

МАЙ

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



Китайские числа

Даны числа в записи китайскими иероглифами:

五兆四千六十九

5 000 000 004 069

七千万九十

70 000 090

八千八百八亿八万一

880 800 080 001

十亿

1 000 000 000

ЗАДАНИЕ 1

Запишите иероглифами:

41 478 599 005 616

ЗАДАНИЕ 2

Опишите, чем китайский способ записи чисел отличается от привычного для нас.

В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук
Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН

Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

Московский
физико-технический институт
Московский центр непрерывного
математического образования

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Н.Н.Андреев, Л.К.Белоухов,
М.Н.Бондаров, А.А.Варламов,
С.Д.Варламов, А.П.Веселов,
А.Н.Виленкин, Н.П.Долбилин,
С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,
А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов,
П.А.Кожевников, С.П.Коновалов,
К.П.Кохась, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,
А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,
А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,
А.В.Устинов (заместитель главного
редактора), А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора)**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, В.И.Берник,
А.А.Боровой, В.В.Козлов,
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

- 2 К 120-летию со дня рождения А.Н.Колмогорова
3 Конечные геометрии. *А.Колмогоров*
15 Проблемы резистора. *Л.Ашкинази*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 28 Задачи М2746–М2749, Ф2753–Ф2756
29 Решения задач М2734–М2737, Ф2741–Ф2744

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Физика + спорт

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 37 Диск Фейнмана, конденсатор Тамма и импульс
электромагнитного поля. *С.Герасимов*

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 41 Задачи

НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

- 42 Парад ледяных сталагмитов. *В.Птушенко*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 43 Задача о двух биссектрисах. *Е.Бакаев*

ОЛИМПИАДЫ

- 47 84-я Московская олимпиада школьников
по физике

- 59 Ответы, указания, решения

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «Проблемы резистора»*
II *Лингвистические задачи*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

К 120-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ А.Н.КОЛМОГОРОВА

В июне 1972 года состоялась очередная летняя математическая школа ФМШ №18 под руководством академика Андрея Николаевича Колмогорова. Она проходила в Пушкино – небольшом научном (биологического направления) городке, полном зелени. Для каждой летней школы Андрей Николаевич выбирал определенную математическую тему, в рамках которой он читал свои лекции, а помогавшие ему студенты-математики и аспиранты проводили индивидуальные занятия в классе – решали со школьниками конкретные задачи по теме лекций.

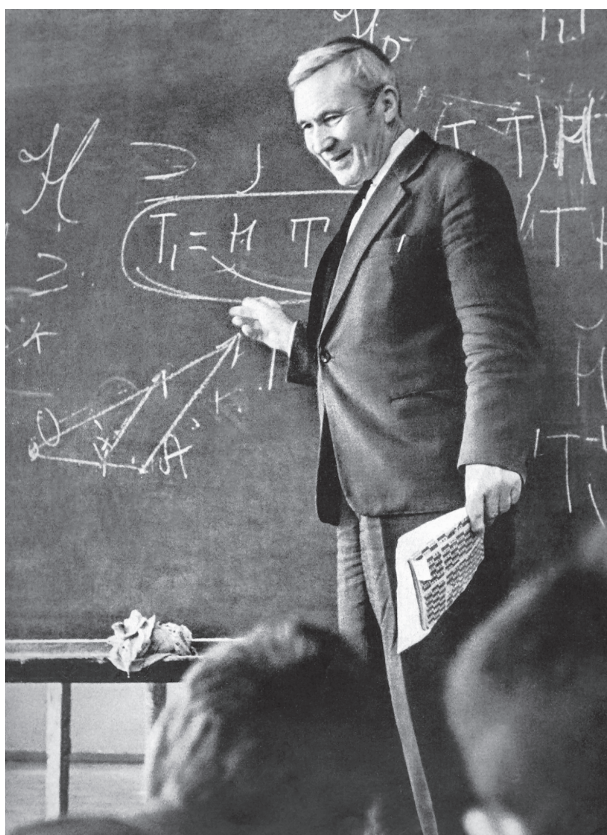
В этот раз Андрей Николаевич выбрал тему геометрии, но не простой, а *конечной* – вернее, речь шла о *конечных геометриях*.

В конечной геометрии лишь конечное число точек и конечное число прямых. Но что следует понимать под *прямой* в этой геометрии? Прямая – это некий очень специфический набор точек, подчиняющийся определенным, простым и естественным, правилам – *аксиомам*. Аксиом совсем немного, три или четыре, и взяты они из стандартного курса школьной геометрии.

Может ли в такой геометрии быть всего две точки? Может ли прямая состоять из двух точек? Или из трех, четырех, пяти точек? Могут ли какие-то две прямые содержать разное количество точек или же все они содержат одно и то же их количество? А каким может быть общее количество точек во всей конечной геометрии? Может ли оно быть равным 7, 8 или 9?

Все вопросы такого рода появляются сразу же, как только возникает сама идея о том, что в геометрии может быть конечное число объектов – точек и прямых. Андрей Николаевич начал свою первую лекцию рассказом о том, что еще в Древней Греции философская идея о физической Вселенной, состоящей из конечного числа объектов-атомов, довольно широко пропагандировалась в научных кругах того времени и поэтому она естественным образом трансформировалась также и в идею о математике с конечным числом объектов, в первую очередь геометрических. Соединить философскую идею о конечности числа геометрических объектов с логикой и простейшими правилами «поведения» объектов – аксиомами – и было движущей силой и путеводной нитью всей летней математической школы 1972 года.

Я помню, как был счастлив Андрей Николаевич в те кульминационные моменты своих лекций, когда завершал доказательство того, что любые две прямые конечной геометрии содержат одно и то же число точек, что общее число точек в конечной геометрической «вселенной» может быть только точным квадратом натурального числа и никаким другим, что общее число прямых, проходящих через каждую точку, всегда на 1 превышает число точек на каждой отдельной прямой и другие тому подобные удивительные количественные соотношения, которые логическим путем вытекают из аксиом.



Андрей Николаевич Колмогоров

Мы же, студенты-математики и аспиранты, участвующие в работе математической школы, подробно обсуждали лекции Андрея Николаевича и сопутствующие им конкретные математические задачи, давали решать их школьникам, а также придумывали свои, совсем новые задачи, пополнявшие исходный (не очень большой) список задач по этой теме, предложенный Андреем Николаевичем перед началом своих лекций.

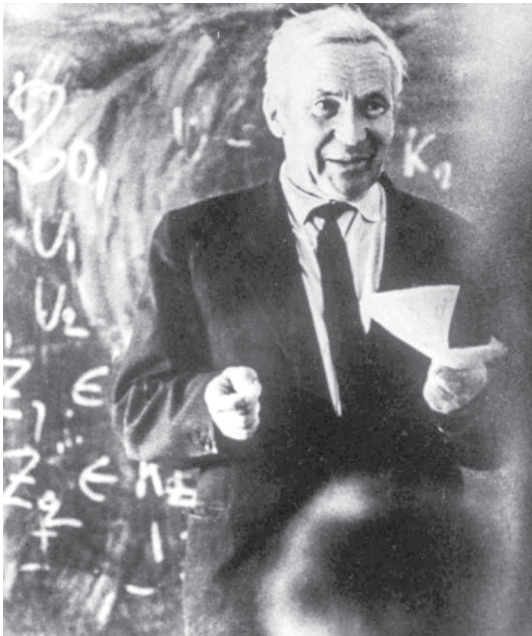
Ближе к концу школы Андрей Николаевич стал рассказывать об идее дискретного времени: что, если время течет не непрерывно, а дискретно, от точки к точке, и представляет собой такую же прямую из конечного числа точек, как и все прямые плоскости, и что получится, если эту прямую добавить к уже имеющимся? Однако эта расширенная программа исследований конечных геометрий фактически не была начата: месяц занятий в летней школе истек очень быстро.

В результате обработки записей лекций А.Н.Колмогорова автором этих строк и дальнейшей работы над задачами о конечных геометриях и появилась статья, которая предлагается читателям «Кванта» и которая в концентрированном виде передает дух Пущинской летней математической школы 1972 года.

Г.Гальперин

Конечные геометрии

А.КОЛМОГОРОВ



А.Н.Колмогоров читает лекцию

ВНАСТОЯЩЕЕ ВРЕМЯ ГЕОМЕТРИЯ имеет несколько ветвей. Первый шаг к новой геометрии сделали художники эпохи Возрождения, которые бились над за-

дачей точного изображения того, что видит глаз. Поскольку реальные картины являются трехмерными, а картины, выполняемые художниками, – двумерными, то может показаться, что рисовать реалистически нельзя. Художники положили в основу решений этой проблемы зрительное восприятие. Представим себе человека, смотрящего одним глазом в окно на некую реальную сцену. Он видит ее потому, что световые лучи, испускаемые различными точками этой «картины», достигают его глаза. Скопление таких световых лучей называют проектирующим пучком. А поскольку лучи проходят сквозь стекло, мы имеем возможность отметить на нем точку, через которую проходит каждый луч. Совокупность всех таких точек называется проекцией. Художникам принадлежит открытие, что глаз воспринимает эту проекцию так же, как и саму реальную сцену.

Использование метода проецирования поставило на повестку дня основной геометрический вопрос, который впервые был рассмотрен художниками, а затем подхвачен математиками. Каковы же те общие

геометрические свойства исходной фигуры и ее проекции, которые дают возможность произвести один и тот же эффект на человека? Поиски ответа на этот вопрос привели к новым понятиям и теоремам, на основе которых окончательно сформулировалась новая ветвь геометрии, которая называется проективной геометрией.

Ниже приводятся некоторые из этих понятий и теорем. Но сначала поговорим об аффинных геометриях.

1. Конечные аффинные геометрии

Начнем с некоторых наиболее простых фактов обычной плоской геометрии, на основе которых построим аксиоматическую теорию.

Определение 1. *Аффинной плоскостью назовем множество элементов, называемых точками, и систему его подмножеств, называемых прямыми. При этом должны выполняться три следующие аксиомы.*

A1. *Через две различные точки проходит одна и только одна прямая.*

A2. *Для любых заданных прямой a и точки A существует одна и только одна проходящая через A прямая b , параллельная a . (Прямые называются параллельными, если они либо совпадают, либо не имеют общих точек.)*

A3. *Существуют три неколлинеарные точки.*

Лемма 1. *Две различные прямые имеют не более одной общей точки.*

Доказательство. Это следует из того, что если общих точек по крайней мере две, то по A1 прямые совпадают.

