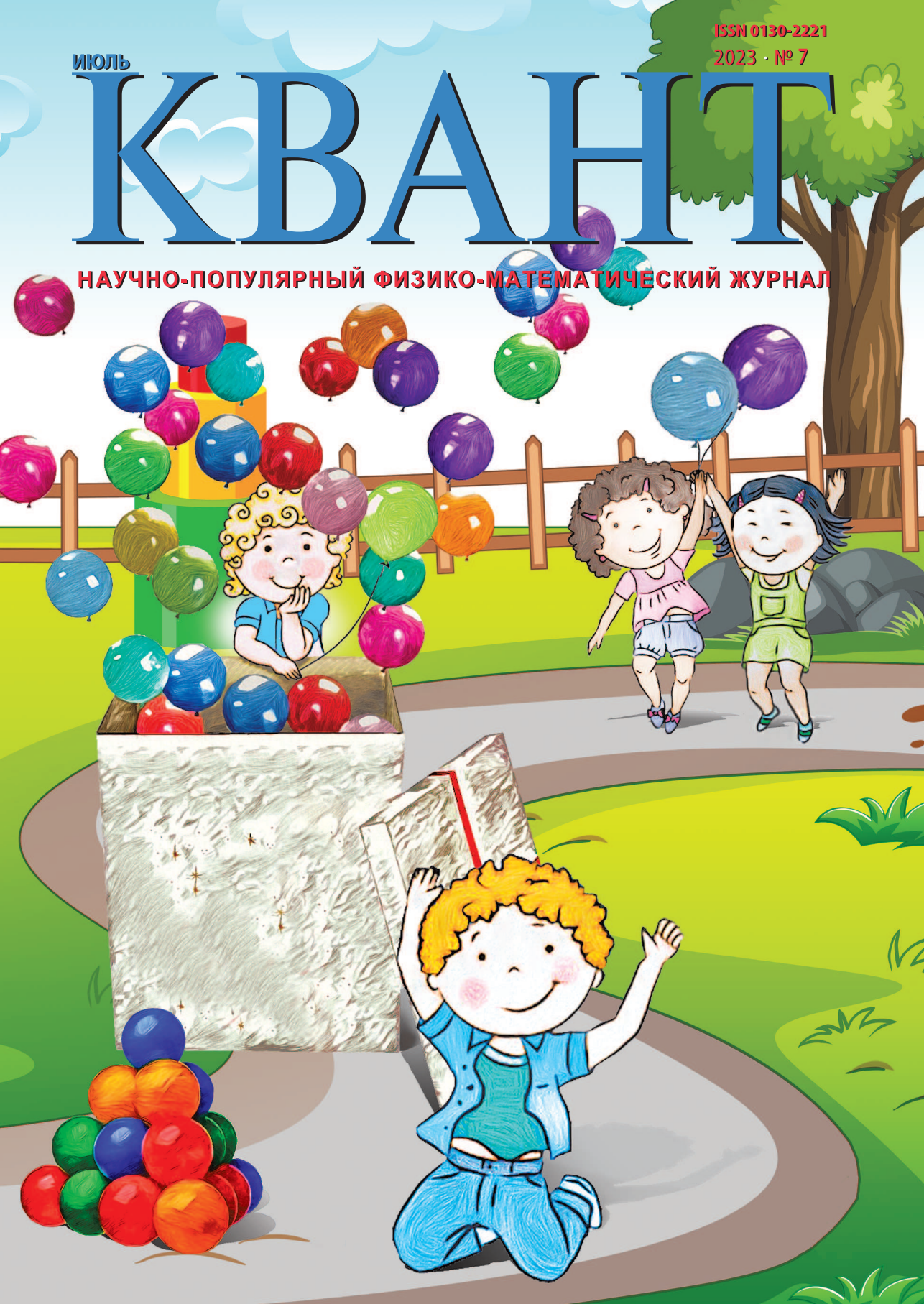


ИЮЛЬ

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



## ЗАДАЧА 1

Даны русские слова:

**болото, проволока, провод, владыка, влажный, обод,  
водяной, обладать, оболочка, поладить**

ЗАДАНИЕ 1. Найдите среди них три пары слов, восходящих к одному и тому же древнему корню.

ЗАДАНИЕ 2. Что мог означать первоначально глагол *витать* (ср. выражение *витать в облаках*)?



## ... ЗАДАЧА 2 ...

Даны местоимения и местоименные наречия венгерского языка с их переводами на русский язык:

***ately* – который**

***hogy* – как?**

***néhány* – несколько**

***valamikor* – когда-нибудь**

***néhol* – кое-где**

***aki* – кто**

ЗАДАНИЕ 1. Переведите на венгерский язык:

***сколько-нибудь, где, как-нибудь, когда?, где-нибудь, иногда.***

ЗАДАНИЕ 2. Переведите на русский язык:

***valamely, hol, ahogy, némely, valaki, hány.***

(Указание: отсутствие вопросительных знаков на некоторых местах, где их хотелось бы видеть, не следует считать опечаткой.)

## В номере:

## УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук  
Математический институт  
им. В.А.Стеклова РАН

Физический институт  
им. П.Н.Лебедева РАН

Московский  
физико-технический институт  
Московский центр непрерывного  
математического образования

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**А.А.Гайфуллин**

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,  
М.Н.Бондаров, А.А.Варламов,  
С.Д.Варламов, А.П.Веселов,  
А.Н.Виленин, Н.П.Долбилин,  
С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,  
А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов,  
П.А.Кожевников, С.П.Коновалов,  
К.П.Кохась, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,  
А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,  
А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский,  
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,  
А.В.Устинов (заместитель главного  
редактора), А.И.Черноуцан  
(заместитель главного редактора)**

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, В.И.Берник,  
А.А.Боровой, В.В.Козлов,  
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,  
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
1970 ГОДА

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**И.К.Кикоин**

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

**А.Н.Колмогоров**

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,  
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,  
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,  
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,  
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,  
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

- 2 Плотные упаковки шаров в пространстве  
(окончание). *Н.Долбилин*  
11 Что происходит при контакте. *Л.Ашкинази*

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МИР

- 19 Письма А.Н.Колмогорова о ФМШ МГУ

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 27 Задачи M2754–M2757, Ф2761–Ф2764  
28 Решения задач M2742–M2745, Ф2749–Ф2752

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 35 Задачи

## ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 36 Любимый город в синей дымке тает...  
*А.Стасенко*

## ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 37 Диаграмма состояния. *В.Белонучкин*

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 41 Волшебные пятерки. *А.Устинов*

## ОЛИМПИАДЫ

- 42 Заключительный этап Всероссийской  
олимпиады школьников по физике  
имени Дж.Максвелла 2023 года

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 45 Национальный исследовательский  
университет «МИЭТ»  
48 Ответы, указания, решения  
Вниманию наших читателей (18)

## НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье Н.Долбилина*  
II *Лингвистические задачи*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогулки с физикой*

# Плотные упаковки шаров в пространстве

Н.ДОЛБИЛИН

## Метод наката слоев

В предыдущем разделе мы показали, что любую трехмерную решетку с минимумом 1 можно, непрерывно уплотняя ее, привести к решетке с приведенным базисом из трех единичных векторов. Будем предполагать, что у решетки  $\Lambda$  в приведенном базисе векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  единичны:  $a = b = c = 1$ . Обозначим, как и раньше, через  $\mathcal{L}$  двумерную слоевую упаковку, порожденную векторами  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ .

Слоевая упаковка  $\mathcal{L}$  может быть трех типов:

- гексагональная,  $|\vec{a} - \vec{b}| = 1$  (рис. 19);
- равнобедренная,  $1 < |\vec{a} - \vec{b}| < \sqrt{2}$  (рис. 20);
- квадратная,  $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{2}$  (рис. 21).

В первом случае ячейки Делоне – правильные треугольники, во втором – равнобедренные.

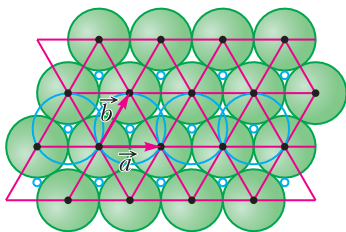


Рис. 19

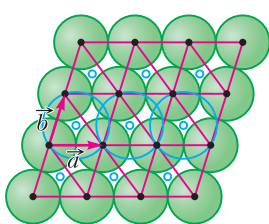


Рис. 20

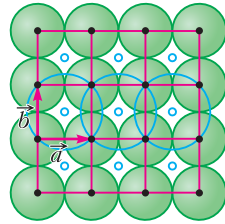


Рис. 21

ренные треугольники, в третьем – квадраты.

Упаковку  $\Lambda$  будем уплотнять, сохраняя слой  $\mathcal{L}$  неизменным, за счет уменьшения расстояния  $h$  между соседними параллельными слоями. Чтобы построить максимально плотную трехмерную решетчатую упаковку с данным «горизонтальным» слоем  $\mathcal{L}$ , нужно «закатить» шары соседнего «сверху» (точно такого же) слоя в «лунки» слоя  $\mathcal{L}$ .

Когда шар из верхнего слоя скатывается в лунку, то он опирается сразу на несколько шаров (не меньше трех) из нижнего слоя  $\mathcal{L}$ . Центры всех этих опорных шаров лежат на одной окружности. Эта окружность на плоскости  $L$  вырезает круг, внутри и на границе которого других точек из решетки  $\mathcal{L}$  нет.

Вспомнив про такое разбиение плоскости на плитки Делоне, легко понять, что центры опорных шаров, образующих лунку, есть вершины такой плитки разбиения, построенного по решетке  $\mathcal{L}$  (более подробно см. статью «Многогранный Делоне» в «Кванте» № 1,2 за 2010 г.).

Понятно, что центр шара  $D$ , лежащего в лунке, равноудален от центров опорных шаров и, следовательно, проецируется на плоскость  $L$  слоя  $\mathcal{L}$  точно в центр  $K$  окружности, описанной около плитки Делоне (рис. 22). Обратим внимание, что при этом центр  $K$  описанной окружности лежит внутри плитки.

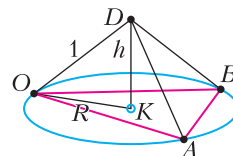


Рис. 22



Верно и обратное: для данного слоя  $\mathcal{L}$  и каждой плитки Делоне шары с центрами в ее вершинах формируют лунку в слоевой упаковке. Действительно, для любой двумерной решетки каждая плитка Делоне – это либо остроугольный треугольник, либо прямоугольник. Поэтому центр  $K$  описанной окружности всегда содержится внутри плитки Делоне. Более того, так как в случае  $a = b = 1$  две стороны остроугольного треугольника длины 1, а прямоугольник – это единичный квадрат, то для обеих таких плиток радиус описанной окружности меньше 1. Поэтому на перпендикуляре, восставленном к плоскости слоя в центре  $K$ , на некоторой высоте  $h > 0$  найдется точка  $D$ , равноудаленная от всех вершин плитки Делоне на расстояние 1. Шар  $D$  радиуса  $\frac{1}{2}$  опирается на шары слоя с центрами в этих вершинах (см. рис. 22).

Так как все слои равны и параллельны друг другу, то, как только зафиксировано положение какого-то одного шара из верхнего слоя, расположение всех остальных шаров этого слоя определяется однозначно. Более того, задание сдвига  $\vec{k}$  двумерного слоя  $\mathcal{L}$  определяет всю трехмерную решетчатую упаковку  $\Lambda_1$  в целом однозначно:  $\Lambda_1 = \mathcal{L} + m\vec{k}$ .

Как мы уже видели, в случаях, когда слой  $\mathcal{L}$  гексагональный или квадратный, в результате закатывания шаров следующего слоя в лунки предыдущего получаем ГЦК-упаковку. Таким образом, ГЦК-упаковка является плотнейшей среди решетчатых упаковок, содержащих гексагональный слой.

Если же  $\mathcal{L}$  – равнобедренный слой, то в результате наката таких слоев мы получаем решетчатую упаковку  $\Lambda_1$ , которая самая плотная среди всех решетчатых упаковок, содержащих данный равнобедренный слой  $\mathcal{L}$ .

При этом остается неясным, почему упаковка  $\Lambda_1$  менее плотная, чем ГЦК-упаковка. С одной стороны, двумерный слой  $\mathcal{L}$  в  $\Lambda_1$  более рыхлый, чем гексагональный слой в ГЦК-упаковке. С другой, эти рыхлые слои в  $\Lambda_1$  расположены друг к другу ближе, чем гексагональные слои в ГЦК-упа-

ковке. В принципе можно показать, что объем основного параллелепипеда решетки  $\Lambda_1$  больше объема ромбоэдра с единичными ребрами – основного параллелепипеда ГЦК-решетки. Однако мы можем избежать рутинных вычислений.

Обратим внимание: в упаковке  $\Lambda_1$  шар  $D$ , лежащий в лунке  $OAB$ , касается шаров  $O$  и  $A$ , которые также касаются друг друга, так как  $|OA| = 1$  (см. рис. 22). Поэтому решетка  $\Lambda_1$  содержит вершины правильного треугольника  $OAD$ , а вместе с ними и гексагональную подрешетку  $\mathcal{L}_1$ , лежащую в плоскости  $OAD$ .

Но, как только что было показано, упаковка  $\Lambda_1$  с двумерным гексагональным слоем может быть уплотнена методом наката слоев до ГЦК-упаковки.

Подведем итог: любая трехмерная упаковка может быть при помощи непрерывной деформации, повышающей плотность упаковки, переведена в ГЦК-упаковку. Иначе говоря, установлено, что ГЦК-упаковка плотнее любой другой трехмерной решетчатой упаковки  $\Lambda$ . Теорема Гаусса доказана.

**Есть ли еще столь же плотные упаковки?**

Оказывается, есть и другие, не решетчатые, но столь же плотные укладки шаров. Все они имеют общее свойство: они состоят из одинаковых гексагональных слоев. У гексагонального слоя есть два вида лунок:  $\nabla$  и  $\Delta$  (рис. 23). Когда мы укладываем каждый следующий гексагональный слой на предыдущий, у нас есть две возможности: положить слой в лунки вида  $\nabla$  или вида  $\Delta$ .

Если мы будем укладывать каждый следующий слой в лунку одного и того же типа (либо  $\nabla$ , либо  $\Delta$ ), то мы получим ГЦК-упаковку (рис. 24). Заметим, что каждый раз слой сдвигается на некоторый

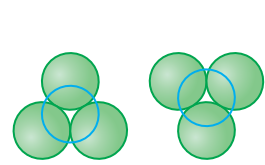


Рис. 23

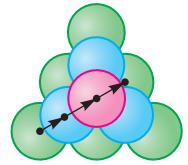


Рис. 24

вектор  $\vec{c}$ . Легко видеть, что вектор  $3\vec{c}$  перемещает каждый шар первого слоя в шар четвертого слоя, который находится прямо над некоторым шаром из первого.

Пусть теперь типы лунок чередуются:  $\dots \nabla \Delta \nabla \Delta \nabla \Delta \dots$ . На рисунке 25 первый слой

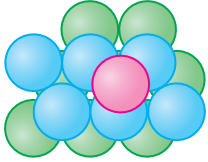


Рис. 25

состоит из зеленых шаров, на него в  $\nabla$ -лунки уложен слой из голубых шаров, на который, в свою очередь, уложены красные шары в  $\Delta$ -лунки. Получается так

называемая *гексагональная плотнейшая упаковка* (ГП-упаковка). Как нетрудно проверить самостоятельно, ГП-упаковка обладает следующими свойствами.

1. В ГП-упаковке шары нечетных и отдельно шары четных слоев находятся строго вертикально друг над другом.

2. ГП-упаковка – не решетчатая, а *бирешетчатая* упаковка: она состоит из двух равных и параллельно расположенных решеток.

3. ГП-упаковка является *регулярной* упаковкой. Так называют упаковки, все шары которых окружены всеми остальными шарами упаковки до бесконечности одинаково.

Понятно, что чередовать сдвиги  $\nabla$  и  $\Delta$  можно как угодно и поэтому различных упаковок, столь же плотных, как ГЦК- и ГП-упаковки, бесконечно много. Их можно кодировать бесконечными в обе стороны последовательностями, составленными из символов  $\nabla$  и  $\Delta$ . Например,

$\dots \Delta \Delta \nabla \Delta \nabla \nabla \Delta \Delta \dots$

### Выход в 4-мерное пространство: гиперкубическая упаковка и решетка $D_4$

Этот раздел необычен: в нем речь пойдет о 4-мерной решетке и 4-мерном кубе, который часто называют также гиперкубом. Предлагаем читателям представлять точку в 4-мерном пространстве четверкой чисел  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  – по аналогии с трехмерным пространством. Из школьной программы известно, что в пространстве расстояние между точками  $A(x_1, x_2, x_3)$  и  $B(x'_1, x'_2, x'_3)$ ,

заданными в прямоугольной системе координат, выражается с помощью теоремы Пифагора:

$$|AB|^2 = (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2.$$

Аналогично, в четырехмерном пространстве вводится прямоугольная система координат, и расстояние между точками  $A(x_1, x_2, x_3, x_4)$  и  $B(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$  выражается с помощью теоремы Пифагора:

$$|AB|^2 = (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2 + (x_4 - x'_4)^2.$$

Разумеется, построить в трехмерном пространстве четырехмерную прямоугольную систему координат, добавляя к трем взаимно ортогональным осям четвертую ось, перпендикулярную первым трем, мы не можем. Но это не должно нас смущать: ведь с подобным мы сталкиваемся каждый раз, когда изображаем на листке бумаги три взаимно перпендикулярные оси координат или ребра трехмерного куба (рис. 26,а).

Вообразить себе некоторые особенности 4-мерных объектов при отсутствии соответствующего опыта становится легче, когда ставишь себя на место двумерного существа, которое никогда не покидало плоскость и пытается постичь геометрию нашего трехмерного мира.

*Четырехмерный единичный куб*, или *гиперкуб*, можно определить как совокупность всех точек  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  пространства, координаты которых относительно ортогонального базиса  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$  (рис. 26,б) удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3, 4.$$

Точки, у которых все координаты равны либо 0, либо 1, т.е.  $(0, 0, 0, 0), \dots, (0, 1, 0, 0), \dots$

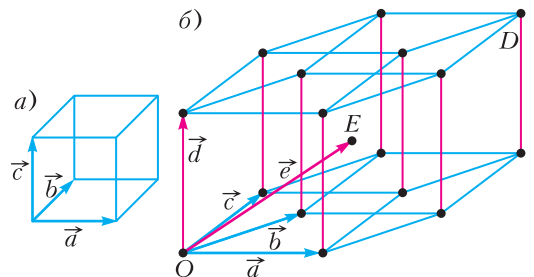


Рис. 26

..., (0, 1, 1, 0), ..., (1, 1, 0, 1), ..., (1, 1, 1, 1), – это его *вершины*. Таким образом, у гиперкуба 16 вершин.

Для лучшего знакомства с гиперкубом неплохо было бы понимать, например, как по координатам определить наборы вершин, образующие его ребра, двумерные грани (квадраты), трехмерные грани (обычные кубы). Какие пары вершин противоположны друг другу? Сколько граней каждой размерности имеется в кубе? Или сколько граней той или иной размерности сходится в вершине куба? Оставим эти вопросы читателям в качестве упражнений.

Как и в трехмерном случае, *4-мерная кубическая решетка*  $K_4$  – это множество точек с целочисленными координатами  $(n_1, n_2, n_3, n_4)$  относительно базиса  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ . Похожим образом определяется *4-мерный шар* радиуса  $r$  с центром в точке  $X_0$  – это множество всех точек в 4-мерном пространстве, отстоящих от  $X_0$  не далее чем на  $r$ . Так как расстояние между точками кубической решетки  $K_4$  не меньше 1, то шары радиуса  $\frac{1}{2}$  с центрами в точках этой решетки не перекрываются друг с другом и образуют упаковку.

Какова плотность 4-мерной кубической упаковки шарами? Объем единичного гиперкуба равен 1. Известно также, что объем четырехмерного шара радиуса  $r$  вычисляется по формуле  $V(r) = \frac{\pi^2}{2} r^4$ . В нашем случае  $r = \frac{1}{2}$ , поэтому плотность равна

$$\delta_{K_4} = \frac{\pi^2}{32} \approx 0,308.$$

Однако, в отличие от трехмерной кубической упаковки, гиперкубическая упаковка не является насыщенной: в ней имеются достаточно большие пустоты, в которые можно поместить шары такого же радиуса.

Действительно, возьмем «пространственную» диагональ  $OD$  гиперкуба, соединяющую пару противоположных вершин  $O(0, 0, 0, 0)$  и  $D(1, 1, 1, 1)$ . Ее длина равна  $|OD| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 2$ . Поэтому сере-

дина  $E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  диагонали, она же центр единичного гиперкуба, отстоит от всех его вершин на расстояние 1. Следовательно, шар радиуса  $\frac{1}{2}$  с центром в  $E$  не перекрывается ни с каким шаром из кубической упаковки  $K_4$ . Помещая такой шар в центр каждого куба решетки  $K_4$ , получаем новую упаковку шаров, состоящую из «старой» гиперкубической упаковки  $K_4$  и ее параллельной копии, сдвинутой на вектор

$$\vec{e} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right);$$

$$K_4 \cup (K_4 + \vec{e}).$$

Объединение двух одинаковых и параллельных друг другу решеток называют *бирешеткой*. Бирешетка, вообще говоря, уже не является решеткой (рис. 27, а). Однако, если сдвиг какой-то особенный, например точка решетки сдвигается в «по-

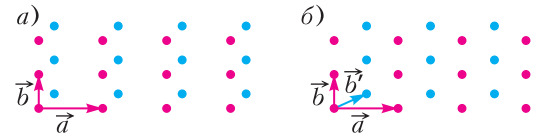


Рис. 27

луцелую» точку, т.е. в точку с координатами  $\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}, \frac{n_3}{2}, \frac{n_4}{2}\right)$ , то в этом случае, как нетрудно видеть, бирешетка есть также решетка, естественно, вдвое более плотная (рис. 27, б).

Бирешетка  $K_4 \cup (K_4 + \vec{e})$  есть знаменитая решетка, которая является *центрированной гиперкубической решеткой* и обозначается  $D_4$ . В качестве базиса решетки  $D_4$  можно взять векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{e}$  (см.рис. 26, б). Легко проверить, что конец вектора

$$n_1\vec{a} + n_2\vec{b} + n_3\vec{c} + n_4\vec{e}$$

принадлежит решетке  $K_4$ , если коэффициент  $n_4$  четный, и сдвинутой решетке  $K_4 + \vec{e}$ , если этот коэффициент нечетный. Плотность  $\delta_{D_4}$  упаковки  $D_4$  вдвое выше, чем плотность кубической:

$$\delta_{D_4} = 2\delta_{K_4} \approx 0,616.$$

Еще один небольшой сюрприз в 4-мерном пространстве: четверка последовательных минимумов в 4-мерной решетке не всегда является приведенным базисом. Действительно, при построении приведенного базиса для решетки  $D_4$  в качестве четвертого вектора, кратчайшего не лежащего в пространстве, натянутом на  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , можно выбрать вектор  $\vec{d}$  (четвертое ребро гиперкуба). Но четверка  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  не является базисом в  $D_4$ . Здесь в качестве четвертого вектора следует брать «вклинившийся» в центр гиперкуба вектор  $\vec{d}'$ .

Шары в  $D_4$  расположены тесно: каждый шар в ней касается 24 шаров. Около двадцати лет назад в замечательной работе О.Р.Мусина было доказано, что 24 – это максимальное число одинаковых 4-мерных шаров, которые могут касаться центрального шара того же радиуса («контактное число»). А полтора века назад А.Н.Коркин и Е.И.Золотарев доказали, что упаковка  $D_4$  – плотнейшая упаковка среди 4-мерных решетчатых упаковок. В следующих двух разделах мы «почти» докажем это утверждение.

### Метод наката в четырехмерном пространстве

В самой работе Коркина–Золотарева речь шла не об упаковках шаров. В ней решалась известная задача теории чисел: найти положительную квадратичную форму от 4 переменных с данным детерминантом, у которой минимальное значение при целых значениях переменных, не равных одновременно нулю, было бы максимальным. Двадцать лет спустя Герман Минковский, создатель нового направления в математике – геометрии чисел, переформулировал эту задачу на геометрическом языке как задачу о плотнейшей решетчатой упаковке шаров.

Сейчас мы воспользуемся методом наката слоев, чтобы получить плотнейшую 4-мерную упаковку  $D_4$ , применяя этот метод к 4-мерной упаковке  $\Lambda$  с тем или иным трехмерным слоем  $\mathcal{L}$ .

Чтобы определить лунки в слоевой упаковке  $\mathcal{L}$ , повторяем, нужно построить разбиение Делоне для 3-мерной решетки  $\mathcal{L}$ .

Ячейки этого разбиения, как известно, – выпуклые вписанные многогранники в трехмерном пространстве. При этом все вершины ячеек – это точки решетки  $\mathcal{L}$  и других точек из  $\mathcal{L}$  ни на самой описанной сфере, ни внутри нее нет. Среди этих ячеек нужно выбрать ячейку с максимальным радиусом описанной сферы. Она-то и определяет самую глубокую лунку, в которую «закатывается» гипершар из соседнего трехмерного слоя.

Сначала применим метод наката к 4-мерной решетке  $\Lambda$ , содержащей 3-мерный кубический слой  $\mathcal{L} = K_3$ . Это простое упражнение полезно как первый опыт обращения с 4-мерным пространством.

Для кубической решетки  $K_3$  ячейки Делоне очень просты и одинаковы. Это – единичные кубы с вершинами в  $K_3$  и радиусом описанной сферы  $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Восставим в центре  $K$  этой сферы перпендикуляр к трехмерному пространству нашего слоя (рис. 28). Этот перпендикуляр есть

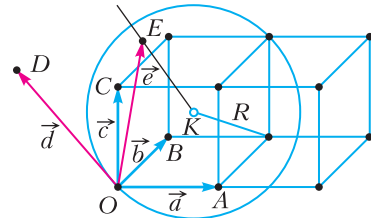


Рис. 28

геометрическое место точек в 4-мерном пространстве, равноудаленных от всех точек данной сферы, в том числе и вершин описанного куба. Выберем на перпендикуляре точку  $E$  такую, что  $|AE| = 1$ . Отметим, что перпендикуляр  $KE$  пересекается с 3-мерным пространством слоя лишь в одной точке – центре сферы. Такой выбор точки  $E$  обеспечивает, что гипершар  $E$  (радиуса  $\frac{1}{2}$ ) касается всех 8 таких же гипершаров, центры которых сидят в вершинах 3-мерной ячейки Делоне – единичного куба, т.е. гипершар  $E$  сидит в «кубической» лунке.

С другой стороны, по теореме Пифагора,  $|KE| = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$ . Следовательно, точ-



ка  $E$  относительно ортогонального базиса

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$  имеет координаты  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ , т.е. является центром единичного гиперкуба.

Таким образом, методом наката трехмерных кубических слоев получаем решетчатую упаковку  $D_4$  гипершаров, порожденную базисом  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{e}$ .

**Упаковка  $D_4$  с другого ракурса**

Вспомним, что 3-мерную плотнейшую ГЦК-упаковку мы строили методом наката как на квадратную слоевую упаковку, так и на гексагональную. Теперь и 4-мерную упаковку  $D_4$  мы получим методом наката не только на 3-мерный кубический слой, но и на 3-мерную ГЦК-упаковку.

Рассмотрим 4-мерную решетку  $\Lambda$  с ГЦК-решеткой в качестве слоя. Пусть базис  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  ГЦК-решетки построен на ребрах длины 1 правильного тетраэдра (рис. 29),

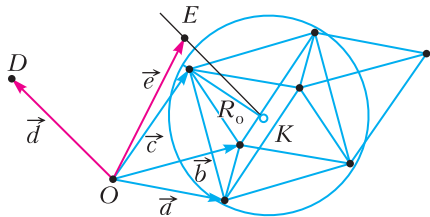


Рис. 29

а  $\vec{d}$ , где  $d \geq 1$ , – четвертый вектор базиса решетки  $\Lambda$ . Основной параллелепипед ГЦК-решетки, ромбоэдр, как говорилось ранее, разбивается на 2 правильных тетраэдра и октаэдр. Легко проверяется, что описанные около них сферы других точек из решетки  $\Lambda$ , кроме вершин многогранников, не содержат. Таким образом, эти многогранники и есть ячейки Делоне для ГЦК-решетки. Так как  $a = b = c = 1$ , радиусы описанных сфер  $R_T = \frac{\sqrt{6}}{4} \approx 0,612$  и  $R_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$  соответственно. Из того, что  $R_0 > R_T$ , следует, что октаэдрическая лунка будет глубже тетраэдрической. Перемещаем гипершар  $D$  в октаэдрическую лунку. Это значит, что его центр  $E$  удален

от всех вершин октаэдра на расстояние 1. Отсюда находим

$$|EK| = \sqrt{1 - R_0^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707.$$

Возьмем единичный вектор  $\vec{e} = \overline{OE}$  в качестве четвертого вектора базиса 4-мерной решетки  $\Lambda$  (см.рис. 29). Подсчитаем 4-мерный объем  $V$  гиперпараллелепипеда решетки  $\Lambda$ . Он равен произведению 3-мерного объема  $v = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ромбоэдра на высоту

гиперпараллелепипеда  $h = |EK| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ :

$$V = vh = \frac{1}{2}.$$

Объем гиперпараллелепипеда решетки, построенной на 3-мерном ГЦК-слое, оказался равным объему гиперпараллелепипеда  $D_4$ . И это не случайно: только что построенная упаковка  $\Lambda$  является упаковкой  $D_4$ .

Действительно, вернемся к решетке  $D_4$  (см. рис. 28), заданной относительно ортогонального базиса  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ . Легко проверить, что следующие четыре точки принадлежат  $D_4$  и отстоят друг от друга на расстояние 1:

$$O(0,0,0,0), A(1,0,0,0),$$

$$E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), E'\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Таким образом, в решетке  $D_4$  содержатся 4 точки, которые составляют вершины правильного тетраэдра с ребром 1. Отсюда следует, что в  $D_4$  содержится 3-мерная ГЦК-подрешетка. Значит, упаковка  $D_4$ , как и новая упаковка  $\Lambda$ , состоит из трехмерных ГЦК-слоев. А так как плотность упаковки  $D_4$  такая же, как и у новой упаковки, то и в  $D_4$  расстояние между ГЦК-слоями такое же, как у  $\Lambda$ . Но в упаковке  $\Lambda$  это расстояние является минимальным и соответствует размещению следующего ГЦК-слоя в октаэдрической лунке. Положение октаэдра, как ячейки Делоне для ГЦК-решетки, фиксировано в ромбоэдре однозначно. Отсюда следует, что 4-мерная решетка  $\Lambda$  и решетка  $D_4$  конгруэнтны.

Итак, исходя из плотнейшей 3-мерной ГЦК-упаковки, методом наката мы построили самую плотную 4-мерную упаковку среди всех, содержащих такой слой. Ею оказалась упаковка  $D_4$ . Однако отсюда рано делать вывод, что  $D_4$  – упаковка, плотнейшая среди всех решетчатых. К сожалению, для доказательства этого у нас не хватает еще одного аргумента: почему плотнейшая решетчатая упаковка обязана содержать 3-мерную ГЦК-решетку.

Интересно отметить, что Коркин и Золотарев, доказав оптимальность  $D_4$ , опровергли существовавшую на тот момент гипотезу Эрмита о том, что плотнейшая решетчатая упаковка в пространстве любой размерности всегда построена на правильном симплексе. Эта гипотеза оказалась верной только для плоскости и 3-мерного пространства. Дело в том что для получения более плотной упаковки  $D_4$  мы воспользовались не тетраэдрической лункой (в этом случае мы, действительно, получили бы решетку, построенную на правильном 4-мерном симплексе), а более глубокой, октаэдрической.

### Восьмимерная упаковка Коркина–Золотарева – «алтын под фонарем»

В этом разделе мы познакомимся со знаменитой решеткой  $E_8$ , построенной Коркиным и Золотаревым. Именно работа М.Вязовской об этой решетке и явилась толчком к написанию данной статьи.

Давайте сначала возьмем 8-мерную кубическую упаковку  $K_8$  как множество всевозможных восьмерок целых чисел  $(n_1, n_2, \dots, n_8)$ . Мы можем представлять ее как обычную трехмерную кубическую решетку, но помнить, что объем 8-мерного куба с ребром 1 равен 1, а длина его пространственной диагонали равна  $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ . Из формулы объема 8-мерного шара радиуса  $r$

$$V_8(r) = \frac{\pi^4}{4!} r^8$$

получаем, что объем 8-мерного шара радиуса  $\frac{1}{2}$  равен

$$V_8\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^4}{4! \cdot 2^8} \approx 0,0159.$$

Так как шары радиуса  $\frac{1}{2}$  с центрами в точках кубической решетки образуют упаковку, плотность 8-мерной кубической упаковки равна

$$\delta_{K_8} \approx 0,0159.$$

Шары 8-мерной кубической упаковки занимают около 1,6% объема пространства. В то же время длина диагонали  $2\sqrt{2}$  позволяет разместить на ней еще один шар (но не два), который не перекрывается с шарами, сидящими в вершинах. Поэтому, помещая в центр 8-мерного куба единичный шар, мы получаем центрированную кубическую упаковку, которая вдвое плотнее кубической, ее плотность равна 0,0318.

