\psi_n(x, y)$ становится числовой последовательностью. Исследованию свойств этих последовательностей посвящен мемуар [11]. Точные формулы для координат точки P_n при $n \geq 2$ имеют вид

$$P_n = \left(\frac{\varphi_n}{\psi_n^2}, \frac{\omega_n}{\psi_n^3} \right), \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_n &= x\psi_n^2 - \psi_{n-1}\psi_{n+1}, \\ \omega_n &= \frac{1}{4y} \left(\psi_{n+2}\psi_{n-1}^2 - \psi_{n-2}\psi_{n+1}^2 \right). \end{aligned}$$

Мы ограничимся проверкой этих формул для конкретного примера. Рассмотрим эллиптическую кривую $y^2 = x^3 - x + \frac{1}{4}$

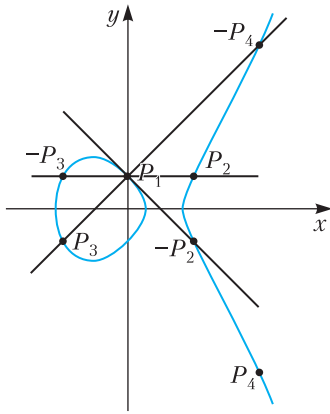


Рис. 7

и точку $P = \left(0; \frac{1}{2}\right)$ на ней. Вычисления показывают, что первые точки $P_n = nP$ имеют вид $P_1 = \left(0; \frac{1}{2}\right)$, $P_2 = \left(1; \frac{1}{2}\right)$, $P_3 = \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$, $P_4 = \left(2; -\frac{5}{2}\right)$ (рис.7).

Этим точкам соответствуют начальные условия $\psi_0 = 0$, $\psi_1 = \psi_2 = \psi_4 = 1$, $\psi_3 = -1$, для которых рекуррентное уравнение (39) принимает вид

$$\psi_{n+2}\psi_{n-2} = \psi_{n+1}\psi_{n-1} + \psi_n^2 \quad (n \geq 3),$$

т.е. $\{\psi_n\}$ – это последовательность (19). Для однородных переменных $f_n = \frac{\psi_{n+1}\psi_{n-1}}{\psi_n^2}$ мы получаем уравнение

$$f_{n-1}f_n^2f_{n+1} = f_n + 1 \quad (n \geq 3) \quad (41)$$

и начальные значения $f_2 = -1$, $f_3 = 1$. Для проверки формулы (40) тоже перепишем ее в терминах f_n и подставим $x = 0$, $y = 1/2$:

$$P_n = \left(-f_n; \frac{f_n^2}{2}(f_{n+1} - f_{n-1})\right) \quad (n \geq 3). \quad (42)$$

Теорема 7. Пусть $P = \left(0; \frac{1}{2}\right)$ – точка эллиптической кривой $y^2 = x^3 - x + \frac{1}{4}$. Тогда координаты точек $P_n = nP$ находятся по формуле (42), где $\{f_n\}$ – последовательность чисел, заданная начальными условиями $f_2 = -1$, $f_3 = 1$ и рекуррентным соотношением (41).

Доказательство. По начальным условиям $f_2 = -1$, $f_3 = 1$ мы можем найти значение инварианта последовательности $\{f_n\}$: $T = -2$. Поэтому в вычислениях можно использовать формулы

$$\begin{aligned} f_{n-1}f_n + f_{n+1}f_n + \frac{1}{f_n} &= \\ &= f_{n-1}f_n + \frac{1}{f_{n-1}} + \frac{1}{f_n} + \frac{1}{f_n f_{n-1}} = -2. \end{aligned} \quad (43)$$

Равенство (42) будем доказывать по индукции. Оно уже проверено для $n = 2$. Предположим, что равенство (42) верно для некоторого $n \geq 2$, и проверим его справедливость для $n + 1$. При сложении точек P_n и P_1 коэффициент углового наклона секущей имеет вид

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1} = \frac{1}{-f_n} \left(\frac{f_n^2}{2}(f_{n+2} - f_{n-1}) - \frac{1}{2} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(f_{n+1}f_n - f_n f_{n-1} - \frac{1}{f_n} \right) = -(f_{n+1}f_n + 1). \end{aligned}$$

На последнем шаге преобразований было использовано рекуррентное соотношение (41) и формулы для инварианта T (43). Значит,

$$x_{n+1} = k_n^2 - x_n - x_1 = (f_n f_{n+1} + 1)^2 + f_n = -f_{n+1}.$$

После этого остается найти ординату точки P_{n+1} :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= -k_n(x_{n+1} - x_1) - y_1 = \\ &= -(f_n f_{n+1} + 1)f_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{f_{n+1}^2}{2}(f_{n+2} - f_n). \end{aligned}$$

Для проверки последнего равенства снова были использованы формулы (41), (43). Теорема доказана.

Как уже отмечалось выше, элементы последовательности Сомос-4 при таком подходе – это числа $(-1)^n \psi_{2n-3}$. (Обоснование см. в задаче 26 ниже.) Можно сказать, что им соответствует «разреженная» арифметическая прогрессия, состоящая из точек $P_{2n-3} = P + 2(n-2)P$. В общем случае ситуация будет аналогичной: каждой последовательности Сомос-4 будет соответствовать «арифметическая прогрессия» из точек $P_n = P_0 + nP$ ($n \in \mathbb{Z}$) на некоторой кривой.

Таким образом, свойства последовательностей Сомос-4 можно рассматривать не как странные случайности, а как следствия того, что в действительности (в скрытом виде) мы имеем дело с эллиптическими кривыми: богатые свойства эллиптических кривых преобразуются в причудливые свойства последовательностей Сомоса.

Последовательности Гейла–Робинсона

Существует гипотеза, что многочисленные свойства, справедливые для последовательностей Сомос-4 и Сомос-5, будут выполняться и для *последовательностей Гейла–Робинсона*, которые задаются рекуррентными соотношениями двух типов:

$$s_n s_{n-k} = \alpha s_{n-l} s_{n-k+l} + \beta s_{n-m} s_{n-k+m},$$

где $0 < l < m < k$, или

$$s_n s_{n-k} = \alpha s_{n-p} s_{n-k+p} + \beta s_{n-q} s_{n-k+q} + \gamma s_{n-r} s_{n-k+r},$$

где $0 < p < q < r < k$ и $p + q + r = k$. Нетрудно видеть, что последовательности Сомос- k при $k = 4, 5, 6, 7$ являются частными случаями последовательностей Гейла–Робинсона.

С ростом порядка k ситуация сильно усложняется, но для малых k численные эксперименты подтверждают гипотезу. Начиная с $k = 6$, исследование последовательностей Гейла–Робинсона может привести к новым интересным результатам.

Задачи

Задача 16. Докажите, что в последовательности Сомос-(4) нет чисел, делящихся на 5.

Задача 17. Пусть последовательность Сомос-5 задана рекуррентным соотношением

$$s_{n+3} s_{n-2} = \tilde{\alpha} s_{n+2} s_{n-1} + \tilde{\beta} s_{n+1} s_n. \quad (44)$$

Проверьте, что в переменных f_n это соотношение записывается в виде

$$f_{n-1} f_n^2 f_{n+1}^2 f_{n+2} = \tilde{\alpha} f_n f_{n+1} + \tilde{\beta}, \quad (45)$$

а в переменных $h_n = f_n f_{n+1}$ – еще в более простом виде

$$h_{n-1} h_n h_{n+1} = \tilde{\alpha} h_n + \tilde{\beta}. \quad (46)$$

Задача 18. Докажите, что последовательность $\{h_n\}$, задаваемая уравнением (46), имеет инвариант

$$J = J_n = h_{n-1} + h_n + \tilde{\alpha} \left(\frac{1}{h_{n-1}} + \frac{1}{h_n} \right) + \frac{\tilde{\beta}}{h_{n-1} h_n},$$

а соответствующая ей последовательность Сомос-5 – инвариант

$$J = f_{n-1} f_n + f_n f_{n+1} + \tilde{\alpha} \left(\frac{1}{f_{n-1} f_n} + \frac{1}{f_n f_{n+1}} \right) + \frac{\tilde{\beta}}{f_{n-1} f_n^2 f_{n+1}}. \quad (47)$$

Проверьте также справедливость формулы

$$J = f_{n-1} f_n + f_n f_{n+1} + f_{n+1} f_{n+2} + \frac{\tilde{\alpha}}{f_n f_{n+1}}. \quad (48)$$

Задача 19. Докажите, что число

$$I = I_n = f_{n-1} f_n f_{n+1} + \tilde{\alpha} \left(\frac{1}{f_{n-1}} + \frac{1}{f_n} + \frac{1}{f_{n+1}} \right) + \frac{\tilde{\beta}}{f_{n-1} f_n f_{n+1}}$$

также является инвариантом последовательности Сомос-5, удовлетворяющей уравнению (44). Проверьте, что для I существует и другое представление:

$$I = f_{n-1} f_n f_{n+1} + f_n f_{n+1} f_{n+2} + \tilde{\alpha} \left(\frac{1}{f_n} + \frac{1}{f_{n+1}} \right). \quad (49)$$

Задача 20. С помощью каждой из формул (48), (49) докажите, что все элементы последовательности Сомос-(5) – целые числа.

Задача 21. Пусть m – натуральное число и $\{s_n\}$ – это последовательность Сомос-(5). С помощью формул (48), (49) докажите, что остатки, которые элементы последовательности $\{s_n\}$ дают при делении на m , периодически повторяются.

Задача 22* (см. [12]). Докажите, что для любого решения s_n рекуррентного соотношения (44) подпоследовательности с четными и нечетными номерами $s_n^* = 2s_n$ и $s_n^* = 2s_{n+1}$ удовлетворяют уравнению Сомос-4

$$s_{n+2}^* s_{n-2}^* = \alpha^* s_{n+1}^* s_{n-1}^* + \beta^* (s_n^*)^2, \quad (50)$$

в котором $\alpha^* = \tilde{\beta}^2$, $\beta^* = \tilde{\alpha} (\tilde{\alpha}^3 + 2\tilde{\beta}^2 + \tilde{\alpha}\tilde{\beta}J)$.

Задача 23 (см. [12]). Докажите, что последовательность Сомос-5, задаваемая уравне-

нием (44) и обладающая инвариантами I и J , будет последовательностью Сомос-4 тогда и только тогда, когда $I^2 = 4(\beta + \alpha J)$.

Задача 24. Докажите, что, умножив элементы последовательности Сомос-5 с четными номерами на некоторое комплексное число, можно получить последовательность Сомос-4.

Задача 25. Докажите, что для любой последовательности Сомос-4 ее подпоследовательности с четными и нечетными номерами $\{s_{2n}\}$ и $\{s_{2n+1}\}$ также являются последовательностями Сомос-4. Другими словами, проверьте, что выполняется рекуррентное соотношение восьмого порядка

$$s_{n+4}s_{n-4} = \alpha's_{n+2}s_{n-2} + \beta's_n^2. \quad (51)$$

Задача 26. Пусть последовательность Сомос-4 задана начальными условиями $s_1 = s_2 = 1 = s_4, s_3 = -1$ и уравнением (6) (см. (19)). Докажите, что последовательность $\tau_n = (-1)^n s_{2n-3}$ является последовательностью Сомос-(4).

Заключительные замечания

Дополнительные задачи о последовательностях Сомоса можно найти в интернете на странице 35-й Летней конференции Международного математического Турнира городов.

Автор благодарит И.И.Богданова за замечания к исходному тексту статьи.

Литература

1. *D. Gale.* Tracking the automatic ant and other mathematical explorations. A collection of mathematical entertainments columns from the Mathematical Intelligencer. – NY: Springer, 1998.
2. *А.И.Маркушевич.* Возвратные последовательности. – М.: ГИТТЛ, 1950. (Популярные лекции по математике, вып.1).
3. *M.Somos.* In the Elliptic Realm.
4. *В.М.Тихомиров.* Великие математики прошлого и их великие теоремы. – М.: МЦНМО, 1999.
5. *А.Егоров.* Деление с остатком и сравнение по модулю. – «Квант», 1991, №6.
6. *А.В.Устинов.* Элементарный подход к изучению последовательностей Сомоса. – Труды МИАН, т. 305, 2019, с. 330–343.
7. *A.J.van der Poorten, C.S.Swart.* Recurrence relations for elliptic sequences: every Somos-4 is a Somos- k . – Bulletin of the London Mathematical Society, vol. 38, 2006, p. 546-554.
8. *Н.Васильев.* Гексаграммы Паскаля и кубические кривые. – «Квант», 1987, №8.
9. *Ю.Соловьев.* Арифметика эллиптических кривых. – «Квант», 1987, №7.
10. *Ю.Соловьев.* Гипотеза Таниямы и последняя теорема Ферма. – «Квант», 1999, № 4.
11. *M.Ward.* Memoir on elliptic divisibility sequences. – American Journal of Mathematics, vol.70, 1948, p.31–74.
12. *А.В.Устинов.* О последовательностях Сомос-4 и Сомос-5. – Математические заметки, т.110, вып.3, с.478–480.

Вниманию наших читателей

Подписаться на журнал «Квант» можно с любого номера в любом почтовом отделении. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» – 90964.

Купить журнал «Квант» возможно в магазине «Математическая книга» издательства МЦНМО (адрес интернет-магазина: biblio.mcsste.ru), а также в московских книжных магазинах «Библио-глобус», «Молодая гвардия», «Московский дом книги» и в редакции журнала.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» имеется на сайте <http://kvant.ras.ru>

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задача M2762 (для произвольного n) предлагалась на 19-й Международной Жаутыковской олимпиаде.

Задачи Ф2769–Ф2772 предлагались на заключительном этапе LVI Всероссийской олимпиады школьников по физике.

Задачи M2762–M2765, Ф2769–Ф2772

M2762. Сумма $n = 100$ ненулевых вещественных чисел (не обязательно различных) равна нулю. Для каждого из способов выбрать несколько (не менее одного) из этих чисел подсчитали сумму выбранных чисел и все полученные суммы выписали в строку в возрастающем порядке. Первое число в строке равно S . Найдите наименьшее возможное значение второго числа в строке.

А. Голованов

M2763. Дано натуральное число $k \geq 2$. Докажите, что натуральные числа с четной суммой цифр дают все возможные остатки при делении на k .

П. Козлов, И. Богданов

M2764. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BE , CF (рис.1). Пусть

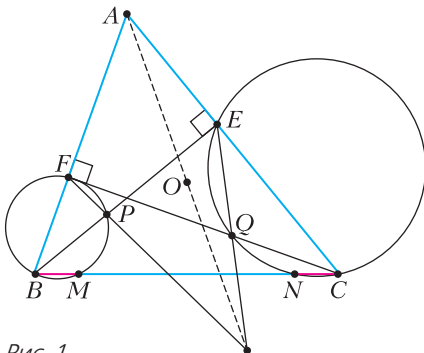


Рис. 1

O – центр описанной окружности. Точки M и N выбраны на стороне BC так, что $BM = CN$. Прямая BE пересекает окружность (MBF) вторично в точке P , а прямая CF пересекает окружность (NCE) вторично в точке Q . Докажите, что прямые PF , QE и AO пересекаются в одной точке.

Люу Донг (Вьетнам)

M2765*. Даны 101 монета и двухчашечные весы. За одно взвешивание можно сравнить веса двух монет. Назовем *большинством* подмножество из 51 монеты одинакового веса. За какое наименьшее количество взвешиваний можно с гарантией определить, существует ли среди данных монет большинство?

К. Кноп

Ф2769. У кубического тонкостенного аквариума ($a \times a \times a$) разбилась боковая стенка. Новую стенку ($a \times a$) решили прижать пружинными фиксаторами. Первую пружину жесткостью $2k$ закрепили у середины верхнего ребра новой стенки, а вторую пружину жесткостью k – у середины нижнего ребра. После этого аквариум придвинули к вертикальной стене (рис.2). Все поверхности в местах контакта новой стенки с аквариумом плоские и гладкие. Новая стенка жесткая, полностью перекрывает прилегающие боковые стенки и дно и параллельна плоскости стены. Сила трения в месте контакта стенки со столом пренебре-

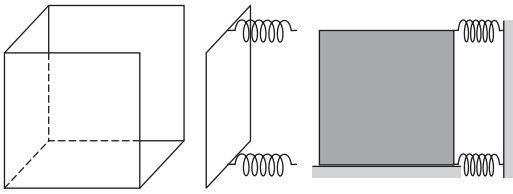


Рис. 2

жимо мала. Длины пружин в недеформированном состоянии одинаковы. Каким должно быть минимальное сжатие пружин, чтобы аквариум можно было наполнить водой плотностью ρ до краев? Во время заполнения аквариум неподвижен, а вода не просачивается в местах контакта стенки с аквариумом. Каким станет минимальное сжатие пружин, если их поменять местами? Ускорение свободного падения g считать известным.

А.Евсеев

Ф2770. В поле находится лунка, из которой вылетает маленький шарик (рис.3). Непосредственно перед вылетом скорость шарика равна v_0 и направлена вертикально вверх. В момент вылета шарик абсолютно упруго сталкивается со вторым таким же шариком, который перед ударом покоился на уровне поверхности поля.

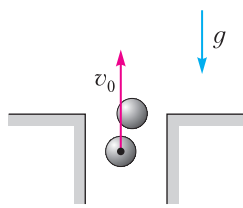


Рис. 3

После удара шарик движется под действием только силы тяжести и падает где-то в поле. Удар шариков о поле абсолютно неупругий. Найдите максимально возможное расстояние l_{\max} между точками падения шариков. Найдите также максимально возможное расстояние s_{\max} от лунки до места падения одного из шариков. Поверхность поля считайте горизонтальной. Размеры лунки и шариков малы по сравнению с l_{\max} и s_{\max} .

В.Ерин

Ф2771. В горизонтальный цилиндрический сосуд герметично вставлен поршень, перемещающийся с помощью прикрепленной к нему рукоятки (рис.4). В сосуде находится насыщенный пар воды при температуре $T_0 = 333$ К. Жидкой фазы воды в

сосуде нет. Водяной пар можно считать идеальным многоатомным газом. Удельная теплота парообразования воды при температуре T_0 равна $L = 2,36$ МДж/кг и в рамках задачи может считаться не зависящей от температуры. Универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль · К). Молярная масса воды $M = 18,0$ г/моль. Считайте известным, что малые относительные изменения давления насыщенного пара и его абсолютной температуры вблизи значений $p_0(T_0)$ и T_0 соответственно связаны соотношением $\epsilon_p = \Delta p/p_0 = \alpha \epsilon_T = \alpha \Delta T/T_0$, где $\alpha = 15,3$. Температуру в сосуде начинают медленно изменять. Объем сосуда изменяется таким образом, что все вещество в сосуде все время остается в газообразном состоянии, при этом водяной пар является насыщенным. Чему равна молярная теплоемкость водяного пара в данном процессе? Теперь рассмотрим адиабатически изолированный сосуд. Найдите изменение температуры ΔT_1 в сосуде при медленном относительном уменьшении его объема на величину $\beta = 5\%$. Найдите также изменение температуры ΔT_2 в сосуде при медленном относительном увеличении его объема на величину $\beta = 5\%$.

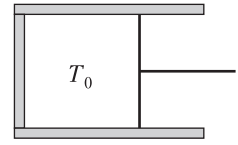


Рис. 4

А.Уймин

Ф2772. На рисунке 5 показана схема электрической цепи, состоящей из источника с электродвижущей силой \mathcal{E} , конденсатора емкостью C , катушки индуктивностью L , ключа K и металлического диска радиусом R . Диск может вращаться вокруг своей оси без трения. Диск расположен в однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} , направленном вдоль оси диска так, как показано на рисунке. Практически вся масса m диска сосредоточена в его тонком ободе. Источник соединен с диском в его центре O , а катушка индуктивности соединена с диском с помощью

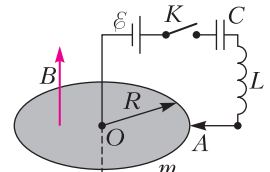


Рис. 5

неподвижного скользящего контакта A . Омическим сопротивлением контура, по которому течет ток, и наличием у него индуктивности (дополнительно к L) можно пренебречь. Изначально ключ K разомкнут, диск неподвижен, ток в катушке отсутствует, а конденсатор не заряжен. Ключ K замыкают. Определите максимальную угловую скорость диска ω_{\max} после замыкания ключа, а также время τ после замыкания ключа, через которое угловая скорость диска впервые достигает значения ω_{\max} .

А. Уймин

**Решения задач M2750–M2753,
Ф2757–Ф2760**

M2750. Пусть D, E, F – середины сторон BC, CA, AB остроугольного треугольника ABC (рис.1), а H_a, H_b, H_c – ортоцентры

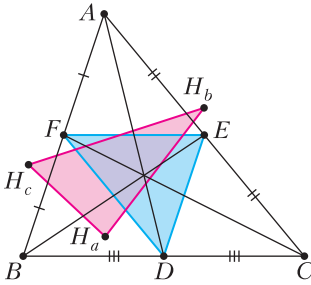


Рис. 1

тры треугольников ABD, BCE, CAF соответственно. Докажите, что треугольники $H_aH_bH_c$ и DEF – равновеликие.

Используем обычные обозначения a, b, c для длин сторон треугольника и α, β, γ для величин углов, и пусть R – радиус описанной окружности. Пусть высоты AH, BY, CZ треугольника пересекаются в ортоцентре H (рис.2).

Докажем, что $4S_{H_aH_bH_c} = S_{BHC}$. Тогда, складывая это равенство с аналогичными равенствами $4S_{H_bH_cH_a} = S_{CHA}$ и $4S_{H_cH_aH_b} = S_{AHB}$, получим $4S_{H_aH_bH_c} = S_{ABC} = 4S_{DEF}$, что и требуется.

Заметим, что H_a лежит на высоте AH и на перпендикуляре, проведенном из D на AB . Тогда в прямоугольном треугольнике HXC имеем $DH_a \parallel CH$, поэтому $HH_a =$

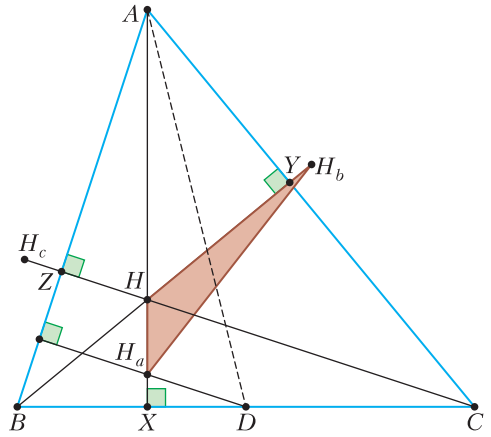


Рис. 2

$= CD \operatorname{ctg} \angle CHX = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \beta$. Аналогично, $HH_b = \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \gamma$. Так как $\angle H_aHH_b = 180^\circ - \gamma$, имеем

$$\begin{aligned} 2S_{H_aHH_b} &= HH_a \cdot HH_b \cdot \sin \gamma = \\ &= \frac{ab}{4} \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma \sin \gamma = \\ &= \frac{a}{2 \sin \alpha} \cdot \frac{b}{2 \sin \beta} \cdot \cos \beta \cos \gamma \sin \alpha = \\ &= R^2 \cos \beta \cos \gamma \sin \alpha. \end{aligned}$$

Имеем $2S_{BHC} = BH \cdot CH \sin \alpha$. Видим, что $BZ = a \cos \beta$, а из прямоугольного треугольника BZH

$$BH = \frac{BZ}{\sin \alpha} = \frac{a \cos \beta}{\sin \alpha} = 2R \cos \beta.$$

Аналогично, $CH = 2R \cos \gamma$, тем самым, $2S_{BHC} = 4R^2 \cos \beta \cos \gamma \sin \alpha$. Получаем $4S_{H_aH_bH_c} = 4S_{DEF}$, что, как отмечено выше, завершает решение.

Чан Куанг Хунг, П.Кожевников

M2751. Каждое натуральное число, большее 1000, окрасили либо в красный, либо в синий цвет. Оказалось, что произведение любых двух различных красных чисел – синее. Может ли случиться, что никакие два синих числа не отличаются на 1?

Ответ: не может.

Предположим, что это возможно.

Лемма. Пусть число n синее; тогда n^2 – красное.

Доказательство. Поскольку n синее, числа $n - 1$ и $n + 1$ красные, иначе два синих числа отличаются на 1. Поэтому число $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$ синее. Значит, n^2 красное.

Очевидно, что существует синее число $k > 1001$; по лемме число k^2 красное. Рассмотрим два случая.

Пусть число k^3 синее. Тогда по лемме число $k^6 = (k^3)^2$ красное. Поскольку $k^2 \cdot k^4 = k^6$ и числа k^2 и k^6 красные, то число k^4 обязано быть синим. По лемме число $k^8 = (k^4)^2$ красное, но оно является произведением красных чисел k^2 и k^6 . Этого не может быть.

Пусть теперь число k^3 красное. Тогда число $k^5 = k^2 \cdot k^3$ синее, и по лемме число $k^{10} = (k^5)^2$ красное. Поскольку $k^{10} = k^2 \cdot k^8 = k^3 \cdot k^7$ и числа k^2 и k^3 красные, числа k^7 и k^8 должны быть синими, а тогда, по лемме, числа $k^{14} = (k^7)^2$ и $k^{16} = (k^8)^2$ красные. Но тогда красное число k^{16} равно произведению красных чисел k^2 и k^{14} .

Получаем противоречие, завершающее решение.

Приведем еще одно решение задачи. Опять же предположим противное. Начнем со следующего замечания. Пусть a и b – два различных красных числа; тогда число $ab + 1$ тоже красное. Действительно, по условию число ab синее, а тогда $ab + 1$ красное.

Цвета чисел не могут строго чередоваться – иначе все числа одной четности будут красными, а тогда найдутся и два красных числа с красным произведением. Значит, есть два одноцветных числа, отличающихся на 1 – пусть это a и $a + 1$. Из условия их общий цвет – красный.

Из замечания выше получаем сначала, что число $b = a^2 + a + 1 = a(a + 1) + 1$ красное, а затем – что число $c = a^3 + a^2 + a + 1 = ab + 1$ тоже красное. Значит, по условию, число

$d = a^4 + 2a^3 + 2a^2 + 2a + 1 = (a + 1)c$ синее. С другой стороны, из того же замечания число $p = (a + 1)b + 1 = a^3 + 2a^2 + 2a + 2$ красное. Значит, по условию, число $ap = a^4 + 2a^3 + 2a^2 + 2a = d - 1$ синее. Итак, мы нашли два соседних синих числа d и $d - 1$, что невозможно.

