

ISSN 0130-2221

2023 · № 8

АВГУСТ

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ





В этой замечательной головоломке, придуманной турецким изобретателем Явузом Демирханом (*Yavuz Demirhan*), используются шесть одинаковых брусочков  $2 \times 2 \times 1$  и коробка  $4 \times 3 \times 2$ . Задание стандартное – уложить все брусочки внутрь коробки так, чтобы ничего не торчало наружу. Звучит просто, но на пути его выполнения есть серьезное препятствие: помещать брусочки в коробку можно только через квадратное отверстие размером  $2 \times 2$ , расположенное в центре большой грани коробки. На приведенной фотографии грань с отверстием прозрачная.

В английском языке есть замечательная идиома *to think outside the box*, которая буквально переводится как «мыслить вне коробки», но по смыслу означает «нестандартное мышление». Для решения этой головоломки вам понадобится мыслить нестандартно, но при этом оставаться в рамках коробки. Желаем успеха!

## В номере:

### УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук  
Математический институт  
им. В.А.Стеклова РАН

Физический институт  
им. П.Н.Лебедева РАН

Московский  
физико-технический институт  
Московский центр непрерывного  
математического образования

### ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**А.А.Гайфуллин**

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,  
М.Н.Бондаров, А.А.Варламов,  
С.Д.Варламов, А.П.Веселов,  
А.Н.Виленин, Н.П.Долбилин,  
С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,  
А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов,  
П.А.Кожевников, С.П.Коновалов,  
К.П.Кохась, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,  
А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,  
А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский,  
А.Л.Сташенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,  
А.В.Устинов (заместитель главного  
редактора), А.И.Черноуцан  
(заместитель главного редактора)**

### РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, В.И.Берник,  
А.А.Боровой, В.В.Козлов,  
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,  
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов**

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА

### ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**И.К.Кикоин**

### ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

**А.Н.Колмогоров**

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,  
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,  
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,  
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,  
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,  
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

- 2 Малые составляющие атмосферы  
и парниковый эффект. *М.Никитин, В.Сурдин*  
8 Последовательности Сомоса. *А.Устинов*

### ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 15 Задачи М2758–М2761, Ф2765–Ф2768  
17 Решения задач М2746–М2749, Ф2753–Ф2756

### «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 23 Задачи

### МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 24 Мудрецы на графе. *К.Кохась, А.Латышев*

### ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 29 Поглощение частиц в простейшей  
неоднородной системе. *Р.Коркин*

### КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Физика + живопись

### ОЛИМПИАДЫ

- 34 LXIV Международная математическая  
олимпиада

### ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 36 Олимпиада «Покори Воробьевы горы!». Физика

- 42 Ответы, указания, решения

### НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к Калейдоскопу «Кванта»*  
II *Коллекция головоломок*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогулки с физикой*

# Малые составляющие атмосферы и парниковый эффект

М.НИКИТИН, В.СУРДИН

**Т**ЕПЛОВОЙ РЕЖИМ ПЛАНЕТ ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ сложным комплексом физических процессов взаимодействия солнечного излучения с поверхностью и атмосферами небесных тел. Ключевым моментом при этом служит условие теплового равновесия, при котором коротковолновое излучение Солнца трансформируется в длинноволновое тепловое излучение планет, уходящее в космическое пространство при сохранении баланса приходящей и уходя-

щей энергии. Наличие атмосфер у планет значительно усложняет схему преобразования энергии Солнца в энергию теплового излучения, так как в игру вступают различные физические факторы.

На рисунке 1 представлена общая схема потоков тепла для Земли, иллюстрирующая основные каналы трансформации энергии излучения Солнца в тепловое излучение планеты (см. статью В.Сурдина «Альbedo и парниковый эффект» в «Кванте»

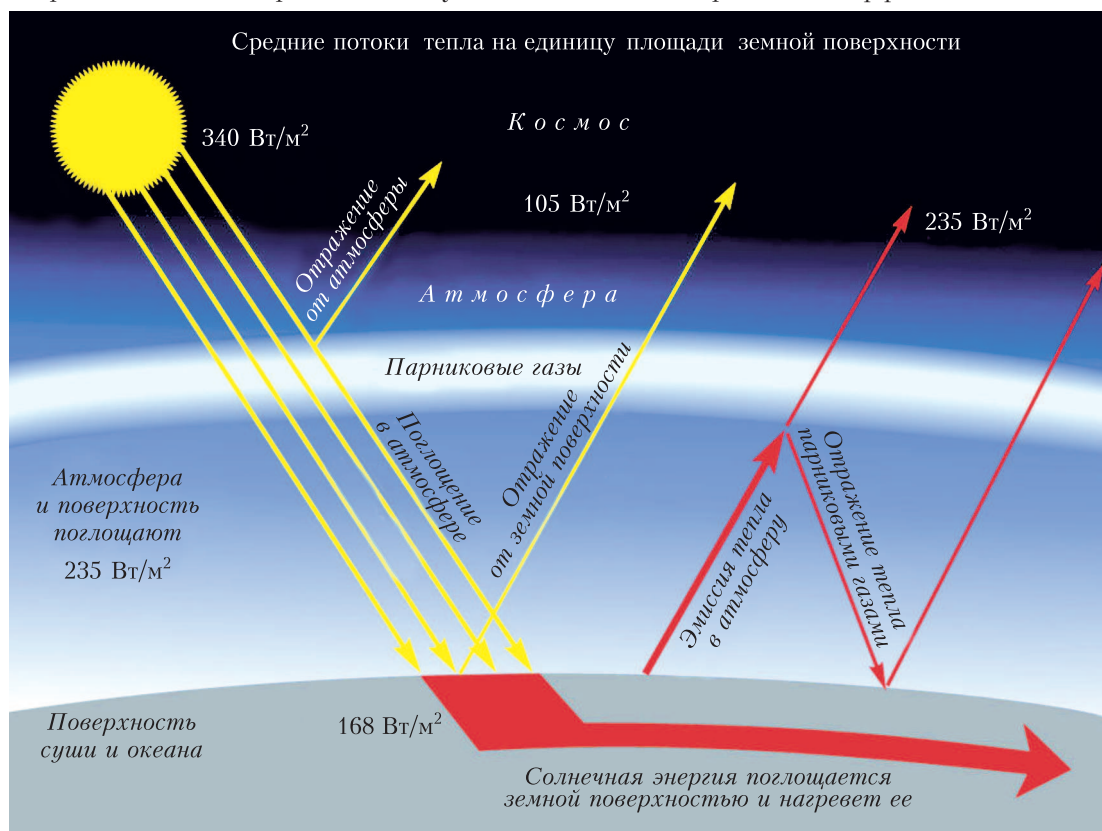


Рис. 1. Потоки тепла у Земли, соотнесенные к единице земной поверхности

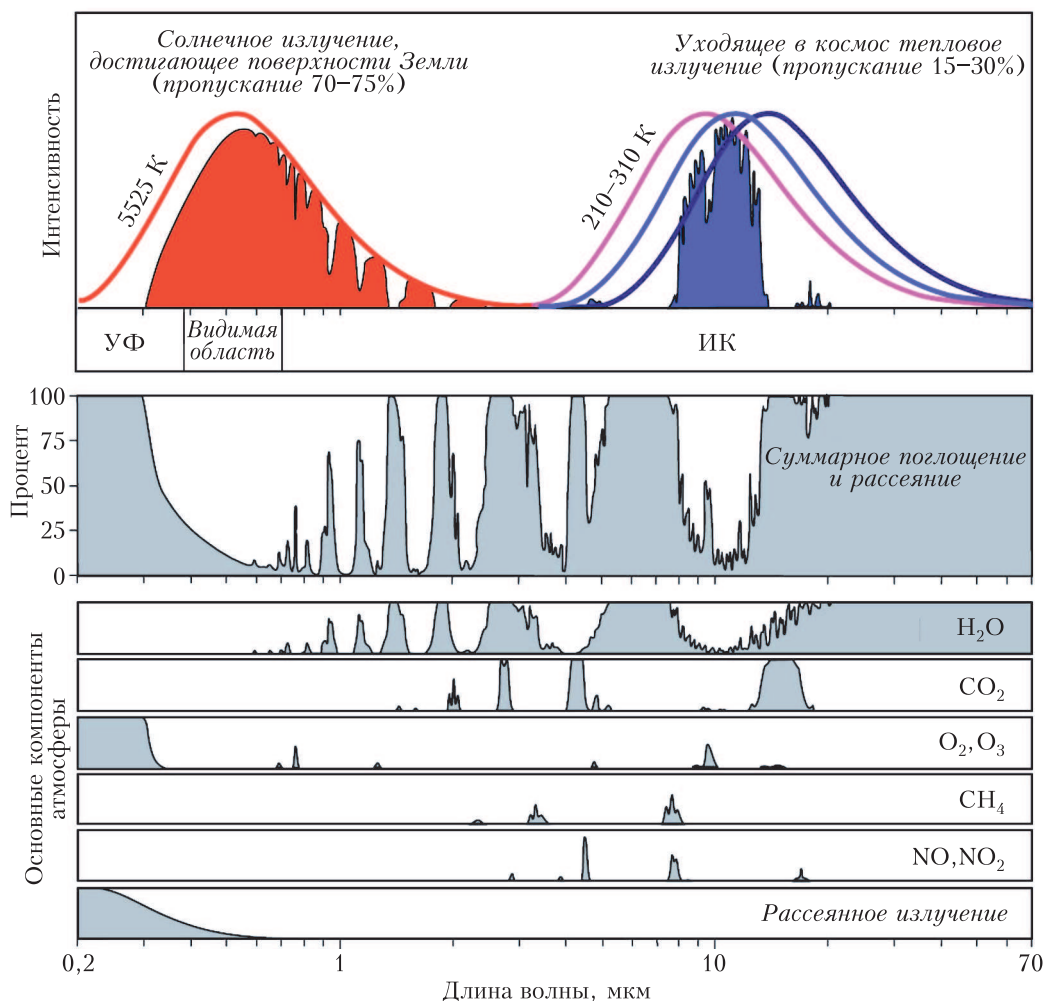


Рис. 2. Спектры солнечного и земного излучения и относительные вклады молекулярных газов атмосферы в поглощение и рассеяние излучения

№1 за 2023 г.). Желтыми линиями на этом рисунке изображены падающие и отраженные потоки солнечной радиации на частотах, соответствующих окнам прозрачности атмосферы. Красными линиями показаны потоки излучения, в которых произошла сильная трансформация спектра в сторону длинноволнового спектра.

Спектральный состав падающей, отраженной и переизлученной радиаций, участвующих в теплообмене Земли, приведены на рисунке 2. Эти спектры важны для понимания физических процессов, ответственных за трансформацию солнечного излучения в тепловую энергию нашей пла-

неты. На рисунке хорошо видны окна прозрачности, а также зоны поглощения для различных спектральных диапазонов и указаны молекулярные газы, ответственные за поглощение солнечной радиации в разных диапазонах длин волн.

Следует отметить сильное влияние малых составляющих атмосферы – паров воды и углекислого газа – на формирование потоков радиационного излучения в атмосфере Земли. Напомним, что содержание водяного пара в земной атмосфере составляет примерно 0,4%, а углекислого газа около 0,04% относительно общего числа молекул атмосферного газа. Как

видно из рисунка 2, водяной пар обладает высокой поглотительной способностью в широком диапазоне длин волн от 1 до 70 мкм. Поглотительная способность углекислого газа значительно слабее и ограничивается четырьмя неширокими интервалами в диапазоне от 2 до 20 мкм.

Суммарное действие паров воды, углекислого газа и других молекулярных составляющих атмосферы приводит к тому, что тепловая радиация, излученная поверхностью Земли, поглощается в атмосфере и частично отражается обратно к поверхности Земли, что и проявляется в виде парникового эффекта. Из сказанного следует, что для количественного анализа влияния молекулярных составляющих атмосферы, прежде всего паров воды и углекислого газа, на тепловой режим Земли надо хорошо знать законы радиационного теплообмена на ее поверхности и в атмосфере. Об этих законах теплового излучения и пойдет речь дальше.

Обратимся вначале к данным физического эксперимента. Точные спектральные измерения показывают, что нагретые тела излучают с единицы поверхности по всем направлениям в единицу времени энергию, равную

$$\Delta R = r(\nu, T) \Delta \nu,$$

где  $\nu$  – частота,  $\Delta \nu$  – узкий диапазон частот вокруг частоты  $\nu$ ,  $T$  – температура в кельвинах. Величина  $r(\nu, T)$  называется спектральной излучательной (или испускательной) способностью. Она измеряется в Вт/(м<sup>2</sup> · Гц) и показывает, какое количество энергии тепловой радиации излучается по всем направлениям в единицу времени с единицы поверхности нагретого тела в единичном диапазоне частот. С помощью излучательной способности можно найти энергетическую светимость – полную мощность излучения единицей поверхности тела по всем направлениям. Для этого надо найти сумму

$$R = \sum_i r(\nu_i, T) \Delta \nu_i$$

или интеграл

$$R = \int_0^{\infty} r(\nu, T) d\nu,$$

где суммирование и интегрирование проводится по всему спектру излучаемых частот.

Следующей важной характеристикой радиационного теплообмена является поглотительная способность. Она определяется следующим образом:

$$a(\nu, T) = \frac{\Delta E'(\nu, T)}{\Delta E(\nu, T)},$$

здесь  $\Delta E(\nu, T)$  – радиационная энергия, падающая на единичную площадку поверхности тела в единицу времени в узком интервале частот  $\Delta \nu$  вокруг частоты  $\nu$ , а  $\Delta E'(\nu, T)$  – энергия, поглощенная телом в том же интервале частот. По определению поглотительная способность меньше или равна единице. Тела, для которых  $a(\nu, T) < 1$ , называются серыми. При  $a(\nu, T) = 1$  тело называется абсолютно черным. Такое тело поглощает всю упавшую на его поверхность энергию на всех частотах; его альbedo равно нулю.

Излучательная и поглотительная способности связаны друг с другом законом Кирхгофа<sup>1</sup>. Имя этого выдающегося немецкого ученого хорошо знакомо школьникам по правилам расчета электрических цепей. Но всемирную известность он получил за свои открытия по электромагнетизму, дифракции, тепловому излучению и спектральному анализу. В 1862 году именно Кирхгоф ввел понятие абсолютно черного тела. Последующее развитие теории излучения абсолютно черного тела привело Макса Планка к созданию квантовой теории излучения.

После этого исторического отступления сформулируем закон теплового излучения Кирхгофа. Согласно этому закону, отношение излучательной и поглотительной способностей одинаково для всех тел в природе, включая абсолютно черное тело, оно является одной и той же универсальной функцией частоты (длины волны) и температуры –  $f(\nu, T)$ . Математически этот

<sup>1</sup>Густав Кирхгоф родился 12 марта 1824 года в Кенигсберге. Следующий, 2024 год будет юбилейным для великого немецкого ученого.

закон может быть записан так:

$$\frac{r(\nu, T)}{a(\nu, T)} = f(\nu, T).$$

Поскольку закон Кирхгофа справедлив и для абсолютно черного тела, универсальная функция  $f(\nu, T)$  является по существу излучательной способностью абсолютно черного тела. Экспериментальное определение явной зависимости этой функции от частоты и температуры стало возможным после того, как Г. Кирхгоф предложил физически реализуемую модель абсолютно черного тела – полость с небольшим отверстием. Спектрометрические и тепловые измерения, выполненные С. Ленгли, Э. Прингсгеймом, О. Люммером, Ф. Курлбаумом и другими физиками, позволили получить спектральную зависимость функций  $f(\nu, T)$  и  $f(\lambda, T)$  для заданной температуры.

Характерные спектральные зависимости функции  $f(\lambda, T)$  для различных температур представлены на рисунке 3. Анализ полученных кривых показывает, что по мере повышения температуры максимум излучаемой мощности абсолютно черного тела смещается в сторону меньших длин волн, или больших частот. Этот эффект

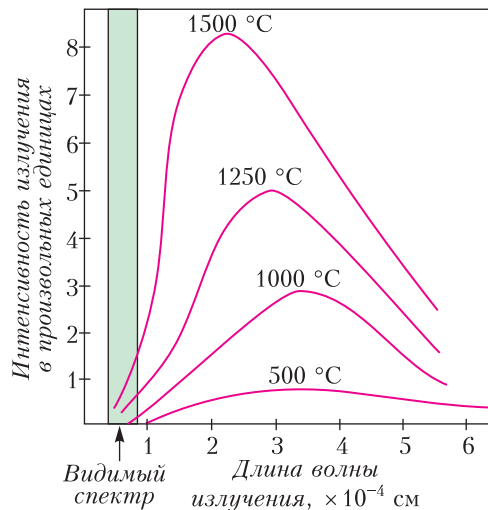


Рис. 3. Спектральные зависимости мощности теплового излучения абсолютно черного тела от длины волны и температуры (из книги Г. Липсона «Великие эксперименты в физике», М.: Мир, 1972).

первым обнаружил на основе данных эксперимента В. Вина. Согласно закону смещения Вина, длина волны  $\lambda_m$ , на которую приходится максимум излучательной способности абсолютно черного тела, обратно пропорциональна его абсолютной температуре:

$$\lambda_m = \frac{b}{T},$$

где  $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$  – постоянная величина.

Другим важным обобщением данных измерений спектральной испускающей способности абсолютно черного тела стал закон Стефана–Больцмана. Этот закон связывает энергетическую светимость единицы поверхности абсолютно черного тела с его температурой:

$$R = \sigma T^4,$$

где  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$  – это постоянная Стефана–Больцмана. В связи с законом Стефана–Больцмана отметим, что величина энергетической светимости численно равна площади фигуры, заключенной между кривой  $f(\nu, T)$  и осью  $\nu$ .

Законы Вина и Стефана–Больцмана имеют широкое применение в различных областях физики и техники. В частности, их можно использовать для оценок температуры звезд и планет. Рассмотрим в качестве примера Солнце и Землю. По данным наблюдений максимум излучения Солнца приходится на длину волны, равную  $\lambda_m = 0,48 \text{ мкм}$ . Считая, что излучение Солнца близко по свойствам к излучению абсолютно черного тела, находим температуру Солнца:  $T = b/\lambda_m = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}/0,48 \cdot 10^{-6} \text{ м} \approx 6000 \text{ К}$ . Теперь найдем максимальную длину волны теплового излучения Земли, считая нашу планету абсолютно черным телом. Подставляя среднюю температуру Земли, равную  $T = 288 \text{ К}$ , получим  $\lambda_m = b/T = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}/288 \text{ К} \approx 10 \text{ мкм}$ . Согласно рисунку 2, эта длина волны приходится на инфракрасное окно прозрачности земной атмосферы.

Как было сказано, теоретическое обоснование вида функции спектральной из-

лучательной способности абсолютно черного тела дал М. Планк на основе гениальной идеи о квантовой природе процессов излучения и поглощения энергии атомами. Развивая свою квантовую теорию излучения, Планк получил аналитическое выражение для спектральной излучательной способности абсолютно черного тела, которое прекрасно согласовывалось с данными эксперимента. Приведем формулу Планка, так как она понадобится нам дальше:

$$f(\nu, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{\frac{h\nu}{kT} - 1},$$

где  $h$  – постоянная Планка,  $c$  – скорость света,  $k$  – постоянная Больцмана. Из формулы Планка автоматически следуют законы Вина и Стефана–Больцмана. Для того чтобы получить закон Вина, надо найти частоту, при которой будет наблюдаться максимум  $f(\nu, T)$ . Для получения закона Стефана–Больцмана надо найти интеграл  $R$  по всему спектру частот. Если проделать эти операции, то помимо нужных функциональных связей постоянные  $b$  и  $\sigma$  выразятся через фундаментальные физические постоянные, фигурирующие в формуле Планка:

$$b = \frac{hc}{4,965k}, \quad \sigma = \frac{2\pi^5}{15c^2} \frac{k^4}{h^3}.$$

Теперь у нас есть необходимый теоретический материал, чтобы сделать полезные оценки возможного вклада в температурный режим Земли такой малой составляющей земной атмосферы, как углекислый газ. Выбор  $\text{CO}_2$  определяется особенностями спектра поглощения углекислого газа, в котором, согласно рисунку 2, основное поглощение имеет место всего в трех сравнительно узких диапазонах длин волн: 2,7; 4,3; 15,0 мкм. Это позволяет оценить вклад этих диапазонов в изменение интегральной светимости на основе уравнения теплового баланса Земли.

Без учета парникового эффекта это уравнение имеет вид

$$(1 - A)q\pi R_3^2 = 4\pi R_3^2 \sigma T^4,$$

где  $A$  – альbedo атмосферы Земли,  $q = 1360,8 \text{ Вт/м}^2$  – солнечная постоянная,

или мощность солнечного излучения на орбите Земли, падающая на единицу поверхности, ориентированной перпендикулярно потоку солнечных лучей,  $R_3$  – радиус Земли. Как видно из записи уравнения теплового баланса, поверхность и атмосфера Земли считаются поверхностью абсолютно черного шаровидного тела с радиусом, равным радиусу Земли. Аккуратные теоретические расчеты показывают, что такая аппроксимация является достаточно точной. Задавая альbedo равным  $A = 0,37$ , найдем температуру Земли без учета парникового эффекта:  $T = 247 \text{ К}$ , или  $t = -26 \text{ }^\circ\text{C}$ . Полученное значение температуры почти на  $40 \text{ }^\circ\text{C}$  меньше реального значения средней температуры нашей планеты. Эта разница и есть вклад парникового эффекта в ее тепловой баланс.

Учтем теперь вклад углекислого газа в парниковый эффект. Этот физический эффект, как показано на рисунке 1, возникает из-за отражения к земной поверхности тепловой радиации инфракрасного диапазона, поглощенной молекулами углекислого газа атмосферы. В законе Стефана–Больцмана парниковый эффект не учтен, так как при его выводе считается, что вся тепловая радиация излучается за пределы нагретого тела. Учесть парниковый эффект  $\text{CO}_2$  можно искусственно, вычтя из полной суммы интегральной светимости  $R = \sum_i r(\nu_i, T) \Delta\nu_i = \sigma T^4$  вклад поглощения тепловой энергии в атмосфере молекулами углекислого газа. Такое вычитание будет эквивалентно добавлению в правую часть уравнения теплового баланса отрицательной суммы

$$P = 4\pi R_3^2 (f(\nu_1, T) \Delta\nu_1 + f(\nu_2, T) \Delta\nu_2 + f(\nu_3, T) \Delta\nu_3),$$

где  $\nu_1 = 1,1 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$ ,  $\nu_2 = 7,0 \cdot 10^{13} \text{ Гц}$ ,  $\nu_3 = 2,0 \cdot 10^{13} \text{ Гц}$ ,  $\Delta\nu_1 = 1 \cdot 10^{13} \text{ Гц}$ ,  $\Delta\nu_2 = 6 \cdot 10^{12} \text{ Гц}$  и  $\Delta\nu_3 = 2 \cdot 10^{12} \text{ Гц}$  – характерные частоты и ширины спектра поглощения углекислого газа. Эта сумма, записанная в предположении 100-процентного поглощения, приближенно учитывает эффект поглощения



теплого излучения углекислым газом, так как усредненно учитывает реальные спектральные характеристики  $\text{CO}_2$ . Несложные численные расчеты показывают, что из трех слагаемых решающий вклад вносит поглощение в самом длинноволновом диапазоне. Связано это с сильным влиянием экспоненты на величину каждого слагаемого, а в третьем слагаемом экспонента минимальна. С учетом добавленной отрицательной суммы уравнение теплового баланса примет вид

$$(1 - A)q\pi R_3^2 = 4\pi R_3^2\sigma T^4 - 4\pi R_3^2P.$$

Численное решение этого уравнения дает значение глобальной температуры на Земле  $T = 252$  К. Сопоставляя это значение с  $T = 247$  К, приходим к выводу, что парниковый эффект от поглощения тепловой радиации молекулами углекислого газа составляет 5 кельвинов, или 13% от общего парникового эффекта. Сразу же отметим, что эта величина сугубо оценочная. Она может заметно отличаться от значений, которые дают корректные расчеты.

С оценкой вклада водяного пара ситуация более сложная, чем с углекислым газом. Связано это со спецификой формы спектров поглощения  $\text{H}_2\text{O}$  (см. рис. 2), затрудняющей расчет парникового эффекта на основе упрощенного подхода, использованного для  $\text{CO}_2$ . Точные расчеты показывают, что пары воды обеспечивают более 70% общего парникового эффекта. С учетом этой цифры приходим к выводу, что две малые составляющие земной атмосферы – водяной пар и углекислый газ – обуславливают основной вклад в формирование этого эффекта.

Рассмотрим теперь вопрос о том, на каких высотах в земной атмосфере имеет место парниковый эффект для  $\text{CO}_2$ . Ответ на него дает закон Бугера. Согласно этому закону, оптическое излучение на частоте  $\nu$  в поглощающей среде с постоянной плотностью убывает в соответствии с формулой

$$I = I_0 \cdot e^{-\gamma x},$$

где  $I_0$  – мощность излучения на входе в среду,  $\gamma$  – показатель поглощения,  $x$  –

расстояние, пройденное светом в среде. Показатель поглощения  $\gamma$  зависит от частоты, состава атомов и молекул среды и их концентрации. Величина, обратная показателю преломления, определяет расстояние  $L = 1/\gamma$ , на котором мощность излучения падает в  $e$  раз.

Атмосфера не является однородной средой. Концентрация каждой ее газовой составляющей меняется с высотой по барометрическому закону

$$n = n_0 \cdot e^{-\frac{h}{H}},$$

где  $H = \frac{kT}{mg}$  – приведенная высота компоненты,  $g$  – ускорение свободного падения,  $m$  – масса молекулы. Для  $\text{CO}_2$  приведенная высота составляет величину порядка 6,0 км. Это означает, что концентрация углекислого газа на высоте 6,0 км будет в  $e$  раз меньше, чем на уровне земли. Данные измерений показывают, что для инфракрасного излучения параметр  $L$  углекислого газа значительно меньше его приведенной высоты  $H$ . Причина – большая по величине показатель поглощения  $\gamma$  на инфракрасных частотах  $\text{CO}_2$ . Из условия  $L \ll H$  следует, что поглощение инфракрасного излучения молекулами  $\text{CO}_2$  должно происходить в приповерхностном слое атмосферы. Причем с увеличением концентрации  $\text{CO}_2$  толщина этого приповерхностного слоя будет уменьшаться. Следовательно, будет увеличиваться объемное выделение энергии за счет поглощения инфракрасного излучения в приповерхностном слое атмосферы Земли. В свою очередь, это должно приводить к усилению циркуляции воздушных масс и развитию таких метеорологических явлений, как штормы, ураганы и ливни.