А вот решетка  $E_8$ , предложенная Коркиным и Золотаревым полтора века назад, дает упаковку в 16 раз более плотную, чем кубическая. На первом этапе построения решетки  $E_8$  выберем в кубической решетке  $K_8$  подрешетку, вдвое более редкую, чем  $K_8$ . Эта подрешетка, которую обозначают через  $D_8$ , состоит из точек  $(n_1, n_2, \dots, n_8) \in K_8$  с четной суммой координат:

$$\sum_{i=1}^8 n_i \equiv 0 \pmod{2}.$$

Первое представление о том, как устроена решетка  $D_8$ , можно получить на примере квадратной и кубической решеток (рис. 30 и 31). Решетки  $D_2$  и  $D_3$  также получаются из квадратной и кубической решеток выделением точек  $n_1 + n_2 \equiv 0 \pmod{2}$  и

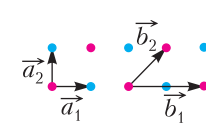
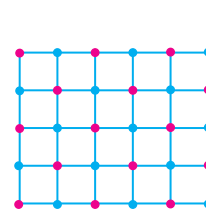


Рис. 30

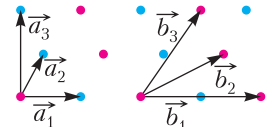
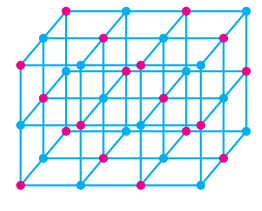


Рис. 31

$n_1 + n_2 + n_3 \equiv 0 \pmod{2}$ , соответственно. Решетка  $D_2$  (красные точки на рисунке 30) – это квадратная решетка, но она вдвое реже и повернута на  $45^\circ$ . Решетка  $D_3$  (красные точки на рисунке 31) – это знакомая нам ГЦК-решетка.

Кстати, и оптимальная 4-мерная решетка  $D_4$  обозначена так неспроста. Она тоже формируется из 4-мерной кубической решетки  $K_4$  по тому же принципу «шахматной доски». И если читатель может самостоятельно увидеть в 4-мерной центрированной кубической решетке прореженную по  $\text{mod } 2$  кубическую решетку, то это говорит о его незаурядной «четырёхмерной интуиции».

Если  $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_8)$  – это базис кубической решетки  $K_8$ , построенный на ребрах единичного куба (основного параллелепипеда для  $K_8$ ), то совокупность векторов

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1 + \vec{a}_1, \vec{b}_2 = \vec{a}_2 + \vec{a}_1, \dots, \vec{b}_8 = \vec{a}_8 + \vec{a}_1$$

является базисом решетки  $D_8$ . На рисунках 30 и 31 внизу показано, как строится этот базис в случаях плоскости и пространства.

Кубическая решетка  $K_8$  есть объединение двух параллельных решеток:

$$K_8 = D_8 \cup (D_8 + \vec{a}_1).$$

Подрешетка  $D_8$  четных точек вдвое реже, чем решетка  $K_8$ , и, что очень важно, при этом минимальное расстояние между четными точками значительно больше, чем в кубической решетке: оно равно  $\sqrt{2}$  вместо 1. Из рисунков 30 и 31 видно, что это верно для любой размерности 2, 3 и т.д. А это означает, что упаковочный шар для решетки  $D_8$  имеет радиус  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  и объем такого шара в  $(\sqrt{2})^8 = 16$  раз превосходит объем шара в кубической упаковке. Так как решетка  $D_8$  вдвое реже кубической, плотность упаковки  $D_8$  шаров в  $\frac{(\sqrt{2})^8}{2} = 8$  раз больше плотности кубической упаковки  $K_8$ .

Рассмотрим теперь решетку  $D_8$  вместе с другой параллельной копией, сдвинутой

не в смежную по ребру вершину  $A$  куба, а в центр  $E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  8-мерного куба решетки  $K_8$ . Рисунок 32 иллюстрирует

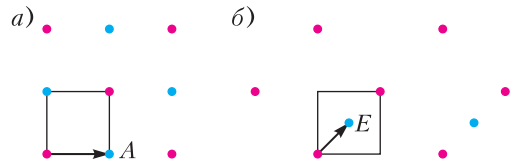


Рис. 32

эт эти сдвиги в плоском случае. Поскольку противоположные вершины в 8-мерном кубе  $(0, 0, \dots, 0)$  и  $(1, 1, \dots, 1)$  обе четные, точка  $E$  является серединой отрезка с концами в  $D_8$ . Поэтому бирешетка

$$D_8 \cup \left( D_8 + \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right) \right)$$

также является решеткой, которая и есть решетка Коркина–Золотарева  $E_8$ . Так как половина диагонали равна  $\sqrt{2}$ , то упаковочный радиус для  $E_8$ , как и для  $D_8$ , равен  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Отсюда следует

$$\delta_{E_8} = 2\delta_{D_8} = (\sqrt{2})^8 \delta_{K_8} = 16 \frac{\pi^4}{4!2^8} \approx 0,2537.$$

В 1935 году американский математик Г.Блихфельд доказал, что более плотной, чем  $E_8$ , решетчатой упаковки в 8-мерном пространстве нет. А то, что решетка  $E_8$  – единственная плотнейшая решетчатая упаковка, доказал в конце 1970-х выпускник мехмата МГУ и аспирант Математического института имени В.А.Стеклова Коля Ветчинкин. К несчастью, вскоре он погиб в горах Кавказа, и очень сложная работа была доведена до публикации в 1980 году его научным руководителем С.С.Рышковым. И наконец – прорывная работа М.Вязовской 2017 года!

Заметим, что решетка Коркина–Золотарева  $E_8$  оказалась тесно связанной не только с геометрией и теорией чисел, но и с глубокими вопросами алгебры и топологии.

### Всегда ли «алтын под фонарем»?

За два века исследований были найдены плотнейшие решетчатые упаковки (т.е.

«под фонарем») для пространств размерности  $d \leq 8$ . Была найдена восхитительная решетка Лича в 24-мерном пространстве. На протяжении последней четверти века было установлено, что в пространствах размерностей  $d = 3, 8$  и 24 плотнейшие решетчатые упаковки являются абсолютно плотнейшими упаковками, т.е. тем алтыном, который искал господин из любимого анекдота Б.Н.Делоне.

Весьма вероятно, что и упаковка  $D_4$  также является оптимальной упаковкой в 4-мерном пространстве. Более того, представляется, что у упаковки  $D_4$  оснований претендовать на это почетное место не меньше, чем это было у ее «младшей сестры» – ГЦК-упаковки  $D_3$ : уж очень удачна центрировка гиперкуба. Тем не менее, как это ни покажется странным, современные методы, которыми была решена задача для  $d = 8$  и 24, в размерности  $d = 4$  пока не работают.

Что касается плотнейших решетчатых упаковок, то в пространствах размерности начиная с 9 метод наката слоев не только становится невероятно сложным, но и вообще перестает работать. Причина в том, что даже в плотных решетчатых упаковках шаров появляются лунки настолько большие и, следовательно, глубокие, что шары из соседнего слоя сверху проваливаются в эти лунки и сталкиваются с шарами из соседнего слоя снизу. Более того, шар соседнего слоя, помещенный в нее, может оказаться вровень с первым слоем, т.е. плотная решетка оказывается ненасыщенной упаковкой. В то же время добавление новых шаров в решетчатую упаковку делает ее не решетчатой, но мультирешетчатой.

Эти обстоятельства указывают на то, что при  $d \geq 9$  «алтын» скорее всего находится «не под фонарем». В пользу этого предположения говорит и то, что в 10-мерном пространстве, как уже установлено, существуют мультирешетчатые упаковки, которые плотнее известной на сегодня плотнейшей решетчатой упаковки. Однако является ли «известная плотнейшая» 10-мерная упаковка действительно плотнейшей решетчатой – на этот вопрос ответа пока нет.

Так что не только найти 9-мерный алтын, но даже установить, что его нет под фонарем, – очень трудная проблема. Более того, неизвестно, является ли плотнейшая упаковка шаров в многомерном пространстве мультирешетчатой или нет.

Многомерные упаковки таят многое, что противоречит нашей геометрической интуиции. К примеру, в многомерных пространствах даже самые плотные упаковки шаров занимают ничтожную долю пространства. Так, знаменитая 24-мерная решетка Лича представляет в 24-мерном пространстве абсолютно плотнейшую упаковку шаров, доля которой всего около 0,19% пространства! Трудно, но и интересно представить плотную упаковку, в которую нельзя вставить ни одного шара, при том что более 99,8% объема пространства остается не покрытой шарами.

Конечно, вопросы о плотнейших упаковках шаров в многомерных пространствах интересны математикам. А чем они интересны другим представителям трехмерного мира? Ответ: в наше время информационных технологий – очень многим! Напомним, что в конце XIX века Минковский свел к задаче о плотнейшей упаковке шаров задачу из теории чисел. А в XX веке, благодаря другому выдающемуся ученому, основоположнику современной теории информации Клоду Шэннону, очень важная проблема выбора системы кодов, исправляющих ошибки, которые возникают при передаче информации по каналу связи, была сведена также к задаче о плотнейшей упаковке шаров в пространстве произвольной размерности.



# Что происходит при контакте

Л.АШКИНАЗИ

## Простой выключатель и сложная физика

Рассмотрение физики работы технических устройств хорошо тем, что можно увидеть связь разных физических законов и их практическое применение. Это облегчит изучение и запоминание физики, а также продемонстрирует ее практическое применение. Трудно научиться плавать, упражняясь на сухом месте, поэтому попробуем посмотреть, как в реальности применяются физические законы. При этом постараемся соблюдать четыре условия.

*Первое условие.* Устройства и ситуации, которые мы будем рассматривать, должны быть нам хотя бы в какой-то мере знакомы, мы их где-то или когда-то видели. Это, чтобы вам было спокойнее; в серьезной физике формально это не так – коэффициент вторичной эмиссии и поток электронов в вакууме никто не видел, но по мере их изучения, по мере погружения в проблему возникает нечто вроде «видения». А видел ли кто-то космические лучи? Видим ли мы фотоны? И вообще – что значит «видим»?

*Второе условие.* Физика, которой мы будем пользоваться, должна быть в основном школьная, превышения уровня должно быть немного, и этот момент будет выделен в тексте. Хотя было бы хорошо, чтобы вы сами умели отличать понятное от непонятого – это важно для обучения любому предмету, да и для жизни вообще.

*Третье условие.* При анализе работы любого устройства мы можем добраться до слишком сложного материала, и нам придется либо остановиться, либо принять какие-то утверждения автора на веру. Но и в этих случаях граница должна быть указана.

*Четвертое условие.* Самое забавное: мы можем добраться не только до сложно-го материала, но и до вещей, которые вообще по каким-то причинам слабо изучены. И не потому, что они спрятаны в глубинах звезд и элементарных частиц, иногда это «слабо изученное» мирно живет у вас в комнате. С некоторыми подобными вещами мы скоро встретимся.

## Проблемы с поверхностью

Вы вошли в комнату и ткнули пальцем в выключатель. Вы знаете, что произошло – соединилась два кусочка металла и пошел ток. Или вот – вы нажали на клавишу на клавиатуре вашего компьютера и опять же замкнулся контакт. Правда, бывают емкостные клавиатуры, но мы их сейчас не обсуждаем. А возможны ситуации совсем других масштабов – где-то за городом на электростанции разошлись два контакта и с грохотом вспыхнула между ними многометровая электрическая дуга. Во всех трех случаях возник или разорвался контакт. Вот это мы и обсудим.

Прежде всего, во всех этих случаях начинали или прекращали соприкасаться две поверхности. Причем поверхности не в математическом смысле, а в физическом. Этих поверхностей две, и они могут быть устроены по-разному. Заметим, что вообще в физике наличие поверхности может сделать любую задачу существенно сложнее. Причина сложностей в том, что у поверхности больше параметров, чем у объема. Это вообще не очевидно – казалось бы, у поверхности параметров может быть и меньше, чем у объема. Например, плотность (или удельный вес) – этот параметр есть у объема, но его нет у поверхности. Расстояние между атомами – это есть и у него, и у нее. Дислокации – они есть у него и в некотором смысле (отклонения

структуры от идеальной) у нее, но не факт, что у нее их больше, скорее наоборот. Вес и масса есть у объема, но их вроде бы нет у поверхности. Так что победитель не очевиден.

Однако в физике под словом «поверхность» понимают не геометрическое понятие, а часть объема, как иногда говорят – «приповерхностную область». Это – слой, который принимает участие в процессах, происходящих на поверхности. Например, некая химическая реакция идет на поверхности. При этом она может быть и не связана с объемом, если это поверхность катализатора. Прилетели атомы  $A$  и  $B$ , прилипли, поползали по поверхности, наткнулись друг на друга, обрадовались, создали молекулу  $AB$  и улетели с поверхности (разумеется, вы примерно понимаете, каковы должны быть энергии связи  $A$ ,  $B$  и  $AB$  с поверхностью, а также энергии связи  $A$  с  $B$ ). Но ведь могло быть и иначе – прилетел атом  $A$ , прилип, пополз по поверхности, приполз из глубины материала  $C$  посредством диффузии атом примеси  $B$ , а дальше все, как в первом случае. Только разница в том, что теперь материал  $C$ , имеющий примесь  $B$ , будет терять эту примесь именно из приповерхностного слоя. Иными словами, в результате поверхностной реакции и процесса испарения состав материала вблизи поверхности изменяется, формируется так называемый приповерхностный слой, который в физике обычно называют «поверхностью».

Но так или иначе, а мы нажали на выключатель, две поверхности сближаются – и вот они соприкоснулись. Но как они это сделали? Контакт осуществляется не по всей площади соприкосновения. Исследовал ли кто-то контакт «атомно-гладких», т.е. идеальных на атомном уровне поверхностей? Сами такие поверхности исследованы довольно тщательно. На практике любая поверхность шероховата, две поверхности соприкасаются сначала по трем точкам, при этом механические напряжения вызывают деформацию контактирующих материалов: пластическую, если материал пластичен, и упругую – в любом случае. Контактные площадки расширя-

ются, но все равно площадь соприкосновения обычно остается намного меньше так называемой геометрической площади контакта, которая видна издали. Сделаем численную оценку.

Пусть геометрическая площадь контакта  $10 \text{ мм}^2$ , а обуславливает его сила  $F = 1 \text{ Н}$  (вес гири массой  $100 \text{ г}$ ). Если прочность материала  $\sigma = 300 \text{ Н/мм}^2$ , то площадь истинного контакта будет  $S = F/\sigma = 0,003 \text{ мм}^2$ , или  $0,0003$  от геометрической площади контакта. (Кстати – вы никогда не задумывались над тем, почему нам удается поднимать со стола что-то плоское, например книгу? Ведь на нее сверху давит сила, равная произведению атмосферного давления  $10 \text{ Н/см}^2$  на площадь, скажем,  $300 \text{ см}^2$ . Даже перемножать страшно!)

Итак, при обычной силе прижатия контакт происходит по малой доле поверхности. Тут сразу возникает несколько вопросов.

### Соппротивление и нагрев

*Первый вопрос* – куда при контакте девается оксидная пленка, которая образуется на воздухе на всех металлах (кроме золота, платины и, возможно, металлов ее группы). Толщина этой оксидной пленки составляет единицы и десятки нанометров, и она является изолятором, а туннелирование возможно при расстояниях на порядок меньших. Спасает то, что при контактировании эта пленка ломается, и ее куски оттесняются из области контакта.

*Второй вопрос* – размыкание контакта. Если материал контактных поверхностей одинаков, то на площадках истинного контакта может произойти «холодное сваривание» (а иногда и не холодное, это мы еще обсудим). В случае такого сваривания сила, необходимая для размыкания контакта, близка в той, с которой мы прижимали одну поверхность к другой. Это было бы очень неудобно, и к счастью это обычно не так. Значит, настоящего сваривания, образования сплошного материала не происходит – возможно, оксидная пленка выдавливается не вся (этот процесс не вполне исследован). Попутно заметим, что

если бы происходило настоящее сваривание, то коэффициент трения между металлами был бы всегда порядка единицы, поскольку при скольжении одной поверхности по другой сваренные микроконтакты должны были бы срезаться.

*Третий вопрос* – концентрация тока и перегрев. Раз контактные площадки малы, то плотность тока в них выше и, стало быть, возникает локальный разогрев. Сам по себе он не очень страшен – до плавления или испарения еще далеко. Но при росте температуры материал теряет упругость, начинает «течь». Особенно склонны к этому контакты в розетках, сделанные из тонких пластин. Эти вполне неподвижные контакты при нагреве иногда со временем теряют упругость, «ослабевают», и тогда холодильник, включенный десять лет назад, начинает «вырубаться». Надо искать, где он десять лет назад был подключен, находить нужный удлинитель и подтягивать винтики, подгибать контактики (не забыв выключить напряжение обоими предохранителями, а еще лучше – обеспечив то, что электрики называют «видимый разрыв»). Внешним признаком является нагрев контакта, в быту – нагрев розетки и запах изоляции. Как сказано у сэра Артура Кларка в романе «Лунная пыль»: «За свою многолетнюю работу инженером он слишком часто убеждался, чем грозит запах горячей изоляции».

Попробуем оценить сопротивление и нагрев контактов. Причем сопротивление важно и само по себе – из-за возникновения падения напряжения на контакте. Правильный расчет сопротивления контакта требует «нешкольной» математики, поэтому воспользуемся простой моделью, которая дает примерно правильный ответ. Будем считать, что контакт устроен так: это два цилиндра диаметром  $d$  (размер контактного пятна) и длиной  $2d$  – т.е. зонами стягивания тока в обоих контактах (рис. 1). Тогда сопротивление одиночного контакта  $R_1 = \frac{2\rho d}{\pi d^2/4}$ , где  $\rho$  – удельное сопротивление. Если суммарная площадь контактов  $S$ , то всего у нас  $N = \frac{S}{\pi d^2/4}$

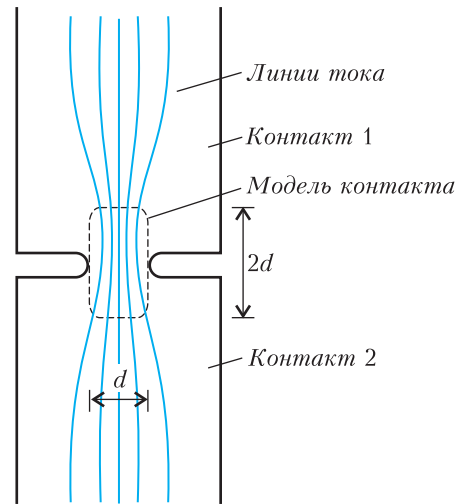


Рис. 1. Модель контакта

таких контактов и все они включены параллельно. Поэтому сопротивление контактной зоны  $R = \frac{2\rho d}{S}$ . Обратите внимание – сопротивление всего контакта при уменьшении  $d$  не возрастает, как можно было бы ожидать, а уменьшается. Потому что увеличение количества одиночных контактов оказывается «сильнее».

Пусть  $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$  Ом·м (медь),  $S = 3 \cdot 10^{-9}$  м<sup>2</sup>,  $d$  принимает значение от 40 нм (100 межатомных расстояний) до 0,4 мкм (обычная шероховатость контактов). Тогда  $R = 4$  мкОм – 40 мкОм, и даже при токе  $I = 100$  А (десять мощных чайников, включенных одновременно) и падение напряжения, и мощность, выделяющаяся в контакте, в целом малы. Но не перегревается ли именно контакт? Если по всему контакту протекает ток  $I$ , то по одиночному контакту протекает ток  $I_1 = \frac{I}{N} = \frac{I\pi d^2}{4S}$  и, согласно Джоулю и Ленцу, при этом выделяется мощность  $W_1 = I_1^2 R_1 = \frac{I^2 \rho \pi d^3}{2S^2}$ . Эта мощность должна покинуть зону контакта через два сечения  $\frac{\pi d^2}{4}$  (т.е. в обе стороны), удалившись на расстояние  $d$ , дальше она (как и ток!)

растекается по большой площади. Для этого контакт должен быть перегрет на  $\Delta T = \frac{W_1 d}{2\lambda(\pi d^2/4)} = \frac{I^2 \rho d^2}{\lambda S^2}$ , где  $\lambda$  – теплопроводность материала контактов, для меди это 400 Вт/(м·К). Подставляя все величины, получаем для слишком большой величины  $I = 100$  А перегрев  $\Delta T = 10^{-4}$  К –  $10^{-2}$  К – пренебрежимо малые величины. Кажется, мы можем спать спокойно.

### Теперь о сложном

Но давайте нырнем в задачу поглубже. Одиночные контакты включены параллельно, но почему мы считали, что они одинаковы? При использованных нами величинах  $S$  и  $d$  значения  $N$  оказываются от  $2 \cdot 10^6$  до  $2 \cdot 10^4$ , и некому следить, чтобы все  $d$  были одинаковы. А если величины  $d$  контактов различны, то и протекающие по ним токи будут различаться. Будут различаться и мощности – причем, поскольку токи будут обратно пропорциональны сопротивлениям, а в мощность ток входит в квадрате, то в контакте с меньшим сопротивлением мощность будет больше. В результате нагрева контактов при работе могут оказаться различными. Например, вы можете самостоятельно рассмотреть простую ситуацию, когда имеется две группы контактов – со значениями  $d_1$  и  $d_2$ , а количества контактов будут  $N_1$  и  $N_2$ .

Ситуация, когда у нас есть объекты, которые мы для простоты считаем одинаковыми, а на самом деле они различны, для физики не уникальна. И на это всегда надо обращать внимание, хотя переход к рассмотрению множества разных объектов бывает сложен. Иногда решением является разделение множества разных объектов на несколько групп. Помните, как выводится школьная формула  $p = nkT$ ? Все молекулы делятся на 6 групп, причем эти группы считаются одинаковыми по численности. С контактами этот фокус не пройдет (да и с молекулами бывают сложности). Например, что будет, если стенка очень холодная или даже сорбирует газ? Тогда в нашей модели просто нет одной из групп.

С контактами есть и следующий уровень проблемы – они должны замыкаться и размыкаться. Обычно до замыкания между контактами есть напряжение. Если оно больше примерно 300 В, то при сближении контактов между ними может произойти пробой и возникнуть газовый разряд. Контакты еще не сомкнулись, а ток уже пошел, причем через относительно большое сопротивление газового (дугового) разряда с выделением соответствующей мощности, нагревом контактов, испарением, переносом материала с одного контакта на другой, плавлением... А тут как раз они сблизились и – бац! – сомкнулись, будучи нагреты чуть ли не до плавления. В итоге они сварились. Пока что это привело лишь к улучшению контактов, но ведь им же еще предстоит размыкаться.

Сваривание может происходить и без разряда. Истинная площадь контакта при микронных размерах устанавливается не мгновенно – за единицы и десятки микросекунд, а тепловой режим – за сотые и десятые доли микросекунд, т.е. в сто раз быстрее. Поэтому при замыкании контакт может успеть нагреться, если нагрузка допускает быстрый рост тока, т.е. не является индуктивной. Индуктивная нагрузка должна, казалось бы, контакты защитить. Не тут-то было!

При разрыве контактов все усугубляется менее быстрым, нежели при замыкании, их движением. Поэтому мощность, выделяющаяся при разрыве контакта из-за уменьшения площади истинного контакта и/или возникновения дугового разряда, успевает сильнее нагреть, больше расплавить и испарить. Мощные выключатели – не те, в которые вы тычете пальчиком, войдя в комнату, а которые выше вас ростом и отключают не люстры, а города, и иногда они вообще не могут разомкнуть цепь, потому что при разведении контактов загорается дуга, по которой и идет ток. Ситуация усугубляется тем, что при замыкании индуктивной нагрузки (точнее, при увеличении сопротивления «выключателя») на контактах увеличивается напряжение и происходит пробой. Каждый, кто пытался тестером проверить целост-



ность обмоток трансформатора, надолго запоминает болезненное ощущение, возникающее при размыкании цепи. Нет чтобы вспомнить вовремя абзац из школьного учебника про «ЭДС индукции» и не держать голыми пальцами концы проводов!

### Проблемы эксплуатации

Технические критерии связаны с эксплуатационными параметрами, например со скоростью износа. Скажем, для обычной лампы накаливания каждое включение «съедает» около получаса срока службы самой лампы. Поэтому если лампа включается раз в сутки, то можно считать, что в смысле срока службы она работает в непрерывном режиме, а если раз в минуту – то в режиме непрерывных включений. Аналогичная зависимость есть и для мощных выключателей. Эксплуатационные параметры зависят, конечно, от физических и химических процессов, и зависимость эта не всегда известна.

Скользящие контакты обеспечивают протекание тока между движущимися одна относительно другой частями электрических машин, аппаратов и приборов. Такие контакты есть на кредитке и на симкарте, в электрических машинах это коллектор, кольца и щетки, в переменных сопротивлениях (реостатах) – контактные дорожки, обмотки и ползунки, в трамваях и троллейбусах – поднимите голову и посмотрите вверх, в сотовых телефонах-слайдерах – контакты, соединяющие части. Протекание тока должно быть непрерывным, причем сопротивление должно быть малым и не изменяться при движении. Иными словами, с точки зрения внешней схемы, скользящий контакт вообще должен быть «невидим». На самом деле это требование не соблюдается идеально: при движении одни контактные площадки разрываются, другие возникают, причем и при разрыве, и при замыкании сопротивление изменяется скачком. Поскольку все контактные площадки включены параллельно, разрыв каждой сказывается на сопротивлении несильно, но для некоторых случаев это существенно.

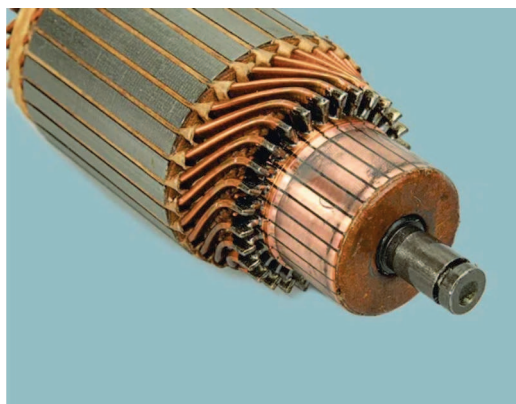


Рис. 2. Коллектор электродвигателя



Рис. 3. Реостат с переменным сечением проволоки для расширения диапазона регулирования (середина прошлого века)

Ситуация осложняется тем, что иногда скользящие контакты используются одновременно и как разрывные. Например, в коллекторных электрических машинах щетки скользят по каждой ламели (контакту на коллекторе), но при переходе с ламели на ламель они переключают обмотку (рис. 2). Промежуточная ситуация имеет место в проволочных реостатах (рис. 3) – движок контактирует с отдельными витками, но сами эти витки являются одной обмоткой. На витки она оказывается разделенной не по схемным, а по конструктивным соображениям: существовал бы металл со стократно большим удельным сопротивлением – делать реостат из длинной тонкой проволоки не потребовалось бы. Поскольку от этих скользяще-разрывных контактов обычно требуется непре-

рывность протекания тока, движок выполняется так, чтобы он контактировал с двумя витками или ламелями. Разумеется, сопротивление при этом все равно изменяется скачками, но, может быть, не такими большими.

Основная особенность скользящих контактов – то, что они подвержены трению и износу. При этом оксидная пленка, которая в обычных условиях быстро нарастает на металле и защищает его от дальнейшего окисления, сдирается и разрушение контакта может ускориться катастрофически. Когда-то была попытка ставить алюминиевые контакты на троллейбусы, так рассказывают, что в дождливую погоду по штангам и крышам вниз текло нечто молочно-белое. В трамваях алюминиевые контакты вроде бы работают, но провод подвешен так, что он скользит все время по разным частям контактной дуги, из-за чего нагрузка, как электрическая, так и механическая, падает. В применявшихся когда-то контактах в виде катящегося ролика нагрузка также была меньше, чем в неподвижных (понятно ли, почему?).

Вот почему именно на работу скользящих контактов окружающая среда влияет сильнее всего. Влажность, примеси агрессивных газов, дым и пыль, брызги морской воды, грибки – чудовищный компот, выживание в коем инженеры именуют «тропикоустойчивость». Не от хорошей жизни герметизируют реле (рис. 4, 5).

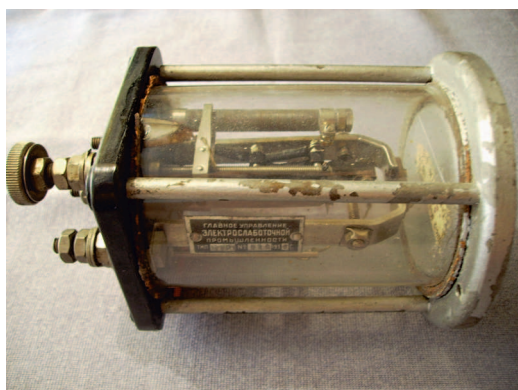


Рис. 4. Герметизированное реле для эксплуатации в загрязненной среде, на железной дороге (первая треть прошлого века)

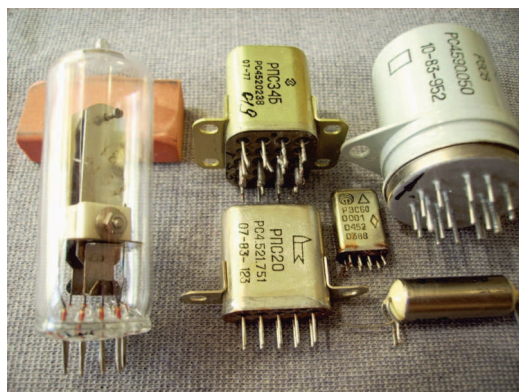


Рис. 5. Герметизированные реле: слева – вакуумированное в баллоне, как электронная лампа, справа – обычные

### Выбор материала

Теперь понятно, почему контакты далеки от идеала, почему так сложна проблема выбора контактного материала – просто потому, что надо удовлетворить много разных требований. Но техника отличается от прочих областей жизни, в частности, тем, что в ней иногда удается «губы Никанора Ивановича да приставить к носу Ивана Кузьмича». Поскольку не только конструктор конструирует из имеющихся материалов, но и материаловед разрабатывает на потребу конструктору новые материалы.

Логика выбора материала для контактов в сильно упрощенном виде примерно такова. Прежде всего – электропроводность. Если делаем реле на малое напряжение или что-то иное, где сильно прижать контакты не удастся, самым важным будет вопрос об оксидных пленках. Они бывают разные – и по толщине, и по составу, и по прочности, и по сопротивлению. Тем более что сопротивление оксидов сильно зависит от небольших изменений их состава, а он зависит от примесей к основному материалу контактов, а также от состава газовой среды. Поэтому трудно предсказать, какой толщины и с каким сопротивлением окажется пленка на контакте. Окисление поверхности металла – многостадийный процесс, на него влияют и коэффициенты диффузии, и скорость диссоциации молекул газа, и даже электропроводность ок-

сидной пленки. Например, как ни странно, именно из-за высокого электрического сопротивления оксида алюминия медленно окисляется алюминий. Принято считать, что не окисляются (или окисляются так слабо, что электроны туннелируют через пленку) золото, платина и их сплавы с большим содержанием драгметалла. Добавки же к драгметаллам применяют либо для увеличения прочности и уменьшения механического износа, либо для увеличения технологичности (рис. 6).

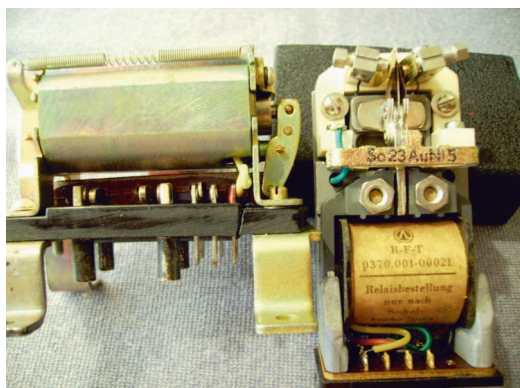


Рис. 6. Реле с весьма мощными контактами – слева, с «деликатными» – справа. На правом указан материал контактов – AuNi 5%

Два контакта, сжатых на некоторое время, могут свариться друг с другом и остаться в таком положении после снятия усилия. Это явление называют «прилипанием», оно объясняется текучестью и диффузией материалов и в результате – образованием «истинного контакта» большой площади. Процесс ускоряется при нагреве протекающим током. Прилипание возможно лишь для чистых металлов, не покрытых слоем оксида или иной пленки. При наличии пленок эффект прилипания ослабляется или прекращается. Разъединение контактов из абсолютно чистых отожженных благородных металлов, например платины или золота, возможно лишь после приложении больших усилий, почти равных усилиям, которые необходимы для разрушения монолитной структуры металла. Поэтому для уменьшения сваривания применяются добавки, увеличивающие прочность и тормозящие диффузию.

Для контактов средней мощности нажатие обычно обеспечить можно, и сопротивление пленок уже не столь существенно – они будут разрушены при контактировании. Тем более что реле и выключатели часто делают так, чтобы контакты «прыгали» навстречу друг другу, ударялись друг о друга или елозили друг по другу, разрушая пленки. Тогда важными оказываются электро- и теплопроводность самого материала – значит, преимущество будет за медью или серебром, может быть с упрочняющими добавками. Важным может оказаться и сваривание, значит, материал должен быть тугоплавким и с низким давлением пара. Это требование указывает на углерод, вольфрам, молибден. Но у них велико сопротивление. Выход – композит: вольфрамовая губка, пропитанная медью, или пресованная и спеченная смесь порошков меди и углерода.

Специфическая ситуация – скользящие контакты при большом и неизбежном износе, если предстоит работа под открытым небом с вытекающими отсюда последствиями в виде дождя или снега. Следовательно, надо брать либо что-то совсем дешевое и часто заменять, либо с малым трением и износом. Это случай троллейбуса с контактами для мокрой погоды – из стали или чугуна, самого дешевого металлического материала, износостойкого и антифрикционного, а для сухой погоды – из углеродных материалов (рис. 7). Или это трамвай с контактами из алюминия или стали.