С.Берлов

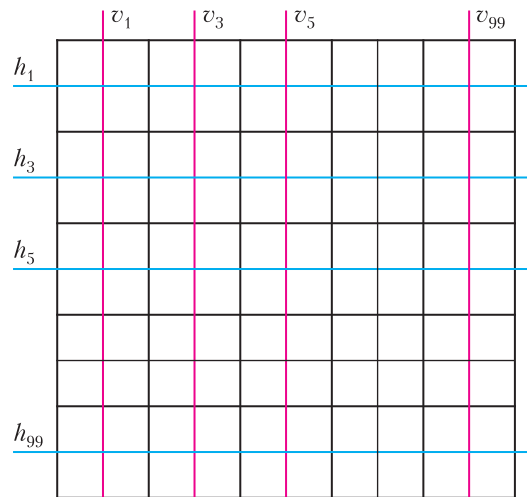
M2752. Квадрат 100×100 разбит на квадраты 2×2 . Потом его разбивают на доминошки (прямоугольники 1×2 и 2×1). Какое наименьшее количество доминошек могло оказаться внутри квадратов разбиения?

Ответ: 100.

Пример. Верхнюю и нижнюю горизонтали разобьем на горизонтальные доминошки – они окажутся в квадратах 2×2 . Оставшийся прямоугольник 98×100 разобьем на вертикальные доминошки – они не окажутся в квадратах 2×2 .

Оценка. Пусть внутри квадратов 2×2 оказалось не более 99 доминошек.

Проведем 50 вертикальных линий сетки $v_1, v_3, v_5, \dots, v_{99}$ так, что v_i отделяет i столбцов слева (см. рисунок). Легко видеть, что любая доминошка, пересекаемая одной из линий $v_1, v_3, v_5, \dots, v_{99}$, нам подходит. Каждая вертикальная линия пересекает четное количество доминошек, так как слева от этой линии четное количество клеток. Значит, среди линий $v_1, v_3, v_5, \dots, v_{99}$ есть линия



v_i , не пересекающая доминошек, иначе мы уже нашли хотя бы $2 \cdot 50 = 100$ нужных нам доминошек. Проведем аналогичное рассуждение для 50 горизонтальных линий сетки $h_1, h_3, h_5, \dots, h_{99}$ и найдем среди них линию h_j , не пересекающую доминошек. Но v_i и h_j делят наш квадрат 100×100 на области с нечетным количеством клеток, поэтому хотя бы одна из этих двух линий обязана пересекать доминошку. Противоречие.

С.Берлов

M2753. В каждой строке таблицы $n \times 100$ (n строк и 100 столбцов) в некотором порядке стоят числа $1, 2, 3, \dots, 100$. Разрешается поменять местами в строке два числа, отличающиеся на 1, если они не стоят рядом. Оказалось, что с помощью таких операций нельзя получить двух одинаковых строк. При каком наибольшем n это возможно?

Ответ: 2^{99} .

Сопоставим строке $(x_1, x_2, \dots, x_{100})$ чисел от 1 до 100 последовательность из 99 знаков «<» и «>» в соответствии с тем, как упорядочены соседние числа (т.е. если $x_k < x_{k+1}$, то k -й знак в этой последовательности равен «<», в противном случае он равен «>»). Заметим, что разрешенные операции над строкой не меняют соответствующую ей последовательность знаков. Действительно, из пары чисел x_k и x_{k+1} меняется не более одного и не более чем на 1. Поэтому знак неравенства между ними не может измениться на противоположный. По каждой последовательности знаков построим выделенную строку $(x_1, x_2, \dots, x_{100})$ следующим образом. Последовательно для $k = 1, 2, \dots, 99$ выбираем число x_k по правилу: если $x_k > x_{k+1}$ (т.е. k -й знак – «<»), пусть x_k – наибольшее из не выбранных ранее чисел, если же $x_k < x_{k+1}$, то x_k – наименьшее из не выбранных ранее чисел. Заметим, что при таком правиле выбора числа, не выбранные за первые k шагов, будут образовывать отрезок натурального ряда (а выбранными окажутся несколько наибольших и несколько наименьших чисел от 1 до 100, в частности, $x_1 = 1$ или $x_1 = 100$). После того, как x_1, \dots, x_{99} выбра-

ны, положим x_{100} равным оставшемуся числу.

Нетрудно видеть, что построенная выделенная строка $(x_1, x_2, \dots, x_{100})$ соответствует выбранной последовательности знаков. Всего выделенных строк будет столько же, сколько и различных последовательностей знаков, т.е. 2^{99} . В силу сказанного выше, никакие две из выделенных строк разрешенными операциями нельзя сделать одинаковыми. Таким образом, заполнив таблицу $2^{99} \times 100$ выделенными строками, мы получаем пример для $n = 2^{99}$.

Теперь достаточно доказать, что из любой строки Y длины 100 можно получить выделенную строку X с той же последовательностью знаков. Из этого следует, что $n \leq 2^{99}$. Предположим, что первые $t - 1$ знаков данной строки $Y = (y_1, \dots, y_{100})$ и выделенной строки $X = (x_1, \dots, x_{100})$ совпадают. Если $t = 100$, то и сами строки совпадают. Пусть $t < 100$. Без ограничения общности будем считать, что $x_t < x_{t+1}$ (и значит, $y_t < y_{t+1}$). В силу сказанного выше наборы чисел y_t, \dots, y_{100} и x_t, \dots, x_{100} совпадают и образуют отрезок натурального ряда с наименьшим числом x_t . Можно менять в строке Y число на месте t с числом на единицу меньшим, пока на месте t не окажется число x_t (т.е. пока не получим $y_t = x_t$). Таким образом, мы добились совпадения первых t символов у нашей строки с выделенной строкой X . Значит, такими операциями можно из любой строки получить выделенную строку, что завершает доказательство оценки.

М.Антипов

Ф2757.¹ На дороге лежит бревно радиусом r . Перпендикулярно бревну едет автомобиль (рис.1), колеса которого имеют радиус R . Считая, что коэффициенты трения колеса автомобиля о бревно и бревна о дорогу одинаковы, найдите, при каких значениях этого коэффици-

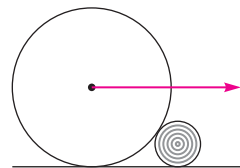


Рис. 1

ента трения колеса автомобиля о бревно и бревна о дорогу одинаковы, найдите, при каких значениях этого коэффици-

¹ Автор решений задач Ф2757–Ф2760 – С.Муравьев.

ента колеса автомобиля могут медленно переехать бревно. Весом бревна пренебречь.

Чтобы колесо смогло переехать бревно, должны быть выполнены следующие условия: при контакте с колесом бревно не должно вращаться и не должно скользить по дороге. При выполнении этих условий сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и сила реакции \vec{N} , действующие на колесо в точке контакта с бревном (и которые можно увеличивать, нажимая на педаль газа автомобиля), поднимут колесо и вместе с силой \vec{F} , действующей на колесо со стороны автомобиля, заставят «перевалить» через бревно. На рисунке 2 показаны силы, действующие на колесо со стороны бревна и автомобиля.

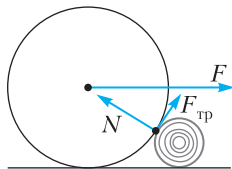


Рис. 2

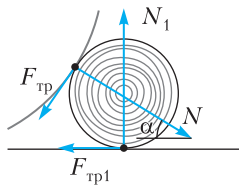


Рис. 3

Исследуем выполнимость этих условий. На бревно действуют силы реакции \vec{N} и трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ со стороны колеса и силы реакции \vec{N}_1 и трения $\vec{F}_{\text{тр}1}$ со стороны земли (рис.3). Поскольку силы реакции проходят через центр бревна, то из уравнения моментов относительно центра получаем

$$F_{\text{тр}} = F_{\text{тр}1},$$

а из уравнения сил в проекциях на горизонтальное направление –

$$N \cos \alpha - F_{\text{тр}} \sin \alpha = F_{\text{тр}1},$$

где α – угол между силой реакции \vec{N} и поверхностью земли. Отсюда находим

$$F_{\text{тр}} = F_{\text{тр}1} = \frac{N \cos \alpha}{1 + \sin \alpha}.$$

Из уравнения для сил в проекциях на вертикальное направление найдем

$$\begin{aligned} N_1 &= N \sin \alpha + F_{\text{тр}} \cos \alpha = \\ &= N \sin \alpha + \frac{N \cos^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} = N. \end{aligned}$$

Таким образом, оба условия проскальзывания – между колесом и бревном $F_{\text{тр}} \leq \mu N$ и между бревном и дорогой $F_{\text{тр}1} \leq \mu N_1$ – будут нарушаться одновременно. Эти условия дают соотношение

$$\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \leq \mu.$$

Учитывая, что

$$\sin \alpha = \frac{R - r}{R + r}, \quad \cos \alpha = \frac{2\sqrt{Rr}}{R + r},$$

получим условие переезда колеса через бревно:

$$\mu \geq \sqrt{\frac{r}{R}}.$$

Ф2758. С одноатомным идеальным газом происходит процесс $a-b-c-d-e$, для которого дан график зависимости изменения внутренней энергии газа с начала процесса от количества теплоты, сообщенного газу с начала процесса (рис.1;

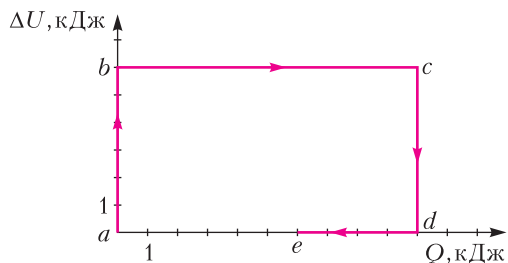


Рис. 1

единицы на осях показывают принятые для осей масштабы). Известно, что максимальная температура газа в течение всего процесса составляла $T_{\text{max}} = 1000 \text{ K}$, минимальная температура была $T_{\text{min}} = 500 \text{ K}$. Постройте качественный график зависимости давления газа от его объема в этом процессе и обоснуйте построение. Количество вещества газа не менялось.

В процессе $a-b$ внутренняя энергия газа увеличивалась без сообщения ему тепла, поэтому процесс $a-b$ – адиабатическое сжатие. В процессе $b-c$ не менялась внутренняя энергия газа – этот процесс изотермический с сообщением газу тепла, т.е. изотермическое расширение. Процесс $c-d$

снова адиабатический, но с уменьшением внутренней энергии – это адиабатическое расширение. Процесс $d-e$ изотермический с забором у газа тепла, т.е. изотермическое сжатие. Искомый график представлен на рисунке 2.

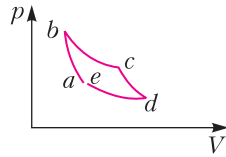


Рис. 2

Из этого графика следует, что начальное состояние газа a и конечное состояние e лежат на одной изотерме, а вот чтобы проверить, совпадают ли они (и тогда этот процесс замкнутый, т.е. является циклом Карно), нужно найти работу газа за весь процесс $a-b-c-d-e$ двумя способами: применяя первый закон термодинамики и используя известные соотношения для работы газа в цикле Карно. Если эти работы совпадут, данный процесс представляет собой цикл Карно.

Применяя первый закон термодинамики ко всему процессу, получаем $Q = \Delta U + A$, где Q – количество теплоты, сообщенное газу в процессе $a-b-c-d-e$, A – работа газа в этом процессе. Поскольку изменение внутренней энергии газа за весь процесс равно нулю, то $A = Q$. А так как с начала процесса газу сообщили количество теплоты $Q = 6$ кДж, то работа газа в этом процессе равна

$$A = 6 \text{ кДж.}$$

С другой стороны, если рассматриваемый процесс замкнутый, он является циклом Карно, а работа газа в течение всего процесса есть

$$A_K = \eta Q_H = \frac{T_H - T_X}{T_H} Q_H = 0,5 Q_H,$$

где η – КПД цикла Карно, Q_H – количество теплоты, полученное газом от нагревателя в течение цикла, T_H и T_X – температуры нагревателя и холодильника. В нашем случае $Q_H = 10$ кДж (как это следует из данного графика), $\eta = 0,5$. Поэтому $A > A_K$, а значит, данный процесс является незамкнутым. Если бы в процессе $d-e$ над газом была совершена большая работа и график этого процесса дошел бы до значения 5 кДж, процесс был бы замкнутым. Следова-

но, нижняя изотерма не доходит до начального состояния (см. рис. 2).

Ф2759. К источнику электрического напряжения подключили 2023 конденсатора, соединенных параллельно. Затем источник отключили. Придумайте простейшее механическое устройство, которое меняло бы соединение всех конденсаторов на последовательное при одном переключении (с сохранением заряда каждого конденсатора). Опишите конструкцию этого устройства и принцип его работы. Как изменится при таком переключении напряжение на батарее конденсаторов и ее энергия?

Основную идею работы такого устройства можно понять, внимательно посмотрев на параллельно соединенные конденсаторы (верхняя схема на рисунке 1; здесь вместо 2023 конденсаторов нарисовано семь). Если одновременно разорвать все проводники, соединяющие конденсаторы, одновременно поменяв соединение двух соседних конденсаторов для правильной

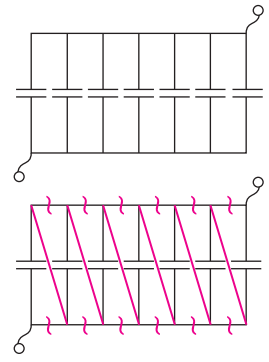


Рис. 1

полярности соединения (нижняя схема на рисунке 1; нужные изменения цепи показаны красным), то конденсаторы окажутся соединенными последовательно с теми же самыми зарядами, которые были у параллельно соединенных конденсаторов. Таким образом, для превращения одного соединения конденсаторов в другое нужно предложить устройство, которое одновременно разрывает много проводов, расположенных достаточно далеко друг от друга, и меняет соединение ряда проводов. Такое устройство можно сконструировать, используя скользящие контакты.

Возьмем две параллельно расположенные металлические шины (два толстых прямых провода), прикрепим их параллельно друг другу к диэлектрической пластинке

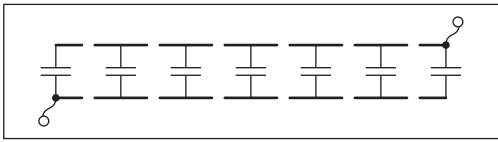


Рис. 2

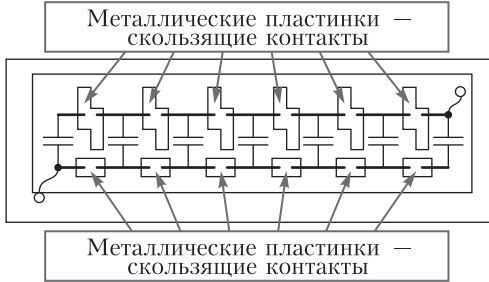


Рис. 3

(например, деревянной) и сделаем в них напротив друг друга 2022 одинаковых разреза — по числу промежутков между 2023 параллельными конденсаторами. К каждой паре расположенных напротив друг друга кусков шин припаиваем конденсатор и соединим крайние участки верхней и нижней шин с клеммами источника (рис. 2). Теперь необходимо подобрать выключатель, который может либо замкнуть концы разрыва в одной и той же шине, либо замкнуть их в шахматном порядке: верхний-нижний-верхний-нижний и т.д. Используем скользящие контакты. Поместим между шинами и подставкой тонкую диэлектрическую пластинку с приклеенными к ней металлическими пластинками, которые представляют собой скользящие контакты определенной формы. Эти контакты замыкают разрезы в шинах и имеют такую форму, как показано на рисунке 3: нижние в форме прямоугольников, верхние в форме зигзага. Причем пластинка со скользящими контактами может двигаться относительно шин с конденсаторами. Очевидно, в положении, показанном на рисунке 3, скользящие контакты замыкают все разрезы в шинах, а следовательно, конденсаторы в таком случае соединены параллельно.

Сдвинем теперь пластинку со скользящими контактами к одной из шин (вниз на рисунке 4). Тогда благодаря зигзагообраз-

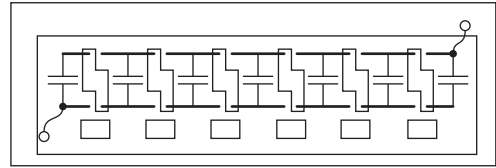


Рис. 4

ному расположению скользящих контактов они станут замыкать каждый правый контакт верхней шины с каждым левым контактом нижней. В результате конденсаторы соединены уже последовательно с сохранением первоначального заряда на каждом конденсаторе.

Очевидно, что напряжение U на батарее конденсаторов при переключении предложенного устройства (которое в электротехнике называют коммутатором) увеличится в 2023 раза по сравнению с напряжением источника \mathcal{E} . Действительно, при соединении с источником параллельных конденсаторов на всех будут напряжения источника $u = \mathcal{E}$, которые после отключения источника и переключения коммутатора будут складываться: $U = 2023\mathcal{E}$. А вот энергия батареи, конечно, не изменится, поскольку при переключении коммутатора не совершается работы. Действительно, энергию батареи можно считать как энергию одного конденсатора с эквивалентной емкостью, подключенного к источнику. До переключения конденсаторы соединены параллельно, эквивалентная емкость C батареи есть сумма емкостей отдельных конденсаторов c , т.е. $C_{\text{пар}} = 2023c$. Напряжение на батарее — это напряжение источника, поэтому энергия батареи

$$W_{\text{нач}} = \frac{2023c\mathcal{E}^2}{2}.$$

После переключения коммутатора конденсаторы соединены последовательно, их эквивалентная емкость равна

$$C_{\text{посл}} = \frac{c}{2023}$$

и на батарее не изменился заряд $q = c\mathcal{E}$, поскольку она отключена от источника. Поэтому энергия батареи будет

$$W_{\text{кон}} = \frac{q^2}{2C_{\text{посл}}} = \frac{2023c\mathcal{E}^2}{2}.$$

В заключение отметим, что описанную выше конструкцию придумал в середине 19 века известный французский инженер Гастон Планте (изобретатель свинцово-кислотного аккумулятора, который используется во всех автомобилях) для получения высоких напряжений.

Ф2760. Для предотвращения столкновений судов с землей в ночное время суток на берегу моря ставят маяки, которые должны предупредить корабли об опасном приближении к суше. Наиболее эффективно такие маяки работают, если они дают прерывистый световой сигнал. Рассмотрите следующую модель источника света для такого маяка (рис.1).

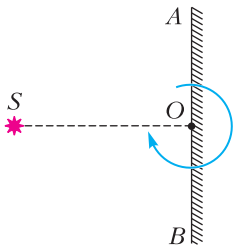


Рис. 1

Неподвижный точечный источник света находится на расстоянии $d = 50$ см от зеркала AB. Зеркало вращается с угловой скоростью $\omega = 1$ рад/с вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через середину зеркала (через точку O на рисунке). По какой траектории движется изображение источника? Найдите скорость и ускорение изображения источника в зеркале.

Определим характер движения изображения. Построение старого источника изображения S' и нового S'' после поворота зеркала на угол α показано на рисунке 2. Очевидно, угол $SS''S'$ прямой. Действительно, треугольники $SO'O$ и $SS''S'$ подобны, так как у них общий угол α , а стороны,

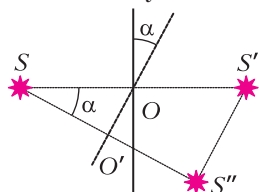


Рис. 2

примыкающие к этому углу, пропорциональны с коэффициентом подобия 2 (поскольку расстояние от источника до

изображения вдвое больше расстояния от источника до зеркала):

$$\frac{SS'}{SO} = \frac{SS''}{SO} = 2.$$

А поскольку угол $SO'O$ прямой (изображение источника лежит на продолжении перпендикуляра, опущенного из источника на зеркало), то прямым является и угол $SS''S'$. Причем независимо от угла поворота зеркала. Это значит, что изображение источника движется по такой кривой, что угол $SS''S'$ все время остается прямым. Отсюда следует, что изображение источника движется по окружности, для которой отрезок SS' является диаметром. А потому радиус этой окружности равен расстоянию от источника до оси вращения зеркала, т.е. $R = SO = d$. Эта окружность показана на рисунке 3.

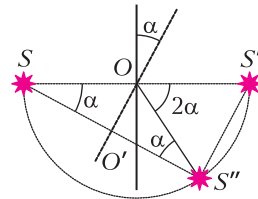


Рис. 3

Найдем теперь угловую скорость вращения изображения. Пусть зеркало повернулось на угол α . Тогда (поскольку траектория движения изображения окружность) $OS = OS''$ и $\angle OSS'' = \angle OS''S = \alpha$. Поэтому $\angle S'OS'' = 2\alpha$, а следовательно, изображение вращается с постоянной угловой скоростью ω' , которая вдвое больше угловой скорости зеркала:

$$\omega' = 2\omega.$$

Значит, скорость изображения источника постоянна и равна

$$v = \omega'R = 2\omega R = 2\omega d = 1 \text{ м/с}.$$

Поскольку изображение движется по окружности с постоянной по величине скоростью, его ускорение – центростремительное. Оно равно

$$a = \omega'^2 R = 4\omega^2 R = 4\omega^2 d = 2 \text{ м/с}^2.$$

Задачи

1. Из восьми маленьких кубиков сложили куб $2 \times 2 \times 2$. Некоторые из маленьких кубиков сделаны из прозрачного стекла, остальные — из черного пластика. Оказалось, что и сверху, и



справа, и спереди большой куб выглядит как черный квадрат 2×2 . При каком наименьшем количестве черных кубиков это возможно?

2. Клетчатый квадрат 9×9 разрезали по границам клеток на полоски ширины 1 (возможно, не одинаковые). Обязательно ли из этих полосок можно сложить прямоугольник 8×9 ?

А. Шаповалов



Задача 1 предлагалась на конкурсе «Смарт КЕНГУРУ» в 2023 году, задачи 2–4 предлагались на XXVIII Турнире математических боев имени А.П.Савина.

3. Фермер Макар завел поросят, козлят и телят. Масса Макара равна средней массе поросят, на 50 кг больше средней массы козлят и на 50 кг меньше средней массы телят. Средняя масса поросят и телят (вместе взятых)

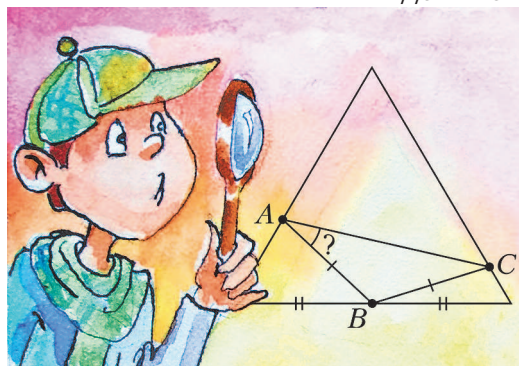


на 20 кг больше массы Макара, а средняя масса козлят и телят на 25 кг меньше массы Макара. Что и на сколько больше: масса Макара или средняя масса поросят и козлят?

И. Раскина

4. Вершины равнобедренного треугольника ABC с основанием AC лежат по одной на каждой стороне равностороннего треугольника. Оказалось, что точка B совпадает с серединой стороны равностороннего треугольника, а точки A и C удалены от этой стороны на разные расстояния. Чему может быть равен угол A ?

М. Евдокимов



Платные веса

А. ГРИБАЛКО, А. ЗАСЛАВСКИЙ

ОСЕНЬЮ 2022 ГОДА НА ТУРНИРЕ городов была предложена (немного в другой формулировке) следующая задача.

Задача 1. *Есть 8 внешне одинаковых монет, из которых одна фальшивая. Все настоящие монеты весят одинаково, а фальшивая отличается от них по весу неизвестно в какую сторону. Есть чашечные весы, за каждое взвешивание на которых надо уплатить одну монету. При этом если уплачена настоящая монета, весы показывают правильный результат, а если фальшивая – случайный. Можно ли найти и не потратить 5 настоящих монет?*

Решение. Пусть монетам присвоены номера от 1 до 8. Заплатим за первое взвешивание монету 8 и положим на одну чашу монеты 1 и 2, а на другую – 3 и 4. Если чаши остались в равновесии, то эти четыре монеты настоящие. Действительно, если монета 8 настоящая, то весы показывают верный результат и, значит, фальшивая монета не может быть среди взвешиваемых. Если же монета 8 фальшивая, то вообще все остальные монеты настоящие. Тогда вторым взвешиванием сравним монеты 1 и 5, заплатив монетой 7. Если весы в равновесии, то монета 5 тоже настоящая, в противном случае фальшивой может быть либо монета 5, либо монета 7, т.е. монета 6 заведомо настоящая.

Пусть теперь в первом взвешивании одна из чаш, например с монетами 1 и 2, перевесила. Тогда монеты 5, 6, 7 точно настоящие. Сравним теперь монеты 1 и 2, заплатив за взвешивание монетой 4. Если весы в равновесии, то монеты 1 и 2 настоящие. Если же одна из них перевесила, то настоящими являются более легкая монета и монета 3. Во всех случаях мы получаем пять заведомо настоящих монет.

Найти приведенное решение не очень сложно, но у читателей может возникнуть вопрос: почему в условии задачи даны именно числа 8 и 5? Понять это можно, решив следующее упражнение.

Упражнение 1. Сколько настоящих монет можно найти, если вначале есть 4, 5, ..., 9 монет?

Из упражнения 1 видно, что если вначале есть $n \leq 8$ монет, то можно найти хотя бы $n - 3$ настоящие монеты, а при $n = 9$ это становится невозможным. Естественно предположить, что и при $n > 9$ «потеряно» будет не меньше четырех монет. В связи с этим возникает следующий вопрос.

Задача 2. *Для каждого k найдите наибольшее n , при котором можно из имеющихся вначале n монет найти $n - k$ настоящих.*

Прежде чем решать эту задачу, рассмотрим более простой ее аналог, когда известно, в какую сторону вес фальшивой монеты отличается от веса настоящей. Для определенности предположим, что фальшивая монета легче настоящей. Аналогично разбирается случай, когда фальшивая монета может быть как легче, так и тяжелее настоящей, но для каждой из имеющихся монет известно, в какую сторону от настоящей может отличаться ее вес.

Сделаем несколько предварительных замечаний.

1. При планировании очередного взвешивания можно считать, что во всех предыдущих взвешиваниях были уплачены настоящие монеты. Действительно, если, руководствуясь этим предположением, мы определили какие-то монеты как настоящие, то эти монеты будут настоящими и в случае, когда фальшивая монета была когда-то уплачена.