Лемма 2. *На плоскости существуют по крайней мере 4 различные точки.*

Доказательство. В силу A3 существуют три неколлинеарные точки A, B, C . Согласно A2, существует прямая a , проходящая через A параллельно BC , и существует прямая $b \parallel AB$ и проходящая через C . Если предположить, что $a \parallel b$, то несложно доказать, что $AB \parallel BC$, а это невозможно, так как $AB \neq BC$, а B – их общая точка. Значит, a и b пересекаются в некоторой четвертой точке, которая по A3 не совпадает ни с одной из точек A, B, C . Лемма доказана.

Дадим еще одно определение.

Определение 2. *Множество прямых образует пучок, если*

а) либо все прямые этого множества проходят через одну точку A ;

б) либо все прямые множества параллельны некоторой прямой a – в этом случае будем говорить о пучке параллельных.

Доказать, что на плоскости существует еще хотя бы одна точка, нельзя. Действительно, можно построить геометрию ров-

но из 4-х точек. Если эти точки занумеровать 1, 2, 3, 4 (рис. 1), то получим шесть прямых (1, 2), (3, 4), (1, 4), (2, 3) и (1, 3), (2, 4).

При этом пучков параллельных будет вдвое меньше – 3.

2. Конечные проективные геометрии

Теперь «пополним» аффинную плоскость некоторыми «бесконечными» точками и придем таким образом к понятию проективной плоскости.

Пусть задана аффинная плоскость A . Для каждой прямой $a \in A$ рассмотрим пучок параллельных ей прямых и назовем его бесконечно удаленной точкой направления a . Определим теперь пополнение A так. Точками P являются все точки плоскости A и все бесконечно удаленные точки. Прямыми служат а) обычные прямые, дополненные соответствующими бесконечно удаленными точками и б) «бесконечная прямая», состоящая из всех бесконечно удаленных точек плоскости.

Легко убедиться, что P является проективной плоскостью в смысле следующего определения.

Определение 3. *Проективной плоскостью называется множество, элементы которого – точки, и набор его подмножеств, именуемых прямыми, если при этом выполнены такие аксиомы.*

П1. *Через две различные точки проходит одна и только одна прямая.*

П2. *Любые две прямые пересекаются по меньшей мере в одной точке.*

ПЗ. Существуют четыре неколлинеарные точки (т.е. любые три из них – неколлинеарны).

Упражнение 1. Проверьте, что задаваемое выше пополнение аффинной плоскости действительно определяет проективную плоскость.

Примеры:

1. Пополняя аффинную плоскость евклидовой геометрии, мы получим действительную проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$.

2. Пополняя аффинную плоскость из четырех точек до проективной, получим проективную плоскость из семи точек и семи прямых (рис. 2).

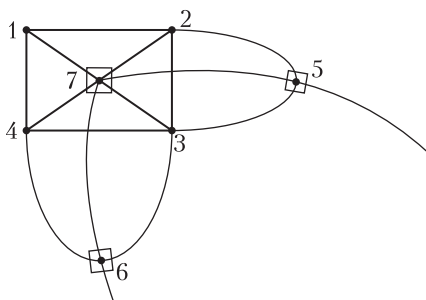


Рис. 2

3. Построим еще одну модель бесконечной проективной плоскости. Пусть \mathbb{R}^3 – обычное трехмерное евклидово пространство и O – некоторая точка в нем. Обозначим через Π множество всех прямых, проходящих через O . Точкой в Π назовем любую из проведенных прямых, а прямой – множество прямых, проходящих через O и лежащих в некоторой плоскости. Множество Π будет удовлетворять аксиомам П1 – ПЗ (проверьте это!), стало быть, является проективной плоскостью.

Из примера 2 видно, что в одном частном случае конечной проективной геометрии число точек равно числу прямых. Конечных аффинных геометрий существует бесконечно много (что будет выяснено ниже в задачах), и все их можно пополнить так же, как это было сделано в случае четырех точек. Будет ли при этом иметь место совпадение числа точек и прямых? Ответ на этот вопрос дает следующее предложение.

Предложение 1. Пусть Π – проективная плоскость. Тогда множество X , эле-

менты которого – прямые в Π , именуемые в X точками, является проективной плоскостью, если только называть прямыми в X пучки прямых в Π . Плоскость X называется двойственной к Π (так как фактически точки и прямые в Π поменялись местами и получилось X).

Доказательство. Проверим выполнение аксиом проективной плоскости.

Х1. Пусть A и B – две различные точки в X ; тогда существует единственная прямая из X , содержащая A и B . Но в терминах Π это означает, что для двух различных прямых из Π найдется пучок, содержащий обе эти прямые, а это следует из П2.

Х2. Любые две прямые из X имеют общую точку, что следует из П1.

Х3. Надо показать, что существуют 4 точки, никакие три из которых не коллинеарны в X . Это то же самое, что показать, что в Π существуют 4 прямые, никакие три из которых не лежат в одном пучке. Возьмем 4 неколлинеарные точки из Π (такие есть по ПЗ) и из всех прямых, через них проходящих, выберем нужные нам четыре.

Таким образом, предложение доказано.

Следствие. Если K – некоторое утверждение в Π , выведенное из аксиом П1–ПЗ, то утверждение K^* , получаемое из K двойственной заменой (типа: прямые отвечают точкам и т.п.), может быть выведено из тех же аксиом.

Доказательство. Ясно, что K^* – то же утверждение K , только в геометрии X . Но аксиомы геометрии X вытекают из аксиом геометрии Π , что и требовалось.

Теперь ясно, почему количество точек и прямых в проективной геометрии одинаково – из-за принципа двойственности.

Если из плоскости X аналогичным образом построить двойственную плоскость Γ , то окажется, что плоскости Π и Γ «изоморфны». Однако плоскости Π и X не всегда изоморфны. Примеры можно строить с помощью конечных плоскостей, на которых не выполняется аксиома Дезарта (см. ниже). (Одним из таких примеров является плоскость Холла порядка 9, состоящая из 91 точки. – Прим. ред.)

3. Аффинные и проективные конечные пространства

Пространством называется, как и в плоском случае, множество точек T , в котором выделяются подмножества L прямых и P плоскостей. Введем обозначения:

$$T = \{A, B, C, \dots\}, L = \{a, b, c, \dots\}, P = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}.$$

При этом должны выполняться следующие аксиомы.

АС1. Для любых точек A и B существует единственная прямая a , обозначим ее $a = (A, B)$, такая, что $A, B \in a$ (рис. 3).

АС2. Если точки A и B принадлежат плоскости α , то прямая (A, B) также принадлежит плоскости α (рис. 4).

АС3. Если точки A, B, C не лежат на одной прямой, то существует единственная плоскость α такая, что $A, B, C \in \alpha$ (рис. 5).

АС4. Если пересечение плоскостей α и β содержит точку A , то найдется прямая a , которая содержится в пересечении этих плоскостей (рис. 6).

Определение 4. Прямые a и b называются параллельными, если они либо совпадают, либо лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

АС5. Для любой прямой a и любой точки A существует единственная прямая b такая, что $A \in b$ и b параллельна a (рис. 7).

АС6₁. Для любой прямой a существуют две различные точки A и B такие, что $A, B \in a$ (рис. 8).

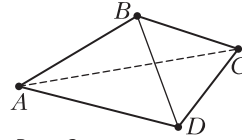


Рис. 9

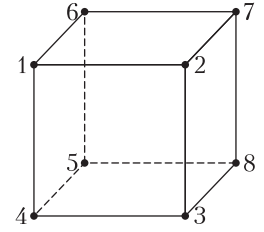


Рис. 10

АС6₂. Для любой плоскости α существуют неколлинеарные точки A, B, C такие, что $A, B, C \in \alpha$.

АС6₃. Существуют четыре точки, не лежащие в одной плоскости (рис. 9).

Так же, как и в случае плоскости, можно доказать, что в пространстве существуют по крайней мере 8 точек. То, что больше может и не быть, следует из восьмиточечной модели пространства (рис. 10).

Упражнение 2. Перечислите все прямые и все плоскости на этой модели.

Указание. Не упустите плоскости из четырех точек, лежащих в вершинах правильного тетраэдра!

Рассмотрим несколько важных теорем аффинного пространства.

ТС1. Пусть точка A и прямая a таковы, что $A \notin a$. Тогда существует единственная плоскость α такая, что $A, a \in \alpha$ (рис. 11).

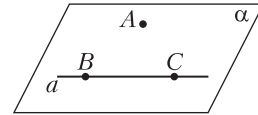


Рис. 11

Доказательство. По аксиоме АС6₁ найдутся две точки $C, B \in a$. По аксиоме АС1 точки A, B, C не коллинеарны, значит, по АС3 существует единственная плоскость α такая, что $A, B, C \in \alpha$, следовательно, по аксиоме АС2 $a \in \alpha$, значит, $a, A \in \alpha$, что и требовалось доказать.

ТС2. Для любых двух несовпадающих пересекающихся прямых a и b существует единственная плоскость α такая, что $a, b \subseteq \alpha$ (рис. 12).

Доказательство. Пусть прямая a пересекается с прямой b в точке C . Из аксиомы АС6₁ следует, что существуют отличные от C точка A , принадлежащая a , и точка B ,



Рис. 3

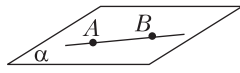


Рис. 4

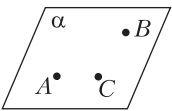


Рис. 5

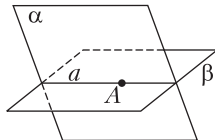


Рис. 6

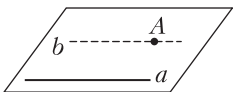


Рис. 7

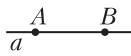


Рис. 8

принадлежащая b . Точки A, B, C не коллинеарны, значит, по АС3 существует единственная плоскость α такая, что $A, B, C \in \alpha$. Остается два раза применить аксиому АС2.

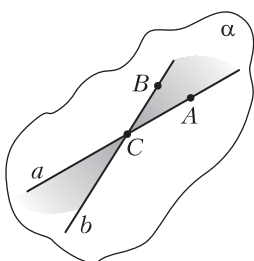


Рис. 12

ТС3. Существуют прямые a, b такие, что любая плоскость, содержащая прямую a , не содержит прямую b . Иными словами, существуют скрещивающиеся прямые (рис. 13).

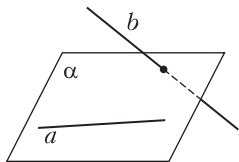


Рис. 13

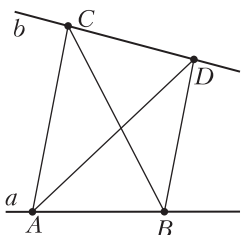


Рис. 14

Доказательство. По аксиоме АС₆₃ существуют некопланарные точки A, B, C, D (рис. 14). Тогда прямые $a = (A, B)$ и $b = (C, D)$ искомые. Действительно, пусть существует плоскость α такая, что $a, b \in \alpha$, тогда $A, B, C, D \in \alpha$ – противоречие.