# Последовательности Сомоса

А. УСТИНОВ

**П**ОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СОМОСА (см. общее определение ниже) получили свое название в честь американского математика Майкла Сомоса, который обратил внимание на их удивительные свойства. История их появления описана в [1].

## Последовательности Сомос-4

Первый нетривиальный пример последовательности Сомоса – это последовательность Сомос-4. Она задается рекуррентным соотношением

$$s_{n+2}s_{n-2} = \alpha s_{n+1}s_{n-1} + \beta s_n^2, \quad (1)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – произвольные константы. Четверка в названии – это порядок рекуррентного соотношения (1). Он показывает, сколько надо задать начальных членов последовательности  $\{s_n\}$ , чтобы можно было вычислить все остальные. Для последовательности Сомос-4 обычно считаются заданными  $s_0, s_1, s_2$  и  $s_3$ .

Если элементы последовательности  $\{s_n\}$  не обращаются в ноль, то рекуррентное соотношение (1) задает бесконечную в обе стороны числовую последовательность. В противном случае на последовательность требуется накладывать дополнительные условия. Естественней всего предполагать, что элементы последовательности – комплексные числа. Читатель, не знакомый с комплексными числами, может считать элементы последовательности  $\{s_n\}$  действительными.

Уравнению (1) удовлетворяют некоторые простые последовательности, например,

$$s_n = (An + B)q^{an^2 + bn + c}, \quad (2)$$

где  $A, B, q, a, b, c$  – произвольные константы. Частными случаями этой пос-

ледовательности являются арифметическая и геометрическая прогрессии, а также последовательность  $q^{n^2}$ , которая при  $q > 1$  растет быстрее любой геометрической прогрессии.

**Задача 1.** Докажите, что последовательность (2) действительно удовлетворяют уравнению (1). Найдите соответствующие ей коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$ .

Более интересный пример последовательности Сомос-4 представляет собой последовательность  $F_0, F_1, F_2, \dots$  чисел Фибоначчи

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots, \quad (3)$$

которая задается начальными условиями  $F_0 = 0, F_1 = 1$  и рекуррентным соотношением  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$  ( $n \geq 1$ ). Для отрицательных номеров последовательность Фибоначчи доопределяется с помощью этого же соотношения, переписанного в виде  $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$  ( $n \leq 1$ ). Оказывается, что элементы последовательности Фибоначчи удовлетворяют равенству

$$F_{n+2}F_{n-2} = -F_{n+1}F_{n-1} + 2F_n^2. \quad (4)$$

Значит, последовательность Фибоначчи – это тоже последовательность Сомос-4.

**Задача 2.** Докажите формулу (4).

Последовательность Фибоначчи является частным случаем *линейной рекуррентной последовательности второго порядка*. В общем случае такие последовательности задаются рекуррентным соотношением

$$s_{n+2} = us_{n+1} + vs_n \quad (5)$$

с постоянными коэффициентами  $u$  и  $v$ . Оказывается, что все такие последовательности также удовлетворяют уравнению (1), т.е. являются последовательностями Сомос-4.

**Задача 3.** Выразите через  $u$  и  $v$  коэффициенты уравнения (1), которому удовлетворяет последовательность, задаваемая уравнением (5).

Известно, что любое решение уравнения (5) имеет вид (см. [2])

$$s_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n \text{ или } s_n = (c_1 n + c_0) \lambda^n,$$

где все параметры – комплексные числа. Значит,  $s_n$  ограничены геометрической прогрессией. Поэтому последовательность  $s_n = q^{n^2}$ , удовлетворяющая равенству (1), не является линейной рекуррентной последовательностью второго порядка.

Еще один пример быстро растущей последовательности – это *Сомос-(4)*. Круглые скобки здесь означают, что мы рассматриваем специальную последовательность *Сомос-4* с начальными условиями  $s_0 = s_1 = s_2 = s_3 = 1$ , удовлетворяющую рекуррентному уравнению (1), в котором коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  также равны единицам:

$$s_{n+2}s_{n-2} = s_{n+1}s_{n-1} + s_n^2. \quad (6)$$

Вот начало этой последовательности:

$$s_0, s_1, \dots = 1, 1, 1, 1, 2, 3, 7, 23, 59, 314, 1529, \dots \quad (7)$$

На рисунке 1 слева изображены первые 80 элементов последовательности *Сомос-(4)*, выписанные сверху вниз мелким шрифтом. Правая сторона получившегося криволинейного треугольника похожа на параболу. Это значит, что последователь-

ность *Сомос-(4)* растет примерно как  $c^{n^2}$ , где  $c > 1$ . В частности, отсюда следует, что *Сомос-(4)* не является линейной рекуррентной последовательностью. Для сравнения на рисунке 1 справа помещены первые 80 чисел Фибоначчи. Правая сторона получившегося треугольника близка к прямой линии, что соответствует экспоненциальному росту чисел Фибоначчи.

**Задача 4.** Докажите, что последовательность *Сомос-(4)* не является последовательностью вида (2).

В общем случае элементы последовательности *Сомос-(4)* нельзя выразить через элементарные функции, здесь оказываются необходимы *эллиптические функции*, разговор о которых выходит за рамки статьи. Поэтому мы займемся теми свойствами последовательностей *Сомоса*, которые можно получить, используя лишь элементарные соображения. Нашей главной целью будет доказательство следующих двух результатов.

**Теорема 1.** Все элементы последовательности *Сомос-(4)* – целые числа.

**Теорема 2.** Остатки, которые элементы последовательности *Сомос-(4)* дают при делении на произвольное натуральное число  $m$ , периодически повторяются.

Решив задачи 17–21, читатель сможет доказать аналогичные утверждения и для более сложной последовательности *Сомос-(5)* (см. определение ниже).

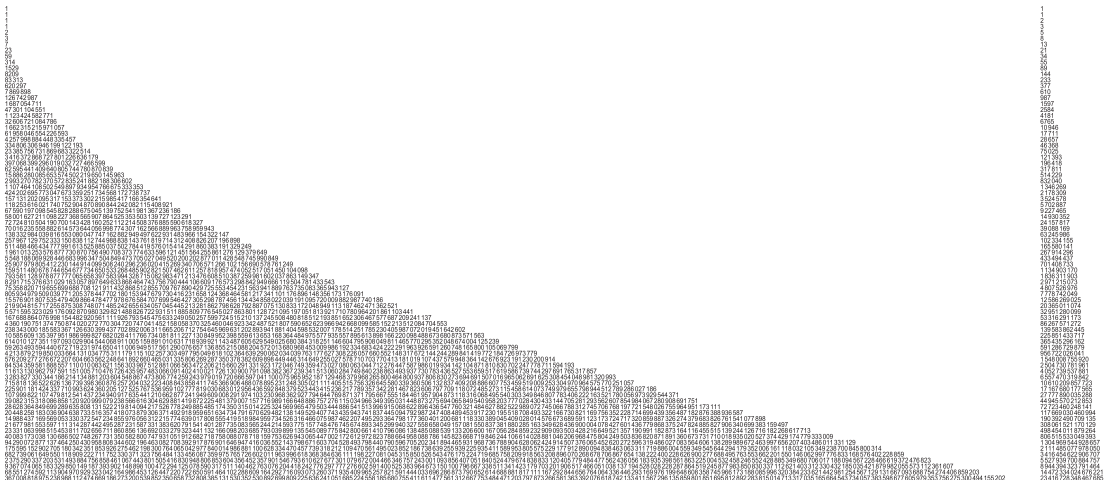


Рис. 1

Теорема 1 неочевидна, поскольку для нахождения очередного элемента  $s_{n+2}$  по формуле (6) сумму  $s_{n+1}s_{n-1} + s_n^2$  нужно поделить на  $s_{n-2}$ , и непонятно, почему всегда происходит деление нацело.

Аналог теоремы 2 хорошо известен для линейных рекуррентных последовательностей. Например, остатки, которые дают числа Фибоначчи при делении на натуральное  $m$ , периодически повторяются. Для доказательства достаточно заметить, что от уравнения  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$  можно перейти к сравнению  $F_{n+1} \equiv F_n + F_{n-1} \pmod{m}$ .<sup>1</sup> С его помощью остаток  $F_{n+1} \pmod{m}$  однозначно определяется по паре остатков  $(F_n \pmod{m}, F_{n-1} \pmod{m})$ .<sup>2</sup> Таких пар не больше  $m^2$ , следовательно, найдутся два значения  $n$ , для которых пары остатков совпадут, а это приведет к закливанию последовательности  $F_n \pmod{m}$ . Подобное рассуждение нельзя провести для последовательности Сомос-(4). Например, если модуль – это простое число  $p$ , то может случиться так, что  $s_{n-2} \equiv 0 \pmod{p}$ . Тогда сравнение  $s_{n+2}s_{n-2} \equiv s_{n+1}s_{n-1} + s_n^2 \pmod{p}$  не позволит найти значение  $s_{n+2}$ . Таким образом, нелинейность рекуррентного соотношения оказывается существенным препятствием к доказательству периодичности.

### Последовательности Сомоса произвольного порядка

**Определение 1.** Последовательностью Сомос- $k$  ( $k \geq 2$ ) называется последовательность  $\{s_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ , которая задается квадратичным рекуррентным соотношением

$$s_{n+k}s_n = \sum_{j=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} \alpha_j s_{n+k-j} s_{n+j}, \quad (8)$$

где  $\alpha_j$  – некоторые константы.

<sup>1</sup> Сравнение  $a \equiv b \pmod{m}$  по определению означает, что разность  $a - b$  делится на  $m$ , или, другими словами, что  $a$  и  $b$  дают одинаковые остатки при делении на  $m$ .

<sup>2</sup> Здесь  $\text{mod } m$  – это операция, которая превращает число в его остаток от деления на  $m$ , лежащий в пределах от 0 до  $m - 1$ .

Номер  $k$  – это порядок рекуррентного соотношения (8). Он показывает, сколько надо знать подряд идущих членов последовательности  $\{s_n\}$ , чтобы можно было вычислить все остальные ее члены. В последовательности Сомос- $k$  обычно предполагают известными значения  $s_0, \dots, s_{k-1}$ .

Следующие задачи показывают, что последовательности Сомоса для  $k = 2$  и  $k = 3$  устроены очень просто. Таким образом, Сомос-4, как было сказано выше, действительно есть первый нетривиальный пример последовательности Сомоса.

**Задача 5.** Докажите, что члены последовательности Сомос-2, задаваемой уравнением  $s_{n+2}s_n = \alpha s_{n+1}^2$ , могут быть найдены по формуле

$$s_n = \alpha^{n(n-1)/2} s_0^{1-n} s_1^n. \quad (9)$$

**Задача 6.** Докажите, что члены последовательности Сомос-3, задаваемой уравнением  $s_{n+3}s_n = \alpha s_{n+2}s_{n+1}$ , имеют вид

$$s_n = \begin{cases} \alpha^{n^2/4} s_{-1}^{-n/2} s_0 s_1^{n/2}, & \text{если } n \text{ четное,} \\ \alpha^{(n^2-1)/4} s_{-1}^{(1-n)/2} s_1^{(n+1)/2}, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (10)$$

Аналогично последовательности Сомос-(4) определяются последовательности Сомос-( $k$ ) для  $k > 4$ . Для этого в формуле (8) надо положить  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = 1$  и выбрать  $s_0 = s_1 = \dots = s_{k-1} = 1$ . Например, последовательность Сомос-(5) задается уравнением

$$s_{n+5}s_n = s_{n+4}s_{n+1} + s_{n+3}s_{n+2} \quad (11)$$

и начинается следующим образом:

$$s_0, s_1, \dots = 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 11, 37, 83, 274,$$

$$1217, 6161, \dots$$

Последовательность Сомос-(6) задается, соответственно, уравнением

$$s_{n+6}s_n = s_{n+5}s_{n+1} + s_{n+4}s_{n+2} + s_{n+3}^2 \quad (12)$$

и начинается с чисел

$$s_0, s_1, \dots = 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 5, 9, 23, 75, 421, 1103, \dots$$

Целочисленными оказываются только последовательности Сомос-( $k$ ) при  $k = 4, 5, 6, 7$ . Дальше эта закономерность нарушается. Например, в последовательности Сомос-(8) восемнадцатый член равен  $\frac{420514}{7}$ .

**Задача 7.** Про последовательности  $s_n = n^2$  и  $s_n = 2n^3$  выясните, являются ли они последовательностями (а) Сомос-4, (б) Сомос-6.

В целом, чем больше номер  $k$ , тем более сложно может быть устроена последовательность Сомос- $k$ . Однако для малых  $k$  при переходе от четного номера к нечетному ситуация усложняется не очень сильно. Можно увидеть, что последовательность Сомос-3, как и любая последовательность Сомоса нечетного порядка, обладает дополнительной степенью свободы: элементы с четными или с нечетными номерами можно умножить на ненулевую константу и при этом получится последовательность, удовлетворяющая тому же уравнению (8).

Равенства (10) можно переписать в виде

$$s_n = \Delta_n \alpha^{n^2/4} s_{-1}^{-n/2} s_0 s_1^{n/2},$$

где

$$\Delta_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ нечетное,} \\ \alpha^{-1/4} s_{-1}^{1/2} s_0^{-1} s_1^{1/2}, & \text{если } n \text{ четное.} \end{cases}$$

Таким образом, последовательность Сомос-3 можно «исправить» и превратить в последовательность Сомос-2, умножив элементы с четными номерами на подходящее число и оставив неизменными элементы с нечетными номерами.

Оказывается, что аналогичное утверждение верно и для последовательности Сомос-5 (см. задачи 23–24). Ее подпоследовательности с четными и нечетными номерами являются последовательностями Сомос-4. Умножив элементы последовательности Сомос-5 с четными номерами на некоторую константу, можно получить последовательность Сомос-4. По-видимому, аналогичное явление будет наблюдаться и для некоторых последовательностей Сомоса более высокого порядка.

### История о суммах квадратов, рассказанная Майклом Сомосом

Прежде чем перейти к детальному исследованию последовательностей Сомоса, приведем доводы самого Майкла Сомоса, объясняющие, как появляются такие последовательности, см. [3].

Одним из классических результатов теории чисел является следующая теорема Лагранжа.

**Теорема 3.** Каждое натуральное число представимо в виде суммы четырех квадратов целых чисел.

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в брошюре [4]. Разложение в сумму четырех квадратов может быть несколько. Например,

$$4 = 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2,$$

$$10 = 3^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 = 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2.$$

Будем рассматривать такие представления, в которых все слагаемые отличны от нуля. Тогда наименьшее число, представимое тремя разными способами, – это 28:

$$28 = 5^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 4^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2.$$

Числа, которые здесь возводятся в квадрат, оказываются связаны друг с другом: перемножив числа в каждой четверке, мы получим произведения

$$5 = 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1, \quad 32 = 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2,$$

$$27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1, \quad (13)$$

одно из которых есть разность двух других:  $5 = 32 - 27$ .

Следующий пример числа, обладающего тремя различными разложениями в сумму четырех квадратов, – это 42:

$$42 = 6^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = 5^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 = 4^2 + 4^2 + 3^2 + 1^2.$$

Здесь числа, возводимые в квадрат, связаны друг с другом точно так же. Произведения чисел в четверках суть

$$12 = 6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1, \quad 60 = 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2,$$

$$48 = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2. \quad (14)$$

Как и в предыдущем примере, оказывается, что одно из произведений есть разность двух других:  $12 = 60 - 48$ .

Выделим в последовательности чисел Фибоначчи (3) подпоследовательность с четными номерами:

$$F_0, F_2, F_4, \dots, F_{2n}, \dots = 0, 1, 3, 8, 21, 55, 144, 377, \dots$$

Заменим теперь в произведениях (13) каждое число  $n$  на  $F_{2n}$ . Тогда мы получим числа

$$55 = 55 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1, \quad 567 = 21 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3,$$

$$512 = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 1,$$

одно из которых снова есть разность двух

других:  $55 = 567 - 512$ . То же самое получается, если замену  $n \rightarrow F_{2n}$  сделать в произведениях (14):

$$432 = 144 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1, \quad 3960 = 55 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 3, \\ 3528 = 21 \cdot 21 \cdot 8 \cdot 1 \text{ и } 432 = 3960 - 3528.$$

Приведенные выше примеры разложения в суммы квадратов чисел 28 и 42 являются частными случаями более общих тождеств

$$(n+2)^2 + (n-2)^2 + 1^2 + 1^2 = \\ = (n+1)^2 + (n-1)^2 + 2^2 + 2^2 = \\ = n^2 + n^2 + 3^2 + 1^2.$$

И при любом целом  $n$  выполняются равенства

$$(n+2) \cdot (n-2) \cdot 1 \cdot 1 = \\ = (n+1) \cdot (n-1) \cdot 2 \cdot 2 - n \cdot n \cdot 3 \cdot 1, \quad (15) \\ F_{2(n+2)} \cdot F_{2(n-2)} \cdot F_2 \cdot F_2 = \\ = F_{2(n+1)} \cdot F_{2(n-1)} \cdot F_4 \cdot F_4 - \\ - F_{2n} \cdot F_{2n} \cdot F_6 \cdot F_2. \quad (16)$$

**Задача 8.** Что изменится, если вместо замены  $n \rightarrow F_{2n}$  использовать замену  $n \rightarrow F_n$  ?

Равенства (15) и (16) можно понимать следующим образом: обе последовательности  $s_n = n$  и  $s_n = F_{2n}$  удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$s_{n+2}s_{n-2}s_1^2 = s_{n+1}s_{n-1}s_2^2 - s_n^2s_3s_1. \quad (17)$$

Естественным образом возникает вопрос о том, как устроены другие решения уравнения (17). Например, можно в качестве начальных условий взять единицы:  $s_1 = s_2 = s_3 = 1$ . Тогда соотношение (17) примет вид

$$s_{n+2}s_{n-2} = s_{n+1}s_{n-1} - s_n^2. \quad (18)$$

Если дополнительно выбрать  $s_4 = -1$ , то мы получим числа

$$s_0, s_1 = 0, 1, 1, 1, -1, -2, -3, -1, 7, 11, 20, \\ -19, -87, -191, \dots$$

Похожий пример – последовательность, которая получается при  $s_1 = s_2 = 1, s_3 = -1$ . Здесь мы приходим к уже известному нам уравнению (6), и при  $s_4 = 1$  приходим к последовательности

$$s_0, s_1, \dots = 0, 1, 1, -1, 1, 2, -1, -3, -5, 7, -4, -23, \\ 29, 59, 129, \dots \quad (19)$$

Можно заметить, что элементы этой последовательности с нечетными номерами, выделенные жирным, имеют чередующиеся знаки. Если эти знаки отбросить, то получится последовательность Сомос-(4) (более подробный разговор об этом пойдет ниже). В частности, из этого наблюдения следует, что для отрицательных номеров последовательность естественно доопределить нечетным образом:  $s_{-n} = -s_n$ .

Все последовательности, которые здесь возникли, являются целочисленными, но это отнюдь не очевидно. Действительно, каждый раз для нахождения элемента  $s_{n+2}$  правую часть рекуррентного соотношения надо поделить на число  $s_{n-2}$ , которое может быть сколь угодно большим. Поэтому целочисленность подобных последовательностей является нетривиальным фактом, который нуждается в обосновании.

**Замечание 1.** При вычислениях принцип «суммы квадратов» позволяет контролировать правильность формул: если формула верная, то во всех слагаемых суммы квадратов индексов должны быть одинаковыми. При этом надо не забывать, что в конкретных примерах единичные множители, которые обычно не пишут, могут иметь смысл начальных элементов данной последовательности. Сравните суммы квадратов индексов в формулах (17) и (18).

### Первое доказательство целочисленности последовательности Сомос-(4)

У теоремы 1 есть короткое доказательство, не требующее детального изучения последовательности Сомос-(4). Единственное свойство, которое понадобится, очень простое.

**Лемма 1.** Пусть в последовательности Сомос-(4) элементы  $s_0, s_1, \dots, s_n$  – целые числа. Тогда в любой четверке  $(s_{k-3}, s_{k-2}, s_{k-1}, s_k)$ , где  $k = 3, \dots, n$ , все числа попарно взаимно просты.

**Доказательство.** Докажем утверждение леммы по индукции. При  $k = 3$  мы имеем четверку  $(s_0, s_1, s_2, s_3) = (1, 1, 1, 1)$ , в которой, очевидно, все числа попарно взаимно просты. Предположим, что утверждение леммы доказано вплоть до четверки  $(s_{k-4}, s_{k-3}, s_{k-2}, s_{k-1})$ , где  $4 \leq k \leq n$ . Тогда для доказа-

тельства попарной взаимной простоты чисел  $s_{k-3}, s_{k-2}, s_{k-1}, s_k$  достаточно проверить, что  $(s_{k-3}s_{k-2}s_{k-1}, s_k) = 1$ . Действительно, из равенства (6) следует, что  $s_k$  может иметь общий простой делитель  $p$  с  $s_{k-1}$  или с  $s_{k-3}$  тогда и только тогда, когда  $p$  делит  $s_{k-2}$ . Но это противоречит сделанному предположению.

**Первое доказательство теоремы 1.** Проверим, что если числа  $s_{n-4}, \dots, s_n, \dots, s_{n+3}$  — целые (очевидно, это утверждение верно при  $n = 4$ ), то число  $s_{n+4}$  также будет целым. Тогда по индукции получим, что все числа  $s_n$  — целые. Для краткости положим  $s_{n-3} = a, s_{n-2} = b, s_{n-1} = c$ . Тогда  $s_n s_{n-4} = ac + b^2$  и  $s_n$  делит  $ac + b^2$ . Согласно лемме 1,  $(abc, s_n) = 1$ . Поэтому мы можем несколько раз применить рекуррентное соотношение (6) по модулю числа  $s_n$ :

$$s_{n+1}a = s_nb + c^2 \equiv c^2 \pmod{s_n}, \text{ т.е.}$$

$$s_{n+1} \equiv c^2 a^{-1} \pmod{s_n};$$

$$s_{n+2}b = s_{n+1}c + s_n^2 \equiv s_{n+1}c \pmod{s_n}, \text{ т.е.}$$

$$s_{n+2} \equiv c^3 a^{-1} b^{-1} \pmod{s_n};$$

$$s_{n+3}c = s_{n+2}s_n + s_{n+1}^2 \equiv s_{n+1}^2 \pmod{s_n}, \text{ т.е.}$$

$$s_{n+3} \equiv c^3 a^{-2} \pmod{s_n}.$$

Здесь везде подразумевается, что обратный элемент вычисляется по модулю  $s_n$ .<sup>3</sup> Таким образом, по модулю  $s_n$  получаем последовательность

$$a, b, c, 0, c^2 a^{-1}, c^3 a^{-1} b^{-1}, c^3 a^{-2}.$$

Следующий элемент  $s_{n+4}$  мы должны находить из равенства  $s_n s_{n+4} = s_{n+1} s_{n+3} + s_{n+2}^2$ . Но теперь мы можем проверить делимость правой части на  $s_n$ , заменив все числа их остатками от деления на  $s_n$ :

$$s_{n+1} s_{n+3} + s_{n+2}^2 \equiv c^5 (ac + b^2) a^{-3} b^{-2} \equiv 0 \pmod{s_n}.$$

Таким образом,  $s_n$  делит  $s_{n+1} s_{n+3} + s_{n+2}^2$ , и  $s_{n+4}$  — целое число.

<sup>3</sup> Обратным к  $a$  по модулю  $m$  называется такое число  $a^{-1}$ , что  $aa^{-1} \equiv 1 \pmod{m}$ . Обратный элемент существует тогда и только тогда, когда  $(a, m) = 1$ , см. [5]. Далее во всех сравнениях обратные элементы будут пониматься именно в таком смысле.

Приведенное доказательство опирается на тот странный факт, что в выражении  $s_{n+1} s_{n+3} + s_{n+2}^2$ , взятом по модулю  $s_n$ , удалось выделить сомножитель  $ac + b^2 = s_{n-3} s_{n-1} + s_{n-2}^2$ , делящийся на  $s_n$ . Это рассуждение, конечно, доказывает теорему, но проливает мало света на природу последовательности Сомос-(4). Например, непонятно, повезет ли нам снова, когда мы попытаемся так же доказывать целочисленность какой-нибудь последовательности Сомоса более высокого порядка. Оказывается, что это действительно так, и впервые целочисленность последовательностей Сомос-(4), ..., Сомос-(7) была доказана именно таким образом, см. [1]. Это потребовало огромных символических вычислений, проделанных на компьютере, и сделало ситуацию лишь еще более загадочной.

**Задача 9.** Предположим, что в последовательности Сомос-(5), задаваемой равенством (11), элементы  $s_0, s_1, \dots, s_n$  — целые числа. Докажите, что в любой пятерке  $(s_{k-4}, s_{k-3}, s_{k-2}, s_{k-1}, s_k)$ , где  $k = 4, \dots, n$ , все числа попарно взаимно просты.

Приведем также задачу с московской олимпиады 1963 года, решение которой использует ту же идею, что и первое доказательство теоремы 1.

**Задача 10.** Последовательность  $a_1, a_2, \dots$  задается начальными условиями  $a_1 = 1, a_2 = 1$  и рекуррентным соотношением

$$a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}}, \quad n \geq 3.$$

Докажите, что все элементы этой последовательности — целые числа.

### Скрытый инвариант последовательности Сомос-4

Рассмотрим произвольную последовательность Сомос-4, задаваемую рекуррентным соотношением (1). Можно заметить, что вместе с последовательностью  $\{s_n\}$  тому же рекуррентному соотношению будут удовлетворять и любая последовательность вида  $\tilde{s}_n = A \cdot B^n \cdot s_n$ , где  $A, B$  — ненулевые константы. Поэтому естественно перейти к новым переменным, для которых подобной свободы уже не будет. Эти новые

переменные

$$f_n = \frac{S_{n-1}S_{n+1}}{S_n^2}. \quad (20)$$

Так как  $\frac{S_{n+2}S_{n-2}}{S_n^2} = f_{n+1}f_n^2f_{n-1}$ , то в терминах переменных  $f_n$  рекуррентное соотношение (1) переписется в виде

$$f_{n+1}f_n^2f_{n-1} = \alpha f_n + \beta. \quad (21)$$

Ситуация становится проще, поскольку новое рекуррентное соотношение имеет уже не четвертый, а второй порядок.