2. За каждое взвешивание надо платить подозрительной монетой (т.е. такой, про которую еще не ясно, фальшивая она или настоящая). Действительно, если про какую-то монету точно известно, что она фальшивая, то дальнейшие взвешивания вообще не нужны, а если монета заведомо настоящая, то, заплатив вместо нее подозрительную, мы по предыдущему замечанию сможем определить не меньше новых настоящих монет, но сохраним уже имеющуюся.

3. Число сделанных взвешиваний не может превышать $k - 1$. Действительно, после k взвешиваний у нас останется всего $n - k$ монет, среди которых может оказаться фальшивая.

Посмотрим теперь, как меняется число подозрительных монет при очередном взве-

шивании. Пусть у нас есть m подозрительных монет и мы кладем x из них на одну чашу весов, а y — на другую (если есть заведомо настоящие монеты, то можно взять $x \neq y$ и доложить на чашу с меньшим числом монет нужное количество настоящих). Тогда если одна из чаш перевесит, то монеты, лежащие на другой, останутся подозрительными, а в случае равновесия подозрительными остаются $m - x - y - 1$ монет, не участвующих во взвешивании. Таким образом, при неблагоприятном исходе взвешивания у нас останется

$$\max(x, y, m - x - y - 1) \geq (m - 1)/3$$

подозрительных монет. Используя это неравенство, нетрудно найти искомое максимальное n (обозначим его через a_k).

Упражнение 2. Докажите, что $a_k = \frac{3^k - 1}{2}$.

Указание. Воспользуйтесь индукцией.

Вернемся к решению задачи 2. Разумеется, сделанные выше замечания 1–3 остаются в силе. Обозначим при $k \geq 2$ искомое максимальное n через b_k и рассмотрим первое взвешивание. Пусть на чаши весов положено по x монет. Тогда если одна из чаш перевесила, то монеты, не участвующие во взвешивании, настоящие и у нас есть $2x$ подозрительных монет, для каждой из которых известно, в какую сторону она может отличаться по весу от настоящей. Среди этих монет мы должны найти остальные настоящие, сделав не более $k - 1$ взвешиваний, следовательно, $2x \leq a_{k-1}$.

Если же в первом взвешивании весы остались в равновесии, то взвешенные монеты настоящие, а оставшиеся $b_k - 2x - 1$ монет — подозрительные, причем для них по-прежнему неизвестно, в какую сторону вес фальшивой отличается от веса настоящей. Может показаться, что это число не должно превышать b_{k-1} , но этот вывод неверен. Дело в том, что при первом взвешивании мы можем положить на чаши весов a_{k-1} монет, только если это число четно. При всех остальных взвешиваниях у нас уже есть настоящие монеты, которые можно использовать для уравнивания числа монет на обеих чашах. Соответственно, при втором взвешивании мы можем взвесить a_{k-2} подозрительных монет (и, возможно, одну настоящую), при

третьем — a_{k-3} и т.д. В результате получаем, что $b_k \leq a_{k-1} + a_{k-2} + \dots + a_1 + k$, если a_{k-1} четно (к сумме $a_{k-1} + a_{k-2} + \dots + a_1$ добавляются $k - 1$ потраченных монет и одна оставшаяся подозрительной), и на единицу меньше этого числа при нечетном a_{k-1} (поскольку в первом взвешивании может участвовать не более чем $a_{k-1} - 1$ монет). С учетом найденного выше выражения для a_k получаем

$$b_k \leq \frac{3^k + 2k - 1}{4} - 2 \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor.$$

Заметим, что при $k = 1$ правая часть равна $1 = b_1$.

Упражнение 3. Докажите, что полученная оценка является точной, т.е. при b_k , равном правой части, действительно можно найти $b_k - k$ настоящих монет.

В заключение заметим, что задача 1 — не первая задача о платных весах. В 2014 году на Турнире имени А.П.Савина была предложена такая задача (см. также задачу 5 рубрики «Квант» для младших школьников» в «Кванте» №4 за 2014 г.).

Задача 3 (А.Заславский, В.Клепцын). *Есть шесть монет, из которых две фальшивые. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивые тоже одинаково и легче настоящих. Как с помощью платных весов найти и не потратить одну настоящую монету?*

Решение этой задачи приводится в «Кванте» №5–6 за 2014 год (см. с.82). Его нетрудно распространить на случай, когда фальшивые монеты составляют одну треть общего количества. Недавно К.Кноп и Ю.Макарычев смогли улучшить эту оценку, показав, например, что можно найти настоящую монету, если есть 8 монет, из которых 3 — фальшивые, весящие меньше настоящих. Предлагаем читателям решить эту задачу, а возможно, и получить новые результаты.

Музыка есть радость души, которая вычисляет, сама того не сознавая.

Готфрид Лейбниц

Какое значение имеют по отношению к уху различные тона музыки, такое для глаза имеют различные цвета. ...высота в области звука зависит от числа колебаний, действующих на ухо в продолжение определенного времени....

Леонард Эйлер

Рояль был весь раскрыт и струны в нем дрожали...

Афанасий Фет

Рассматриваемый с физической точки зрения, музыкальный тон есть колебательный процесс в воздухе с некоторой фиксированной частотой. Например, тон "ля₁" соответствует процессу с частотой 440 герц...

Георгий Шилов

...далеко ли ушли мы от Пифагора в понимании того, почему только некоторые звуки приятны для слуха?

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакомы вам ФИЗИКА + МУЗЫКА?

Тысячелетиями человек не представлял жизни без музыки, сочиняя мелодии и песни, танцуя, изобретая бубны и барабаны, дудочки и флейты, лиры и лютни. Ученые – не исключение, у большинства из них музыка была любимым увлечением, но у многих это сочеталось и со стремлением «поверить алгеброй гармонию».

«Расшифровка» звуковых тайн оказалась удачной, что повлияло на совершенствование известных и создание новых музыкальных инструментов. А поток научных открытий, особенно в физике, способствовал появлению такой аппаратуры, которая кардинально изменила окружающую акустическую среду.

Оцифрованный качественный музыкальный звук стал доступен буквально каждому. Вот и вас, раздумывающих над сегодняшней темой «Калейдоскопа», скорее всего, сопровождает какой-нибудь саундтрек. Не так ли?

Вопросы и задачи

1. У стола обычно четыре ножки, а у рояля – всегда только три. Почему?
2. Отчего камертон звучит громче, если одна из его ветвей отломлена?
3. Как опытным путем определить частоту колебаний камертона?

4. Если ударить с одной стороны по двустороннему барабану, то через какое-то время начнет колебаться вторая мембрана, а первая почти затихнет. Затем они меняются местами. Чем это объяснить?

5. Когда в Кёльнском соборе установили колокол и начали раскачивать его язык, звона не услышали. Частоты колебаний колокола и его языка случайно оказались такими, что они качались в фазе. Как, по-вашему, решили проблему?

6. Если смотреть издали на марширующих под духовой оркестр солдат, то кажется, что они идут не в такт с музыкой. Почему?

7. Духовой оркестр, удаляясь, заходит за угол дома. Через некоторое время слышна игра лишь труб-басов и барабана. Отчего при этом не слышны флейты и кларнеты?

8. В симфоническом оркестре играют около ста музыкантов. Однако, сидя в зрительном зале, мы воспринимаем *каждый* из инструментов оркестра, и их звуки не сливаются. Как это понять?

9. Высота звука в трубах, как и в случае струны, зависит от их размеров. Каким фактором, в сравнении со струной, она еще обусловлена?

10. Почему у скрипки всего четыре струны, а у арфы или пианино – десятки?

11. Отчего корпус виолончели намного больше, чем у скрипки?

12. Зачем полый корпус скрипки, виолончели, гитары делают фигурным?

13. Почему струнные музыкальные инструменты надо перенастраивать после внесения с мороза в теплое помещение?

14. Если струна музыкального инструмента начинает издавать ненормально низкий звук, настройщик увеличивает ее натяжение. Как этим способом удается добиться нужной частоты колебаний?

15. Гитарист перебирает струны и отпускает их, после чего каждая струна свободно колеблется и звучит на своей частоте. А вот скрипач постоянно ведет смычком по струне, как же она тогда колеблется?

16. Для чего смычки струнных инструментов перед игрой натирают канифолью?

Микроопыт

Потрите мокрым пальцем по ободку бокала или стакана. При определенной скорости обращения вы можете заставить стакан «петь». Что вызывает этот звук? Как он изменится, если налить в стакан воду?

Любопытно, что...

...по легенде, в незапамятные времена около древнеегипетского города Фивы каждое утро на рассвете огромная статуя, известная под именем колосса Мемнона, издавала тон ля первой октавы, и музыканты приходили к ней настраивать свои инструменты.

...Пифагор экспериментально обнаружил связь между высотой музыкального тона и длиной струны либо флейты, его издающих, и что гармоничность совместного звучания определяется простым рациональным отношением длин этих инструментов. Так Пифагор открыл первый закон *математической физики*.

...нотный стан, заслуга изобретения которого в начале XI века принадлежит итальянскому монаху Гвидо д'Ареццо, – это первый в истории график, так как на нем по вертикали указывается изменение

высоты звука, а по горизонтали слева направо – течение времени.

...наиболее существенный вклад в решение задачи о колеблющейся струне внес Леонард Эйлер, начиная с его работы 1739 года «Опыт новой теории музыки», в которой он придал проблеме музыкальной гаммы точный смысл.

...Бетховен, оглохнув, слушал игру на рояле, приставив к нему одним концом свою трость, другой конец которой держал у зубов.

...Альберт Эйнштейн любил играть не только на скрипке, но также исполнял на рояле произведения Баха, Вивальди и Моцарта. По словам современников, он легко переносил негативные оценки своих научных теорий, однако очень обижался, если кто-то критиковал его стиль игры на скрипке.

...первый отечественный электромузыкальный инструмент – терменвокс – был сконструирован в 1920 году российским физиком Львом Терменом. Высотой и громкостью звука в этом устройстве можно было управлять, меняя положение рук исполнителя относительно антенн прибора.

...в XX веке произошла самая настоящая революция в средствах записи, передачи и воспроизведения музыки. От механических инструментов – шарманок и музыкальных часов – через граммофоны, магнитофоны – до цифровых аудиоустройств. Как, например, встроенный в наушники микрокомпьютер с искусственным интеллектом или программа, подбирающая для пользователя музыку, похожую на ту, что он слушал ранее.

Что читать в «Кванте» о союзе физики и музыки (публикации последних лет)

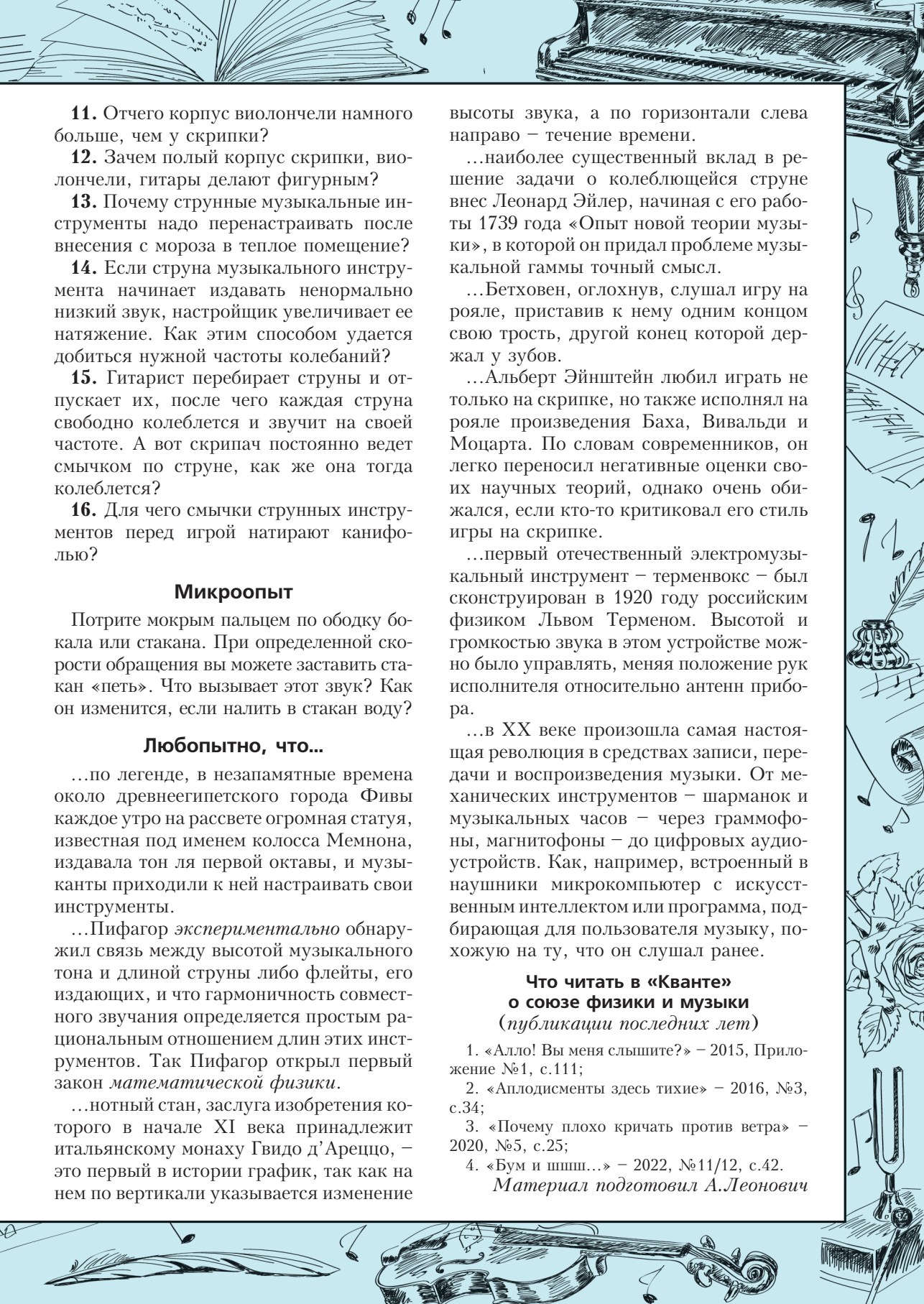
1. «Алло! Вы меня слышите?» – 2015, Приложение №1, с.111;

2. «Аплодисменты здесь тихие» – 2016, №3, с.34;

3. «Почему плохо кричать против ветра» – 2020, №5, с.25;

4. «Бум и шшшш...» – 2022, №11/12, с.42.

Материал подготовил А.Леонovich



Таутохронизм, или Два путника и линза

А. СТАСЕНКО

КАК НЕ РАЗ БЫВАЛО, «ИЗ ПУНК-
тов A и B вышли навстречу друг другу
два путника...»

– Это у вас такие города?

«Нет, конечно! Ну, пусть из городов Амба
и Бумба. И пусть расстояние между ними
двадцать миль...»

– Но, между ними всего десять миль!

«Хорошо, пусть десять. Скорости путни-
ков различны: v_A и v_B . В какой точке x пути
они встретятся?»

– Ясно, что в деревне Тонга-Бонга!

«Как же вы узнали, так сразу?»

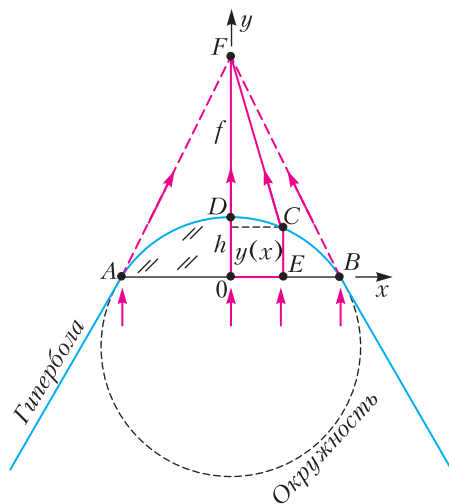
– А больше негде встретиться, кругом
пустыня.

«Да, но один из них может прийти рань-
ше...»

– Подождет другого, куда спешить ...

Так – не без иронии – рассуждали внима-
тельные слушатели. Однако, в физике часто
требуется обеспечить одновременность со-
бытий или, говоря по-научному, их таутох-
ронность $\tau\alpha\upsilon\tau\omicron\chi\rho\omicron\nu\alpha$ (вспомним *тавтоло-
гию* и *хронометр*). Одним из устройств,
обеспечивающих одновременность, является
линза (см. рисунок).

Рассмотрим два луча света, пришедшие
одновременно в точки E и B плоской поверх-
ности линзы, их абсциссы равны x и r
соответственно. Время прохождения светом
путей ECF и BF должно быть одинаковым
($\tau\alpha\upsilon\tau\omicron$), хотя геометрическая длина этих
расстояний различна. Пусть c_0 – скорость
света в вакууме (во всех точках отрезка BF),
а c – скорость света в стекле (на участке EC
длиной $y(x)$). Тогда факт одновременного
«прибытия» в фокус линзы (точку F) запи-



К определению формы поверхности плоско-
выпуклой линзы (гиперboloида). Окружность –
часто употребляемое приближение

шется в виде

$$\frac{EC}{c} + \frac{CF}{c_0} = \frac{BF}{c_0},$$

или

$$\frac{y}{c} + \frac{\sqrt{x^2 + (f - y)^2}}{c_0} = \frac{\sqrt{r^2 + f^2}}{c_0},$$

где f – длина отрезка OF . Избавляясь от
квадратного корня во втором слагаемом сле-
ва, получим

$$\frac{x^2 + (f - y)^2}{c_0^2} = \left(\frac{\sqrt{r^2 + f^2}}{c_0} - \frac{y}{c} \right)^2. \quad (1)$$

Если еще поработать, можно уравнение
(1) записать так:

$$-x^2(n^2 - 1) + \left(y(n^2 - 1) - n\sqrt{r^2 + f^2} + f \right)^2 = \\ = (n^2 + 1)f^2 + r^2 - 2nf\sqrt{r^2 + f^2}. \quad (2)$$

Тут введен коэффициент преломления $n = \frac{c_0}{c}$.
Полезно остановиться и проверить справед-
ливость этого соотношения хотя бы в одной
точке, например в точке B ($y = 0$, $x = r$). А
положив $x = 0$, получим выражение для тол-
щины линзы h (отрезок OD).

Легко заметить, что выражения (1) и (2)
после элементарных преобразований можно

привести к виду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

который соответствует гиперболе – одному из так называемых конических сечений. (Мир физики полон аналогий. Вспомним небесную механику: если некое космическое тело пролетает мимо Земли по гиперболической траектории – мы его больше никогда не увидим.)

Итак, выпуклая поверхность линзы является фигурой вращения – гиперболоидом. Впрочем, для практических целей удобнее эту поверхность считать сферической, конечно, приближенно. (Телу, прилетевшему по гиперболической траектории, позволили периодически возвращаться к Земле.)

Приведенные выше рассуждения выполнены в рамках лучевой оптики. Что же получается: вся энергия света, прошедшего через плоскую поверхность линзы площадью πr^2 , должна собраться в одной точке? Да

ведь этак можно резать камни и – страшно сказать – включать термоядерные реакции?! Понятно, что аналогичные рассуждения можно провести и с точки зрения волновой оптики, выразив соответствующие расстояния в длинах волн λ_0 и $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$, потребовав, чтобы все волны пришли в «точку» F в одной фазе. Но теперь это будет область пространства, характерный размер которой зависит от λ_0 .

А что же два путника, которые давно вышли навстречу друг другу из пунктов, расстояние между которыми равно L ? Ясно, что их встречу – факт одновременного прохождения двух отрезков пути со скоростями v_A и v_B – можно записать в виде

$$\frac{x}{v_A} = \frac{L - x}{v_B}.$$

После рассмотрения таутохронизма линзы – это уже совсем простое уравнение, решение которого доверим читателю.

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Физика гитарного эффекта

Д.БОГАТОВА (ученица 10 класса)
И.ПЫЛЕВ, С.ПЫЛЕВ

ЗВУК ЭЛЕКТРОГИТАРЫ ХОРОШО знаком каждому из нас. Но кто знает, какой была бы современная музыка, если бы не изобретение этого инструмента в далеких 30-х годах прошлого века. Время шло, и электрогитара изменялась до неузнаваемости. Множества моделей, форм и модификаций этого инструмента поражают своими масштабами. Однако, разнообразие звуча-

ний зачастую обусловлено не самой гитарой, а эффектами, которые применяет исполнитель. В классической схеме одного из таких эффектов между гитарой и усилителем включается педаль (рис.1). Конструкция инструмента позволяет преобразовать механические колебания струн в электромагнитные. Пропустив сигнал через гитарную педаль, можно добиться настолько необычного звучания, что слушателю останется лишь догадываться, что за инструмент он сейчас слышит.

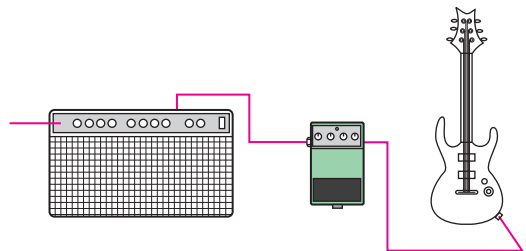


Рис. 1. Схематичное изображение цепи, по которой проходит сигнал

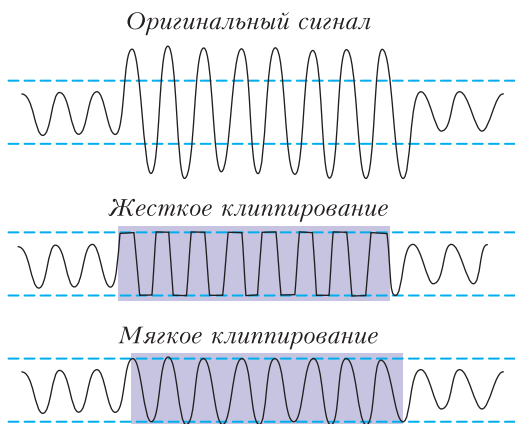


Рис. 2. Сигнал и его клипирование

В этой статье будет рассказано, как мы сделали настоящую педаль гитарного эффекта своими руками. Мы выбрали эффект дисторшн (англ. *distortion* – искажение). Этот эффект меняет вид исходного сигнала, а точнее его форму (рис.2). Оригинальный сигнал, он же исходный, представляет собой обычную синусоиду. Далее происходит клипирование, т.е. искажение исходного сигнала. Амплитуда обработанного сигнала превышает допустимое значение напряжения. Синусоида теперь будто не влезает в окошко. Сигнал искажается, набор частот увеличивается. Звук получается более агрессивным. Существует два вида клипирования: жесткое клипирование – результат эффекта дисторшн, и мягкое – результат эффекта овердрайв (англ. *overdrive* – перегруз).

Создание нашей педали началось с поиска подходящей схемы. На просторах интернета мы раздобыли инструкцию по созданию педали эффекта Fuzz (рис.3). Первую плату пришлось забраковать, так как один из транзисторов оказался неисправным, к тому же мы придумали, как значительно упростить схему, используя вместо транзисторного каскада микросхему. Вторая попытка увенчалась успехом, конструкция заработала и нам удалось услышать теплый хрустящий перегруз (клипированный сигнал). Но теперь нас не устраивал внешний вид схемы (рис.4), и мы решили перенести ее с картонки на настоящую монтажную (печатную) плату.

Печатная плата (рис.5) была изготовлена химическим негативным методом, а точнее –



Рис. 4. Первый прототип платы на картонке

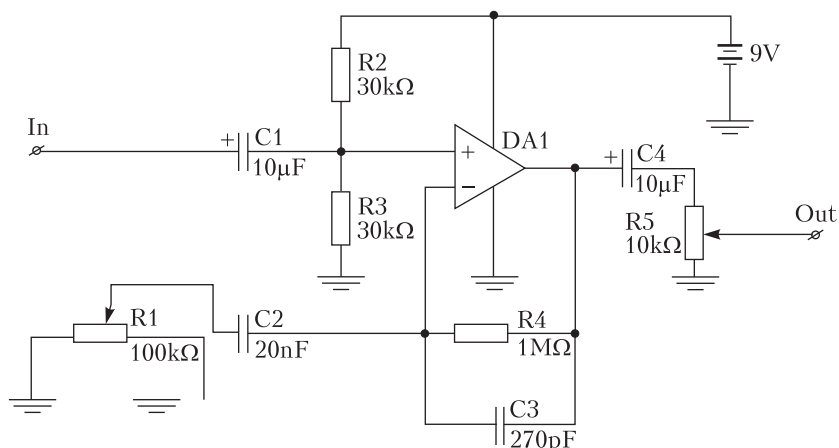


Рис. 3. Модифицированная схема педали гитарного эффекта Fuzz



Рис. 5. Плата в процессе изготовления методом лазерно-утюжной технологии

более удобным для домашних условий методом лазерно-утюжной технологии. Первым делом мы спроектировали трафарет будущей печатной платы в системе автоматизированного проектирования Altium Designer. Далее был напечатан полученный рисунок-трафарет нашей платы на глянцевой бумаге от журнала на лазерном принтере (отсюда слово «лазерный» в названии метода). На заранее подготовленный лист стеклотексто-

лита с помощью утюга был перенесен рисунок с трафарета. Подготовка стеклотекстолита заключалась в очистке поверхности абразивом и последующем обезжиривании. Далее следовал перенос тонера с трафарета на поверхность заготовки, после чего бумагу удалили водой и ватным диском. Процесс травления проходил в растворе перекиси водорода и лимонной кислоты с добавлением поваренной соли, которая является катализатором в данной реакции. Процесс занял около 30–40 минут. В результате вся лишняя медь была вытравлена, а то, что было под рисунком, осталось нетронутым. Получился проводящий рисунок, который и является схемой. Дальнейший монтаж элементов оказался сплошным удовольствием.

После того, как мы убедились в работоспособности схемы, пришло время создания корпуса. Мы решили выполнить его в черном цвете и выбрали квадратную форму. В качестве материалов были использованы дерево и пластик, поэтому внутренности педали непременно нужно было экранировать. Для этого мы обклеили корпус изнутри алюминиевой клейкой лентой. Во избежание наводок и появления паразитной емкости отдельные куски ленты были соединены друг с другом проводником (каплей припоя).

Так была создана наша любимая Фузик-2000 (рис.6).