ТС4. Для любой плоскости α и не принадлежащей ей точки A существует прямая a такая, что: $A \in a$ и $a \cap \alpha = \emptyset$ (т.е. $a \parallel \alpha$) (рис. 15).

Доказательство. Из аксиомы АС₆₂ следует существование различных точек B и C таких, что $B, C \in \alpha$ (рис. 16). Из АС2 получаем, что $b = (C, B) \in \alpha$, значит, по АС3 существует плоскость β такая, что $A, B, C \in \beta$. По ТС1 имеем $b, A \in \beta$, а по АС5 существует прямая a

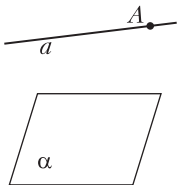


Рис. 15

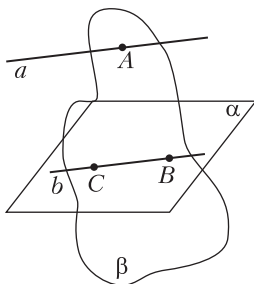


Рис. 16

такая, что $A \in a$ и $a \parallel b$. Докажем, что $a \cap \alpha = \emptyset$. Пусть $a \cap \alpha = X$, тогда $X \in \alpha \cap \beta$, значит, $X \in a \cap b$. Но $a \cap b = \emptyset$, поскольку a не совпадает с b (так как $A \notin b$) и $a \parallel b$. Противоречие.

Следующие несколько теорем приведем без доказательств.

ТС5. Пусть прямые a, b и плоскости α, β таковы, что $a \notin \beta, b \in \alpha$ и $a \parallel b$. Пусть, кроме того, $\alpha \cap \beta = c$, тогда $a \parallel c$ и $b \parallel c$ (рис. 17).

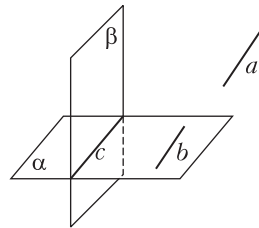


Рис. 17

ТС6. Имеет место транзитивность параллельности прямых: если $a \parallel b$ и $b \parallel c$, то $a \parallel c$ (рис. 18).

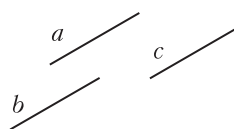


Рис. 18

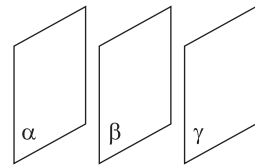


Рис. 19

ТС7. Имеет место транзитивность параллельности плоскостей: если $\alpha \parallel \beta$ и $\beta \parallel \gamma$, то $\alpha \parallel \gamma$ (рис. 19).

ТС8. Пусть различные прямые a, b принадлежат плоскости α и $a \cap b \neq \emptyset$, прямые a', b' принадлежат плоскости β и $a \parallel a', b \parallel b'$. Тогда $\alpha \parallel \beta$ (рис. 20).

ТС9. Пусть $\alpha \parallel \beta, \gamma \cap \alpha = a$ и $\gamma \cap \beta = b$, тогда $a \parallel b$ (рис. 21).

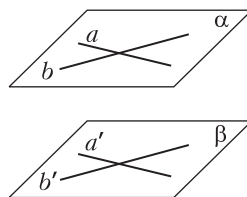


Рис. 20

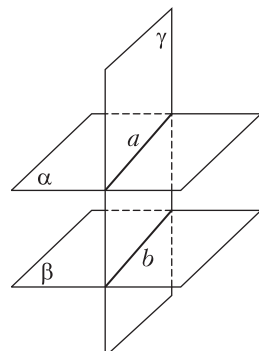


Рис. 21

Упражнение 3. Используя аксиомы АС1 – АС6 и первые 4 теоремы, докажите теоремы ТС5 – ТС9.

Указание. Все они доказываются методом от противного.

Перейдем теперь к проективному случаю; теоремы ТС1 – ТС9 понадобятся нам в дальнейшем.

Пополнение пространства производится точно так же, как в плоском случае: бесконечно удаленной точкой назовем пучок параллельных прямых; бесконечно удаленной прямой назовем пучок параллельных плоскостей; все бесконечно удаленные прямые лежат в одной бесконечно удаленной плоскости.

Упражнение 4. Рассмотрим пополнение 8-точечного пространства. Сколько будет точек в полученном проективном пространстве? А сколько прямых? А плоскостей?

Более точное определение проективного пространства дается такими аксиомами.

PS1. Для любых точек A, B существует прямая a такая, что $A, B \in a$ (рис. 22).

PS2. Для любых неколлинеарных A, B, C существует единственная плоскость α такая, что $A, B, C \in \alpha$ (рис. 23).

PS3. Если прямая a не лежит в плоскости α , то существует единственная точка A такая, что $A \in (a \cap \alpha)$ (рис. 24).

PS4. Если плоскости α и β не совпадают, то их пересечение – прямая (рис. 25).

PS5₁. Существуют некопланарные точки A, B, C, D (рис. 26).

PS5₂. Для любой прямой a существуют точки A, B, C такие, что $A, B, C \in a$ (рис. 27).

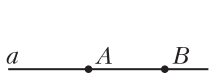


Рис. 22

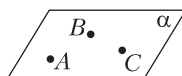


Рис. 23

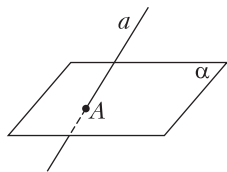


Рис. 24

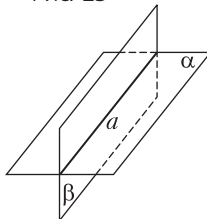


Рис. 25

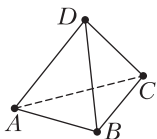


Рис. 26

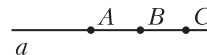


Рис. 27

Предложение 2. Из проективной геометрии получается аффинная выбрасыванием любой плоскости.

Упражнение 5. Проверьте это предложение (т.е. покажите, что все аксиомы аффинной геометрии выполняются).

Перейдем теперь к основной теореме – теореме Дезарга в проективном случае (когда нет параллельных прямых).

Теорема Дезарга. Если точки пересечения соответственных сторон двух треугольников лежат на одной прямой, то прямые, проходящие через соответственные вершины, пересекаются в одной точке.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда треугольники не лежат в одной плоскости.

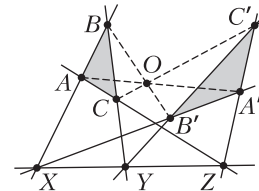


Рис. 28

Попарные пересечения плоскостей $BAXB'A', BCYB'C'$ и $ACZA'C'$ содержат прямые BB', CC' и AA' (рис. 28).

В то же время никакие две эти прямые не совпадают, так как в противном случае треугольники лежали бы в одной плоскости (почему?). Следовательно, пересечение всех плоскостей – точка O , которая принадлежит и всем прямым AA', BB' и CC' . Значит, прямые пересекаются в одной точке O .

Перейдем к случаю, когда треугольники лежат в одной плоскости (рис. 29). Мы сведем второй случай к первому. Проведем через прямую, на которой лежат точки X, Y, Z , плоскость, не совпадающую с нашей плоскостью, где расположены треугольники. Обозначим нашу плоскость I , а

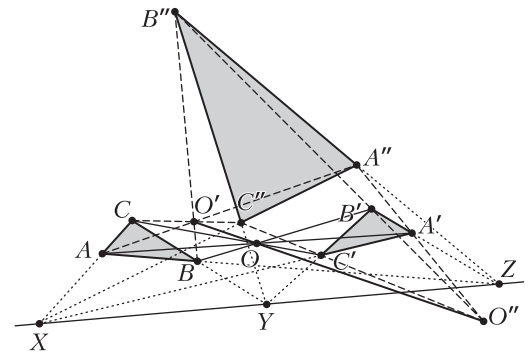


Рис. 29

новую – Π . Проведем произвольные прямые XA'' , YC'' и ZB'' в плоскости Π так, чтобы они образовали некоторый треугольник $A''B''C''$. Для треугольников ABC и $A''B''C''$ выполнен первый случай теоремы, поэтому прямые, соединяющие соответственные вершины, пересекаются в некоторой точке O' . Аналогично и для треугольников $A'B'C'$ и $A''B''C''$ – прямые, соединяющие соответственные вершины A', B', C' и A'', B'', C'' , пересекаются в точке O'' . Рассмотрим пересечение прямой $O'O''$ и плоскости I . Докажем, что полученная точка O – искомая. Действительно, покажем, например, что $O \in AA''$.

Точка O'' принадлежит прямой $A'A''$, точка O' принадлежит AA'' , значит, точка O принадлежит плоскости $AA'A''$, следовательно, O принадлежит AA' , что и требовалось доказать. Аналогично доказывается, что $O \in BB'$ и что $O \in CC'$. Теорема полностью доказана.

4. Задачи

1. Докажите, что на любой прямой найдутся две точки.

Решение. Обозначим прямую a . По А3 существуют три неколлинеарные точки A, B, C . Рассмотрим два случая.

Первый случай. Точки A, B, C не принадлежат a (рис. 30). Тогда по А2 по крайней мере две прямые, соединяющие точки A, B, C , не параллельны a и имеют пересечение с a в точках X и Y .

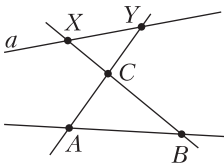


Рис. 30

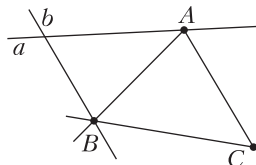


Рис. 31

Второй случай. Пусть $A \in a$ (рис. 31). По А2 через точку B проходит прямая $b \parallel AC$. Из транзитивности параллельности b не параллельна a , т.е. имеет с ней общую точку, что и требовалось.

2. Какое наименьшее число точек содержит проективная плоскость?

Решение. По аксиоме П3 существуют 4 неколлинеарные точки A, B, C, D (рис. 32).

По П2 прямые AC и BD пересекаются, причем если, например, точка пересечения совпала с D , то A, C, D коллинеарны, что противоречит выбору точек. Значит, AC пересекает BD в точке K , отличной от точки D . Аналогично находим еще две точки L и M . Итак, в Π содержится не менее семи точек, а модель из 7 точек существует.

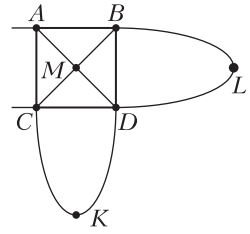


Рис. 32

3. Докажите, что всякая прямая в Π содержит хотя бы 3 точки.