Рис. 7. Контакты троллейбуса: справа – углеродный, слева – чугунные. Прорези – для сцарапывания льда

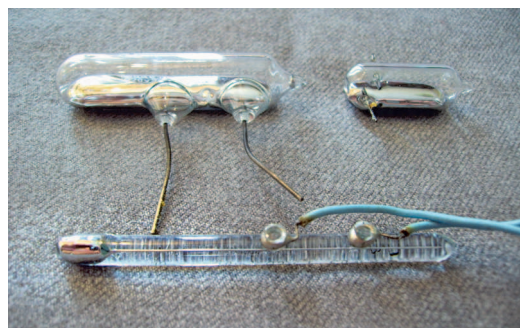


Другая специфическая ситуация, точнее – группа ситуаций: когда на выбор контактного материала влияют совсем другие требования, если сама контактирующая деталь одновременно несет еще какую-то функцию, например является пружиной. Тогда от материала требуется упругость – и это становится аргументом в пользу применения бронзы.

Для контактов, коммутирующих большие мощности, при которых особенно вероятно образование дуги, приходится отказываться от материалов с относительно высоким давлением паров, например меди, и переходить на композиты из вольфрама, никеля, углерода, иногда с дугогасящими присадками.

### **Дребезг, ртуть, свинка, градусник**

В заключение обратимся к одной экзотической ситуации. Вот контакты сближаются, соударяются и – иногда отскакивают. На какое-то время. Потом, через миллисекунды, они сомкнутся опять. Для нагрузки, которая коммутируется, это явление, его называют дребезгом контактов, может быть допустимо, если нагрузкой является лампа или чайник, и недопустимо – в цифровой технике. Во втором случае для борьбы с этим явлением могут быть применены простые схемы, они срабатывают от самого первого замыкания и остаются в «сработавшем» состоянии до окончания процесса дребезга.



*Рис. 8. Свинки и градусник, в котором ртуть замыкает два контакта*

Но возможны ситуации, когда применить такие схемы нельзя, в частности – при коммутации больших мощностей. В этом случае нужны контакты, которые «прилипают» друг к другу при коммутации. Одно из решений – ртутный контакт, или, в инженерном просторечии, «свинка». Это стеклянный баллон, заполненный водородом (чтобы ничего не окислялось), с двумя выводами. В баллоне находится ртуть, в зависимости от положения свинки она замыкает или не замыкает контакты (рис. 8). Такие коммутаторы иногда применялись и не для исключения дребезга, а просто из-за высокой надежности коммутирования. Внизу на рисунке – градусник, два контакта введены в ртутный канал и при определенной температуре ртуть их замыкает.

### **Вниманию наших читателей**

*Подписаться на журнал «Квант» можно с любого номера в любом почтовом отделении. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» – 90964.*

*Купить журнал «Квант» возможно в магазине «Математическая книга» издательства МЦНМО (адрес интернет-магазина: [biblio.mcsme.ru](http://biblio.mcsme.ru)), а также в московских книжных магазинах «Библио-глобус», «Молодая гвардия», «Московский дом книги» и в редакции журнала.*

*Архив вышедших номеров журнала «Квант» имеется на сайте <http://kvant.ras.ru>*



# Письма А.Н.Колмогорова о ФМШ МГУ

*В педагогическом наследии А.Н. Колмогорова большое место занимает ФМШ – физико-математическая школа-интернат №18 Мосгороно при МГУ (сейчас это СУНЦ МГУ – школа-интернат имени А.Н.Колмогорова). Теме ФМШ посвящены многие его статьи (в том числе публицистические), наброски к лекциям, заметки «для себя», письма. Предлагаем читателям познакомиться с некоторыми письмами Андрея Николаевича о школе. Даже эти небольшие фрагменты показывают, с какой серьезностью и ответственностью Колмогоров относился к своим обязанностям председателя попечительского совета школы – его интересовало и волновало все.*

*В конце каждого письма приводятся комментарии для читателей, разъясняющие детали затронутой темы; в основном это сведения об упомянутых персоналиях.*

## Письмо И.М. Гельфанду<sup>1</sup> (1963 г.)

*Глубокоуважаемый Израиль Моисеевич!*

Мне не хотелось бы, чтобы Вы поняли дело так, что я вообще против заочной школы. Сомнения мои относятся лишь к отдельным сторонам Вашего проекта, а главное к тому, является ли заочная школа главным и самым нужным звеном работы.

Школа-интернат в качестве основного пути исправления существующего положения вещей не в меньшей степени может быть подвержена критике. Она меня больше занимает как опытная и образцовая школа для будущей большой сети школ. Я всюду подчеркиваю, что уровень отбора в школу-интернат таков, что в будущем можно рассчитывать работать на том уровне, который там будет достигнут, с 5–10% мальчиков всей страны, если стране это потребуется.

Единственное, о чем надо заранее договориться, это роль заочной школы в отборе в школы-интернаты или еще куда-либо. До возникновения идеи заочной школы я предполагал такой план. В весенние каникулы проводятся местные олимпиады. Одновременно с областными олимпиадами происходят экзамены в школы-интернаты. Лучшие кандидаты сразу зачисляются и ждут вызова в школы на следующий сентябрь. *Сомнительные* кандидаты получают при-

глашения в *летние школы*, где происходит еще дополнительный отбор и в школы-интернаты.

Сами экзамены во время весенних каникул на местах происходят, как было в этом году, так. Экзаменаторы приезжают из университетов, при которых работают школы-интернаты. Допускаются к экзаменам победители местных олимпиад и ученики, отобранные местными облоно с представителем местных вузов из школьников, рекомендуемых школами.

Я не думаю, чтобы было разумно заочной школе придавать роль совсем независимого другого пути. Ей естественно было бы дать права:

- а) рекомендации своих учеников к участию в конкурсах, проводимых на местах;
- б) некоторое число мест для непосредственной рекомендации своих особенно активных корреспондентов в летние школы.

Летние школы – самая живая форма работы, для которой надо бы сохранить силы нашей молодежи. Бригады молодых математиков Москвы были бы хорошо приняты в летних школах, устраиваемых местными силами (пока я вел разговоры с Ивановым и Симферополем). Министерство готово в какой-то мере субсидировать несколько межобластных школ, например для Ивановской, Владимирской, Ярославской и Костромской – на спортивной базе



*А.Н.Колмогоров среди учащихся школы*

Ивановского педагогического института на каком-то озере<sup>2</sup>. С Крымом дело несколько сложнее: они уже устраивали летний математический лагерь в Феодосии с не очень хорошими традициями.

Бесспорно, полезной стороной Вашей деятельности будет издание всяческих материалов. Однако, и здесь главное, чем математикам надо наконец заняться (не с тем легкомыслием, как это сделали Болтянский и И. Яглом)<sup>3</sup> – это составлением хороших книжек – *учебных и не учебных*. Срочная рассылка «материалов» для школы, боюсь, будет тянуть в сторону спешной и небрежной работы.

«Обратная связь» по переписке страшно трудоемка.<sup>4</sup> Мой серьезный совет был бы выбрать *несколько областей*, не очень далеких от Москвы. В Калинин и Ярославле можно было бы опереться и на местные педагогические институты в виде очно-заочных консультационных пунктов. Даже в некоторых районных центрах можно было бы найти активную помощь местных учителей. Из близких областей не нарушая демократичности можно было бы пригласить приехать на школьные каникулы лучших учеников с небольшой дота-

цией (из далеких – это уже очень большая роскошь, на которую не дадут средств, а приглашать за свой счет будет не демократично).

С другой стороны, можно было бы наладить связь с отдельными школами, где корреспондентом школы будет небольшой кружок. У меня будет даже определенная просьба поскорее послать материалы В.Брюхову в школе гор. Печора (Коми). Он был у нас в Красновидове и оказался на уровне, не позволившем его взять в наш выпускной 11 кл., но у себя дома он был инициатором и чуть не руководителем кружка своих товарищей.

Можно еще в виде таких «корреспондентских пунктов» выбрать те школы вне больших городов, из которых у нас в школе-интернате уже есть учащиеся. Таких школ окажется, все-таки, не менее пятидесяти, а случаях в двадцати, наверное, сами учащиеся могли бы сделаться активными участниками Вашей работы.

Но особенно я советовал бы выбрать несколько областей и на них сосредоточиться. По какой-либо Калининской или Ярославской области можно было бы даже в зимний университетский перерыв объе-

хоть, или для эффективности (Кириллов!<sup>5</sup>) обойти на лыжах десяток корреспондентских пунктов.

Такой подход (Москва работает с такими-то областями) стимулировал бы других (Ленинград, Воронеж и т.д.) начать аналогичную работу. Это очень существенно. Воронежцы мне уже высказали обиду за «переманивание ребят» в школу-интернат. Я им ответил предложением поддержки в открытии школы-интерната в Воронеже с 1964 г.

*Ваш Колмогоров*

### Комментарии

1. Израиль Моисеевич Гельфанд (1913–2010) – один из крупнейших математиков XX столетия, ученик А.Н.Колмогорова. Письмо относится к концу 1963 года: именно в это время по инициативе И.М. создается ВЗМШ – Всесоюзная заочная математическая школа при МГУ.

2. Это Рубское озеро в Ивановской области. В 1968 году Андрей Николаевич участвовал в работе этой школы (см. брошюру «Летняя школа на Рубском озере». – М.: Просвещение, 1970).



*А.Н.Колмогоров вручает аттестат об окончании школы А.Веселову*

3. Владимир Григорьевич Болтянский (1925–2019) и Исаак Моисеевич Яглом (1921–1988) – известные советские математики, уделявшие большое внимание математическому просвещению. В 1963 году они издали учебник для массовой школы по геометрии, который вызвал резкую критику.

4. Опасения Андрея Николаевича о трудностях организации работы «по переписке» в 1963 году были обоснованы. Но И.М.Гельфанду, обладавшему выдающимися организационными способностями, удалось наладить работу так, что в ВЗМШ обучались десятки тысяч школьников со всего Союза.

5. По-видимому, имеется в виду А.А.Кириллов, советский математик, педагог.

### Из письма А.Г.Курошу<sup>1</sup> (1964 г.)

*Глубокоуважаемый и дорогой Александр Геннадьевич!*

Очень прошу Вас верить в мою самую высокую оценку Вашей деятельности и Вас как человека и как математика. Только иногда нас всех, хорошо относящихся к Вам математиков, достаточно самостоятельных, чтобы не во всем с Вами соглашаться, пугает Ваша уверенность в обладании истиной. Так, совсем недавно Вы авторитетно высказали мне мнение, что напрасно я трачу время на физико-математическую школу вместо того, чтобы отдавать это время своим аспирантам. Прав я или нет, взявшись за непосредственную работу со школьниками, – во всяком случае, было бы естественно сначала поинтересоваться тем, с какой целью я это делаю. Взавшись вообще за школьные дела (я согласился быть председателем комиссии по математическому образованию в Академии наук, играющей роль и нашей «национальной» комиссии, входящей в Международную организацию), я считал разумным возобновить свой непосредственный опыт работы со школьниками (чем я занимался совсем профессионально и с большим увлечением в 1922–25 годах)<sup>2</sup> и уже получил от этого за истекший декабрь большую пользу для себя самого. Думаю, что это лучше, чем писать оторванные от непосредственного школьного опыта учебники и добиваться немедленного их издания миллионными тиражами или тратить время на

председательствование в конкурсных комиссиях по учебникам, написанным малограмотными авторами по плохо составленным программам.

По существу, получить математическое образование человек средних способностей за пять лет может. Но, по-видимому, для этого надо как-то радикально изменить стиль преподавания.

Вы пишете в своем письме: «Не следует забывать, каков уровень подготовки основной массы студентов первого курса и в какой мере они смогли бы сразу начать работать на том или ином уровне активности и самостоятельности».

Я этого не забываю, но мне понятно лишь следующее.

а) «Основная масса» (условное название студентов, пришедших из школ с обычным уровнем преподавания математики – вскоре они перестанут образовывать большинство, но думать о них все равно будет надо!) не способна к «иному уровню активности и самостоятельности» усвоения того материала, который мы предлагаем им на первом курсе.

б) Эта основная масса в значительной части доходит и до пятого курса, так и не поднявшись до иного уровня активности и самостоятельности. <...>

Вы знаете и мое мнение о способах изменения такого положения: делать на первом курсе то, что требуется, чтобы принесенные из школы знания и навыки перешли в «активное» состояние. Между тем, сейчас происходит обратное. Из желания не потерять авторитет у более сильной части студентов лекторы на первом курсе усиленно поднимают уровень изложения на современный лад. Мне кажется, что мы стоим уже не перед перспективой, а перед фактом существования студентов «двух сортов» в наиболее вредной форме – все студенты понимают, что деление существует, многие преподаватели своей деятельностью это деление усугубляют, а не смягчают, и при этом формально все должны проходить в одинаковые сроки одинаковую программу.

Так как наличие школ с повышенной подготовкой по математике есть факт (и

отнюдь не созданный с появлением руководимого мною интерната), то единственный разумный выход, по моему мнению, состоит в создании отдельных потоков, которые в разные сроки и по разным программам получают тот минимум общематематических знаний, который факультет признает обязательным.

Конкретно, поток выпускников специальных школ мог бы в два года пройти курс анализа, включающий в себя органически (а не в качестве надстройки) содержание «Анализа-III», с первого же семестра иметь «объединенный» курс линейной алгебры и геометрии и т.п. Они раньше приступали бы к работе в специальных семинарах и к специализации на кафедрах и «выгадывали» бы свободный год в конце (а желаемые кончали бы и в четыре года). (При этом с третьего курса они сливались бы полностью с «основной массой» студентов.)

Я согласен с Вами, что объем знаний, обязательных для всех наших выпускников, следовало бы установить в какой-либо работоспособной комиссии. При наличии же такого «минимума», мне кажется, факультет не сделает ничего легкомысленного, позволив тем или иным группам математиков попробовать преподавать отдельным экспериментальным потокам всю математику в течение двух-двух с половиной лет (конечно, под контролем, но контролем не слишком педантичным – следует все же меньше стремиться к «униформизации» всей работы на факультете). Мне представляется крайне важным, чтобы весь обязательный материал, входящий в университетскую программу преподавания на первых двух курсах, был изложен систематически и доступно в небольшом числе учебных книг, желательно в одной книге по каждому предмету (аналитическая геометрия, анализ, дифференциальные уравнения и т.д.). Часто высказывается мнение, будто бы следование в одной книге чрезмерно стесняет самостоятельность и оригинальность лектора, а программы, включающие в себя отдельные главы, параграфы из многих книг, содействуют приобретению студентами навыков более свободного пользования



литературой. В применении к первым двум курсам и учебному материалу, выносимому на экзамены, по моему мнению, это не соответствует реальности. Лишь очень немногие студенты при работе по основным предметам первых двух курсов (и при подготовке к экзаменам) в самом деле производят какое-то самостоятельное осмысленное объединение прочитанного в различных книгах. Чаше обращение к нескольким книгам приводит к мало осмысленной «лоскутности» знаний.

Что касается свободы лектора, то наличие хорошего учебника, охватывающего весь экзаменационный материал, позволяет некоторые более простые части этого материала в лекциях освещать лишь в обзорном порядке, освобождая таким образом время в лекции для дополнительно материала, не ограниченного экзаменационной программой. Конечно, возможно и давать альтернативные доказательства отдельных теорем, позволяя студентам на экзамене по желанию следовать учебнику или лекциям.

Другое дело, что такого рода книги не создаются быстро и нелегко заменяются другими...

#### Комментарии

1. Александр Геннадьевич Курош (1908–1971) – профессор, зав. кафедрой алгебры МГУ. В 1964 году – вице-президент Московского математического общества.

2. Имеется в виду Потылихинская опытно-показательная школа Наркомпроса.

#### Письмо директору ИУУ (Грозный) В.Ф.Титову (1967 г.)

*Глубокоуважаемый тов. Титов!*

Школа-интернат при МГУ имеет только 9 и 10 классы. Безусловным требованием при поступлении является окончание восьмилетней школы. Прием производится по конкурсу, проводимому в областях, в том числе и у Вас на Северном Кавказе, о чем, вероятно, Вы знаете (у нас бывали ученики из Вашей республики). Возможность для А. Поповкина как можно скорее в нашу школу попасть без нарушения этого порядка могла бы состоять в том, чтобы в

течение этого и следующего учебного года в ускоренном порядке окончить восьмилетнюю школу (с хорошими оценками по всем предметам) и в 1969-ом году в 14-м летнем возрасте поступать к нам. Если его общее развитие, физическое и умственное, идет нормально, то такая задача, возможно, для него была бы посильна. Не думаю, чтобы можно было предлагать ему большее (окончание восьмилетней школы в 1968-ом году требовало бы, вероятно, излишнего и опасного напряжения сил).

Чтобы советовать что-либо определенное, надо лучше знать мальчика, но сформулированное выше предложение я делаю вовсе не из формализма. По довольно большому опыту я знаю, что форсирование односторонних занятий математикой в 12-м летнем возрасте небезопасно. Поэтому поставить перед способным мальчиком осуществляю, но не слишком легкую задачу более широкого характера мне кажется целесообразным. Выполнение этой задачи не должно обозначать полного отказа от занятий математикой сверх программы, но мальчик сам должен будет хорошо распланировать свое время на другие занятия. Следует объяснить ему, что в нашей школе большое внимание уделяется физике, в том числе и ее экспериментальной части, что лучшие наши юные математики много слушают музыку, увлекаются литературой.

Вы ничего не пишете об уровне физического развития Вашего подопечного. Было бы желательно, чтобы, поступая в класс из по преимуществу пятнадцатилетних ребят в четырнадцатилетнем возрасте, он не отставал от них в спортивных играх или туристских походах. Между девятым и десятым классом наши ребята работают в совхозе (недалеко от Вас, около Анапы).

Можете дать мое письмо родителям или учителям, непосредственно опекающим А.Поповкина. Естественно, что изложенный проект пока должен их занимать более как указание на примерное направление, в котором я советовал бы о судьбе мальчика подумать: если у него выдаю-



щиеся способности и кое-что ему дается необычно легко, то можно перед ним поставить повышенные задачи, но не в направлении одностороннего форсирования занятий математикой, а в направлении общего развития с понятной ему самому перспективой несколько скорее добраться и до вершин той науки, которой он увлечен.

Напишите, что Вы о сказанном думаете?

*А. Колмогоров*

### Письмо С.Г. Крейну<sup>1</sup> (1968 г.)

*Глубокоуважаемый Селим Григорьевич!*

Заметку Е.М. Семенова я посмотрю и тогда о ней отвечу автору. А пока отвечаю на Ваши запросы о школьных делах.

1. Несколько комплектов французских учебников в Москве известны и предположено кое-какие из них переводить. Охотников на это дело уже довольно много, в том числе как раз и из работавших в Алжире. Выбор не так прост, а вопрос о том, переводить ли наиболее «модернистские» – тем более. Во всяком случае учебники Бриара, удостоившиеся хвалебного предисловия Лихнеровича<sup>2</sup>, содержат такие грубые ошибки, что сам Лихнерович очевидным образом их не читал. Тем не менее, я готов и сам познакомиться с конкретными и мотивированными (в отношении выбора) предложениями Б.П. Пугачева<sup>3</sup> и передать их в издательство для сравнения с другими.

2. По поводу математических школ идет некоторая неявная дискуссия в верхах. Например, министр просвещения СССР и министр РСФСР по всей видимости занимают несколько разные позиции. Изложу положение в порядке широты разных начинаний.

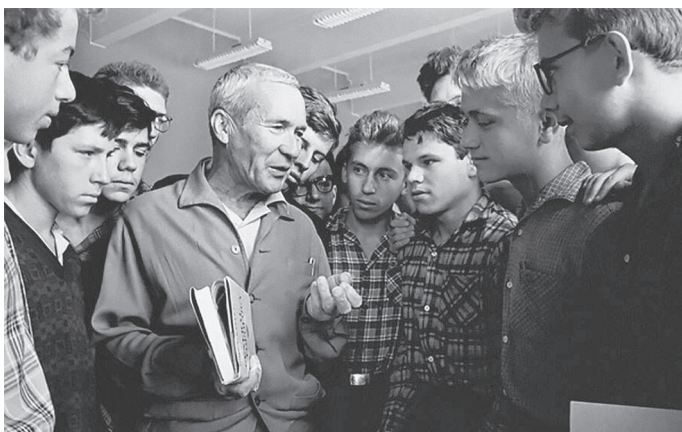
А. Бесспорно признается необходимость развертывания факультативных занятий по выбору учащихся. Для них мы составили примерные про-

граммы (журнал «Математика в школе»), издали много материалов (тот же журнал, выходящий в 300000 экз.). Готовятся специальные сборники материалов (типа дополнительных глав учебников и набора задач, тоже тиражом в 300000 экз.). Мне кажется первой обязанностью каждого университета и педагогического института помочь развитию этой формы работы в своем городе и своей области (лекции и семинары для учителей, местные издания, лекции по телевидению, непосредственная работа в школах студентов в виде нового вида педагогической практики, организация местных летних физико-математических школ в лагерях для старших школьников).

Б. Положение о факультативных занятиях предусматривает, что в многокомплектных школах при наличии надлежащих условий 6 часов основных занятий и 2 часа факультативных могут быть объединены в одной из параллелей в единый курс. Но здесь еще дело идет о работе с примерно 30% школьников без большого отбора и тем более – конкурсного.

В. Школы с вычислительной специализацией никем не упразднены, но существует довольно сильное стремление разрешать их только там, где их специализация реальна и обеспечена технически.

Пока не решены как следует задачи А, Б и задача Г (о которой далее), я склонен всячески защищать *существующие* школы с вычислительной специализацией даже



*А.Н.Колмогоров беседует с учениками школы*

в тех случаях, когда эта вычислительная специализация в них фиктивна. Но когда-либо от этого следовало бы отказаться.

Г. Постепенное расширение сети физико-математических школ с откровенно конкурсным набором тормозится из-за ряда побочных обстоятельств и высказываний против них некоторых весьма авторитетных людей, а отчасти и от нездорового их рекламирования (особенно Новосибирской школы). Пока шире в этом отношении Грузия, Армения, Литва (имеют по школе-интернату). К сожалению, в Москве все задерживается вопрос об окончательной легализации школ, аналогичных физ. мат. школам-интернатам, для москвичей. Но фактически хорошие 2-я и более сомнительная 7-я школы существуют. Таких школ надо не слишком много, м.б. 20-30 на весь СССР. Я уже неоднократно говорил, что готов в любой момент поддерживать открытие такой школы в Воронеже (в случае Воронежа – смешанной – интерната для нескольких областей и классов для горожан). *При поддержке местных организаций* м.б. это можно было бы осуществить и до решения общего вопроса.

Дискутируется вопрос о том, с какого класса начинать подобное выделение. Против начала *ранее восьмого класса* я стал бы возражать. Мы в московском интернате вполне удовлетворены началом с *девятого*, хотим только завести *заочную* подготовительную школу для восьмиклассников и хотим шире развивать набор через летние лагеря.<sup>4</sup> В этом году я сам вел летнюю школу для окончивших восемь классов в Ивановской и Ярославской областях. Мы из нее взяли в интернат целый класс (27 человек).

Теперь один встречный вопрос: мы подготовили вступительное задание для заочной школы восьмиклассников. Ивановский педагогический институт взялся вести переписку по этой школе с учащимися Ивановской и Ярославской областей (не из самих областных городов, где есть очные вечерние юношеские школы). Не возьмется ли Воронеж на ближайший год за аналогичное дело по Воронежской и м.б. еще какой-либо области? Пишу *на*

*этот год*, так как далее, возможно, Вы и не захотите быть только нашим филиалом.

*Ваш Колмогоров*

### Комментарии

1. Селим Григорьевич Крейн (1917–1999) – ученик Н.Н. Боголюбова, известный математик и педагог, лидер воронежской математической школы.

2. Андре Лихнерович (1915–1998) – французский математик и физик. Член Парижской академии. Сюжет с учебниками Бриара обусловлен интересом А.Н. Колмогорова к зарубежному опыту в связи с проводимой в это время реформой математического образования в СССР.

3. Борис Павлович Пугачев (1923–2010) – доцент Воронежского университета.

4. Эта попытка была реализована в 1968-70 годах, но затем по тем или иным причинам не получила развития.

### Письмо<sup>1</sup> А.П. Тинякову (1968 г.)

*Глубокоуважаемый Александр Павлович!*

Отвечаю на некоторые Ваши запросы только с большим опозданием. Я мог бы приехать в Симферополь в сроки вблизи студенческих каникул (24 января – 6 февраля). Поездка планируется комплексно. Так как я люблю море, хотя бы и не очень приветливое, меня занимает, например, зимнее расписание судов, которые доставили бы меня из Ялты в Сухуми. Но возможно и приспособление к Вашим удобствам с тем, чтобы можно было встретиться с учителями области и, может быть, попасть на «сессию» Вашей МАН.

Возможно, что как старый житель Крыма Вы можете оказать нам содействие еще в одном отношении. Наши математические школьники (из интерната № 18 при МГУ) в 1966 году работали летом около 20 дней в степном совхозе около Евпатории и на заработанные деньги прожили еще 16 дней в собственных палатках в бухте Ласпи, получая за 90 коп. с человека в день питание в пионерском лагере. Аналогичное трудовое начинание было проведено в 1967 году около Анапы в совхозе, где работают студенты МГУ. Сейчас у нас

достаточно «своих» студентов (из окончивших интернат и с опытом с.-х. летней работы), и мы предпочитали бы договориться с каким-либо совхозом в Крыму самостоятельно или совместно с какими-либо хорошо организованными крымскими школьниками же. Из наших студентов со школьниками (кончившими девятый класс) поедут только те, которых мы отберем как пригодных для воспитательной работы. Располагать трудовой лагерь рядом с вашим учебным (даже если бы это было возможно в Малореченске) по понятным соображениям не целесообразно. Но после окончания трудового периода мы приехали бы в летний учебный лагерь МАН со своим автобусом (или двумя автобусами) и своими палатками в гости. Все начинание мыслится на 20-30-40 школьников и с ними до десятка студентов.

Кроме того, у нас нашлись бы охотники на скромно оплачиваемую (в смысле компенсации дороги и прожития) работу на археологических раскопках или в геологической партии: мы совсем не стремимся к тому, чтобы и летом наши школьники слишком много занимались математикой.

Я понимаю, что в этом случае я предлагаю Вам не реальную помощь, а скорее новые заботы о нас, но м.б. все начинание будет в какой-то мере полезным и для МАН с чисто моральной стороны; поедут самые лучшие наши ребята не только в смысле математики, но и в смысле общественной активности.

Этим летом я руководил летним лагерем школьников Ивановской и Ярославской областей на Рубском озере под Ивановым. При одновременном составе (90 человек из окончивших восьмой класс и ясной цели отбора в Московскую школу 30-и человек) занятия, естественно, шли довольно интенсивно и систематично. Впрочем, обязательная нагрузка состояла из трех часов утром. Каждый день начинался с короткой лекции для всех по одному из двух предметов («алгебра» – Колмогоров, «геометрия» – С.В. Смирнов<sup>2</sup>), каждый лектор приходил через день с бригадой из шести своих помощников (в основном из студентов

Ярославского педагогического института, которые сидели на особой боковой скамейке на лекции, а потом разводили своих питомцев для занятий в классах). Материалы школы сейчас готовятся для издания в виде небольшой книжки. Были, конечно, и дополнительные кружковые занятия после обеда. Команда студентов была еще тем хороша, что состояла из хороших спортсменов и даже победила в комбинированной эстафете (бег, забрасывание мяча в сетку, бег, гребля, плавание, бег) команду инструкторов физкультуры студенческого лагеря.

Вы помните, что я всегда готов как-либо помогать организации такой более целеустремленной работы с Вашими школьниками. Это не значит, чтобы я относился отрицательно к более гибкой организации Ваших сборов, но просто другой стиль меня больше привлекает. Впрочем, три «олимпиады» по субботам мы провели в соответствии с системой, которую я заимствовал в МАН.

*Ваш Колмогоров*

#### **Комментарии**

1. Письмо продолжает «крымский цикл». А.Н. Колмогоров очень любил Крым, неоднократно, начиная с 20-х годов, его посещал и хорошо знал. В 60-е годы он приложил много усилий для организации летних поездок учеников ФМШ в Крым.

2. Сергей Васильевич Смирнов (1911–1979) – математик и педагог, с которым А.Н. Колмогоров поддерживал длительное время дружеские связи. Работал в Иваново вместе с выдающимся учеником Андрея Николаевича – академиком А.И. Мальцевым. Организовал первую в стране юношескую математическую школу в 1959 году. Дочь Ольга Сергеевна Смирнова работала в ФМШ, преподавала математику.

*Публикация подготовлена по материалам А. Абрамова*

# Задачи по математике и физике

*Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.*

*Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru) и [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru) соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».*

*Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.*

*Задачи M2754 – M2756 предлагались на VIII Кавказской математической олимпиаде.*

*Автор задач Ф2761–Ф2764 – С.Варламов.*

## Задачи M2754–M2757, Ф2761–Ф2764

**M2754.** Назар выбрал два вещественных числа  $a$  и  $b$  и написал два уравнения:  $x^4 - 2b^3x + a^4 = 0$  и  $x^4 - 2a^3x + b^4 = 0$ . Докажите, что хотя бы одно из этих уравнений имеет вещественный корень.

*Н.Агаханов*

**M2755.** Паша и Вова играют в игру, по очереди зачеркивая клетки доски  $3 \times 101$ . Исходно на доске зачеркнута только центральная клетка. За один ход игрок должен выбрать диагональ (в диагонали может быть 1, 2 или 3 клетки) и зачеркнуть в ней все еще не зачеркнутые клетки. Каждым ходом должна быть зачеркнута хотя бы одна новая клетка. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Начинает Паша. Кто из игроков может выиграть вне зависимости от ходов противника?

*И.Ефремов*

**M2756.** а) Выясните, могут ли для некоторого выпуклого шестиугольника  $ABCDEF$  одновременно выполняться три неравенства:

$$\angle ABD + \angle AED > 180^\circ,$$

$$\angle BCE + \angle BFE > 180^\circ,$$

$$\angle CDE + \angle CAF > 180^\circ.$$

б) Тот же вопрос, если дополнительно известно, что в шестиугольнике диагонали  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$  пересекаются в одной точке.

*М.Сагафян, П.Кожевников*

**M2757.** Дано простое число  $p$ . По окружности стоят  $p$  целых чисел. За один ход разрешается выбрать некоторое целое число  $k$  и заменить имеющийся набор  $a_0, \dots, a_{p-1}$  на набор чисел  $a_0 - a_k, a_1 - a_{1+k}, \dots, a_{p-1} - a_{p-1+k}$  (индексы берутся по модулю  $p$ , т.е.  $a_i = a_{i-p}$ ).

а) Докажите, что после выполнения  $p$  таких ходов все числа на окружности будут кратны  $p$ .

б\*) Найдите все пары натуральных чисел  $(m, n)$ ,  $n > 1$ , для которых верно следующее утверждение: для любого начального набора  $p$  целых чисел после выполнения любых  $m$  описанных ходов получится набор из  $p$  чисел, кратных  $n$ .

*П.Кожевников*

**Ф2761.** Маятник Максвелла представляет собой конструкцию из П-образного жестко закрепленного на основании штатива, двух жестко соединенных соосных цилиндров разных диаметров и разных длин, а также двух нитей одинаковой длины, причем один конец каждой нити закреплен на цилиндре меньшего диаметра, а второй – на горизонтальной перекладине штатива (рис. 1). Оба цилиндра сделаны из одного и того же однородного материала плотностью  $\rho = 10 \text{ г/см}^3$ . Соотношение диаметров цилиндров  $D_1/D_2 = 10$ , соотношение их длин (вдоль оси симметрии)  $l_2/l_1 = 3$ . Длина каждой выпрямленной нити  $10,5 D_1$ .

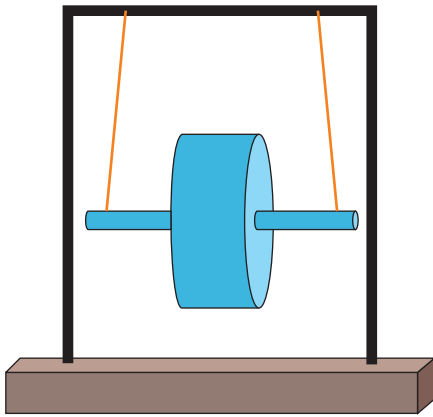


Рис. 1

Максимальное расстояние по вертикали, на которое перемещается ось симметрии цилиндров, равно примерно  $L = 10D_1 = 1$  м. Масса  $m$  такого маятника равна 1 кг. Маятник запускается из верхнего положения, когда нити намотаны виток к витку на цилиндр меньшего диаметра и скрепленные цилиндры неподвижны. При движении маятника выпрямленные участки нитей остаются практически вертикальными. Каково максимальное натяжение нитей в те промежутки времени, когда: а) маятник опускается, б) маятник поднимается, в) подъем оси маятников сменяется опусканием, г) опускание оси в первый раз сменяется подъемом? Считайте, что  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**Ф2762.** Учитель надул резиновую оболочку шарика воздухом из своих легких и завязал горловину оболочки узлом. В шарике оказалось 10,0 литров воздуха при температуре +20 °С и давлении, которое примерно на 4% больше атмосферного. Затем шарик стали аккуратно поливать жидким азотом из термоса. Жидкость хорошо смачивала всю поверхность шарика, и он, охлаждаясь, основательно уменьшался в объеме. Оцените, по возможности точнее, минимальный объем шарика при продолжении полива. Сведения о составе газовой смеси в шарике можно отыскать в интернете.