Оказывается, что любая последовательность, задаваемая формулой (21), обладает невидимым на первый взгляд инвариантом.

**Теорема 4.** Пусть последовательность  $\{f_n\}$  задана рекуррентным соотношением (21). Тогда величина

$$T_n = f_n f_{n-1} + \alpha \left( \frac{1}{f_n} + \frac{1}{f_{n-1}} \right) + \frac{\beta}{f_n f_{n-1}} \quad (22)$$

не зависит от  $n$ .

**Доказательство.** Выразим коэффициент  $\beta$  двумя разными способами:

$$f_{n+1}f_n^2f_{n-1} - \alpha f_n = \beta = f_{n+2}f_{n+1}f_n - \alpha f_{n+1}.$$

Поделим все три выражения на  $f_n f_{n+1}$ :

$$f_{n-1}f_n - \frac{\alpha}{f_{n+1}} = \frac{\beta}{f_n f_{n+1}} = f_{n+1}f_{n+2} - \frac{\alpha}{f_n},$$

а затем прибавим ко всем частям сумму

$f_n f_{n+1} + \alpha \left( \frac{1}{f_n} + \frac{1}{f_{n+1}} \right)$ . Тогда посередине мы получим величину  $T_n$ , а по краям – два новых выражения для  $T_n$ :

$$f_{n-1}f_n + f_n f_{n+1} + \frac{\alpha}{f_n} = T_n = f_n f_{n+1} + f_{n+1}f_{n+2} + \frac{\alpha}{f_{n+1}}.$$

Правая часть получается из левой заменой  $n \rightarrow n + 1$ . Поскольку  $n$  произвольно, равенство этих выражений означает, что они не зависят от номера  $n$ , а значит,  $T_n$  – инвариант.

**Следствие 1.** Значение инварианта  $T$  можно вычислять по формуле

$$T = f_{n-1}f_n + f_{n+1} + \frac{\alpha}{f_n}. \quad (23)$$

Как сама теорема 4, так и ее доказательство при первом знакомстве вызывают чувство недоумения. Когда предъявлена

формула (22) и написано доказательство инвариантности величины  $T_n$ , проверить все выкладки легко. Но непонятно, откуда появился инвариант  $T_n$  и как мы угадали те шаги, которые нужно сделать для доказательства теоремы 4. На эти вопросы мы ответим позже. А пока заметим, что на инвариант  $T = T_n$ , задаваемый формулой (22), можно посмотреть с геометрической точки зрения. Если на плоскости  $Oxy$  рисовать точки с координатами  $(X, Y) = (f_{n-1}, f_n)$ , то все они будут лежать на кривой, задаваемой уравнением

$$XY + \alpha \left( \frac{1}{X} + \frac{1}{Y} \right) + \frac{\beta}{XY} = T. \quad (24)$$

Таким образом, инвариант  $T$  – это коэффициент кривой (24), которая скрывается за последовательностью (6). Кривую (24) можно обнаружить экспериментально, если нарисовать достаточно много точек  $(X, Y) = (f_{n-1}, f_n)$  (рис. 2). А существова-

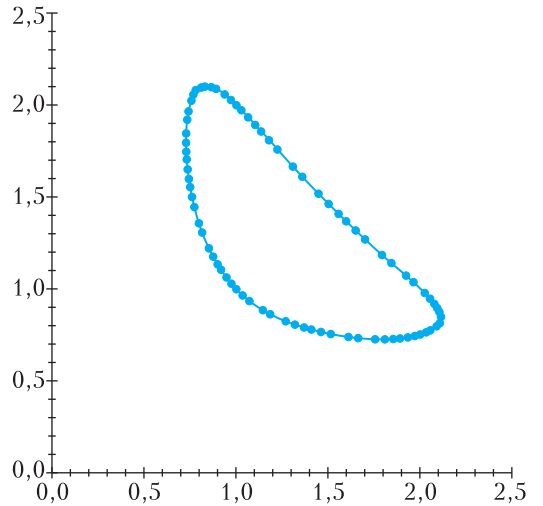


Рис. 2

ние такой кривой уже само по себе означает наличие инварианта: пары  $(f_{n-1}, f_n)$  связаны некоторым соотношением, зависящим от начальных условий  $(f_1, f_2)$ .

В общем случае уравнение (24) задает эллиптическую кривую, ее определение будет дано позже.

(Продолжение см. на с. 22)



# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru) и [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru) соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задача M2759 предлагалась на LX Уральском турнире юных математиков.

Задачи M2760, M2761 предлагались на майских учебно-тренировочных сборах кандидатов в команду на Международную математическую олимпиаду.

Задачи Ф2765–2768 предлагались на заключительном этапе LVI Всероссийской олимпиады школьников по физике.

## Задачи M2758–M2761, Ф2765–Ф2768

**M2758.** Числа  $2, 4, 8, 16, \dots, 2^{100}$  написаны на доске. За один ход можно стереть два числа  $a, b$  и заменить их на число  $\frac{ab}{a+b}$ . Докажите, что в конечном итоге на доске останется одно число, большее 1.

Фольклор

**M2759.** Диагонали  $AC$  и  $BD$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$  (рис. 1).

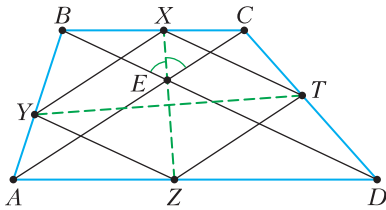


Рис. 1

Биссектриса угла  $BEC$  пересекает основания  $BC$  и  $AD$  в точках  $X$  и  $Z$ . Серединный перпендикуляр к отрезку  $XZ$  пересекает боковые стороны  $AB$  и  $CD$  в точках  $Y$  и  $T$ . Докажите, что  $XYZT$  – ромб.

М.Дидин, И.Кухарчук, П.Пучков

**M2760.** Клетчатую плоскость разбивают (по клеткам) на доминошки (прямоугольники  $2 \times 1$  и  $1 \times 2$ ). При каком наибольшем  $k$  всегда можно выбрать клетчатый квад-

рат  $100 \times 100$ , содержащий не менее  $k$  целых доминошек?

С.Берлов

**M2761.** Можно ли в окружность радиуса 1 вписать правильный многоугольник так, чтобы среди длин его диагоналей нашлось 2023 различных, в произведении дающих 1?

А.Кузнецов

**Ф2765.** На гладкую горизонтальную поверхность положили маленький шарик массой  $m$ . К нему прикрепили легкую нерастяжимую нить, переброшенную через легкий блок пренебрежимо малого радиуса, на другом конце которой подвесили груз массой  $M$  (рис. 2). Систему отпустили из состояния покоя (изображенного на рисунке пунктирной линией). В некоторый момент времени, когда нить наклонена к горизонту под углом  $\alpha$ , шарик отрывается от поверхности, а ускорение груза в этот момент времени равно нулю. Трение в оси блока отсутствует.

1) Найдите отношение  $m/M$ .

2) Найдите  $\sin \beta$  – синус угла наклона

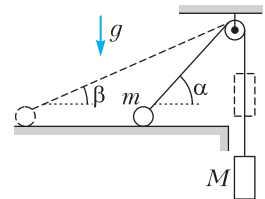


Рис. 2

нити к горизонту в начальный момент времени.

*И.Юдин*

**Ф2766.** Герметично закрытый с обоих концов теплоизолированный цилиндр расположен горизонтально. Внутри цилиндра находится непроводящий тепло легкий вертикальный поршень площадью  $S$ , делящий цилиндр на два отсека. Поршень может перемещаться внутри цилиндра без трения. Отсеки заполнены идеальным одноатомным газом при давлении  $p_0$ . В первый отсек помещен нагреватель, по которому может поступать тепло, во втором отсеке размещен теплообменник, с помощью которого тепло отводится из отсека. Модули мощностей подвода и отвода тепла равны  $q_1$  и  $q_2$  соответственно. Нагреватель и теплообменник приводят в действие одновременно. В пунктах 1 и 2 считайте, что первоначальные объемы отсеков равны.

1) Определите скорость перемещения поршня в начальный момент времени – сразу после включения нагревателя и теплообменника.

2) Определите скорость перемещения поршня в момент времени, когда поршень делит объем цилиндра в отношении 2 : 1, если модули мощностей  $q_1$  и  $q_2$  одинаковы и равны  $q$ .

3) Пусть в начальный момент времени поршень делит объем цилиндра в отношении 3 : 1, а во втором (меньшем) отсеке вместо теплообменника установлен нагреватель мощностью  $q_2$ . Определите отношение  $q_2/q_1$ , при котором поршень останется неподвижным.

Все процессы считать равновесными.

*А.Аполонский*

**Ф2767.** В упрощенной модели источник постоянного тока состоит из соединенных последовательно идеального источника постоянного напряжения  $U_0$  и резистора сопротивлением  $r$  (рис. 3). При подключении источника постоянного тока в цепь,

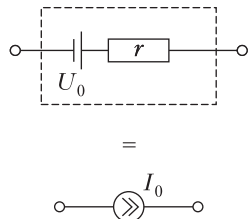


Рис. 3

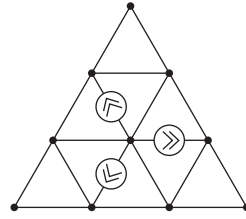


Рис. 4

содержащую резисторы сопротивлением  $R \ll r$ , можно считать, что сила тока  $I_0 \approx U_0/r$ . Электрическая цепь (рис. 4) представляет собой проволочную сетку, которая состоит из звеньев одинакового сопротивления  $R$ . Три звена заменены на одинаковые источники постоянного тока  $I_0$ . Найдите, через какие звенья цепи течет минимальный ток и чему равна его сила  $I_{\min}$ . Ответ выразите только через  $I_0$ .

*А.Вергунов*

**Ф2768.** В непрозрачном плоском слое толщиной  $h$  просверлено отверстие, форма боковой поверхности которого представляет собой усеченный конус с диаметрами оснований  $d$  и  $D$ , ось которого перпендикулярна плоским поверхностям слоя (рис. 5). Боковая поверхность конуса посеребрена и идеально отражает падающий на нее свет. За слоем на расстоянии  $L$  от ближайшей к нему плоской поверхности находится плоский экран. Система освещается параллельным потоком света, направленным вдоль оси конуса. Геометрические параметры  $h, d, D$  и  $L$  связаны соотношениями  $D \ll h \ll L, D = 4d$ .

1) Изобразите картину, наблюдаемую на экране. На рисунке укажите все характерные геометрические размеры.

2) Как изменится картина из пункта 1, если между слоем и экраном поместить тонкую собирающую линзу? Фокусное расстояние линзы  $F = L/2$ , главная оптическая ось линзы совпадает с осью конуса,

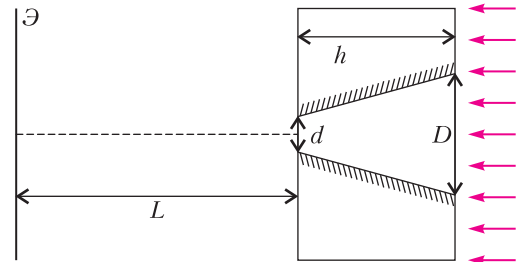


Рис. 5

экран расположен в фокальной плоскости линзы.

*Примечание.* Все характерные геометрические размеры должны быть выражены через  $d$ ,  $h$  и  $L$ .

А.Аполонский

**Решения задачи M2746–M2749,  
Ф2753–Ф2756**

**M2746.** Улитка Турбо сидит в некоторой точке окружности длиной 1. Дана бесконечная последовательность положительных чисел  $c_1, c_2, \dots$ . Турбо последовательно проползает расстояния  $c_1, c_2, \dots$  по этой окружности, каждый раз выбирая, ползти ли ей по часовой стрелке или против часовой стрелки. Определите наибольшую константу  $C > 0$  со следующим свойством: для любой последовательности положительных чисел  $c_1, c_2, \dots$  таких, что  $c_i < C$  для каждого  $i$ , Турбо может (после изучения последовательности) гарантировать, что на окружности есть точка, которую она никогда не посетит и не переползет.

**Ответ:**  $C = 1/2$ .

Пусть все  $c_i$  меньше  $1/2$ . Зафиксируем точку  $X$  на окружности, отличную от той, в которой вначале находилась Турбо. Поймем, что Турбо сможет действовать так, чтобы никогда не посетить  $X$ . Действительно, если в текущий момент Турбо находится в точке  $Y$ , то длина одной из двух дуг  $XY$  не меньше  $1/2$ , поэтому если Турбо станет ползти по этой дуге, то она не дойдет до  $X$ .

Пусть теперь  $C > 1/2$  и пусть последовательность  $c_i$  определена так:  $c_i = 1/2$  для нечетного  $i$  и  $c_i = 1/2 + \epsilon < C$  для четного  $i$  (где  $\epsilon > 0$ ). Заметим, что  $c_i + c_{i+1} > 1$ , поэтому если Турбо сделала два хода подряд в одном и том же направлении, то она уже проползла всю окружность. Иначе она чередует ходы по часовой стрелке и против часовой стрелки. Тогда в результате пары последовательных ходов Турбо смещается на  $\epsilon$  в одном и том же направлении. Понятно, что через конечное количество ходов (достаточно  $[1/\epsilon] + 1$  ходов) Турбо

все равно побывает во всех точках окружности.

Р.Юсупова

**M2747.** В тетраэдре  $ABCD$  на продолжении ребер  $AB$ ,  $AC$  и  $AD$  за точку  $A$  отметили три точки, находящиеся от  $A$  на расстоянии, равном полупериметру треугольника  $BCD$ . Аналогично отметили по три точки, соответствующие вершинам  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Докажите, что если существует сфера, касающаяся всех ребер тетраэдра  $ABCD$ , то отмеченные 12 точек лежат на одной сфере.

Пусть есть сфера  $\gamma$  с центром  $S$  радиуса  $\rho$ , которая касается всех ребер тетраэдра: ребра  $AB$  – в точке  $X_{AB}$ , ребра  $BC$  – в точке  $X_{BC}$  и т.д. Пусть  $t_A = AX_{AB} = AX_{AC} = AX_{AD}$  – длина отрезка касательной, проведенной к  $\gamma$  из  $A$ ; аналогично, пусть  $t_B$  – длина отрезка касательной, проведенной к  $\gamma$  из  $B$ , и т.д.

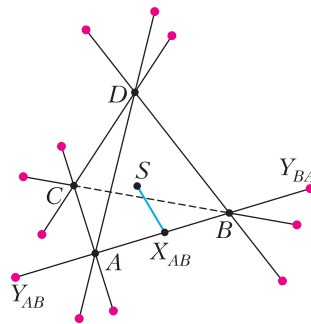
Пусть  $Y_{AB}$  – точка, отмеченная на продолжении ребра  $AB$  за точку  $A$  (см. рисунок), так что

$$\begin{aligned} AY_{AB} &= (BC + CD + DB)/2 = \\ &= ((t_B + t_C) + (t_C + t_D) + (t_D + t_B))/2 = \\ &= t_B + t_C + t_D. \end{aligned}$$

Так как  $SX_{AB} \perp AB$ , по теореме Пифагора имеем

$$\begin{aligned} SY_{AB}^2 &= SX_{AB}^2 + X_{AB}Y_{AB}^2 = \\ &= \rho^2 + (AX_{AB} + AY_{AB})^2 = \\ &= \rho^2 + (t_A + t_B + t_C + t_D)^2. \end{aligned}$$

Видим, что расстояние от  $S$  до отмеченной точки  $Y_{AB}$  равно симметрическому выражению относительно  $A, B, C, D$ . Поэтому



расстояние от  $S$  до любой другой отмеченной точки равно тому же. Значит, все отмеченные точки лежат на одной сфере с центром  $S$ . Задача решена.

Верно и обратное утверждению задачи. Это можно доказать, заметив, что множество точек, равноудаленных от трех отмеченных точек  $Y_{AB}$ ,  $Y_{AC}$ ,  $Y_{AD}$ , — это так называемая *биссекторная прямая* трехгранного угла, образованного лучами  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$  (т.е. прямая, проходящая через  $A$ , все точки которой равноудалены от прямых  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ ). Таким образом, биссекторные прямые всех трехгранных углов тетраэдра должны пересекаться в одной точке — центре сферы, касающейся всех ребер тетраэдра.

В завершение отметим, что конструкция, рассмотренная в задаче, обобщает *окружности Конвея* для треугольника на плоскости. В этой плоской конструкции для данного треугольника отмечают точки на продолжениях его сторон на расстоянии от вершины, равном длине противоположной стороны. В таком случае шесть отмеченных точек лежат на одной окружности — окружности Конвея.

В.Александров

**M2748.** В таблице  $44 \times 44$  часть клеток синие, а остальные — красные. Никакие синие клетки не граничат друг с другом по стороне. Множество красных клеток, наоборот, связно по сторонам (от любой красной клетки можно добраться до любой другой красной, переходя из клетки в клетку через общую сторону и не заходя в синие клетки). Докажите, что синих клеток в таблице меньше трети.

Положим  $N = 44$ , и пусть  $b$  и  $r$  — количества синих и красных клеток. Оценим сверху количество  $M$  единичных отрезков, являющихся границами между красной и синей клетками. Всего у красных клеток  $4r$  сторон. При этом на границу таблицы «тратится» не меньше  $2N$  сторон красных клеток. Действительно, каждая из 4 сторон границы разбивается на  $N/2$  пар соседних единичных отрезков, а оба отрезка в паре не могут быть сторонами

синих клеток. Теперь рассмотрим граф, вершины которого — красные клетки, а ребра соединяют клетки, имеющие общую сторону. По условию граф связан, поэтому количество его ребер не меньше  $r - 1$ . Таким образом, не менее  $2(r - 1)$  сторон среди всех  $4r$  сторон красных клеток являются границами между парами красных клеток. Получаем

$$M \leq 4r - 2N - 2(r - 1) = 2r - 2N + 2. \quad (1)$$

Оценим теперь  $M$  снизу. Сложив количества сторон всех синих клеток, получим  $4b$ . Ясно, что на одной стороне таблицы не больше  $N/2$  сторон синих клеток. Поэтому

$$M \geq 4b - 2N. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что  $4b - 2N \leq 2r - 2N + 2$ , или  $4b \leq 2r + 2$ . Поскольку  $b + r = N^2$ , получаем отсюда  $6b \leq 2N^2 + 2$ , или  $b \leq \frac{N^2 + 1}{3}$ . Поскольку  $N^2 = 44^2 \equiv 1 \pmod{3}$ , а  $b$  целое, получаем  $b \leq \frac{N^2 - 1}{3}$ , что завершает решение.

Аналогично можно провести оценку для любого размера таблицы и получить:

$$b \leq \left\lfloor \frac{N^2}{3} \right\rfloor \text{ при четном } N; \quad b \leq \left\lfloor \frac{N^2}{3} \right\rfloor \text{ при}$$

нечетном  $N$ , не кратном 3;  $b \leq \frac{N^2}{3} + 1$  при нечетном  $N$ , кратном 3.

Для многих значений  $N$  есть примеры, на которых эти оценки достигаются. Есть предположение, что полученные оценки точны при всех  $N$ .

Б.Френкин

**M2749\*.** Из  $n$  монет одна фальшивая, которая отличается по весу от настоящей неизвестно в какую сторону. Чашечные весы работают правильно, если груз на одной чаше тяжелее, чем на другой, а при равенстве могут показать что угодно. При каких  $n$  можно найти фальшивую монету и определить, легче она настоящей или тяжелее, за  $k$  взвешиваний?

**Ответ.**  $3 < n \leq 2^{k-1}$ ,  $n \neq 2^{k-1} - 1$ .

Прежде всего заметим, что при  $n = 3$  взвешивать можно только по одной монете.

Поэтому, если при взвешивании двух настоящих монет перевешивать все время будет одна и та же, мы не сможем определить, является ли фальшивой «самая тяжелая» или «самая легкая» монета.

Далее, так как при каждом взвешивании возможны два исхода, а из  $n$  монет любая может оказаться как легче, так и тяжелее остальных, то различить эти  $2n$  вариантов  $k$  взвешиваниями можно только при  $2n \leq 2^k$ . Наконец, при  $n = 2^{k-1} - 1$  мы можем в первом взвешивании положить на чаши по  $m \leq (n-1)/2$  монет. При любом исходе этого взвешивания любая монета на перевесившей чаше может оказаться фальшивой и более тяжелой, любая монета на другой чаше – фальшивой и более легкой, а любая из оставшихся  $n - 2m$  монет может отличаться по весу в любую сторону. Таким образом, всего мы имеем  $2n - 2m$  вариантов. При  $m < (n-1)/2$  это число больше, чем  $2^{k-1}$ , следовательно, оставшихся взвешиваний не хватит, чтобы определить фальшивую монету. Если же  $m = (n-1)/2$ , то число вариантов в точности равно  $2^{k-1}$ , а значит, в каждом следующем взвешивании любому из двух возможных вариантов должно соответствовать ровно половина вариантов. Но при нечетном числе монет этого добиться невозможно, поскольку фальшивая монета может не попасть на весы, а в этом случае возможны оба исхода взвешивания.

Покажем теперь, как найти фальшивую монету при  $n = 2^{k-1}$ . При первом взвешивании разделим все монеты на две равные части и взвесим их. Затем переложим половину монет с каждой из чаш на другую. Тогда все монеты, оказавшиеся в одном из взвешиваний на более тяжелой чаше, а в другом на более легкой, – настоящие, а из остальных половина может оказаться только тяжелее настоящей, а вторая половина только легче. Положив при следующем взвешивании на каждую чашу половину «тяжелых» и половину «легких» монет, мы уменьшим число подозрительных монет вдвое. Будем повторять такие взвешивания, пока не останется одна «тяжелая» и одна «легкая» монета,

после чего сравним эти две монеты с двумя настоящими.

Этот алгоритм с небольшими изменениями работает и при  $n < 2^{k-1} - 1$ . Положим в первом взвешивании на каждую чашу по  $m = \lfloor n/2 \rfloor$  монет. Затем переложим с каждой чаши на другую  $\lfloor m/2 \rfloor$  монет и при нечетном  $n$  заменим одну из остальных монет на оставшуюся невзвешенной. Тогда мы найдем не менее  $m - 1$  настоящих монет, а остальные разделятся на «тяжелые» и «легкие», причем как тех, так и других будет не больше  $2^{k-3}$ . Последующие взвешивания проводим так же, как при  $n = 2^{k-1}$ , причем, если число монет какого-то вида окажется нечетным, будем добавлять на одну из чаш настоящую монету.

В заключение вернемся к случаю  $n = 3$ . Хотя гарантированно определить фальшивую монету нельзя ни за какое число взвешиваний, ясно, что рано или поздно при взвешивании двух настоящих монет мы получим результат, отличный от предыдущих. Поэтому можно сформулировать задачу об определении фальшивой монеты за наименьшее *среднее* число взвешиваний. Подумайте, как решить эту задачу, если известно, что при равенстве масс на чашах весов любая из них перевешивает с вероятностью  $1/2$ .

А.Заславский

**Ф2753.**<sup>1</sup> *Снаряд летит по вертикали и разрывается в высшей точке траектории на множество осколков, разлетающихся во всевозможных направлениях с равными по модулю скоростями. Через  $t_1 = 0,4$  с после разрыва все осколки находятся в полете, один из осколков движется горизонтально, его импульс  $p_1 = 30$  кг·м/с. Масса снаряда  $M = 10$  кг.*

- 1) *Найдите модуль  $p_2$  суммарного импульса всех остальных осколков в этот момент времени. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.*
- 2) *Найдите угол  $\alpha$  между векторами  $\vec{p}_2$  и  $\vec{g}$  в этот момент времени. В ответе*

<sup>1</sup>Автор решений задач Ф2753–Ф2756 – В.Плис.

укажите значение тригонометрической функции угла:  $\sin \alpha$  или  $\operatorname{tg} \alpha$ .

Наибольшее расстояние от точки разрыва до точки падения осколков на горизонтальную поверхность  $d = 80$  м.

3) Найдите продолжительность  $T$  полета таких осколков. Сопротивление воздуха считайте пренебрежимо малым.

Скорость изменения импульса системы всех осколков после разрыва равна сумме внешних сил:

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = M \vec{g}.$$

В момент разрыва суммарный импульс осколков  $\vec{p}_0 = \vec{0}$ . Тогда импульс системы осколков изменяется по закону

$$\vec{p}(t) = M \vec{g}t.$$

В момент времени  $t_1$

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2, \quad \vec{p}_1 \perp \vec{p}_2,$$

$$p_2 = \sqrt{(Mgt_1)^2 + p_1^2} = 50 \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

В прямоугольном треугольнике импульсов

$$\sin \alpha = \frac{p_1}{p_2} = \frac{p_1}{\sqrt{(Mgt_1)^2 + p_1^2}} = 0,6,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p_1}{Mgt_1} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Если высота точки старта фиксирована, то наибольшее расстояние от точки разрыва до точки падения осколка на поверхность достигается при наибольшем горизонтальном перемещении осколка. Обратимся к треугольнику скоростей (рис. 1):

$$\vec{v}(T) = \vec{v}_0 + \vec{g}T.$$

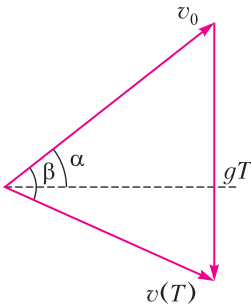


Рис. 1

Площадь треугольника равна

$$\frac{1}{2} v_0 \cos \alpha \cdot gT = \frac{1}{2} v_0 v(T) \sin \beta.$$

Горизонтальное перемещение за время полета

$$x(T) = v_0 \cos \alpha \cdot T = \frac{1}{g} v_0 v(T) \sin \beta,$$

где  $v(T) = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ . Тогда

$$x(T) = \frac{1}{g} v_0 \sqrt{v_0^2 + 2gh} \sin \beta.$$

Отсюда следует, что наибольшая дальность достигается в том случае, когда за время полета вектор скорости поворачивается на угол  $\beta = 90^\circ$ . Модуль перемещения осколка за время полета

$$d = |\vec{r}(T)| = \left| \vec{v}_0 T + \vec{g} \frac{T^2}{2} \right| = \frac{1}{2} |\vec{v}_0 + \vec{v}(T)| T,$$

при  $\vec{v}_0 \perp \vec{v}(T)$  диагонали прямоугольника (рис. 2) равны

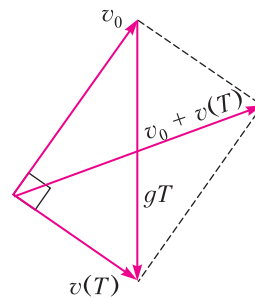


Рис. 2

$$|\vec{v}_0 + \vec{v}(T)| = gT.$$

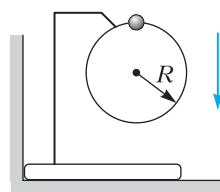
Наибольшее расстояние от точки разрыва снаряда до точки падения осколков на поверхность

$$d = \frac{1}{2} gT^2.$$

Продолжительность такого полета

$$T = \sqrt{\frac{2d}{g}} = 4 \text{ с}.$$

**Ф2754.** Брусок установлен вплотную к вертикальной стенке (см. рисунок). На бруске закреплено кольцо радиусом  $R = 1$  м, на которое надет шарик. Массы бруска и шарика одинаковы. Кольцо и держатель легкие.