Решение. Если прямая проходит через две из четырех неколлинеарных точек на Π (рис. 33), то прямая, проходящая через остальные две точки, по аксиоме П2 пересекается с нашей прямой в третьей точке. Пусть теперь прямая a не проходит через точки A, B, C, D . Тогда по П2 найдутся

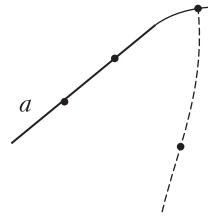


Рис. 33

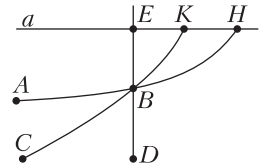


Рис. 34

точки пересечения прямых AB, BC и DB с прямой a (рис. 34). Обозначим эти точки буквами H, K, E и покажем, что никакие две из них не совпадают. Если бы какие-нибудь две из них совпали, то две прямые имели бы две общие точки и по П1 совпали бы. Получили противоречие с тем, что точки A, B, C, D не коллинеарны.

4. Докажите, что между точками любых двух прямых аффинной плоскости можно установить взаимно однозначное соответствие.

Решение. Так как каждая прямая аффинной плоскости содержит не менее двух точек, то для любых двух прямых a и b найдутся различные точки A и B такие, что $A \in a, B \in b$ (рис. 35). Проведем через A и B прямую. Возьмем любую точку $M \in a$ и проведем через M прямую c параллельно AB , по А2 это можно сделать единствен-

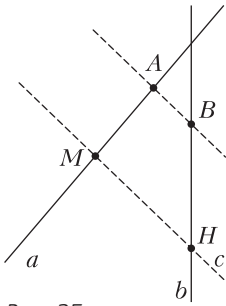


Рис. 35

ним образом. Если бы при этом оказалось, что $c \parallel b$, то через точку B проходили бы две различные прямые, параллельные c , что противоречило бы А2. Значит, $c \cap b \neq \emptyset$. Рассмотрим теперь два случая: $M \in b$ и $M \notin b$. В первом случае M ставится в соответствие с собой. Во втором случае $c \cap b = H$, где $H \neq M$ и M ставится в соответствие с H . Легко понять, что полученное соответствие взаимно однозначно (если бы нашлась «лишняя точка», мы провели бы прямую, параллельную AB , и получили бы противоречие). Что и требовалось доказать.

5. Докажите, что все пучки параллельных прямых аффинной плоскости содержат одинаковое число прямых.

Решение. Рассмотрим некоторый пучок параллельных и прямую, его пересекающую (такая существует). Точки на этой прямой автоматически поставлены во взаимно однозначное соответствие с прямыми пучка (рис. 36). Но между точками любых двух прямых существует взаимно однозначное соответствие, стало быть, существует и взаимно однозначное соответствие между прямыми любых двух пучков параллельных.

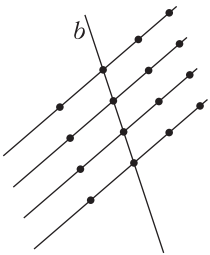


Рис. 36

6. Пусть прямая в аффинной геометрии содержит p точек. Сколько точек и сколько прямых на плоскости?

Решение. Рассмотрим прямую a и точку A вне нее (почему такая есть?). Через A и точку C на прямой a проведем прямую b (рис. 37). Через все остальные точки a проведем прямые, параллельные b . Так как на каждой прямой по

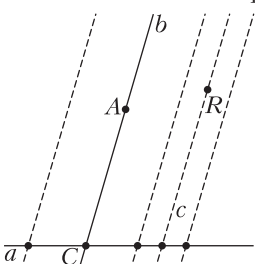


Рис. 37

p точек, то всего мы получим p^2 точек. Если бы при этом некоторая точка R не попала в число наших точек, то, проводя прямую $c \parallel AC$ и замечая, что c не имеет общих точек с a , т.е. $c \parallel a$, получаем противоречие с А2: через точку C проходят две параллельные прямые с прямой c – таковыми являются a и b .

Теперь посчитаем количество прямых. На плоскости имеется $p + 1$ пучков параллельных прямых; через точку A прямой a проходит $p + 1$ прямых, каждая из которых поставлена во взаимно однозначное соответствие с определенным пучком. Но в пучке ровно p прямых, значит, всего прямых $p(p + 1) = p^2 + p$.

7. На некоторой аффинной плоскости 5 точек. Докажите, что на этой плоскости есть еще по крайней мере 4 точки.

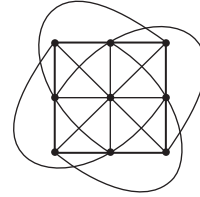


Рис. 38

Решение. Минимальный точный квадрат больше 4 – это 9, значит, еще 4 точки найдутся. Существование геометрии из 9 точек подтверждает рисунок 38.

8. Докажите независимость аксиом а) аффинной геометрии, б) проективной геометрии.

Решение. Независимость аксиом докажем, предъявив для каждой из аксиом геометрию, в которой только эта аксиома не выполняется.

а) Для аффинной геометрии невыполнение А1 показано на рисунке 39. Невыполнение существования в аксиоме А2 – геометрия Римана – показано на рисунке 41, отсутствие единственности – геометрия Лобачевского – на рисунке 40. Невыполнение А3 – на рисунке 42.

б) Покажем независимость аксиом проективной геометрии. Невыполнение П1 снова иллюстрирует рисунок 41. Чтобы



Рис. 39

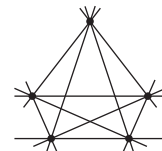


Рис. 40

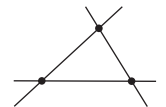


Рис. 41

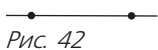


Рис. 42



Рис. 43

показать невыполнение П2, можно взять произвольную аффинную геометрию. Случай, когда не выполняется П3, показан на рисунке 43.

9. Докажите, что если из проективной плоскости удалить прямую, то получится аффинная плоскость.

Решение. Пусть мы удалили из проективной плоскости Π прямую a . Докажем, что в полученной плоскости A выполняются аксиомы А1–А3. Действительно, возьмем точки A и B в новой плоскости и пусть A' и B' – те же точки в проективной плоскости Π . Ясно, что A' и B' не принадлежат a . Согласно П1 существует единственная прямая l' такая, что $A', B' \in l'$. По предыдущему $l' \neq a$, значит, l' перейдет в какое-то непустое множество $l \in A$. Поскольку $A', B' \in l'$, то $A, B \in l$. Раз l' – единственная, значит, и l – единственная, так как a мы удалили. Итак, А1 выполнена.

Проверим А2. Возьмем произвольную прямую l и точку $X \notin l$ в A . Пусть при удалении прямой a прямая l' перешла в l , а точка X' – в X . Ясно, что $l' \neq a$ и $X' \notin a$. Отсюда по П2 существует единственная $M' = l' \cap a$. По П1 существует единственная прямая m' такая, что $X', M' \in m'$. Если $X' \in l'$, то $m' = l'$ и, значит, $m' \cap l' = M'$. Так как с удалением a удаляется M' , то $m \cap l = \emptyset$, где m и l – образы m' и l' в плоскости A . Значит, m параллельна l , а так как $X' \in m'$, то $X \in m$. Кроме того, m' единственна, значит, и m единственна, а следовательно, выполнена А2.

Если $X \in l$, то $X' \in l'$, значит, $m' = l'$. Из m' и из l' удаляется ровно одна точка M' , поэтому $m = l$ и можно записать $m \parallel l$. Поскольку m' единственна, следовательно, и m единственна, и через точку на прямой проходит единственным образом прямая, параллельная данной. Таким образом, А2 полностью доказана.

Проверим А3. По П3 выбираем 4 неколлинеарные точки. Нас интересует случай, когда две из них лежат на удаленной прямой, так как в остальных случаях А3 выполняется (поскольку на удаленной прямой не может быть более двух из

четырёх точек). Пусть A, B, C, D – это 4 точки и $A, B \in a$. Проведем прямые AC и BD . По П2 существует единственная точка $M \in AC \cap BD$ и $M \neq A, B, C, D$. При этом $M \notin a$, так как в противном случае $AC = a$ и $BD = a$. Кроме того, C, D и M не лежат на одной прямой, так как в противном случае через M и C проходили бы две прямые. При удалении a точки C, D и M остаются, так как ни одна из них a не принадлежала. Значит, аксиома А3 выполнена.

10. Постройте аффинную плоскость из 16 точек.

Решение изображено на рисунке 44.

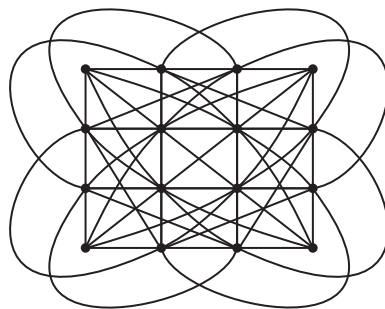


Рис. 44

11. Прямая в проективной плоскости Π содержит $n + 1$ точек. Сколько точек в Π ? Сколько прямых?

Решение. Возьмем в плоскости Π прямую a с точками A_1, A_2, \dots, A_{n+1} . По аксиоме П3 существует точка B такая, что $B \notin a$. Проведем $BA_1, BA_2, \dots, BA_{n+1}$. При этом все точки окажутся задействованными. Действительно, если, например, C не принадлежит a , то BC пересекается с a в одной из точек A_k и, стало быть, точка C уже учтена. Итак, всего получим

$$((n+1)-1)(n+1)+1 = n^2 + n + 1$$

точек в Π . Поскольку через каждую точку (как и через B) проходит $n + 1$ прямых, причем каждая прямая при таком подсчете учитывается $n + 1$ раз (на ней $n + 1$ точек), то прямых будет

$$\frac{(n^2 + n + 1)(n + 1)}{n + 1},$$

т.е. столько же, сколько и точек. Этого следовало ожидать, так как имеет место

принцип двойственности, описанный в конце раздела 2.

12. Некоторая проективная плоскость была получена пополнением некоторой аффинной плоскости. В проективной плоскости 13 прямых. Сколько прямых в аффинной плоскости?

Решение. В проективной плоскости 13 точек. Решая уравнение $n^2 + n + 1 = 13$, находим $n = 3$. В геометрии из 9 точек 12 прямых (см. задачу 6).

Этих вычислений можно было и не продолжать. Достаточно лишь заметить, что при пополнении добавляется ровно одна бесконечно удаленная прямая. Поэтому ответ: $13 - 1 = 12$.

13. Установите взаимно однозначное соответствие между точками прямых проективной плоскости.