**Ф2763.** Электрическую цепь собрали из кусков медной проволоки разных диаметров  $d$  и  $2d$  и разных длин  $L$  и  $2L$  (рис. 2). Все участки цепи находятся в воздухе при

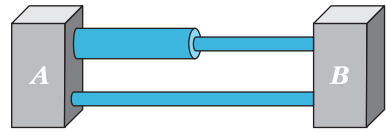


Рис. 2

комнатной температуре +20 °С. Выводы цепи  $A$  и  $B$  на очень короткое время подключили к мощному источнику тока и отключили. Сразу после отключения короткий участок проволоки большего диаметра имел температуру на 1 °С больше комнатной. Какими были в этот же момент температуры двух других кусков проволоки с одинаковым диаметром, но разной длиной?

**Ф2764.** В новом школьном здании нашлось помещение, имеющее форму куба с горизонтальными полом и потолком. В центр пола этого помещения поставили картонный ящик, тоже имеющий форму куба. В точности над центром этого ящика на потолке светится маленькая лампочка. Тень от ящика занимает  $1/4$  часть площади пола в помещении. Если лампочку переместить на 1 м вниз, то тень от ящика накроет весь пол, а на стенах при этом тени не будет. Каков объем этого помещения?

#### Решения задачи М2742–М2745, Ф2749–Ф2752

**М2742.** Дано целое число  $h > 1$ . Назовем положительную обыкновенную дробь (не обязательно несократимую) хорошей, если сумма ее числителя и знаменателя равна  $h$ . Скажем, что число  $h$  замечательное, если каждую положительную обыкновенную дробь, знаменатель которой меньше  $h$ , можно выразить через хорошие дроби (не обязательно различные) с помощью операций сложения и вычитания. Докажите, что  $h$  замечательное тогда и только тогда, когда оно простое.

(Напомним, что обыкновенная дробь – это отношение целого числа к натуральному.)

Сначала докажем, что если  $n$  – составное, то не любую дробь, знаменатель которой меньше  $n$ , можно выразить. Если среди



хороших дробей есть сократимые, то сократим их. Обозначим НОК знаменателей всех полученных после сокращения дробей через  $N$ . Заметим, что знаменатели всех несократимых дробей, которые можно выразить, будут делителями  $N$ . Действительно, для всех хороших дробей это утверждение верно, а знаменатели суммы или разности дробей, знаменатели которых являются делителями  $N$ , также будут делителями  $N$ . Пусть  $n$  делится на простое число  $p$ , а натуральное число  $\alpha$  таково, что  $p^\alpha < n \leq p^{\alpha+1}$ . Рассмотрим какую-нибудь хорошую дробь  $\frac{n-a}{a}$ , у которой знаменатель  $a$  делится на  $p$ . Поскольку  $a < n \leq p^{\alpha+1}$ , то  $a$  не делится на  $p^{\alpha+1}$ . Заметим, что  $n-a$  делится на  $p$ , поэтому дробь  $\frac{n-a}{a}$  можно сократить на  $p$ . После сокращения знаменатель не будет делиться на  $p^\alpha$ . Таким образом,  $N$  не будет делиться на  $p^\alpha$ , следовательно, дробь  $\frac{1}{p^\alpha}$  выразить не получится.

Теперь докажем, что если  $n$  равно простому числу  $p$ , то любую дробь, знаменатель которой меньше  $n$ , можно выразить. Рассмотрим дробь  $\frac{b}{a}$ , где  $a < p$ . Так как эта дробь выражается через дроби  $\frac{1}{a}$ , достаточно научиться выражать через хорошие дроби дробь  $\frac{1}{a}$ .

Почтольку  $p$  простое, то числа  $p-a$  и  $a$  взаимно просты. Как известно, найдется такое натуральное  $k$ , что  $(p-a)k \equiv 1 \pmod{a}$ . Пусть  $(p-a)k = al + 1$  для целого неотрицательного  $l$ . Тогда

$$\frac{1}{a} = \frac{(p-a)k - al}{a} = k \frac{p-a}{a} - l(p-1) \frac{1}{p-1}$$

– нужное нам представление дроби  $\frac{1}{a}$ : мы складываем  $k$  хороших дробей  $\frac{p-a}{a}$  и из результата вычитаем  $l(p-1)$  хороших дробей  $\frac{1}{p-1}$ .

Т.Казицына

**M2743.** Периметр треугольника  $ABC$  равен 1 (рис. 1). Окружность  $\omega$  касается

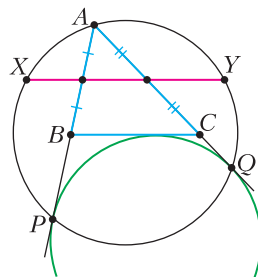


Рис. 1

стороны  $BC$ , продолжения стороны  $AB$  в точке  $P$  и продолжения стороны  $AC$  в точке  $Q$ . Прямая, проходящая через середины сторон  $AB$  и  $AC$ , пересекает описанную окружность треугольника  $APQ$  в точках  $X$  и  $Y$ . Найдите длину отрезка  $XY$ .

**Ответ:**  $1/2$ .

Одно из самых коротких решений состоит в следующем. Заметим, что  $\omega$  – вневписанная окружность треугольника  $ABC$  (рис. 2). Пусть  $J$  – ее центр. Описанная окружность  $\Omega$  треугольника  $APQ$  – это окружность с диаметром  $AJ$ . Центр  $O$  окружности  $\Omega$  – это середина  $AJ$ . Гомотетия с центром в точке  $A$  и коэффициентом  $1/2$  переводит  $\omega$  в окружность с центром  $O$ , касающуюся хорд  $AP$ ,  $AQ$  и  $XY$ . Значит, эти хорды

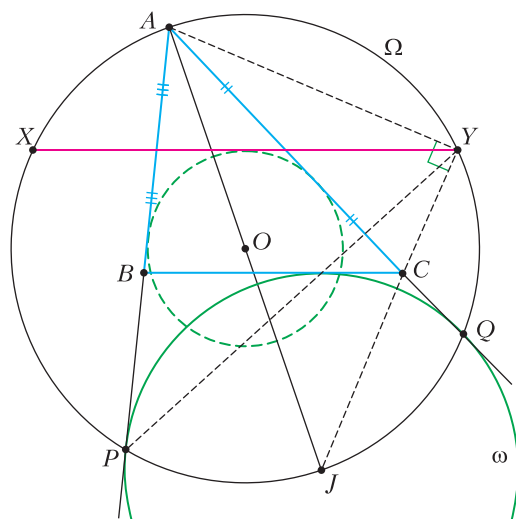


Рис. 2

равноудалены от центра  $O$ , т.е. имеют равные длины. Но, как известно, длина отрезка  $AP$  касательной к вневписанной окружности равна полупериметру треугольника  $ABC$ , т.е.  $1/2$ . Задача решена. Есть и другие геометрические решения, в которых обнаруживаются следующие интересные описания точек пересечения средней линии с окружностью  $\Omega$ . Оказывается, точка пересечения  $Y$  лежит на внешней биссектрисе угла  $C$ , а значит (в силу  $\angle AYJ = 90^\circ$ )  $Y$  – проекция вершины  $A$  на внешнюю биссектрису угла  $C$ . Проекция вершин треугольника на внутренние или внешние биссектрисы появляются во многих геометрических конструкциях; за этими точками также в фольклоре закрепилось название «точки из задачи 255 задачника И.Шарыгина». Кроме того, прямая  $PY$  параллельна биссектрисе угла  $B$  и проходит через точку касания окружности  $\omega$  с  $BC$ .

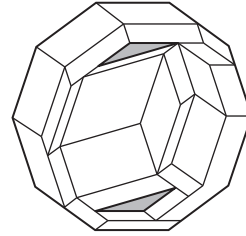
Д.Бродский

**M2744.** *Правильный 100-угольник разрезали на несколько параллелограммов и два треугольника. Докажите, что эти треугольники равны.*

Выберем произвольное направление и далее будем считать его горизонтальным. У каждого параллелограмма с горизонтальными сторонами покрасим верхнюю сторону в синий цвет, а нижнюю в красный. То же сделаем со всеми имеющимися горизонтальными сторонами треугольников (если треугольник снизу от стороны, красим ее в синий, иначе – в красный). А если у 100-угольника есть горизонтальные стороны, то их покрасим наоборот: верхнюю в красный цвет, а нижнюю в синий. Теперь каждый горизонтальный отрезок на рисунке покрашен один раз в синий цвет («снизу») и один раз в красный («сверху»), поэтому синего и красного цвета мы потратили поровну. Но ведь и в каждом параллелограмме, и в нашем 100-угольнике синего и красного цветов было использовано поровну. Поэтому если их стереть и оставить только два треугольника, то в них тоже синего и красного поровну. Другими словами, если у одного есть синяя горизон-

тальная сторона какой-то длины, то у другого есть красная горизонтальная сторона такой же длины! Аналогично докажем, что остальные стороны треугольников попарно равны. Следовательно, треугольники равны по трем сторонам. Задача решена.

*Замечание.* Разрезания из условия существуют, причем они могут быть устроены



достаточно несимметричным образом (например, не обязательно все стороны треугольников параллельны сторонам 100-угольника, треугольники не

обязательно образуют параллелограмм, примыкают к сторонам 100-угольника, симметричны относительно центра 100-угольника). На рисунке приведен один из многих возможных примеров разрезания 100-угольника.

А.Юран, Ю.Тихонов

**M2745.** *Даны две последовательности из букв  $A$  и  $B$ , в каждой из которых по 100 букв. За одну операцию разрешается вставить в какое-то место последовательно (возможно, в начало или в конец) одну или несколько одинаковых букв или убрать из последовательности одну или несколько подряд идущих одинаковых букв.*

*а) Докажите, что из первой последовательности можно получить вторую не более чем за 100 операций.*

*б\*) При каком наименьшем  $k$  из любой первой последовательности можно получить любую вторую не более чем за  $k$  операций?*

*а)* Сначала решим аналогичную задачу для последовательностей из двух букв, а именно докажем, что из одной последовательности можно получить другую не более чем за 2 операции. Если одна из последовательностей – это  $AA$ , а другая –  $BB$ , уберем все буквы первой последовательности, а затем добавим буквы второй последовательности. В противном случае в последовательностях есть одинаковые

буквы (возможно, стоящие на разных местах). Оставим в первой последовательности эту букву, а другую уберем. Затем добавим в нужное место букву, которой недостает для второй последовательности. Вернемся к первоначальной задаче. Разобьем каждую последовательность на 50 пар подряд идущих букв. За две операции каждую пару первой последовательности можно переделать в соответствующую пару второй последовательности.

б) **Ответ:** 51.

Можно понять, что, например, последовательность ААА...АА нельзя перевести в АБАБ...АБ менее чем за 51 операцию. Действительно, в первой последовательности ноль блоков из букв Б, а во второй их 50. При этом каждая операция увеличивает количество блоков не более чем на 1. А еще должна быть хотя бы одна операция, уменьшающая количество букв А, и такая операция не может увеличивать количество блоков из букв Б.

Теперь докажем, что всегда можно справиться за не более чем 51 операцию. Будем пользоваться тем, что если из второй последовательности можно получить первую, то можно и наоборот.

Пусть буква А встречается в первой и второй последовательностях соответственно  $a_1$  и  $a_2$  раз, а буква Б – соответственно  $b_1 = 100 - a_1$  и  $b_2 = 100 - a_2$  раз. Без ограничения общности будем считать, во-первых, что  $a_1 + a_2 \leq 100 \leq b_1 + b_2$  (иначе можно поменять местами буквы), а во-вторых, что  $a_1 \geq a_2$  (иначе можно поменять места последовательности). Процесс перевода первой последовательности во вторую выполним в два этапа:

- 1) удалим из первой последовательности  $a_1 - a_2$  букв А, чтобы их стало столько же, сколько во второй последовательности;
- 2) в полученной последовательности изменим количества букв Б, стоящих между буквами А, чтобы она совпала со второй. Второй этап можно выполнить за не более чем  $a_2 + 1$  операций. Действительно, на обе последовательности (полученную после первого этапа и требуемую) можно смотреть как на последовательности из  $a_2$  букв А, в промежутках между которыми встав-

лены ноль или более букв Б; всего промежутков ровно  $a_2 + 1$  (позиции до и после крайних букв А тоже считаются «промежутками»). Ясно, что мы можем за не более чем одну операцию привести количество букв Б, стоящих в каком-то одном промежутке, к требуемому. Значит, за не более чем  $a_2 + 1$  операций мы можем «исправить» все количества букв Б на те, что должны быть в требуемой последовательности.

Осталось доказать, что первый этап можно выполнить за  $50 - a_2$  операций.

Отметим, что  $50 - a_2 \geq 0$ , так как  $a_2 = \frac{1}{2}(a_2 + a_2) \leq \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \leq 50$ . При этом если  $a_2 = 50$ , то из  $a_2 \leq a_1$  и  $a_1 + a_2 \leq 100$  имеем и  $a_1 = 50$ . В этом случае первая стадия процесса тривиальна – ничего удалять не нужно. Далее разбираем случай  $50 - a_2 > 0$ .

Буквы Б в первой последовательности разделяют буквы А на  $b_1 + 1$  непрерывных блоков из нуля или более букв (считаем, что блок из нуля букв А образуется, если две буквы Б стоят рядом либо если буква Б стоит с краю последовательности). Достаточно доказать, что можно выбрать не более чем  $50 - a_2$  блоков так, чтобы суммарно в них было не менее  $a_1 - a_2$  букв А; в этом случае мы за не более чем  $50 - a_2$  операций можем произвольно уменьшить или удалить эти блоки и добиться требуемого количества букв А. Отметим, что если  $50 - a_2 \geq b_1 + 1$ , то можно просто выбрать все блоки, и в них окажется  $a_1 \geq a_1 - a_2$  букв А; далее разбираем случай  $50 - a_2 < b_1 + 1$ .

Предположим противное: даже если выбрать  $50 - a_2$  наибольших (по количеству букв) блоков, в них суммарно окажется не более  $a_1 - a_2 - 1$  букв А. Заметим, что хотя бы один из выбранных блоков содержит не более одной буквы А по принципу Дирихле, так как

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 - 1 < 2(50 - a_2) &\Leftrightarrow a_1 + a_2 < 101 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a_1 + a_2 \leq 100. \end{aligned}$$

Так как мы выбрали наибольшие блоки, то остальные  $(b_1 + 1) - (50 - a_2)$  блоков тоже содержат не более чем по одной букве А; суммарно в первой последовательности оказывается не более

$$(a_1 - a_2 - 1) + ((b_1 + 1) - (50 - a_2)) = \\ = a_1 + b_1 - 50 = 50$$

букв А. Но мы знаем, что их  $a_1$ , откуда  $a_1 \leq 50$ .

В этом случае  $a_1 - a_2 - 1 < 50 - a_2$ ; снова применяя принцип Дирихле, получаем, что один из выбранных блоков содержит ноль букв А. Тогда все остальные блоки тоже содержат ноль букв А. Следовательно, общее количество букв А в первой последовательности не превосходит  $a_1 - a_2 - 1$ , но мы знаем, что их ровно  $a_1$ , противоречие.

Ю.Тихонов

**Ф2749.<sup>1</sup>** Пловец трижды переплывает реку. Движение пловца прямолинейное.

Скорость пловца в подвижной системе отсчета, связанной с водой, во всех заплывах одинакова по модулю. В двух первых заплывах (рис. 1) А – точка старта, В – точка финиша ( $v$  – неизвестная скорость течения реки). Ширина реки  $AC = d = 70$  м, снос, т.е. расстояние, на которое пловец смещается вдоль реки к моменту достижения противоположного берега,  $CB = L = 240$  м. Продолжительность первого заплыва  $T_1 = 192$  с, продолжительность второго заплыва  $T_2 = 417$  с.

1) Найдите скорости  $v_1$  и  $v_2$  пловца в лабораторной системе отсчета в первом и втором заплывах.

2) Найдите скорость  $u$  пловца в подвижной системе отсчета, связанной с водой. В третьем заплыве пловец стартует из точки А и движется так, что снос минимальный.

3) Найдите продолжительность  $T_3$  третьего заплыва.

<sup>1</sup> Автор решений задач Ф2749–Ф2752 – В.Плис.

Расстояние  $AB = \sqrt{d^2 + L^2}$ . В лабораторной системе отсчета скорости пловца в первом и втором заплывах равны

$$v_1 = \frac{\sqrt{d^2 + L^2}}{T_1} \approx 1,3 \text{ м/с},$$

$$v_2 = \frac{\sqrt{d^2 + L^2}}{T_2} \approx 0,6 \text{ м/с}.$$

Из треугольников скоростей (рис. 2)

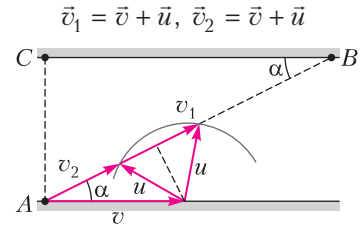


Рис. 2

находим скорость  $u$  пловца в подвижной системе отсчета, связанной с водой:

$$u = \sqrt{\left(\frac{v_1 - v_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{v_1 + v_2}{2} \frac{d}{L}\right)^2} \approx 0,45 \text{ м/с}$$

и скорость течения реки:

$$v = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \frac{\sqrt{d^2 + L^2}}{L} \approx 1 \text{ м/с}.$$

Геометрия движения при заплыве на минимальный снос представлена на рисунке 3. Треугольник скоростей прямоугольный, скорость пловца  $v_m = \sqrt{v^2 - u^2}$ . В этом заплыве А – точка старта, F – точка финиша,  $AF = \frac{d}{u/v}$ . Продолжительность третьего заплыва

$$T_3 = \frac{v}{u} \frac{d}{\sqrt{v^2 - u^2}} \approx 175 \text{ с}.$$

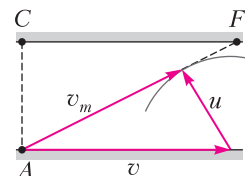
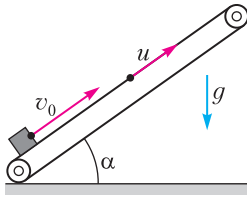


Рис. 3

**Ф2750.** Лента транспортера, предназначенного для подъема грузов, образует с горизонтальной плоскостью угол  $\alpha$  такой, что  $\sin \alpha = 0,8$  (см. рисунок). В пер-



вом опыте небольшую коробку ставят на покоящуюся ленту транспортера и сообщают коробке начальную скорость  $v_0 = 4$  м/с. Коэффициент трения скольжения коробки по ленте  $\mu = 1/3$ . Движение коробки прямолинейное.

1) За какое время  $T$  после старта коробка пройдет в первом опыте путь  $s = 1$  м? Во втором опыте коробку ставят на ленту транспортера, движущуюся со скоростью  $u = 2$  м/с, и сообщают коробке скорость  $v_0 = 4$  м/с.

2) На каком расстоянии  $L$  от точки старта скорость коробки во втором опыте уменьшится до  $u = 2$  м/с?

3) На какой высоте  $H$ , отсчитанной от точки старта, скорость коробки во втором опыте станет равной нулю?

Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Все кинематические величины измерены в лабораторной системе отсчета.

В первом опыте равнозамедленно движущаяся коробка через время

$$t_1 = \frac{v_0}{g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} = 0,4 \text{ с}$$

после старта остановится на покоящейся ленте на расстоянии

$$L = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} = 0,8 \text{ м}$$

от точки старта. По условию задачи  $mg \sin \alpha > \mu mg \cos \alpha$ , тогда после остановки коробка будет скользить вниз по ленте и за время

$$t_2 = \sqrt{\frac{2(s-L)}{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}} = \frac{\sqrt{15}}{15} \text{ с} \approx 0,26 \text{ с}$$

переместится на расстояние  $s - L$ . Искомое время движения

$$T = t_1 + t_2 = \frac{v_0}{g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} + \sqrt{\frac{2(s-L)}{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}} \approx 0,66 \text{ с.}$$

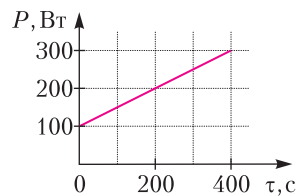
Во втором опыте в процессе торможения до момента остановки коробки на ленте ускорение коробки  $a_1 = g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$ , к этому моменту перемещение коробки

$$L = \frac{v_0^2 - u^2}{2g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} = 0,6 \text{ м.}$$

После этого сила трения сонаправлена с вектором скорости транспортера. С этого момента торможение коробки продолжается с ускорением  $a_2 = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$  и с начальной скоростью  $u$ . В лабораторной системе отсчета коробка остановится на высоте

$$H = \left( L + \frac{u^2}{2g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)} \right) \sin \alpha \approx 0,75 \text{ м.}$$

**Ф2751.** Воду нагревают на электроплитке. Начальная температура воды  $t_0 = 14$  °С, объем воды  $V = 2$  л. Сопротивление спирали электроплитки  $R = 20$  Ом, сила тока в спирали  $I = 5$  А. Зависимость мощности  $P$  тепловых потерь от времени  $\tau$  представлена на рисунке.



1) Найдите мощность  $P_H$  нагревателя.  
2) Через какое время  $\tau_1$  после начала нагревания температура воды станет равной  $t_1 = 25$  °С?

Плотность воды  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, удельная теплоемкость воды  $c = 4200$  Дж/(кг · °С).

Мощность тепловыделения в спирали нагревателя

$$P_H = I^2 R = 500 \text{ Вт.}$$



Из рисунка следует, что мощность тепловых потерь растет со временем по закону

$$P(t) = 100 + \frac{300 - 100}{400} t \text{ (Вт)} = \\ = 100 + 0,5t \text{ (Вт)}.$$

За любой промежуток времени от  $t$  до  $t + \Delta t$  в окружающую среду уходит количество теплоты  $\Delta Q = P\Delta t$ . Тогда за время от 0 до  $t$  в окружающую среду уходит количество теплоты, численно равное площади под графиком зависимости  $P(t)$  за время от 0 до  $t$ :

$$Q(\tau) = \frac{100 + 100 + 0,5\tau}{2} \tau = (100 + 0,25\tau)\tau.$$

Закон сохранения энергии в данных тепловых процессах принимает вид

$$I^2 R \tau_1 = \rho V c (t_1 - t_0) + (100 + 0,25\tau_1)\tau_1.$$

После подстановки численных значений физических величин приходим к квадратному уравнению

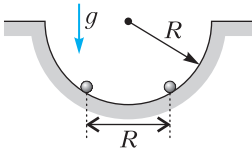
$$\tau_1^2 - 1600\tau_1 + 369600 = 0,$$

один из корней которого

$$\tau_1 = (8,0 - \sqrt{27,04}) \cdot 10^2 \text{ с} = \\ = (8,0 - 5,2) \cdot 10^2 \text{ с} = 280 \text{ с}$$

является ответом на вопрос задачи.

**Ф2752.** В гладкой горизонтальной плоскости сделана полусферическая лунка радиусом  $R$ , в которой на одном горизонтальном уровне удерживаются два заряженных шарика (см. рисунок). Масса



каждого шарика  $m$ , расстояние между шариками  $R$ . Шарики одновременно отпускают. Отсчитанная от края лунки максимальная высота, на которую поднимается в полете каждый шарик, равна  $R$ . Шарики отрываются от гладких стенок лунки у ее краев.

1) С какой скоростью  $v$  движется каждый шарик за мгновение до отрыва от края лунки?

2) Найдите заряд  $Q$  каждого шарика.

3) Найдите наибольшую скорость  $u$ , с которой растет расстояние между шариками после вылета из лунки.

Соударения шариков с горизонтальной плоскостью абсолютно упругие. Ускорение свободного падения  $g$ . Коэффициент пропорциональности в законе Кулона  $k$ .

В полете максимальная высота подъема шарика над точкой отрыва  $R = \frac{v^2}{2g}$ , отсюда

$$v = \sqrt{2gR}.$$

До отрыва в процессе скольжения потерь энергии нет, работа сил нормальной реакции нулевая, энергия системы сохраняется:

$$k \frac{Q^2}{R} = k \frac{Q^2}{2R} + 2 \frac{m}{2} (v^2 + \sqrt{3}gR).$$

Отсюда, с учетом равенства  $\frac{mv^2}{2} = mgR$ , находим заряд каждого шарика:

$$Q = \pm R \sqrt{2(2 + \sqrt{3}) \frac{mg}{k}} \approx \pm 2,73 R \sqrt{\frac{mg}{k}}.$$

На больших расстояниях в моменты соударения шариков с горизонтальной плоскостью закон сохранения энергии принимает вид

$$k \frac{Q^2}{2R} = 2 \frac{m}{2} v_1^2,$$

где  $v_1 = \sqrt{(2 + \sqrt{3})gR}$  — горизонтальная составляющая скорости каждого шарика в рассматриваемые моменты. Расстояние между шариками на больших расстояниях растет со скоростью

$$u = 2v_1 = 2\sqrt{(2 + \sqrt{3})gR} \approx 3,9\sqrt{gR}.$$

## Задачи

1. Найдутся ли семь различных правильных несократимых дробей со знаменателями от 2 до 6 и с суммой 4?  
*А.Шаповалов*



2. Ваня сложил куб  $3 \times 3 \times 3$  из красных и синих брусков размером  $1 \times 1 \times 3$ . Затем он начал рисовать то, что у него получилось. Когда пришла Таня, Ваня успел раскрасить лишь 8 из 27 клеток на видимой поверхности нарисованного куба. Посмотрев на рисунок, Таня сказала, что не знает цвет лишь одной из еще не раскрашенных клеток. Ваня ответил, что эта клетка — красная. Завершите Ванин рисунок (отметьте буквой «С» синие клетки, буквой «К»



Задачи 1, 3, 4 предлагались на Московской устной олимпиаде, задача 2 — на Математическом празднике.

красные, знаком «?» клетку, цвет которой Таня не могла восстановить).

*М.Евдокимов, Т.Казицына*

3. Внутри выпуклого многоугольника нашлась точка, которая от середины каждой стороны, кроме одной, удалена на половину этой стороны.



Обязательно ли это верно и для оставшейся стороны?

*А.Пешнин*

4. Ученики писали олимпиаду в двух залах. Ни в одном из залов не было трех тезок. У 100 учеников было двое тезок в другом зале. У 144 учеников было хотя бы по одному тезке в каждом зале. У скольких учеников было ровно по одному тезке в каждом зале? (Напомним, что тезками считаются люди с одинаковыми именами.)

*А.Шаповалов*



# Любимый город в синей дымке тает...

А. СТАСЕНКО

**А** ПОЧЕМУ, СОБСТВЕННО ГОВОРЯ, дымка должна быть *синей*? – подумал Любознательный Отличник. И тут ему вспомнилось былое.

Римские и китайские хроники сообщают о *красном* небе, наблюдавшемся еще в 186 году, как оказалось, после извержения вулкана в Новой Зеландии – в другом полушарии!

Не так уж давно, в 1950 году на большей территории Европы солнце и луна казались *голубыми*: восточные ветры дули из Канады, где горели леса, – тоже в другом полушарии!

А между этими событиями Александр Сергеевич Пушкин сочинил прекрасные строки:

Ты видел деву на скале  
В одежде *белой* над волнами,  
Когда, бушуя в бурной мгле,  
Играло море с берегами,  
Когда луч молний озарял  
Ее всечасно блеском *алым*...

Естественно, что дева находилась в облаке морских брызг. Но почему белый свет молний (еще какой белый, блее солнечного), отразившись от белой одежды, становился красным? И нет ли тут чего-то общего с извержением новозеландского вулкана, канадскими пожарами и синими далями?

Конечно есть. Все дело в микрокаплях, оказавшихся в атмосфере в результате нестандартных событий, – в частицах, или в хаосе сгустков молекул, которые рассеивают энергию падающей на них электромагнитной (световой) волны.

Для начала вспомним волну другой физической природы. Что если звуковая волна, распространяющаяся в атмосфере, встретит струну гитары или рояля? Струна может

задрожать и излучить звук той же длины волны или частоты, что и падающая волна. Ярче всех отклик струны проявится в том случае, если половина длины волны падающего излучения укладывается целое число раз на длине струны  $l$ :

$$\frac{l}{\lambda/2} = m.$$

Проще говоря, струна особенно охотно отзовется на те частоты падающего излучения, которые она способна излучать. Как тут не привлечь понятие резонанса! Можно еще вспомнить известный опыт с двумя одинаковыми камертонами – любой из них отзывается на звучание другого.

Похожее происходит и при падении электромагнитной волны на шарик радиусом  $a$ . И в этом случае важную роль должно играть отношение характерных линейных размеров, а именно  $2\pi \frac{a}{\lambda}$ , называемое дифракционным параметром (умножение на  $2\pi$  позволяет выразить это число в радианах).

Чтобы рассмотреть взаимодействие электромагнитной волны с шариком, требуется решить систему уравнений Джеймса Клерка Максвелла (1831–1879) вне и внутри шарика и удовлетворить условиям на сферической границе для нормальной и тангенциальной компонент электрического и магнитного полей. Эту задачу решил в 1908 году Густав Адольф Феодор Вильгельм Людвиг Ми (1868–1957). Конечно, для этого он использовал не синусы и косинусы, часто применяемые при описании колебаний и волн, а специальные шаровые функции – и это не удивительно, поскольку речь идет о сферической частице. Удивительно то, что математика позволила совершить чудо – представить плоскую падающую волну тоже в виде шаровых функций! Типичный результат пространственного распределения рассеянной энергии показан на рисунке 1. Любознательный читатель может самостоятельно оценить значение  $m$  для обоих приведенных примеров (красная и синяя кривые), подставив в приведенную выше формулу вместо длины струны диаметр шарика.

Если проинтегрировать эту картину по полному телесному углу  $4\pi$ , получится так называемый коэффициент рассеяния  $Q_s$  – отношение суммарного потока энергии во

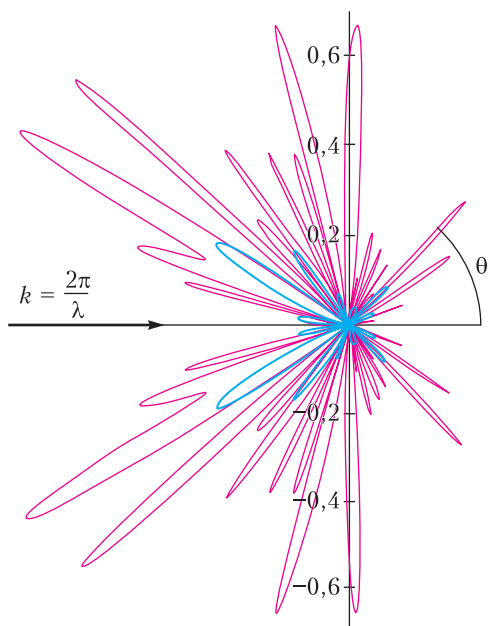


Рис. 1. Иллюстрация рассеяния электромагнитного излучения каплей воды для двух значений дифракционного параметра;  $k$  – волновое число

всех направлениях к энергии, падающей на диаметрально сечение шара. Эта величина в функции дифракционного параметра представлена на рисунке 2. Видно, что в пределе крупных частиц ( $a \gg \lambda$ ) коэффициент рассеяния стремится к двум. Но самое интересное здесь – наличие «резонансных» макси-

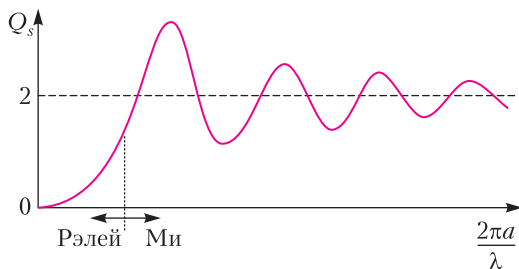


Рис. 2. Коэффициент рассеяния электромагнитного излучения на каплях воды; область мелких каплей – рэлеевское рассеяние

мумов для «избранных» длин волн. Соседние минимумы свидетельствуют о меньшем желании частицы рассеивать падающее излучение соответствующей длины волны.

Теперь ясно, что в приведенных поэтических строках размеры капель тумана, порожденных штормом, таковы, что до наблюдателя доходят преимущественно красные тона из непрерывного белого света молний. Естественно, чем большее расстояние пройдет свет в рассеивающей сфере, тем сильнее эффект. Вспомним: когда Солнце над головой, небо голубое, а на закате оно красное – различны длины пути в атмосфере.

Итак, стихотворение Пушкина напоминает, о чем должен думать Любопытный Отличник, наблюдая деву на скале в тумане морских брызг. Он должен думать о Физике колебаний и волн!

## ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

# Диаграмма состояния

**В. БЕЛОНУЧКИН**

Как известно, любое вещество в зависимости от внешних условий может находиться в твердом, жидком или газообразном состоянии. Если давление мало, а температура

велика, вещество обычно существует в виде газа. При низкой температуре и высоком давлении все вещества превращаются в твердые тела. При каких-то промежуточных значениях параметров существует жидкость. Схематически это изображено на рисунке 1. Осталось провести границы между областями различных состояний – и мы получим так называемую диаграмму состояния вещества в  $p$ – $T$  координатах. Припомним несколько известных фактов, которые помогут нам в этом деле.