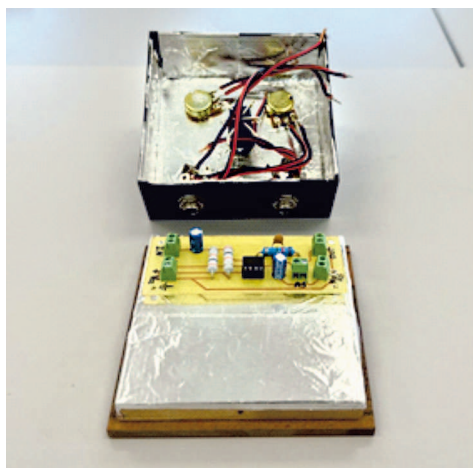


Рис. 6. Готовая педаль

Избранные задачи XXVIII Турнира имени А.П.Савина

1 (7–8 класс). По кругу выстроили 28 учеников и случайным образом раздали им номера от 1 до 28. Каждый ответил «Да» или «Нет» на вопрос «Делится ли твой номер на номер соседа слева?». Верных ответов оказалось больше, чем неверных. Какое наибольшее количество учеников могло ответить «Да»?

А.Шаповалов

2 (5–8 класс). Какое наименьшее число коней можно поставить на шахматной доске так, чтобы на любую свободную клетку можно было переместить одного из них, сделав не более двух ходов?

М.Евдокимов

3 (7–8 класс). У Мальшпа было 100 осей на подставке, на каждую из которых было надето по 20 колец. При этом на 50 осях были только белые кольца, а еще на 50 – только черные. Пришел Карлсон и все перемешал в произвольном порядке. Докажите, что Мальшп сможет восстановить порядок, используя дополнительно еще одну ось, если перемещать кольца можно только по одному между осями, а на каждую ось можно надеть максимум 20 колец.

В.Новиков

4 (7–8 класс). Дан прямоугольный треугольник ABC . Пусть ω – окружность, проходящая через вершину C и касающаяся гипотенузы AB в точке B . Докажите, что расстояние от точки A до окружности ω больше, чем расстояние от точки C до прямой AB .

И.Кухарчук, А.Ершов

5 (5–6 класс). В двух комнатах находилось по несколько человек, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. Время от времени кто-нибудь из них переходил из одной комнаты в другую и, уже находясь в комнате, произносил: «Сейчас в этой комнате лжецов больше, чем рыцарей». Могло ли оказаться, что каждый человек совершил ровно один переход из комнаты в комнату?

Н.Чернятьев

6 (5–7 класс). Из 64 белых и черных единичных кубиков сложен куб $4 \times 4 \times 4$.

Назовем *ежом* фигуру, состоящую из семи кубиков (центрального и шести соседних с ним). Оказалось, что в каждом еже белых кубиков больше, чем черных. Докажите, что и в каком-то кубе $2 \times 2 \times 2$ белых кубиков больше, чем черных.

М.Евдокимов

7 (6–8 класс). В лесу нечетное количество домов, некоторые из них соединены дорожками. В каждом доме живет гном. Гномы считаются *соседями*, если их дома соединены дорожкой. Однажды гномы совершили обмена и переехали в другие дома. При этом оказалось, что снова в каждом доме живет гном, и теперь гномы являются соседями в том и только в том случае, если раньше они ими не были. Докажите, что ровно один гном не сменил место жительства.

А.Грибалко

8 (7–8 класс). Правильный шестиугольник разрезан более чем на 100 равносторонних шестиугольников, каждый из которых окрашен в белый или черный цвет. Верно ли, что найдутся два шестиугольника, граничащих по стороне или части стороны, которые окрашены в один цвет?

М.Евдокимов

9 (6 класс). В течение года ученики класса сходили на N олимпиад. Каждые двое участвовали в разном количестве олимпиад, при этом каждый из них был на олимпиаде, на которой не был второй. Какое наибольшее число учеников может быть в этом классе?

В.Буфеев, О.Манжина

10 (7–8 класс). Цифры от 0 до 9 зашифрованы в каком-то порядке буквами от A до J . За один вопрос разрешается назвать несколько различных букв и узнать зашифрованную запись их суммы. Например, если $A = 5$, $B = 6$, $C = 1$, то можно, назвав A и B , узнать, что их сумма равна CC . Саша предполагает, что цифры зашифрованы по порядку, т.е. $A = 0$, $B = 1$ и т.д. Может ли он, задав три вопроса, подтвердить или опровергнуть свою гипотезу?

А.Грибалко, А.Заславский

11 (6–8 класс). Клетки прямоугольной таблицы $m \times n$ покрашены в три цвета: синий, красный, зеленый. За один ход можно выбрать три клетки, образующие уголок, и одновременно перекрасить их следующим образом: синие клетки – в красный цвет, красные – в зеленый, зеленые – в синий. При каких m и n можно сделать таблицу одноцветной, независимо от первоначальной раскраски?

О. Манжина

12 (6–8 класс). а) Есть 54 уголка, которые представляют собой два отрезка длины 1, соединенные в концах под прямым углом. Из них собрали каркас куба с ребром длины 3, каждая грань которого разбита на единичные квадраты. Докажите, что если каждый уголок находится целиком на одной из граней куба, то на каких-то двух гранях уголков поровну.

б) Та же задача для 96 уголков и куба с ребром длины 4.

А. Грибалко

13 (8 класс). На клетчатом поле 111×111 находится невидимый корабль 11×11 . Разрешается производить выстрел в любую клетку. Если выстрел попал в корабль, то он считается уничтоженным и игра заканчивается. Если же выстрел был неточен, то после него корабль смещается на одну клетку по горизонтали или по вертикали (в пределах

доски). Можно ли за несколько выстрелов гарантированно уничтожить корабль?

А. Грибалко

14 (8 класс). Внеписанная окружность с центром в точке I_a касается катета AB прямоугольного треугольника ABC в точке A_0 . Внеписанная окружность с центром в точке I_c касается катета CB в точке C_0 . Прямые $I_a A_0$ и $I_c C_0$ пересекают гипотенузу AC в точках A_1 и C_1 , а друг друга – в точке P . Докажите, что середина AC лежит на внеписанной окружности треугольника $A_1 P C_1$.

Д. Швецов

15 (8 класс). Внутри равностороннего треугольника отметили 2022 точки и выписали все расстояния от этих точек до сторон треугольника. Могут ли выписанные числа образовывать в некотором порядке арифметическую прогрессию?

А. Грибалко

16 (6–8 класс). На столе по кругу лежат 20 неразличимых на вид монет. Известно, что ровно две из них фальшивые. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивые тоже, но они легче настоящих. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь определить, лежат фальшивые монеты рядом или нет?

А. Грибалко, К. Кноп, Н. Чернышев

Подробную информацию о турнире можно найти на сайте tursavina.ru

Публикацию подготовил А. Грибалко

Заключительный этап LVI Всероссийской олимпиады школьников по физике

Теоретический тур

9 класс

Задача 1. Отрыв

См. задачу Ф2765 «Задачника «Кванта».

Задача 2. Аквариум на пружинах

См. задачу Ф2769 «Задачника «Кванта».

Задача 3. Холодильник

В тонкостенном цилиндрическом сосуде с внутренним радиусом R под поршнем находится столб воды высотой h_1 при температуре $t_0 = 0^\circ\text{C}$. Поршень и дно цилиндра теплоизолированные. Мощность тепловых потерь

через боковые стенки пропорциональна площади контакта и разности температур содержимого сосуда и окружающей среды: $N = \alpha S \Delta t$, где α – известная константа. Цилиндр вертикально ставят в холодильник, начальная температура в котором $t_1 < 0^\circ\text{C}$. Далее температуру в холодильнике изменяют так, что поршень цилиндра перемещается с постоянной скоростью. Лед, образующийся в цилиндре, не мешает свободному движению поршня. Более того, лед не всплывает над поверхностью воды, а упирается в пор-

шень, будучи полностью погруженным в воду, время от времени отрываясь от стенок сосуда. Удельная теплота плавления льда λ , плотности воды ρ_v , плотность льда ρ_l .

1) Определите, в какую сторону и с какой скоростью v перемещается поршень.

2) Найдите, в течение какого промежутка времени τ_{\max} продолжается такое движение.

3) Установите зависимость температуры t в холодильнике от времени τ в промежутке времени $[0, \tau_{\max}]$. Выразите ее через h_1, t_0, t_1, v, τ .

4) Найдите температуру в момент времени τ_{\max} . Выразите ее через t_0, t_1, ρ_v, ρ_l .

Д. Рубцов

Задача 4. Постоянный ток

См. задачу Ф2767 «Задачника «Кванта».

Задача 5. Угловая высота камня

Кот Леопольд стоит на горизонтальной поверхности земли на некотором расстоянии L от вертикального обрыва скалы (рис.1). С края обрыва мыши бросают камень таким

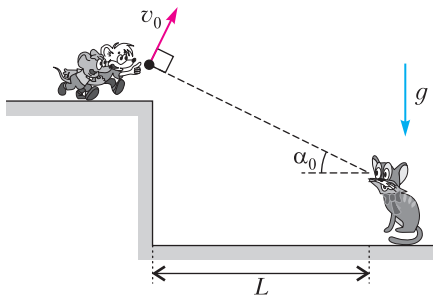


Рис. 1

образом, что вектор начальной скорости камня \vec{v}_0 , модуль которой равен $v_0 = 10$ м/с, направлен перпендикулярно лучу зрения Леопольда. Угол между горизонтом и лучом зрения Леопольда, направленным на камень, в момент броска был равен $\alpha_0 = 25^\circ$, а через некоторое время t_1 после броска камня достиг максимального значения, равного $\alpha_1 = 38^\circ$. Леопольд и траектория броска находятся в одной вертикальной плоскости, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

1) Чему равно время t_1 ?

2) На каком расстоянии L от скалы находился Леопольд?

А.Вергунов, А.Уймин

10 класс

Задача 1. Кинематика поршня

См. задачу Ф2766 «Задачника «Кванта».

Задача 2. Из лунки в поле

См. задачу Ф2770 «Задачника «Кванта».

Задача 3. Посеребрённый конус

В большой непрозрачной пластине толщиной h просверлено отверстие; форма его боковой поверхности представляет собой усеченный конус с диаметрами оснований d и $D = 4d$ (рис.2). Ось конического отверстия

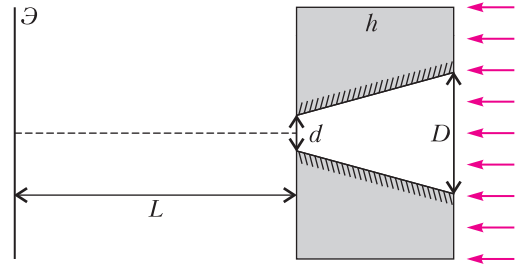


Рис. 2

перпендикулярна пластине, а боковая поверхность посеребрена и идеально отражает падающий на нее свет. Плоский экран расположен параллельно пластине на расстоянии L от нее. Система освещается параллельным потоком света, направленным вдоль оси конуса. Геометрические параметры h, D и L связаны таким соотношением: $D \ll h \ll L$.

1) Изобразите картину, наблюдаемую на экране. Укажите на рисунке все характерные геометрические размеры. Считайте, что свет попадает на экран только через отверстие в пластине.

2) Между пластиной и экраном поместили идеальную собирающую линзу. Фокусное расстояние линзы $F = L/2$. Главная оптическая ось линзы совпадает с осью конуса. Экран расположен в фокальной плоскости линзы. Считайте, что все лучи, вышедшие из отверстия в пластине, попадают на линзу. Изобразите картину, наблюдаемую на экране в этом случае. Укажите на рисунке все характерные геометрические размеры.

Примечание. Не забудьте привести построения и расчеты, необходимые для определения характерных геометрических размеров, а также обоснование вида картинки, наблюдаемой на экране.

А.Аполонский

Задача 4. Полусферический конденсатор

Две металлические полусферы радиусами R и $R + d$ ($d \ll R$), плоскости оснований которых горизонтальны, а центры совпада-

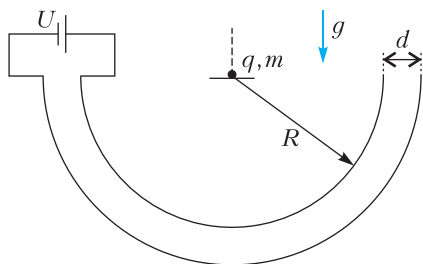


Рис. 3

ют, подключены к источнику, напряжение U которого может изменяться (рис.3). Суммарный заряд полусфер равен нулю. В центр полусфер на маленькую диэлектрическую подставку помещают точечный заряд $q > 0$ массой m , который может перемещаться по вертикальной спице без трения по направлению «вверх». Изначально напряжение на источнике равняется нулю, затем его начинают медленно увеличивать. Можно пренебречь краевыми эффектами и считать, что заряды полусфер равномерно распределены по их поверхностям. Ускорение свободного падения равно g .

1) Рассмотрим вспомогательную задачу. Полусфера радиусом r заряжена равномерно с поверхностной плотностью заряда σ . В центре полусферы расположен точечный заряд q . Найдите силу взаимодействия заряда и полусферы.

Вернемся к полусферическому конденсатору.

2) Найдите заряд Q меньшей из полусфер при напряжении на источнике, равном U . Считайте, что точечный заряд q при этом остается в центре полусфер.

3) Напряжение источника медленно увеличивают. Найдите, при каком заряде меньшей полусферы Q_{\max} заряд q начнет перемещаться. Чему при этом будет равно напряжение источника U_{\max} ?

4) Найдите изменение электростатической энергии системы $\Delta W_{\text{эл}}$ в процессе медленного увеличения напряжения источника от $U_0 = 0$ до U_{\max} .

Примечание. Используйте приближение $(1+x)^n \approx 1+nx$ при $nx \ll 1$.

А.Уймин

Задача 5. Об стену

На гладкой горизонтальной поверхности недалеко от вертикальной стенки расположена конструкция, состоящая из двух шайб и

стержня. Шайбы лежат на плоскости «плашмя». На рисунке 4 представлен вид сверху. С центром шайбы 2 стержень соединен жестко и не может относительно нее вращаться. С шайбой 1 стержень соединен с помощью плотной

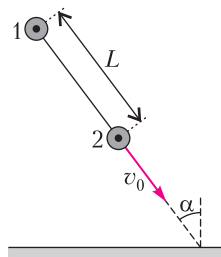


Рис. 4

посадки на гладкий шарнир, радиус оси которого много меньше радиуса стержня, поэтому шайба 1 может свободно вращаться относительно стержня. Стержень образует угол $\alpha = 30^\circ$ с нормалью к стенке. Стержень жесткий и невесомый. Длина стержня $L = 0,8$ м. Радиусы шайб много меньше длины стержня. Радиус стержня много меньше радиусов шайб. Шайбы одинаковые и однородные. Конструкции сообщают скорость $v_0 = 2,5$ м/с, направленную вдоль стержня в сторону стенки, и через некоторое время происходит соударение шайбы 2 со стенкой.

1) Покажите, что в процессе удара силы, действующие со стороны стержня на шайбы, можно считать направленными вдоль стержня.

Используйте данный факт при ответе на последующие вопросы, даже если вы не смогли его обосновать.

2) Определите угловую скорость вращения стержня сразу после абсолютно упругого соударения шайбы 2 со стенкой (стенка гладкая).

3) Определите угловую скорость вращения стержня сразу после абсолютно неупругого соударения шайбы 2 со стенкой. Коэффициент трения между шайбой и стенкой μ . Рассмотрите два значения коэффициента трения: $\mu_1 = 0,2$ и $\mu_2 = 0,6$.

Примечание. При абсолютно неупругом соударении составляющая скорости шайбы 2, перпендикулярная стенке, обращается в ноль.

А.Уймин

11 класс

Задача 1. Щель Кассини

См. задачу Ф2768 «Задачника «Кванта».

Задача 2. Похоже на Сатурн

По поверхности тонкого плоского непроводящего кольца с внутренним и внешним радиусами r_1 и r_2 соответственно распределен

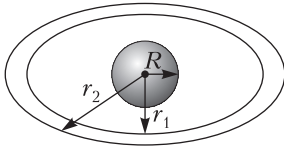


Рис. 5

положительный заряд с постоянной поверхностной плотностью σ . Центр непроводящего шара радиусом $R \ll r_1, r_2$ совпадает с центром кольца (рис.5). Шар равномерно заряжен по объему положительным зарядом Q .

1) В каких пределах изменяется модуль электрического поля на поверхности шара?

2) При каких значениях σ вектор напряженности результирующего поля в точках на поверхности шара, удаленных от плоскости кольца на расстояние больше чем $0,1R$, можно считать направленным вдоль оси вращения системы? Заряд Q считайте известным.

Примечание. Ответы на каждый из вопросов задачи должны быть упрощены с учетом приближения $R \ll r_1, r_2$.

Г.Расторгуев

Задача 3. Кружатся диски

См. задачу Ф2772 «Задачника «Кванта».

Задача 4. Адиабатическая анизотропия

См. задачу Ф2771 «Задачника «Кванта».

Задача 5. Туда-сюда

На плоской доске, образующей с горизонтом угол $\alpha = 30,0^\circ$, находится маленькая шайба (рис.6). Коэффициент трения между

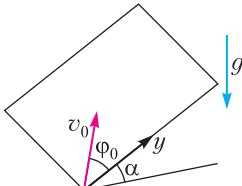


Рис. 6

шайбой и доской $\mu = \text{tg } \alpha$. Вблизи основания доски шайбе сообщают скорость $v_0 = 8,00$ м/с, и она движется по доске, пока снова не достигнет основания. Основание доски горизонтальное. Известно, что в моменты старта и повторного достижения основания доски вектор скорости шайбы образовывал углы $\varphi_0 = 60,0^\circ$ и $\varphi_1 = 159,3^\circ$ соответственно с положительным направлением оси y , направленной вверх по доске. Ускорение свободного падения $g = 9,80$ м/с². Шайба не вращается.

1) Определите ускорения шайбы a_0 и a_1 в момент старта и прямо перед повторным до-



стижением основания доски соответственно.

2) Определите скорости шайбы u и v_1 в верхней точке траектории и прямо перед повторным достижением основания доски соответственно.

3) Определите время t , через которое шайба повторно достигает основания доски.

Примечание. Ответ на каждый из вопросов задачи должен быть как рассчитан, так и выражен аналитически через заданные в условии величины.

А.Уймин

Победители олимпиады

9 класс

Агеев Я. – Московская область,

Авдеев Ф. – Москва,

Кривощёков Е. – Алтайский край,

Сируляев А. – Москва,

Сиволапов А. – Московская область,

Айрапетян В. – Московская область,

Рыбаков В. – Санкт-Петербург,

Науменя А. – Калининградская область,

Руковчук П. – Московская область,

Шнейдерман М. – Москва,

Лаврентьев В. – Санкт-Петербург,

Смекалин С. – Приморский край;

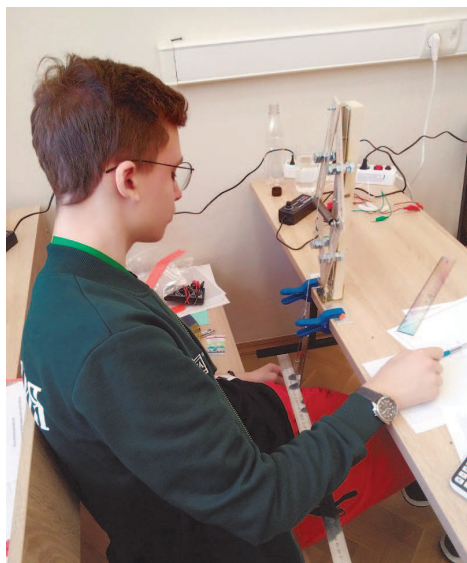
10 класс

Быстров М. – Московская область,

Гаранов И. – Москва,

Снигирь К. – Москва,

Кротков Я. – Москва,



Бахвалов А. – Московская область,
Чайка М. – Москва,
Прохоров П. – Москва,
Прохорченко М. – Московская область,
Жиганов Г. – Свердловская область;

11 класс

Потапов Е. – Москва (10 класс),
Бобков В. – Москва (10 класс),
Душанин А. – Московская область,
Доля В. – Московская область,
Ившин А. – Московская область,
Мякутин И. – Москва,
Ершов А. – Московская область,
Гаврилов Д. – Московская область,
Бурцев Р. – Московская область.

Публикацию подготовил В.Слободянин

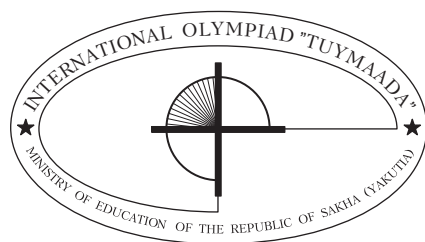
XXIX и XXX Международные олимпиады школьников «Туймаада»

Физика

В июле прошлого, 2022 года Международная олимпиада «Туймаада» по физике, математике, информатике и химии проходила дистанционно, а в июле нынешнего, 2023 года – снова в очном формате. Участники олимпиады по физике соревновались, как обычно, в двух лигах: старшей и младшей (жюри распределяет участников по лигам в зависимости от их возраста и класса). Согласно программе олимпиады по физике, участникам могут быть предложены задачи на любые темы, содержащиеся в углубленной школьной программе.

Авторы оригинальных задач (как теоретических, так и экспериментальных) могут присылать их методической комиссии (achudn@mail.ru) – лучшие задачи войдут в итоговый комплект и будут опубликованы после олимпиады в образовательных журналах.

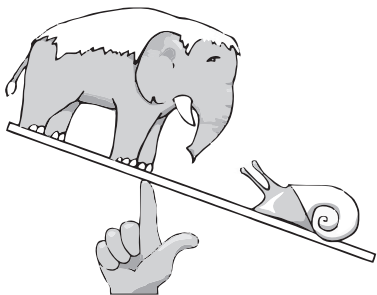
Статья подготовлена на основании следующих методических пособий:



А.В.Чудновский, Р.Е.Аванесян., С.Д.Варламов, А.И.Власов, М.М.Ермилов, А.И.Мананов. XXIX Международная олимпиада «Туймаада». Физика. Теоретический тур. Методическое пособие/под ред. А.В.Чудновского – М.-Якутск, 2022;

А.В.Чудновский, Р.Е.Аванесян, А.Б.Акимов, С.Д.Варламов, А.И.Власов, М.М.Ермилов, В.В.Ефимов, С.И.Кошоридзе. XXX Международная олимпиада «Туймаада». Физика. Теоретический тур. Методическое пособие/под ред. А.В.Чудновского – М.-Якутск, 2023.

Ниже представлены теоретические задачи для старшей лиги.



Теоретический тур 2022 года

Задача 1. Центр масс загружаемой платформы

Платформа массой $M = 2000$ кг и длиной $L = 80$ м движется без трения с начальной скоростью $v_0 = 1$ м/с. Когда платформа уже на $3/4$ своей длины проехала загрузочный люк, тот открылся и из него начал сыпаться щебень с расходом $\mu = 100$ кг/с. Найдите скорость $v_c(t)$ центра масс системы, состоящей из платформы и высыпавшегося щебня, в зависимости от времени после открытия люка. Приведите ответ в общем виде и для указанных численных данных.

А. Манаков, А. Чудновский

Задача 2. Раскручивание резинового кольца

Тонкое кольцо из резины плотностью $\rho = 1500$ кг/м³ надели на шершавый цилиндр немного большего диаметра так, что кольцо растянулось и в нем возникло механическое напряжение $T = 6$ кПа. До какой максимальной линейной скорости v можно раскрутить кольцо, вращая цилиндр вокруг своей оси? Другие тела с кольцом не взаимодействуют.

А. Чудновский

Задача 3. Адиабатное падение тяжелого поршня

Тяжелый поршень начинает адиабатное падение в вертикальном цилиндре, заполненном одноатомным идеальным газом (над поршнем вакуум). Отношение начальной силы давления газа на поршень к силе тяжести поршня является малой величиной $\varphi = 0,01$.

1) Оцените отношение $h = H_{\min}/H_0$ минимальной высоты H_{\min} поршня над дном сосуда к начальной высоте H_0 .

2) Оцените отношение $P = p_{\max}/p_0$ максимального давления p_{\max} газа в цилиндре к начальному p_0 .

3) Оцените отношение $t = T_{\max}/T_0$ максимальной температуры T_{\max} газа в цилиндре к начальной T_0 .

А. Власов

Задача 4. Нагрев электротома

Из разных кусков нихромовой проволоки, покрытой одинаковой изоляцией одной и той же толщины, изготовили пять резисторов, соединили их по мостовой схеме (рис.1) и

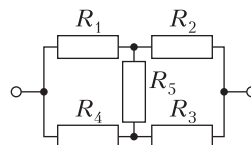


Рис. 1

подключили к источнику постоянного напряжения. В каждом из четырех описанных ниже опытов найдите разность между максимальной и минимальной температурами резисторов, если температура центрального резистора в тот же момент времени была выше комнатной на $\Delta T_5 = 10$ мК. В качестве ответа укажите численные значения, округленные до целого числа милликельвинов.

1) *Диаметры* всех кусков проволоки одинаковы, а *длины* пропорциональны номерам резисторов. Измерение всех температур производится через *малое* время после замыкания цепи.

2) *Диаметры* всех кусков проволоки одинаковы, а *длины* пропорциональны номерам резисторов. Измерение всех температур производится через *большое* время после замыкания цепи.

3) *Длины* всех кусков проволоки одинаковы, а *диаметры* пропорциональны номерам резисторов. Измерение всех температур производится через *малое* время после замыкания цепи.

4) *Длины* всех кусков проволоки одинаковы, а *диаметры* пропорциональны номерам резисторов. Измерение всех температур производится через *большое* время после замыкания цепи.

С. Варламов

Задача 5. Космический луч

Луч света от далекой звезды проходит сквозь газово-пылевую туманность, показатель преломления которой является функцией только от расстояния до центра туманности. Если бы преломления не было, то луч прошел бы на расстоянии H от центра туманности, но из-за преломления он прошел на минимальном расстоянии D от этого центра. Найдите показатель преломления n_0 в ближайшей точке траектории светового луча к центру туманности.

М.Ермилов

Задача 6. Одноразовая идеальная линза

На плоскую поверхность плосковыпуклой линзы, изготовленной из стекла с показателем преломления $n = 1,5$ и расположенной в воздухе, падает вдоль нормали параллельный пучок лучей. Определите форму выпуклой поверхности линзы, если плоская имеет форму круга радиусом $R = 0,5$ м, а все преломленные линзой лучи прошли через одну точку F , расположенную на расстоянии $f = 1$ м от ближайшей к ней точки O линзы. В качестве ответа укажите толщину H линзы (максимальное расстояние от точки выпуклой поверхности до плоской).

А.Власов

Задача 7. Проволочный куб

Вдоль ребер куба различными способами прокладывают тонкую проволоку и пускают по ней ток. Индуктивность замкнутого контура из четырех ребер, принадлежащих одной грани, равна L_{41} . Индуктивность замкнутого контура из шести ребер, принадлежащих двум смежным граням, равна L_{62} .