Решение. На прямой a имеется k точек, на прямой b — n точек. Докажем, что $k = n$. И k , и n больше 2, значит, кроме точки пересечения $O = a \cap b$ на прямых a и b есть еще по одной точке A и B (рис. 45).

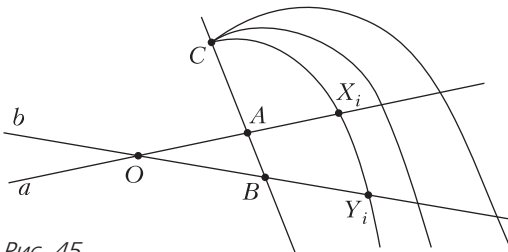


Рис. 45

Проведем через A и B прямую, на ней найдется еще одна точка C . Обозначим через X_i точки на прямой a ; прямая CX_i пересекается с прямой b в точке Y_i . Если $i \neq j$, то $X_i \neq X_j$ и $Y_i \neq Y_j$, так как через C и X_i и через C и Y_i можно провести единственную прямую. Таким образом, $O \leftrightarrow O$, $A \leftrightarrow B$; $X_i \leftrightarrow Y_i$. Итак, точкам прямой a соответствуют точки прямой b . Если при этом на прямой b есть еще одна точка Z , то $CZ \cap a = \emptyset$, что невозможно, значит, $k = n$, что и требовалось.

14. Докажите, что теорема Дезарга на плоскости недоказуема — необходим выход в пространство. (Таким образом, в плоском случае теорема Дезарга является аксиомой.)

Доказательство. Д. Гильберт построил превосходный пример аффинной плоско-

сти, на которой теорема Дезарга невыполнима. Рассмотрим плоскость \mathbb{R}^2 и прямую a на ней. Новую плоскость будем строить так. Точки останутся прежними. Прямыми назовем все прямые, параллельные a , и все прямые, пересекающие a не под тупым углом (рис. 46). Если же какая-то прямая

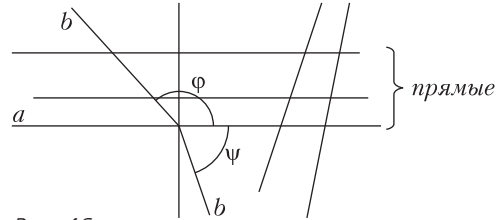


Рис. 46

b была наклонена под тупым углом ϕ к a , то в нижней полуплоскости она будет под углом ψ к a , причем

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)} = 2.$$

Пример, для которого теорема Дезарга невыполнима, приведен на рисунке 47.

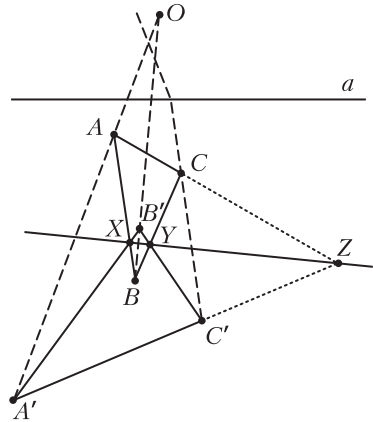


Рис. 47

15. Постройте аффинную геометрию на p^2 точках (p — простое).

Решение. На каждой прямой должно быть p точек, через каждую точку должно проходить $p + 1$ прямых. Построим прямые, проходящие через одну из точек. Для простоты продемонстрируем построение на 25 точках. Точкой будем называть множество узлов сетки с одинаковыми номе-

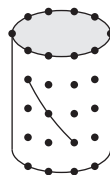
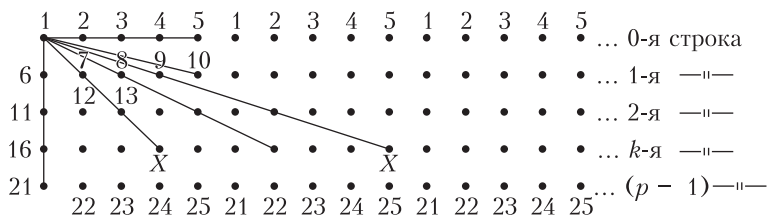


Рис. 48

рами (рис. 48 слева). Прямыми назовем прямые, имеющие одно из изображенных на рисунке направлений и проходящие через узлы сетки. (Можно представлять себе в качестве модели сетчатый цилиндр, показанный на рисунке 48 справа.)

Докажем, что через точку 1 и любую другую точку проходит не более одной прямой. Пусть, напротив, через точки 1 и X , где X – точка в k -й строке, проходят две прямые. Расстояние между точками пересечения этих прямых с первой строкой равно $n < p$. Тогда расстояние между узлами сетки, обозначающими точку X , через которые проходят эти прямые, равно kn . Так как p – простое, $k < p$, $n < p$, то kn не делится на p , поэтому эти два узла не являются одной точкой. Прямые, проходящие через точку 1, проходят и через все остальные точки. Действительно, через точку 1 проходит $p + 1$ прямых, на каждой из них, кроме точки 1, еще $p - 1$ точек, никакие две из всех точек не совпадают, всего точек $(p - 1)(p + 1) = p^2 - 1$. Что и требовалось доказать.

Если через любую точку плоскости провести все прямые, то получится та же картина, что и для точки 1.

Тем самым А1 проверена.

На прямой имеется p точек. Рассмотрим точку B вне этой прямой, через нее проходит $p + 1$ прямых. Из них p прямых пересекают данную прямую в p точках, а одна ее пересечь не может, так как через эту точку и любую другую можно провести только одну прямую. Следовательно, через каждую точку можно провести ровно одну прямую, параллельную данной, а значит, выполнена аксиома А2.

Выполнена и аксиома А3, так как есть 3 неколлинеарные точки.

Следовательно, построенная плоскость – аффинная.

16. Докажите, что плоскость в аффинном пространстве аффинна.

Доказательство. Аксиома А1 автоматически следует из АС1 и АС2.

Проверим выполнение А2. Возьмем прямую a в плоскости α . По АС6 существует точка $A \in \alpha$ такая, что $A \notin a$. По АС5 существует $b \parallel a$, $A \in b$. Докажем, что $b \in \alpha$. Рассмотрим плоскость β , содержащую a и b (такая плоскость существует по определению параллельных). В плоскости β и в плоскости α существуют три неколлинеарные точки A, B, C ; B и C принадлежат прямой a . Но тогда по АС3 плоскости α и β совпадают.

Аксиома А3 вытекает из АС6.

17. На прямой аффинного пространства n точек. Сколько точек в пространстве? Сколько прямых? Сколько плоскостей?

Решение. Как уже доказано в задаче 16, всякая плоскость аффинна, а в каждой аффинной плоскости n^2 точек. Возьмем одну из плоскостей α . В пространстве есть еще одна точка A (почему?). Через точку A и точку C на плоскости α проведем прямую с n точками на ней. Через каждую точку из этих n проходит плоскость, параллельная данной, на каждой из которых n^2 точек. Следовательно, всего точек в пространстве n^3 . Доказать, что больше точек нет, можно аналогично тому, как это делалось в задаче 6.

Посчитаем количество прямых. Пусть через каждую точку проходит k прямых. На каждой из них по $(n - 1)$ точек; все они проходят через $n^3 - 1$ точек. Значит, $k(n - 1) = n^3 - 1$, следовательно, $k = n^2 + n + 1$. Всего точек n^3 , каждая прямая проходит через n точек, значит, всего прямых

$$k \cdot n^3 / n = n^2 (n^2 + n + 1) = n^4 + n^3 + n^2.$$

Перейдем к вычислению числа плоскостей. Пусть через прямую проходит m плоскостей. На каждой плоскости кроме точек этой прямой есть еще $n^2 - n$ точек; все плоскости проходят через $n^3 - n$ точек. Значит,

$$m(n^2 - n) = n^3 - n \text{ и } m = n + 1.$$

Всего прямых $n^4 + n^3 + n^2$, на каждой плоскости $n^2 + n$ прямых, всего плоскостей

$$\frac{(n^4 + n^3 + n^2)m}{n^2 + n} = n^3 + n^2 + n.$$

18. Рассмотрим 8-точечную модель аффинного пространства. Прямых в этом пространстве 28, а плоскостей 14. Отношение этих чисел равно числу точек на каждой прямой. Случайно ли это?

Решение. Из результатов предыдущей задачи сразу получается, что плоскостей в n раз меньше, чем прямых, где n – число точек на прямой.

19. На проективной прямой $k = n + 1$ точек. Сколько точек, прямых и плоскостей в проективном пространстве?

Решение. На проективной плоскости α $n^2 + n + 1 = k^2 - k + 1$ точек. Существует точка A вне плоскости α . Через эту точку и точки плоскости α проведем $n^2 + n + 1 = k^2 - k + 1$ прямых, на каждой из которых, кроме точки A , еще $n = k - 1$ точек. Значит, всего точек вместе с A

$$\begin{aligned} (n^2 + n + 1)n + 1 &= (k^2 - k + 1)(k - 1) + 1 = \\ &= n^3 + n^2 + n + 1 = k^3 - 2k^2 + 2k. \end{aligned}$$

Докажем, что больше точек нет. Если есть еще одна точка X , то она, во-первых, не лежит ни на одной из проведенных прямых (иначе на ней будет $n + 2$ точек) и, во-вторых, не лежит вне этих прямых, так как иначе бы прямая AX пересекала плоскость α в точке, не совпадающей ни с одной из уже имеющихся там точек.

Вычислим количество прямых. Пусть через каждую точку проходит p прямых, на каждой из которых, кроме этой точки, еще $n = k - 1$ точек. Объединение этих прямых проходит по разу через $n^3 + n^2 + n = k^3 - 2k^2 + 2k - 1$ точек (все точки, кроме

выбранной). Значит,

$$pn = n^3 + n^2 + n,$$

отсюда

$$p = n^2 + n + 1 = k^2 - k + 1.$$

Тогда

$$p(k - 1) = k^3 - 2k^2 + 2k - 1.$$

Всего точек $n^3 + n^2 + n + 1 = k^3 - 2k^2 + 2k$, на каждой прямой по $k = n + 1$ точек, значит, всего прямых

$$\begin{aligned} \frac{(n^2 + n + 1)(n^3 + n^2 + n + 1)}{n + 1} &= \\ &= n^4 + n^3 + 2n^2 + n + 1 = \\ &= k^4 - 3k^3 + 5k^2 - 4k + 2. \end{aligned}$$

Разберемся теперь с числом плоскостей. Пусть через каждую прямую проходит q плоскостей, на которых, кроме точек этой прямой, есть еще $n^2 = k^2 - 2k + 1$ точек. Объединение этих плоскостей проходит по разу через $n^3 + n^2 = k^3 - 2k^2 + k$ точек (все точки, кроме точек этой прямой). Значит,

$$qn^2 = n^3 + n^2,$$

отсюда

$$q = n + 1 = k.$$

Всего прямых $n^4 + n^3 + 2n^2 + n + 1$, на каждой плоскости $n^2 + n + 1 = k^2 - k + 1$ прямых, значит, всего плоскостей

$$\begin{aligned} \frac{(n^4 + n^3 + 2n^2 + n + 1)}{n^2 + n + 1} &= n^3 + n^2 + n + 1 = \\ &= k^3 - 2k^2 + 2k. \end{aligned}$$

От редакции

Продолжить знакомство с конечными геометриями читатели смогут, изучив следующие статьи:

1. Л. Бевер. Мини-геометрия. – «Квант», 1976, № 6.