1) Давление насыщенных паров растет с ростом температуры; соответственно, температура кипения повышается с ростом давле-



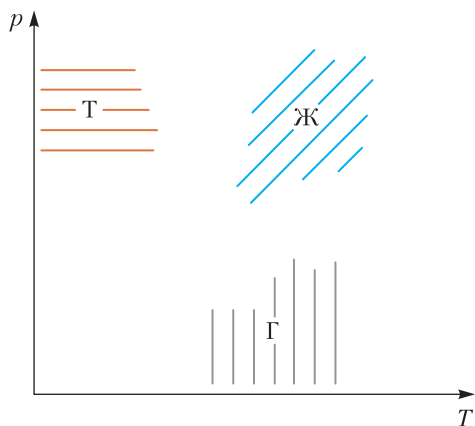


Рис. 1

ния. Значит, граница жидкость – газ (Ж–Г) идет слева – снизу вправо–наверх.

2) Температура плавления слабо зависит от давления, поэтому граница твердое состояние – жидкость (Т–Ж) идет почти вертикально.

3) Существует особая точка – критическая ( $T_{кр}, p_{кр}$ ). При приближении к ней по границе Ж–Г свойства жидкости и газа (в первую очередь – плотности) отличаются все меньше и меньше; в критической точке отличия исчезают. Граница Ж–Г в этой точке кончается.

4) Для всех веществ (исключение – гелий) имеется тройная точка – такая совокупность параметров ( $T_{тр}, p_{тр}$ ), при которой сосуществуют все три фазы (жидкая, твердая и газообразная). Если  $T < T_{тр}$ ,  $p < p_{тр}$ , то жидкое состояние невозможно, возможны только твердое и газообразное состояния. Следовательно, существует граница твердое состояние – газ (Т–Г). А так как при низких температурах, далеких от критической ( $T \ll T_{кр}$ ), различие между жидким и твердым состояниями гораздо меньше, чем между ними и газом, поведение границы Т–Г похоже на поведение границы Ж–Г.

Итак, вид диаграммы состояния должен быть примерно таким, как на рисунке 2. Обратите внимание: граница Т–Ж проведена в трех вариантах. Обычный вариант – 1 – температура плавления растет с ростом давления. Но для некоторых веществ, например висмута или отдельных сортов чугуна,  $T_{пл}$  с ростом давления падает – вариант 2. Для воды  $T_{пл}$  падает до давлений порядка  $2 \cdot 10^8$  Па

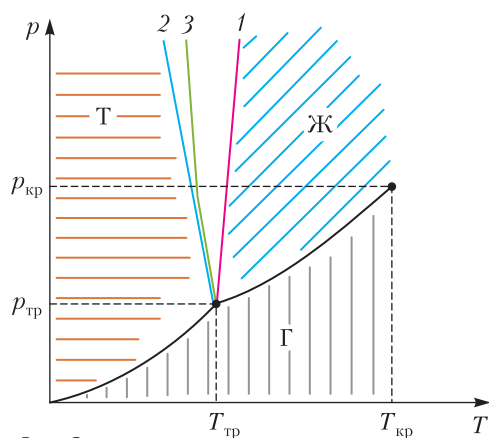


Рис. 2

(2000 атм), а затем начинает расти – вариант 3.

Качественно зависимость температуры фазового перехода (так называют переход вещества из одного состояния – твердого жидкого или газообразного – в другое) от давления можно понять, опираясь на один из наиболее общих законов природы – принцип Ле Шателье–Брауна. Несколько упрощенно его можно сформулировать следующим образом:

*Всякое внешнее воздействие вызывает в системе изменения, уменьшающие эффект этого воздействия.*

Так, если насыщенные пары находятся в равновесии с жидкостью, то при уменьшении объема, занимаемого системой, давление паров начнет повышаться. Плотность жидкости больше плотности паров. Если часть паров сконденсируется, плотность, а значит и давление остающихся паров, уменьшится. Эффект внешнего воздействия частично (а если температура поддерживается постоянной, то и полностью) скомпенсируется. Следовательно, немедленно начнется этот компенсирующий процесс – конденсация паров. Чтобы воспрепятствовать конденсации, т.е. чтобы все-таки повысить давление паров, очевидно, надо повысить температуру системы.

Таким образом, опираясь (кроме принципа Ле Шателье–Брауна) только на тот факт, что плотность жидкости больше плотности пара, мы пришли к выводу, что более высокому давлению насыщенных паров отвечает более высокая температура.



Чаще всего нас интересует переход жидкость – газ, им мы в основном и будем заниматься.

Прежде всего обсудим некоторые особенности поведения насыщенного пара. Заметим, в частности, что плотность и давление (иногда несколько старомодно называемое упругостью) насыщенных паров не связаны прямой пропорциональностью. Вот конкретная задача.

**Задача 1.** *Приготовление пищи в кастрюле-скороварке идет при температуре  $t_1 = 120^\circ\text{C}$ . При такой температуре давление насыщенных водяных паров  $p_1 = 2$  атм. Во сколько раз плотность пара при этом выше, чем над поверхностью кипящей воды в открытой кастрюле?*

В открытой кастрюле вода кипит под давлением  $p_0 = 1$  атм при температуре  $t_0 = 100^\circ\text{C}$ . Из уравнения Менделеева–Клапейрона  $pV = \frac{m}{M}RT$  получим выражение для плотности:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{Mp}{RT}.$$

Для отношения плотностей имеем

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{p_1 T_0}{p_0 T_1} = \frac{2 \cdot 373}{1 \cdot 393} \approx 1,9.$$

Результат понятен: давление должно подняться в 2 раза, но немного выросла температура, значит (это ясно и из формулы  $p = nkT$ ), плотность увеличилась меньше, чем вдвое.

Диаграмму состояния мы строили для случая, когда система состоит только из того вещества, состояние которого мы анализируем. Как влияет на состояние наличие посторонних веществ? Чтобы разобраться в этом, решим следующую задачу.

**Задача 2.** *В сосуд объемом  $V = 22,4$  литра при нормальном давлении воздуха и температуре  $t_0 = 0^\circ\text{C}$  налили 18 г воды. Затем сосуд закрыли герметичной крышкой и нагрели до температуры  $t_1 = 100^\circ\text{C}$ . Определите давление в сосуде.*

К сожалению, нередко можно услышать от школьников два разных, но одинаково неправильных ответа.

1) В сосуде давление воздуха  $p_0 = 1$  атм, да при нагревании до температуры  $T_1$  оно возрастает до величины  $p_1 = p_0 \frac{T_1}{T_0} = 1 \text{ атм} \cdot \frac{373}{273} \approx$

$\approx 1,3$  атм. Это больше давления насыщенных паров воды при  $100^\circ\text{C}$ , значит, вода испаряться не будет и общее давление в сосуде будет равно  $p = p_1 = 1,3$  атм.

2) Температура  $100^\circ\text{C}$  – это температура кипения воды. Значит, вся вода в сосуде испарится; давление образовавшегося пара (в количестве 1 моль – ведь воды было 18 г) нетрудно рассчитать: при  $T_0 = 273$  К моль газа в объеме 22,4 л создает давление  $p_0 = 1$  атм, а при  $T_1 = 373$  К давление пара будет  $p_{п1} \approx 1,3$  атм; давление воздуха в сосуде возрастет при нагревании до  $p_{в1} \approx 1,3$  атм, общее давление станет равным  $p_1 = p_{п1} + p_{в1} \approx 2,6$  атм.

Авторы первого ответа забывают, что жидкость должна находиться в равновесии со своим паром, это означает, что при  $t_1 = 100^\circ\text{C}$  вода будет испаряться, пока давление ее паров не достигнет 1 атм.

Неправильен, понятно, и второй ответ, так как давление паров воды при  $100^\circ\text{C}$  не может подняться выше 1 атм.

Итак, в сосуде давление воздуха будет  $p_{в1} \approx 1,3$  атм, давление водяных паров –  $p_{п1} = 1$  атм (мы убедились, что масса воды достаточна для создания такого давления), а суммарное давление в сосуде будет всего  $p_1 = p_{п1} + p_{в1} \approx 2,3$  атм.

Кстати, кипеть вода при этом не будет. Ведь кипение – это процесс парообразования не только на поверхности жидкости, но и во всем ее объеме. Если температура такова, что соответствующее ей давление насыщенных паров равно суммарному внешнему давлению, то образующиеся внутри жидкости пузырьки пара не схлопываются внешним давлением; дальнейшее испарение внутрь пузырьков увеличивает их объем, пузырьки всплывают, на поверхности лопаются – жидкость кипит.

Подчеркнем еще раз: испарение происходит всегда, когда давление паров над поверхностью жидкости меньше давления насыщенных паров при данной температуре; кипение происходит лишь в том случае, когда суммарное давление (и внутри жидкости) не превосходит давления насыщенных паров при данной температуре.

Между прочим, на Земле полно воды; а относительная влажность, равная 100%, т.е. насыщение воздуха парами воды, встречается редко. Почему при избытке воды не вся

атмосфера насыщена водяными парами? Может быть, достаточное количество воды просто не успело испариться? Давайте оценим скорость испарения воды на примере еще одной задачи.

**Задача 3.** *Оцените количество воды, испаряющейся при комнатной температуре с единицы поверхности в открытом стакане (а также в реке, в ручейке, в океане). Давление насыщенных паров воды при температуре  $T = 300\text{ K}$  равно  $p_n = 3,5\text{ кПа}$ .*

Когда вода находится в равновесии со своим насыщенным паром, то она, строго говоря, испаряется. Более того, скорость испарения не зависит от того, есть ли над поверхностью воды пар. Она определяется только тем, какое количество молекул воды имеет скорость, достаточную, чтобы покинуть жидкость (и подходящее направление скорости). Просто точно такое же количество молекул пара попадает в жидкость – скорость испарения равна скорости конденсации, существует *динамическое* равновесие. А подсчитать количество конденсирующегося пара не так уж трудно.

Число молекул пара, попадающих за единицу времени (1 с) на единичную площадку ( $1\text{ м}^2$ ) поверхности воды, равно

$$z = \frac{n|v_x|}{2} \approx \frac{p_n}{2kT} \sqrt{\frac{RT}{M}} \left( \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1} \right).$$

Масса же пара, конденсирующегося на единице площади поверхности за единицу времени, равна

$$m = z \frac{M}{N_A} = \frac{p_n}{2} \sqrt{\frac{M}{RT}} \left( \text{кг} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1} \right)$$

( $N_A$  – число Авогадро).

Как мы договорились, такая масса воды испаряется независимо от влажности воздуха, т.е. независимо от содержания водяных паров в воздухе (что характеризуется значением  $n$ ). Если восполнения испаряющейся воды не происходит (влажность очень маленькая), то именно такое количество воды испарится, уйдет с единицы поверхности за секунду. Рассчитаем понижение уровня воды за секунду:

$$h = \frac{p_n}{2\rho} \sqrt{\frac{M}{RT}} = \frac{3,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3} \sqrt{\frac{18 \cdot 10^{-3}}{8,3 \cdot 300}} \text{ м/с} \approx \\ \approx 4,7 \cdot 10^{-3} \text{ м/с} = 4,7 \text{ мм/с}.$$

На первый взгляд ничего страшного в этом результате нет. Но вспомним, что средняя глубина океанов около 4 км, значит, время полного испарения порядка  $10^6$  с, а это многим более 10 суток! В чем же дело? Почему океаны существуют?

Есть несколько обстоятельств, мешающих их исчезновению. Начнем с менее важных. Во-первых, относительная влажность не равна нулю. Но если даже мы примем ее равной 90%, это лишь на порядок понизит скорость испарения. Во-вторых, не все молекулы пара, ударяющиеся о поверхность воды, остаются в жидкости – некоторые отскакивают, отражаются. Следовательно, мы завысили скорость конденсации, а значит, и равную ей скорость испарения. Пусть «прилипает» десятая часть молекул (число, близкое к реальному, но уже заниженное). Накинем еще порядок. Мы продлили жизнь океанов до 100 дней, а можно продлить до 1001 дня. Для океана с его миллиардолетней историей три года – миг.

Но вернемся к нашему стакану. Даже с введенной нами поправкой в 100 раз вода из полного стакана должна испариться полностью меньше чем за полчаса. Цифра явно нереальная. В действительности над поверхностью воды быстро образуется слой насыщенных паров, точнее – слой воздуха с относительной влажностью 100%. И только до образования этого слоя уровень воды понижается со скоростью 4,7 мм/с. Как только слой образовался, скорость конденсации становится почти равной скорости испарения, и дальнейшее понижение уровня воды определяется весьма медленным процессом диффузии паров от поверхности жидкости в окружающее пространство.

Впрочем, в судьбе океанов главную роль играют не эти факторы, замедляющие испарение; океанам хватило бы времени для полного испарения. Дело в том, что мы рассматривали равновесные или почти равновесные (квазиравновесные) системы. А земная атмосфера – система существенно неравновесная. Теплый влажный воздух поднимается в холодные слои атмосферы, там вода конденсируется, а на пути к поверхности Земли капли не успевают испариться. Океанские воды пополняются, круговорот воды в природе продолжается.

# Волшебные пятерки

**А. УСТИНОВ**

**В**ОЗЬМЕМ ЧИСЛО 5555, ПЕРЕЙДЕМ к обратному  $5555^{-1}$  и посчитаем синус полученного числа, предполагая, что это градусная мера некоторого малого угла:

$$\sin(5555^{-1})^\circ \approx \mathbf{3,141906844} \cdot 10^{-6}.$$

Удивительным образом оказывается, что первые значащие цифры результата совпадают с первыми цифрами числа  $\pi$  (совпадающие цифры выделены жирным).

Если начинать с числа, которое записывается бóльшим числом пятерок, то совпадающих цифр будет еще больше:

$$\sin(55555^{-1})^\circ \approx \mathbf{3,141624070} \cdot 10^{-7},$$

$$\sin(555555^{-1})^\circ \approx \mathbf{3,141595759} \cdot 10^{-8},$$

$$\sin(5555555^{-1})^\circ \approx \mathbf{3,141592968} \cdot 10^{-9}.$$

**Задача 1.** Объясните, почему при таких вычислениях появляется число  $\pi$ .

Если посмотреть, как устроена погрешность в выписанных выше формулах, то мы снова увидим цифры числа  $\pi$ :

$$\sin(5555^{-1})^\circ - \pi \cdot 10^{-6} \approx \mathbf{3,1419066793} \cdot 10^{-10},$$

$$\sin(55555^{-1})^\circ - \pi \cdot 10^{-7} \approx \mathbf{3,141624065} \cdot 10^{-12},$$

$$\sin(555555^{-1})^\circ - \pi \cdot 10^{-8} \approx \mathbf{3,141595795} \cdot 10^{-14},$$

$$\sin(5555555^{-1})^\circ - \pi \cdot 10^{-9} \approx \mathbf{3,141592968} \cdot 10^{-16}.$$

**Задача 2.** Объясните, почему число  $\pi$  появляется снова.

Возникает вопрос, что же будет происходить дальше, когда мы будем выписывать формулы вида

$$\sin(5555^{-1})^\circ - \pi \cdot 10^{-6} - \pi \cdot 10^{-10} \dots$$

**Задача 3.** Выясните, всегда ли в таких формулах результат начинается с цифр числа  $\pi$ .

## Решения задач

Чтобы понять природу этого фокуса, нужно перейти к углам, измеренным в радианах.

Например, угол в  $(5555^{-1})^\circ$  – это  $\frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{5555}$  радиан. Десятичное разложение дроби  $\frac{1}{180}$

имеет вид  $\frac{1}{180} = 0,00555555\dots = 0,00(5)$ , по-

этому  $\frac{1}{180} \cdot \frac{1}{5555} = 0,00(0001)$ . Для малых

значений аргумента  $\sin x$  приблизительно равен  $x$ . Значит, результат вычислений примерно равен  $\pi \cdot 0,00(0001)$ , что и объясняет появление числа  $\pi$  в первых двух задачах.

Чтобы решить третью задачу, надо знать более точную формулу для  $\sin x$  при малых значениях  $x$ , а именно,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

При более точных вычислениях становится заметен вклад слагаемого  $-\frac{x^3}{3!}$ . Например,

для числа 5555 мы вычисляем  $\sin(\pi k)$ , где  $k = 0,00(0001)$  и, начиная с некоторого места, необходимо учитывать уже и цифры числа  $\pi^3$ :

$$\begin{aligned} \sin(5555^{-1})^\circ - \pi \cdot 10^{-6} - \pi \cdot 10^{-10} - \pi \cdot 10^{-14} - \pi \cdot 10^{-18} \approx \\ \approx -\frac{\pi^3}{3!} \cdot 10^{-18}. \end{aligned}$$

# Заключительный этап Всероссийской олимпиады школьников по физике имени Дж.Максвелла 2023 года

## Теоретический тур

7 класс

### Задача 1. Периодическое движение

По кольцевой двухпутной железной дороге ездят без остановок два поезда (рис. 1).

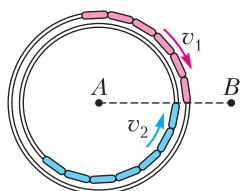


Рис. 1

Оба пути имеют длину  $L = 1$  км (отличиями в их длине можно пренебречь) и находятся на одном уровне. Первый поезд длиной  $l_1 = 300$  м движется со скоростью  $v_1 = 10$  м/с по часовой стрелке, второй поезд длиной  $l_2 = 320$  м движется со скоростью  $v_2 = 8$  м/с против часовой стрелки. В центре кольца стоит наблюдатель  $A$ . Наблюдатель  $B$  стоит за кругом, ограниченным железной дорогой, так, что передние края обоих поездов пересекают отрезок  $AB$  одновременно. Наблюдатели не видят друг друга, только когда между ними находится хотя бы один поезд.

1) За какое время  $\tau$  поезда проезжают мимо друг друга?

2) Чему равны периоды движения  $T_1$  и  $T_2$  первого и второго поезда соответственно?

3) Найдите период движения системы  $T$ , т.е. минимальное время, через которое повторится ситуация, изображенная на рисунке.

4) В течение какой части  $\alpha$  периода движения  $T$  наблюдатели видят друг друга?

*А.Заяц, А.Сеитов*

### Задача 2. Семь + один

У теоретика Бага было восемь одинаковых кубиков с длиной ребра  $2a$ : семь сделаны из материала плотностью  $\rho_x$  и один – из материала плотностью  $\rho_y$  ( $\rho_y < \rho_x$ ). Баг склеил из них большой куб с ребром  $4a$  и задал своему ученику задачу определить плотности всех

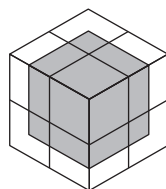


Рис. 2

кубиков с ребром  $3a$ , которые можно вырезать из склеенного куба так, чтобы они имели с ним одну общую вершину (пример вырезания такого кубика показан на рисунке 2 серым цветом). Ученик, решая задачу, получил несколько ответов, которые записал в виде таблицы:

$\rho_1, \text{г/см}^3$	$\rho_2, \text{г/см}^3$	$\rho_3, \text{г/см}^3$	$\rho_4, \text{г/см}^3$
2,40	2,50	2,65	2,60
$\rho_5, \text{г/см}^3$	$\rho_6, \text{г/см}^3$	$\rho_7, \text{г/см}^3$	$\rho_8, \text{г/см}^3$
2,50	2,60	2,50	2,60

Проверив таблицу, Баг сказал, что все значения в ней, кроме одного, посчитаны верно.

1) Определите, какое из значений посчитано неверно, и найдите это значение.

2) Определите плотности  $\rho_x$  и  $\rho_y$ .

*А.Евсеев*

### Задача 3. Сообщающиеся кубики

Два одинаковых открытых сосуда квадратного сечения со стороной  $2a$  с вертикальными стенками соединены в нижней части тонкой горизонтальной трубкой (рис. 3). На трубке установлен кран. Вначале кран зак-

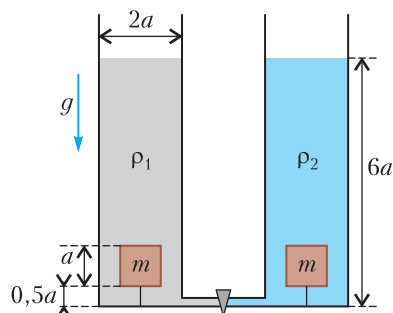


Рис. 3

рыт, левый сосуд заполнен до уровня  $6a$  жидкостью неизвестной плотности  $\rho_1$ , а правый – до такого же уровня жидкостью неизвестной плотности  $\rho_2$ . Ко дну каждого из сосудов прикреплены на легких нитях длиной  $0,5a$  одинаковые кубики с длиной ребра  $a$ , причем сила натяжения левой нити равна  $3T$ , а правой –  $T$ . Кран открывают, и система приходит в равновесие. При этом жидкости не смешиваются и из сосудов не вытекают. В состоянии равновесия сила натяжения правой нити становится равной  $2T$ . Определите плотности жидкостей  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ , а также массу кубика  $m$ , выразив их через известные величины  $g$ ,  $T$  и  $a$ .

*А.Евсеев*

#### Задача 4. Жук на стержне

На рисунке 4 изображена система, состоящая из двух однородных балок массами  $4m$  и  $6m$ , разделенных штрихами на равные части, легкого стержня длиной  $7l$ , подвешен-

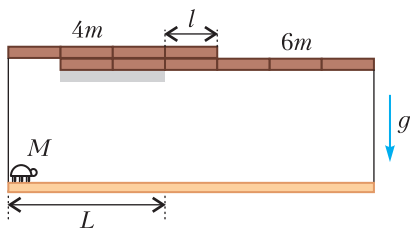


Рис. 4

ного к балкам на легких нитях, и небольшого жука, находящегося у левого края стержня. Система расположена на неподвижной горизонтальной опоре длиной  $2l$ . Нити вертикальны, балки и стержень горизонтальны.

1) При каких значениях массы  $M$  жука такое равновесие возможно?

2) Жук массой  $M = M_1$  начинает медленно переползать в направлении правого края стержня. На какое расстояние  $L$  жук удалится от левого края стержня в момент, когда система выйдет из положения равновесия? Определите максимально возможное значение этого расстояния  $L_{\max}$ . При каком отношении масс  $\alpha = M_1/m$  оно достигается?

*А.Куреев*

8 класс

#### Задача 1. Переменное сечение

Вблизи дна сосуда с водой прямоугольного сечения имеется плоская неподвижно закрепленная горизонтальная «полка», слева,

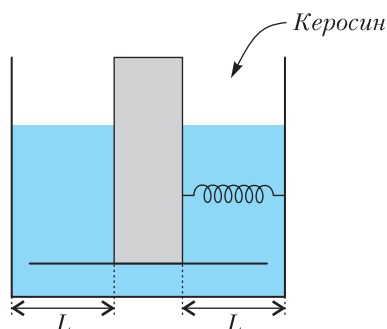


Рис. 5

справа и под которой есть свободное пространство для перетекания воды (рис. 5). На «полке» стоит тяжелый прямоугольный поршень, присоединенный легкой горизонтальной пружиной к правой стенке. В начальном положении поршень расположен на расстоянии  $L$  от обеих стенок, а пружина не растянута. Когда в пространство между правой стенкой и поршнем налили керосин массой  $m$ , поршень сдвинулся на  $L/3$  влево.

1) Какую массу  $m_1$  керосина надо было налить, чтобы поршень сдвинулся на  $L/2$  относительно своего начального положения?

2) На какое расстояние  $l$  сдвинулся бы поршень относительно начального положения, если бы масса налитого керосина была равна  $3m$ ?

Между поршнем и «полкой», а также между поршнем, передней и задней стенками сосуда жидкости не протекают. Керосин под «полку» и через верхний край поршня не перетекает, а жидкости из сосуда не выливаются. Стенки сосуда вертикальны. Трения в системе нет, объемом пружины пренебречь.

*А.Заяц*

#### Задача 2. Ромбическое равновесие

Четыре тонких однородных стержня постоянного сечения, имеющих разные массы  $m$ ,  $2m$ ,  $3m$  и  $4m$ , но равные длины, соединили шарнирно и получили конструкцию, представленную на рисунке 6. К нижней части конструкции подвесили груз массой  $5m$ . Двумя нитями соединили середины левых стержней

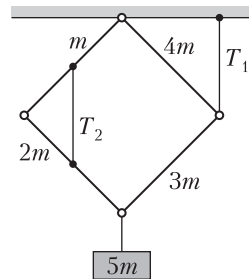


Рис. 6



между собой, а также правый угол конструкции с потолком. Конструкция находится в равновесии, нити вертикальны.

1) Определите силы натяжения  $T_1$  и  $T_2$  правой и левой нитей соответственно.

2) С какой силой  $F$  потолок действует на конструкцию в точке крепления верхнего шарнира?

Трение в системе отсутствует. Массой шарниров и нитей можно пренебречь.

*А.Евсеев*

**Задача 3. Оптимальная температура**

Экспериментатор Глюк соорудил в дачном домике для своих рыбок проточный аквариум. Для заполнения аквариума он может использовать восемь кранов, которые имеют номера от 1 до 8, а на определенном уровне в стенке аквариума оборудован слив лишней воды (рис. 7). Каждый открытый кран дает одинаковый объем воды в единицу времени,

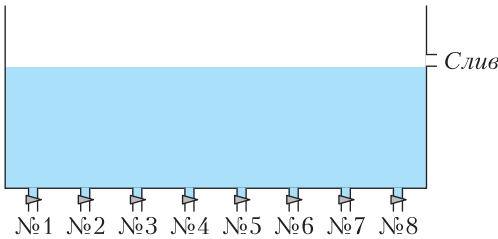


Рис. 7

причем вода из  $k$ -го крана имеет температуру  $T_k = k \cdot 5^\circ\text{C}$ . Оказалось, что если открыть только кран №2, то в аквариуме установится температура  $t_2 = 15^\circ\text{C}$ . Если открыть только кран №8, то установится температура  $t_8 = 35^\circ\text{C}$ .

1) Определите температуру  $t_0$  в дачном домике.

2) Какая температура  $t$  установится в аквариуме, если открыть сразу все краны?

3) Какие три крана нужно открыть при закрытых оставшихся, чтобы в установившемся режиме получить температуру воды, наиболее близкую к оптимальной  $t_{\text{оп}} = 29^\circ\text{C}$ ? Рассмотрите все возможные варианты. Ответ обоснуйте.

4) Как изменится ответ в п. 3, если температуру воздуха в домике понизить на  $\Delta t = 6^\circ\text{C}$ ?

Мощность теплоотдачи от воды в аквариуме в окружающую среду прямо пропорциональна разности температур воды и окружа-

ющей среды. Считайте, что вода в аквариуме быстро перемешивается, а отверстие слива достаточно широкое.

*А.Куреев*

**Задача 4. Измерение малых сопротивлений**

Экспериментатор Глюк исследовал проводник необычной формы – кусок нихромовой ленты постоянной толщины  $d$ , из которого вырезана фигура, изображенная на рисунке 8. Для этого он взял соединенные

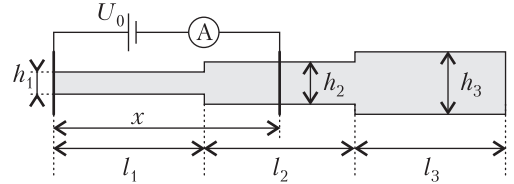


Рис. 8

последовательно амперметр и идеальную батарейку с напряжением  $U_0 = 1,5\text{ В}$ . Один контакт получившейся системы он подключил к левому краю фигуры, второй контакт – на расстоянии  $x$  от первого и стал снимать зависимость показаний амперметра  $I$  от  $x$ , занося результаты измерений в таблицу:

$x, \text{см}$	20	60	100	140	180	220	260
$I, \text{мА}$	818	455	315	241	204	182	167

$x, \text{см}$	300	340	380	420	460	500	
$I, \text{мА}$	150	138	130	124	119	114	

Со временем Глюк забыл все размеры фигуры, кроме  $h_3 = 8\text{ мм}$ . Определите значения  $l_1, l_2, l_3, h_1, h_2$  и  $d$ , если известно, что последнее измерение экспериментатор проводил, подключив второй контакт к правому краю фигуры ( $x_{\text{max}} = l_1 + l_2 + l_3$ ). Удельное сопротивление нихрома  $\rho = 1,1 \cdot 10^{-6}\text{ Ом} \cdot \text{м}$ . При решении задачи можно считать, что  $d \ll l_j, h_i \ll l_j$  (для любых  $i$  и  $j$ ). Погрешности значений искомых величин оценивать не требуется.

*Д.Рубцов*

Публикацию подготовил В.Слободянин

# Национальный исследовательский университет «МИЭТ»

Национальный исследовательский университет «МИЭТ» на протяжении многих лет проводит для старшеклассников олимпиады по математике, физике и информатике, которые пользуются большой популярностью среди школьников страны. С 2015 года в заочной (дистанционной) форме проводится олимпиада школьников «РИТМ МИЭТ». Ежегодно в 9 секциях олимпиады принимают участие более 2000 человек. В 2018 году университет организовал очную Физико-математическую олимпиаду МИЭТ, которая проходит в нескольких десятках городов России и стран СНГ.

Ниже приводятся задачи по физике, предлагавшиеся в этом году на олимпиаде «РИТМ МИЭТ» и на Физико-математической олимпиаде МИЭТ.

## Интернет-олимпиада «РИТМ МИЭТ»

### Заключительный этап

1. Точка движется вдоль оси  $x$  сначала равномерно, потом равноускоренно и затем до остановки равнозамедленно. На рисунке 1 приведен график зависимости проекции

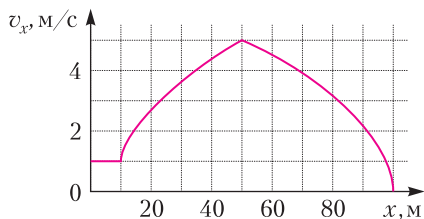


Рис. 1

$v_x$  скорости точки от ее координаты  $x$ . Определите отношение  $t_{\text{уск}}/t_{\text{зам}}$  времени равноускоренного движения точки к времени равнозамедленного движения.

2. Шайба, прикрепленная к вертикальной стене легкой недеформированной пружиной, покоится на горизонтальном столе (рис. 2). В некоторый момент к шайбе при-

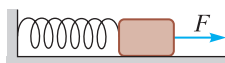


Рис. 2

кладывают постоянную силу  $F$ , направленную вдоль оси пружины. При какой величине этой силы шайба будет двигаться только в одном направлении? Сила трения скольжения, действующая на шайбу, равна  $f = 10$  Н.

3. Антон, Влад и Степан удерживают в горизонтальном положении однородный брус весом  $P = 600$  Н, прикладывая к нему направленные вертикально вверх силы. Антон и Степан держат брус за его концы, а Влад прикладывает силу в точке, расположенной в 3 раза ближе к Антону, чем к Степану (рис. 3). Определите максимально и мини-

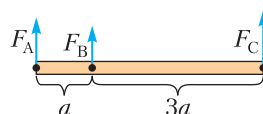


Рис. 3

мально возможные силы, действующие на брус со стороны Степана.

4. В вертикальном цилиндрическом сосуде высотой  $h$  под легким тонким поршнем находится идеальный газ. Сосуд над поршнем до самого верха заполнен жидкостью, а к поршню прикреплена легкая нить (рис. 4). В начальный момент поршень находится в равновесии на расстоянии  $5h/8$  от дна сосуда, при этом нить вертикальна и не натянута. За нить начинают тянуть, медленно поднимая поршень. Когда верхний конец  $A$  нити, смещаясь вверх, преодолел расстояние  $h/4$ , вся жидкость из сосуда вылилась. Определите температуру  $T$  газа, считая ее постоянной. Известна величина  $p_0 V_0 / (\nu R) = 320$  К, где  $V_0$  – объем всего сосуда,  $p_0$  – атмосферное давление,  $\nu$  – число молей газа,  $R$  – универсальная газовая постоянная.

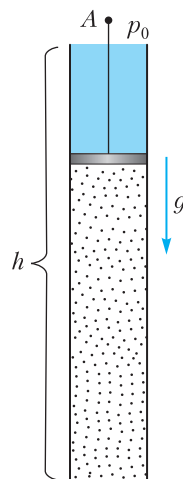


Рис. 4

5. Горизонтальный цилиндрический сосуд объемом  $V$  разделен поршнем, который может скользить без трения, на две части, содержащие по одному молю идеального одноатомного газа. Температура газа справа от поршня поддерживается постоянной, а газ слева от поршня медленно нагревают (рис. 5). Определите: а) приращение давле-

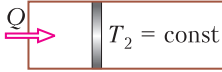


Рис. 5

ния газа при изменении его температуры в левой части сосуда на  $\Delta T_1$ ; б) теплоемкость газа в левой части сосуда в момент, когда поршень находится посередине сосуда. Универсальная газовая постоянная равна  $R$ .

6. Четыре положительно заряженные бусинки могут без трения скользить по тонкой горизонтальной нити с ограничителями на концах (рис. 6). В положении равновесия

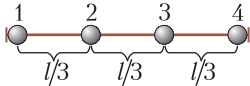


Рис. 6

расстояния между соседними бусинками одинаковые. Известен заряд  $q_1 = 16$  пКл одной из крайних бусинок. Определите максимально возможные заряды остальных бусинок.

7. В цепи, схема которой показана на рисунке 7, сопротивление резисторов  $R = 1000$  Ом, сопротивление амперметра пре-

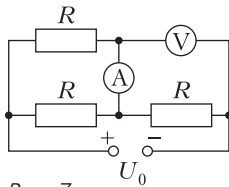


Рис. 7

небрежно мало, напряжение на клеммах источника  $U_0 = 12$  В, амперметр показывает ток  $I = 2$  мА. Определите показания вольтметра.