1) Найдите индуктивность L_{63} замкнутого контура из шести ребер, принадлежащих трем попарно смежным граням.

2) Найдите индуктивность L_{83} замкнутого контура из восьми ребер, принадлежащих трем граням, две из которых параллельны друг другу, а третья является смежной с каждой из двух других.

3) Вдоль ребер двух противоположных граней проложены две замкнутые проволоки. По одному проволочному контуру идет переменный ток силой $I(t) = I_0 \cos \omega t$. В другой проволочный контур вставлен идеальный маленький вольтметр. Найдите зависимость $U(t)$ показаний вольтметра от времени.

С.Варламов

Теоретический тур 2023 года**Задача 1. Плоская капля**

На несмачиваемой горизонтальной поверхности разлита большая (по горизонтальным размерам) капля жидкости, имеющей плотность ρ и коэффициент поверхностного натяжения σ (рис.2). Найдите глубину H капли.

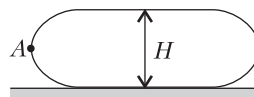


Рис. 2

Обозначив через A произвольную точку поверхности капли, в которой касательная плоскость вертикальна, найдите отношение k высоты капли над уровнем точки A к глубине капли под уровнем точки A и радиус кривизны R поверхности капли в точке A .

А.Власов

Задача 2. Апельсинометатель

Апельсинометатель Винтика и Шпунтика представляет собой легкий стержень длиной H , верхний конец которого может скользить по направляющим вдоль вертикальной стены, а нижний – по горизонтальному полу. Стержень начинает движение из вертикального положения без начальной скорости, причем Шпунтик сидит на верхнем конце, а Винтик с маленьким апельсином в руках – на нижнем. На какое максимальное расстояние s (от точки броска) Винтик сможет бросить апельсин, удачно подгадав момент и угол броска? Максимальное расстояние, на которое Винтик может бросить апельсин из неподвижного состояния, равно L . Массы корытшек одинаковы. Соппротивление воздуха не учитывайте.

А.Акимов

Задача 3. Пружина с переменным числом витков

Невесомая пружина имеет большое число витков, но изначально только $N \gg 1$ витков могут деформироваться, а остальные скреплены между собой. Груз на этой пружине совершает свободные колебания с периодом T_0 и амплитудой A_0 . Начиная с некоторого момента, при каждом прохождении грузом положения равновесия освобождают по одному из скрепленных витков пружины (длина пружины в недеформированном состоянии при этом не изменяется). Определите

амплитуду A колебаний груза после увеличения числа свободных витков на $\Delta N \gg 1$. Оцените (приблизительно) время t , прошедшее с момента освобождения первого из изначально скрепленных витков до момента завершения колебаний с амплитудой A .

А.Власов

Задача 4. Урановый шар

Урановый шар теплопроводностью k и радиусом R , помещенный в поток воды при температуре T_0 , облучается потоком нейтронов так, что в результате реакции деления ядер выделяется объемная мощность q . Найдите зависимость установившейся температуры T шара от расстояния r до его центра.

А.Чудновский

Задача 5. Газовый тройник

Маленький симметричный тройник соединяет три одинаковых сосуда с разреженным гелием. Все трубки тройника симметрично заполнены пористым материалом, пронизанным множеством параллельных каналов, диаметр которых много меньше длины свободного пробега молекул. В центре тройника имеется свободное от пористого материала небольшое пространство. Попадание молекулы в канал с любой стороны означает, что у молекулы есть определенная вероятность вылететь из этого канала назад через то же отверстие и дополнительная к ней вероятность вылететь через противоположное отверстие этого канала, причем эти вероятности не зависят от температуры и одинаковы для всех каналов. Изначально гелий во всех трех сосудах имел давление p_0 и некоторую одну и ту же температуру. Затем, поддерживая прежнюю температуру в первом сосуде и внутри тройника, повысили температуру во втором сосуде в два раза, а в третьем – в три раза. Какие давления p_1 , p_2 , p_3 и p_4 установятся соответственно в трех сосудах и в свободном пространстве внутри тройника через большое время?

С.Варламов

Задача 6. Заряженные многогранники

1) На гранях непроводящего куба с ребром a равномерно распределены заряды q , $2q$, $3q$, $4q$, $5q$ и $6q$, причем сумма зарядов на каждой паре противоположных граней равна $7q$. Найдите модуль напряженности E_1 электрического поля в центре куба.

2) По одной грани правильного тетраэдра равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью σ_1 , а по остальным трем граням – с поверхностной плотностью σ_3 . Найдите модуль напряженности E_2 электрического поля в центре тетраэдра.

С.Варламов, М.Ермилов

Задача 7. Растекание потока

На круглую пластину, имеющую малую толщину h и изготовленную из материала с удельным сопротивлением ρ , падает однородный поток заряженных частиц общей силой тока I_0 . Цилиндрическая граница пластины заземлена и имеет нулевой потенциал. Найдите потенциал ϕ_0 в центре пластины и тепловую мощность P_0 , выделяющуюся в пластине.

М.Ермилов

Задача 8. Ртутное зеркало телескопа

Знаменитый американский физик-экспериментатор Роберт Вуд в 1908 году построил оригинальный телескоп-рефлектор. На дне колодца в одном из коровников он установил в качестве зеркала телескопа вращающееся вокруг вертикальной оси блюдо со ртутью и наблюдал звездное небо через отверстие в крыше. С помощью такого зеркала в одном из своих опытов он получил на фотопластинке изображение Луны диаметром $d = 3,5$ см. С какой угловой скоростью ω в этом опыте вращалось блюдо со ртутью? Лунный диск с Земли виден под углом $\gamma = 0,5^\circ$. Ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с².

В.Ефимов

Публикацию подготовили *А.Чудновский,*

Ю.Григорьев, *Е.Неустроев*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Профильный экзамен по физике

В 2023 году в связи с эпидемиологической обстановкой в Москве профильный экзамен (дополнительное вступительное испытание) по физике проводился в дистанционном формате на портале <https://exam.distant.msu.ru>.

Для участия в экзамене предъявлялись следующие технические требования к рабочему месту испытуемого. 1) Наличие ноутбука (желательно), персонального компьютера, смартфона или планшета со стабильным интернет-соединением (без прерываний на протяжении испытания и минимальной скоростью от 5 Мбит/с). 2) При подключении к видеоконференции с помощью смартфона или планшета любого типа для получения задания обязательно использование второго устройства, например компьютера, иного смартфона/планшета. 3) Необходимо также наличие браузера Google Chrome или Mozilla Firefox последних версий и сканирующего или фотографирующего устройства для сканирования или фотографирования экзаменационной работы с последующей загрузкой на портал экзамена.

Типовое задание по физике охватывало три основных раздела программы для поступающих в МГУ: 1) механику, 2) молекулярную физику и термодинамику, 3) электродинамику. По каждому разделу программы абитуриенту предлагались краткий вопрос по теории и дополняющая его задача. На выполнение всего задания отводилось три астрономических часа.

Ниже приводятся задания профильного экзамена 2023 года.

Механика

1. Сформулируйте второй и третий законы Ньютона.

Задача. На гранях закрепленной призмы находятся два тела массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$ кг, соединенные друг с другом и неподвижной опорой невесомыми и нерастяжимыми нитями через систему невесомых

блоков (рис.1). При этом ускорение левого тела направлено вдоль наклонной плоскости вниз, а правого тела – вдоль наклонной плоскости вверх.

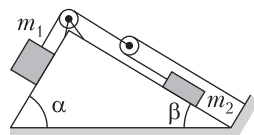


Рис. 1

Правая грань призмы гладкая, левая – шероховатая с коэффициентом трения $\mu = 0,6$. Определите модуль ускорения a_1 левого груза. Углы при основании призмы $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с².

2. Дайте определение кинетической энергии материальной точки и системы материальных точек. Как связаны приращение кинетической энергии тела и работа приложенных к телу сил?

Задача. Два маленьких упругих шарика одинаковой массой подвешены на невесомых нерастяжимых нитях, прикрепленных к массивным штативам так, что шарики соприкасаются при вертикальном положении нитей, а прямая, соединяющая их центры, горизонтальна. Длины нитей отличаются в два раза. Нити отклонили в одной плоскости в разные стороны до горизонтального положения, а затем шарики отпустили без толчка с такой задержкой во времени, что они столкнулись в нижней точке их траекторий. Определите отношение n модуля натяжения длинной нити сразу после столкновения шариков к модулю натяжения этой нити непосредственно перед столкновением.

Молекулярная физика и термодинамика

1. Дайте определение идеального газа. Запишите уравнение состояния идеального газа, указав смысл входящих в это уравнение величин.

Задача. С одноатомным идеальным газом проводят процесс, в котором внутренняя энергия газа пропорциональна квадрату занимаемого им объема. Каково изменение ΔU внутренней энергии газа в таком процессе,

если газу сообщили количество теплоты $Q = 20$ Дж?

2. Что такое насыщенный пар? Как зависят давление и плотность насыщенного пара от температуры?

Задача. В гладком вертикальном цилиндре под невесомым поршнем находится влажный воздух. Давление в цилиндре $p_0 = 1$ атм, а температура $t = 100$ °С. Объем цилиндра изотермически уменьшили в $n = 4$ раза. Определите давление в цилиндре после сжатия, если в начальном состоянии плотность сухого воздуха в $k = 3$ раза превышает плотность водяного пара. Молярная масса сухого воздуха $M = 29$ г/моль, воды $M_v = 18$ г/моль.

Электродинамика

1. Сформулируйте закон Кулона и закон сохранения электрического заряда. Поясните смысл входящих в эти законы величин.

Задача. По тонкому гладкому непроводящему стержню начинает скользить из состояния покоя заряженная бусинка массой m и положительным зарядом q . Стержень имеет форму дуги окружности радиусом R и расположен в вертикальной плоскости. Начальное положение бусинки находится на высоте $H = R/5$ относительно нижней точки стержня D (рис.2). На этой же высоте над точкой

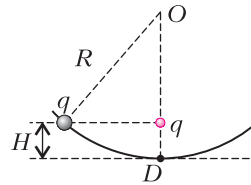


Рис. 2

Д расположен неподвижный положительный заряд q . Найдите силу F , с которой бусинка действует на стержень в точке D , пренебрегая эффектами, связанными с появлением поляризационных зарядов.

2. Что такое электродвижущая сила (ЭДС) источника? Сформулируйте закон Ома для замкнутой цепи.

Задача. Из однородной проволоки сделали замкнутый контур в форме квадрата со стороной $a = 1$ м и расположили его горизонтально. После этого стали растягивать контур за две диагонально расположенные вершины до тех пор, пока он не превратился в ромб с острым углом $\alpha = 60^\circ$. Найдите среднюю силу тока I , который протекал в контуре в процессе его деформации, если обе вершины контура двигали относительно неподвижного центра квадрата с постоянными скоростями, по модулю равными $v = 1$ м/с. Сопротивление проволоки $R = 1$ Ом, а модуль вертикальной составляющей индукции магнитного поля Земли $B = 50$ мкТл.

Публикацию подготовил С.Чесноков

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №8)

1. Васин дом – на станции F , школа – на станции 1.

На схеме можно выделить три цикла. Обозначим кольцевую линию через X , цикл из хорды и станций над ней – через Y , а цикл из хорды и станций под ней – через Z . На пути из дома в школу Вася должен доехать до одной из станций G или K и там пересечь на хорду. У него есть четыре варианта добраться до пересадочной станции:

- 1) по часовой стрелке до станции G ;
- 2) по часовой стрелке до станции K ;
- 3) против часовой стрелки до станции G ;
- 4) против часовой стрелки до станции K .

Заметим, что в циклах X и Y нечетное количество станций, поэтому не могут быть кратчайшими одновременно маршруты 1 и 3, 2 и 4, 1 и 4, а также 2 и 3 (в каждой из этих пар четности длин маршрутов различны). Маршруты 3 и 4 не могут

быть одновременно кратчайшими, так как в них используется движение против часовой стрелки по X . Следовательно, кратчайшими являются маршруты 1 и 2. Цикл Z состоит из десяти станций, и по нему от станции G до школы одинаково ехать по часовой стрелке и против часовой стрелки, значит, школа находится на станции 1. Тогда Вася живет на станции F , поскольку от любой другой станции над хордой путь до станции 1 ближе через станцию K .

2. Не могло.

В партиях каждых двух шахматистов было либо две победы белых, либо две победы черных. Значит, общее число побед у белых четно. Количество пар шахматистов: $10 \cdot 9/2 = 45$, поэтому если бы половину всех партий выиграла белая, то у них было бы 45 побед, но это число нечетное. Следовательно, такого быть не могло.

3. Могло.

Пример многоугольника показан на рисунке 1 зеленым цветом. При разрезании по вертикальной

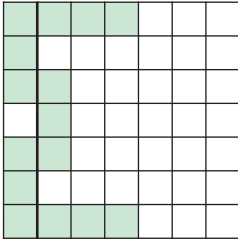


Рис. 1

жирной линии он распадается на пять прямоугольников размером 1×3 .

4. Поскольку разных фигурок разное количество, какая-то фигурка использована больше остальных. Назовем ее *главной*. Если фигурок любой другой формы хотя бы на две меньше, то каждый пленник видит, какая фигурка главная. Если все нарисуют ее, среди них будут и угадавшие верно.

Пусть это не так и, например, главная фигурка – квадрат, следующая по числу – круг, причем кругов ровно на один меньше, чем квадратов. Тогда пленники с квадратами на лбу будут видеть одинаковое количество кругов и квадратов и не смогут определить наверняка главную фигурку (остальные, как и раньше, будут видеть, какая фигурка главная, и могут нарисовать ее). Для этого случая есть несколько спасительных алгоритмов.

Первый – из двух кандидатов в главные фигурки назвать ближайшую по часовой стрелке. Докажем, что хоть кто-то угадает. Будем учитывать только квадраты и круги, игнорируя остальных пленников. Может ли после каждого квадрата по часовой стрелке следовать круг? Нет, так как квадратов больше. Тот пленник с квадратом, после которого по часовой стрелке следует квадрат, угадает и всех спасет.

Работает и противоположный алгоритм: из двух кандидатов в главные фигурки называть не ту, которая ближе всего по часовой стрелке. Для доказательства тоже рассмотрим лишь круги и квадраты. Как минимум в одном месте после пленника с квадратом следует по часовой стрелке пленник с кругом. Этот пленник с квадратом верно нарисует свою фигурку.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Предмет, стоящий на трех ножках, не будет дрожать на любом, даже кривом полу, а стоящий на четырех – может трястись. А поскольку во время концертов рояль передвигают по сцене, то его устойчивость, отсутствие вибрации играют существенную роль.

2. Волны от двух ветвей камертона интерферируют на погашение.

3. Частоту камертона легко определить по высоте его тона, проигрывая ноты на музыкальном инструменте, например на баяне, и сравнивая их высоты.

4. Колебания воздуха внутри барабана, возбуждаемые первой мембраной, действуют на вторую. Но ее колебания сначала тормозят воздух в барабане, а значит, и первую мембрану, которая приостанавливается, затем начинает снова колебаться, но уже в противотакт с соседкой, отбирая у нее энергию. Мембраны меняются ролями, пока колебания не затухнут.

5. Язык удлиннили, при этом увеличив его массу. Ударяя по колоколу, он начинал двигаться медленнее и уже не в фазе с самим колоколом. Звон был восстановлен.

6. Звук, порождаемый шагами марширующих солдат и оркестром, требует некоторого времени на свое распространение. Скорость же звука в воздухе на много порядков меньше скорости света.

7. Волны, излучаемые басами и барабанами, имеют большую длину волны и, дифрагируя, могут огибать более длинные объекты по сравнению с волнами, излучаемыми флейтами и кларнетами.

8. Звуковые волны, излучаемые разными источниками, некогерентны, поэтому они не интерферируют и не сливаются.

9. Высота тона зависит также от того, насколько сильно вдувается в трубу воздух, подобно тому, как в струне она обуславливается силой ее натяжения.

10. На скрипке можно извлекать множество звуков, зажимая струны в тех или иных местах пальцами, тем самым меняя их длину. В арфе или пианино длина струн неизменна, но зато в них достаточно велико число струн различной длины.

11. Струны виолончели длиннее, массивнее и не так туго натянуты, как у скрипки, поэтому колеблются они медленней, чем скрипичные. Эти невысокие длинноволновые музыкальные тона требуют большего резонирующего объема.

12. Чтобы набор собственных частот инструмента был как можно богаче.

13. Струны на морозе уменьшаются в длине.

14. При натяжении струны увеличивается сила упругости. А это приводит к росту частоты колебаний.

15. Смычок то сцепляется со струной, то отрывается от нее. В моменты скольжения она может свободно колебаться.

16. Чтобы увеличить трение смычка о струну и улучшить условия возбуждения ее колебаний.

Микроопыт

Палец и ободок то зацепляются друг за друга, то проскальзывают, что приводит к поочередной деформации стакана и восстановлению его формы. Это и вызывает колебания, рождающие звук. При попадании в стакан воды растет его масса, а резонансная частота уменьшается, что понижает тон звучания.

Последовательности Сомоса

1. Подставляя $s_n = (An + B)q^{an^2+bn+c}$ в уравнение (1), приходим к равенству

$$\begin{aligned} (A^2(n^2 - 4) + 2ABn + B^2)q^{8a} &= \\ &= \alpha(A^2(n^2 - 1) + 2ABn + B^2)q^{2a} + \\ &\quad + \beta(A^2n^2 + 2ABn + B^2), \end{aligned}$$

которое должно выполняться для всех целых n . Это означает, что коэффициенты при всех степенях n в левой и правой частях должны совпадать. Сравнивая коэффициенты при n^2 и при n^0 , приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} q^{8a} &= \alpha q^{2a} + \beta, \\ (-4A^2 + B^2)q^{8a} &= \alpha(-A^2 + B^2)q^{2a} + \beta B^2. \end{aligned}$$

Равенство коэффициентов при n^1 также сводится к первому уравнению. Решая систему, находим единственное решение: $\alpha = 4q^{6a}$, $\beta = -3q^{8a}$.

2. Из равенств $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ и $F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$ следует, что

$$\begin{aligned} F_{n+2}F_{n-2} &= (F_n + F_{n+1})(F_n - F_{n-1}) = \\ &= F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} + F_n(F_{n+1} - F_{n-1}) = 2F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1}. \end{aligned}$$

3. Если $s_{n+2} = us_{n+1} + vs_n$, то $s_{n-2} = -\frac{u}{v}s_{n-1} + \frac{1}{v}s_n$. Значит,

$$\begin{aligned} s_{n+2}s_{n-2} &= (us_{n+1} + vs_n)\left(-\frac{u}{v}s_{n-1} + \frac{1}{v}s_n\right) = \\ &= s_n^2 - \frac{u^2}{v}s_{n-1}s_{n+1} + s_n\left(\frac{u}{v}s_{n+1} - us_{n-1}\right) = \\ &= s_n^2\left(1 + \frac{u^2}{v}\right) - \frac{u^2}{v}s_{n-1}s_{n+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\alpha = -u^2/v$ и $\beta = 1 + u^2/v$.

4. Если бы последовательность Сомос-(4) имела вид $s_n = (An + B)q^{an^2+bn+c}$, то, согласно задаче 1, выполнялись бы равенства $q^{6a} = 1/4$, $q^{8a} = -1/3$. Но эти два равенства не могут выполняться одновременно, так как из них следовало бы, что $4^{-4} = q^{24a} = -3^{-3}$.

5. Докажем данное утверждение по индукции. Формула $s_n = \alpha^{n(n-1)/2} s_0^{1-n} s_1^n$ дает нужные значе-

ния при $n=0$ и $n=1$. Если предположить, что формула верна для $n=k-1$ и $n=k$ ($k \geq 1$), то для s_{k+1} с помощью рекуррентного соотношения получаем нужное представление:

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= \alpha s_k^2 s_{k-1}^{-1} = \alpha \cdot \alpha^{k(k-1)/2} s_0^{2(1-k)} s_1^{2k} \alpha^{-(k-1)(k-2)/2} s_0^{2k} s_1^{1-k} = \\ &= \alpha^{k(k+1)/2} s_0^{-k} s_1^{k+1}. \end{aligned}$$

6. Как и в задаче 5, равенство проверяется по индукции.

7. С одной стороны, если предположить, что $s_n = n^2$ – это последовательность Сомос-4, то для некоторых α , β и всех целых n должно выполняться равенство

$$n^4 - 8n^2 + 16 = \alpha(n^4 - 2n^2 + 1) + \beta n^4.$$

Сравнение коэффициентов при различных степенях n приводит к несовместной системе уравнений на α и β . Поэтому $s_n = n^2$ – это не последовательность Сомос-4. С другой стороны, это будет последовательность Сомос-6, поскольку возможно подобрать коэффициенты α , β , γ так, чтобы для всех целых n выполнялось равенство

$$n^4 - 18n^2 + 81 = \alpha(n^4 - 8n^2 + 16) + \beta(n^4 - 2n^2 + 1) + \gamma n^4.$$

Сравнение коэффициентов при различных степенях n приводит к системе

$$1 = \alpha + \beta + \gamma, \quad -18 = -8\alpha - 2\beta, \quad 81 = 16\alpha + \beta,$$

единственным решением которой является тройка $(\alpha, \beta, \gamma) = (6, -15, 10)$.

Подстановка $s_n = 2^{n^3}$ в уравнение (1) из статьи приводит к равенству $2^{24n} = \alpha 2^{6n} + \beta$. Такое равенство не может выполняться при всех целых n , так как левая часть при $n \rightarrow \infty$ растет быстрее правой. Аналогично проверяется, что последовательность $s_n = 2^{n^3}$ не может быть последовательностью Сомос- k для любого $k \geq 2$. В частности, это не может быть последовательность Сомос-6.

8. Если в наборах $(n+2, n-2, 1, 1)$, $(n+1, n-1, 2, 2)$, $(n, n, 3, 1)$ произвести замену $n \rightarrow F_n$, то получим наборы, произведения чисел в которых равны $F_{n+2}F_{n-2}$, $F_{n+1}F_{n-1}$ и $2F_n^2$. Эти величины связаны между собой равенством $F_{n+2}F_{n-2} = -F_{n+1}F_{n-1} + 2F_n^2$ (см. задачу 2).

9. Пусть $(s_{n+4}, s_{n+3}, s_{n+2}, s_{n+1}, s_n)$ – это первая пятерка, в которой нашлись не взаимно простые числа. Тогда есть простое p , которое делит s_{n+4} и одно из чисел s_{n+3} , s_{n+2} , s_{n+1} , s_n . Пользуясь рекуррентным соотношением (11), находим, что

если $p \mid s_{n+3}$ или $p \mid s_n$, то $p \mid s_{n+2} s_{n+1}$. Если $p \mid s_{n+2}$ или $p \mid s_{n+1}$, то $p \mid s_{n+3} s_n$. В любом случае $p \mid (s_{n+3} s_n, s_{n+2} s_{n+1})$, что противоречит сделанному предположению.

10. Будем доказывать целочисленность последовательности $\{a_n\}$ по индукции. Предположим, что $n \geq 3$ и числа a_1, a_2, \dots, a_n – целые. Проверим, что a_{n+1} также будет целым числом.

Из начальных условий и рекуррентного соотношения следует, что все числа a_1, a_2, \dots, a_n – нечетные. Это в свою очередь влечет за собой то, что при $k = 2, \dots, n-1$ числа a_{k-1} и a_k взаимно просты. (Если это не так и k – наименьший номер, для которого $d = (a_{k-1}, a_k) > 1$, то из равенства $a_{k-1} a_{k+1} = a_k^2 + 2$ получаем, что $d = 2$. Но это невозможно, поскольку d – нечетное число.)

Значение a_{n+1} находится из равенства $a_{n+1} a_{n-1} = a_n^2 + 2$, и для доказательства целочисленности a_{n+1} достаточно проверить, что $a_n^2 + 2 \equiv 0 \pmod{a_{n-1}}$. Из рекуррентного соотношения находим, что

$$a_n^2 + 2 = \left(\frac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}} \right)^2 + 2 = \frac{a_{n-1}^2 (a_{n-1}^2 + 4) + 2a_{n-1} a_{n+1}}{a_{n-2}^2}.$$

Поскольку $(a_{n-1}, a_{n-2}) = 1$, то после сокращения числителя и знаменателя на a_{n-2}^2 числитель будет по-прежнему делиться на a_{n-1} , а значит, число $(a_n^2 + 2)/a_{n-1}$ будет целым.

11. Утверждение задачи вытекает из равенств

$$s_{n+l} s_{n-l} = \alpha^{l^2} s_n^2 \quad (l \geq 0),$$

$$s_{n+l+1} s_{n-l} = \alpha^{l(l+1)} s_{n+1} s_n \quad (l \geq 0),$$

которые проверяются с помощью формулы (9).

12. Как и в предыдущей задаче, утверждение следует из явных формул (10):

$$s_{n+l} s_{n-l} = \alpha^{2l-2} s_{n+l-2} s_{n-l+2} \quad (l \geq 2),$$

$$s_{n+l+1} s_{n-l} = \alpha^{l(l+1)/2} s_{n+1} s_n \quad (l \geq 0).$$

13. Пусть T_i – период последовательности $\{a_n\}$ по модулю $p_i^{y_i}$ ($i = 1, 2, \dots, l$). Тогда для любого $i = 1, 2, \dots, l$ и любого целого n будет выполняться сравнение $a_{n+T} \equiv a_n \pmod{p_i^{y_i}}$, где $T = [T_1, T_2, \dots, T_l]$ – наименьшее общее кратное всех периодов. Поскольку все числа $p_i^{y_i}$ попарно взаимно просты, то из полученных сравнений следует, что $a_{n+T} \equiv a_n \pmod{m}$ ($n \in \mathbb{Z}$).

14. При простом p последовательность $s_n = p^{n^2}$ удовлетворяет уравнению (1) с $\alpha = 0, \beta = p^8$, но

не является периодической по модулю p^y для любого $y > 0$.

15. а) После подстановки получается уравнение

$$y^2 = x^2 + (T^2 - 4\beta)x^2 + 8\alpha^2 T x + 16\alpha^4.$$

б) Переименуем координату x из предыдущего пункта в x' . Чтобы привести к стандартному виду, достаточно сделать замену $x = x' + (T^2 - 4\beta)/3$. Она приводит к уравнению

$$y^2 = x'^3 + \left(8\alpha^2 T - \frac{(T^2 - 4\beta)^2}{3} \right) x' + \left(\frac{2(T^2 - 4\beta)^3}{27} - \frac{8\alpha^2 T}{3} (T^2 - 4\beta) + 16\alpha^4 \right).$$

16. Остатки, которые числа s_n дают при делении на 5, имеют вид

1, 1, 1, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 2, 3, 2, 1, 1, 1, 1, ...