2. А.Н. Земляков. Аксиоматический подход к геометрии. – Математическое образование, 2001, вып. 3, с. 4–21.

3. С. Богданов, С. Дворянинов, З. Краутер. Какая геометрия нужна пассажирам метро? – «Квант», 2002, № 4.

Проблемы резистора

Л.АШКИНАЗИ

Зачем вообще нужны резисторы

Начнем с вопроса – а зачем они, резисторы, вообще нужны, что они делают?

У них есть две большие области применения – электроника и электротехника, а также одна маленькая – искусство (о нем – в самом конце статьи). Резисторов вокруг нас сотни и тысячи, они живут, работают и создают нам удобства, причем многие из них обитают у вас в кармане. Кроме того, резисторы часто работают в паре с конденсаторами. Накапливать энергию конденсаторы могут сами, а все остальное могут делать только вместе с резисторами или катушками (индуктивностями). Причем параметры материалов и технологии, которыми располагает цивилизация, таковы, что с резисторами это получается компактнее и дешевле.

У резисторов есть и свои индивидуальные функции. Прежде всего, резисторы могут применяться для установления режима работы других элементов схемы.

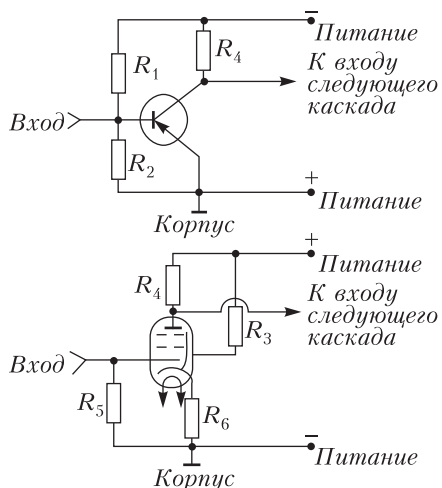


Рис. 1. Использование резисторов как делителей напряжения

На рисунке 1 показаны два усилительных каскада – на транзисторе и на пентоде; это только примеры, схем таких каскадов десятки. Для правильной работы эти элементы должны иметь определенные разности потенциалов между выводами. В электронике принято говорить о потенциалах относительно общего провода, или корпуса, или (по традиции) относительно земли. Обычно это один из полюсов источника постоянного напряжения, которым питается схема. На рисунке вы видите делитель напряжения из сопротивлений R_1 и R_2 , который определяет напряжение на базе транзистора, напряжение на вторую сетку пентода подается через сопротивление R_3 , а на катод – через сопротивление R_6 . Кстати, подумайте над такими вопросами: делит ли этот делитель напряжение именно в отношении R_1/R_2 , влияет ли величина R_3 на напряжение на сетке и чем определяется напряжение на катоде?

Следующая функция сопротивлений – самая простая: преобразование тока в напряжение или напряжения в ток, согласно закону Ома. Например, усиленный транзистором и лампой сигнал – это ток коллектора или ток анода соответственно. А следующему каскаду надо подать на вход не ток, а напряжение. Поэтому в цепь коллектора и анода включают сопротивления R_4 , а напряжение с него поступает на вход следующего каскада. На рисунке с электронной лампой нарисованы не все резисторы – еще один есть внутри электронной лампы, при подаче на него напряжения (напряжения накала) он разогревается и нагревает катод – чтобы началась необходимая для работы лампы термоэлектронная эмиссия, вылет из катода электронов. Подогреватель изображен в нижней части лампы, а его выводы принято изображать стрелочками, он просто превращает энергию, которую берет из элек-

трической сети, в тепловую. А еще он, в соответствии с его рабочей температурой, светится. Как выразился один специалист по электронным лампам, «юные женщины похожи на старые радиоприемники: они теплые, разговаривают и светятся».

Но это еще не все. Сопротивление нужно еще для того, чтобы после отключения устройства, в котором есть конденсатор, не сохранился заряд на конденсаторе и чтобы человек, коснувшийся выводов, не попал под напряжение. Похожую задачу – убрать заряд оттуда, где он не нужен, решает сопротивление R_5 в цепи первой сетки лампы на рисунке 1. В древности радиолюбители называли это сопротивление «гридлик» (англ. *grid leak* – сопротивление утечки сетки).

Резисторы применяются в измерительной технике, они могут преобразовывать изменение освещенности, температуры и индукции магнитного поля в изменение сопротивления. Резисторы применяются для расширения пределов измерения амперметров (шунты) и вольтметров (добавочные сопротивления). Резисторами вполне можно назвать и тензометры, о которых будет рассказано ниже.

Живут резисторы и вне электроники – в электротехнике, в простой бытовой технике (в которой, впрочем, тоже полно физики). Это фен, чайник, масляный нагреватель и лампа накаливания. В этих случаях сопротивление предназначено только для превращения энергии, которую мы берем из электрической сети, в тепловую. Помните Джоуля и Ленца? – это про них. Правда, нам еще нужно решить тепловую задачу про охлаждение нагреваемого элемента, а в разных случаях она разная. В фене охлаждение идет потоком воздуха, в чайнике – свободной конвекцией воды, в масляном нагревателе – свободной конвекцией масла, в лампе накаливания – излучением и свободной конвекцией газа. В электронной лампе, где, кстати, тоже есть нагреватель, – или излучением, или кондуктивной теплопередачей, или обоими механизмами сразу.

Но иногда, прежде чем решать тепловую задачу, надо просто перемножить, поде-



Рис. 2. Загадочный кипятильник

лить и посмеяться. Как вам числа на коробочке на рисунке 2? А иногда и расчетов не нужно, а нужно просто держаться подальше. Мы понимаем, что оттаивать замерзшие водосточные трубы нагревающимися при пропускании тока проводом – красивая идея. Но – сетевое напряжение, вода вокруг и мокрые ботинки... Конечно, изоляция, экран и другие правильные слова в рекламе будут, но держитесь подальше от водосточных труб, из которых торчат провода (рис. 3)!



Рис. 3. Осторожнее с этой трубой

Как и почему рисуют сопротивления

Это совсем простой вопрос, но в глубине ответа (не удивляйтесь, в физике так всегда) таится кое-что детективное.

Самый частый вариант изображения на схемах постоянных сопротивлений – это № 1 на рисунке 4. Внешне постоянные сопротивления большую часть прошлого века были похожи на цилиндры, потому что тонкий проводящий слой наносили на поверхность диэлектрического, обычно

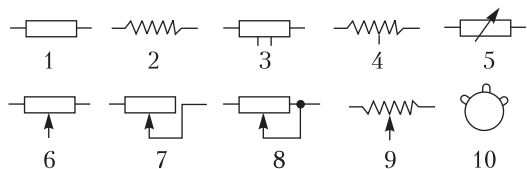


Рис. 4. Как изображают резисторы на схемах

керамического, цилиндра. Такой выбор конструкции, как и все в инженерии, не случаен. Удельное сопротивление сплавов, из которых делали сопротивления, был таков, что необходимые величины сопротивления при разумной длине требовали очень малых сечений – помните формулу $R = \rho L/S$? Но если это малое сечение S реализовать в виде проволоочки, получится нечто очень хлипкое, вдобавок с малой площадью поверхности, так что выделяющаяся мощность перегреет наш резистор. Вот так параметры веществ определяют облик элементов схем (а также зданий, шариковых ручек и самолетов). Естественное решение – тонкая пленка на диэлектрической подложке, проще всего на керамическом цилиндре. Это и прочно, и поверхность большая.

Вариант № 2 когда-то был общепринятым. Постоянные сопротивления могут иметь отводы от части проводника, соответствующие изображения – № 3 и № 4. У этих отводов может быть два совершенно разных предназначения, про одно мы узнаем позже, а второе – это делитель напряжения. Если к концам подведено какое-то напряжение, то по сопротивлению протекает ток и отношение напряжений на частях резистора равно отношению сопротивлений участков (при одном дополнительном условии – подумайте, при каком). Способ изображения сопротивлений № 2 упрощенно изображает проволоку, намотанную на изолирующий (керамический) цилиндр. Так обычно выполняют переменные сопротивления, реостаты – их вы могли видеть в школе. Поэтому если вариант № 2 сейчас и применяют, то чаще всего для изображения переменных сопротивлений, как вариант № 9. До переменных сопротивлений мы еще доберемся. А реостаты (на случай, если вам их не показали в школе) представлены на рисунке 5.

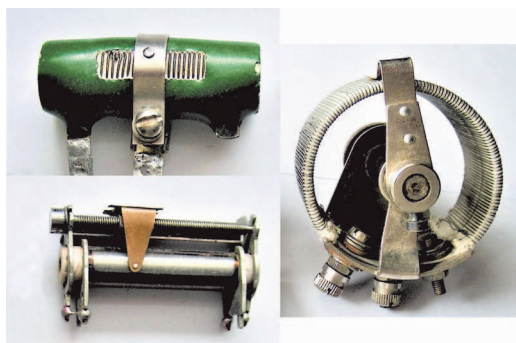


Рис. 5. Переменные резисторы

Вернемся к рисунку 4, на нем изображены от № 5 до № 9 – это переменные сопротивления. Они явно делятся на две группы – с двумя выводами (№ 5, 7, 8) и с тремя (остальные). Можно сказать, что с двумя – это просто переменные сопротивления, а с тремя – это два сопротивления, изменяемые синхронно, так что их сумма постоянна. Но на самом деле история такова – переменные сопротивления, которые предполагалось делать регулируемые вручную, перемещением чего-то, выполнялись именно так, в виде реостата. Который имел, естественно, три вывода – два от концов и один от движка. В схеме, конечно, их можно было использовать и как «просто переменное» сопротивление, и как делитель напряжения.

Заметили ли вы разницу между изображениями № 7 и № 8? В учебнике и задачнике скорее нарисуют № 7, чтобы учащийся не начал мучительно размышлять, куда идет ток. Человек, реально собирающий схему, использует схему № 8 – если у примененного им сопротивления вообще есть третий вывод. Почему он так поступит, мы узнаем немного позже, в разделе про переменные сопротивления. Там же мы узнаем, что такое загадочное изображено под № 10. Подсказку, впрочем, вы только что получили.