Трения нет. Из верхней точки кольца шарик начинает скользить с пренебрежимо малой начальной скоростью.

- 1) Найдите ускорение  $\bar{a}$  шарика в тот момент, когда сила, с которой брусок действует на вертикальную стенку, обращается в ноль. В ответе укажите модуль и направление вектора ускорения.
- 2) Найдите вертикальное перемещение  $h$  шарика к этому моменту времени.
- 3) Найдите наибольшую скорость  $v$  бруска.

Все перемещения происходят в одной вертикальной плоскости. Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . В процессе движения брусок не отрывается от гладкой горизонтальной плоскости.

До отрыва бруска от стенки шарик движется по дуге окружности. Согласно второму закону Ньютона,  $m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{N}$ , где  $\bar{N}$  – сила нормальной реакции, действующая на шарик со стороны кольца. Шарик, в свою очередь, действует на кольцо с силой  $\bar{F} = -\bar{N}$ , направленной к центру кольца. Эта сила прижимает конструкцию к стенке. Переходим к проекциям сил и ускорения на радиальное направление:

$$\frac{mv^2}{R} = mg \cos \theta - N,$$

где  $\theta$  – угол, на который повернулся радиус-вектор шарика к рассматриваемому моменту времени. Трения нет, работа силы нормальной реакции нулевая, поскольку  $\bar{N} \perp \bar{v}$ , тогда полная механическая энергия шарика сохраняется, т.е. убыль потенциальной энергии равна приращению кинетической:

$$\frac{mv^2}{2} = mgR(1 - \cos \theta).$$

Из приведенных соотношений получаем

$$N = mg(3 \cos \theta - 2).$$

В момент отрыва при  $\cos \theta = \frac{2}{3}$  сила нормальной реакции  $N = 0$ , поэтому

$$m\bar{a} = m\bar{g}, \quad \bar{a} = \bar{g}, \quad a = g = 10 \text{ м/с}^2.$$

К этому моменту вертикальное перемещение шарика

$$h = R(1 - \cos \theta) = \frac{R}{3} \approx 0,33 \text{ м}.$$

Отсюда находим модуль скорости шарика в рассматриваемый момент:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2}{3}gR}.$$

В следующее мгновение направление силы  $\bar{F}$  изменится на противоположное, брусок оторвется от стенки и придет в движение. При движении системы после отрыва скорость бруска будет наибольшей в тот момент, когда шарик проходит нижнюю точку траектории. Внешние силы, действующие на систему, направлены вертикально, трения нет, поэтому закон сохранения горизонтального импульса системы

$$m v_0 \cos \theta = m v_{1x} + m v_{2x}$$

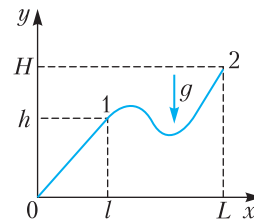
и закон сохранения полной механической энергии

$$mg \cdot 2R = \frac{1}{2}(m v_{1x}^2 + m v_{2x}^2)$$

приводят к ответу на третий вопрос задачи:

$$v = v_{1x} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{52}}{3\sqrt{3}} \sqrt{gR} \approx 1,66 \sqrt{gR} \approx 5,25 \text{ м/с}.$$

**Ф2755.** Школьник втаскивает санки на горку. Профиль горки показан на рисунке. Чтобы, двигаясь по прямой, мед-



ленно втаскивать санки массой  $m = 5 \text{ кг}$  из точки 0 в точку 1, прикладывая силу вдоль плоской поверхности горки, необходимо совершить работу  $A_1 = 300 \text{ Дж}$ . В точке 1 школьник отпускает санки. Вертикальная координата точки старта  $h = 4,6 \text{ м}$ , начальная скорость санок нулевая. Коэффициент трения скольжения санок по горке одинаков на всей поверхности горки. Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

1) Найдите скорость  $v$  санок у основания горки в точке 0.

2) Какую работу  $A_2$  следует совершить, чтобы медленно переместить санки по горке из точки 1 в точку 2? В точке 2 вертикальная координата  $H = 10$  м,  $L = 4l$ . На каждом элементарном перемещении вектор силы, которую школьник прикладывает к санкам, и вектор перемещения санок лежат на одной прямой. Все перемещения происходят в одной вертикальной плоскости.

В процессе медленного подъема санок школьник действует на санки силой

$$F = mg \sin \alpha + F_{\text{тр}} = mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол наклона прямой к горизонту,

$$\sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + l^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{l}{\sqrt{h^2 + l^2}}.$$

При этом работа внешней силы

$$A_1 = F \sqrt{h^2 + l^2} = mgh + \mu mgl.$$

При съезде санок с горки, согласно теореме об изменении кинетической энергии,

$$m \frac{v^2}{2} = mgh - \mu mgl.$$

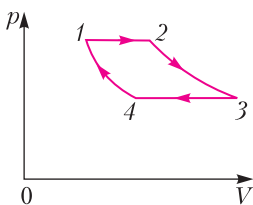
Отсюда

$$v = 2\sqrt{gh - \frac{A_1}{2m}} = 8 \text{ м/с}.$$

Суммирование всех элементарных работ внешней силы на пути из точки 1 в точку 2 приводит к результату

$$A_2 = mg(H - h) + (A_1 - mgh) \left( \frac{L}{l} - 1 \right) = 480 \text{ Дж}.$$

**Ф2756.** В цикле 1–2–3–4–1 тепловой машины две изобары и две изотермы (см. рисунок). Рабочее вещество – одноатомный идеальный газ. В процессе изобарного расширения до удвоения объема газ совер-



шает работу  $A$ . Такую же работу  $A$  совершает газ при изотермическом расширении.

1) Найдите количество теплоты  $Q_{123}$ , подведенное к газу в процессах 1–2–3.

2) Найдите количество теплоты  $Q_{34}$ , отведенное от газа в процессе изобарического сжатия 3–4 ( $Q_{34} > 0$ ).

3) Найдите КПД  $\eta$  цикла.

В процессе изобарического расширения к газу подводят количество теплоты  $Q_{12} = 2,5A$ , тогда

$$Q_{123} = 2,5A + A = 3,5A.$$

В процессе изобарического сжатия от газа отводят количество теплоты

$$Q_{34} = 2,5A.$$

Площади под изотермами 2–3 и 1–4 отличаются в 2 раза. Действительно, в соответствующих суммах  $\sum p_i \Delta V_i$  одинаковым  $p_i$  соответствуют вдвое отличающиеся  $\Delta V_i$  (по условию  $V_4 - V_1 = \frac{1}{2}(V_3 - V_2)$ ). Тогда в процессе 4–1 от газа отводят количество теплоты  $0,5A$ . За цикл отведено количество теплоты  $Q_{\text{отв}} = 2,5A + 0,5A = 3A$ . КПД цикла

$$\eta = 1 - \frac{Q_{\text{отв}}}{Q_{\text{подв}}} = 1 - \frac{3A}{3,5A} = \frac{1}{7} \approx 0,14.$$

(Начало см. на с. 8)

### Литература

1. D. Gale. Tracking the automatic ant and other mathematical explorations. A collection of mathematical entertainments columns from the Mathematical Intelligencer. – NY: Springer, 1998.

2. А. И. Маркушевич. Возвратные последовательности. – М.: ПИТЛ, 1950. (Популярные лекции по математике, вып. 1)

3. M. Somos. In the Elliptic Realm.

4. В. М. Тихомиров. Великие математики прошлого и их великие теоремы. – М.: МЦНМО, 1999.

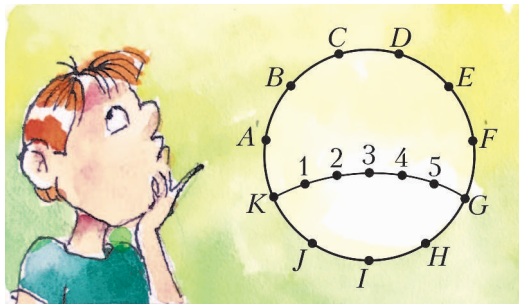
5. А. Егоров. Деление с остатком и сравнение по модулю. – «Квант», 1991, №6.

(Продолжение следует)



## Задачи

1. Метро состоит из кольцевой линии и хорды (см. рисунок). Между каждыми двумя соседними станциями ехать



по времени одинаково, на пересадку между кольцевой линией и хордой время не тратится. Вася живет на одной из шести станций над хордой, а школа расположена на одной из пяти станций внутри хорды. От Васиного дома до школы есть два различных кратчайших маршрута, причем хотя бы в одном из них нужно ехать по кольцевой линии по часовой стрелке. На каких станциях расположены Васин дом и школа?

*Т.Корчемкина*

2. В турнире участвовали десять шахматистов. Каждый сыграл с каждым два раза: один раз белыми и один раз черными, причем какую-то из этих партий он выиграл, а другую проиграл (ничьих не было). Могло ли оказаться так, что половину всех партий выиграли белые, а половину — черные?

*Б.Френкин*



Задачи 1–3 предлагались на Московской устной олимпиаде, задача 4 — на Математическом празднике.

3. Некоторые клетки доски размером  $7 \times 7$  покрашены в черный цвет, образуя черный многоугольник. Его



разрезали по прямой, идущей по линии сетки. Мог ли он распасться на пять равных фигур?

*А.Шаповалов*

4. Кащей заточил в темницу толпу пленников и сказал: «Завтра вам предстоит испытание. Я выберу нескольких из вас (кого захочу, но минимум троих), посажу за круглый стол в каком-то порядке и каждому на лоб наклею бумажку с нарисованной на ней фигуркой. Фигурки могут повторяться, но никакие две разные фигурки не будут наклеены на одинаковое число людей. Каждый увидит фигурки остальных, а



свою — нет. Подавать друг другу какие-то знаки запрещено. После этого я наклею сниму и велю всех развести по отдельным камерам. Там каждый должен будет на листе бумаги нарисовать фигурку. Если хоть один нарисует такую, какая была у него на лбу, всех отпущу. Иначе останетесь здесь навечно».

Как пленникам договориться действовать, чтобы спастись?

*Т.Голенищева-Кутузова, Т.Казицына*

# Мудрецы на графе

К. КОХАСЬ, А. ЛАТЫШЕВ

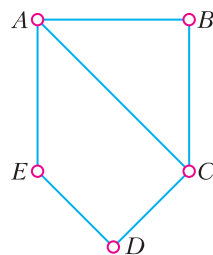


Рис. 1. Какой-то граф  $G$

**Н**АЧНЕМ С ТОГО, ЧТО НАПОМНИМ читателям загадку о шляпах, очень известную и уже почти ставшую классической.

**Загадка.** Два мудреца сидят друг напротив друга. Каждому из них надевают шляпу черного или белого цвета так, что каждый не видит свою шляпу, но видит шляпу напарника. Не общаясь и не передавая никаких сигналов, они должны по команде одновременно назвать предполагаемый цвет своей шляпы. Мудрецы заранее были предупреждены о правилах и имели возможность посоветоваться. Как им следует действовать, чтобы заведомо хотя бы один из них угадал свой цвет?

Ответ удивителен и красив. Не надо быть мудрецом, чтобы предсказать, что при проведении этого шоу шляпы окажутся либо одинакового цвета, либо различного. Пусть первый мудрец проверяет первую гипотезу, пользуясь стратегией *что вижу, то и говорю*, а второй – вторую: *называю цвет, противоположный тому, который вижу*. Очевидно, что заведомо кто-то из них (причем только один) угадает.

Сразу отметим одну тонкость: хотя один из мудрецов заведомо угадает, но сами они в момент угадывания не знают и не могут знать, кто же именно окажется этим счастливецом, – ведь оба не имеют никакой информации о цвете своей шляпы.

Не так давно в «Кванте» уже рассказывалось об обобщенной игре в угадывание шляп и рассматривался вопрос о том, как следует действовать  $n$  мудрецам в аналогичном тесте, если им дают шляпы  $n$  (или даже больше) цветов (см. статью К. Кохася «Принесите еще шляп!» в «Кванте» №11 за 2019 г.). В этой статье мы рассмотрим другое обобщение этой загадки. А именно, будем решать следующую общую задачу.

**Задача.** Пусть дан произвольный граф  $G$ , т.е. схема, вроде той, что показана на рисун-

ке 1. Кружочками – они называются *вершинами* графа – обозначены комнаты, а линиями – это *ребра* графа – обозначены оптические кабели, соединяющие комнаты. Комнаты, соединенные линиями, будем называть *соседними*. В каждой комнате находится один мудрец, благодаря оптическим кабелям он видит, что происходит в соседних комнатах.<sup>1</sup> Все мудрецы знакомы друг с другом, различают друг друга, знают, какой у них граф и кто в какой вершине находится. Дальше с ними проводят *тест*, аналогичный тому, что описан в загадке. Каждому мудрецу надевают шляпу черного или белого цвета так, что каждый не видит свою шляпу, но благодаря оптическим кабелям видит шляпы своих соседей. Не общаясь и не передавая никаких сигналов, мудрецы должны по команде одновременно назвать предполагаемый цвет своей шляпы. Перед тестом мудрецы проводят совещание, на котором договариваются о своих стратегиях. Вопрос, который нас интересует, – *какое наибольшее количество мудрецов может заведомо угадать свой цвет?*

Честно говоря, эта постановка вопроса совершенно непонятна. Давайте разбираться, о чем же на самом деле тут спрашивается.

Во-первых, для ясности будем считать, что организатором этого теста является чертик, который играет *против* мудрецов. Чертик незримо присутствует на совещании (подсматривает и подслушивает) и узнает стратегии всех мудрецов. Если каждому из  $n$  мудрецов дают шляпу одного из двух цветов, то всего имеется  $2^n$  «раскладов» шляп. При проведении теста чертик старается выбрать

<sup>1</sup> Кажется, в реальности оптические кабели работают по-другому, видимо, там должно быть еще какое-то оборудование, о котором мы не упомянули.

такой расклад шляп, чтобы угадавших было как можно меньше.

Во-вторых, что такое стратегия мудреца? Стратегия мудреца – это правило, по которому мудрец, посмотрев на шляпы соседей, определяет, какой цвет он назовет. Правило должно быть *детерминированным*: для вычисления своего ответа мудрец не должен бросать монетку или пользоваться какими бы то ни было иными вероятностными механизмами, ответ определяется только набором цветов шляп, которые мудрец видит у своих соседей. Это значит, что при повторении эксперимента каждый мудрец, увидев, что каждый его сосед имеет шляпу того же цвета, что и в предыдущем эксперименте, даст тот же самый ответ. В остальном правило может быть произвольным. Например, допустимо, что мудрец, не глядя на соседей, в любом случае говорит: *у меня белая шляпа*. Или мудрец может подсчитать количество черных шляп у своих соседей и, если это число четное, заявить: *у меня белая шляпа*, а если нечетное – *у меня черная шляпа*.

Ну а стратегия общего вида выглядит как-то так. Рассмотрим для примера мудреца  $A$  на рисунке 1. У него три соседа –  $B$ ,  $C$  и  $E$ , и его стратегия может быть задана следующей таблицей:

$B$	$C$	$E$	ответ
ч	ч	ч	?
ч	ч	б	?
ч	б	ч	?
ч	б	б	?
б	ч	ч	?
б	ч	б	?
б	б	ч	?
б	б	б	?

В строках таблицы перечислим возможные наборы цветов шляп у соседей, для каждого из этих наборов мудрец  $A$  должен иметь определенный ответ, который запишем в этой строке вместо знака вопроса. На месте каждого из восьми вопросов может стоять «ч» или «б», значит, всего имеется  $2^8$  вариантов заполнения таблицы, т.е. для мудреца  $A$  существует  $2^8$  различных стратегий. Много!

В-третьих, что же именно означает вопрос задачи, ведь нам не дано ни одного численного параметра? «Дан граф  $G$ » – как прика-

жете это понимать? И в каких терминах требуется дать ответ?

Понимать это надо в достаточно традиционном смысле. Для каждого конкретного графа  $G$  задача, будем надеяться, может быть как-то решена и мы сумеем найти ответ, обозначим его  $\mathcal{L}(G)$ .<sup>2</sup> По определению,  $\mathcal{L}(G)$  – это наибольшее число, для которого мудрецы смогут изобрести себе такие стратегии, что при любом раскладе шляп не менее  $\mathcal{L}(G)$  мудрецов угадают свой цвет. Следует постараться выразить этот ответ через какие-нибудь общепринятые параметры графа. Примерами таких параметров могут быть: количество вершин, количество ребер, максимальная степень вершины (т.е. какое наибольшее число ребер выходит из вершины в этом графе) и др.

Надеемся, стало яснее. Проверим? Вот вопрос, можно сказать, на общую сообразительность.

**Вопрос.** Мы выяснили, что для графа на рисунке 1 существует «всего лишь»  $2^3$  различных раскладов шляп, но при этом у одного только мудреца  $A$  имеется выбор из  $2^8$  стратегий. Казалось бы, выбор у мудрецов большой, но все же: как вы думаете, сможет ли хоть один мудрец угадать цвет шляпы на графе, изображенном на рисунке 1?

Ответ непросто изобрести «с нуля», но мы ведь уже его сообщили вам в самом начале! Разумеется, сможет! Для этого, например, мудрец  $A$  может на совещании договориться с мудрецом  $E$ , что они во время теста будут смотреть только друг на друга и разыгрывать игру из загадки, описанной в начале статьи. Кстати, если при этом еще и мудрец  $B$  договорится о том же с мудрецом  $C$ , то на графе  $G$  угадают даже двое!

Пожалуй, стоит оформить высказанную идею в виде отдельного утверждения. Договоримся называть набор из нескольких ребер графа, не имеющих общих вершин, *паросочетанием* – термин совершенно прозрачный: мы выбираем такой набор из четного числа вершин, который с помощью имеющихся ребер можно разбить на пары. Например, если мы возьмем в графе произвольное

<sup>2</sup> Здесь значок « $\mathcal{L}$ » – это шляпа. А запись « $\mathcal{L}(G)$ » читается «шляпа от  $G$ ». Общепринятого обозначения для этой величины нет, и, как мы выясним дальше, оно и не требуется.

ребро, то оно считается паросочетанием. А пара ребер  $AC$  и  $DE$  в графе на рисунке 1 – тоже паросочетание. Нам понадобится следующий технический параметр графа  $G$ , весьма популярный в теории графов, – максимальное количество ребер, которое может иметь паросочетание на данном графе  $G$ . В учебниках эта величина обозначается  $\alpha'(G)$ .<sup>3</sup> Так, для графа  $G$  на рисунке 1 нетрудно видеть, что  $\alpha'(G) = 2$ .

**Лемма 1.** В любом графе  $G$

$$\mathcal{L}(G) \geq \alpha'(G).$$

**Доказательство.** Чтобы  $\alpha'(G)$  мудрецов могли угадать свой цвет, им нужно на совещании выбрать в графе  $G$  максимальное паросочетание и договориться, что на каждом ребре этого паросочетания мудрецы, не глядя на остальных, играют так, как описано в решении загадки из начала статьи. Лемма доказана.

Возвращаясь к нашим гаданиям о графе на рисунке 1, спросим: а может, если строить совсем хитрые стратегии, то и три мудреца на этом графе всегда смогут угадать?

Не смогут. Потому что имеется следующая лемма.

**Лемма 2.** В любом графе  $G$  на  $n$  вершинах выполняется неравенство

$$\mathcal{L}(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

**Доказательство.** Возьмем любого мудреца  $M$ . Заметим, что мудрец  $M$  угадывает свой цвет ровно на половине из  $2^n$  имеющихся раскладов шляп. Действительно, пусть чертик даст всем мудрецам, кроме  $M$ , какие-нибудь шляпы. Тогда мудрец  $M$  видит шляпы всех соседей, значит, его ответ по стратегии уже определен. Теперь чертик может дать мудрецу  $M$  шляпу того цвета, который тот собирается назвать, и тогда, естественно,  $M$  угадает, или шляпу того цвета, который  $M$  не собирается называть, тогда  $M$  не угадает. Таким образом, для каждого мудреца  $M$  все расклады можно разбить на пары (угадал, не угадал).

Теперь построим схему – фактически новый граф, вершины которого расположены

в «две шеренги». В первой шеренге находятся  $n$  вершин – это наши мудрецы. Во второй шеренге находятся  $2^n$  вершин – это всевозможные расклады шляп. Соединим ребром каждого мудреца с каждым раскладом, для которого он угадывает свой цвет. Мы провели  $n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^n$  ребер. Во второй шеренге концами этих ребер служат все  $2^n$  вершин-раскладов. По принципу Дирихле, найдется вершина, в которую приходит не более

$$\frac{n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^n}{2^n} = \frac{n}{2} \text{ ребер.}$$

Если чертик реализует расклад шляп, соответствующий этой вершине, то количество угадавших мудрецов будет не больше  $\frac{n}{2}$ . Лемма доказана.

Итак, мы доказали неравенства, связывающие искомую величину  $\mathcal{L}(G)$  с количеством вершин  $n$  и количеством максимальных паросочетаний  $\alpha'(G)$ . Насколько близко число  $\mathcal{L}(G)$  может быть к этим величинам? Посмотрим это на примере.

**Пример.** Рассмотрим граф «звезда», в котором одна центральная вершина соединена с каждой из  $n - 1$  остальных и других ребер нет (рис. 2). Какое наибольшее число мудрецов

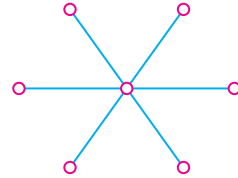


Рис. 2. Граф «звезда»,  $n = 7$

сможет заведомо угадать на этом графе? Здесь  $\alpha'(G) = 1$ , так что хотя бы один мудрец угадать сможет. Сумеете ли вы сдать экзамен на чертика и не допустить, чтобы на этом графе угадали два мудреца (или больше)?

Конечно, сумеете. Дайте центральному мудрецу какую угодно шляпу. Тогда сразу же станут известны ответы всех периферийных мудрецов. Раздадим им шляпы так, чтобы никто не угадал. В результате все шляпы выданы, и угадать может только центральный мудрец. Таким образом, на этом графе  $\mathcal{L}(G) = 1 = \alpha'(G)$ , и это весьма

далеко от  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ .

<sup>3</sup> Предлагаем читателю загадку: если *это* обозначается  $\alpha'(G)$ , то весьма вероятно, что какой-то параметр графа обозначается просто  $\alpha(G)$ , без штриха. Какой?

Справедливости ради отметим, что бывают графы, для которых леммы 1 и 2 дают одну и ту же оценку. Например, если в графе с  $2k$  вершинами можно выбрать паросочетание из  $k$  ребер (такое паросочетание называется *совершенным*), то в нем  $\mathcal{L}(G) \geq \alpha'(G) = k$  по лемме 1 и  $\mathcal{L}(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = k$  по лемме 2. Таким образом, в этом графе  $\mathcal{L}(G) = k$ . Примером такого графа может служить полный граф на  $2k$  вершинах, т.е. граф, между любыми двумя вершинами которого проведено ребро. Или если в графе  $2k + 1$  вершин и имеется почти совершенное паросочетание – т.е. паросочетание из  $k$  ребер, тогда в этом графе тоже  $\mathcal{L}(G) = \alpha'(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ . Примером такого графа служит все тот же граф на рисунке 1.

Возьмем на заметку последний тип графов и усилим в нем требования к графу. Пусть в графе  $2k + 1$  вершин и при удалении *любой* вершины и всех ее ребер получается граф с  $2k$  вершинами, имеющий совершенное паросочетание. Такие графы назовем *перспективными*<sup>4</sup>. Пример? Да, все тот же граф на рисунке 1. Кстати, граф, состоящий из одной вершины (в нем нет ребер), тоже будем считать перспективным.

Итак, перспективный граф с  $2k + 1$  вершинами удовлетворяет леммам 1 и 2 и в нем  $\mathcal{L}(G) = \alpha'(G)$  (обе величины равны  $k$ ). Если мы удалим в перспективном графе любую вершину  $u$  и все ее ребра, то в полученном графе  $G \setminus u$  будет  $2k$  вершин и этот граф будет иметь паросочетание из  $k$  ребер. Таким образом, в перспективном графе для любой вершины  $u$  выполняется равенство

$$\alpha'(G) = \alpha'(G \setminus u).$$

Теперь нам понадобится одна теорема из теории графов, но сначала позволим себе небольшое отступление.

Читатели, конечно, знают теорему Пифагора. Пифагор жил примерно 2500 лет назад, и «возраст» его теоремы никак не меньше, а исследователи считают, что даже гораздо больше. Другая теорема из школьной программы – теорема синусов, возможно, тоже была известна древним, но самое раннее известное ее

<sup>4</sup> В теории графов их называют *факторкритическими*.