Таким образом, $s_n \equiv s_{n+16} \pmod{5}$ при $n = 0, 1, 2, 3$. Между четверками последовательных единиц не появилось нулевых остатков. Значит, и каждый следующий остаток можно было вычислять с помощью рекуррентного соотношения

$$s_{n+2} s_{n-2} \equiv s_{n+1} s_{n-1} + s_n^2 \pmod{5}.$$

В частности, это означает, что остатки повторяются с периодом 16 и нулевой остаток при этом никогда не возникает.

Еще одно решение получается, если воспользоваться рекуррентным соотношением (30). По модулю 5 оно превращается в сравнение

$$s_{n+2} s_{n-2} \equiv -s_{n+1} s_{n-2} \pmod{5}.$$

Если предположить, что s_{n+2} – это первое число, делящееся на 5, то из этого сравнения следует, что $s_{n+1} s_{n-2} \equiv 0 \pmod{5}$. Таким образом, на 5 должно делиться и одно из чисел s_{n+1}, s_{n-2} , что противоречит сделанному предположению.

17. Равенства проверяются подстановкой.

18. Инвариантность величины J_n можно проверить так же, как проверялась инвариантность T_n , см. формулы (28)–(29):

$$J_{n+1} - J_n = \frac{h_{n+1} - h_{n-1}}{h_{n-1} h_n h_{n+1}} (h_{n-1} h_n h_{n+1} - \tilde{\alpha} h_n - \tilde{\beta}) = 0.$$

Второй вариант доказательства – это провести рассуждения, аналогичные тем, что были в доказательстве теоремы 4. При этом в качестве следствия получается второе представление для инварианта J .

19. Для доказательства инвариантности I_n , как и в предыдущей задаче, достаточно упростить раз-

ность $I_{n+1} - I_n$:

$$I_{n+1} - I_n = \frac{1}{f_n f_{n+1}} \left(\frac{1}{f_{n-1}} - \frac{1}{f_{n+2}} \right) (f_n - f_n^2 f_{n+1}^2 f_{n+2} - \tilde{\alpha} f_n f_{n+1} - \tilde{\beta}) = 0.$$

Для доказательства второго представления сно- ва можно провести рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 4.

20. Будем доказывать утверждение по индук- ции. Предположим, что s_0, s_1, \dots, s_{n+2} – целые чис- ла, и докажем целочисленность s_{n+3} . Для после- довательности Сомос-(5) $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = 1, I = J = 5$. При переходе к исходным переменным s_n формула (49) преобразуется к виду

$$4s_{n-1}s_n s_{n+1}s_{n+2} = s_{n-2}s_n^2 s_{n+2}^2 + s_{n-1}^2 s_{n+1} s_{n+3} + s_n^3 s_{n+2} + s_{n+1}^3 s_{n-1}.$$

Это равенство можно понимать как формулу для нахождения s_{n+3} , из которой

$$s_{n+3} = (4s_{n-1}s_n s_{n+1}s_{n+2} - s_{n-2}s_n^2 s_{n+2}^2 - s_n^3 s_{n+2} - s_{n+1}^3 s_{n-1}) s_{n-1}^{-2} s_{n+1}^{-1}. \quad (52)$$

Кроме того, у нас имеется исходное рекуррент- ное соотношение, согласно которому

$$s_{n+3} = (s_{n+2}s_{n-1} + s_{n+1}s_n) s_{n-2}^{-1}. \quad (53)$$

Так как $s_{n-1}s_{n+1}$ и s_{n-2} взаимно просты (см. зада- чу 9), то из формул (52)–(53) следует целочис- ленность s_{n+3} .

Аналогичное решение получается, если восполь- зоваться формулой (48). Она приводит к рекур- рентному соотношению

$$s_{n+3} = (4s_{n-1}s_n s_{n+1}s_{n+2} - s_{n-2}^2 s_{n+1} s_{n+2} - s_{n-1}^2 s_{n+2}^2 - s_{n+1}^2 s_{n+1}^2) s_{n-2}^{-2} s_{n-1}^{-1}. \quad (54)$$

После этого остается воспользоваться взаимной простотой чисел $s_{n-1}s_n$ и s_{n-2} и повторить приве- денные выше рассуждения.

21. Как и при доказательстве теоремы 6, будем доказывать периодичность последовательности Сомос-(5) по модулю p^γ , где p – простое и $\gamma \geq 1$. Предположим, что известны значения $s_{n-2}, s_{n-1}, s_n, s_{n+1}, s_{n+2}$ по модулю p^γ . Как и в предыдущей задаче, воспользуемся взаимной простотой чисел $s_{n-1}s_{n+1}$ и s_{n-2} . Одна из двух рекуррентных фор- мул (52)–(53) позволяет найти $s_{n+3} \pmod{p^\gamma}$, значит, последовательность остатков будет пери- одической.

Аналогичное решение получается, если восполь- зоваться формулой (54) и повторить приведен- ные выше рассуждения.

22. В переменных $h_n = f_{n+1}f_n = \frac{s_{n+2}s_{n-1}}{s_{n+1}s_n}$ равенства (45) и (47) переписываются соответственно в виде

$$h_{n-1}h_n h_{n+1} = \tilde{\alpha}h_n + \tilde{\beta}, \quad (55)$$

$$J = h_{n-1} + h_n + \alpha \left(\frac{1}{h_{n-1}} + \frac{1}{h_n} \right) + \frac{\beta}{h_{n-1}h_n}. \quad (56)$$

Преобразуем величину

$$\frac{s_{n-4}s_{n+4}}{s_n^2} = h_{n-3}h_{n-2}h_{n-1}h_n^2 h_{n+1}h_{n+2} = h_{n-1}h_n (\tilde{\alpha}h_{n-2} + \tilde{\beta})(\tilde{\alpha}h_{n+1} + \tilde{\beta}).$$

Исключая h_{n-2} и h_{n+1} с помощью равенств

$$h_{n-2} = \frac{\tilde{\alpha}}{h_n} + \frac{\tilde{\beta}}{h_{n-1}h_n}, \quad h_{n+1} = \frac{\tilde{\alpha}}{h_{n-1}} + \frac{\tilde{\beta}}{h_{n-1}h_n}$$

и учитывая (56), получаем уравнение, эквива- лентное (50):

$$\frac{s_{n-4}s_{n+4}}{s_n^2} = \tilde{\beta}^2 h_{n-1}h_n + \tilde{\alpha}(\tilde{\alpha}^3 + 2\tilde{\beta}^2 + \tilde{\alpha}\tilde{\beta}J) = \alpha^* \frac{s_{n-2}s_{n+2}}{s_n^2} + \beta^*.$$

23. Проверим сначала необходимость условия $I^2 = 4(\tilde{\beta} + \tilde{\alpha}J)$. По теореме 5 последовательность Сомос-4 удовлетворяет уравнению Сомос-5 с ко- эффициентами $\tilde{\alpha} = -\beta$ и $\tilde{\beta} = \alpha^2 + \beta T$. Инварианты I и J этой последовательности (см. задачи 18–19) имеют вид $J = T, I = 2\alpha$. Значит,

$$I^2 = 4\alpha^2 = 4(\alpha^2 + \beta T - \beta T) = 4(\tilde{\beta} + \tilde{\alpha}J).$$

Для доказательства достаточности заметим, что

$$4(\tilde{\beta} + \tilde{\alpha}J) = 4 \left(f_{n-1}f_n f_{n+1} + \frac{\tilde{\alpha}}{f_n} \right) \left(\frac{\tilde{\alpha}}{f_{n-1}} + \frac{\tilde{\alpha}}{f_{n+1}} + \frac{\tilde{\beta}}{f_{n-1}f_n f_{n+1}} \right) = I^2 - \left(f_{n-1}f_n f_{n+1} + \tilde{\alpha} \left(\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f_{n-1}} - \frac{1}{f_{n+1}} \right) - \frac{\tilde{\beta}}{f_{n-1}f_n f_{n+1}} \right)^2,$$

так что

$$I^2 - 4(\tilde{\beta} + \tilde{\alpha}J) = \left(f_{n-1}f_n f_{n+1} + \tilde{\alpha} \left(\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f_{n-1}} - \frac{1}{f_{n+1}} \right) - \frac{\beta}{f_{n-1}f_n f_{n+1}} \right)^2.$$

Поэтому условие $I^2 = 4(\tilde{\beta} + \tilde{\alpha}J)$ означает, что

$$f_{n-1}f_n f_{n+1} + \tilde{\alpha} \left(\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f_{n-1}} - \frac{1}{f_{n+1}} \right) - \frac{\beta}{f_{n-1}f_n f_{n+1}} = 0. \quad (57)$$

Из (19) и (57) получаем уравнение $f_{n-1}f_n f_{n+1} + \frac{\tilde{\alpha}}{f_n} = \frac{I}{2}$, совпадающее с (21) при $\tilde{\alpha} = -\beta$ и $I = 2\alpha$, т.е. последовательность Сомос-4 с па- раметрами $\beta = -\tilde{\alpha}$ и $\alpha = I/2$.

24. При замене $s_{2n} \rightarrow t s_{2n} (t \neq 0)$ переменные f_n меняются следующим образом: $f_{2n} \rightarrow t^{-2} f_{2n}$,

$f_{2n+1} \rightarrow t^2 f_{2n+1}$. Следовательно, значение инварианта J из предыдущей задачи не изменится, а инвариант I перейдет в $I_n(t)$, где

$$I_{2n}(t) = t^2 f_{2n-1} f_{2n} f_{2n+1} + \tilde{\alpha} \left(\frac{t^{-2}}{f_{2n-1}} + \frac{t^2}{f_{2n}} + \frac{t^{-2}}{f_{2n+1}} \right) + \frac{\tilde{\beta} t^{-2}}{f_{2n-1} f_{2n} f_{2n+1}},$$

$$I_{2n+1}(t) = t^{-2} f_{2n} f_{2n+1} f_{2n+2} + \tilde{\alpha} \left(\frac{t^2}{f_{2n}} + \frac{t^{-2}}{f_{2n+1}} + \frac{t^2}{f_{2n+2}} \right) + \frac{\tilde{\beta} t^2}{f_{2n-1} f_{2n} f_{2n+1}}.$$

Согласно задаче 17, значение $I_n(t)$ по-прежнему не будет зависеть от n . Поэтому можно считать, что

$$I_n(t) = I_0(t) = t^2 f_{-1} f_0 f_1 + \tilde{\alpha} \left(\frac{t^{-2}}{f_{-1}} + \frac{t^2}{f_0} + \frac{t^{-2}}{f_1} \right) + \frac{\tilde{\beta} t^{-2}}{f_{-1} f_0 f_1}.$$

Согласно задаче 23, для того чтобы последовательность Сомос-5 была последовательностью Сомос-4, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $I_0^2(t) = 4(\tilde{\beta} + \tilde{\alpha}J)$. Для разрешимости уравнения $At^2 + Bt^{-2} = C$ достаточно, чтобы хотя бы один из коэффициентов A, B был отличен от нуля. В нашем случае это означает, что

$$f_{-1} f_0 f_1 + \frac{\tilde{\alpha}}{f_0} \neq 0 \text{ или } \tilde{\alpha} \left(\frac{1}{f_{-1}} + \frac{1}{f_1} \right) + \frac{\tilde{\beta}}{f_{-1} f_0 f_1} \neq 0.$$

Предположим, что это не так. Тогда

$$\tilde{\alpha}(f_{-1} f_0 + f_0 f_1) + \tilde{\beta} = f_{-1} f_0^2 f_1 + \tilde{\alpha} = 0,$$

$$I_n(t) = 0, J = f_0(f_{-1} + f_1),$$

$$\tilde{\beta} + \tilde{\alpha}J = \tilde{\beta} + \tilde{\beta} f_0(f_{-1} + f_1) = 0,$$

т.е. условие $I_0^2(t) = 4(\tilde{\beta} + \tilde{\alpha}J)$ уже автоматически выполнено.

25. Согласно теореме 5, последовательность Сомос-4 удовлетворяет уравнению Сомос-5 с коэффициентами $\tilde{\alpha} = -\beta$ и $\tilde{\beta} = \alpha^2 + \beta T$. Применяя задачу 22, находим, что последовательность Сомос-4 удовлетворяет уравнению (51) с коэффициентами $\alpha' = \alpha^* = \tilde{\beta}^2 = (\alpha^2 + \beta T)^2$ и $\beta' = \beta^* = \tilde{\alpha}^4 + \tilde{\alpha} \tilde{\beta} (2\tilde{\beta} + \tilde{\alpha}J) = \beta^4 - \beta(\alpha^2 + \beta T)(2\alpha^2 + \beta T)$.

26. По формуле из задачи 25 получаем, что последовательность $\{\tau_n\}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\tau_{n+2} \tau_{n-2} = \alpha' \tau_{n+1} \tau_{n-1} + \beta' \tau_n^2$$

с $\alpha' = \beta' = 1$. Так как первые четыре элемента этой последовательности равны единицам, то это – последовательность Сомос-(4).

Избранные задачи XXVIII Турнира имени А.П.Савина

1. 27 учеников.

Оценка. На числа от 15 до 28 никакой другой номер не делится. Поэтому если бы все ученики ответили «Да», то минимум половина из них дала бы неверный ответ, что противоречит условию.

Пример. Пусть ученики стоят по кругу в следующем порядке:

1, 2, 4, 8, 16, 3, 6, 12, 24, 5, 10, 20, 7, 14, 28, 9, 18, 11, 22, 13, 26, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27,

при этом ученик с номером 1 ответил «Нет», а все остальные – «Да». Тогда 15 ответов были верными, а 13 – неверными.

2. 4 коня.

Оценка. Рассмотрим четыре угловые клетки доски. Для каждой из них должен быть конь, который либо стоит на этой клетке, либо может попасть на нее, сделав не более двух ходов. Докажем, что никакие из этих коней не могут совпадать. Для этого достаточно доказать, что между каждыми двумя угловыми клетками маршрут коня состоит не менее чем из пяти ходов. Угловые клетки, примыкающие к одной стороне доски, имеют разные цвета, поэтому маршрут коня между ними имеет нечетную длину. Каждым ходом конь смещается в одном направлении не более чем на две клетки, значит, трех ходов ему недостаточно, чтобы сместиться на семь клеток. А между противоположными угловыми клетками нужно суммарно сместиться на 14 клеток (на семь по горизонтали и семь по вертикали), при этом конь за один ход сокращает это расстояние не более чем на три клетки, поэтому и в этом случае его маршрут состоит хотя бы из пяти ходов.

Таким образом, утверждение доказано, а это означает, что коней должно быть не меньше четырех.

Пример. Несложно проверить, что расстановка четырех коней на клетках центрального квадрата 2×2 удовлетворяет условию.

3. Покажем, что можно уменьшить количество соседних пар колец разного цвета, оставив при этом одну ось пустой. Тогда в какой-то момент таких пар не останется, а это значит, что на каждой оси будут кольца одного цвета.

Выберем две оси, на которых есть кольца обоих цветов (понятно, что такая ось не может быть только одна). Посмотрим на одноцветные группы колец сверху этих осей. Если на какой-то оси в этой группе больше десяти колец, то перенесем все кольца с нее на свободную ось. Таким образом, можно считать, что на обеих осях в верхней

группе не больше десяти колец. Рассмотрим два случая.

1) Верхние группы колец на осях имеют разные цвета. Пусть сверху первой оси находится m белых колец, а сверху второй — n черных. Без ограничения общности можно считать, что $m \geq n$. Тогда переместим все m белых колец с первой оси на свободную, со второй переложим все n черных колец на первую, после чего вернем на оси белые кольца. В результате на второй оси группа черных колец будет полностью заменена белыми, и количество соседних пар колец разного цвета на ней уменьшится, а на первой оси количество таких пар не увеличится.

2) В верхних группах на осях расположены кольца одного цвета, например белого. Переместим все эти кольца на пустую ось и начнем перекладывать черные кольца со второй оси на первую. Тогда в какой-то момент либо первая ось будет заполнена полностью, либо черные кольца сверху второй оси закончатся. Теперь вернем белые кольца на эти оси. В результате либо на первой оси пропадет группа белых колец, либо на второй оси — группа черных.

4. Пусть O — центр окружности ω (рис.2), а D — точка пересечения отрезка AO с ω . Докажем, что D — это ближайшая точка на окружности ω к точке A . Действительно, для любой другой точ-

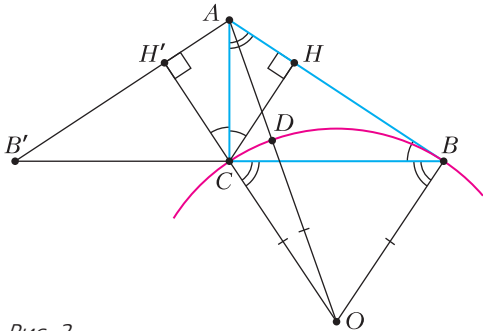


Рис. 2

ки X на ω по неравенству треугольника $AH + OX > AO = AD + OD$, а поскольку $OX = OD$, то $AH > AD$.

Опустим из вершины C высоту CH на гипотенузу AB и отразим треугольник ABC симметрично относительно прямой AC . Пусть точки B и H при этом перейдут в точки B' и H' . Тогда $\angle OCB + \angle ACH' = \angle OBC + \angle ACH = (90^\circ - \angle ABC) + (90^\circ - \angle CAH) = 90^\circ$, поэтому точки O , C и H' лежат на одной прямой. Значит, треугольник AOH' прямоугольный, откуда $OA > OH'$, а так как $AO = AD + OD$, $OH' = OC + CH' = OC + CH$ и $OD = OC$, то $AD > CH$, что и требовалось доказать.

5. Не могло.

Будем называть комнату *правдивой*, если в ней рыцарей не меньше, чем лжецов, и *лживой* в противном случае. Заметим, что в правдивую комнату мог войти только лжец, иначе вошедший рыцарь соврал бы. При этом лжец не мог войти в комнату, если там рыцарей и лжецов поровну, поэтому после его прихода комната оставалась правдивой. Аналогично, в лживую комнату мог войти только рыцарь, при этом она оставалась лживой.

Из сказанного следует, что если изначально обе комнаты были правдивые, то между ними могли переходить только лжецы, при этом комнаты оставались правдивыми. Значит, ни один рыцарь не мог перейти из одной комнаты в другую, однако рыцари в правдивых комнатах точно были. Аналогично, если обе комнаты были лживые, то ни один лжец не мог сделать переход.

Если же комнаты были разного типа и каждый человек совершил ровно один переход, то в конце тип каждой комнаты должен был совпадать с начальным типом другой комнаты, т.е. они должны были поменять свой тип. Рассмотрим первый момент, когда одна из комнат стала другого типа. Это могло произойти только в результате ухода из нее одного человека, поэтому вторая комната в этот момент не меняла свой тип. Но тогда, как показано выше, далее эта комната уже не могла стать другого типа.

6. Запишем в белых и черных кубиках числа 1 и -1 соответственно. Тогда из условия следует, что в каждом еже сумма чисел положительна. Рассмотрим все восемь ежей и просуммируем числа в них. Эта сумма также положительна, и в ней каждый кубик из центрального куба $2 \times 2 \times 2$ учтен четыре раза, а каждый кубик, примыкающий к грани большого куба в центральном квадрате 2×2 , — один раз. Теперь рассмотрим семь кубов $2 \times 2 \times 2$: центральный и шесть примыкающих к граням большого куба в центральных квадратах 2×2 . Заметим, что если просуммировать числа в них, то все кубики будут учтены столько же раз, сколько и в сумме для ежей. Следовательно, эта сумма положительна, поэтому в каком-то из кубов сумма тоже положительна, а это означает, что в нем белых кубиков больше, чем черных.

7. Понятно, что два гнома не могли остаться жить в своих домах, иначе они оба раза либо были соседями, либо не были ими, что противоречит условию.

Предположим, что все гномы переехали в другие дома. Построим граф, в котором вершины соответствуют гномам, красные ребра соединяют гномов, которые были соседями вначале, а синие ребра — гномов, которые стали соседями после

переезда. Из условия следует, что каждые две вершины соединены ровно одним ребром. Расставим на ребрах стрелочки, показывающие, кто в чей дом переехал. Тогда все ребра со стрелочками образуют один или несколько циклов, причем каждый гном включен в один цикл. Так как число гномов нечетно, то один из циклов имеет нечетную длину. Но при обходе каждого цикла цвета ребер должны чередоваться: если гномы раньше были соседями, то после переезда они заняли дома следующих гномов в цикле и при этом перестали быть соседями, и наоборот. Значит, все циклы имеют четную длину. Противоречие.

Таким образом, ровно один гном не сменил место жительства.

8. Неверно.

Рассмотрим на плоскости треугольную решетку. Построим на ней равносторонний шестиугольник, состоящий из четырех треугольников разбиения. Из шести таких шестиугольников можно сложить правильный шестиугольник, как показано в центре на рисунке 3. Добавим вокруг него еще ряд таких же шестиугольников, их можно покрасить так, чтобы не появилось двух соседних шестиугольников одного цвета. Добавляя аналогично ряды дальше, можно получить правильный шестиугольник, разбитый требуемым образом на шестиугольники, количество которых больше любого наперед заданного числа.

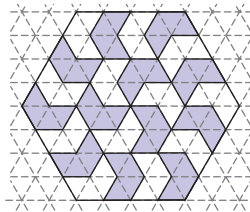


Рис. 3

9. Один ученик при $N \leq 2$, два ученика при $N = 3$, $N - 2$ ученика при $N \geq 4$.

Оценка. При $N = 1$ оценка очевидна. При $N \geq 2$ если есть ученик, сходивший на все олимпиады, то больше детей в классе быть не может. Это сразу доказывает оценку для $N = 2$ и $N = 3$.

Пусть $N \geq 4$. Предположим, что в классе $N - 1$ ученик. Тогда они могли сходить только на различное число олимпиад от 1 до $N - 1$. Если Олег участвовал в одной олимпиаде, то больше на нее никто не ходил. Но тогда Дима, который сходил на две олимпиады, был на тех же олимпиадах, которые посетил Максим, сходивший на $N - 1$ олимпиаду. Противоречие. Следовательно, в классе не больше $N - 2$ учеников.

Пример. Пронумеруем олимпиады числами от 1 до N . При $N \leq 5$ ученики могли сходить на следующие олимпиады:

при $N = 1$ и $N = 2$ один ученик сходил на олимпиаду №1;

при $N = 3$ и $N = 4$ один ученик сходил на олимпиаду №1, второй – на олимпиады №2 и №3; при $N = 5$ один ученик сходил на олимпиаду №1, второй – на олимпиады №2 и №3, третий – на олимпиады №2, №4, №5.

Теперь покажем, как из примера для N олимпиад и $N - 2$ учеников, которые ходили на различное число олимпиад от 1 до $N - 2$, получить пример для $N + 2$ олимпиад и N учеников. Пусть в классе добавились два ученика A и B , при этом A сходил только на олимпиаду $N + 1$, все прежние ученики добавили к списку олимпиад, на которых они были, олимпиаду $N + 2$, а B сходил на все олимпиады от 1 до N . Тогда ученики снова посетили различное число олимпиад от 1 до N . При этом для всех прежних учеников остались олимпиады, по которым они различаются. Никто, кроме A , не ходил на олимпиаду $N + 1$. Все прежние ученики участвовали в олимпиаде $N + 2$, на которой не был B . Он же, в свою очередь, посетил все олимпиады от 1 до N , а каждый из прежних учеников не был хотя бы на одной из них. Таким образом, построенный пример удовлетворяет всем условиям.

10. Может.

Первым вопросом Саша узнает сумму $B + J$. Если его гипотеза верна, то эта сумма равна $1 + 9 = 10$, т.е. BA . В противном случае сумма либо однозначна, либо ее первая цифра не равна B . Значит, после первого вопроса Саша убедится, что буквы A, B, J действительно означают 0, 1, 9.

Вторым вопросом Саша узнает сумму $C + G + H + I$. При справедливости гипотезы она равна $2 + 6 + 7 + 8 = 23$, т.е. CD . Так как сумма четырех различных цифр, отличных от 9, меньше 30, то Саша узнает, что буквой C зашифрована цифра 2. Кроме того, сумма трех остальных букв не может быть больше $6 + 7 + 8 = 21$, а буква D не равна 0, 1, 2. Поэтому D действительно означает 3, буквы G, H, I в каком-то порядке соответствуют цифрам 6, 7, 8, а оставшиеся буквы $E, F - 4, 5$.

Третьим вопросом Саша узнает сумму $D + F + I$. Если его предположение верно, то сумма равна $3 + 5 + 8 = 16$, т.е. BG . В любом другом случае сумма меньше 16, и последняя буква не может быть равна G . Таким образом, Саша убедится, что все оставшиеся буквы зашифрованы в правильном порядке.

Если хотя бы один из результатов будет отличаться от рассмотренных, то Саша опровергнет свою гипотезу.

11. При m и n , не кратных 3.

Заменим цвета числами 0, 1, 2. Тогда перекрашивание уголка – это прибавление 1 по модулю 3 к трем числам. Значит, после каждой операции

сумма всех чисел в таблице по модулю 3 не меняется.

Если хотя бы одно из чисел m или n делится на 3, то возьмем таблицу, в которой одно число равно 1, а все остальные – нули. В конце мы должны получить таблицу из одинаковых чисел, т.е. сумма чисел должна стать кратна 3. Но в начальной позиции сумма равна 1, поэтому сделать это не получится.

Пусть оба числа m и n не делятся на 3. Докажем, что в этом случае таблицу всегда можно сделать одноцветной. Вычислим сумму чисел в исходной позиции. Заметим, что какой бы остаток при делении на 3 она ни давала, можно заполнить таблицу либо нулями, либо единицами, либо двойками и получить сумму с тем же остатком. Это позволяет сразу выбрать цвет, в который мы будем перекрашивать таблицу.

Сначала перекрасим в нужный цвет нижнюю строку, используя уголки, которые занимают в ней одну клетку. После этого аналогично перекрасим вторую снизу строку, затем третью и т.д. до предпоследней. Для покраски верхней строки будем действовать следующим образом. Возьмем уголок, занимающий левую верхнюю клетку и две клетки в предпоследней строке, и перекрасим его несколько раз, чтобы левая верхняя клетка стала нужного цвета. Затем возьмем уголок, занимающий вторую клетку в верхней строке и те же две клетки в предпоследней, и с его помощью вернем этим двум клеткам нужный цвет. В итоге мы перекрасим верхнюю левую клетку, не испортив раскраску предыдущей строки. Двигаясь так слева направо, перекрасим все клетки верхней строки, кроме последней, а она автоматически окажется нужного цвета.