Из чего нам делать резисторы

В нашем распоряжении есть хорошие проводники, т.е. металлы, проводники похуже – графит и оксиды некоторых металлов, а также полупроводники и диэлектрики. Из диэлектриков делать резис-

торы не получится – хотя диэлектрики и проводят ток, но их удельное сопротивление слишком велико (в школе считается, что бесконечно велико). У полупроводников удельное сопротивление меньше, и оно, это было бы удобно для производства, управляемо, т.е. при небольших изменениях состава оно существенно изменится. Однако оно сильно зависит от температуры, и это, очевидно, плохо – любая аппаратура должна быть работоспособна при изменении условий работы, прежде всего, окружающей температуры. А стабильность работы аппаратуры тем проще обеспечить, чем стабильнее параметры элементов, в том числе резисторов. Зато полупроводники можно использовать как термометры, позже мы к этому вопросу вернемся.

Остаются проводники, но у них удельное сопротивление, наоборот, мало. Резисторы с небольшими сопротивлениями из обычных проводников делать можно, а что делать, если нужно большое сопротивление? Формула $R = \rho L/S$ говорит, что есть два пути решения проблемы – длинный и тонкий, но не путь, а проводник. Проводник километровой длины – это неудобно, микронную проволоку сделать можно, но работать с ней тоже сложно, да и сопротивление получается недостаточно большим. Но сделать малое сечение можно не только у проволоки, есть еще два способа – тонкие пленки и керметы. Начнем с пленок.

Правда, пленки толщиной в микро- и нанометры делать трудно и работать с ними неудобно. Но когда в физике и инженерии говорят «тонкая пленка», почти всегда имеется в виду – на подложке. Например, тонкая пленка проводника, нанесенная на диэлектрическую подложку – отличный резистор. Напылить в вакууме или в газовом разряде можно пленку любой толщины. Однако, при совсем малых толщинах электроны начинают рассеиваться не только на ионах решетки, но и на поверхностях пленки, а при еще меньших толщинах пленка может потерять, как говорят, сплошность, превратиться в отдельные кучки атомов (островковая пленка) и электроны будут прыгать из островка в островок. Но получать большие



Рис. 6. Постоянные резисторы

сопротивления резисторов все эти чудеса не мешает. Кстати, для тонких пленок без подложек используется выражение «свободные пленки».

Нам пора посмотреть на объект нашего повествования. На фотографии на рисунке 6 несколько разных пленочных резисторов. В первом ряду – резисторы, сопротивление которых определено с очень высокой точностью, она на них написана. Во втором ряду слева – экзотическое сопротивление, и вот вопрос: зачем там гармошка? Причем очевидный ответ неверен. Этот очевидный ответ верен для того сопротивления, что справа, на нем проводящее покрытие прорезано спиралью. В третьем ряду – несколько резисторов, сопротивление которых изменялось (говорят – «подгонялось») уже после покраски.

На следующем снимке (рис. 7) – сверх-высокоомные сопротивления (верхнее – 10 ГОм), резистивная пленка – углерод, изготовитель запаял их в стекло, так как сопротивление краски (включенной по сути параллельно всему резистору) было бы недостаточно велико. Обратите внимание на белую панель выводов слева – она из тефлона или фторопласта-4, диэлектрика с рекордно высоким удельным сопротивлением. Кстати, что касается этих сопротивлений и краски, есть тут еще одна проблема. Пусть для простоты толщины резистивной пленки и краски одинаковы. Во сколько раз удельное сопротивление

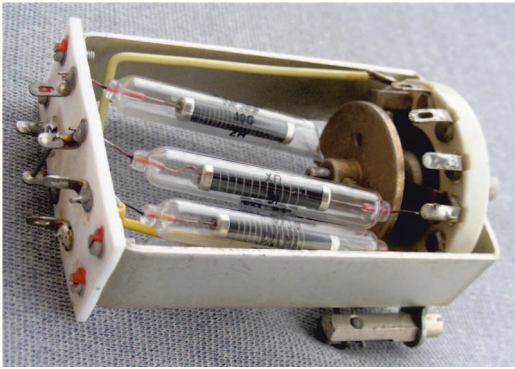


Рис. 7. *Весьма высокоомные резисторы*

краски должно быть выше удельного сопротивления материала углеродной пленки, чтобы итоговое сопротивление при покраске изменилось менее чем на 1%? Подумайте над этим.

Теперь обратимся к другому, не пленочному решению. Возьмем порошок проводника (например, металла) и порошок диэлектрика (например, керамики), хорошенько перемешаем их, спрессуем и, скорее всего, нагреем, а иногда и спрессуем при нагреве. Получится композиционный материал, композит, который изготовители резисторов по традиции называют керметом (теперь вы понимаете, почему). Если проводника было взято мало, композит окажется диэлектриком, если много – проводником, потому что проводящие частицы будут образовывать цепочки. Определение концентрации, при которой возникает проводимость, называется проблемой протекания. Почему у кермета сопротивление больше, чем у того проводника, из которого он был сделан, почти очевидно – частицы контактируют по маленьким площадкам. Сопротивление контакта обратно пропорционально диаметру контактной площадки. Впрочем, и тут, как и везде в физике, не все просто. Сопротивление устроено так, только если проводник – это металл с обычной объемной проводимостью. А у полупроводников проводимость бывает не объемная, а поверхностная, тогда зависимость получается логарифмическая. Размер контактных площадок зависит от давления при прессовании и температуры при спекании, а еще от

примесей, ускоряющих поверхностную диффузию, за счет которой и происходит спекание. Таким образом, способов управления итоговым значением удельного сопротивления много, и понятно, почему керметы стали использовать в качестве материала резисторов. У них, впрочем, есть одна неизбежная, но по сути преодолеваемая проблема. В любом образце, состоящем из разных материалов (т.е. композите), может при эксплуатации происходить взаимодействие между ними, а это почти всегда – дрейф параметров. Кроме выбора материалов и условий работы (прежде всего, температуры) есть один универсальный способ – «прогон», т.е. какое-то время выдержка резисторов в рабочем режиме или с перегрузкой.

Любимая формула

О формуле $R = \rho L/S$ можно задать множество вопросов (однако, это множество конечно – подумайте, почему). Первый, простой и не слишком важный вопрос, почему мы используем понятие удельного сопротивления ρ , а не обратную величину – удельную проводимость σ ? В физике, если смотреть в целом, удельная проводимость используется, наверное, чаще, но здесь, в электротехнической ветви – это просто вопрос традиции, пришедшей из электротехники. Там для величины ρ раньше использовали еще и забавную размерность: Ом·мм²/м, для меди, например, $\rho = 0,017$ Ом·мм²/м. Причина была проста – длина проводников чаще всего измерялась метрами, сечение – миллиметрами квадратными, а умножали в прошлом веке в уме.

Теперь одно, общее для всех физических формул, соображение. Буквы в формулах обозначают какие-то физические величины. Эти величины могут быть скалярами и векторами, фиксированными числами, функциями от других величин (и упомянутых в задаче, и не упомянутых), функциями от координат и времени. В школьных учебных задачах все это оговаривается, а в не школьных может и не оговариваться. Чтобы экзаменатор, увидев, что

кто-то присваивает числовое значение скорости воды в реке, мог, хитро улыбаясь, спросить, скаляр она, вектор или тензор, зависит ли она от координат и времени, и главное – существенно ли это для конкретной задачи (вот и сообщайте, когда да, а когда нет). Если вы какой-то формулой пользуетесь давно и успешно и привыкли к некоторым условностям, то это не означает, что данные предположения будут соблюдаться всегда. Тем более, что вы скорее всего забыли, как формула выводилась и при каких условиях она вообще верна. Например, помните ли вы, при каких условиях и почему верна формула для давления в жидкости и для силы Архимеда?

Что же касается нашей любимой формулы $R = \rho L/S$, то она верна, когда плотность тока одинакова во всех точках образца, а для этого он должен быть прямым цилиндром – причем в математическом, а не бытовом понимании, т.е. не обязательно круговым. Далее, удельное сопротивление ρ должно быть одинаково во всех точках образца, а торцевые плоскости, т.е. контакты, должны быть эквипотенциальны. Эта проблема решается обычно так – контакты делаются массивными, большего размера, чем сам резистивный элемент, и делаются они из вещества, имеющего удельное сопротивление существенно меньше, чем вещество резистивного элемента. Например, контакт выполнен из меди, а резистивный элемент – из специальных сплавов, имеющих удельное сопротивление в десятки раз выше.

Требование одинаковой плотности тока во всех точках образца ограничивает применимость этой формулы с точки зрения величины тока и его частоты. Если ток велик, то резистор греется, причем нагрев будет неравномерен – греется весь объем, а отводится тепло с поверхности. Середина будет теплее, ее сопротивление станет больше, и поэтому ток не будет равномерно распределяться по сечению, а оттеснится к поверхности. Возможно и сжатие тока к оси проводника собственным магнитным полем, правда, в проводниках этот эффект слаб, а в полупроводниках и плазме он

бывает существенен. И еще проблема – скин-эффект, вытеснение тока к поверхности проводника, но это уже на высоких частотах.

Хочется независимости

При эксплуатации любой аппаратуры идет время и могут изменяться условия ее работы – температура, давление, влажность, радиация. Все зависит от всего, так что и L , и S зависят, например, от температуры – вещества изменяют размеры при изменении температуры. Но учитывать это никому не приходит в голову, и это правильно. Потому что удельное сопротивление зависит от температуры намного сильнее, и на этом фоне зависимость других параметров делается несущественной.

Из всех зависимостей главная – именно от температуры, и ниже мы ее обсудим, но сначала немного о давлении. Зависимость сопротивления от давления загадочна – у большинства металлов сопротивление с ростом давления растет, а у лития, кальция, стронция и сурьмы падает. Это еще что – у Ge n -типа растет, у Ge p -типа падает. А у кремния – вообще наоборот. Для электроники зависимость от давления обычно не существенна, но есть один важный случай – тензометрия.

Из школьной географии мы знаем, что на земле существуют реки. А из ее раздела, экономической географии, мы знаем, что люди торгуют и путешествуют, но для этого нужны мосты. (Кстати, если после чтения книг по математике и физике у вас остается хоть какое-то время на чтение, возьмите «Трилогию Моста» Уильяма Гибсона.) Для того чтобы строить мосты (и здания, и самолеты), нужно уметь измерять деформации и давления. Самый красивый метод измерений основан на фотоупругости – зависимости оптических свойств от механических напряжений, но он применим только к прозрачным материалам. Хотя есть попытки использования более длинных волн, вне оптического диапазона. Скажем, зондируя радиоволнами ледники, можно определять давление внутри многометровых масс льда.