доказательство относится к XIII веку, и с этой точки зрения возраст теоремы синусов – приблизительно 750 лет. В старших классах решают задачи вида «найдите наибольшее значение функции на заданном отрезке». Теорема, объясняющая корректность постановки такого вопроса для непрерывных функций, называется теоремой Вейерштрасса. Ее открыл Больцано 190 лет назад (в неопубликованной работе), а позже переоткрыл сам Вейерштрасс (приблизительно 160 лет назад). Мы же воспользуемся совсем молодой теоремой. Ей всего-то 60 лет.

Оказывается, свойство, выражаемое формулой (1), является определяющим для перспективных графов – это утверждает следующая теорема.

**Теорема Галлаи.** *Если в связном графе  $G$  при удалении любой вершины и выполняется равенство  $\alpha'(G) = \alpha'(G \setminus u)$ , то граф  $G$  – перспективный.*

Мы не будем здесь доказывать теорему Галлаи, чтобы не уходить в сторону от рассматриваемого сюжета, но любопытный читатель может прочесть доказательство, например, в книге Д.В.Карпова «Теория графов» (М.: МЦНМО, 2022).

Итак, теорема Галлаи описывает перспективные графы. А что же можно сказать о неперспективных графах? То, что для них не выполняется утверждение теоремы Галлаи! Это значит, что в неперспективном графе  $G$  всегда найдется *хитрая* вершина  $u$  такая, что  $\alpha'(G) \neq \alpha'(G \setminus u)$ . Нетрудно сообразить, что в этом случае

$$\alpha'(G) = \alpha'(G \setminus u) + 1.$$

Действительно, граф  $G \setminus u$  получается из  $G$  удалением вершины  $u$ , от этого паросочетания на графе  $G$  могут «уменьшиться» (в паросочетании может исчезнуть одно ребро с вершиной  $u$ ), в результате чего размер наибольшего паросочетания если и уменьшится, то не больше чем на 1.

Возьмем произвольный неперспективный граф, удалим в нем хитрую вершину. В полученном графе снова удалим хитрую вершину и т. д. Возможно, при удалении вершин у нас будут получаться несвязные графы. Это не мешает продолжать процесс, мы будем каждый раз отыскивать неперспективную компоненту связности и удалять вершину из нее. Процесс будет продолжаться до тех пор, пока все компоненты связности не станут

перспективными, в частности, среди компонент могут быть просто изолированные вершины. Прделанные наблюдения позволят нам в следующей теореме запустить индукцию по размеру графа.

Заметим еще, что величины  $\mathcal{L}(G)$  и  $\alpha'(G)$  при разбиении графа на компоненты связности ведут себя аддитивно: если  $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_m$  – разбиение на компоненты связности, то

$$\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G_1) + \mathcal{L}(G_2) + \dots + \mathcal{L}(G_m)$$

и

$$\alpha'(G) = \alpha'(G_1) + \alpha'(G_2) + \dots + \alpha'(G_m).$$

**Теорема.** В любом графе  $G$

$$\mathcal{L}(G) = \alpha'(G).$$

**Доказательство.** Индукция по числу вершин.

*Базой* будут служить все перспективные графы. Как мы уже видели, в любом перспективном графе  $G$  на  $n = 2k + 1$  вершинах

$$\mathcal{L}(G) = \alpha'(G) = k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

*Индукционный переход.* Пусть  $G$  – неперспективный граф,  $u$  – его хитрая вершина,  $G' = G \setminus u$ . Если  $G''$  – любая компонента связности графа  $G'$ , то она удовлетворяет индукционному предположению  $\mathcal{L}(G'') = \alpha'(G'')$ . Поэтому и граф  $G'$  удовлетворяет предположению индукции, т.е. выполняется равенство  $\mathcal{L}(G') = \alpha'(G')$ . Тогда

$$\mathcal{L}(G') + 1 = \alpha'(G') + 1 = \alpha'(G) \stackrel{(*)}{=} \stackrel{(**)}{\leq} \mathcal{L}(G),$$

здесь равенство  $(*)$  выполнено по определению хитрой вершины, а неравенство  $(**)$  – это опять утверждение леммы 1. Нам остается показать, что число  $\mathcal{L}(G)$  не может превосходить число  $\mathcal{L}(G')$  более чем на 1. Это делается так же, как в примере со звездой. Пусть мудрецы расположены в вершинах графа  $G$ . Дадим мудрецу в вершине  $u$  произвольную шляпу. Тогда те мудрецы, которые видят шляпу  $u$  (а других шляп они пока не видят), могут в описании своих стратегий оставить только расклады, в которых цвет шляпы  $u$  уже задан. В результате теперь ответы всех мудрецов зависят только от того,

что они увидят у своих соседей на графе  $G'$ , т.е. мудрецы фактически будут проходить тест на графе  $G'$ . При этом по индукционному предположению угадать смогут не более  $\mathcal{L}(G')$  мудрецов, поэтому с учетом мудреца  $u$  суммарное количество угадавших не может быть больше  $\mathcal{L}(G') + 1$ . Индукционный переход сделан и теорема доказана.

Итак, **задача** решена.

В заключение скажем о нерешенном вопросе, который находится где-то поблизости. В задаче о шляпах ничто не мешает нам считать граф ориентированным. Каждый мудрец видит каких-то других, но совершенно необязательно, чтобы выполнялось свойство *если  $A$  видит  $B$ , то  $B$  видит  $A$* . Тогда начнем опять с загадки.

**Новая загадка.** По кругу стоят мудрецы, каждый мудрец видит только следующего по кругу мудреца. С мудрецами проводят тест с черными и белыми шляпами по традиционным правилам. Докажите, что на совещании мудрецы могут договориться о своих действиях так, что хотя бы один из них угадает.

Решив эту загадку, мы легко сможем доказать следующую лемму.

**Новая лемма 1.** Пусть дан ориентированный граф  $G$ , обозначим через  $\check{\alpha}'(G)$  наибольшее количество попарно непересекающихся циклов в этом графе (циклов, не имеющих общих вершин). Тогда  $\mathcal{L}(G) \geq \check{\alpha}'(G)$ .

Но вот беда: для максимальных семейств попарно непересекающихся циклов у нас нет теоремы Галлаи и обобщить доказательство теоремы на ориентированный случай не получается.

**Проблема.** Верно ли, что в произвольном ориентированном графе  $G$

$$\mathcal{L}(G) = \check{\alpha}'(G)?$$

# Поглощение частиц в простейшей неоднородной системе

Р.КОРКИН

## Постановка задачи

Рассмотрим частицу, которая передвигается единичными шагами вдоль случайно выбранной оси в случайном направлении. По завершении каждого шага частица поглощается средой с некоторой вероятностью. Пусть эта вероятность составляет  $w_-$  для отрицательных значений координаты  $x$  и  $w_+$  для положительных (рис. 1). Если координата  $x$  равна нулю, вероятность поглощения составляет  $w_{\mp}$  – в зависимости от того, с какой стороны (левой или правой) пришла частица в начало координат.

Какова эффективная вероятность поглощения в случае, если частица начинает свой

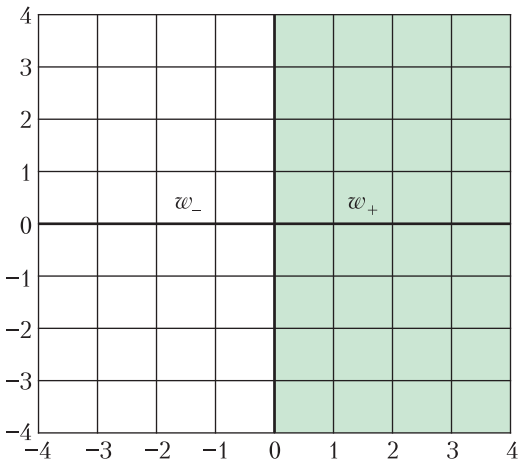


Рис. 1. Коэффициент поглощения в левом и правом полупространствах

путь из начала координат? Какова эффективная вероятность при начальной позиции  $x = n$ , где  $n \neq 0$ ?

## Решение в одномерном случае

Сначала разберем одномерный случай. Пусть частица начинает свой путь с координаты  $n$ . Обозначим среднее количество шагов, которое она совершит до поглощения средой, через  $P_n$ . В частности, если  $w_- = w_+ = w$ , то  $P_n = 1/w$ .

Количество шагов  $P_n$  можно выразить через  $P_{n-1}$ , если частица начинает движение с предыдущей точки, и  $P_{n+1}$ , если начинает с последующей точки. Воспользуемся методом рекуррентного подхода. Отметим, что, начиная с точки  $n$ , частица делает один шаг влево или вправо с вероятностью  $1/2$  и остается непоглощенной с вероятностью  $1 - w_{n-1}$  или  $1 - w_{n+1}$ . Тогда соответствующее рекуррентное уравнение будет выглядеть так:

$$P_n = 1 + \frac{1 - w_{n-1}}{2} P_{n-1} + \frac{1 - w_{n+1}}{2} P_{n+1}. \quad (1)$$

Будем искать решение для  $P_n$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1}{w_-} + A_- \lambda_-^{|n|}, \quad n \leq 0, \\ P_n &= \frac{1}{w_+} + A_+ \lambda_+^n, \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь для простоты в первой формуле используется абсолютное значение координаты для левой полуоси. В этих уравнениях вдали от нуля остается только первое слагаемое  $\frac{1}{w_{\pm}}$ . Второе слагаемое  $\lambda_{\pm}^n$  имеет значение в окрестности нуля и затухает по мере удаления от начала координат, что обеспечивается условием  $\lambda_{\pm} < 1$ .

Объединяя уравнения (1) и (2), можно найти решение для положительных координат  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{w_+} + A_+ \lambda_+^n &= 1 + \frac{1 - w_+}{2} \left( \frac{1}{w_+} + A_+ \lambda_+^{n-1} \right) + \\ &+ \frac{1 - w_+}{2} \left( \frac{1}{w_+} + A_+ \lambda_+^{n+1} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Это приводит к «спектральному» уравнению для  $\lambda$ :

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 - \sqrt{1 - (1 - w_{\pm})^2}}{1 - w_{\pm}}.$$

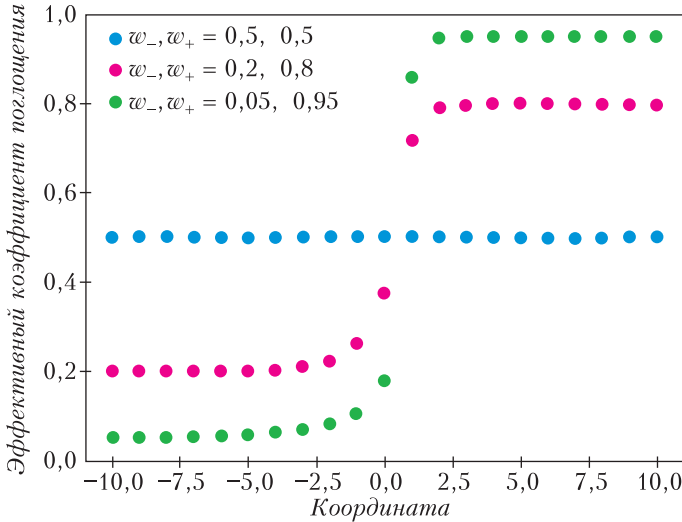


Рис. 2. Эффективный коэффициент поглощения как функция начальной координаты для различных значений вероятностей

Знак минус перед корнем выбирается из необходимости затухания  $P_n$  при  $n \rightarrow \infty$  ( $\lambda_{\pm} < 1$ ).

Чтобы найти  $A_-$  и  $A_+$ , мы используем сшивку решений для отрицательных и положительных координат в нулевой точке:

$$P_0 = \frac{1}{\omega_-} + A_- = \frac{1}{\omega_+} + A_+$$

и рекуррентное уравнение (1) для  $n = 0$ :

$$P_0 = 1 + \frac{1 - \omega_-}{2} \left( \frac{1}{\omega_-} + A_- \lambda_- \right) + \frac{1 - \omega_+}{2} \left( \frac{1}{\omega_+} + A_+ \lambda_+ \right).$$

Решая три уравнения, получаем эффективную вероятность поглощения  $\tilde{w}_0 = 1/P_0$  для траекторий, выходящих из начала координат:

$$\tilde{w}_0 = \frac{X_- + X_+}{X_-/\omega_- + X_+/\omega_+}, \quad (4)$$

где  $X_{\pm} = \sqrt{1 - (1 - \omega_{\pm})^2}$ . Интересно отметить, что  $\tilde{w}_0 = 0$  при нулевом значении хотя бы одного из  $\omega_-$  и  $\omega_+$ .

Эффективный коэффициент поглощения для произвольной начальной координаты также может быть легко найден как  $1/P_n$ . Для положительной или отрицательной коорди-

наты он равен

$$\frac{1}{\tilde{w}_{\pm n}} = \frac{1}{\omega_{\pm}} + \left( \frac{1}{\tilde{w}_0} - \frac{1}{\omega_{\pm}} \right) \lambda_{\pm}^n. \quad (5)$$

Прямое использование уравнения (4) дает для положительных координат

$$\tilde{w}_{+n} = \frac{\omega_+}{1 + \frac{\omega_+/\omega_- - 1}{X_+/X_- + 1} \lambda_+^n}, \quad n \geq 0. \quad (6)$$

Для отрицательных координат ответ тот же с точностью до замены  $\omega_+ \leftrightarrow \omega_-$  и  $\lambda_+ \leftrightarrow \lambda_-$ .

Поведение коэффициента поглощения в уравнении (6) в зависимости от координаты показано на рисунке 2. Как и следует ожидать, для больших по модулю значений  $n$  коэффициенты погло-

щения равны  $\omega_-$  и  $\omega_+$  слева и справа от нуля, а в окрестности нуля есть переходный слой с  $\omega_- \leq \omega \leq \omega_+$ . Также стоит отметить, что если хотя бы один из коэффициентов поглощения (например,  $\omega_-$ ) равен 0, то результат для эффективного коэффициента поглощения траектории, выходящей из начала координат, также равен нулю, независимо от значения второго коэффициента (например,  $\omega_+$ ).

Если  $\omega_{\pm}/2 \ll 1$ , то уравнение (4) можно упростить. Это дает следующее выражение для эффективного коэффициента поглощения:

$$\tilde{w}_0 \approx \sqrt{\omega_+ \omega_-} \left( 1 + \frac{(\sqrt{\omega_+} - \sqrt{\omega_-})^2}{4} \right). \quad (7)$$

В этом случае второй член в формуле является малым, за исключением ситуации, когда один из коэффициентов  $\omega_{\pm}$  близок к 1, а второй близок к 0. Приближение  $\sqrt{\omega_+ \omega_-}$  хорошо работает во всех остальных случаях.

### Решение в $d$ -мерном случае

Интересно исследовать данную задачу в случае пространств с более высокими измерениями. Например, в двумерном случае частица перемещается по целочисленным координатам на плоскости, где левая и правая полуплоскости имеют различные коэф-



коэффициенты поглощения  $\omega_-$  и  $\omega_+$ . Также любопытно рассмотреть зависимость коэффициента поглощения от размерности пространства  $d$ .

Обозначим среднее число шагов до поглощения средой в траектории, выходящей из позиции  $i$  с координатами  $\vec{i} = (i_1, i_2, i_3, \dots)$ , через  $P_{\vec{i}}$ . Будем считать, что коэффициент поглощения меняется именно вдоль первой оси, т.е. для  $i_1 < 0$  он равен  $\omega_-$ , а для  $i_1 > 0$  он равен  $\omega_+$ . Тогда аналог рекуррентного уравнения (1) можно записать так:

$$P_{i_1, i_2, \dots} = 1 + \frac{1 - \omega_{i_1-1}}{2d} P_{i_1-1, i_2, \dots} + \frac{1 - \omega_{i_1}}{2d} (d-1) P_{i_1, i_2, \dots} + \frac{1 - \omega_{i_1+1}}{2d} P_{i_1+1, i_2, \dots} + \frac{1 - \omega_{i_1}}{2d} (d-1) P_{i_1, i_2, \dots}. \quad (8)$$

Здесь выделены отдельно слагаемые, относящиеся к разным значениям координат вдоль оси  $i_1$  и вдоль остальных осей  $i_2, i_3, \dots, i_d$ . Решение снова будем искать в виде уравнения (2). Расчеты дают следующее значение для  $\lambda$ :

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 - \omega_{\pm} + d\omega_{\pm} - X_{\pm}}{1 - \omega_{\pm}},$$

$$X_{\pm} = \sqrt{(1 - \omega_{\pm} + d\omega_{\pm})^2 - (1 - \omega_{\pm})^2}.$$

В частности, для двумерного случая

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 - \sqrt{\omega_{\pm}}}{1 + \sqrt{\omega_{\pm}}}.$$

Используя уравнение сшивки в точке  $i_1 = 0$  и рекуррентное уравнение (8), мы можем получить выражение для эффективного коэффициента поглощения для траекторий, выходящих из координат с  $i_1 = 0$  и произвольными значениями  $i_2, i_3, \dots, i_d$ :

$$\tilde{\omega}_0 = \frac{X_- + X_+}{X_-/\omega_- + X_+/\omega_+}, \quad (9)$$

Значение эффективного коэффициента поглощения  $\tilde{\omega}$  для произвольной координаты  $n$  и для произвольной размерности  $d$  можно выразить следующим образом:

$$\tilde{\omega}_n = \frac{\omega_+}{1 + \frac{\omega_+/\omega_- - 1}{X_+/X_- + 1} \lambda_+^n} \text{ при } n \geq 0,$$

а при  $n < 0$  делаем замену  $\omega_+ \leftrightarrow \omega_-$  и  $X_+ \leftrightarrow X_-$ .

Интересно рассмотреть частные случаи для коэффициента поглощения в нуле. Так, для размерности  $d = 2$  результат получается очень простым и изящным:  $\sqrt{\omega_+ \omega_-}$ . Это та самая формула, которая приближенно описывала эффективный коэффициент поглощения в одномерном случае.

Для пространств очень высокой размерности  $d \gg 1$  разложение формулы (9) дает среднее арифметическое:  $\tilde{\omega}_0 \approx \frac{\omega_- + \omega_+}{2}$ . Сле-

дует уточнить, что эта формула реально требует ограничения  $\omega d \gg 1$ , что является более жестким условием, чем требование больших размерностей  $d$ . Таким образом, она неприменима, если один из коэффициентов  $\omega_-$  или  $\omega_+$  строго равен нулю.

Можно заметить, что эффективный коэффициент поглощения увеличивается с ростом размерности пространств при фиксированных заданных значениях  $\omega_+$  и  $\omega_-$ .

### Итог

Мы рассмотрели частицу, блуждающую по целочисленным координатам в среде с различным коэффициентом поглощения для левого и правого полупространств. И было получено аналитическое решение для эффективного коэффициента поглощения при произвольной размерности  $d$ .

Эта задача, хотя и является весьма упрощенной моделью поглощения в неоднородной среде, имеет не только математический интерес, она может быть применима и в практических задачах. Например, в задаче моделирования поглощения нейтронов на границе слоев различных пород, включая водо- и нефтеносные слои.

*Живописцы часто приходят в отчаяние от своего подражания природе, видя, что их картины не имеют той рельефности и той живости, которую имеют предметы, видимые в зеркале.*

Леонардо да Винчи

*...что касается цвета – в этой области никто до сих пор не может похвастаться успехом.*

Христиан Гюйгенс

*...тела приобретают свой цвет отрицательным способом: окраска – следствие не прибавления, а исключения.*

Джон Тиндаль

*Ньютон впервые дал действенное учение о цветах, на основании которого он сам нашел огромное число новых фактов...*

Леонид Мандельштам

*С восприятием света связано множество интересных явлений, в которых тесно переплетаются и физические, и физиологические процессы...*

Ричард Фейнман

*Человек ... – узник разума, не способного постичь, как можно верно изобразить объемный трехмерный мир на листе бумаги, холсте, стене...*

Борис Раушенбах

*Радость видеть и понимать – самый прекрасный дар природы.*

Альберт Эйнштейн

## А так ли хорошо знакомы вам ФИЗИКА + ЖИВОПИСЬ?

Ох, уж эти художники! Сколько загадок невольно задали они ученым, пытавшимся разобраться, как и почему творения живописцев воздействуют на зрителей. Столетиями шли споры, как осмыслить бинокулярное зрение, имеется ли рациональная основа под методами пространственных художественных построений, каковы особенности зрительного восприятия, что из себя представляет такая необычная категория, как цвет...

Достижения науки, и не в последнюю очередь физики, оснащение все более изощренной исследовательской аппаратурой не раз позволяли продвинуться в понимании порой непрístupных для естественно-научного анализа проблем. Однако какие интереснейшие открытия были совершены на этом тернистом пути!

Присоединяйтесь же и вы к увлекательной научно-художественной экскурсии.

### Вопросы и задачи

**1.** Живописец, рисуя пейзаж с природы, прикидывает, что больше: облако или его полная тень? А что полагаете вы?

**2.** Если расположенную горизонтально спичку рассматривать через цилиндри-

ческий стакан с водой, то ее длина кажется больше диаметра стакана, а толщина не изменяется. Если в том же опыте спичку расположить вертикально, то ее длина не меняется, а толщина возрастает. Как это объяснить?

**3.** Почему близорукий художник может различать более мелкие детали, чем живописец с нормальным зрением?

**4.** Редко когда удается точно налить воду в далеко отстоящие друг от друга стаканы, если один глаз плотно закрыт. С чем это связано?

**5.** Как объяснить прием, применяемый в живописи: предметы, которые должны казаться нам далекими, изображаются размытыми, без четких контуров и более бледными, чем близлежащие предметы?

**6.** Почему изображение предмета в воде всегда менее яркое, чем сам предмет?

**7.** Во время одного из погружений с аквалангом его изобретатель Жак Ив Кусто случайно порезал руку и с удивлением увидел, что из нее течет *зеленая* кровь. Как это понимать?

**8.** Действительно ли зеленый лист – зеленый?

9. Если масляной краской покрыть чистый холст, то вместо блестящего слоя весьма прочной краски на нем получается легкий слой без труда стирающегося красящего порошка. Отчего это происходит? Какую роль играет предварительная «грунтовка» холста олифой?

10. Художники пишут картины красками только при дневном освещении. Почему?

11. Замечено, что выцветание красок происходит главным образом от лучей, цвет которых является дополнительным к цвету краски. Как это истолковать?

12. Черепок зеленой керамики раскаляют в печи. Останется ли его цвет зеленым?

13. Если смешать синюю и желтую краски, то получится зеленая краска. Но если светом синей и желтой ламп осветить лист чертежной бумаги, то она будет иметь белый цвет. Нет ли здесь противоречия (синий и желтый цвета являются дополнительными)?

14. Из каких цветов состоит *серый* цвет?

15. Пуантилистические картины французского художника Жоржа Сёра написаны маленькими разноцветными точками. При отходе от картины точки сливаются до неразличимости. Более того, в любом месте картины меняется цвет. Чем это вызвано?

### Микроопыт

Поставьте перед собой на стол вертикальное зеркало, положите перед ним бумагу и попробуйте нарисовать на ней какую-либо простую фигуру, затем – написать какую-нибудь фразу. Но не смотрите при этом прямо на свою руку, а следите лишь за ее отражением в зеркале. Ну как, удалось?

### Любопытно, что...

... еще Аристотель упоминал о снежных хлопьях, кажущихся темными при медленном падении с серого неба. Оказывается, белое, серое и черное различаются только по яркости, а ее мерой служит окружающий фон, в данном случае – небо.

... для открытия такого явления, как перспектива, человечеству понадобилось

больше времени, чем для приручения огня или изобретения колеса. Лишь Леонардо да Винчи четко сформулировал ее законы и принципы.

... трехкомпонентная теория цветов, к созданию которой приложили свои силы такие ученые, как Ломоносов, Юнг, Гельмгольц и Максвелл, неплохо объясняет, как из цветов спектра образуются различные краски. Так, красный плюс зеленый лучи дадут желтый тон, но его же удастся получить из оранжевого и зеленовато-синего света. Но вот о том, почему есть черная и коричневая краски, а черного и коричневого света нет, она ... умалчивает.

... уже сто пятьдесят лет назад было истолковано, отчего разглядывание картин одним глазом создает ощущение перспективы, глубины и рельефа, т.е. чисто стереоскопические эффекты, – дело в преобразующей работе мозга при восприятии зрительных образов.

... с недавних пор перед реставрацией живописные полотна стали просвечивать электромагнитными волнами из разных частотных диапазонов. Это позволило не только выявлять дефекты картин, но и неоднократно обнаруживать под поздними наслоениями подлинные шедевры выдающихся мастеров.

... российский академик Борис Викторович Раушенбах, один из основоположников советской космонавтики, разработал систему анализа живописи, в которой с позиций физики и математики объясняются особенности творчества великих художников, например – использование ими обратной перспективы.

### Что читать в «Кванте» о союзе физики и живописи (публикации последних лет)

1. «Прозрачное и непрозрачное» – 2019, №8, с. 10;
2. «И речка подо льдом блестит...» – 2022, №4, с. 30;
3. «Красота нашего мира и симметрия» – 2022, №8, с. 29;
4. «Фризы» – 2023, №2, с. 2.

Материал подготовил А. Леонович

# LXIV Международная математическая олимпиада

В июле 2023 года в 64-й раз прошло, пожалуй, самое важное событие в мире школьного математического образования – международная математическая олимпиада (ИМО), которая проходила в Японии (г. Чика). Олимпиада собрала 618 участников из 113 стран. Школьники из России приняли участие в олимпиаде дистанционно – два тура ИМО для них проводились во Владивостоке, в Дальневосточном федеральном университете.

В этом году в непростой конкурентной борьбе преодолели все этапы отбора и завоевали право участвовать в ИМО:

*Алиса Волкова* (11 класс, Санкт-Петербург),  
*Александр Гнусов* (11 класс, Киров),  
*Ратибор Коптилин* (9 класс, Новосибирск),  
*Роман Кузнецов* (11 класс, Санкт-Петербург),  
*Павел Прозоров* (11 класс, Санкт-Петербург),  
*Эльдар Хисамутдинов* (11 класс, Санкт-Петербург).

Результаты и баллы, полученные нашими участниками по задачам, приведены в первой таблице.

О сложности шести задач ИМО можно судить по второй таблице.