12. а) Предположим, что на всех гранях разное количество уголков. На каждой грани 24 единичных отрезка, из которых 12 принадлежат только этой грани. Значит, каждая грань содержит от 6 до 12 уголков. На этом отрезке семь чисел, их сумма равна $6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 63$, а так как всего уголков 54, то «лишним» является число 9.

Поставим каркас куба на стол так, чтобы внизу оказалась грань, на которой 12 уголков. Они покрывают целиком ребра этой грани, поэтому нижний ряд из 12 вертикальных отрезков на боковых гранях составлен из 12 уголков, горизонтальные стороны которых находятся над этим рядом. Тогда и второй ряд на боковых гранях составлен таким же способом, а значит, и третий тоже. Но это означает, что на всех боковых гранях по девять уголков. Противоречие.

б) Поставим каркас куба на стол одной гранью к

нам. Покрасим все вертикальные отрезки в синий цвет, все отрезки, которые идут слева направо, – в красный, а все, которые идут спереди назад, – в зеленый. Каждый уголок состоит из отрезков двух разных цветов. Пусть сине-зеленых уголков x , сине-красных – y , а красно-зеленых – z . Тогда всего на каркасе $x + y$ синих отрезков, $y + z$ красных и $z + x$ зеленых, а так как отрезков всех цветов поровну, то $x + y = y + z = z + x$. Значит, $x = y = z$, т.е. уголков всех типов поровну, а именно, по $96 : 3 = 32$.

Предположим, что на всех гранях разное количество уголков. На каждой грани 40 единичных отрезков, из которых 24 принадлежат только этой грани. Значит, каждая грань содержит от 12 до 20 уголков. Из доказанного выше следует, что на парах противоположных граней количества уголков должны принадлежать одной из пар (12, 20), (13, 19), (14, 18) или (15, 17).

Рассмотрим две грани с самым маленьким количеством уголков. Они находятся в разных парах, поэтому имеют общее ребро. Без ограничения общности будем считать, что это ребро синее. На этих двух гранях не больше $13 + 14 = 27$ уголков, каждый из них содержит один синий отрезок. При этом они должны содержать все внутренние синие отрезки граней и общее ребро, а это суммарно 28 отрезков. Противоречие.

13. Можно.

Пронумеруем строки поля числами от 1 до 111 снизу вверх, а столбцы – слева направо. Начнем с 11-й строки и будем двигаться вверх, делая в каждой строке десять выстрелов в столбцы 11, 21, ..., 101. Предположим, что, действуя так, мы не попадем в корабль.

Выстрелы по одной строке мы делаем с шагом 10, а корабль перемещается только на одну клетку, поэтому для каждой строки есть хотя бы один выстрел, который производится в столбец, где находится корабль. В такой момент для выстрела по 11-й строке корабль должен быть полностью выше этой строки, а для выстрела по 101-й строке – полностью ниже. Значит, есть две соседние строки, для которых при таком выстреле корабль сначала находится выше первой из них, а потом ниже второй. Для этого корабль должен сместиться вниз не менее 11 раз. Тогда такие выстрелы не могут быть произведены в один столбец, поскольку в один и тот же столбец делается каждый десятый выстрел. Значит, выстрел по второй строке должен быть правее, причём хотя бы на 20 клеток, однако для этого корабль должен сместиться еще хотя бы десять раз по горизонтали, а за это время мы перейдем уже на строку выше. Противоречие.

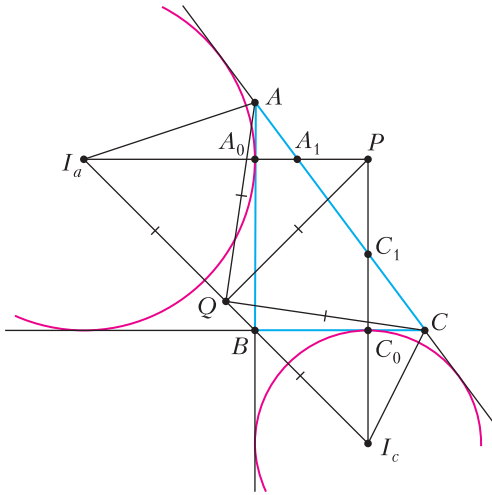


Рис. 4

14. Точки I_a, B, I_c лежат на одной прямой – биссектрисе внешних углов B треугольника ABC (рис.4). Треугольник I_aPI_c равнобедренный прямоугольный, так как $\angle PI_aI_c = \angle PI_cI_a = 45^\circ$. Треугольник I_aAI_c прямоугольный, поскольку AI_a и AI_c – биссектрисы смежных углов. Аналогично, треугольник I_aCI_c прямоугольный.

Пусть Q – середина отрезка I_aI_c . Тогда точка Q является серединой гипотенуз трех указанных выше прямоугольных треугольников, поэтому $QI_a = QI_c = QP = QA = QC$. При этом $\angle AI_aB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ACB$ как угол между биссектрисами внешних углов треугольника ABC , поэтому $\angle I_aQA = 180^\circ - 2\angle AI_aQ = \angle ACB$. Аналогично, $\angle I_cQC = \angle CAB$, значит, $\angle AQC = 180^\circ - \angle I_aQA - \angle I_cQC = 180^\circ - \angle ACB - \angle CAB = 90^\circ$. Таким образом, I_aQP, I_cQP и AQC – равные равнобедренные прямоугольные треугольники, поэтому точка Q равноудалена от прямых PI_a, PI_c и AC . Следовательно, она является центром вписанной окружности треугольника A_1PC_1 . А так как высота треугольника AQC , проведенная из точки Q , является и медианой, то ее основание является серединой отрезка AC и лежит на данной окружности.

15. Не могут.

Предположим, что выписанные числа образуют арифметическую прогрессию $a, a + d, a + 2d, \dots, a + 6065d$. Тогда расстояния от каждой точки до сторон треугольника представляют собой тройку вида $(a + k_1d, a + k_2d, a + k_3d)$. Как известно, для любой точки внутри равностороннего треугольника сумма расстояний до его сторон фиксирована. Следовательно, для всех точек суммы $a + k_1d + a + k_2d + a + k_3d = 3a + (k_1 + k_2 + k_3)d$ рав-

ны, а значит, равны и суммы $k_1 + k_2 + k_3$. Всего таких сумм 2022, поэтому, если сложить их все, получится четное число. С другой стороны, все k_i – это перестановка чисел от 0 до 6065, поэтому их сумма равна $\frac{6065 \cdot 6066}{2} = 6065 \cdot 3033$, т.е. нечетна. Противоречие.

16. Пронумеруем монеты по кругу числами от 1 до 20 и положим на левую чашу весов группу (2, 4, 6, 8, 10), а на правую – (12, 14, 16, 18, 20) (рис.5).

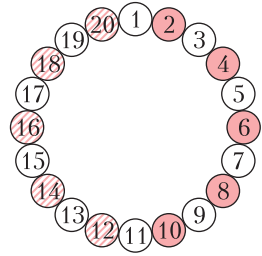


Рис. 5

1) Если веса оказались в равновесии, то обе фальшивые монеты либо на весах, либо не участвуют во взвешивании. В любом случае они имеют номер одной четности и не могут быть соседними.

2) В случае неравенства все монеты на более тяжелой чаше настоящие. Будем считать, что это правая чаша. Тогда хотя бы одна из монет на левой чаше фальшивая. Сравним группы (1, 5, 9) и (3, 7, 11).

2.1) Если они равны, то все монеты на весах настоящие, поэтому фальшивые монеты не являются соседними.

2.2) Если одна из групп легче, например (1, 5, 9), то вторая фальшивая монета в ней, а фальшивыми соседними монетами могут быть только следующие пары: (1, 2), (4, 5), (5, 6), (8, 9) и (9, 10). Третьим взвешиванием сравним группы (4, 6, 9) и (5, 8, 10). В случае равенства либо на весах обе фальшивые монеты, т.е. это могут быть пары (4, 5), (5, 6), (8, 9) или (9, 10), либо ни одной, тогда фальшивые монеты – это пара (1, 2). В любом случае фальшивые монеты соседние. В остальных случаях фальшивые монеты лежат не рядом.

Заключительный этап LVI Всероссийской олимпиады школьников по физике

9 класс

3. 1) Пусть N – мощность тепловых потерь и за малое время Δt кристаллизуется Δm льда: $N\Delta t = \Delta m\lambda$. Эта масса занимала объем ΔV_B в жидком состоянии и ΔV_L в твердом: $\Delta m = \rho_B\Delta V_B = \rho_L\Delta V_L$. Следовательно, изменение объема

$$\Delta V = \Delta V_L - \Delta V_B = \frac{\Delta m}{\rho_L} - \frac{\Delta m}{\rho_B} = \Delta m \frac{\rho_B - \rho_L}{\rho_L\rho_B} > 0.$$

Значит, поршень поднялся вверх. Мощность тепловых потерь через боковую поверхность цилиндра пропорциональна площади этой поверхности и разности температур воды и окружающей среды: $N = \alpha h \cdot 2\pi R (t_0 - t)$. Скорость подъема поршня

$$v = \frac{\Delta h}{\Delta \tau} = \frac{\Delta V}{\pi R^2 \Delta \tau} = \frac{\Delta m (\rho_B - \rho_L)}{\Delta \tau \rho_B \rho_L \pi R^2} = \frac{N (\rho_B - \rho_L)}{\lambda \rho_B \rho_L \pi R^2} = \frac{2\alpha (\rho_B - \rho_L)}{\lambda \rho_B \rho_L R} h (t_0 - t).$$

Так как скорость постоянна, используем выражение для нее в начальный момент времени:

$$v = \frac{2\alpha (\rho_B - \rho_L)}{\lambda \rho_B \rho_L R} h_1 (t_0 - t_1).$$

2) Равномерное движение поршня может продолжаться вплоть до кристаллизации всей воды. Максимальное изменение объема системы

$$\Delta V_0 = \Delta m_0 \frac{\rho_B - \rho_L}{\rho_B \rho_L} = \pi R^2 h_1 \frac{\rho_B - \rho_L}{\rho_L}.$$

Искомая продолжительность процесса

$$\tau_{\max} = \frac{\Delta V_0}{\pi R^2 v} = \frac{\lambda \rho_B R}{2\alpha (t_0 - t_1)}.$$

3) Из условий $h(t_0 - t) = h_1 (t_0 - t_1)$ и $h(\tau) = h_1 + v\tau$ можно получить искомую зависимость:

$$t = t_0 - (t_0 - t_1) \frac{h_1}{h_1 + v\tau}.$$

4) $t_{\text{к}} = t_0 - (t_0 - t_1) \frac{\rho_L}{\rho_B}.$

5. 1) Траектория камня представляет собой участок параболы ветвями вниз, поэтому максимальное значение α_1 реализуется, если в момент времени t_1 скорость камня \vec{v}_1 направлена прямо на Леопольда и образует угол α_1 с горизонтом. Построим векторный треугольник скоростей для данного момента времени (рис.6). Из теоремы синусов

$$\frac{gt_1}{\sin(\pi/2 + \alpha_1 - \alpha_0)} = \frac{v_0}{\sin(\pi/2 - \alpha_1)},$$

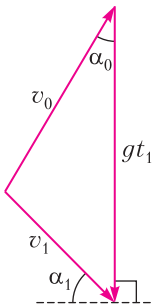


Рис. 6

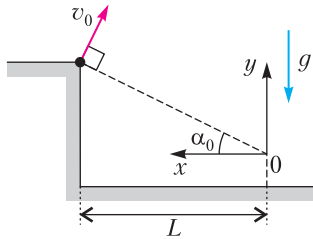


Рис. 7

откуда

$$t_1 = \frac{v_0 \sin(\pi/2 + \alpha_1 - \alpha_0)}{g \sin(\pi/2 - \alpha_1)} \approx 1,24 \text{ с.}$$

2) Введем систему координат xy с началом в месте расположения глаз Леопольда (рис.7). Тогда

$$x(t) = L - v_0 \sin \alpha_0 \cdot t, \\ y(t) = Lt \operatorname{tg} \alpha_0 + v_0 \cos \alpha_0 \cdot t - \frac{gt^2}{2}, \\ \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{y(t_1)}{x(t_1)} = \frac{Lt \operatorname{tg} \alpha_0 + v_0 \cos \alpha_0 \cdot t_1 - gt_1^2/2}{L - v_0 \sin \alpha_0 \cdot t_1},$$

откуда

$$L = \frac{v_0 t_1 (\cos \alpha_0 + \operatorname{tg} \alpha_1 \sin \alpha_0) - gt_1^2/2}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_0} \approx 24,3 \text{ м.}$$

10 класс

3. Задача аналогична задаче Ф2768 «Задачника «Кванта».

4. 1) Сила взаимодействия заряда и полусферы направлена вдоль оси вращения. Пусть α – угол между осью вращения и линией, проведенной из центра полусферы в ее некоторую точку, а ds – малый элемент поверхности полусферы вблизи данной точки. Тогда (рис.8)

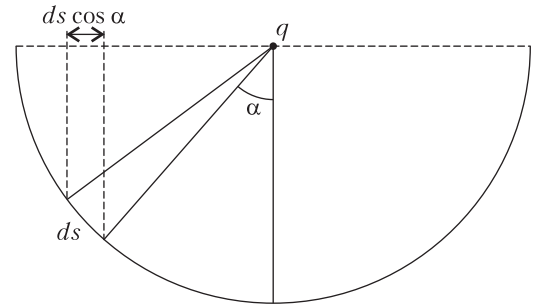


Рис. 8

$$dF_y = dF \cos \alpha = q \frac{\sigma ds}{4\pi \epsilon_0 r^2} \cos \alpha = \frac{q\sigma}{4\pi \epsilon_0 r^2} ds \cos \alpha.$$

Величина $ds \cos \alpha$ представляет собой проекцию элемента площади ds на основание. Поскольку r постоянна,

$$F = \frac{q\sigma \sum ds \cos \alpha}{4\pi \epsilon_0 r^2},$$

где $\sum ds \cos \alpha = \pi r^2$ – площадь круга в основании полусферы. Следовательно,

$$F = \frac{q\sigma}{4\epsilon_0}.$$

2) Поскольку $d \ll R$, электрическое поле заряда q в зазоре между полусферами можно считать постоянным по модулю и равным $E_q = q/(4\pi \epsilon_0 R^2)$.

Тогда напряжение, создаваемое зарядами полусфер, также постоянно и равно

$$U_Q = U - U_q = U - \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Мысленно достроим полусферы до сфер, равномерно заряженных по поверхности одинаковыми по величине и противоположными по знаку зарядами $\pm 2Q$. Внутри сферы радиусом R электрическое поле равняется нулю во всех точках, а в зазоре между ними

$$E_{\text{зая}} = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Поскольку $d \ll R$, создаваемое добавленными полусферами электрическое поле пренебрежимо мало по сравнению с полным электрическим полем $E_{\text{зая}}$ (при достаточно больших расстояниях от краев эти полусферы ведут себя как одна с нулевым суммарным зарядом).

Воспользовавшись выражением для электрического поля в зазоре, получим

$$U_Q = \frac{Qd}{2\pi\epsilon_0 R^2} = U - \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 R^2},$$

откуда

$$Q = \frac{2\pi\epsilon_0 R^2 U}{d} - \frac{q}{2}.$$

3) Поскольку заряды полусфер равны $\pm Q$, а их площади равны соответственно $2\pi R^2$ и $2\pi(R+d)^2$, для силы F электростатического взаимодействия заряда q с полусферами получаем

$$F = \frac{qQ}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+d)^2} \right) = \frac{qQ}{8\pi\epsilon_0 R^2} \left(1 - \left(1 + \frac{d}{R} \right)^{-2} \right) \approx \frac{qQd}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

В момент начала движения $F = mg$, откуда

$$Q_{\text{max}} = \frac{4\pi\epsilon_0 R^3 mg}{qd},$$

$$U_{\text{max}} = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 R^2} \left(1 + \frac{8\pi\epsilon_0 R^3 mg}{q^2 d} \right).$$

4) Поскольку напряжение U между обкладками изменяется медленно, изменение электростатической энергии системы ΔW равняется работе источника по перемещению зарядов между обкладками. Для ее определения построим график зависимости $U(Q)$ (рис.9). Работа источника равна площади под этим графич-

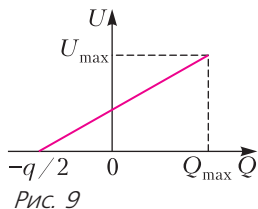


Рис. 9

ком при изменении заряда полусфер от $-q/2$ до Q_{max} . Эта площадь, в свою очередь, равна площади треугольника со сторонами U_{max} и $Q_{\text{max}} + q/2$:

$$A_{\text{ист}} = \frac{U_{\text{max}}}{2} \left(Q_{\text{max}} + \frac{q}{2} \right),$$

$$\Delta W = \frac{q^2 d}{16\pi\epsilon_0 R^2} \left(1 + \frac{8\pi\epsilon_0 R^3 mg}{q^2 d} \right)^2.$$

5. 1) Перейдем в неинерциальную систему отсчета, связанную с центром масс системы. Рассмотрим силы, действующие на твердое тело «стержень + шайба 2» (рис.10). Со стороны стенки на шайбу действует сила $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$, приложенная к точке контакта со стенкой. На свободный конец стержня действует сила \vec{F} со стороны шайбы 1. Также действует сила инерции, приложенная к центру масс тела

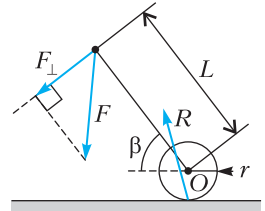


Рис. 10

(центру шайбы). Запишем закон сохранения энергии. Кинетическая энергия тела в этой системе отсчета стремится к нулю, так как центр шайбы неподвижен, ее размер мал, а стержень невесомый. Тогда суммарная работа всех сил, а как следствие, и суммарная мощность равны нулю. Сила инерции работу не совершает (центр масс не движется). Мощность силы \vec{F} равна $P_F = F_{\perp} \omega L$, где ω – угловая скорость вращения стержня, мощность силы \vec{R} равна $P_R = -F_{\text{тр}} \omega r$ (знаки написаны в предположении вращения стержня против часовой стрелки). Тогда

$$F_{\perp} \omega L - F_{\text{тр}} \omega r = 0, \quad \frac{F_{\perp}}{F_{\text{тр}}} = \frac{r}{L} \ll 1.$$

Следовательно, силу \vec{F} можно считать направленной вдоль стержня. Теперь рассмотрим только стержень. На него действует сила \vec{F} со стороны шайбы 1 и сила \vec{F}' со стороны шайбы 2. Так как стержень невесомый, то $\vec{F} + \vec{F}' = \vec{0}$, откуда $\vec{F}' = -\vec{F}$, а значит, направлена вдоль стержня.

2) Поскольку силы, действующие со стороны стержня на шайбы, можно считать направленными вдоль стержня, то в процессе соударения скорость шайбы 1 всегда направлена вдоль стержня. Пусть v_1 и ω – скорость шайбы 1 и угловая скорость вращения стержня сразу после соударения соответственно. Поскольку стержень жесткий, компонента скорости шайбы 2, направленная вдоль стержня, также равна v_1 , а компонента скорости, перпендикулярная стержню, равна ωL . Пусть m – масса одной шайбы. Поскольку тре-

ния между шайбой 2 и стенкой нет, то для системы выполняется закон сохранения импульса в проекции на горизонтальную ось, направленную вдоль стенки:

$$2mv_0 \sin \alpha = mv_1 \sin \alpha + m(v_1 \sin \alpha + \omega L \cos \alpha),$$

$$v_1 = v_0 - \frac{\omega L}{2 \operatorname{tg} \alpha}.$$

Так как удар упругий, для системы выполняется закон сохранения механической энергии:

$$\frac{2mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{m(v_1^2 + \omega^2 L^2)}{2}, \quad v_1^2 = v_0^2 - \frac{\omega^2 L^2}{2}.$$

Приравняв выражения для v_1^2 , получим

$$v_1^2 = v_0^2 - \frac{v_0 \omega L}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\omega^2 L^2}{4 \operatorname{tg}^2 \alpha} = v_0^2 - \frac{\omega^2 L^2}{2},$$

откуда

$$\omega = \frac{4v_0 \operatorname{tg} \alpha}{L(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha)} \approx 4,33 \text{ рад/с.}$$

3) Сразу после абсолютно неупругого соударения шайбы 2 со стенкой ее скорость направлена вдоль стенки. Обозначим ее v_2 . Приравняв проекции скоростей шайб на ось, направленную вдоль стержня, получим

$$v_2 \sin \alpha = v_1.$$

Компонента скорости шайбы 2, перпендикулярная стержню, равна $v_{\perp} = v_2 \cos \alpha$, поэтому для угловой скорости вращения стержня имеем

$$\omega = \frac{v_{\perp}}{L} = \frac{v_2 \cos \alpha}{L}.$$

Изменения импульса системы в проекции на горизонтальную и вертикальную оси x и y составляют

$$\Delta p_x = mv_2 + mv_1 \sin \alpha - 2mv_0 \sin \alpha,$$

$$\Delta p_y = 2mv_0 \cos \alpha - mv_1 \cos \alpha.$$

Подставляя связь v_1 и v_2 , получим

$$\Delta p_x = mv_2(1 + \sin^2 \alpha) - 2mv_0 \sin \alpha,$$

$$\Delta p_y = 2mv_0 \cos \alpha - mv_2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Определим скорость v_2 , считая, что шайба 2 всегда проскальзывает по стенке. Критерием правильности рассуждений является неотрицательное значение v_2 . На систему в плоскости рисунка действуют две внешние силы: $N = F_y$ и $F_{\text{тр}} = \mu N = -F_x$. Поскольку силы связаны прямой пропорциональностью, имеем

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta p_y} = \frac{F_x}{F_y} = -\frac{F_{\text{тр}}}{N} = -\mu = \frac{v_2(1 + \sin^2 \alpha) - 2v_0 \sin \alpha}{2v_0 \cos \alpha - v_2 \sin \alpha \cos \alpha},$$

откуда

$$v_2 = \frac{2v_0(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{1 + \sin^2 \alpha - \mu \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2v_0(\operatorname{tg} \alpha - \mu)}{(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha - \mu \operatorname{tg} \alpha) \cos \alpha}.$$

Величина v_2 является неотрицательной, если $\mu \leq \operatorname{tg} \alpha$ и $\mu > 2 \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$. Невозможность постоянного проскальзывания при $\mu > 2 \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$ ясна чисто из физических соображений. Таким образом, условие постоянного проскальзывания шайбы 2 следующее:

$$\mu \leq \operatorname{tg} \alpha.$$

Обратим внимание, что $\mu_1 < \operatorname{tg} \alpha$, а $\mu_2 > \operatorname{tg} \alpha$. Тогда при коэффициенте трения $\mu_1 = 0,2$ для угловой скорости стержня сразу после удара получим

$$\omega_1 = \frac{2v_0(\operatorname{tg} \alpha - \mu_1)}{L(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha - \mu_1 \operatorname{tg} \alpha)} \approx 1,52 \text{ рад/с.}$$

При $\mu \geq \operatorname{tg} \alpha$ шайба 2 в некоторый момент соударения прекращает движение вдоль стенки и далее по ней не проскальзывает (покажите это самостоятельно). Тогда при $\mu_2 = 0,6$

$$\omega_2 = 0.$$

11 класс

2. 1) Пусть \vec{R} – радиус-вектор, проведенный из центра шара в точку на его поверхности. Тогда для электрического поля на поверхности шара получим

$$\vec{E} = \frac{Q\vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

Далее воспользуемся цилиндрическими координатами r, z . Начало координат совпадает с центрами кольца и шара, ось z направлена вдоль оси вращения системы, а r обозначает расстояние от рассматриваемой точки до оси z . Определим электрическое поле кольца на его оси вращения. Рассмотрим окружность радиусом r' с зарядом dq , распределенным равномерно по ее периметру. Тогда на оси вращения окружности в точке с координатой z

$$dE_z = \frac{z dq}{4\pi\epsilon_0 (r'^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Поскольку $z < R \ll r_1, r_2$, то при любых значениях z справедливо приближение

$$dE_z \approx \frac{z dq}{4\pi\epsilon_0 r'^3}.$$

Учитывая, что для кольца $dq = 2\pi r' dr' \sigma$, его электрическое поле на оси z

$$E_z = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r' dr'}{r'^3} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Для определения компоненты E_r , перпендикулярной оси вращения, воспользуемся теоремой Гаусса для цилиндра радиусом r и высотой $2h$, соосного с кольцом:

$$\Phi = \Phi_{\text{осн}} + \Phi_{\text{бок}} = 0,$$

где $\Phi_{\text{осн}}$ и $\Phi_{\text{бок}}$ – потоки электрического поля кольца через основания цилиндра и боковую поверхность соответственно. Поскольку компонента электрического поля кольца E_z практически не зависит от r , а компонента электрического поля кольца E_r практически не зависит от z , то

$$\Phi_{\text{осн}} = 2\pi r^2 E_z, \quad \Phi_{\text{бок}} = 2\pi r \cdot 2h E_r, \quad E_r = -\frac{E_z r}{2z}.$$

Подставляя выражение для E_z , получим

$$E_r = -\frac{\sigma r}{4\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Введем угол α между плоскостью кольца и радиус-вектором \vec{R} . Тогда $r = R \cos \alpha$, $z = R \sin \alpha$. Для компонент электрического поля на поверхности шара получим

$$E_z = \frac{R \sin \alpha}{\epsilon_0} \left(\frac{Q}{4\pi R^3} + \frac{\sigma}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right),$$

$$E_r = \frac{R \cos \alpha}{\epsilon_0} \left(\frac{Q}{4\pi R^3} - \frac{\sigma}{4} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right).$$

Величина электрического поля определяется выражением $E = \sqrt{E_z^2 + E_r^2}$ и достигает экстремальных значений при $\alpha = 0, \pi/2$. Поскольку заряды кольца и шара положительные,

$$E_1 = E(0) = \left| \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} - \frac{\sigma R}{4\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right|,$$

$$E_2 = E(\pi/2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} + \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Так как $E_1 < E_2$, окончательно находим

$$\left| \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} - \frac{\sigma R}{4\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right| \leq E \leq \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} + \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

2) Для того чтобы электрическое поле можно было считать направленным вдоль оси z вращения системы, компонента E_r электрического поля должна обращаться в ноль, чему соответствует единственное значение σ , равное

$$\sigma = \frac{Q r_1 r_2}{R^3 (r_2 - r_1)}.$$

5. 1) Пусть m – масса шайбы. В плоскости доски на шайбу действуют компонента силы тяжести $mg \sin \alpha$, а также сила трения $F_{\text{тр}} = \mu mg \cos \alpha = \text{tg} \alpha \cdot mg \cos \alpha = mg \sin \alpha$. Изобразим на рисунке 11 компоненту силы тяжести и силу трения, соответствующие углу φ между направлением скорости шайбы и осью y , тогда $R = 2mg \sin \alpha \cos(\varphi/2)$. Для ускорений a_0 и a_1 имеем

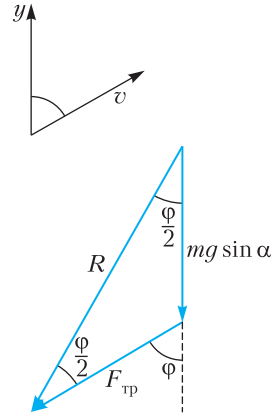


Рис. 11

$$a_0 = 2g \sin \alpha \cos(\varphi_0/2) \approx 8,49 \text{ м/с}^2,$$

$$a_1 = 2g \sin \alpha \cos(\varphi_1/2) \approx 1,76 \text{ м/с}^2.$$

2) Равнодействующая компоненты силы тяжести и силы трения направлена вдоль биссектрисы угла φ между направлением скорости и осью y , тангенциальное ускорение шайбы и проекция ее ускорения на ось y равны друг другу: $a_\tau = a_y$, поэтому

$$v - v_y = v(1 - \cos \varphi) = \text{const} = v_0(1 - \cos \varphi_0).$$

Поскольку в верхней точке траектории $\varphi = 90^\circ$, для скоростей u и v_1 имеем

$$u = v_0(1 - \cos \varphi_0) \approx 4,00 \text{ м/с},$$

$$v = \frac{v_0(1 - \cos \varphi_0)}{1 - \cos \varphi_1} \approx 2,07 \text{ м/с}.$$

3) Обратим внимание, что из найденного во втором пункте инварианта следует $v - v_y = v_0(1 - \cos \varphi_0)$. Интегрируя по времени, получим $s - \Delta y = v_0(1 - \cos \varphi_0)t$, где Δy и s – изменение координаты y шайбы и пройденный ею путь соответственно. К моменту достижения шайбой основания доски $\Delta y = 0$, поэтому

$$s = v_0(1 - \cos \varphi_0)t.$$

Для определения пути s воспользуемся законом изменения кинетической энергии:

$$\Delta E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{\text{тяж}} + A_{\text{тр}} = -mg \sin \alpha \cdot \Delta y - mg \sin \alpha \cdot s.$$

Поскольку при достижении основания доски $\Delta y = 0$, то

$$v_0^2 - v_1^2 = 2g \sin \alpha \cdot s = 2g \sin \alpha \cdot v_0(1 - \cos \varphi_0)t,$$

откуда

$$t = \frac{v_0}{2g \sin \alpha \cdot (1 - \cos \varphi_0)} \left(1 - \left(\frac{1 - \cos \varphi_0}{1 - \cos \varphi_1} \right)^2 \right) \approx 1,52 \text{ с}.$$

Олимпиада «Покори Воробьевы горы!»