8. Неподвижный П-образный проводник и подвижная перемычка, находящаяся в электрическом контакте с ним, расположены в постоянном однородном магнитном поле. В контур включен источник ЭДС и резистор (рис. 8). При перемещении перемычки со скоростями  $v_1$  или  $v_2$  на одно и то же рассто-

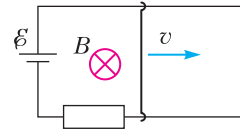


Рис. 8

яние в цепи выделяются одинаковые количества теплоты ( $v_1 \neq v_2$ ). С какой постоянной скоростью нужно перемещать перемычку, чтобы в цепи не выделялось тепло? Силами трения и тяжести пренебречь. Сопротивление проводящего контура считать постоянным. Самоиндукцией пренебречь.

### Физико-математическая олимпиада МИЭТ

10 класс

1. Скорость частицы, движущейся криволинейно с постоянным ускорением  $\vec{a}$ , сначала убывает, достигает минимальной величины  $v_{\min} = 10$  м/с, а через время  $\Delta t = 2$  с после этого становится равной  $2v_{\min}$ . Определите модуль вектора ускорения частицы.

2. Невесомый стержень  $AB$  может без трения вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной стержню и проходя-

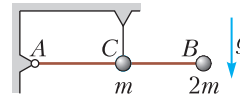


Рис. 9

щей через его конец  $A$  (рис. 9). Небольшой груз массой  $m$  закреплен в средней точке  $C$  стержня, а груз массой  $2m$  – на его конце  $B$ . Стержень удерживают в горизонтальном положении с помощью вертикальной нити, прикрепленной к грузу массой  $m$ . Определите: а) силу натяжения нити; б) ускорение, с которым начнет двигаться груз массой  $m$  сразу после пережигания нити.

3. Камень брошен с начальной скоростью  $v_0 = 10$  м/с под некоторым углом  $\alpha$  к горизонту. Определите: а) высоту, на которую поднимется камень в момент времени, когда кинетическая энергия камня станет равной его потенциальной энергии; б) углы  $\alpha$ , при которых возможно такое соотношение энергий. Потенциальную энергию камня в точке броска примите равной нулю. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

4. При увеличении объема  $V$  одного моля идеального газа от  $V_0 = 8,3$  л до  $2V_0$  давление газа  $p$  изменяется по закону  $p = p_0(5 - 2(V/V_0))$ , где  $p_0 = 200$  кПа. Определите: а) температуру газа при  $V = 2V_0$ ; б) отношение максимальной температуры газа к минимальной в данном процессе. Универсальная газовая постоянная  $R = 8,3$  Дж/(К · моль).

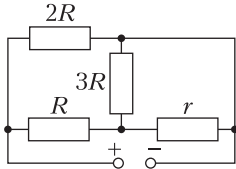


Рис. 10

5. В цепи, схема которой показана на рисунке 10, величина сопротивления  $R = 20$  Ом, а через резисторы  $R$  и  $2R$  протекают одинаковые токи  $I = 1$  А. Определите: а) напряжение  $U_3$  на резисторе  $3R$ ; б) сопротивление резистора  $r$ .

11 класс

1. Скорость частицы, движущейся криволинейно с постоянным ускорением  $\vec{a}$ , сначала убывает, достигает минимальной величины  $v_{\min}$ , а через время  $\Delta t = 2$  с после этого становится равной  $3v_{\min}$ . Определите скорость  $v_{\min}$ , если модуль вектора ускорения частицы  $a = 4,2$  м/с<sup>2</sup>.

2. Камень брошен с начальной скоростью  $v_0 = 10$  м/с под некоторым углом  $\alpha$  к горизонту. Определите: а) скорость камня  $v_1$  в момент времени, когда кинетическая энергия камня в 3 раза больше его потенциальной энергии; б) углы  $\alpha$ , при которых возможно такое соотношение энергий. Потенциальную энергию камня в точке броска примите равной нулю. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3. При увеличении объема  $V$  одного моля идеального газа от  $V_0 = 8,3$  л до  $2V_0$  его давление изменяется по закону  $p = p_0\left(3 - \frac{V}{V_0}\right)$ , где  $p_0 = 150$  кПа. Определите: а) температуру газа при  $V = V_0$ ; б) отношение максимальной температуры газа к минимальной в данном процессе. Универсальная газовая постоянная  $R = 8,3$  Дж/(К · моль).

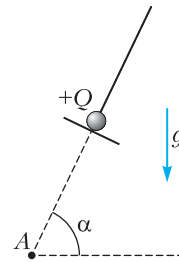


Рис. 11

4. Положительно заряженная бусинка массой  $m = 0,1$  г может без трения скользить по тонкому стержню, составляющему угол  $\alpha = 60^\circ$  с горизонтом. В начальный момент бусинка находится у ограничителя на нижнем конце стержня и создает в точке  $A$  электрическое поле напряженностью  $E = 10^5$  В/м (рис. 11). Найдите силу Кулона, которая будет действовать на точечный положительный заряд  $q$ , если его поместить в точку  $A$  и дождаться установления равновесия. Рассмотрите случаи, когда: а)  $q = 0,5 \cdot 10^{-8}$  Кл; б)  $q = 1 \cdot 10^{-8}$  Кл. Влиянием стержня на электрическое поле пренебречь. Точка  $A$  расположена на оси стержня. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

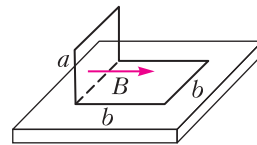


Рис. 12

5. Проволочная прямоугольная рамка изогнута под прямым углом и расположена на горизонтальном столе (рис. 12). В момент  $t = 0$  включают однородное магнитное поле, вектор индукции которого направлен перпендикулярно вертикальной грани рамки, а его модуль равномерно увеличивают со временем:  $B = \beta t$ , где  $\beta = 2$  Тл/с. Определите: а) силу тока в рамке; б) время  $\Delta t$ , в течение которого рамка остается в покое после начала включения магнитного поля. Сопротивление и масса единицы длины проволоки равны  $r_1 = 0,1$  Ом/м и  $m_1 = 1$  г/м, стороны рамки  $a = b/2 = 1$  см. Магнитным полем, создаваемым током в рамке, пренебречь.

Публикацию подготовили Г.Гайдук, И.Горбатьев

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## «Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №6)

1. 5 выдр, 7 тюленей, 6 морских котиков.

Раз никто из детей не ошибся, то из выдр, морских котиков и тюленей кого-то было ровно 5, кого-то – ровно 6, а кого-то – ровно 7. Сережа запомнил, что меньше всего (значит, 5) было тюленей или выдр, а Игорь – что 5 было выдр или морских котиков. Значит, 5 было именно выдр. Тогда 7 было не выдр, а тюленей. Следовательно, 6 – морских котиков.

2. Один из возможных примеров приведен на рисунках 1, 2. На рисунках 3–7 показано, какие клетки закрыты водой при разных уровнях воды. См. также 3D-модель (<https://olympiads.mscme.ru/matprazdnik/image/23/towers/>).

*Комментарий.* Изучая, как меняется рельеф местности при постепенном поднимающемся уровне воды, можно

4	3	4	3	4
0	0	1	0	0
0	4	3	4	0
0	0	0	0	0
2	1	2	1	2

Рис. 1

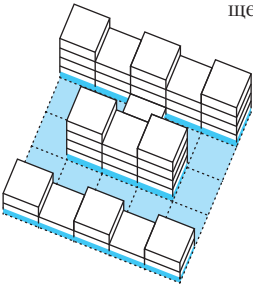


Рис. 2

4	3	4	3	4
	4	3	4	
2		2		2

15 см

Рис. 4

4		4		4
	4		4	

35 см

Рис. 6

4	3	4	3	4
		1		
	4	3	4	
2	1	2	1	2

5 см

Рис. 3

4	3	4	3	4
	4	3	4	

25 см

Рис. 5

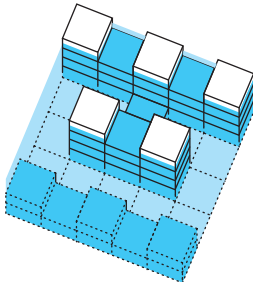


Рис. 7

доказать замечательную теорему Эйлера. Об этом можно прочитать в статье М.Шубина «Топология и... рельеф местности» в журнале «Квант» №8 за 1982 год.

3. Предположим, что  $N$  – это  $k$ -значное число, начинающееся не с единицы.

Среди однозначных чисел с единицы начинается одно число, среди двузначных – десять, среди трехзначных – сто и так далее. Следовательно, всего выписано  $M = 1 + 10 + 100 + \dots + \underbrace{100\dots0}_{k-1} =$

$= \underbrace{11\dots1}_k$  чисел, начинающихся с единицы. Заметим, что число  $M$  нечетное и по условию оно составляет 40 % от  $N$ , т.е.  $N = 2,5M$  – не целое число. Противоречие.

*Комментарий.* Числа  $N$ , удовлетворяющие условию, действительно существуют. Это числа вида 148148...1480.

4. 30°.

Заметим, что угол  $D$  тупой. Действительно, сумма углов  $A$ ,  $C$  и  $D$  выпуклого четырехугольника должна быть больше  $180^\circ$ , а угол  $D$  – половина этой суммы, т.е.  $\angle D > 90^\circ$ . Из вершины  $C$  опустим перпендикуляр  $CM$  на прямую  $AD$ , а из вершины  $B$  – перпендикуляр  $BN$  на диагональ  $AC$  (рис. 8). Пусть  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle C = \chi$ , тогда  $\angle CDM = 180^\circ - \angle D = 180^\circ - \alpha - \chi$ ,  $\angle ABC = 360^\circ - \angle A - \angle C - \angle D = 360^\circ - 2\alpha - 2\chi$ . Следовательно,  $\angle ABN = \angle CBN = \frac{1}{2}\angle ABC = 180^\circ - \alpha - \chi = \angle CDM$ .

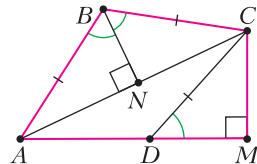


Рис. 8

Значит, прямоугольные треугольники  $ANB$ ,  $CNB$  и  $CMD$  равны (по гипотенузе и острому углу), откуда  $CM = CN = AN$ . Таким образом, в прямоугольном треугольнике  $ACM$  катет  $CM$  вдвое меньше гипотенузы  $AC$ , поэтому  $\angle DAC = 30^\circ$ .

## Национальный исследовательский университет «МИЭТ»

### Интернет-олимпиада «РИТМ МИЭТ»

1. Приращения координаты и скорости при движении с постоянным ускорением определяются формулами

$$x_2 - x_1 = \frac{v_{2x}^2 - v_{1x}^2}{2a}, \quad v_{2x} - v_{1x} = a_x(t_2 - t_1),$$



откуда следует

$$x_2 - x_1 = \left( \frac{v_{1x} + v_{2x}}{2} \right) (t_2 - t_1).$$

Определяя по графику соответствующие скорости и координаты, получим ответ:

$$\frac{t_{\text{уск}}}{t_{\text{зам}}} = \frac{2}{3}.$$

2. Пусть  $x$  – смещение шайбы от точки старта до остановки. Изменение кинетической энергии шайбы равно суммарной работе всех сил, действующих на шайбу:

$$\Delta E_k = 0 = Fx - fx - \frac{kx^2}{2},$$

где  $k$  – жесткость пружины. После остановки шайба не начнет двигаться в обратном направлении, если

$$kx < F + f.$$

Окончательно получаем

$$F < 3f = 30 \text{ Н}.$$

3. При равновесии твердого тела сумма моментов сил относительно любой оси равна нулю. Для осей, перпендикулярных оси бруса и проходящих через его концы, учитывая, что сила тяжести приложена к центру масс бруса, запишем

$$\begin{aligned} 4aF_C + aF_B - 2aP &= 0, & \text{или} & & F_B &= 2P - 4F_C \geq 0, \\ 4aF_A + 3aF_B - 2aP &= 0, & & & F_A &= F_C - \frac{P}{3} \geq 0. \end{aligned}$$

Для минимального и максимального значений силы  $F_C$  получаем

$$F_{\min} = \frac{P}{3} = 200 \text{ Н}, \quad F_{\max} = \frac{P}{2} = 300 \text{ Н}.$$

4. На поршень действует направленная вниз сила гидростатического давления жидкости

$$F_{\text{ж}} = \rho g S (h - x) + p_0 S$$

и направленная вверх сила давления газа

$$F_{\text{г}} = pS = \frac{\nu RT}{x},$$

где  $\rho$  – плотность жидкости,  $S = V_0/h$  – площадь поперечного сечения сосуда,  $x$  – расстояние от поршня до дна сосуда,  $p$  – давление газа под поршнем. Зависимости  $F_{\text{ж}}$  и  $F_{\text{г}}$  от  $x$  представлены на рисунке 9. При  $x = x_1$  и  $x = x_2$  силы  $F_{\text{г}}$  и  $F_{\text{ж}}$  равны и равновесие поршня достигается в отсутствие дополнительных сил. Из рисунка видно, что при  $x_1 < x < x_2$  для равновесия поршня необходима внешняя сила, направленная вверх, а при  $x < x_1$  и  $x > x_2$  для равновесия требуется дополнительная сила, направленная вниз.

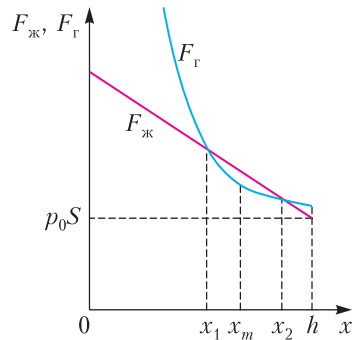


Рис. 9

Начальному положению поршня соответствует высота  $x_1 = 5h/8$ , при которой нить не натянута и поршень находится в равновесии. При постепенном увеличении натяжения нити поршень медленно поднимается вверх, вытесняя воду из цилиндра. На некоторой высоте  $x_m$  сила натяжения  $T = F_{\text{ж}} - F_{\text{г}}$  максимальна, а при дальнейшем подъеме поршня она убывает, обращаясь в ноль при  $x = x_2$ . Положение равновесия при  $x = x_2$  неустойчивое: при малейшем подъеме поршня из этого положения возникает сила давления, направленная вверх, которая не может быть компенсирована силой натяжения нити. Под действием силы  $F = F_{\text{г}} - F_{\text{ж}}$  поршень поднимается, вытесняя воду из цилиндра, пока не происходит разгерметизация цилиндра.

Запишем условия равновесия при  $x = x_1 = 5h/8$  и  $x = x_2 = x_1 + h/4 = 7h/8$ :

$$p_0 + \frac{3}{8} \rho g h = \frac{8\nu RT}{5hS},$$

$$p_0 + \frac{1}{8} \rho g h = \frac{8\nu RT}{7hS}.$$

Исключая из этих уравнений неизвестную величину  $\rho g h$ , найдем искомую температуру газа:

$$T = \frac{35 p_0 V_0}{32 \nu R} = \frac{35}{32} T_0 = 350 \text{ К}.$$

5. а) Так как нет трения, то давление газа слева и справа от поршня одинаковое. Записав уравнения состояния газа в обеих частях сосуда:

$$pV_1 = RT_1, \quad pV_2 = RT_2$$

и сложив их, получим

$$pV = R(T_1 + T_2).$$

При изменении температуры  $T_1$  на  $\Delta T_1$  это уравнение запишется в виде

$$(p + \Delta p)V = R(T_1 + T_2 + \Delta T_1).$$

Из последних двух уравнений найдем ответ на первый вопрос задачи:

$$\Delta p = \frac{R\Delta T_1}{V}.$$

б) Запишем первое начало термодинамики для газа в левой части сосуда:

$$\Delta Q = \frac{3}{2} R \Delta T_1 + p \Delta V_1,$$

где  $\Delta Q$  – полученное газом количество теплоты в левой части сосуда,  $\Delta T_1$  и  $\Delta V_1$  – соответствующие изменения температуры и объема газа слева от поршня. Из уравнения состояния  $pV_2 = \nu RT_2 = \text{const}$  следует

$$p \Delta V_2 + V_2 \Delta p = 0,$$

где  $\Delta V_2 = -\Delta V_1$ . Подставляя в это уравнение  $\Delta p = R \Delta T_1 / V$ , получим

$$p \Delta V_1 = V_2 \Delta p = \frac{V_2}{V} R \Delta T_1.$$

Следовательно,

$$\Delta Q = \frac{3}{2} R \Delta T_1 + p \Delta V_1 = R \Delta T_1 \left( \frac{3}{2} + \frac{V_2}{V} \right).$$

При  $V_2 = V/2$  для теплоемкости газа в левой части сосуда найдем

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T_1} = 2R.$$

**6.** Запишем условия равновесия зарядов  $q_2$  и  $q_3$ , на которые действуют только кулоновские силы:

$$\frac{kq_1q_2}{a^2} = \frac{kq_3q_2}{a^2} + \frac{kq_4q_2}{(2a)^2},$$

$$\frac{kq_1q_3}{(2a)^2} = \frac{kq_2q_3}{a^2} + \frac{kq_4q_3}{a^2},$$

где  $a = l/3$  – расстояние между соседними зарядами. После сокращения получим

$$q_1 = q_3 + \frac{q_4}{4}, \quad \frac{q_1}{4} + q_2 = q_4.$$

По условию все заряды положительные. Из первого выражения следует, что максимальное значение заряда  $q_4$  равно  $q_{4\max} = 4q_1$ . Из второго выражения следует, что минимальное значение заряда  $q_4$  равно  $q_{4\min} = q_1/4$ . Далее находим

$$q_{3\max} = q_1 - \frac{q_{4\min}}{4} = \frac{15}{16} q_1,$$

$$q_{2\max} = q_{4\max} - \frac{q_1}{4} = \frac{15}{4} q_1.$$

Окончательно получаем

$$q_{2\max} = 60 \text{ пКл}, \quad q_{3\max} = 15 \text{ пКл}, \quad q_{4\max} = 64 \text{ пКл}.$$

**7.** Так как сопротивление амперметра пренебрежимо мало, то напряжения на параллельных резисторах одинаковые, следовательно, и токи  $I_1$  в этих резисторах равны (рис. 10). Если ток в амперметре направлен, как показано

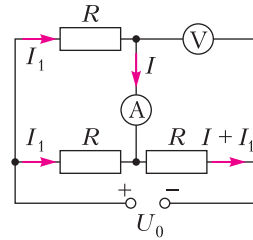


Рис. 10

на рисунке, то для напряжений на вольтметре и на клеммах источника можно записать

$$U = (I_1 + I)R,$$

$$U_0 = I_1R + U.$$

Из этих уравнений получим

$$U = \frac{U_0 + IR}{2} = 7 \text{ В}.$$

Если ток амперметра направлен противоположно выбранному на рисунке направлению, то

$$U = \frac{U_0 - IR}{2} = 5 \text{ В}.$$

Двум полученным решениям соответствуют вольтметры с различающимися сопротивлениями.

**8.** Запишем закон Ома для замкнутого контура:  $\mathcal{E} + \mathcal{E}_{\text{инд}} = IR$ , где  $\mathcal{E}_{\text{инд}} = -vBl$  – ЭДС индукции, возникающая в перемычке при ее движении со скоростью  $v$ ,  $l$  – расстояние между проводниками, по которым скользит перемычка. Знак ЭДС индукции учитывает правило Ленца. При перемещении перемычки на расстояние  $L$  со скоростью  $v$  в резисторе выделяется количество теплоты  $Q = I^2 R t$ . Подставляя в эту формулу  $I = (\mathcal{E} + \mathcal{E}_{\text{инд}})/R$  и  $t = L/v$ , получим

$$Q = \frac{(\mathcal{E} - vBl)^2 L}{Rv}.$$

Известны скорости  $v_1$  и  $v_2$ , при которых выделяются одинаковые количества теплоты:

$$\frac{(\mathcal{E} - v_1Bl)^2 L}{Rv_1} = \frac{(\mathcal{E} - v_2Bl)^2 L}{Rv_2}.$$

Тепло не выделяется при  $\mathcal{E} = vBl$ . Подставляя  $\mathcal{E}$  в приведенное выше уравнение, получим уравнение относительно неизвестной скорости  $v$ :

$$\frac{(v - v_1)^2}{v_1} = \frac{(v - v_2)^2}{v_2},$$

отсюда найдем

$$v = \sqrt{v_1 v_2}.$$

## Физико-математическая олимпиада МИЭТ

10 класс

**1.** Скорость точки при движении с постоянным ускорением изменяется по закону  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$ , где  $\vec{v}_0$  – вектор начальной скорости (рис. 11). С

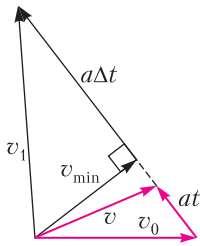


Рис. 11

ростом времени модуль вектора  $\vec{a}t$  (длина стрелки на рисунке) увеличивается, поэтому модуль вектора  $\vec{v}$  сначала убывает, достигает минимального значения  $v_{\min}$ , а затем возрастает. По условию через время  $\Delta t$  после достижения минимальной скорости точка движется со скоростью  $\vec{v}_1$ , модуль которой равен  $2v_{\min}$ . Запишем теорему Пифагора для треугольника, составленного векторами  $\vec{v}_{\min}$ ,  $\vec{a}\Delta t$  и  $\vec{v}_1$ :

$$(v_{\min})^2 + (a\Delta t)^2 = (2v_{\min})^2,$$

откуда найдем модуль вектора ускорения:

$$a = \frac{v_{\min}\sqrt{3}}{\Delta t} \approx 8,7 \text{ м/с}^2.$$

2. а) Суммарный момент сил относительно оси, проходящей через точку  $A$ , равен нулю:

$$(mg - T)\frac{l}{2} + 2mgl = 0,$$

где  $T$  – сила натяжения нити,  $l$  – длина стержня. Из этого уравнения получим

$$T = 5mg.$$

б) На рисунке 12 изображены силы, действующие на стержень со стороны грузов. Поскольку стержень невесомый, суммарный момент этих

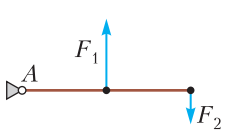


Рис. 12

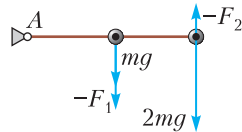


Рис. 13

сил равен нулю:  $F_1(l/2) - F_2l = 0$ , поэтому  $F_1 = 2F_2$ . Такие же силы, но направленные в противоположные стороны, действуют на грузы со стороны стержня (рис. 13). Если  $a$  – ускорение груза, закрепленного посередине стержня, то ускорение груза, закрепленного на его конце, равно  $2a$ . Запишем второй закон Ньютона для момента времени сразу после пережигания нити:

$$ma = mg + F_1, \quad 4ma = 2mg - F_2,$$

отсюда получим

$$a = \frac{5}{9}g.$$

3. а)  $h = \frac{v_0^2}{4g} = 2,5 \text{ м}$ ; б)  $\alpha \geq \frac{\pi}{4}$ .

4. а)  $T_1 = \frac{2\rho_0 V_0}{vR} = 400 \text{ К}$ ; б)  $\frac{T_{\max}}{T_{\min}} = \frac{25}{16} = 1,56$ .

5. а)  $U_3 = IR = 20 \text{ В}$ ; б)  $r = \frac{3}{2}R = 30 \text{ Ом}$ .

11 класс

1.  $v_{\min} = \frac{a\Delta t}{2\sqrt{2}} \approx 2,98 \text{ м/с}$ .

2. а)  $v_1 = \frac{v_0\sqrt{3}}{2} \approx 8,7 \text{ м/с}$ ; б)  $\alpha \geq \frac{\pi}{6}$ .

3. а)  $T = \frac{2\rho_0 V_0}{vR} = 300 \text{ К}$ ; б)  $\frac{T_{\max}}{T_{\min}} = \frac{9}{8} = 1,125$ .

4. а)  $F = qE = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ Н}$ ; б)  $F = mg \sin \alpha \approx 0,86 \cdot 10^{-3} \text{ Н}$ .

5. а) Найдем магнитный поток  $\Phi$  через рамку, ЭДС индукции  $\mathcal{E}$ , сопротивление рамки  $R$  и возникающий в ней индукционный ток  $I$ :

$$\Phi = abB = ab\beta t,$$

$$|\mathcal{E}| = \Phi' = ab\beta,$$

$$R = r_1(4b + 2a) = 10r_1a,$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\beta b}{10r_1} = \frac{\beta a}{5r_1} = 0,04 \text{ А}.$$

По правилу Ленца определим направление индукционного тока: на рисунке 14 направление тока обозначено красными стрелками.

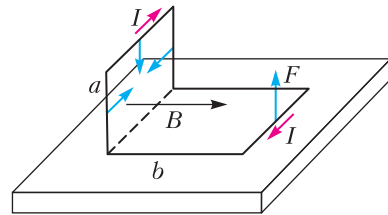


Рис. 14

б) С помощью правила левой руки определим направления сил Ампера, действующих со стороны магнитного поля на стороны рамки: силы обозначены на рисунке синими стрелками. Относительно оси, проходящей по линии сгиба рамки, вращающий момент  $M = Fb$  создает только сила Ампера, равная  $F = IBb$  и направленная вертикально вверх. Рамка начнет поворачиваться, когда момент сил Ампера превысит момент сил тяжести относительно выбранной оси. Момент силы тяжести вычислим как сумму моментов сил тяжести, действующих на каждую из трех горизонтальных сторон рамки. В результа-

те получим условие покоя рамки:

$$Fb \leq m_1 g b \left( \frac{b}{2} + \frac{b}{2} + b \right).$$

Из этого неравенства следует

$$F \leq 2m_1 g b, \text{ или } I B b = \frac{\beta a}{5r_1} \beta t b \leq 2m_1 g b.$$

Рамка будет оставаться в покое в течение времени

$$\Delta t = \frac{10r_1 m_1 g}{a \beta^2} = 0,25 \text{ с.}$$

### Заключительный этап Всероссийской олимпиады школьников по физике имени Дж.Максвелла 2023 года

#### Теоретический тур

7 класс

1. 1) Для нахождения времени прохождения поездов мимо друг друга рассмотрим скорость их сближения:  $v = v_1 + v_2$ . Так как путь прохождения одного поезда мимо «покоящегося» другого равен сумме их длин, получаем, что время прохождения поездов мимо друг друга равно

$$\tau = \frac{l_1 + l_2}{v_1 + v_2} \approx 34 \text{ с.}$$

2) Периоды движения первого и второго поездов равны соответственно

$$T_1 = \frac{L}{v_1} = 100 \text{ с,}$$

$$T_2 = \frac{L}{v_2} = 125 \text{ с.}$$

3) Для повторения начальной ситуации каждый поезд должен проехать целое количество кругов. Предположим, что первый поезд сделает  $N_1$  кругов, а второй –  $N_2$  кругов. Тогда

$$N_1 T_1 = N_2 T_2, \quad 100 N_1 = 125 N_2, \quad 4 N_1 = 5 N_2.$$

Наименьшие целые положительные числа, удовлетворяющие этому соотношению, это

$$N_1 = 5, \quad N_2 = 4,$$

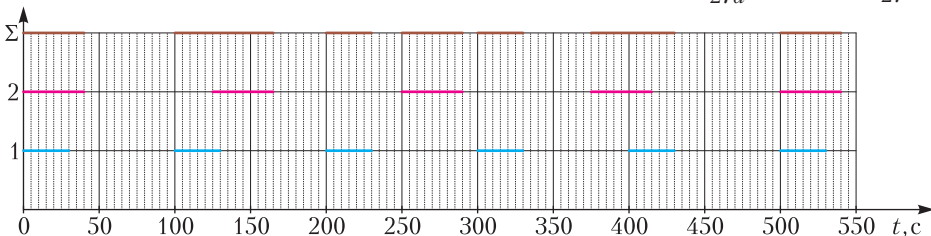


Рис. 15

откуда следует, что период движения системы равен

$$T = 5T_1 = 4T_2 = 500 \text{ с.}$$

4) Ответ на последний вопрос можно найти, если показать на диаграмме интервалы времени, в течение которых поезда перекрывают видимость наблюдателям. Для построения диаграммы определим время перекрытия наблюдения для первого и второго поезда соответственно:

$$t_1 = \frac{l_1}{v_1} = 30 \text{ с,}$$

$$t_2 = \frac{l_2}{v_2} = 40 \text{ с.}$$

Интервалы, в течение которых наблюдатели не видят друг друга, для каждого поезда показаны на диаграмме (рис. 15). Диаграмму  $\Sigma$  для определения части времени, когда нет видимости, легко найти, объединив диаграмм первого и второго поездов (синий и красный цвета соответственно). Наблюдатели не видят друг друга в течение

$$40 \text{ с} + 65 \text{ с} + 30 \text{ с} + 40 \text{ с} + 30 \text{ с} + 55 \text{ с} = 260 \text{ с}$$

за один период, следовательно,

$$\alpha = 1 - \frac{260}{500} = 0,48.$$

2. Самый легкий из кубиков получится, если в нем будет целиком содержаться малый кубик плотностью  $\rho_y$ . Плотность такого кубика

$$\rho_{\min} = \frac{8\rho_y a^3 + 19\rho_x a^3}{27a^3} = \frac{8\rho_y + 19\rho_x}{27}.$$

Аналогично, самый тяжелый получится, если в него войдет только восьмая часть кубика плотностью  $\rho_y$ . Его плотность

$$\rho_{\max} = \frac{\rho_y a^3 + 26\rho_x a^3}{27a^3} = \frac{\rho_y + 26\rho_x}{27}.$$

Если в новый кубик целиком входит малый кубик, имеющий общую грань с легким, а таких кубиков три, то его плотность

$$\rho_{\text{тр}} = \frac{4\rho_y a^3 + 23\rho_x a^3}{27a^3} = \frac{4\rho_y + 23\rho_x}{27}.$$

Если же в новый кубик целиком входит малый кубик, имеющий с легким только общее ребро, таких кубиков тоже 3, то его плотность

$$\rho_p = \frac{2\rho_y a^3 + 25\rho_x a^3}{27a^3} = \frac{2\rho_y + 25\rho_x}{27}.$$

В таблице (в условии) есть две тройки одинаковых значений. И они, очевидно, посчитаны верно. Тогда

$$\frac{4\rho_y + 23\rho_x}{27} = 2,50 \text{ г/см}^3,$$

$$\frac{2\rho_y + 25\rho_x}{27} = 2,60 \text{ г/см}^3,$$

откуда

$$\rho_x = 2,70 \text{ г/см}^3, \rho_y = 1,35 \text{ г/см}^3.$$

Зная это, можно посчитать плотности самого легкого и самого тяжелого из кубиков и найти ошибку. Плотность  $\rho_3$  найдена правильно, а верное значение для плотности  $\rho_1$  должно быть не  $2,40 \text{ г/см}^3$ , а  $2,30 \text{ г/см}^3$ .