Слева направо – Р.Коптилин, А.Гнусов, Э.Хисамутдинов, А.Волкова, П.Прозоров, Р.Кузнецов

Задача	1	2	3	4	5	6
Количество участников, решивших задачу (набравших 5, 6 или 7 баллов)	488	228	82	388	140	11

Почти половина золотых наград распределась только между пятью странами – Китай (6 золотых медалей), Россия, Румыния, США (по 5), Южная Корея (4). У других команд – не более двух золотых медалей. В командном зачете по сумме набранных баллов школьники из России – четвертые после Китая, США и Южной Кореи.

Подробные результаты можно найти на официальном сайте олимпиады <https://www.imo-official.org/>.

Тренерский совет сборной России составили: К. Сухов (главный тренер), И.Богданов, П.Кожевников, А.Кушпир, Ф.Петров. Также большой вклад в подготовку сборной внесли С.Берлов, Н.Власова, П.Козлов, А.Кузнецов, М.Пратусевич, Г. Шарфетдинова и другие математики и педагоги.

Большая работа по проведению мероприятий, направленных на отбор и подготовку команды России для участия в ИМО, велась в течение всего учебного года. С благодарно-

	Задачи					Итого	Медаль
	1	2	3	4	5		
Волкова А.	7	7	7	7	7	2	золотая
Гнусов А.	7	7	7	7	7	2	золотая
Коптилин Р.	7	7	7	7	7	1	золотая
Кузнецов Р.	7	7	7	7	7	1	золотая
Прозоров П.	7	0	7	7	7	0	серебряная
Хисамутдинов Э.	7	7	7	7	7	0	золотая

стью перечислим организации, оказавшие помощь и поддержку в этой работе: Министерство просвещения РФ, Образовательный центр «Сириус», РГПУ имени А.И.Герцена, Детский центр «Компьютерия», Президентский физико-математический лицей № 239 (Санкт-Петербург), Дальневосточный федеральный университет.

### Задачи олимпиады

1. Найдите все составные натуральные числа  $n > 1$  со следующим свойством: если через  $d_1, d_2, \dots, d_k$  обозначить все натуральные делители числа  $n$ , причем  $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ , то  $d_i$  делит  $d_{i+1} + d_{i+2}$  для всех  $1 \leq i \leq k - 2$ .

Колумбия

2. Дан остроугольный треугольник  $ABC$ , причем  $AB < AC$ . Окружность  $\Omega$  описана около треугольника  $ABC$ . Середину ее дуги  $CB$ , содержащей точку  $A$ , обозначим через  $S$ . Прямая, проходящая через  $A$  и перпендикулярная стороне  $BC$ , пересекает отрезок  $BS$  в точке  $D$  и пересекает  $\Omega$  второй раз в точке  $E \neq A$ . Прямая, проходящая через  $D$  и параллельная стороне  $BC$ , пересекает прямую  $BE$  в точке  $L$ . Окружность, описанную около треугольника  $BDL$ , обозначим через  $\omega$ . Пусть  $P \neq B$  – вторая точка пересечения  $\omega$  с  $\Omega$ . Докажите, что касательная к окружности  $\omega$  в точке  $P$  пересекает прямую  $BS$  в точке, лежащей на биссектрисе угла  $BAC$ .

Португалия

3. Дано натуральное число  $k \geq 2$ . Найдите все бесконечные последовательности положительных целых чисел  $a_1, a_2, \dots$  со следующим свойством: существует многочлен  $P$  вида

$$P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_1x + c_0$$

с неотрицательными целыми коэффициентами  $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$  такой, что

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2} \dots a_{n+k}$$

для всех натуральных  $n \geq 1$ .

Малайзия

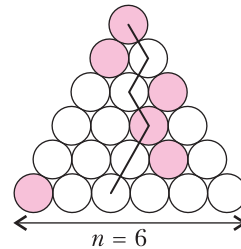
4. Даны попарно различные положительные действительные числа  $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$  такие, что число

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)}$$

является целым для всех  $n = 1, 2, \dots, 2023$ . Докажите, что  $a_{2023} \geq 3034$ .

Нидерланды

5. Пусть  $n \geq 1$  – натуральное число. Японский треугольник состоит из  $1 + 2 + \dots + n$  одинаковых кругов, выложенных в форме равностороннего треугольника так, что для каждого  $i = 1, 2, \dots, n$  ряд с номером  $i$  состоит ровно из  $i$  кругов, в точности один из которых покрашен в красный цвет. Путем ниндзя в японском треугольнике называется последовательность из  $n$  кругов, построенная следующим образом: начинаем с круга в ряде 1 и затем поочередно спускаемся вниз, переходя от круга к одному из двух кругов непосредственно под ним, пока не дойдем до ряда  $n$ . На рисунке приведен пример япон-



ского треугольника для  $n = 6$ , а также пути ниндзя, содержащего два красных круга. Найдите наибольшее число  $k$  (зависящее от  $n$ ) такое, что в любом японском треугольнике существует путь ниндзя, содержащий хотя бы  $k$  красных кругов.

Нидерланды

6. Дан равносторонний треугольник  $ABC$ . Внутри него выбраны точки  $A_1, B_1, C_1$  такие, что  $BA_1 = A_1C$ ,  $CB_1 = B_1A$ ,  $AC_1 = C_1B$  и

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

Прямые  $BC_1$  и  $CB_1$  пересекаются в точке  $A_2$ , прямые  $CA_1$  и  $AC_1$  пересекаются в точке  $B_2$ , прямые  $AB_1$  и  $BA_1$  пересекаются в точке  $C_2$ . Предположим, что у треугольника  $A_1B_1C_1$  стороны имеют попарно различные длины. Докажите, что тогда все три окружности, описанные около треугольников  $AA_1A_2$ ,  $BB_1B_2$  и  $CC_1C_2$ , проходят через какие-то две общие точки.

США

Публикацию подготовили К.Сухов,  
И.Богданов, П.Кожевников,  
М.Пратусевич

# Олимпиада «Покори Воробьевы горы!»

## Физика

### Отборочный этап Творческие задачи

11 класс

#### Разработки техника Харлана

##### 1. Неожиданный подарок (16 баллов)

Как-то, еще во время учебы, Эндрю было очень важно покинуть школу на некоторое время. Но в это время он должен был выполнять лабораторную работу по изучению эффекта застоя, состоящего в превышении на величину  $\Delta F$  максимальной величины силы трения покоя над силой трения скольжения. В работе требовалось изучить движение бруска массой  $m = 410,0$  г. Из теоретического введения было известно, что величина силы трения бруска практически перестает зависеть от его скорости  $v$  относительно поверхности только при превышении некоторой величины скорости  $v_0$  (именно эта неизменная величина и считается величиной силой трения скольжения для этого бруска). При  $v < v_0$  сила трения убывает линейно с ростом скорости. В эксперименте нужно было слегка подтолкнуть брусок и затем тянуть его по горизонтальной поверхности, прикрепив к легкой и практически нерастяжимой нити, поддерживая силу натяжения нити неизменной и с высокой точностью равной максимальной величине силы трения покоя. Затем на основе наблюдения за изменением скорости и ускорения бруска нужно было определить  $v_0$  и  $\Delta F$ . Измерения требовались очень аккуратные и занимали немало времени, но, придя в лабораторию, Эндрю обнаружил пакет с запиской и микрочипом. Из записки он узнал, что наблюдения уже выполнил он сам в другой реальности, а на

микрочипе есть оцифрованное видео движения бруска. Также было сообщено, что сила сопротивления воздуха для бруска с достаточной точностью пропорциональна его скорости. В таблицах приведены данные с микрочипа, которые использовал студент Харлан – зависимости от времени скорости центра масс бруска (за все время наблюдений) и его ускорения (на наиболее важном интервале времени).

Определите по этим данным  $v_0$ ,  $\Delta F$  и коэффициент пропорциональности  $\alpha$  между действующей на брусок силой сопротивления воздуха и его скоростью (движения воздуха при съёмках видео отсутствовали). Проверьте, насколько точны ваши выводы на примере определения  $v_0$ .

##### 2. База Вечности (25 баллов)

Во время подготовки одного из вмешательств Вечным понадобилось создать скрытую базу на одной из экзопланет. Эта планета оказалась очень оригинальной – она большей частью (кроме каменно-металлического ядра) состоит из воды. Собственное солнце очень слабо обогревает планету, но распад радиоактивных материалов в ядре поддерживает достаточно высокую температуру ее жидкой поверхности:  $T_n \approx 400$  К. Радиус этой поверхности  $R \approx 3931$  км, а ускорение свободного падения вблизи поверхности океана  $g \approx 1,65$  м/с<sup>2</sup>. Отметим, что в глубинах океана из-за высокого давления вода становится твердой, и как раз внутри слоя льда, вблизи его поверхности, и была оборудована база.

Определите радиус и температуру внешней поверхности ледяного слоя на этой планете. При решении вы можете использовать следующие данные и приближения.

• Плотность жидкой воды в океане изменяется, но в расчетах считайте, что эта

$t, c$	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	10,00	12,00	14,00	16,00
$v, m/c$	0,200	0,205	0,351	0,600	0,871	1,060	1,192	1,285	1,349	1,426	1,464	1,482	1,491

$t, c$	2,50	2,60	2,70	2,80	2,90	3,00	3,10	3,20	3,30	3,40	3,50
$a, m/c^2$	0,246	0,260	0,274	0,289	0,305	0,322	0,311	0,300	0,289	0,279	0,269

плотность постоянна и равна  $\rho \approx 925 \text{ кг/м}^3$ .

- Плотность модификации льда, из которой состоит ледовый слой на этой планете, тоже можно считать примерно постоянной и равной  $\rho_1 \approx 1480 \text{ кг/м}^3$ .

- Средняя плотность вещества ядра планеты равна  $\rho_2 \approx 8880 \text{ кг/м}^3$ .

- Мощность тепла, выделяемого в ядре планеты, можно считать постоянной и равной  $P \approx 1850 \text{ МВт}$ .

- Согласно закону Фурье, количество теплоты, протекающее при теплообмене в единицу времени через единицу площади поверхности слоя вещества, пропорционально разности температур по разные стороны от слоя и обратно пропорционально толщине слоя:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t \Delta S} = \frac{\Delta P}{\Delta S} = \kappa \frac{\Delta T}{l}$$

Для воды в океане нашей планеты коэффициент теплопроводности можно считать равным  $\kappa \approx 0,749 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ .

- Фазовая диаграмма воды представлена на рисунке 1 (римскими цифрами обозначены различные модификации льда).

Можно ли по данным задачи определить радиус ядра планеты? Если да, то найдите его.

### 3. Очень толстая линза (18 баллов)

В одной из установок Харлана использовался пучок параллельных лучей с очень маленькой расходимостью – максимальный

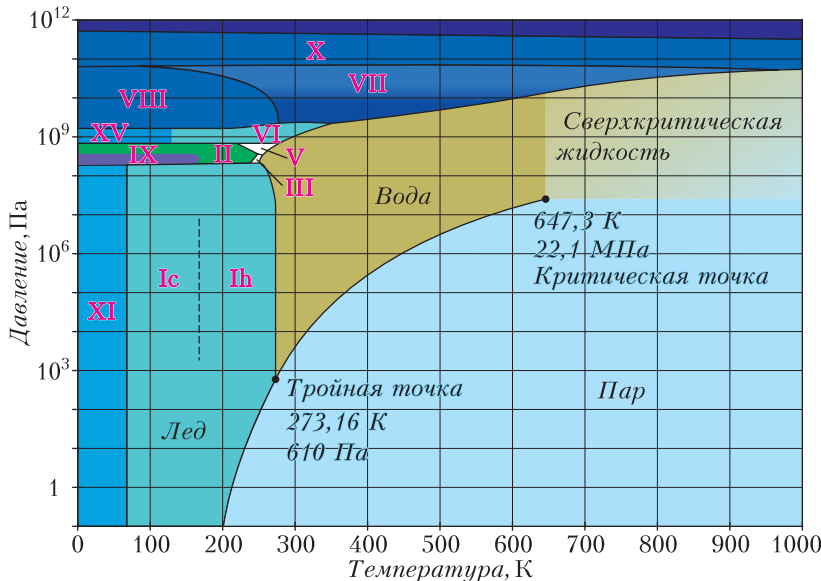


Рис. 1

угол между двумя лучами в этом пучке не должен был превышать  $\vartheta_{\max} = 0,1^\circ$ . Для создания такого пучка использовались яркий монохроматический сферический источник света диаметром  $d = 4 \text{ мкм}$  и коллиматор – цилиндр диаметром  $D = 10 \text{ см}$  из стекла с показателем преломления  $n = 2$ , один торец которого тщательно отшлифован в форме сферической поверхности радиусом  $R = 50 \text{ см}$ , центр кривизны которой лежит на оси цилиндра (рис. 2).

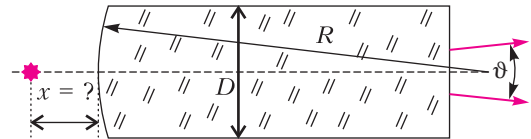


Рис. 2

На каком расстоянии  $x$  от вершины этой поверхности нужно разместить источник, чтобы его лучи, прошедшие через коллиматор, образовали пучок с требуемыми характеристиками?

*Указание.* Учтите, что при  $\alpha \ll 1$  справедливы приближенные равенства  $\sin \alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{6}$  и  $\text{tg } \alpha \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3}$  с ошибкой менее  $\frac{\alpha^5}{5}$ .

### 4. Квантовая криптография (16 баллов)

Для передачи секретной информации руководству Вечности Эндрю Харлан использовал кодировку данных с помощью поляризационных состояний фотонов. Важной составляющей его установки было устройство, испускающее фотоны в заданном состоянии поляризации. Для его тестирования техник установил устройство так, что оно испускало фотоны в направлении оси  $z$ , и поставил на оси пучка детектор, регистрирующий фотоны, поляризованные вдоль оси  $x$ . Оказалось, что из серий по 1000 испущенных фотонов детектор в среднем регистрирует 800 фотонов.

Затем Харлан изменил настройку детектора так, что теперь он должен был регистрировать фотоны, поляризованные линейно вдоль биссектрисы угла между осями  $x$  и  $y$ . Теперь детектор в среднем «замечал» 612 фотонов из 1000. Наконец, детектор был перенастроен на регистрацию фотонов с правой круговой поляризацией.

Предполагая, что устройство на самом деле всегда испускает фотоны в одном и том же состоянии поляризации, предскажите, какое количество фотонов из серии в 1000 фотонов в среднем будет регистрировать детектор.

*Указание.* Перед решением задачи прочитайте следующий справочный текст, посвященный методу комплексных амплитуд и поляризациям фотонов.

В классической волновой теории света для описания электромагнитной волны мы должны указать ее частоту  $\nu$  (длину волны  $\lambda$ ) и направление ее распространения, например направив по нему вектор  $\vec{n}$  с единичной длиной. Эту информацию можно объединить в одном объекте, если ввести волновой вектор  $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n} = \frac{2\pi}{c} \nu \vec{n}$  (где  $c$  – скорость света). Но при каждом значении  $\vec{k}$  у такой волны возможны две независимые поляризации. Они соответствуют двум возможным взаимно перпендикулярным направлениям, в которых происходят колебания вектора  $\vec{E}$  напряженности электрического поля в волне (они всегда происходят в плоскости, перпендикулярной  $\vec{k}$ ). Например, если  $\vec{k}$  направлен вдоль оси  $z$ , то две возможные поляризации соответствуют колебаниям вдоль осей  $x$  и  $y$ , которые можно задавать единичными векторами  $\vec{e}_x$  и  $\vec{e}_y$ . Для примера на рисунке 3 показано положение векторов  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  в волне, поляризованной вдоль оси  $x$ .

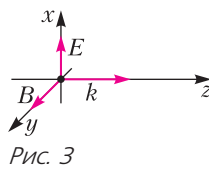


Рис. 3

Конечно, у волны могут быть и другие состояния поляризации, но их можно получить при помощи наложения, т.е. суперпозиции, базисных состояний. Отметим, что при составлении суперпозиции мы можем строить не только другие линейные поляризации (для них вектор  $\vec{E}$  в волне направлен вдоль оси, отличающейся от  $x$  и  $y$ , а проекции  $\vec{E}$  на базисные оси имеют разные значения, но колеблются синфазно). Путем суперпозиции можно получить также круговые или эллиптические поляризации, при которых проекции вектора  $\vec{E}$  на базисные оси совершают колебания со сдвигом по фазе относи-

тельно друг друга. Для описания таких колебаний можно использовать метод комплексных амплитуд.

Комплексные числа записываются в виде  $z = x + iy$ , где специальное число  $i = \sqrt{-1}$  называют мнимой единицей, а  $x$  и  $y$  – два вещественных числа, называемых вещественной и мнимой частью комплексного числа  $z$ :  $x = \text{Re}(z)$ ,  $y = \text{Im}(z)$ . Использование комплексных чисел позволяет расширить описание решений алгебраических уравнений (например, ясно, что с их помощью можно записывать корни квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом). Комплексные числа можно перемножать и делить друг на друга, получая снова комплексные числа. Эти операции определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

Вообще, с комплексными числами можно проводить любые алгебраические операции. Можно определить на множестве комплексных чисел многие известные функции.

Комплексное число  $z^* = x - iy$  называют сопряженным к числу  $z$ . Вещественная неотрицательная величина  $|z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$  называется модулем комплексного числа. Если определить фазу  $\varphi$  комплексного числа с помощью формул  $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  и  $\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , то можно вве-

сти запись комплексного числа, представленного в экспоненциальной форме:  $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$ . Теперь мы видим, что в комплексной форме записи можно объединить информацию об амплитуде и фазе колебания. Так, произвольную поляризацию волны можно описывать вектором  $\vec{e} = \alpha \cdot \vec{e}_x + \beta \cdot \vec{e}_y$ , в записи которого  $\alpha$  и  $\beta$  – это комплексные числа. Модуль каждого из этих чисел описывает величину вклада базисной поляризации, а фаза комплексного числа задает начальную фазу колебаний с этой поляризацией. Для физики существенно разность фаз двух складываемых колебаний, поэтому начальную фазу колебаний по оси  $x$  можно выбрать произвольно – например, равной 0. Тогда произвольное состояние поляризации волны описывается вектором  $\vec{e} = |\alpha| \cdot \vec{e}_x + |\beta| e^{i\varphi} \cdot \vec{e}_y$ . Так, состояние с



$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/2} \cdot \vec{e}_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{e}_x + \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \vec{e}_y$  называют состоянием с правой круговой поляризацией. В этом состоянии вклады базисных поляризаций одинаковы по амплитуде и сдвинуты по фазе на  $\frac{\pi}{2}$ . В классической волне с такой связью базисных поляризаций конец вектора  $\vec{E}$  при взгляде навстречу волновому вектору  $\vec{k}$  при распространении волны описывает окружность, вращаясь подобно правому винту.

Согласно квантовой теории света, его можно рассматривать как совокупность дискретных порций энергии электромагнитного поля – фотонов. При этом для описания состояния отдельного фотона тоже можно использовать волновой вектор, который определяет импульс  $\vec{p} = \hbar \vec{k}$  и энергию  $\epsilon = h\nu = \hbar c |\vec{k}|$  фотона (здесь  $\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1,05 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – постоянная Планка). Кроме того, у отдельного фотона тоже есть два независимых состояния поляризации, и для фотона с волновым вектором  $\vec{k} = k \cdot \vec{e}_z$  это могут быть состояния с поляризацией по  $x$  и  $y$ . Кроме того, фотон может находиться в поляризованном состоянии, являющимся квантовой суперпозицией этих состояний. Договоримся описывать состояние фотона в такой суперпозиции вектором  $\vec{e} = |\alpha| \cdot \vec{e}_x + |\beta| e^{i\varphi} \cdot \vec{e}_y$ .

Отличие квантовой суперпозиции от классической состоит в том, что волны, отвечающие распространению отдельных фотонов, являются волнами вероятности. Поэтому и предсказания результатов измерений в квантовой теории носят вероятностный характер. Если фотон находится в поляризованном состоянии  $\vec{e} = \alpha \cdot \vec{e}_x + \beta \cdot \vec{e}_y$ , то вероятность при измерении обнаружить его в состоянии  $\vec{e}' = \alpha' \cdot \vec{e}_x + \beta' \cdot \vec{e}_y$  равна квадрату модуля скалярного произведения соответствующих векторов, причем для комплексных векторов определенное скалярного произведения содержит комплексное сопряжение:

$$\omega(\vec{e}, \vec{e}') = |\vec{e}' \cdot \vec{e}|^2 = |(\alpha' \cdot \vec{e}_x + \beta' \cdot \vec{e}_y) \cdot (\alpha \cdot \vec{e}_x + \beta \cdot \vec{e}_y)|^2 = |\alpha' \cdot \alpha + \beta' \cdot \beta|^2.$$

Например, легко убедиться, что для состояния  $\vec{e} = \alpha \cdot \vec{e}_x + \beta \cdot \vec{e}_y$  измерение поляризации фотона должно с вероятностью  $\omega_x = |\alpha|^2$  обнаруживать поляризацию вдоль оси  $x$  и с вероятностью  $\omega_y = |\beta|^2 = 1 - \omega_x = 1 - |\alpha|^2$  – поляризацию вдоль оси  $y$ . Как видно, для любого состояния должно выполняться требование нормировки  $\omega_x + \omega_y = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ .

10 класс (отдельные задачи)

1. Треугольный КПД (20 баллов)

В некотором конструкторском бюро создали серию тепловых машин, рабочим телом которых было постоянное количество одного и того же идеального газа. Диаграммы циклов всех машин в координатах давление–объем имели вид равнобедренного треугольника с основанием, параллельным оси  $V$ . Если выбрать в качестве масштабных единиц

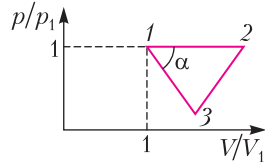


Рис. 4

на осях диаграммы значения объема и давления в состоянии 1 (рис. 4), то угол при основании всех треугольников окажется одинаковым и различаться циклы разных машин будут только отношением  $\frac{V_{\max}}{V_{\min}}$ . Известно

также, что этот угол выбран так, что в каждом из трех процессов, отвечающих сторонам треугольника, газ только получает или только отдает тепло (для всех используемых циклов). В таблице даны два значения КПД для циклов с разными значениями

переменной  $z = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{V_{\min}}$ :

$z$	5/11	10/17
КПД	4%	5%

Определите количество степеней свободы молекулы используемого газа и величину угла  $\alpha$ . Найдите КПД цикла при  $z = 1$ .

2. Тепло и свет (15 баллов)

В полевой лаборатории три одинаковых нагревательных элемента  $H$  с постоянным сопротивлением и три лампы работали от одного генератора, поддерживающего на своих клеммах постоянное напряжение.

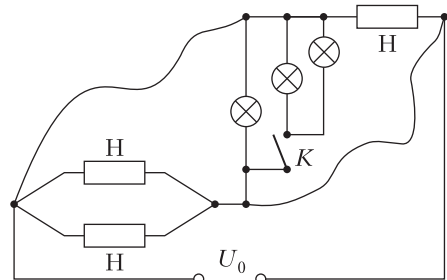


Рис. 5

В схеме электропитания использованы два длинных провода с заметным сопротивлением (на рисунке 5 они показаны «кривыми» линиями). Сопротивления остальных соединительных проводов по сравнению с ними пренебрежимо малы. В первом режиме работы схемы ключ  $K$  разомкнут, работает только одна лампа, одиночный нагреватель потребляет мощность  $P_1 = 980$  Вт, а каждый из нагревателей в паре –  $P_2 = 720$  Вт. Затем ключ  $K$  замкнули, и теперь светят все три лампы. При этом мощность потребления каждого из парных нагревателей уменьшилась до  $P'_2 = 648$  Вт.

Какую мощность  $P'_1$  теперь потребляет одиночный нагреватель?

*7–9 классы (отдельные задачи)*

### 1. Ложка снега в банке пара (18 баллов)

Вертикальный цилиндрический сосуд имеет площадь сечения  $S = 500$  см<sup>2</sup> и гладкие теплоизолирующие прозрачные стенки. Сверху содержимое сосуда – чистый водяной пар (без воздуха) – накрыто легким теплоизолирующим поршнем, который может свободно перемещаться в сосуде, оставаясь горизонтальным. Давление снаружи сосуда равно нормальному атмосферному  $p_0 \approx 101$  кПа, а внутри на стенках видны микроскопические капельки воды. Известно, что плотность водяного пара в сосуде  $\rho_0 \approx 0,586$  кг/м<sup>3</sup>. Не нарушая теплоизоляции и не выпуская пар из сосуда, в него добавили чайную ложку мокрого снега (находящуюся в равновесии смесь ледяных кристаллов и воды), в котором доля льда по массе равнялась 50%. К моменту установления равновесия поршень опустился на  $h \approx 22,4$  мм.

Найдите массу снега  $m$  в упомянутой чайной ложке. Удельная теплота парообразования воды  $r \approx 2258$  кДж/кг, удельная теплота плавления льда  $\lambda \approx 334$  кДж/кг, удельная теплоемкость воды  $c \approx 4,2$  кДж/(кг · °С). Кроме того, вы можете использовать в решении определение шкалы температур Цельсия. Найдите также изменение  $\Delta E$  внутренней энергии воды в сосуде в процессе установления равновесия (после добавления снега).

### 2. Космическое освещение (24 балла)

На межпланетной станции установили окуляр, направляющий свет на фотоэлемент. Окуляр все время направлен на Солнце (угол его захвата больше углового размера Солнца, видимого с орбиты станции), а сила тока фотоэлемента пропорциональна мощности светового излучения из желто-зеленой части видимого спектра, попадающего в глазок окуляра. Запись значений силы тока фотодатчика в зависимости от времени была начата в момент прохождения станцией перигелия своей орбиты (момент времени  $t = 0$ ) и производилась при определенных положениях станции относительно Солнца. Результаты представлены в таблице.

На основании этих результатов определите величину большой и малой полуосей эллиптической орбиты станции (в а.е.). Поглощением света в околосолнечном пространстве пренебрегите.

*Указание.* Используйте изложенные ниже сведения из астрономии и геометрии.