(см. «Квант» №8)

1) Выразим $\beta(x, y)$ из (1) и (2), пользуясь малостью y . При этом необходимо понять, что слагаемые порядка $y^3 \leq 10^{-3}$ *существенны* в требуемом масштабе точности вычислений и их необходимо сохранять (пренебрегать мы можем только слагаемыми порядка $y^5 \leq 10^{-5}$ и меньше). В этом случае из (2) с учетом $1 - \sqrt{1 - y^2} \approx \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{8}$ нао-

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \frac{y}{z + \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{8}}, \text{ где } z = \frac{x}{R}.$$

Записав $\alpha \approx a_1 y + a_3 y^3$ и используя разложение для тангенса, находим, приравнявая слагаемые с одинаковой степенью, $a_1 = \frac{1}{z}$ и $a_3 = -\frac{3z+2}{6z^3}$. Таким образом, $\alpha \approx \frac{y}{z} - \frac{3z+2}{6z^3} y^3$. Аналогично запи-

сываем $\beta \approx b_1 y + b_3 y^3$, снова используем разложение для синуса и косинуса и получаем $b_1 = \frac{z-1}{2z}$ и

$$b_3 = +\frac{7z^3 + 9z^2 + 21z + 11}{48z^3}. \text{ Тогда}$$

$$\beta(y, z) \approx \frac{z-1}{2z} y + \frac{7z^3 + 9z^2 + 21z + 11}{48z^3} y^3.$$

Мы обнаружили, что в порядке y^1 при $z = 1$, т.е. для случая $x = R$, когда источник располагается в фокусе сферической поверхности, все лучи в коллиматоре идут параллельно оси. Однако при учете поправок порядка y^3 для луча с максимальным отклонением ($y = 0,1$) от оси $\beta(0,1,1) \approx 0,001 > 0,00044$. Это означает, что при таком положении источника пучок имеет слишком большую расходимость. На самом деле лучше взять z немного меньше 1, и в этом случае β_{\max} будет меньше. Например, можно выбрать его так, чтобы при $y = 0,1$ угол отклонения β обращался в ноль, это соответствует $z \approx 0,980$ или $x \approx 490$ мм и отвечает $\beta_{\max} \approx 0,00041$, т.е. пучок удовлетворяет введенным требованиям.

2) Можно догадаться, что наиболее критичная область – область углов, близких к максимальному отклонению ($y \approx 0,1$), и выбирать положение источника таким образом, чтобы $\beta = 0$ при определенном значении y , например при $y = 0,1$. Такой подбор можно осуществить непосредственно на базе формул (1) и (2): положив в (1) $\beta = 0$, находим, что $\sin \alpha \cdot \sqrt{1 - y^2} + y \cos \alpha = 2y$, т.е. $\alpha = \arcsin(2 \sin \gamma) - \gamma$. Подставив это значе-

ние в (2), находим

$$x = R \left(\frac{\sqrt{1-y^2} \sqrt{1-4y^2} + 2y^2}{2\sqrt{1-y^2} - \sqrt{1-4y^2}} - 1 + \sqrt{1-y^2} \right).$$

Для $y = 0,1$ получаем $x \approx 0,97985 R \approx 489,9$ мм. Как видно, этот метод дает разумный результат и намного проще по расчетам, но он менее строг: отсутствие аналитической формулы не позволяет провести анализ угла отклонения на максимум, и мы опираемся на догадку о том, что нужно минимизировать отклонение от оси «крайних» преломленных лучей.

4. Согласно справочному тексту, состояние фотонов пучка можно описать вектором $\vec{e} = |\alpha| \cdot \vec{e}_x + |\beta| e^{i\varphi} \cdot \vec{e}_y$. При этом $w_x = |\alpha|^2$ и ясно, что вероятность обнаружить поляризацию вдоль оси x можно определить (пусть и с некоторой статистической неопределенностью) как $w_x \approx \frac{N_1}{N} = \frac{800}{1000} = 0,8$. Так как число фотонов в порции довольно велико, считаем, что статистический разброс мал и $|\alpha| = \sqrt{0,8} \approx 0,894$. Из условия нормировки находим, что $w_y = |\beta|^2 = 1 - w_x \approx 0,2$, т.е. $|\beta| = \sqrt{0,2} \approx 0,447$. Итак,

$$\vec{e} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{5}} e^{i\varphi} \cdot \vec{e}_y.$$

Во втором случае поляризации, которую должен обнаруживать детектор, соответствует $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{e}_y$. Значит, вероятность регистрации

$$w_2 = |\vec{e}_2 \cdot \vec{e}|^2 = \left| \frac{2}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}} e^{i\varphi} \right|^2 = \frac{(2 + \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi}{10} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cos \varphi.$$

С другой стороны, результат второго эксперимента дает

$$w_2 \approx \frac{N_2}{N} = 0,612, \text{ точнее } w_2 = 0,612 \pm 0,015.$$

Следовательно, $\cos \varphi \approx 0,28$, $\sin \varphi \approx \pm 0,96$.

Для третьего эксперимента, как следует из справочного текста, $\vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{e}_x + \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \vec{e}_y$. Поэтому вероятность регистрации фотонов

$$w_3 = |\vec{e}_3 \cdot \vec{e}|^2 = \left| \frac{2}{\sqrt{10}} - \frac{i}{\sqrt{10}} e^{i\varphi} \right|^2 = \frac{(2 + \sin \varphi)^2 + \cos^2 \varphi}{10} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \sin \varphi \approx 0,5 \pm 0,384.$$

Следовательно, ожидаемое среднее значение зарегистрированных фотонов

$$N_3 = w_3 N \approx 500 \pm 384, \text{ т.е. } 884 \text{ или } 116.$$

10 класс

1. Как видно из определения нашей переменной, $V_2 = (1+z)V_1$. Поскольку треугольник равнобедренный, $V_2 - V_3 = V_3 - V_1$, поэтому $V_3 = \left(1 + \frac{z}{2}\right)V_1$. Так как величина угла при основании всегда одна и та же, то для всех циклов

$$\frac{p_1 - p_3}{p_1} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{V_3 - V_1}{V_1} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{z}{2}.$$

Тогда

$$p_1 - p_3 = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{z}{2} p_1, \quad p_3 = \left(1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{z}{2}\right) p_1.$$

Работа в этом цикле равна

$$A = \frac{1}{2}(p_1 - p_3)(V_2 - V_1) = \frac{p_1 V_1}{4} \operatorname{tg} \alpha \cdot z^2.$$

Ясно, что в процессе 1-2 газ только получает тепло, а в процессе 2-3 — только отдает. В процессе 3-1 может происходить изменение направления теплообмена. В соответствии с условием, угол α выбран так, чтобы такая точка была одной из крайних точек 1 или 3. Рассмотрим два возможных варианта: $Q_{31} < 0$ и $Q_{31} > 0$. В случае $Q_{31} < 0$ газ получает тепло только в процессе 1-2 и количество теплоты нагревателя

$$Q_{\text{н}} = Q_{12} = \frac{i+2}{2} p_1 (V_2 - V_1) = \frac{i+2}{2} p_1 V_1 z$$

(здесь i — число степеней свободы молекулы газа). Значит, в этом случае КПД цикла

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{н}}} = \frac{1}{2(i+2)} \operatorname{tg} \alpha \cdot z.$$

Таким образом, если $Q_{31} < 0$, то значения КПД должны удовлетворять соотношению $\frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{z_2}{z_1}$. На самом деле $\frac{5}{4} \neq \frac{22}{17}$, т.е. этот вариант не подходит.

Остается $Q_{31} > 0$. Тогда газ отдает тепло только в процессе 2-3 и количество теплоты холодильника

$$Q_{\text{х}} = -Q_{23} = \frac{p_1 + p_3}{2} (V_2 - V_3) + \frac{i}{2} (p_2 V_2 - p_3 V_3),$$

или

$$Q_{\text{х}} = \frac{p_1 V_1}{4} z \left(2 + i(1 + \operatorname{tg} \alpha) + (i-1) \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{z}{2} \right).$$

Значит, в этом случае

$$\eta = \frac{A}{A + Q_{\text{х}}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot z}{(i+1) \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{z}{2} + 2 + i(1 + \operatorname{tg} \alpha)}.$$

Для исследования этой зависимости ее удобно линеаризировать. Как видно, обратная величина КПД есть линейная функция обратной величины z :

$$\frac{1}{\eta} = \frac{i+1}{2} + \frac{2 + i(1 + \operatorname{tg} \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{1}{z} = a + \frac{b}{z}.$$

По двум точкам определяем коэффициенты этой

зависимости:

$$25 = a + \frac{11b}{5}, \quad 20 = a + \frac{17b}{10}, \quad \text{откуда } a = 3, \quad b = 10$$

и находим число степеней свободы:

$$\frac{i+1}{2} = 3, \quad i = 5 \quad (\text{т.е. это двухатомный газ})$$

и угол:

$$\frac{7 + 5 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = 10, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{5}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{7}{5}.$$

При $z = 1$ КПД равен

$$\eta = \frac{1}{13} \approx 7,7\%.$$

2. Обозначим R — сопротивление левого длинного провода, kR — сопротивление правого, xR — сопротивление одного нагревателя и yR — сопротивление нити одной лампы. Тогда, вычисляя сумму напряжений по «верхнему берегу» нашего моста, получаем $I_1 R + I_{\text{н}} x R = U_0$ ($I_{\text{н}}$ — сила тока через нагреватель). Введя обозначение $I_0 = \frac{U_0}{R}$, мы можем переписать это соотношение в виде

$$I_1 + x I_{\text{н}} = I_0.$$

Аналогично, для «нижнего берега» запишем ($I_{2\text{н}}$ — сила тока через пару нагревателей)

$$k I_2 + \frac{x}{2} I_{2\text{н}} = I_0.$$

Еще два независимых уравнения дают условия непрерывности общего тока:

$$I_1 + I_{2\text{н}} = I_2 + I_{\text{н}}$$

и закон Ома для лампы (первый случай):

$$\frac{x}{2} I_{2\text{н}} - I_1 = y (I_1 - I_{\text{н}}).$$

Эту систему линейных уравнений можно решить относительно сил токов. В частности, для сил тока через нагревательные элементы, отношение которых известно:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{49}{36} = \frac{I_{\text{н}}^2}{(I_{2\text{н}}/2)^2}, \quad \frac{I_{\text{н}}}{I_{2\text{н}}} = \frac{7}{12}.$$

Ясно, что для второго случая (одна лампа заменена на параллельное соединение трех) получаются такие же формулы с заменой $y \rightarrow \frac{y}{3}$, и соотношение P_2 и P_2' дает нам еще одно уравнение:

$$\frac{P_2}{P_2'} = \frac{10}{9} = \frac{I_{2\text{н}}^2}{I_{2\text{н}}'^2}, \quad \frac{I_{2\text{н}}}{I_{2\text{н}}'} = \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

Этот путь позволяет найти x и y для каждого k и исследовать диапазон значений k , при которых решение является физически допустимым (отношения сопротивлений положительны и близки по порядку величины). Например, при $k = 1$ получается $x = 5$, $y \approx 0,3015$. Для каждого полученного корня можно вычислить $\frac{P_1'}{P_2'}$ и найти P_1' . Правда, полученная система после исключения

любой пары неизвестных приводят к уравнениям высокой степени, не позволяющим решить их аналитически. Так что придется использовать таблицы Excel или специализированные математические программы. Получается, что возможные значения мощности потребления одиночного нагревателя во втором случае лежат в диапазоне

$$855 \text{ Вт} < P' < 909 \text{ Вт.}$$

7–9 классы

$$1. m = \frac{2r\rho_0Sh}{\lambda + 2c(t_0 - t_1)} \approx 2,5 \text{ г}; \Delta E = p_0Sh \approx 113 \text{ Дж.}$$

$$2. a \approx 4 \text{ а.е.}, b \approx 3,2 \text{ а.е.}$$

Заключительный этап

11 класс

$$1. m = \frac{M}{3} \left(4 \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin(\beta + \gamma)} - \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \right) \approx \approx \frac{M}{3} \left(4 \frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma} - \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right) = 10 \text{ г.}$$

2. Газ получает тепло в изохорном процессе и на параболическом участке слева от точки с координатами $((6V_0, 5p_0)$, отдает тепло на параболическом участке справа от этой точки и в изобарном процессе. КПД цикла $\eta = \frac{115}{567} \approx 20\%$.

$$3. I = \frac{2mg(D-d)}{B(H^2 + d^2 - D^2)} = 1,4 \text{ А (оба отрезка провода – это дуги окружности).}$$

$$4. \Gamma_3 = \frac{\Gamma_1\Gamma_2(L_2 - L_1)}{(\Gamma_1 - \Gamma_2)L_3 + \Gamma_2L_2 - \Gamma_1L_1} = -1, \quad D = \frac{2(\Gamma_1 - \Gamma_2)}{\Gamma_1L_1 - \Gamma_2L_2 - \Gamma_1\Gamma_2(L_2 - L_1)} = +2,5 \text{ дптр (в системе из двух линз изображение источника в первой является источником для второй).}$$

Да и нет

Зная, что 2-е – понедельник (см. 7), отождествляем другие числа и дни недели: 8-е – воскресенье, 10-е – вторник, 13-е – пятница, 14-е – суббота.

Если не предполагать у спрашивающего крайней забывчивости, то диалог происходит после 10 числа (см.4), приблизительно через неделю после приезда (см.3, а также 2 и 5). Поэтому единственное воскресенье (см. 6), которое может быть днем приезда, это 8-е число.

Да и *нет* языка *N* совпадают по смыслу с русскими *да* и *нет* во фразах 4 и 6 и не совпадают во фразах 5 и 7, где вопрос содержит отрицание. Если понять *нет* во фразе 1 так же, как в 5 (т.е. как зачеркивание отрицания, содержащегося в вопросе), то получим, что разговор происходит в пятницу, 13-го, откуда видно несовпаде-

ние *да* языка *N* с русским *да* также во фразе 2, где по-русски ожидался бы ответ: – *Нет* (*не четырнадцатое*). Таким образом, *да* языка *N* служит для подтверждения, а *нет* – для отрицания того предложения, которое является вопросом; например:

– *Не восьмого?*

– *Нет* (= *Не не восьмого. = Восьмого.*)

Если само предложение, являющееся вопросом, содержит отрицание, то *нет* языка *N* служит для снятия этого отрицания.

В немецком и французском языках для подобного снятия отрицания есть специальные слова: нем. doch, франц. si; в английском используется обычное yes; в русском необходимо повторить ту часть предложения, которая отрицается в вопросе:

– *Ты не возражаешь?*

– *Возражаю.*

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин,
В.А.Тихомирова, А.И.Чернуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

М.Н.Грицук

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован

в Комитете РФ по печати.

Рег. св-во ПИ №ФС77-54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»**

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

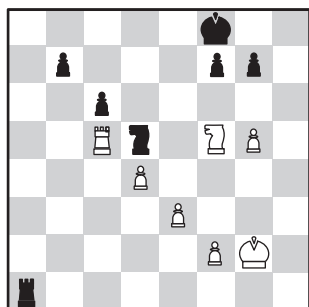
**в соответствии с предоставленными
материалами
в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8
Тел.: (831) 218-40-40**

Полная КОЛЛЕКЦИЯ

Магнус Карлсен с пятой попытки смог выиграть Кубок мира, собрав тем самым полную коллекцию из всех значимых шахматных титулов, разыгрываемых в личном зачете. Наибольшие трудности на пути к трофею он испытал в противостоянии с Винсентом Каймером из Германии, в котором соперники мистическим образом раз за разом проходили мимо лучших продолжений и победитель определен лишь в шестой партии.

В.Каймер – М.Карлсен
Баку, 2023,
1/16 финала, 1 партия

1. d4 ♘f6 2. c4 e6 3. ♘c3 d5
4. cd ed 5. ♘g5 ♘b4 6. e3 h6
7. ♘f4 ♘f5 8. ♘d3 ♘d3 9. ♖d3
c6 10. ♘ge2 ♘h5 11. ♘e5 ♘d7
12. h3 ♘hf6 13. ♘h2 0-0 14. a3
♘a5 15. 0-0 ♚e8 16. ♚ac1 ♚e7
17. b4 ♘d8 18. ♘g3 ♘c7 19. ♘f5
♘h2+ 20. ♚h2 ♚e6 21. ♘g3 ♚d6
22. ♚g1 a5 23. ♚b1 ♘b6 24. ba
♘c4 25. ♚b4 ♚a5 26. ♘d5! ♘d5
27. ♚c4 ♚a3 28. ♚c5 ♚c5 29. ♚c5
♚ca8 30. ♘f5 h5 31. g4 hg 32. hg
♚a2 33. ♚b1 ♚a1 34. ♚a1 ♚a1+
35. ♚g2 ♘f8 36. g5.

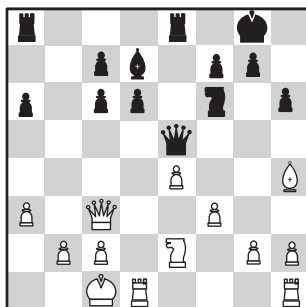


36... ♘c7?? Грубый просчет, лучше 36... ♘e7 37. ♘d6 b6 с равной позицией. 37. ♘d6! g6. Черные вынуждены отдать пешку b7, так как после 37... ♚a7 38. ♚f5 белые забирают пешку f7 с решающим преимуществом. 38. ♘b7

♚b1 39. ♘d8 ♚b5 40. ♚b5 cb.
41. ♘c6 ♚e8 42. ♘b4 ♚e7 43. f4
♘d6 44. ♘f3 ♘e6 45. ♚e2 ♘g7 46.
e4 ♘h5 47. ♘f3 ♘g7 48. ♘d3 ♘h5
49. ♘e3 ♘g3 50. d5 ♘c7 51. ♘d4
♘b6 52. ♘e5 b4 53. ♘f7 b3 54. ♘e5
♘e2+ (54...b2 55. ♘c4+ с вилок-
кой) 55. ♘e3 ♘b5 56. ♘d3 ♘c3
57. d6 ♘c6 58. e5, черные сда-
лись.

М.Карлсен – В.Каймер
Баку, 2023,
1/16 финала, 2 партия

1. e4 e5 2. ♘f3 ♘c6 3. ♘b5 a6
4. ♘a4 ♘f6 5. d3 ♘c5 6. ♘g5 h6
7. ♘h4 d6 8. d4 ed 9. ♘d4 ♘d7
10. ♘c6 bc 11. ♘c3 0-0 12. ♚d3
♘b4 13. ♘de2 ♚e7 14. 0-0-0
♚fe8 15. f3 ♚e5 16. a3? После
удачно разыгранного дебюта
белые зевают тактический удар.
16... ♘c3 17. ♚c3.



17... ♚c3? Возможно, ключевой момент всего турнира. Черные тоже не видят тактический выпад: 17... ♘e4! 18. ♚e5 ♚e5 19. fe ♚e4, оставаясь с двумя лишними пешками. 18. ♘c3 ♘h7 19. g4 f6 20. h3 ♘f8 21. ♘g3 ♘e6 22. h4 ♘f7 23. h5 ♚ad8 24. ♚he1 ♘c8 25. ♚d3 ♘b7 26. ♘b1 c5 27. c4 ♘c6 28. b3 ♚b8 29. ♘f2 ♚b7 30. ♘d2 ♚eb8 31. ♘e3 ♘g8 32. ♚c2 ♘d8 33. f4 a5 34. e5 fe 35. fe ♘f7 36. ♘f4 de 37. ♘e5 a4 38. ♘c3 ab+ 39. ♚b2!? Техника чемпиона. Черные ладьи утыкаются в собственную пешку, а белые готовы начать охоту за сдвоенными пешками на линии с. 39... ♚e8 40. ♚e8+ ♘e8 41. ♚d5 ♘c6 42. ♚c5 ♘d7 43. ♘d4!? Движение проходной на линии a важ-

нее пешки g4. 43... ♘g4 44. a4 ♘g5 45. ♘e3 ♘f3 46. ♘f3 ♘f3 47. a5 ♚b4 48. ♘d2 ♚a4 49. ♚b3 ♘d1+ 50. ♚c3 c6 51. ♘d4 ♘f3 52. ♘c3 ♘g2? Решающая ошибка. Необходимо держать под контролем пешку c4, чтобы иметь возможность активизировать короля после 52... ♘e2! 53. ♚c6 ♘f7 с шансами на ничью. 53. ♚f5 ♘h3 54. ♚f4 ♘e6 55. ♚c5 ♚a3 56. ♚b4 ♚a2 57. ♚b3 ♚e2 58. a6 ♘h3 59. a7 ♚e8 60. ♚e4 ♚a8 61. ♚e7 c5 62. ♚b7, черные сдались.

В.Каймер – М.Карлсен
Баку, 2023,
1/16 финала, 3 партия

1. d4 ♘f6 2. c4 e6 3. ♘c3 ♘b4
4. f3 ♘c6 5. e4 e5 6. a3 ♘c3+
7. bc d6 8. ♘e2 b6 9. ♘g3 ♘a5
10. ♘f3 h5 11. 0-0 h4 12. ♘f5
♘f5 13. ef ♚d7 14. ♚b1 0-0-0
15. ♘g5 c5 16. d5 ♘h5 17. f4
♚hh8 18. fe de 19. ♚e1 e4 20. ♘f6
de8 21. ♘g7 ed 22. ♚d2 ♚hg8
23. f6 ♚e4 24. ♚be1?? Сильнее
простое 24. ♚d3. 24... ♚c1 25. ♚e1
♚e8?? К победе вело 25... ♚f5
26. ♚d1 ♚e8 27. ♚d3 ♚e1+ с выигрышем ферзя. 26. ♚e7 ♚e7 27. fe
♚e7 28. ♚d3 ♚e1+ 29. ♚f1
♚e3+ 30. ♚h1 ♚e4 31. h3 f5
32. ♚f3? ♚f3 33. gf ♘c4 34. a4
♘ d7? К легкой победе ведет
34... a5 35. ♘f8 b5, и пешку a не
остановить. 35. ♘f6 ♘d6 36. ♘h4
♘d5 37. ♘d8 ♘b2 38. h4 ♚e6 39.
h5 ♚a4 40. c4 ♘f7 41. ♚g2 ♘b2
42. ♚g3 ♘c4 43. ♘f4 b5 44. ♘f5
b4 45. ♚e4 a5?? Упускает победу,
правильно 45...b3! 46. ♘d3
a5. 46. h6?? ♘g6 47. ♘e7?? Точный
путь к ничьей – 47. h7! ♘h7
48. ♘d5 b3 49. ♘f6! b2 50. ♘b2.
47... ♘d2+?? Решающий промах,
к победе ведет этюдное 47...b3
48. ♘d3 ♘e3! 48. ♘d3 ♘b3 49.
♚c4 a4 50. ♘g5 ♚h7 51. ♘e3
♚g6 52. ♘g5 ♘d4 53. ♚c5 a3 54.
♘c1 ♘e2 55. ♚b4 ♘c1 56. ♚a3,
ничья.

А.Русанов

ОТ ШАРМАНКИ ДО ТЕРМЕНВОКСА

Продуки с ризикой

Как «поверить алгеброй гармонию».



ISSN 0130-2221 23009



9 770130 22238

(ПОДРОБНЕЕ — НА С. 32 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)