**3.** Запишем условие равновесия кубиков до открытия крана:

$$mg + 3T = \rho_1 g a^3, \quad mg + T = \rho_2 g a^3,$$

откуда получим

$$\rho_1 - \rho_2 = \frac{2T}{a^3 g} \text{ и, следовательно, } \rho_1 > \rho_2.$$

После открытия крана жидкость плотностью  $\rho_1$  (более тяжелая) частично перетечет в правый сосуд. Поскольку сила натяжения правой нити при этом увеличилась лишь до  $2T$ , можно сделать вывод, что перетекшая жидкость не поднялась до высоты  $1,5a$ . Пусть в легкой жидкости находится  $k$ -я часть объема правого кубика, тогда условие равновесия этого кубика примет вид

$$mg + 2T = (1 - k)\rho_1 g a^3 + k\rho_2 g a^3.$$

Можно заметить, что удвоенная левая часть этого уравнения равна сумме левых частей первых двух уравнений равновесия. Поэтому

$$2(1 - k)\rho_1 g a^3 + 2k\rho_2 g a^3 = \rho_1 g a^3 + \rho_2 g a^3,$$

$$2(1 - k)\rho_1 + 2k\rho_2 = \rho_1 + \rho_2,$$

$$\rho_1 - \rho_2 = 2k(\rho_1 - \rho_2), \quad k = 0,5.$$

Высота столба тяжелой жидкости в правом сосуде равна  $h_1 = a$ , а в левом сосуде кубик остается полностью погруженным в жидкость. Из условия несжимаемости жидкостей найдем изменение уровня жидкости в сосудах  $\Delta h$ :

$$\Delta h \cdot 4a^2 = a \cdot 4a^2 - \frac{a}{2} \cdot a^2, \quad \Delta h = \frac{7a}{8}.$$

Запишем условие равенства давлений на уровне

трубки ( $p_0$  – атмосферное давление):

$$p_0 + \rho_1 g(6a - \Delta h) = p_0 + \rho_1 g a + \rho_2 g(6a + \Delta h - a),$$

$$\rho_2 = \frac{33}{47}\rho_1.$$

Подставляем это соотношение в ранее полученное равенство, связывающее плотности  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , и получаем

$$\rho_1 - \frac{33}{47}\rho_1 = \frac{2T}{a^3 g}, \quad \rho_1 = \frac{47T}{7a^3 g}, \quad \rho_2 = \frac{33T}{7a^3 g}.$$

Из условия равновесия кубика находим его массу:

$$mg + T = \frac{33T}{7a^3 g} g a^3, \quad m = \frac{26T}{7g}.$$

**4.** Пусть  $T_1$  и  $T_2$  – силы натяжения левой и правой нитей соответственно.

1) Рассмотрим случай, когда жук располагается на левом краю стержня. Из правила моментов для легкого стержня относительно оси, проходящей через его левый край, получаем силу натяжения правой нити:  $T_2 = 0$ . Значит, сила натяжения левой нити  $T_1 = Mg$  (это следует из условия равновесия стержня:  $T_1 + T_2 = Mg$ ). Определим максимальное значение массы жука  $M_{\max}$ , при котором верхняя балка еще неподвижна. При  $M = M_{\max}$  верхняя балка касается нижней только в точке  $A$  (рис. 16). По правилу моментов относительно оси, проходящей через точку  $A$ , для верхней балки получаем  $T_1 l = 4mgl$ , где  $T_1 = M_{\max}g$ . Отсюда  $M_{\max} = 4m$ . Найдем теперь минимальное значение массы жука  $M_{\min}$ , при

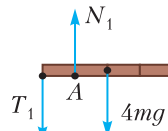


Рис. 16

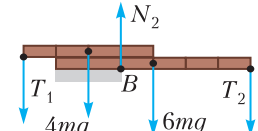


Рис. 17

котором еще не поворачивается система из двух балок относительно оси, проходящей через точку  $B$  (рис. 17). По правилу моментов относительно указанной оси получаем  $T_1 \cdot 3l + 4mg \cdot l = 6mg \cdot l$ , где  $T_1 = M_{\min}g$ . Отсюда  $M_{\min} = \frac{2}{3}m$ . Значит, равновесие системы возможно при

$$\frac{2}{3}m \leq M \leq 4m.$$

2) Рассмотрим момент времени, когда жук массой  $M = M_1$  удалился от левого края на расстояние  $x$  (рис. 18). Определим силы натяжения нитей по правилу моментов для невесомого стержня относительно осей  $C$  и  $D$  соответственно:

$$T_2 \cdot 7l = M_1 g \cdot x, \text{ значит, } T_2 = M_1 g \frac{x}{7l},$$



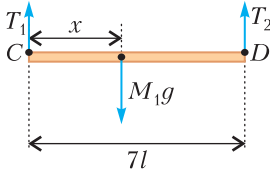


Рис. 18

$$T_1 \cdot 7l = M_1g(7l - x), \text{ значит, } T_1 = M_1g \left(1 - \frac{x}{7l}\right).$$

Если  $M_1$  удовлетворяет неравенству, полученному в п. 1, повернуться вокруг оси, проходящей через точку  $A$ , система не может, так как по мере движения  $T_1$  уменьшается. Но  $T_2$  увеличивается, поэтому при достижении  $x = L$  система начинает поворачиваться относительно оси, проходящей через точку  $B$ . Воспользуемся правилом моментов для системы, состоящей из двух балок, относительно указанной оси:

$$T_1 \cdot 3l + 4mg \cdot l = T_2 \cdot 4l + 6mg \cdot l,$$

$$M_1g \left(1 - \frac{L}{7l}\right) \cdot 3l + 4mg \cdot l = M_1g \frac{L}{7l} \cdot 4l + 6mg \cdot l,$$

откуда

$$L = \frac{3M_1 - 2m}{M} l = \left(3 - 2 \frac{m}{M_1}\right) l.$$

Заметим, что  $L = L_{\max} = 2,5l$  при  $M_1 = M_{\max} = 4m$ , поэтому

$$\alpha = \frac{M_1}{m} = \frac{M_{\max}}{m} = 4.$$

8 класс

1. Пусть  $d$  – расстояние между передней и задней стенками сосуда. Рассмотрим случай, когда в правую часть сосуда наливают керосин массой  $M$  и поршень сдвигается влево на величину  $x$  (рис. 19). Высота слоя керосина в этом случае будет равна

$$h = \frac{M}{\rho_k (L + x)d}.$$

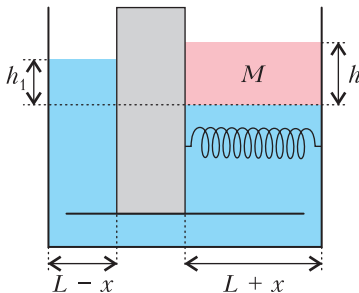


Рис. 19

Запишем условие равенства давлений на уровне границы воды и керосина:

$$\rho_b g h_1 = \frac{Mg}{(L + x)d}$$

и условие равновесия поршня:

$$F_0 + p \frac{h_1 d}{2} + kx = F_0 + p \frac{hd}{2},$$

где  $p = \frac{Mg}{(L + x)d}$ , а  $F_0$  – сила давления воды ниже границы с керосином, одинаковая с обеих сторон. Отсюда получим

$$\begin{aligned} kx &= \frac{Mg}{(L + x)d} \frac{(h - h_1)d}{2} = \\ &= \frac{Mg}{2(L + x)} \left( \frac{M}{\rho_k (L + x)d} - \frac{M}{\rho_b (L + x)d} \right) = \\ &= \frac{M^2 g}{2(L + x)^2 d} \left( \frac{1}{\rho_k} - \frac{1}{\rho_b} \right), \end{aligned}$$

следовательно,

$$x(L + x)^2 = AM^2, \text{ где } A = \text{const.}$$

В первом случае, если  $M = m$ , то  $x = L/3$ , поэтому

$$A = \frac{L \left(\frac{4L}{3}\right)^2}{m^2} = \frac{16L^3}{27m^2}.$$

Тогда при  $x = L/2$

$$m_1^2 = \frac{L \left(\frac{3L}{2}\right)^2}{A} = \frac{243m^2}{128}, \quad m_1 = \frac{9}{8} \sqrt{\frac{3}{2}} m \approx 1,38m.$$

Пусть теперь  $x = L$  (поршень уперся в левую стенку). Определим, при какой массе керосина это происходит:

$$m_{\text{крит}}^2 = \frac{L(2L)^2}{A} = \frac{27m^2}{4}, \quad m_{\text{крит}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} m \approx 2,6m.$$

Отсюда следует, что при массе керосина  $3m$  (большей  $m_{\text{крит}}$ ) поршень будет прижат вплотную к левой стенке, т.е.  $l = L$ .

2. Поскольку стержни однородные, центры масс находятся ровно в их серединах. Запишем правило моментов для внешних сил относительно точки крепления верхнего шарнира:

$$T_1 \cdot 2x + mg \cdot x + 2mg \cdot x = 3mg \cdot x + 4mg \cdot x,$$

откуда

$$T_1 = 2mg.$$

Силу  $F$  найдем из условия равновесия всей системы:

$$F = (m + 2m + 3m + 4m + 5m)g - T_1 = 15mg - T_1 = 13mg.$$

Для нахождения силы натяжения  $T_2$  воспользуемся методом виртуальных перемещений. Пусть точка крепления правой нити к правому верхнему стержню сместилась вниз на малое расстояние  $\Delta h$  (из-за малости смещения отклонением правой нити от вертикали можно пренебречь). Тогда центры тяжести стержней массами  $m$  и  $4m$  сместятся вниз на  $\Delta h/2$ , стержней массами  $2m$  и  $3m$  – на  $3\Delta h/2$ , а груз опустится на  $2\Delta h$  и условие равновесия системы примет вид

$$T_1 \cdot \Delta h + T_2 \cdot \frac{3\Delta h}{2} - T_2 \cdot \frac{\Delta h}{2} = 4mg \cdot \frac{\Delta h}{2} + mg \cdot \frac{\Delta h}{2} + 3mg \cdot \frac{3\Delta h}{2} + 2mg \cdot \frac{3\Delta h}{2} + 5mg \cdot 2\Delta h.$$

Отсюда, с учетом известного значения для  $T_1$ , получим

$$T_1 + T_2 = 20mg, \quad T_2 = 18mg.$$

**3.** Введем обозначения:  $\mu = \frac{\Delta m}{\Delta \tau}$  – массовый расход воды для каждого крана (масса воды, поступающая в единицу времени),  $c$  – удельная теплоемкость воды. По условию задачи мощность теплоотдачи от воды в окружающую среду равна  $P = \alpha(t_x - t_0)$ , где  $t_x$  – температура воды в аквариуме,  $\alpha$  – некоторый постоянный коэффициент. Мощность может быть и отрицательная, если  $t_x < t_0$ . Предположим, что в установившемся режиме за время  $\Delta \tau$  в аквариум поступает из крана с номером  $k$  вода массой  $\Delta m$  при температуре  $T_k$ . А так как аквариум проточный, то за время  $\Delta \tau$  такая же по массе вода должна сливаться из аквариума уже при установившейся температуре  $t_x$ .

1) Напишем следствие уравнений теплового баланса для двух установившихся случаев – когда открыт только второй кран и когда открыт только восьмой кран соответственно:

$$c\mu(T_2 - t_2) = \alpha(t_2 - t_0),$$

$$c\mu(T_8 - t_8) = \alpha(t_8 - t_0),$$

откуда находим

$$t_0 = 25^\circ\text{C}, \quad \frac{c\mu}{\alpha} = 2.$$

2) Если открыть сразу все краны, то условие теплового баланса будет выглядеть следующим образом:

$$c\mu(T_1 - t) + c\mu(T_2 - t) + \dots + c\mu(T_8 - t) = \alpha(t - t_0),$$

откуда

$$t = \frac{t_0 + 2(T_1 + \dots + T_8)}{17} \approx 22,7^\circ\text{C}.$$

3) Если открыть три крана с номерами  $n, m$  и  $l$  (при закрытых оставшихся), то установится температура  $t_x$  и условие теплового баланса примет вид

$$c\mu(T_n - t_x) + c\mu(T_m - t_x) + c\mu(T_l - t_x) = \alpha(t_x - t_0).$$

С учетом того, что  $\frac{c\mu}{\alpha} = 2$  и  $T_k = k \cdot 5^\circ\text{C}$ , получаем соотношение

$$n + m + l = \frac{7t_x - t_0}{10^\circ\text{C}}.$$

Приняв  $t_x = t_{\text{он}}$ , посчитаем значение дроби:  $\frac{7t_x - t_0}{10^\circ\text{C}} = 17,8$ . Но сумма  $n + m + l$  может принимать только целые значения, поэтому  $n + m + l = 18$  (наиболее близкое к 17,8 целое значение). Этому соответствует температура  $t_x \approx 29,3^\circ\text{C}$ . Подберем все возможные подходящие тройки значений  $(n, m, l)$ :

$$(8; 7; 3), \quad (8; 6; 4), \quad (7; 6; 5).$$

4) При уменьшении температуры воздуха в домике на  $\Delta t$  в соотношении для суммы  $n + m + l$  достаточно заменить  $t_0$  на  $t_0 - \Delta t$ . Приняв  $t_x = t_{\text{он}}$ ,

посчитаем значение дроби:  $\frac{7t_x - (t_0 - \Delta t)}{10^\circ\text{C}} = 18,4$ .

Заметим, что результат не изменится, так как наиболее близкое к 18,4 целое число это 18. Температура при этом установится  $t_x \approx 28,4^\circ\text{C}$ .

**4.** Так как  $h_i \ll l_j$ , то можно пользоваться формулой для сопротивления участка ленты  $R = \rho \frac{l}{S}$ , где  $l$  – длина,  $S$  – площадь поперечного сечения. Сопротивление проводника (куска ленты) зависит от положения  $x$  второго контакта по закону

$R(x) =$

$$= \begin{cases} \rho \frac{x}{h_1 d}, & 0 < x < l_1, \\ \rho \frac{x}{h_2 d} + \rho \frac{l_1}{d} \left( \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right), & l_1 < x < l_1 + l_2, \\ \rho \frac{x}{h_3 d} + \rho \frac{l_1}{d} \left( \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_3} \right) + \rho \frac{l_2}{d} \left( \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3} \right), & l_1 + l_2 < x < l_1 + l_2 + l_3. \end{cases}$$

Заметим, что на всех рассматриваемых участках сопротивление линейно зависит от  $x$ . При подключении куска ленты к амперметру и батарейке показания амперметра становятся равными

$I = \frac{U_0}{R(x) + r}$ , где  $r$  – суммарное сопротивление подводящих проводов и амперметра. Уравнение

можно переписать в виде  $\frac{1}{I} = \frac{R(x)}{U_0} + \frac{r}{U_0}$ . Так как

зависимость  $R(x)$  кусочно-линейная, то и зависимость  $\frac{1}{I}(x)$  также кусочно-линейная:

$$\frac{1}{I}(x) = \begin{cases} \rho \frac{x}{h_4 U_0 d} + \frac{r}{U_0}, & 0 < x < l_1, \\ \rho \frac{x}{h_2 U_0 d} + \rho \frac{l_1}{U_0 d} \left( \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right) + \frac{r}{U_0}, & l_1 < x < l_1 + l_2, \\ \rho \frac{x}{h_3 U_0 d} + \rho \frac{l_1}{U_0 d} \left( \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_3} \right) + \rho \frac{l_2}{U_0 d} \left( \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3} \right) + \frac{r}{U_0}, & l_1 + l_2 < x < l_1 + l_2 + l_3. \end{cases}$$

Построим график зависимости  $\frac{1}{I}(x)$ , предварительно пересчитав значения  $\frac{1}{I}$  (см. таблицу).

Через полученные точки проведем три последовательных отрезка прямых (рис. 20). Точки излома графика соответствуют  $x = l_1$  и  $x = l_1 + l_2$ . Таким образом,  $l_1 \approx 155$  см,  $l_2 \approx 195$  см,

Таблица

$x, \text{см}$	20	60	100	140	180	220	260
$I, \text{мА}$	818	455	315	241	204	182	165
$1/I, \text{А}^{-1}$	1,22	2,20	3,17	4,15	4,90	5,49	6,06

$x, \text{см}$	300	340	380	420	460	500	
$I, \text{мА}$	150	138	130	124	119	114	
$1/I, \text{А}^{-1}$	6,67	7,25	7,69	8,06	8,40	8,77	

$l_3 \approx 150$  см. Найдем угловой коэффициент для третьего участка графика и из него определим значение  $d$ :

$$k_3 = \frac{8,5 - 7,4}{470 - 350} \frac{1}{\text{А} \cdot \text{см}}, \quad d = \frac{\rho}{h_3 U_0 k_3} \approx 0,1 \text{ мм}.$$

Теперь определим угловые коэффициенты первого и второго участков графиков, а с помощью них найдем  $h_1$  и  $h_2$ :

$$k_1 = \frac{4,9 - 1,1}{170 - 15} \frac{1}{\text{А} \cdot \text{см}}, \quad h_1 = \frac{\rho}{U_0 d k_1} \approx 3 \text{ мм},$$

$$k_2 = \frac{7,4 - 4,9}{350 - 180} \frac{1}{\text{А} \cdot \text{см}}, \quad h_2 = \frac{\rho}{U_0 d k_2} \approx 5 \text{ мм}.$$

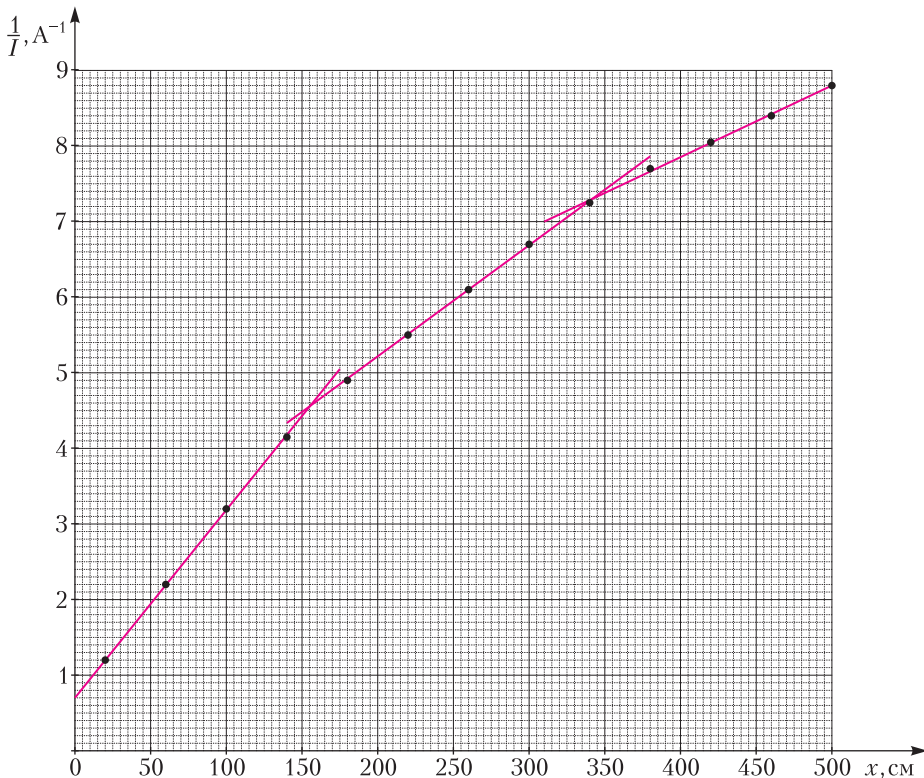


Рис. 20

**Заключительный этап  
 XLIX Всероссийской олимпиады  
 школьников по математике**  
 (см. «Квант» №6)

9 класс

1. Заметим, что разность корней приведенного квадратного трехчлена  $x^2 + bx + c$  равна корню из его дискриминанта, т.е.  $\sqrt{b^2 - 4c}$ .

Пусть два данных трехчлена – это  $f(x) = x^2 + b_1x + c_1$  и  $g(x) = x^2 + b_2x + c_2$ . Согласно условию, у них общий дискриминант  $D = b_1^2 - 4c_1 = b_2^2 - 4c_2$ . Вместо суммы трехчленов удобно рассмотреть их полусумму – она тоже является приведенным квадратным трехчленом. Квадрат разности его корней (т.е. дискриминант) равен

$$\left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)^2 - 2(c_1 + c_2) = \frac{b_1^2 + b_2^2}{2} - 2(c_1 + c_2) - \left(\frac{b_1 - b_2}{2}\right)^2.$$

Значит, он не больше, чем

$$\frac{b_1^2 + b_2^2}{2} - 2(c_1 + c_2) = \frac{D}{2} + \frac{D}{2} = D.$$

Отсюда и следует, что разность корней полусуммы не больше, чем  $\sqrt{D}$ , т.е. разность корней каждого из данных трехчленов.

2. Нельзя.

Пронумеруем позиции в строке слева направо числами от 1 до 250. Пусть в исходной строке  $x$  букв А стоят на нечетных местах (т.е. на местах с нечетными номерами). Покажем, что в полученных строках это количество не изменится.

Действительно, пусть для некоторой операции выбран кусок, в котором по  $y$  букв А и Б, причем  $t$  из этих букв А стоят на нечетных местах. Тогда на четных местах в куске стоят  $y - t$  букв А и, следовательно,  $y - (y - t) = t$  букв Б. После операции именно из этих  $t$  букв Б возникнут буквы А, стоящие на нечетных местах куска, а значит, количество таких букв А не поменяется.

Итак, в любой полученной строке будет ровно  $x$  букв А на нечетных местах. Однако, если строка развернется задом наперед, то на нечетных местах должны оказаться ровно те буквы, которые раньше были на четных местах, а там было ровно  $125 - x$  букв А. Поскольку  $125 - x \neq x$ , требуемое невозможно.

4. Обозначим через  $\Gamma$  окружность с диаметром  $I_B I_C$ . Поскольку  $C I_C \perp C I_B$  и  $B I_C \perp B I_B$ , точки В и С лежат на  $\Gamma$  (рис. 21).

Обозначим через  $I$  центр вписанной окружности  $ABC$ . Если точка  $X$  лежит внутри угла  $BIC$ , то углы  $XBI_C$  и  $XCI_B$  тупые, поэтому  $XI_B > XC$  и

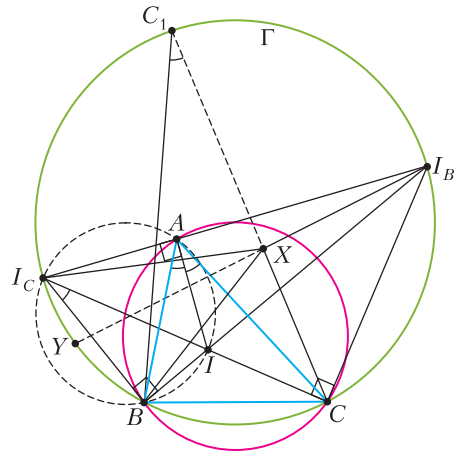


Рис. 21

$XI_C > XB$ . Перемножив эти неравенства, получим требуемое.

В противном случае точки  $X$  и  $A$  лежат в одной полуплоскости относительно прямой  $BC$  (см. рис. 21). Продлим лучи  $CX$  и  $I_B X$  до пересечения с  $\Gamma$  в точках  $C_1$  и  $Y$  соответственно. Поскольку четырехугольник  $A I_C B I$  вписан в окружность с диаметром  $I I_C$ , то

$$\begin{aligned} \angle X C_1 B &= \angle I I_C B = \angle I A B = \\ &= \frac{1}{2} \angle C A B < \frac{1}{2} \angle C X B = \frac{1}{2} (\angle X C_1 B + \angle X B C_1), \end{aligned}$$

откуда  $\angle X C_1 B < \angle X B C_1$ , поэтому  $X C_1 > X B$ . Кроме того, поскольку длина хорды окружности не превосходит длины диаметра,  $I_B X + X I_C \geq I_B I_C \geq I_B Y = I_B X + X Y$ , откуда  $X I_C > X Y$ . Следовательно,

$$X I_B \cdot X I_C \geq X I_B \cdot X Y = X C \cdot X C_1 > X C \cdot X B.$$

*Замечание.* Если разрешить точке  $X$  находиться на описанной окружности треугольника  $ABC$ , то неравенство обращается в равенство в вершине А и в середине дуги  $SAB$ .

5.  $n = 5099$ .

Если удалить полностью 51 кучку, то, очевидно, не останется много камней. Значит, искомое значение  $n$  меньше 5100. (Альтернативно, можно удалить из всех кучек по 51 камню.)

Осталось показать, что при удалении любых  $n = 5099$  камней останется много камней. Пусть в кучках осталось  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  камней соответственно; можно считать, что  $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{100} \leq 100$ . Покажем, что  $a_{i+50} \geq i$  при  $i = 1, 2, \dots, 50$ , т.е. кучки с номерами от 51 до 100 удовлетворяют требованиям.

Пусть это не так, т.е.  $a_{i+50} \leq i - 1$  при некотором  $i \leq 50$ . Это значит, что каждая из первых  $i + 50$

кучек содержит не более  $i - 1$  камней, т.е. из нее удалено хотя бы  $101 - i$  камней. Поэтому общее количество удаленных камней не меньше, чем  $(i + 50)(101 - i) = 5100 - (i - 1)(i - 50) \geq 5100$ . Противоречие.

6. Каждому остатку  $a$  от деления на 19 сопоставим остаток  $b(a)$  такой, что  $b(a) \equiv 3a \pmod{19}$ . Заметим, что остаткам 0, 1, 2, 3, 7, 8, 9 сопоставлены остатки 0, 3, 6, 9, 2, 5, 8 соответственно. Более того, по остатку  $b$  восстанавливается остаток  $a = a(b) \equiv -6b \pmod{19}$  такой, что  $a(b(a)) \equiv -18a \equiv a \pmod{19}$  и  $b(a(b)) = b$  (из аналогичных соображений).

Обозначим теперь через  $\mathcal{A}$  множество чисел из условия, не содержащих цифр 4, 5, 6, а через  $\mathcal{B}$  – множество таких чисел, не содержащих 1, 4,

7. Каждому числу  $A = \overline{a_{99}a_{98} \dots a_0} \in \mathcal{A}$  сопоставим число  $B = \overline{b(a_{99})b(a_{98}) \dots b(a_0)}$ . Заметим, что  $b(a_i)$  – цифра (причем  $b(a_{99}) \neq 0$ ), так что получилось 100-значное число. Кроме того,

$$\begin{aligned} B &= b_0 + 10b_1 + \dots + 10^{99}b_{99} \equiv \\ &\equiv 3(a_0 + 10a_1 + \dots + 10^{99}a_{99}) = 3A \pmod{19}, \end{aligned}$$

так что  $B$  делится на 19 и  $B \in \mathcal{B}$ . Поскольку разным числам из  $\mathcal{A}$  соответствуют разные числа из  $\mathcal{B}$ , количество чисел в  $\mathcal{B}$  не меньше, чем в  $\mathcal{A}$ . Наконец, каждому числу  $B = \overline{b_{99}b_{98} \dots b_0} \in \mathcal{B}$  соответствует число  $A = \overline{a(b_{99})a(b_{98}) \dots a(b_0)}$ , которое по аналогичным причинам лежит в  $\mathcal{A}$ . Отсюда следует, что количества чисел в  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  равны.

7. Пусть прямая  $EC$  повторно пересекает окружность  $(ABC)$  в точке  $X$ , а прямая  $EA$  повторно пересекает окружность  $(ACD)$  в точке  $Y$  (мы разберем расположение точек, указанное на рисунке 22; другие случаи рассматриваются аналогично).

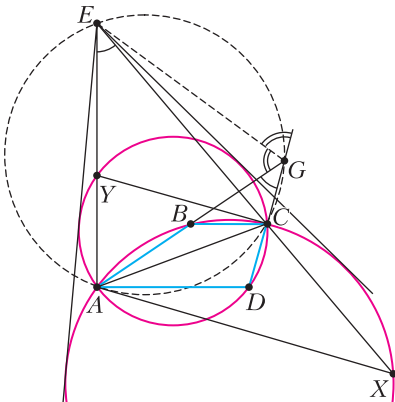


Рис. 22

Рассмотрим гомотеию с центром  $E$ , переводящую  $(ABC)$  в  $(ACD)$ . При такой гомотеии точка  $X$  переходит в  $C$ , а точка  $A$  – в  $Y$ . Отсюда  $AX \parallel YC$  и  $\angle AEC = \angle AYC - \angle ECY = \angle AYC - \angle AXC$ .

Но  $\angle AXC = 180^\circ - \angle ABC$  и  $\angle AYC = 180^\circ - \angle ADC$ . Значит,  $\angle AEC = \angle ABC - \angle ADC = \angle ABC - \angle BCG = \angle ABC - \angle BCG = \angle BGC$ . Из полученного равенства следует, что точки  $A, C, G, E$  лежат на одной окружности.

Поскольку точка  $E$  лежит на серединном перпендикуляре к  $AC$  (т.е. на оси симметрии окружностей  $(ABC)$  и  $(ACD)$ ), она является серединой дуги  $AGC$  окружности  $(ACGE)$ . Значит,  $E$  лежит на внешней биссектрисе угла  $BGC$ .

Аналогично показывается, что  $F$  также лежит на внешней биссектрисе угла  $BGC$ .

*Замечание.* У задачи есть следующее обобщение. Пусть  $ABCD$  – четырехугольник,  $G = AB \cap CD$ , а  $M$  – вторая точка пересечения окружностей  $(ADG)$  и  $(BCG)$  (иначе говоря, точка Микеля этого четырехугольника). Пусть  $E$  – центр гомотеии с положительным коэффициентом, переводящей  $(ABC)$  в  $(ADC)$ . Тогда точки  $A, C, M, E$  лежат на одной окружности, причем  $E$  – середина дуги  $AC$  (т.е.  $ME$  – биссектриса угла между  $AM$  и  $CM$ ).

8. Покажем, что Петя сможет определить вес одной гири, даже если у него 8000 гирь. Положим  $n = 4000$ .

**Лемма.** Для любых  $n$  гирь Петя может найти две гири, для которых он знает их суммарный вес.

**Доказательство.** Пусть Петя положит в прибор по очереди все возможные наборы из 10 гирь из наших  $n$ . Заметим, что каждое показание прибора – это вес какой-то из  $C_n^2$  пар гирь, будем говорить, что это показание *использует* эту пару. В то же время, Петя получит  $C_n^{10}$  показаний. Значит, одна из пар будет использована хотя бы

$$D = \frac{C_n^{10}}{C_n^2} = \frac{(n-2)(n-3)\dots(n-9)}{3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 10} \text{ раз.}$$

Иначе говоря, найдутся  $D$  измерений таких, что (1) в них прибор показывает один и тот же вес  $S$ , и (2) во всех десятках, использованных в этих испытаниях, есть две общие гири  $a$  и  $b$ . Мы покажем, что при выполнении условий (1) и (2) суммарный вес  $a$  и  $b$  обязательно равен  $S$ , т.е. вес этой пары Петя и сможет определить по показаниям прибора. Назовем десятки гирь, участвовавшие в этих  $D$  измерениях, *нужными*.

Предположим противное: сумма весов  $a$  и  $b$  не равна  $S$ . Рассмотрим все пары из  $n$  гирь, суммарные веса в которых равны  $S$ , назовем эти пары *хорошими*. Поскольку веса всех гирь различны,



хорошие пары не пересекаются; в частности, их не больше  $n/2$ . При этом в каждой нужной десятке есть не только гири  $a$  и  $b$ , но и хотя бы одна хорошая пара. Оценим теперь общее количество нужных десятков.

Пусть в нужной десятке хорошая пара не содержит ни  $a$ , ни  $b$ . Любую такую десятку можно получить, добавив к гирям  $a$  и  $b$  хорошую пару (не более чем  $(n-2)/2$  способами), а затем дополнив шестью из оставшихся  $n-4$  гирь. Итого, количество таких десятков не больше  $\frac{n-2}{2}C_{n-4}^6$ .

Во всех остальных нужных десятках хорошая пара содержит либо  $a$ , либо  $b$ . Если есть хорошая пара, содержащая  $a$ , то такая пара единственна. Для получения нужной десятки, содержащей эту пару, ее надо дополнить гирей  $b$  и еще семью гирями из оставшихся  $n-3$ ; итого, таких нужных десятков не больше  $C_{n-3}^7$ . Аналогично, нужных десятков, содержащих хорошую пару с гирей  $b$ , тоже не больше  $C_{n-3}^7$ . Получаем

$$D \leq \frac{n-2}{2}C_{n-4}^6 + 2C_{n-3}^7 = D \cdot \left( \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{4(n-3)} + \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{n-2} \right) < D \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = D.$$

Противоречие.

Завершим решение задачи. Построим следующий граф. Сопоставим каждой гире вершину. Среди каждых  $n$  гирь найдем одну пару с известной суммой; две соответствующие вершины соединим ребром. Если в этом графе нет нечетных циклов, то, как известно, его вершины можно раскрасить в два цвета так, чтобы каждое ребро соединяло вершины разных цветов. Но тогда вершин одного цвета не меньше  $n$ , и потому среди них мы провели ребро; противоречие.

Значит, в полученном графе есть цикл  $w_1, w_2, \dots, w_{2k+1}$ , и Петя знает суммарные веса всех пар соседних гирь в этом цикле. Взяв полусумму всех этих весов, Петя узнает суммарный вес всех гирь цикла. Затем, вычтя из суммарного веса  $(w_2 + w_3) + (w_4 + w_5) + \dots + (w_{2k} + w_{2k+1})$ , он узнает вес гири  $w_1$ .

*Замечание.* Оценивая чуть точнее, можно доказать лемму даже при  $n = 2000$ .

10 класс

1. Пусть  $ABC$  – данный треугольник,  $O$  – центр его описанной окружности,  $D, E, F$  – середины его сторон  $BC, CA, AB$  соответственно, так что  $DEF$  подобен  $ABC$  с коэффициентом  $1/2$  и  $OD \perp BC, OE \perp CA, OF \perp AB$ .

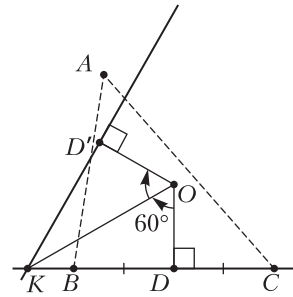


Рис. 23

Пусть при повороте вокруг  $O$  по часовой стрелке на угол  $120^\circ$  точка  $D$  переходит в  $D'$ . При таком повороте прямая  $BC$  переходит в перпендикуляр к  $OD'$ , проходящий через  $D'$ , пусть этот перпендикуляр пересекает  $BC$  в точке  $K$  (рис. 23). Видим, что прямоугольные треугольники  $ODK$  и  $OD'K$  равны (симметричны относительно  $OK$ ), и поэтому  $\angle KOD = \angle DOD'/2 = 60^\circ$ , значит, в прямоугольном треугольнике  $KOD$  верно  $OK = 2OD$ . Иными словами,  $K$  получается из  $D$  в результате поворотной гомотетии: поворота с центром  $O$  по часовой стрелке на угол  $60^\circ$  и последующей гомотетии с центром  $O$  и коэффициентом 2. Аналогичный результат получим для других точек  $L, M$  пересечения одноцветных прямых. Таким образом, треугольник  $KLM$  получается из  $DEF$  поворотной гомотетией с центром  $O$  и коэффициентом 2. Тогда  $KLM$  подобен  $DEF$  с коэффициентом 2, следовательно, равен  $ABC$ .

2. На 1-м шаге у каждого из 100 человек было выписано одно из чисел множества

$$A_1 = \{0, 1, 2, \dots, 100\}.$$

На 2-м шаге – одно из чисел множества

$$A_2 = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{199}{2} \right\}.$$

На 100-м шаге выписано одно из чисел множества

$$A_{100} = \left\{ \frac{S}{100}, \frac{S-1}{100}, \frac{S-2}{100}, \dots, \frac{S-100}{100} \right\},$$

где  $S = \frac{100 \cdot 101}{2}$  – сумма всех чисел (а вычитается число на оставшейся в конце карточке).

Видим, что  $A_1 \cup A_2 = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{199}{2}, \frac{200}{2} \right\}$ , так что  $|A_1 \cup A_2| = 201$ . Далее,  $|A_3| = 101$ , но числа  $50 - \frac{1}{2}, 50, 50 + \frac{1}{2}$  принадлежат  $A_2 \cap A_3$ , значит,  $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| \leq 201 + 101 - 3 = 299$ .

Итак, мы показали, что 300 чисел, выписанных на 1-м, 2-м и 100-м шагах, могут принимать не более 299 различных значений. Следовательно, какие-то два из них равны.