Согласно I закону Кеплера, планеты и другие небесные тела Солнечной системы движутся по эллипсам, в фокусе которых находится Солнце. Эллипс можно рассматривать как сплюснутую окружность – расстояние от центра эллипса до его точек изменяется в пределах  $b \leq r \leq a$ , где  $a$  и  $b$  называют большой и малой полуосями эллипса. Определяющим свойством эллипса как геометрической фигуры является существование двух симметричных точек – фокусов эллипса, расположенных на более длинной оси симметрии. Сумма расстояний от любой точки эллипса до двух его фокусов есть величина постоянная для данного эллипса. На эллиптической орбите выделяют точку, в которой тело ближе всего к Солнцу – перигелий  $P$ , и точку, в которой оно дальше всего от Солнца – афелий  $A$ . Расстояния в Солнечной системе обычно измеряют в астрономических единицах, примерно соответствующих радиусу орбиты Земли, которая мало отличается от окружности: 1 а.е.  $\approx$  150 млн. км. Согласно III закону Кеплера, отношение квадратов периодов обращения небесных тел Солнечной системы равно отношению кубов больших полуосей их орбит:  $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$ . Максимум мощности электромагнитного излучения Солнца приходится на желто-зеленую часть видимого спектра.

$t$ , земн. года	0,00	0,351	0,582	0,873	1,236	1,673	2,182	2,751	3,364	4,000	4,636
$I$ , мА	25,60	15,47	9,77	6,17	4,10	2,91	2,24	1,86	1,66	1,60	1,66

**Заключительный этап**

11 класс

1. Два одинаковых гладких однородных бруска, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда, лежат на гладкой горизонтальной поверхности строго «напротив» друг друга так, что их боковые грани параллельны. Масса каждого из брусков  $M = 280$  г, их толщина (размер по вертикали) мала по сравнению с горизонтальными размерами. Маленькая однородная цилиндрическая шайба такой же высоты попадает в зазор между брусками (рис. 6), скользя без вра-

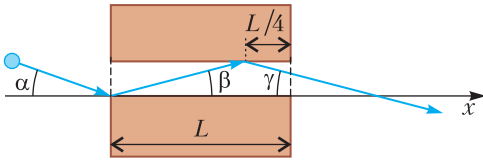


Рис. 6

щения по поверхности в направлении под углом  $\alpha = 2,6^\circ$  к соседним граням брусков, т.е. к оси  $x$ . Шайба ударяется о край одного бруска, отскакивает под углом  $\beta = 2,2^\circ$  к его поверхности, ударяется о второй брусок в точке, расположенной на расстоянии четверти длины брусков от другого края, и успевает, не коснувшись более ни одного из брусков, вылететь из зазора под углом  $\gamma = 2,0^\circ$  к оси  $x$ .

Найдите массу  $m$  шайбы. Все соударения можно считать практически мгновенными и упругими.

2. Рабочее тело тепловой машины – постоянное количество двухатомного идеального газа, а его цикл в координатах давление–объем (рис. 7) состоит из двух отрезков прямых и участка параболы

$$p = \frac{p_0}{6} \left( 36 + 5 \frac{V}{V_0} - \left( \frac{V}{V_0} \right)^2 \right).$$

На каких участках цикла газ получает и отдает тепло? Найдите КПД цикла.

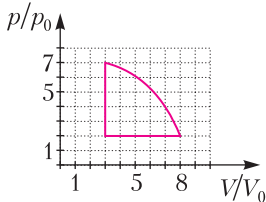


Рис. 7

3. Два одинаковых отрезка тонкого легкогибкого провода прикрепили концами к потолку. На других концах подвесили (за края) тонкий металлический стержень длиной  $d = 0,8$  м и массой  $m = 800$  г. Расстояние между точками подвеса проводов к потолку точно равно длине стержня. Когда в пространстве, в котором находилась система, создали однородное постоянное горизонтальное магнитное поле с индукцией  $B = 3,5$  Тл и на верхние концы проводов подали постоянное напряжение, провода приняли вид, показанный на рисунке 8. При этом расстоя-

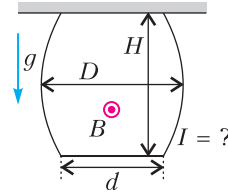


Рис. 8

ние между потолком и стержнем стало  $H = 1$  м, а наибольшее расстояние между проводами  $D = 1$  м.

Найдите величину силы тока, текущего по проводам. Магнитное поле, созданное токами в проводах, намного слабее внешнего. Ускорение свободного падения  $g \approx 9,8$  м/с<sup>2</sup>.

4. Небольшой источник света находится на главной оси системы из двух одинаковых тонких линз, расположенных на расстоянии  $L_1 = 20$  см друг от друга. Система создает изображение предмета с поперечным увеличением  $\Gamma_1 = -0,4$  (знак «-» указывает на то, что изображение перевернутое). Когда, не трогая источник и ближайшую к нему линзу, другую отодвинули так, что расстояние между линзами увеличилось до  $L_2 = 40$  см, поперечное увеличение изображения стало равным  $\Gamma_2 = -0,5$ .

Каким станет поперечное увеличение, если еще сдвинуть дальнюю линзу, чтобы расстояние между линзами стало равным  $L_3 = 80$  см? Какова оптическая сила каждой линзы?

Публикацию подготовил К. Парфенов

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## «Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №7)

1. Найдутся.

Например,

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} = 4.$$

*Комментарий.* Пример помогают построить следующие соображения. Всего есть 11 положительных правильных несократимых дробей со знаменателями от 2 до 6:  $1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1/6, 5/6$ . Их сумма равна  $5,5$ , поэтому нужно убрать четыре из них с суммой  $1,5$ . Так как  $1/3 + 1/6 = 0,5$ , то осталось убрать две дроби с суммой  $1$ , например  $1/4$  и  $3/4$ . Отметим, что в условии не оговорено, что каждая дробь положительная, но примера с отрицательными дробями не существует.

2. См. рисунок 1.

Сперва определим, как расположены бруски в кубе. Брусок, который проходит через синюю клетку на передней грани, снизу и справа ограничен красными кубиками  $1 \times 1 \times 1$ , поэтому проходит через центр куба  $3 \times 3 \times 3$ . Назовем этот

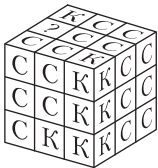


Рис. 1

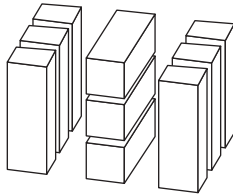


Рис. 2

брусок *центральный*. Красная и синяя клетки на правой грани принадлежат двум разным брускам, и оба эти бруска вертикальны (идти слева направо они не могут из-за центрального бруска). Значит, оставшиеся клетки на правой грани входят в еще один вертикальный брусок. Теперь понятно, что куб состоит из трех слоев, в правом бруске вертикальные, в центральном горизонтальные, в левом снова вертикальные (рис. 2). В каждом бруске, кроме среднего в левом слое, есть клетка известного цвета. Остается неизвестным цвет одного бруска, а значит, и его верхней клетки.

3. Обязательно.

Рассмотрим фрагмент данного многоугольника

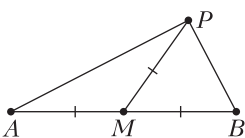


Рис. 3

(рис. 3), здесь  $P$  – указанная точка,  $AB$  – одна из сторон, для которой выполняется условие,  $M$  – середина  $AB$ . По условию  $PM = 0,5AB$ , следовательно,

но,  $\angle APB = 90^\circ$ . Аналогичное утверждение верно для всех сторон, кроме той, которая выделена в условии. Значит, полный угол вокруг точки  $P$ , равный  $360^\circ$ , разбивается на несколько слагаемых по  $90^\circ$ , а оставшееся слагаемое меньше  $180^\circ$ . Тогда оно также равно  $90^\circ$ , т.е. оставшийся треугольник также прямоугольный, поэтому его медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине. Следовательно, и от середины оставшейся стороны точка  $P$  удалена на половину этой стороны.

Из приведенного рассуждения следует, что многоугольник, указанный в условии, является четырехугольником, диагонали которого перпендикулярны и пересекаются в точке  $P$ .

4. У 88 учеников.

Понятно, что на олимпиаде не могло быть группы более чем из четырех тезок, иначе трое из них оказались бы в одном зале, что противоречит условию. Если у ученика не было тезок или был всего один тезка, то этот ученик не входит ни в одну сумму из условия. Если на олимпиаде было четыре тезки, то они сидели по два человека в зале и каждый из них входит в обе суммы. Если было ровно три тезки, то один из них сидел в одном зале, а другие двое – в другом. Тогда один ученик из тройки входит в первую сумму, а двое – во вторую, поэтому вторая сумма больше первой как раз на число троек тезок, т.е. всего было  $144 - 100 = 44$  тройки. Но ровно по одному тезке в обоих залах было только у двоих учеников из каждой тройки, которые сидели в одном зале. Следовательно, таких учеников было  $2 \cdot 44 = 88$ .

## Калейдоскоп «Кванта»

### Вопросы и задачи

1. Облако отбрасывает суживающийся к земле конус полной тени, но высота конуса из-за значительных размеров облака весьма велика. Поэтому полная тень облака на поверхности земли практически мало отличается по размерам от самого облака.

2. Стакан с водой представляет собой цилиндрическую линзу. Кривизна ее горизонтального сечения равна  $1/R$ , где  $R$  – радиус стакана, а кривизна вертикального сечения равна нулю. Поэтому в горизонтальном направлении такая линза увеличивает, а в вертикальном – нет.

3. Близорукий глаз рассматривает предмет под большим углом, чем глаз с нормальным зрением.

4. Если два предмета неодинаково удалены от наблюдателя, то расстояния между их изображениями на сетчатках двух глаз не равны, что позволяет оценить расстояния до предметов – в

этом преимущество стереоскопического бинокулярного зрения. Такая способность значительно ухудшается при зрении одним глазом.

**5.** Художник учитывает особенности нашего зрения – все предметы, которые видны неясно, человек представляет расположенными далеко.

**6.** Даже если пренебречь поглощением света водой, то на границе сред «вода – воздух» свет только частично преломляется и переходит в воздух, а частично отражается обратно.

**7.** Морская вода поглощает почти все лучи солнечного спектра, кроме сине-зеленого. Поэтому любая прозрачная жидкость кажется окрашенной именно в такой цвет.

**8.** На самом деле лист слегка зеленый. А кажется нам ярко-зеленым потому, что наши глаза обладают наибольшей чувствительностью в этой части видимого спектра. Так, глаз в пять раз чувствительнее к желто-зеленому свету, чем к синему или красному.

**9.** Масло впитывается в «скважины» холста, а красящий порошок остается на его поверхности и легко с нее осыпается. В загрунтованную поверхность масло не впитывается и затвердевает вместе с красящим веществом, образуя блестящий слой, весьма прочный и не растворимый в воде.

**10.** В спектре излучения, например, электрической лампы накаливания преобладают желтые и красные лучи, изменяющие естественную окраску тел.

**11.** Лучи дополнительных цветов лучше поглощаются веществом.

**12.** Теперь черепок представится нам фиолетовым, так как этот цвет дополнителен к зеленому.

**13.** Противоречия нет. Синяя краска поглощает все цвета, но отражает синий, голубой и зеленый; желтая поглощает все цвета, но отражает зеленый, желтый и оранжевый. Поэтому обе краски в смеси отражают только зеленый цвет. При освещении бумаги светом синей и желтой ламп оба цвета отражаются и вызывают ощущение белого цвета.

**14.** Термин «серый» употребляется, когда сравнивают два белых предмета, в разной степени отражающие падающий на них свет. Например, кусок серой бумаги на черном фоне покажется белым, а новая белая рубашка на фоне рубашки, уже постиранной, покажется серой.

**15.** Если соседние точечные источники света расположены слишком близко, то их изображения на сетчатке глаза перекрываются при удалении от картины, а возникающий в сознании зрителя цвет является результатом сложения цветов этих точек. Так, если рядом расположены

пурпурная и желтая точки, то комбинация их цветов воспринимается как розовая.

### Микроопыт

Такое задание трудновыполнимо, так как зеркало представляет глазам движения руки в искаженном виде, нарушая привычную связь зрительных впечатлений и двигательных ощущений. Так, при желании провести линию вправо рука тянет влево и тому подобное.

## LXIV Международная математическая олимпиада

**1.**  $n = p^r$ , где  $p$  – простое число и  $r \geq 2$ .

Легко видеть, что  $n$  вида  $p^r$  подходит при  $r \geq 2$ , поскольку в этом случае  $d_i = p^{i-1}$  и  $p^{i-1}$  делит  $p^i + p^{i+1}$ .

Теперь предположим, что  $n$  имеет хотя бы два различных простых делителя, и пусть  $p < q$  – два самых меньших простых делителя  $n$ . Тогда для некоторого натурального  $j$  имеем  $d_1 = 1, d_2 = p, \dots$

$\dots, d_j = p^{j-1}, d_{j+1} = p^j, d_{j+2} = q$ . При этом наибольшие делители  $n$  – это, в порядке убывания,  $n, \frac{n}{p}, \dots, \frac{n}{p^{j-1}}, \frac{n}{p^j}, \frac{n}{q}, \dots$  Но, вопреки условию

задачи,  $\frac{n}{q}$  не делит  $\frac{n}{p^j} + \frac{n}{p^{j-1}}$ . Действительно,

иначе  $\frac{n}{p^j} + \frac{n}{p^{j-1}} = \frac{n}{p^j} \cdot (p+1)$  делится на  $\frac{n}{q}$ , тогда

$nq(p+1)$  делится на  $np^j$ , откуда  $q(p+1)$  делится на  $p^j$ , что неверно, так как  $q$  и  $p+1$  взаимно просты с  $p$ .

**2.** Пусть  $S'$  – середина дуги  $BC$  окружности  $\Omega$ , диаметрально противоположная точке  $S$ , так что  $AS'$  – биссектриса угла  $BAC$  (рис. 4). Пусть касательная к  $\omega$ , проведенная в точке  $P$ , пересекает вторично  $\Omega$  в точке  $Q$ .

Покажем, что соответствующие стороны треугольников  $APD$  и  $S'QS$  параллельны. Отсюда

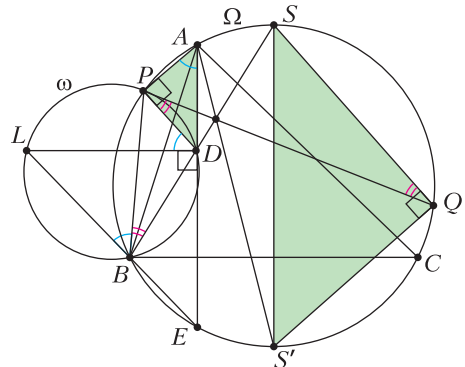


Рис. 4

будет следовать решение задачи, поскольку тогда  $AS', PQ$  и  $DS$  пересекаются в одной точке – центре гомотетии этих треугольников.

Прямые  $AD$  и  $SS'$  обе перпендикулярны  $BC$ , откуда  $AD \parallel SS'$ .

Из касания  $\angle DPQ = \angle DBP$  и далее  $\angle DBP = \angle SBP = \angle SQP$ , откуда  $PD \parallel QS$ .

Наконец заметим, что  $AP \perp DP$ . Действительно, из вписанных четырехугольников  $APBE$  и  $DPLB$  видим, что  $\angle PAD = \angle PAE = \angle PBL = \angle PDL = 90^\circ - \angle ADP$ . И поскольку  $QS \perp S'Q$  (угол  $SQS'$  опирается на диаметр), имеем  $AP \parallel S'Q$ . Этим завершается решение.

**3.** Пусть  $\{a_n\}$  – арифметическая прогрессия с разностью  $d \geq 0$ . Тогда она удовлетворяет условию для многочлена  $P(x) = (x+d)(x+2d)\dots(x+kd)$ . Пусть теперь  $\{a_n\}$  удовлетворяет условию. Покажем, что  $\{a_n\}$  – арифметическая прогрессия с неотрицательной разностью.

(i) Сделаем замечания, которыми будем пользоваться ниже.

Так как  $P(x)$  имеет неотрицательные коэффициенты, то он возрастает на  $[0; +\infty)$ , в частности,  $P(x) = P(y) \Leftrightarrow x = y$  для натуральных  $x$  и  $y$ .

Далее, если  $\{a_n\}$  – константа, начиная с некоторого номера  $n_0$ , то многочленом  $P(x)$  может быть только  $x^k$  (иначе равенство  $P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\dots a_{n+k}$  не выполнено для  $n = n_0$ ). И далее, последовательно подставляя в равенство из условия  $n = n_0 - 1, n = n_0 - 2, \dots$ , понимаем, что  $\{a_n\}$  – константа (стационарная последовательность). С учетом этого замечания, ниже считаем, что  $\{a_n\}$  не является константой, начиная с некоторого номера.

(ii) Покажем, что  $\{a_n\}$  строго возрастает.

Из равенств  $P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\dots a_{n+k}, P(a_{n+1}) = a_{n+2}\dots a_{n+k}a_{n+k+1}$  видим, что  $a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow a_{n+1} < a_{n+k+1}, a_n > a_{n+1} \Leftrightarrow a_{n+1} > a_{n+k+1}, a_n = a_{n+1} \Leftrightarrow a_{n+1} = a_{n+k+1}$ .

Сначала поймем, что  $\{a_n\}$  нестрого возрастает. Предположим противное и среди всех  $a_m$  таких, что  $a_{m-1} > a_m$ , выберем наименьшее. Из  $a_{m-1} > a_m$  следует  $a_m > a_{m+m}$ . Тогда из условия минимальности при выборе  $a_m$  последовательно получаем:  $a_{n+m-1} \leq a_{n+m}, a_{n+m-2} \leq a_{n+m-1}, \dots, a_m \leq a_{m+1}$ . Но тогда  $a_m \leq a_{n+m}$  – противоречие.

Теперь предположим, что  $a_n = a_{n+1}$  для некоторого номера  $n$ . Тогда имеем  $a_{n+1} = a_{n+k+1}$  и, так как последовательность нестрого возрастает, получаем, что  $a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = a_{n+k+1}$ . Повторяя то же для пары  $a_{n+k} = a_{n+k+1}$ , далее для пары  $a_{n+2k} = a_{n+2k+1}$  и т.д., получаем, что последовательность является константой, начиная с некоторого номера (что противоречит нашему предположению). Итак, доказано, что  $\{a_n\}$  строго возрастает.

(iii) Зафиксируем  $n$  и обозначим  $d_i = d_i(n) = a_{n+i} - a_n$  (для  $i = 1, 2, \dots, k$ ). Мы знаем, что  $\{a_n\}$  возрастает, поэтому  $0 < d_1 < \dots < d_k$ . Имеем  $P(a_n) = (a_n + d_1)(a_n + d_2)\dots(a_n + d_k) \geq (a_n)^k + d_k(a_n)^{k-1}$ . Если бы  $d_k$  превосходил коэффициент при  $x^{k-1}$  в многочлене  $P(x)$ , это противоречило бы неравенству, записанному выше, для достаточно большого  $a_n$ . Отсюда следует, что все  $d_i$  ограничены сверху некоторой константой (не зависящей от  $n$ ). Значит, какая-то  $n$ -ка  $(d_1(n) < \dots < d_k(n)) = (D_1 < \dots < D_k)$  повторяется для бесконечно многих  $n$ . Тогда равенство  $P(x) = (x + D_1)\dots(x + D_k)$  имеет бесконечно много решений  $i$ , следовательно, является тождеством. Для любой  $n$ -ки  $(d_1 < \dots < d_k)$ , отличной от  $(D_1 < \dots < D_k)$ , равенство  $P(x) = (x + d_1)\dots(x + d_k)$  имеет лишь конечное множество решений (ненулевой многочлен  $P(x) - (x + d_1)\dots(x + d_k)$  имеет лишь конечное множество корней). Поэтому начиная с некоторого  $n$  все  $n$ -ки  $(d_1(n) < \dots < d_k(n))$  совпадают с  $(D_1 < \dots < D_k)$ . В частности, начиная с некоторого  $n = n_0$ , имеем  $d_1(n) = a_{n+1} - a_n = D_1$ , а значит, начиная с этого номера  $n_0$ , последовательность  $\{a_n\}$  – арифметическая прогрессия с разностью  $d = D_1$ . Отсюда  $D_2 = 2d, \dots, D_k = kd$  и  $P(x) = (x + d)\dots(x + kd)$ . Теперь заметим, что  $P(a_{n_0} - d) = a_{n_0}(a_{n_0} + d)\dots(a_{n_0} + (k-1)d)$ . А по условию тому же равно  $P(a_{n_0-1})$ . Значит,  $a_{n_0-1} = a_{n_0} - d$ . Аналогично рассуждая далее, понимаем, что арифметическая прогрессия  $a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots$  однозначно продолжается влево до арифметической прогрессии. Этим завершается решение.

**4.** Очевидно,  $\{a_n\}$  возрастает. Ниже покажем, что невозможно  $a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1} = 1$ . Этого достаточно для решения. Действительно, так как  $a_i$  по условию целые, откуда будет следовать, что  $a_{n+2} \geq a_n + 3$ , и далее  $a_{2023} = (a_{2023} - a_{2021}) + (a_{2021} - a_{2019}) + \dots + (a_3 - a_1) + a_1 \geq 3 \cdot 1011 + 1 = 3034$ . Итак, предположим противное:  $a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1} = 1$ . Положим  $A = x_1 + \dots + x_n + x_{n+1}$ ,

$$B = \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n+1}}, \quad t = x_{n+1}, \quad s = x_{n+2}, \quad \text{так что}$$

$$a_{n+1} = \sqrt{AB}, \quad a_n = \sqrt{(A-t)\left(B - \frac{1}{t}\right)}, \quad a_{n+2} = \sqrt{(A+s)\left(B + \frac{1}{s}\right)}.$$

Запишем равенство  $a_{n+1} - 1 = a_n$  и возведем его в квадрат:  $\sqrt{AB} - 1 = \sqrt{(A-t)\left(B - \frac{1}{t}\right)}, AB - 2\sqrt{AB} + 1 = AB - tB - \frac{A}{t} + 1$ , откуда  $0 = tB + \frac{A}{t} - 2\sqrt{AB} =$

$= \left( \sqrt{tB} - \sqrt{\frac{A}{t}} \right)^2$ . Значит,  $\sqrt{tB} = \sqrt{\frac{A}{t}}$ ,  $tB = \frac{A}{t}$  и однозначно находим  $t = \sqrt{\frac{A}{B}}$ .

Запишем равенство  $a_{n+1} + 1 = a_{n+2}$ :  $\sqrt{AB} + 1 = \sqrt{(A+s)\left(B + \frac{1}{s}\right)}$ . Возводя в квадрат и выполняя аналогичные преобразования, находим  $s = \sqrt{\frac{A}{B}}$ . В результате имеем  $x_{n+1} = t = s = x_{n+2}$ , что противоречит условию.

5.  $1 + \lceil \log_2 n \rceil$ .

Положим  $N = \lceil \log_2 n \rceil$ , так что  $2^N \leq n \leq 2^{N+1} - 1$ . Вначале предьявим пример, в котором любой путь ниндзя содержит не более  $N + 1$  красных кругов. В ряду с номером  $i = 2^a + b$ , где  $0 \leq a \leq N$  и  $0 \leq b < 2^a$ , покрасим красным круг с номером  $2b + 1$  (рис. 5). Тогда любой путь ниндзя содержит не более одного красного круга из рядов  $2^a, 2^a + 1, \dots, 2^{a+1} - 1$  для каждого  $0 \leq a \leq N$ . Поэтому в нашем примере каждый путь ниндзя содержит не более  $N + 1$  красных кругов.

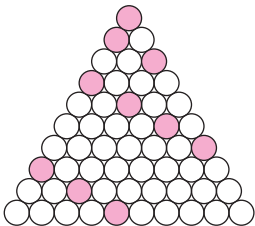


Рис. 5

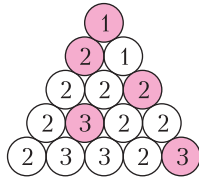


Рис. 6

Теперь покажем, что в любом японском треугольнике найдется путь ниндзя, содержащий не менее  $N + 1$  красных кругов.

На каждом круге  $C$  напишем максимальное количество красных кругов, взятое по всем путям ниндзя, начинающимся в верхнем круге и заканчивающимся в круге  $C$  (рис. 6).

Заметим, что

(i) если  $C$  – не красный круг, то число, написанное на круге  $C$ , это максимум из чисел, написанных на одном или двух кругах, расположенных над  $C$ ;

(ii) если  $C$  – красный круг, то число, написанное на нем, на единицу больше, чем определенный выше максимум.

Пусть  $v_1, v_2, \dots, v_i$  – ряд чисел, написанных на кругах  $i$ -го ряда, и пусть  $v_m$  – максимальное из этих чисел.

Тогда числа в  $(i + 1)$ -м ряду будут, соответственно, не меньше чисел в ряду  $v_1, \dots, v_{m-1}, v_m, v_m, v_{m+1}, \dots, v_i$ . При этом мы не учли еще, что один из кругов  $(i + 1)$ -го ряда – красный, значит, для

одного из чисел оценку можно увеличить на 1. Итого, сумма чисел в  $(i + 1)$ -м ряду не меньше чем  $(v_1 + v_2 + \dots + v_i) + v_m + 1$ . Теперь из этого соображения докажем следующее утверждение:

Пусть  $s_k$  – сумма чисел в  $k$ -м ряду. Тогда для  $0 \leq j \leq N$  выполнено неравенство

$$s_{2^j} \geq j \cdot 2^j + 1.$$

Отметим, что для  $j = N$  из утверждения сразу следует, что в ряду номер  $2^N$  найдется число не меньшее  $N + 1$ , а это нам и нужно.

Для доказательства используем индукцию по  $j$  с очевидной базой  $j = 0$  (поскольку число в верхнем круге равно 1).

Сделаем переход  $j \rightarrow j + 1$ . Предположим, что  $s_{2^j} \geq j \cdot 2^j + 1$ . Тогда максимальное число в  $2^j$ -м ряду, а значит, и в следующих рядах, не менее  $j + 1$ . Тогда, как мы видели выше,  $s_{k+1} \geq s_k + (j + 1) + 1 = s_k + (j + 2)$ . Отсюда

$$\begin{aligned} s_{2^{j+1}} &\geq s_{2^j} + 2^j(j + 2) = \\ &= j \cdot 2^j + 1 + 2^j(j + 2) = (j + 1)2^{j+1} + 1, \end{aligned}$$

что завершает доказательство индукционного перехода.

6. План решения состоит в следующем.

Мы укажем две различные точки, каждая из которых имеет равные степени относительно окружностей  $(AA_1A_2)$ ,  $(BB_1B_2)$  и  $(CC_1C_2)$ , откуда будет следовать, что эти три окружности имеют общую радикальную ось (соосны). Также покажем, что одна из этих точек лежит внутри окружности  $(AA_1A_2)$ , следовательно, пересекает эту окружность в двух точках, которые и являются общими точками всех трех окружностей.

Покажем сначала, что  $A_1$  – это центр окружности  $(A_2BC)$ . Так как  $A_1$  равноудалена от  $B$  и  $C$  и лежит внутри треугольника  $BA_2C$  (рис. 7), достаточно показать, что  $\angle BA_1C = 2\angle BA_2C$ . Последнее вытекает из равенств углов

$$\begin{aligned} \angle BA_2C &= \angle A_2BA + \angle BAC + \angle ACA_2 = \\ &= \frac{1}{2}((180^\circ - \angle AC_1B) + (180^\circ - \angle C_1BA)) + 60^\circ = \\ &= 240^\circ - \frac{1}{2}(480^\circ - \angle BA_1C) = \frac{1}{2}\angle BA_1C. \end{aligned}$$

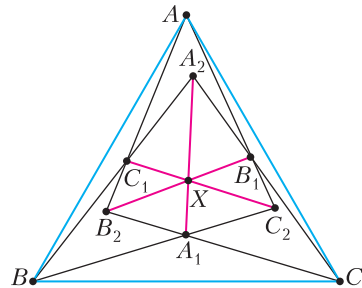


Рис. 7

Аналогично,  $B_1$  – центр окружности  $(B_2CA)$ ,  $C_1$  – центр окружности  $(C_2AB)$ . Отсюда

$$\begin{aligned} \angle B_1B_2C_1 &= \angle B_1B_2A = \angle B_2AB_1 = \angle C_1AC_2 = \\ &= \angle AC_2C_1 = \angle B_1C_2C_1. \end{aligned}$$

Таким образом, четырехугольник  $B_1C_1B_2C_2$  вписанный. Аналогично,  $C_1A_1C_2A_2$  и  $A_1B_1A_2B_2$  вписанные. Также заметим, что шестиугольник  $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$  не является вписанным, поскольку  $\angle C_2A_1B_2 + \angle B_2C_1A_2 + \angle A_2B_1C_2 = 480^\circ \neq 360^\circ$ . Значит, радикальные оси окружностей  $(B_1C_1B_2C_2)$ ,  $(C_1A_1C_2A_2)$  и  $(A_1B_1A_2B_2)$  пересекаются в одной точке  $X$ , которая имеет равные степени относительно окружностей  $(AA_1A_2)$ ,  $(BB_1B_2)$  и  $(CC_1C_2)$ . Покажем, что  $X$  лежит внутри окружности  $(AA_1A_2)$ . Пусть  $O$  – центр треугольника  $ABC$ . Из условий на углы легко следует, что  $A_1$  лежит внутри треугольника  $BOC$ , и аналогичные факты верны для  $B_1$  и  $C_1$ . Отсюда  $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$  – выпуклый шестиугольник. Тогда  $X$  лежит на отрезке  $A_1A_2$  и, следовательно, внутри окружности  $(AA_1A_2)$ .

Далее, пусть окружности  $(A_2BC)$  и  $(AA_1A_2)$  вторично пересекаются в точке  $A_3$ . Аналогично определим  $B_3$  и  $C_3$ . Докажем, что четырехугольник  $BCB_3C_3$  вписанный (рис. 8). Действительно, счет (в ориентированных углах) показывает:  $\angle BC_3C = \angle BC_3C_2 + \angle C_2C_3C = \angle BAC_2 + \angle C_2C_1C =$

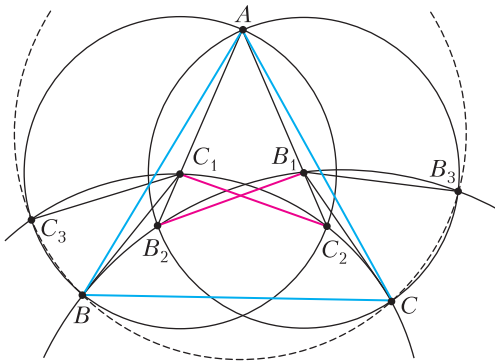


Рис. 8

$= 90^\circ + \angle(C_1C, AC_2) + \angle C_2C_1C$ , что равно (в силу  $CC_1 \perp AB$ )  $90^\circ + \angle C_1C_2B_1$ . Аналогично,  $\angle CB_3B = 90^\circ + \angle B_1B_2C_1$ . Отсюда, поскольку  $B_1C_1B_2C_2$  вписанный, видим, что  $\angle BB_3C = 90^\circ + \angle C_1B_2B_1 = 90^\circ + \angle C_1C_2B_1 = \angle BC_3C$ , что и требовалось. Аналогично,  $SAC_3A_3$  и  $ABA_3B_3$  вписанные. Шестиугольник  $AC_3BA_3CB_3$  не является вписанным, так как иначе  $AB_2CB_3$  вписанный,  $B_2$  лежит на окружности  $(ABC)$ , что невозможно, так как  $B_2$  находится внутри треугольника  $ABC$ . Значит, радикальные оси окружностей  $(BCB_3C_3)$ ,

$(SAC_3A_3)$  и  $(ABA_3B_3)$  пересекаются в одной точке  $Y$ , которая имеет равные степени относительно окружностей  $(AA_1A_2)$ ,  $(BB_1B_2)$  и  $(CC_1C_2)$ . Сделаем завершающее несложное наблюдение, показывающее, что  $X \neq Y$ . Так как  $A_1$  – центр окружности  $(A_2BC)$ , имеем  $A_1A_2 = A_1A_3$ , поэтому из окружности  $(AA_1A_2A_3)$  мы видим, что прямые  $AA_2$  и  $A_1Y$  симметричны относительно прямой  $AA_1$ . Так как  $X$  лежит на отрезке  $A_1A_2$ , совпадение  $X = Y$  возможно только если  $A_1$  и  $A_2$  лежат на серединном перпендикуляре к  $BC$ . Но тогда  $B_1$  и  $C_1$  также симметричны относительно него, а значит,  $A_1B_1 = A_1C_1$ , что противоречит условию.

## Олимпиада «Покори Воробьевы горы!»

11 класс

1. Движение бруска нужно разбить на две фазы: при скорости менее  $v_0$  для описания величины силы трения можно использовать выражение  $F_{\text{тр}}(v) = \mu mg + \Delta F(1 - v/v_0)$ , а при  $v > v_0$  силу трения можно считать постоянной и равной  $F_{\text{тр}}(v) = \mu mg$ .

Запишем уравнение движения в первой фазе с учетом силы сопротивления воздуха:

$$m \frac{dv}{dt} = F - F_{\text{тр}}(v) - \alpha v = \left( \frac{\Delta F}{v_0} - \alpha \right) v, \frac{dv}{dt} = \beta v.$$

Как видно, производная функции пропорциональна самой функции с коэффициентом  $\beta = \frac{1}{m} \left( \frac{\Delta F}{v_0} - \alpha \right)$  и ясно, что это экспоненциальная функция. Обозначив малую начальную скорость бруска после того, как его «слегка подтолкнули»,  $v(0) = u$ , находим, что скорость изменяется по закону  $v(t) = ue^{\beta t}$ . Ускорение на этой стадии тоже растет экспоненциально, причем  $\frac{a(t)}{v(t)} = \text{const} = \beta$ . Из таблицы видно, что ускорение растет до момента времени  $t_0 \approx 3$  с, а отношение скорости и ускорения в этой точке дает оценку для  $\beta$ :

$$\beta = \frac{1}{m} \left( \frac{\Delta F}{v_0} - \alpha \right) \approx \frac{a(t_0)}{v(t_0)} \approx 0,537 \text{ с}^{-1}.$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta F}{v_0} - \alpha = m\beta \approx 0,220 \text{ кг/с}, v_0 \approx v(t_0) \approx 0,60 \text{ м/с}.$$

На второй фазе движения

$$m \frac{dv}{dt} = F - F_{\text{тр}}(v) - \alpha v = \Delta F - \alpha v.$$

Как видно, скорость продолжает расти, пока  $v < \frac{\Delta F}{\alpha}$ , а ускорение уже убывает, что соответ-



ствует данным наблюдений. Поскольку у нас есть только одна общая точка зависимостей скорости и ускорения от времени, мы не можем из данных найти коэффициенты линейной связи ускорения и скорости, и нам лучше обратить внимание, что на больших временах скорость бруска должна стремиться к установившемуся значению  $\bar{v} = \frac{\Delta F}{\alpha}$ . Из таблицы видно, что скорость действительно приближается к значению  $\bar{v} \approx 1,5$  м/с. Из полученных уравнений

$$\Delta F = \alpha \bar{v}, \quad \frac{\Delta F}{v_0} - \alpha \approx 0,220 \text{ кг/с}$$

находим

$$\alpha \approx 0,147 \text{ кг/с}, \quad \Delta F \approx 0,220 \text{ Н.}$$

Проведем оценку точности результатов. Для этого отметим, что если в уравнении движения на второй фазе использовать подстановку  $v(t) = \bar{v} + \tilde{v}(t)$ , то оно превратится в уравнение  $\frac{d\tilde{v}}{dt} = -\frac{\alpha}{m}\tilde{v}$ . Это означает, что мы снова получаем уравнение для экспоненциальной функции, так что  $v(t) = \bar{v} + C e^{-\alpha t/m}$ . С учетом условия  $v(t_0) = v_0$  приходим к закону изменения скорости на второй стадии движения в виде

$$v(t) = \bar{v} + (v_0 - \bar{v}) e^{\alpha(t_0-t)/m} \approx \approx 1,5 \text{ м/с} - 0,9 \text{ м/с} \cdot \exp((3 \text{ с} - t)/2,795 \text{ с}).$$

Сравнив значения скорости, соответствующие этой формуле, с экспериментальными данными, увидим, что эти значения отличаются от экспериментальных не более чем на единицу последнего разряда, да и то только в одной точке!

**2.** Важно сразу обратить внимание, что в стационарном режиме с постоянной мощностью тепловыделения в ядре планеты количество теплоты, протекающее при теплообмене в единицу времени через поверхность любой сферы в толще океана, постоянно. В соответствии с законом Фурье, это означает, что для любого радиуса  $r$ , отвечающего слою жидкой воды,

$$P = -\kappa \frac{dT}{dr} \cdot 4\pi r^2, \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{P}{4\pi\kappa r^2} = \frac{d(P/(4\pi\kappa r))}{dr},$$

$$T(r) = C_1 + \frac{P}{4\pi\kappa r}.$$

С учетом условия  $T(R) = T_n$  получаем зависимость температуры от расстояния до центра планеты в жидкой воде:

$$T(r) = T_n + \frac{P}{4\pi\kappa} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right).$$

Затем рассмотрим механическое равновесие слоя жидкой воды толщиной  $dr$ . Разность сил давле-

ния по разные стороны от этого слоя уравнивает силу тяжести:

$$(p(r) - p(r + dr)) \cdot 4\pi r^2 = \rho \cdot 4\pi r^2 dr g(r).$$

Используя теорему Гаусса, по аналогии с электростатикой находим, что ускорение свободного падения на расстоянии  $r$  от центра планеты определяется массой вещества, находящегося внутри поверхности этого радиуса:

$$4\pi r^2 g(r) = 4\pi GM(r).$$

Масса планеты находится из условия  $GM = R^2 g$ , а при погружении в океан  $M(r)$  уменьшается на массу слоя воды выше этого радиуса, так что в жидкой воде

$$GM(r) = GM - G \frac{4\pi}{3} \rho (R^3 - r^3),$$

$$g(r) = \frac{R^2}{r^2} \left( g - \frac{4\pi G \rho R}{3} \right) + \frac{4\pi G \rho}{3} r.$$

Таким образом, зависимость давления воды от радиуса определяется из уравнения

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\rho R^2}{r^2} \left( g - \frac{4\pi G \rho R}{3} \right) - \frac{4\pi G \rho^2}{3} r:$$

$$p(r) = C_2 + \frac{\rho R^2}{r} \left( g - \frac{4\pi G \rho R}{3} \right) - \frac{2\pi G \rho^2}{3} r^2.$$

Давление на поверхности соответствует давлению насыщенного пара  $p_n$  при температуре  $T_n$ :

$$p(r) = p_n + \rho R (2\pi G \rho - g) + \frac{\rho R^2}{r} \left( g - \frac{4\pi G \rho R}{3} \right) - \frac{2\pi G \rho^2}{3} r^2$$

(в принципе  $p_n \approx 0,25$  МПа можно пренебречь – это не скажется на результате).

Зависимости  $T(r)$  и  $p(r)$  определяют связь температуры и давления при каждом значении  $r$ , и по фазовой диаграмме мы можем найти точку пересечения кривой  $p(T)$  с кривой фазового равновесия «вода–лед VII». В логарифмическом масштабе в нужном диапазоне кривая фазового равновесия выглядит почти как прямая и ее можно, например, аппроксимировать выражением

$$p(T) \approx 10^9 \text{ Па} \cdot 10^y, \quad \text{где } y = \frac{0,17(T/1\text{К}) - 42}{63}.$$

Вычисления (с большим запасом по количеству значащих цифр) вблизи точки пересечения приведены в таблице:

$r$ , км	3931	2200	2100	<b>2062,4</b>	2000
$T(r)$ , К	400	439,34	443,60	<b>445,30</b>	448,28
$p(r)$ , ГПа	0,00025	3,082	3,330	<b>3,427</b>	3,595
$p(T)$ , ГПа	2,586	3,303	3,391	<b>3,427</b>	3,491

Конечно, реальная точность снятия данных с приведенной диаграммы намного ниже, так что разумными ответами на поставленные вопросы можно считать следующие: радиус внешней поверхности ледяного слоя  $r_{\text{л}} \approx (2060 \pm 100)$  км, ее температура  $T_{\text{л}} \approx (445 \pm 5)$  К.

Для определения радиуса ядра планеты  $r_2$  можно воспользоваться значением массы планеты и известными значениями плотностей веществ:

$$M = \frac{gR^2}{G} = \frac{4\pi}{3} \left( \rho_2 r_2^3 + \rho_1 (r_{\text{л}}^3 - r_2^3) + \rho (R^3 - r_{\text{л}}^3) \right) = \frac{4\pi R^3}{3} \left( \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho} x^3 + \frac{\rho_1 - \rho}{\rho} \left( \frac{r_{\text{л}}}{R} \right)^3 + 1 \right)$$

и считать  $x = \frac{r_2}{R}$ . Следовательно,

$$x^3 = \frac{\rho}{\rho_2 - \rho_1} \left( \frac{3g}{4\pi G \rho R} - 1 - \frac{\rho_1 - \rho}{\rho} \left( \frac{r_{\text{л}}}{R} \right)^3 \right).$$

Вычисления приводят к результату  $x \approx 0,4065$ , т.е.  $r_2 \approx 1600$  км.

**3.** Сразу отметим, что размеры источника крайне малы и их влияние на ход лучей можно пренебречь. Пусть  $\alpha$  – угол наклона к оси системы луча от источника, падающего на сферическую поверхность в точке  $A$  на расстоянии  $r$  от оси (рис. 9). Угол отклонения преломленного луча от оси обозначим  $\beta$ , а угол между осью системы и радиусом сферической поверхности, проведенным в точку  $A$ , назовем  $\gamma$ . В качестве переменной, описывающей положение точки  $A$ , будем использовать  $y = \sin \gamma = \frac{r}{R}$ . Как видно,  $0 \leq y \leq \frac{D}{2R} = 0,1 \ll 1$ . Закон преломления луча в точке  $A$  дает связь углов  $\beta$  и  $\alpha$ :

$$\sin(\alpha + \gamma) = n \sin(\gamma - \beta),$$

$$\sin \alpha \cdot \sqrt{1 - y^2} + y \cos \alpha = 2y \cos \beta - 2 \sin \beta \cdot \sqrt{1 - y^2}. \quad (1)$$

Искомое расстояние  $x$  связано с углом  $\alpha$  соотношением

$$x = r \operatorname{ctg} \alpha - R(1 - \cos \gamma) = R \left( y \operatorname{ctg} \alpha - 1 + \sqrt{1 - y^2} \right). \quad (2)$$

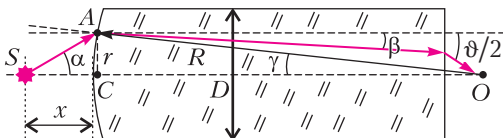


Рис. 9

Отметим, что отражение лучей от боковой цилиндрической поверхности коллиматора не изменяет модуля  $\beta$  и к тому же для получающихся углов здесь происходит полное внутреннее отражение, так что и на яркость лучей эти отражения не влияют. Так как ограничение на угол  $\vartheta = \arcsin(n \sin \beta)$  очень жесткое, то и углы  $\beta$  должны быть крайне малые, и с высокой точностью можно считать, что

$$\frac{\vartheta}{2} = n|\beta|, \quad |\beta| \leq \frac{\vartheta_{\max}}{4} = 0,025^\circ \approx 0,00044.$$

Однако аналитически выразить  $\beta$  не получится. Поэтому тут возможны два пути.

(Окончание следует)

# КВАНТ

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,  
А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин,  
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,  
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**М.Н.Грицук**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован  
в Комитете РФ по печати.  
Рег. св-во ПИ №ФС77-54256**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,  
«Квант»**

**Тел.: +7 916 168-64-74**

**E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru**

**Отпечатано**

**в соответствии с предоставленными  
материалами  
в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,  
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8**

**Тел.: (831) 218-40-40**

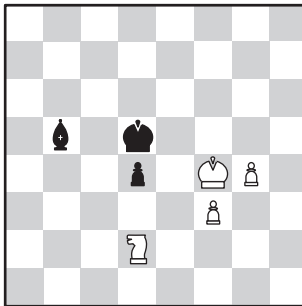
## Кубок ОСТАЕТСЯ В РОССИИ

Российская шахматистка Александра Горячкина завоевала кубок мира по шахматам, сделав шаг вперед по сравнению с прошлым турниром, в финале которого она уступила Александре Костенюк. Второе и третье места вместе с двумя путевками в турнир претендентов завоевали, соответственно, Нургул Салимова и Анна Музычук.

**А. Горячкина – Н. Салимова**  
Баку, 2023, финал, 4 партия

1. d4 ♘f6 2. c4 e6 3. g3 d5 4. ♘g2 ♗e7 5. ♗f3 0-0 6. 0-0 dc 7. ♗c2 b5 8. a4 ♗b7 9. ab a6 10. ♗c3 ab 11. ♗a8 ♗a8 12. ♗b5 c5?! Ответственный ход, надежнее 12...♗d5 без жертвы пешки. 13. dc ♗a6 14. ♗c4 ♗d5 15. ♗c2 ♗e4 16. ♗d1 ♗c5 17. ♗d8 ♗d8 18. ♗c3 ♗c6 19. ♗d1 ♗d1+ 20. ♗d1 ♗a4 21. ♗c3 ♗c2 22. ♗e1 ♗b3 23. ♗d3 ♗b6 24. ♗f1 ♗f8 25. h3 ♗e7 26. ♗e1 ♗d7 27. ♗d2 ♗c4 28. ♗a4 ♗d4 29. ♗b4 ♗b4 30. ♗b4+ ♗d8 31. ♗c3 e5 32. ♗d4 ed 33. b4 ♗c7 34. ♗d2 ♗d6 35. ♗b2 ♗b5 36. ♗e4. Точнее 36. e3 de 37. ♗e3, и черным сложно бороться с централизацией белого короля. 36...♗f6 37. ♗d3 ♗d7 38. h4? Значительно осложняет задачу белых, так как черные следующим ходом разменивают проходную, точнее 38. ♗c4+. 38...♗d5 39. ♗c4 ♗b4 40. ♗f7 h6 41. ♗c4+ ♗e7 42. ♗e5 ♗f5 43. ♗c4 ♗d6 44. ♗f3 ♗c5 45. ♗d3 ♗e6 46. ♗e1 ♗d5 47. ♗g2 g5 48. hg hg 49. ♗e1 ♗f6 50. ♗f3 g4 51. ♗g5 ♗d5 52. ♗f5 ♗d6 53. ♗h7 ♗e4 54. ♗f6 ♗f5 55. ♗h5 ♗e5 56. ♗f4 ♗e4 57. ♗d3+ ♗d6 58. ♗c2 ♗d5 59. ♗b2 ♗c4 60. ♗a3 ♗d5 61. ♗b4 ♗a6 62. ♗b3 ♗c4+ 63. ♗c2 ♗e4 64. ♗d2 ♗b5 65. ♗c5+ ♗d5 66. ♗b3 ♗c4 67. ♗a1 ♗e4 68. ♗c2 ♗a6 69. ♗e1 ♗b5 70. f3+ gf 71. ef+ ♗d5 72. ♗d3 ♗c4 73. ♗f2 ♗e5 74. ♗d3+ ♗d5 75. ♗e1 ♗e5 76. ♗c2 ♗d5 77. ♗e1 ♗f5 78. ♗e2 ♗c4+ 79. ♗f2 ♗e5 80. ♗g2 ♗b5

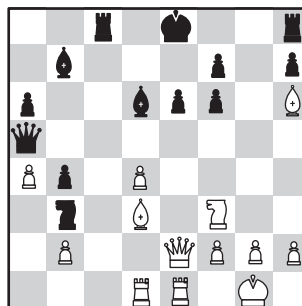
81. ♗f4 ♗c4 82. ♗h3 ♗b5 83. ♗g5 ♗c4 84. ♗e4 ♗d3 85. ♗d2 ♗b5 86. ♗g2 ♗d5 (точнее любой ход слоном, поскольку король удачно расположен на e5, мешая продвижению черных пешек) 87. g4 ♗d3 88. ♗g3 ♗b5 89. ♗f4.



89...♗e2? Решающая ошибка. Необходимо было 89...♗e8 для остановки белых пешек. 90. ♗f5 ♗d3+ 91. ♗f6 ♗c2 92. g5 ♗d3 93. g6 ♗c6 94. g7 ♗h7 95. ♗f7 ♗d5 96. f4 d3!? 97. ♗e7! Белые обходят финальную ловушку: 97. g8♗?? ♗g8+ 98. ♗g8 ♗e6, и черный король успевает съесть пешку на f4. 97...♗d4 98. f5 ♗e3 99. ♗c4+ ♗d4 100. ♗b2 d2 101. f6 ♗c3 102. ♗d1+ ♗c2 103. ♗f2 d1♗ 104. ♗d1 ♗d1 105. f7, черные сдались.

**Н. Салимова – А. Музычук**  
Баку, 2023, полуфинал, 5 партия

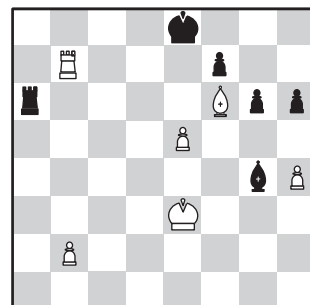
1. d4 d5 2. c4 dc 3. ♗f3 ♗f6 4. e3 e6 5. ♗c4 c5 6. 0-0 a6 7. ♗e1 ♗c6 8. ♗c3 b5 9. ♗d3 ♗b7 10. a4 b4 11. ♗e4 cd? (теоретический ход 11...♗a5, не позволяя белым развить инициативу) 12. ♗f6+ gf 13. ed ♗a5 14. ♗f4 ♗c8?! 15. ♗e2 ♗d6 16. ♗h6 ♗b3 17. ♗ad1 ♗a5.



18. d5! ♗d5 (18...♗d5 19. ♗b5+ с выигрышем ферзя) 19. ♗a6 ♗c5 20. ♗b5+ ♗d8 21. ♗e3 ♗c7 22. ♗d5 ed 23. ♗b6, ввиду мата после 23...♗b6 24. ♗e8+ ♗e8 25. ♗e8x, черные сдались.

**А. Музычук – Тань Чжуньи**  
Баку, 2023, матч за 3 место, 1 партия

1. c4 ♗f6 2. ♗c3 e5 3. g3 c6 4. ♗f3 e4 5. ♗d4 ♗c5 6. ♗b3 ♗e7 7. ♗g2 d5 8. cd cd 9. d3 ed 10. ♗d3 ♗c6 11. 0-0 0-0 12. ♗d5 ♗d5 13. ♗d5 ♗f6 14. ♗e3 ♗d5 15. ♗d5 ♗b4 16. ♗e4 ♗h3 17. ♗fd1 ♗ac8 18. f3 ♗e4 19. fe ♗c2 20. ♗a7 ♗a1 21. ♗a1 ♗a8 22. ♗d4 ♗e6 23. ♗f6 ♗b3 24. ♗d4 ♗a2 25. ♗c1 ♗a8 26. ♗c7 b5 27. ♗c5 ♗c4 28. ♗g5 g6 29. ♗c5 ♗e2 30. ♗f2 ♗c4 31. ♗f6 h6 32. g4 ♗e6?! Ненужная активность в абсолютно ничейной позиции, создающая белым проходную пешку на линии b. 33. ♗b5 ♗g4 34. h4 ♗f8 35. ♗b7 ♗e8 36. ♗e7+ ♗f8 37. ♗b7 ♗e8 38. ♗e3 ♗a6 39. e5.



39...♗e6 (необходимо 39...g5 40. hg hg с идеей либо освободить поле g7 для короля, либо создать собственную проходную) 40. b4 ♗a1 41. b5 g5 42. hg hg (слишком поздно, так как белая пешка успевает раньше) 43. b6! ♗a8 44. ♗d4 ♗h3 45. ♗g5 ♗g2 46. ♗c7 ♗b8 47. ♗c5 ♗b7 48. ♗c6 ♗f8 49. ♗c8+ ♗g7 50. ♗f6+ ♗h7 51. ♗h8+ ♗g6 52. ♗g8+, черные сдались.

*А. Русанов*

# СВЕТ И ЦВЕТ В ПРИРОДЕ

При увеличении расстояния от картины, написанной художником-пуантистом, маленькие разноцветные точки сливаются до неразличимости и в любом месте картины меняется цвет. Почему?

## Уроки с физикой



ISSN 0130-2221 23008



9 770130 22238

(ПОДРОБНЕЕ — НА С. 32 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)