**3.** Существует при  $b > 1$ .

Легко видеть, что если  $b = 1$ , то всякий многочлен с коэффициентами от 9 до  $b - 1$  является нулевым.

Пусть  $b > 1$ . Представим  $a - b$  в  $b$ -ичной записи:  $a - b = c_n b^n + \dots + c_1 b + c_0$ , где  $c_i \in \{0, 1, 2, \dots, b - 1\}$ . Поскольку  $a - b \geq b$ , в этой записи  $n \geq 1$ .

Покажем, что  $P(x) = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0$  удовлетворяет условию. Действительно, для любого многочлена  $f$  с целыми коэффициентами  $f(a) - f(b)$  делится на  $a - b$ . Значит,  $P(a) - P(b)$  делится на  $a - b = P(b)$ . Но тогда и  $P(a) = (P(a) - P(b)) + P(b)$  делится на  $P(b)$ .

**4.** Будем изображать турнир в виде таблицы  $n \times n$ , в которой и столбцы, и строки пронумерованы числами от 1 до  $n$ . Столбцы будут соответствовать девочкам, а строки – мальчикам. Тогда каждая партия задается клеткой, координаты которой соответствуют номерам девочки и мальчика, играющих в этой партии. Поставим сначала фишку в клетку  $(1; 1)$ . После победы девочки фишка будет перемещаться вверх, а в случае победы мальчика – вправо. При этом если фишка доходит до края таблицы, то из последней строки при движении вверх она перемещается в первую строку, а из последнего столбца при движении вправо – в первый столбец. Тогда условие задачи равносильно тому, что фишка обошла все клетки таблицы, побывав в каждой ровно по одному разу.

Раскроем клетки таблицы в  $n$  цветов по диагоналям, идущим вправо-вниз: первую диагональ – в первый цвет, вторую – во второй, ...,  $n$ -ю диагональ – в  $n$ -й цвет, а следующие диагонали – снова в цвета с первого по  $(n - 1)$ -й. Заметим, что после каждой партии номер цвета клетки, в которой находится фишка, увеличивается на 1 по модулю  $n$ . Так как всего в турнире было проведено  $n^2$  партий, что кратно  $n$ , то в конце фишка находится в клетке  $n$ -го цвета, т.е. на главной диагонали (далее, говоря «диагональ», мы будем иметь в виду именно эту диагональ). Пусть финальная клетка в маршруте фишки расположена в столбце с номером  $m$ , тогда требуется доказать, что число  $m$  нечетно.

Из верхней клетки диагонали фишка не могла пойти вверх, так как уже была в клетке  $(1; 1)$ . Значит, если эта клетка не финальная, то из нее фишка пошла вправо. Тогда и из следующей клетки диагонали она сделала ход вправо и т.д.

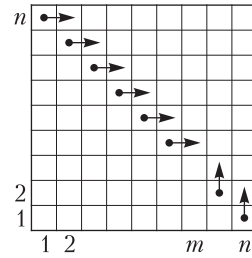


Рис. 24

до клетки, расположенной в столбце с номером  $m - 1$ . Аналогично, из клеток диагонали, находящихся в столбцах с номерами от  $m + 1$  до  $n$ , фишка ходила вверх (рис. 24). Пусть первая клетка диагонали, в которую попала фишка, находится в столбце с номером  $k$ . Рассмотрим путь фишки от начальной клетки до нее. Все пути от клеток первого цвета до следующей клетки  $n$ -го цвета должны быть такими же, как и рассматриваемый путь, а именно, каждый такой путь получается из другого смещением на вектор  $(1; -1)$ . Действительно, если бы фишка из клетки  $(a - 1; b)$  сделала ход вверх, а из клетки  $(a; b - 1)$  – вправо, то в клетку  $(a; b)$  она бы не попала, а если бы из этих клеток она делала ходы вправо и вверх соответственно, то попала бы в одну клетку дважды; поэтому из каждых двух таких клеток фишка делала одинаковые ходы.

Без ограничения общности будем считать, что  $k < m$ . Клетки диагонали, находящиеся левее финальной клетки, будем называть *левыми*, а находящиеся правее – *правыми*. Пронумеруем левые клетки числами от 1 до  $m - 1$ , а правые – от 1 до  $n - m$  (и те, и другие нумеруем, двигаясь вправо-вниз). Посмотрим, в каком порядке фишка обходила эти клетки. С левых клеток она смещалась на  $k$  клеток вправо (поскольку с них в клетку первого цвета она делала ход вправо), а с правых клеток – на  $k - 1$  клеток вправо. Значит, для левых клеток нам важен лишь остаток от деления номера на  $k$ , а для правых – от деления на  $k - 1$ . При этом если правых клеток меньше  $k$ , то можно увеличить  $n$  на  $2(k - 1)$ , добавив  $2(k - 1)$  правых клеток; это не повлияет на дальнейшие рассуждения. Для удобства заменим все номера клеток на соответствующие остатки, причем для правых клеток вместо остатка 0 будем использовать число  $k - 1$ .

Пусть число  $m$  при делении на  $k$  дает остаток  $d$ . Тогда первый переход с левых клеток на правые был с числа 0 на число  $k - d$ , и в этот момент все клетки с нулем в левой части были посещены. На диагонали остались только числа от 1 до

$k - 1$ . Дальше цепочка переходов между правыми и левыми клетками выглядит так:  $k - d \rightarrow \dots \rightarrow d$ . В этой цепочке каждое число от 1 до  $k - 1$  встречается два раза, начинается она на правых клетках, а заканчивается на левых. Переходы с правых клеток на левые будем называть переходами *первого типа*, а с левых на правые – *второго*. Тогда в цепочке  $k - 1$  переходов первого типа и  $k - 2$  переходов второго и они чередуются.

Докажем, что каждые два числа в цепочке, симметричные относительно ее центра, дают в сумме  $k$ . Для крайних чисел это верно. Каждые два симметричных перехода имеют один тип, поэтому в них по модулю  $k - 1$  (для переходов первого типа) или по модулю  $k$  (для переходов второго типа) прибавляется одно и то же число. Значит, сумма следующих двух симметричных чисел (которые ближе к центру цепочки) снова равна либо 1 по модулю  $k - 1$ , либо 0 по модулю  $k$ . Но сумма самих чисел не меньше 2 и не больше  $2k - 2$ , поэтому она может быть равна только  $k$ .

Предположим, что число  $m$  четно, и рассмотрим два случая.

1) Число  $k$  нечетно. Тогда центральный переход в цепочке имеет второй тип. У правой нижней клетки диагонали нечетный номер, поскольку число  $n - m$  нечетно, а  $k - 1$  четно. Левая верхняя клетка диагонали тоже имеет нечетный номер, поэтому при переходе первого типа четность числа меняется. Пусть с числа 1 переход первого типа переходит на число  $2s$ . Тогда по модулю  $k - 1$  переходы первого типа выглядят так:  $1 \rightarrow 2s, 2 \rightarrow 2s + 1, \dots, k - 1 \rightarrow 2s + k - 2$ . Суммы чисел в этих парах являются последовательными нечетными числами, поэтому при делении на  $k - 1$  они дают все нечетные остатки по два раза. В частности, есть переход, в котором сумма чисел равна 1 по модулю  $k - 1$ . Как показано выше, эта сумма равна  $k$ . Но тогда для этого перехода симметричный ему тоже имеет первый тип и содержит те же самые числа, т.е. один из переходов повторился, чего быть не должно.

2) Число  $k$  четно. Тогда у центрального перехода в цепочке первый тип. Последняя левая клетка имеет нечетный номер, так как число  $m - 1$  нечетно, а  $k$  четно. У первой правой клетки тоже нечетный номер, значит, при переходе второго типа четность числа не меняется. Аналогично первому случаю, можно показать, что среди них найдется переход, пара чисел в котором дает сумму  $k$ , и получаем такое же противоречие.

5.  $20!$ .

При  $n = 20!$  имеем

$$\frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+20)}{n^2} = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+20)}{20!} = C_{n+20}^{20}$$

– целое число.

Пусть теперь  $n > 20!$  и пусть  $P = n(n+1)(n+2)\dots(n+20)$  делится на  $k^2$ , где  $k = n + i, i \in \{0, 1, 2, \dots, 20\}$ . Имеем  $P/k = (k-i)(k-i+1)\dots(k-1)(k+1)(k+2)\dots(k+j)$ , где  $j = 20 - i$ . Заметим, что число  $P/k \equiv (-1)^i i! \pmod{k}$  должно делиться на  $k$ . Но  $0 < i!j! \leq i! \cdot (i+1)(i+2)\dots(i+j)20! < n \leq k$ , значит,  $i!j!$  не делится на  $k$ . Противоречие.

8.  $n + a^2$ .

Заметим, что равенство достигается при  $x_0 = a$  и  $x_1 = \dots = x_n = 1$ .

Запишем

$$\sum x_k^2 = \sum (1 - x_k)^2 + 2 \sum x_k - (n + 1) = \sum (1 - x_k)^2 + n - 1 + 2a.$$

Достаточно доказать, что  $\sum (1 - x_k)^2 \geq (1 - a)^2$ .

Пусть  $x_0$  – наименьшее из чисел.

При  $x_0 \leq a$  имеем  $\sum (1 - x_k)^2 \geq (1 - x_0)^2 \geq (1 - a)^2$ .

Если же  $x_0 \geq a$ , то  $\sum (1 - x_k)^2 = \sum x_k \left( \frac{1}{x_k} - 2 + x_k \right)$ , что, поскольку выражения в скобках неотрицательны, не меньше

$$a \sum \left( \frac{1}{x_k} - 2 + x_k \right) = a \left( n + \frac{1}{a} - 2(n+1) + n + a \right) = a \left( \frac{1}{a} - 2 + a \right) = (a - 1)^2.$$

11 класс

1. Положим  $a = \sin x + \operatorname{tg} x$  и  $b = \cos x + \operatorname{ctg} x$ . Введем обозначения:  $u = \sin x + \cos x$  и  $v = \sin x \cos x$ . По условию рациональными являются числа  $c = a + b = u + \frac{1}{v}$  и  $d = ab = v + u + 1$ .

Отсюда  $k = d - c = v + 1 - \frac{1}{v}$ . Значит,  $t = \sin 2x = 2v$  – корень квадратного уравнения  $t^2 + 2t - (4 + 4k) = 0$  с рациональными коэффициентами, откуда следует требуемое.

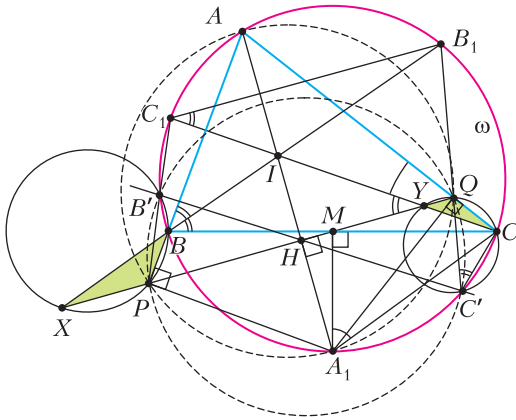


Рис. 25

4. Обозначим точки пересечения прямой  $MN$  с прямыми  $AB$ ,  $AC$ ,  $BI$  и  $CI$  через  $P$ ,  $Q$ ,  $X$  и  $Y$  соответственно (рис. 25). Пусть прямые  $AI$ ,  $BI$  и  $CI$  повторно пересекают  $\omega$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  соответственно. Обозначим  $\angle BAI = \angle CAI = \alpha$ ,  $\angle ABI = \angle CBI = \beta$ ,  $\angle ACI = \angle BCI = \gamma$ , тогда  $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$  из суммы углов треугольника  $ABC$ . Поскольку  $MN \perp AI$ , имеем  $\angle AQM = 90^\circ - \alpha$ . Так как четырехугольник  $ABA_1C$  вписанный,  $\angle MA_1C = 90^\circ - \angle BCA_1 = 90^\circ - \alpha$ . Таким образом,  $\angle MA_1C + \angle MQC = 180^\circ$ , поэтому четырехугольник  $A_1CQM$  вписанный. Следовательно,  $\angle QA_1 = 90^\circ$ . Аналогично,  $\angle PA_1 = 90^\circ$ , откуда следует, что точки  $A$ ,  $A_1$ ,  $P$ ,  $Q$  лежат на окружности  $\gamma$ , построенной на отрезке  $AA_1$  как на диаметре.

Теперь заметим, что  $\angle QC'C = \angle QYC = 90^\circ - \angle CIA_1 = 90^\circ - \alpha - \gamma = \beta$ . Однако из вписанности четырехугольника  $BC'B_1$  мы получаем, что  $\angle CC'B_1 = \angle B_1BC = \beta = \angle CC'Q$ . Следовательно, точки  $C'$ ,  $Q$  и  $B_1$  лежат на одной прямой. Аналогично, точки  $P$ ,  $B'$  и  $C_1$  лежат на одной прямой.

В силу сказанного выше и вписанности четырехугольника  $C_1B_1CB$  имеем, что  $\angle CC_1B_1 = \beta = \angle CYQ$ , поэтому  $C_1B_1 \parallel PQ$ . Поскольку четырехугольник  $B'C_1B_1C'$  вписанный,  $\angle PB'C' = \angle C_1B_1C' = \angle PQC'$ . Значит, четырехугольник  $B'QC'P$  вписанный. Тогда радикальные оси его описанной окружности, окружности  $\gamma$  и окружности  $\omega$  пересекаются в одной точке, а это прямые  $B'C'$ ,  $PQ$  и  $AA_1$ . Следовательно, точка  $H$  лежит на прямой  $B'C'$ , что и требовалось доказать.

5. Побеждает Гриша.

Заметим, что  $2023 = 7 \cdot 17^2$ . Гриша разобьет числа на доске на две группы по 5 и будет возводить в квадрат числа из первой группы и из второй

группы по очереди. Легко видеть, что квадраты целых чисел, не кратных 7, при делении на 7 могут давать лишь остатки 1, 2 и 4. Следовательно, после увеличения максимум на 2 числа на доске будут давать при делении на 7 только остатки 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Значит, ни одно из чисел не будет делиться на 7, а поэтому не будет делиться и на 2023.

6. Из условия задачи мы сразу получаем, что  $\angle XYZ = 90^\circ = \angle XTZ$ . Обозначим через  $Q$  точку пересечения прямых  $XY$  и  $ZT$ , через  $R$  – точку пересечения прямых  $ZY$  и  $XT$  (рис. 26). Без

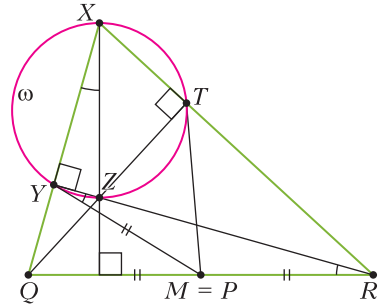


Рис. 26

ограничения общности можно считать, что точка  $Z$  лежит на отрезках  $RY$  и  $QT$ . Поскольку точка  $R$  лежит и в плоскости  $ABD$ , и в плоскости  $BCD$ , то она лежит на прямой  $BD$ . Аналогично, точка  $Q$  лежит на прямой  $AC$ .

Заметим, что  $RY$  и  $QT$  – высоты треугольника  $XQR$ . Тогда  $Z$  – точка пересечения высот этого треугольника, и поэтому  $XZ \perp QR$ . Пусть  $M$  – середина отрезка  $QR$ . Поскольку  $\angle QYR = 90^\circ$ , то  $YM = MR = RQ$  по свойству медианы прямоугольного треугольника. Значит,  $\angle MYR = \angle YRQ = 90^\circ - \angle XQR = \angle ZXQ$ . Следовательно, прямая  $YM$  касается окружности  $\omega$ . Аналогично, прямая  $TM$  тоже касается окружности  $\omega$ , поэтому точки  $M$  и  $P$  совпадают.

Рассмотрим две параллельные плоскости  $\beta$  и  $\gamma$ , одна из которых содержит отрезок  $AC$ , а другая – отрезок  $BD$ . Заметим, что середины всех отрезков, соединяющих точку из плоскости  $\beta$  и точку из плоскости  $\gamma$ , лежат в одной плоскости, параллельной  $\beta$  и  $\gamma$ . Действительно, если ввести декартовы координаты так, что одна из плоскостей задается уравнением  $z = 0$ , а другая – уравнением  $z = h$  (где  $h$  есть расстояние между плоскостями  $\beta$  и  $\gamma$ ), то середины всех рассматриваемых отрезков лежат в плоскости  $z = h/2$ . Применяя это наблюдение для отрезков  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$ ,  $QR$ , мы получаем, что их середины

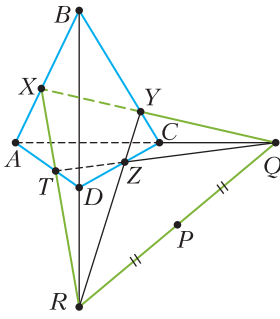


Рис. 27

лежат в одной плоскости, что и требовалось (рис. 27).

7. Многочлен  $P(x)$  называется *целозначным*, если  $P(k)$  – целое число при любом целом  $k$ . Нам надо доказать, что если многочлены  $P(x)$  и  $P'(x)$  целозначны, причем степень  $P(x)$  равна  $d$ , то старший коэффициент многочлена  $N_d \cdot P(x)$  – целый.

**Лемма.** Пусть  $P(x)$  – целозначный многочлен степени  $d$ . Тогда все коэффициенты многочлена  $d! \cdot P(x)$  целые.

**Доказательство.** Рассмотрим многочлен

$$Q(x) = \sum_{i=0}^n P(i) \frac{(x-0)(x-1)\dots(x-(i-1))(x-(i+1))\dots(x-d)}{(i-0)(i-1)\dots(i-(i-1))(i-(i+1))\dots(i-d)}.$$

Его степень не больше  $d$  и его значения совпадают с соответствующими значениями  $P(x)$  в точках  $x=0, 1, 2, \dots, d$ . Это означает, что многочлен  $P(x) - Q(x)$  имеет степень не выше  $d$ , а также обнуляется в  $d+1$  точках. Поэтому он нулевой, т.е.  $P(x) = Q(x)$ . (Формула выше – это частный случай *интерполяционной формулы Лагранжа*.)

Осталось заметить, что в формуле выше в  $i$ -м слагаемом знаменатель равен  $(-1)^{d-i} i!(d-i)!$ ; это число делит  $d!$ , поскольку  $\frac{d!}{i!(d-i)!} = C_d^i$ . Значит, при умножении каждого слагаемого на  $d!$  получается многочлен с целыми коэффициентами.

Перейдем к решению задачи. Индукция по  $d$ . База при  $d=0$  тривиальна. Для перехода индукции рассмотрим бицелозначный многочлен  $P(x)$  степени  $d$ ; пусть его старший коэффициент равен  $a$ .

Если  $d$  не является простым числом, то  $N_d = dN_{d-1}$ . Заметим, что многочлен  $\Delta P(x) = P(x+1) - P(x)$  также бицелозначный, имеет степень  $d-1$  и старший коэффициент  $ad$ . По предположению индукции, число  $N_{d-1} \cdot ad = N_{d-1}$

является целым, что и требовалось доказать.

Пусть теперь  $d$  – простое число; тогда  $N_d = N_{d-1}$ , и то же рассуждение дает, что число  $dN_d a$  является целым. Предположим, что  $N_d a$  – нецелое число; тогда знаменатель числа  $a$  (в несократимой записи) делится на простое число  $d$ .

Заметим, что сумма всех коэффициентов многочлена  $P(x)$  – это целое число  $P(1)$ . Поскольку знаменатель числа  $a$  делится на  $d$ , среди коэффициентов многочлена  $P(x)$  найдется еще один, у которого знаменатель делится на  $d$ ; пусть это коэффициент  $b$  при  $x^i, i < d$ . Заметим, что  $i > 0$ , так как число  $P(0)$  целое.

Но тогда у целозначного многочлена  $P'(x)$  коэффициент при  $x^{i-1}$  равен  $ib$  и также имеет знаменатель, кратный  $d$ . Поскольку  $d$  – простое число, отсюда вытекает, что коэффициент при  $x^{i-1}$  у многочлена  $(d-1)!P'(x)$  нецелый, что противоречит лемме.

8. Рассматриваемые сети из  $N - k$  дорог называем далее *k-сетями*. Рассмотрим неориентированный граф, образованный дорогами  $k$ -сети. В нем не более  $k$  компонент связности, поскольку в каждой есть выделенный город. С другой стороны, компонент не менее  $k$ , поскольку всего ребер не более  $N - k$ . Поэтому компонент ровно  $k$ , каждая из них есть дерево, содержит единственный выделенный город и – вспоминая про ориентацию – ребра каждого дерева направлены по направлению к выделенному городу. В частности, из каждого не выделенного города должна выходить ровно одна дорога, а из выделенного – 0 дорог.

Рассмотрим  $(k+1)$ -оптимальную сеть  $A$  с выделенными городами  $y_0, y_1, \dots, y_k$  и  $k$ -оптимальную сеть  $B$  с выделенными городами  $x_1, \dots, x_k$ . Не умаляя общности, ни из одного  $x_i$  нельзя добраться в сети  $A$  до города  $y_0$ . Пусть  $U$  – множество городов, из которых в  $A$  можно добраться до  $y_0$ , а  $\alpha, \beta$  – множества дорог, выходящих из  $U$  в сетях  $A, B$  соответственно. Имеем  $|\alpha| = |U| - 1, |\beta| = |U|$ .

Рассмотрим сеть  $D = (A \setminus \alpha) \cup \beta$ . Утверждается, что это  $k$ -сеть для выделенных городов  $y_1, \dots, y_k$ . В самом деле, число дорог в ней равно  $|D| = N - k - 1 - (|U| - 1) + |U| = N - k$ . Из каждого города, кроме  $y_1, \dots, y_k$ , выходит ровно одна дорога. Выезжая из любого города вне  $U$  и используя дороги сети, мы по-прежнему можем попасть в один из городов  $y_1, \dots, y_k$ . Выезжая из города в  $U$ , мы либо попадаем вне  $U$  – и далее в один из городов  $y_1, \dots, y_k$ , – либо заикливаемся в  $U$ . Но тогда  $\beta$  содержит цикл, что невозможно. Рассмотрим сеть  $C = (B \setminus \beta) \cup \alpha$ . Утверждается, что это  $(k+1)$ -сеть для выделенных городов



$x_1, \dots, x_k, y_0$ . В самом деле,  $|C| = n - k - 1$  и, выезжая из любого города по дорогам сети  $C$ , мы либо попадаем в  $U$  и тогда по  $\alpha$  доезжаем до  $y_0$ , либо ни разу не попадаем в  $U$  и тогда доезжаем до одного из городов  $x_1, \dots, x_k$ .

Итак,  $C$ ,  $D - k$ -сеть и  $(k + 1)$ -сеть. Сумма их стоимостей такая же, как у  $A$  и  $B$ . Значит, они обе оптимальны. Итак, для сети  $A$  удалось выкинуть выделенный город и найти оптимальную  $k$ -сеть с оставшимися выделенными городами. Теперь можно построить требуемую нумерацию в обратном порядке (начиная с пустой  $N$ -сети).

## Лингвистические задачи

### Задача 1

**Задание 1.** Проволока – оболочка, провод – обод, владыка – обладать. Во втором слове каждой пары произошло выпадение начального  $v$  после приставки *об-* (ср. также *совет – обет*, *поворот – оборот*, *привычка – обычай* и т.п.).

**Задание 2.** «Жить», что видно по однокоренному глаголу *обитать*.

### Задача 2

**Задание 1.** *valahány* (сколько-нибудь), *ahol* (где), *valahogy* (как-нибудь), *mikor* (когда?), *valahol* (где-нибудь), *némikor* (иногда).

**Задание 2.** какой-нибудь (*valamily*), где? (*hol*), как (*ahogy*), кое-какой (*némely*), кто-нибудь (*valaki*), сколько? (*hány*).

Путем попарного сопоставления венгерских слов обнаруживаем два ряда элементов:

- 1) *vala-*, *né-*, *a-*; возможно отсутствие элемента;
- 2) *-mely*, *-hogy*, *-hány*, *-mikor*, *-hol*, *-ki*.

Элементы первого ряда могут стоять только на первом месте, а элементы второго ряда – на втором месте в слове.

Теперь сравним переводы (приведенные как в условии, так и в задании). Например, *когда-нибудь* и *сколько-нибудь* различаются основными понятиями, но содержат в себе одно и то же дополнительное понятие – понятие неопределенности (*когда-нибудь* – в неопределенное время, *сколько-нибудь* – неопределенное количество).

Аналогично выделяются еще три элементарных значения дополнительного характера: понятие небольшой совокупности (ср. *несколько*, *когда-где*, *иногда*); понятие относительности (по-русски обычно особого выражения не имеет, однако сравните *какой* и *который*); понятие вопросительности (в русских переводах обозначено знаком вопроса, а в венгерском языке значение

вопроса выражается в составе самого местоимения или местоименного наречия).

Кроме этого ряда из четырех дополнительных значений, уточним состав самих основных понятий. Это делается также путем попарного сравнения или путем вычитания из общего значения перевода второстепенного слагаемого. В результате имеем шесть корневых значений: признак, образ действия, количество, время, место, лицо. Теперь ясно, что первому ряду значащих элементов соответствует первый ряд элементарных значений, а второму – второй. Точно установить, какой элемент какое значение выражает, нетрудно. Они соответствуют друг другу в том порядке, в каком мы их привели выше, т.е. списки налагаются друг на друга.

# КВАНТ

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,  
А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин,  
В.А.Тихомирова, А.И.Чернуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,  
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**М.Н.Грицук**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован  
в Комитете РФ по печати.**

**Рег. св-во ПИ №ФС77-54256**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,  
«Квант»**

**Тел.: +7 916 168-64-74**

**E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru**

### Отпечатано

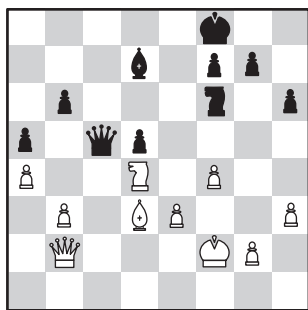
**в соответствии с предоставленными  
материалами  
в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,  
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8  
Тел.: (831) 218-40-40**

## Исчезающая КЛАССИКА

Фабиано Каруана стал победителем первого этапа престижной серии Grand Chess Tour-2023, который проходил в Бухаресте. В рамках серии проводятся лишь два турнира по классике, что подчеркивает тенденцию к сокращению числа шахматных турниров с длинным контролем.

### Ф.Каруана – Я.Непомнящий Бухарест, 2023

1. d4 ♘f6 2. ♘f3 d5 3. c4 e6 4. ♘c3 c5 5. e3 ♗c6 6. cd ed 7. ♗b5 cd 8. ♗d4 ♗d7 9. 0-0 ♗d6 10. ♘f3 ♗e6 11. b3 a6 12. ♗d3 ♗e5 13. ♗e5 ♗e5 14. ♗b2 ♗c8 15. ♗c1 0-0 16. f4 ♗c7?! 17. ♗e2 (17. ♗a4!?, затрудняя маневр черного слона) ♗b6 18. ♗d4 ♗d4 19. ♗d4 ♗a5 20. ♗e2 ♗fe8 21. h3 ♗d7 22. ♗c8 ♗c8 23. ♗b2 ♗c5 24. a4 a5 25. ♗d2 b6 26. ♗b1 ♗a3 27. ♗h2 h6 28. ♗b2 ♗e7 29. ♗c2 ♗c5 30. ♗f3 ♗c2 31. ♗c2 ♗c5 32. ♗d3 ♗f8 33. ♗d4 ♗g8 34. ♗g1 ♗f8 35. ♗f2 ♗e7 (35... ♗g8!? с вероятным повторением ходов) 36. ♗b2 ♗f8.

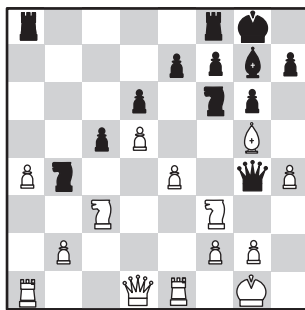


37. ♗c2! С угрозой активизировать ферзя после ♗e5. 37... ♗e4+?! Невынужденная агрессия, осложняющая защиту черных. Надежнее 37... ♗d6. 38. ♗e4 de 39. ♗d4 ♗c6 40. ♗e2 ♗c3 41. ♗a6 ♗d2+ 42. ♗e2 ♗b4 43. ♗c8+ ♗e8 44. ♗c2 ♗d7 45. ♗d4 f5? Защищая пешку,

черные получают стратегически тяжелую позицию, фиксируя пешки f5 и e4 на полях цвета слона, чем в итоге умело пользуются белые. Хорошие практические шансы оставляло 45... ♗g8 46. ♗e4 ♗e6 с переходом в ферзевый эндшпиль без пешки. 46. ♗c7! ♗d2+ 47. ♗e2 ♗e6 48. ♗b6 ♗f7 49. ♗d4 ♗a2 50. ♗a7+ ♗g8 51. ♗a8+ ♗h7 52. ♗a5 ♗h8 53. ♗d8+ ♗h7 54. ♗a5 ♗h8 55. b4 ♗c4 56. ♗d8+ ♗h7 57. ♗d1 ♗b3 58. ♗d7 ♗e6 59. ♗b5 ♗h8 60. ♗c5 g6 61. ♗e1 ♗g8 62. ♗d6 ♗f7 63. ♗d2 ♗a4 64. ♗d4 ♗c4 65. ♗f2 h5 66. ♗g3 ♗a3 67. b5 ♗d3 68. ♗c1 ♗b5 69. ♗c7+ ♗f8 70. ♗c5+, черные сдались.

### Ф.Каруана – М.Вашье-Лаграв Бухарест, 2023

1. d4 ♗f6 2. c4 g6 3. h4!? ♗g7 4. ♗c3 0-0 5. e4 d6 6. ♗e2 c5 7. d5 b5 8. cba6 9. a4 ab 10. ♗b5 ♗a6 11. ♗a6 ♗a6 12. ♗f3 ♗d7 13. 0-0 ♗g4 14. ♗e1 ♗b4 15. ♗g5.

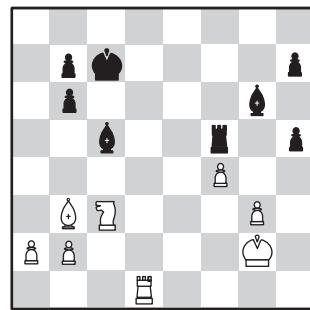


15... ♗h5? Начало ошибочно-го плана, связанного с атакой на королевском фланге. 16. ♗e7! ♗f4 17. g3 ♗fe8? Вторая и решающая ошибка. Усложняла задачу белых 17... ♗bd3. 18. ♗d6! ♗fd3 19. ♗e3 ♗b2 20. ♗b3 ♗d3 21. e5 f5 22. ♗h2 ♗h3 23. ♗e2. Белые легко отразили наскок черных коней, оставшись с парой проходных пешек в центре, поэтому черные сдались.

На женском турнире в Сент-Луисе красивой партией отметилась Александра Костенюк.

### А.Костенюк – Х.Конеру Сент-Луис, 2023

1. e4 e5 2. ♗f3 ♗c6 3. ♗c4 ♗f6 4. d3 d5 5. ed ♗d5 6. 0-0 ♗e7 7. ♗e1 f6 8. d4 ♗b6 9. ♗b3 ♗d4 10. ♗d4 ♗d4 11. ♗d4 ed 12. ♗f4 ♗f5 13. ♗c7 ♗d7 14. ♗d2 ♗c5 15. ♗b6 ab 16. ♗e4 ♗he8. В случае 16... ♗e4 17. ♗e4 ♗he8 18. ♗e8 ♗e8 19. ♗d5, несмотря на материальное равенство, у белых заметное позиционное преимущество. 17. ♗g3 ♗g6 18. h4 ♗e5 (18... h5!?, тормозя продвижение белой пешки) 19. h5 ♗e8 20. h6 gh 21. ♗e4 ♗g6 22. ♗f6+ ♗d6 23. ♗ad1 h5 24. g3 ♗d8 25. ♗g2 ♗f5 26. ♗e4+ ♗c7 27. f4 ♗e7 28. c3 dc? (28... d3!, не давая белым открыть линии для атаки) 29. ♗c3 ♗d1 30. ♗d1 ♗c5?



31. ♗b5+ ♗c6 (вынужденно, так как 31... ♗c8 ведет к мату после 32. ♗e6+ ♗b8 33. ♗d8×) 32. ♗a7+ ♗c7 33. ♗b5+ ♗c6 34. ♗a4 ♗f8 35. ♗d4+ ♗d5. Красивый вариант в случае 35... ♗d6 указала Александра в послематчевом комментарии: 36. f5! ♗d4 37. fg ♗f2+ 38. ♗h3 ♗c5 39. ♗d4! ♗d4 40. g7, и пешка проходит в ферзи. 36. ♗b3+ ♗e4 (36... ♗d6 37. ♗e6+) 37. ♗e6 ♗c8 38. ♗c2+ ♗e3 39. f5 ♗e7 40. ♗d3+ ♗e2 (40... ♗e4 41. ♗c3+) 41. ♗d4+, ввиду неизбежного мата после 41... ♗e1 42. ♗d1×, черные сдались.

А.Русанов



Индекс 90964

# ЗАГАДОЧНЫЕ ЦВЕТА

Разве бывает дымка синей, небо красным,  
а Луна голубой?



*Уроки с физикой*

ISSN 0130-2221 23007



(ПОДРОБНЕЕ — НА С. 36 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)