Однако единственный массово применяемый метод – это тензометрия. Для измерения деформаций к объекту, который мы исследуем, приклеивается проволочка и измеряется ее сопротивление. При изменении размера объекта изменяется длина проволочки, ее сечение и удельное сопротивление ее материала. Стало быть, изменяется сопротивление, которое мы измеряем. Для измерения давлений в газе, жидкости и твердом теле в исследуемую среду или внутрь объекта помещается проволочка... дальше вы уже знаете. И не забывайте электрически изолировать проволочку от объекта.

Что касается нашей главной причины нестабильности резисторов, т.е. зависимости удельного сопротивления от температуры, то в школе обычно говорят, что эта зависимость линейна, ну и еще упоминают сверхпроводимость. Реальная ситуация существенно сложнее, а значит – и интереснее. Зависимость сопротивления от температуры не линейна, и вдобавок на ней могут быть скачки при температурах, когда перестраивается решетка. На рисунке 8 представлен график теплового расширения железа. Стрелками показаны точка Кюри (потеря ферромагнитных

Обозначение фазы	Решетка и свойство	Переход
α	ОЦК, ферромагнетик	
		768–770 °С, точка Кюри
α или β	ОЦК, парамагнетик	
		910–911 °С
γ	ГЦК, парамагнетик	
		1392–1401 °С
δ	ОЦК, парамагнетик	
		1536–1539 °С
жидкость		

свойств), две перестройки решетки и точка плавления. В таблице приведен список фаз железа и температур перестройки (ОЦК – объемноцентрированный куб, ГЦК – гранцентрированный куб). Диапазон температур указан потому, что в разных источниках немного разные данные. То ли примеси были разные, то ли скорость изменения температуры, то ли гистерезис... полиморфизм – дело тонкое! Персонаж фильма «Белое солнце пустыни» тоже так считал. И еще что-то интересное изображено на рисунке в правом нижнем углу, там что-то экзотическое, гексагональное, плотноупакованное.

Но что нам с зависимостью сопротивления от температуры делать? Разработчикам резисторов не слишком интересно, линейна или не линейна зависимость удельного сопротивления от температуры, им важно эту зависимость ослабить. Способ известен, он даже упоминается в некоторых школьных учебниках – нужно использовать не металлы, а сплавы. В металлах электроны рассеиваются на колебаниях ионов решетки, и сопротивление зависит от температуры потому, что с ее ростом увеличивается амплитуда этих колебаний. В сплавах возникает дополнительное рассеивание электронов на неоднородностях решетки, поэтому сопротивление увеличивается и становится менее зависимым от температуры.

А что делать, если захотелось, чтобы сопротивление менялось с температурой не так слабо, как достигнуто на сегодня, а

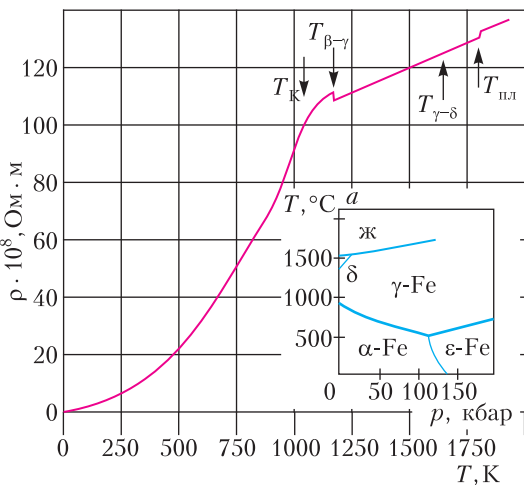


Рис. 8. Как расширяется железо

еще слабее? Инженерные задачи часто можно решить несколькими способами, и хороший инженер должен себе их представлять. Имеющиеся способы обычно ограничивают набор способов, но часто мы действуем «по инерции», предпочитая немного усовершенствовать что-то известное и не усложнять себе жизнь анализом других вариантов. Правда, путь по проторенной дорожке часто бывает дешевле и быстрее, и меньше вероятность неудачи, т.е. ситуация более предсказуема, это тоже надо учитывать.

Постоянство сопротивления при изменении условий работы может нам потребоваться в двух ситуациях. Первая – когда это метрологические применения, попросту говоря – когда нам нужен эталон или нечто вроде. Тут выкрутиться не удастся, решений только два – или искать материал, у которого стабильность такая, как нам надо, или же стабилизировать температуру аппарата или даже всего помещения. Вторая ситуация – не метрологическая, а, скажем так, радиотехническая, т.е. сопротивление – элемент какой-то схемы и в ней он что-то делает. Вот тут могут быть и другие решения, потому что можно схемными ухищрениями сделать схему менее чувствительной к изменению параметров деталей. Правда, обычно ценой усложнения, удорожания и уменьшения надежности из-за увеличения количества элементов. Вот тут и требуется хорошее базовое образование, чтобы выбрать лучшее решение. С учетом того, что само слово «лучший» в разных ситуациях может иметь разный смысл.

Кстати, у аморфных металлов (с их не вполне упорядоченным расположением атомов) удельное сопротивление в несколько раз выше, чем у тех же металлов с их обычной кристаллической решеткой, а зависимость от температуры, естественно, слабее. Дополнительное рассеивание возникает на любых нарушениях решетки, т.е. на дислокациях, а также в очень тонких пленках – просто на их границах, на поверхностях. Но в тонких пленках возникает столько новых эффектов, что рассказать о каком-то одном, умолчав об остальных, было бы не совсем справедли-

во. А рассказать обо всех – не уместится в статье. Поэтому придется, как написал один поэт, наступить на горло собственной песне. И перейти к рассказу о других проблемах резисторов.

Еще шесть проблем

Начнем с самой простой и очевидной – перегрев. Электрическая мощность, которая будет потребляться сопротивлением и, соответственно, будет выделяться в нем в виде тепла, определяется схемой, где это сопротивление будет применено. Именно разработчик схемы говорит – тут должно стоять сопротивление R , по нему должен течь ток I , и на нем должно быть напряжение U . Точнее – он называет какие-то две из этих трех величин. Остальное понятно: $P = UI = I^2R = U^2/R$, и все это переходит в тепло. Вот если бы сопротивление поднимало груз, издавало бы приятные звуки или излучало бы свет, то тепла выделялось бы меньше (в этой фразе три неточности; интересно, сколько из них вы найдете). От этого тепла много проблем, часть мы обсудим позже, но первые две – это разогрев самого сопротивления и окружающих деталей. Ужас в том, что большинство химических и физических процессов ускоряется при увеличении температуры, следовательно, сокращается срок службы.

Что с этим делать? Ставить кулер на резистор – много чести, но можно снабдить его ребрами охлаждения, чтобы воздух снимал тепло с большей площади, а значит, при меньшей температуре (три такие резистора изображены на рисунке 9 слева). Или, по крайней мере, помещать резистивный элемент внутрь керамики (эти – на рисунке справа), где он будет защищен от окисления кислородом воздуха, и не красить эту керамику краской, которая нагрева может и не выдержать.

Следующая проблема в школе не упоминается, но догадаться можно – у резистора есть выводы, у выводов есть индуктивность, а между выводами есть емкость. Получается, что параллельно резистору включен конденсатор, а последовательно с ними включена катушка. Если схема работает с постоянными напряжениями и тока-

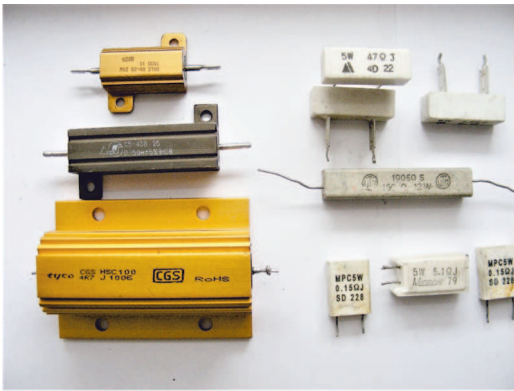


Рис. 9. Куда девать тепло?

ми, то это не имеет значения. При переменных напряжениях и токах ситуация зависит от частоты ν и сопротивления резистора R . Чтобы паразитные емкость и индуктивность не влияли на работу схемы, нужно выполнить два условия – реактивное сопротивление конденсатора $R_C = (2\pi\nu C)^{-1} \gg R$, реактивное сопротивление катушки или прямого провода $R_L = 2\pi\nu L \ll R$. На высоких частотах начинаются проблемы, и резистор гордо заявляет, что он вообще представляет собой резонансный контур на частоту $\nu = (2\pi(LC)^{1/2})^{-1}$ – это наша знакомая, формула Томсона, написанная для частоты. На будущее (если оно будет связано у вас с электроникой) учтите – инженеры мыслят частотами. Да и физики вспоминают о периоде, лишь когда начинают формировать импульсы электромагнитного поля длительностью в период или даже менее. Вы еще не понимаете, какое это чудо и почему это чудо, но когда-то поймете, и поэтому вам можно позавидовать.

Еще одна проблема резистора – электропрочность. Мы привыкли, что о пробое заходит речь, когда мы прикладываем к диэлектрику высокие напряжения. В резисторе у нас три диэлектрика – керамика (реже стекло) внутри, диэлектрическое покрытие (краска) поверх резистивного слоя, воздух снаружи. Слабых мест два – воздух и поверхностный пробой по диэлектрическому покрытию, который начинается в месте контакта покрытия и металлического колпачка, если там велика на-

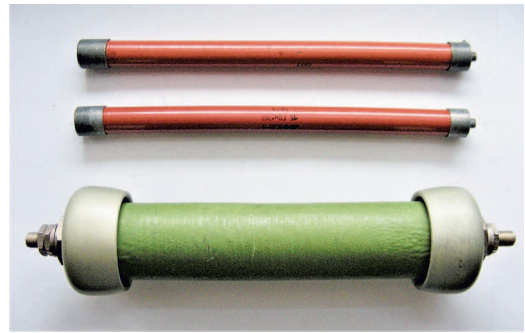


Рис. 10. Не допустим пробоя! Ни по воздуху, ни по поверхности

пряженность поля. На рисунке 10 представлены два обычных высоковольтных сопротивления, сделанных длинными специально, чтобы избежать пробоя по воздуху. А третье сопротивление не просто длинное, у него приняты специальные меры, чтобы спрятать злополучное место контакта в зону слабого электрического поля – металлический колпачок имеет больший диаметр, чем сам резистор, и он нависает над местом контакта, ослабляя поле. Кстати – бывает и проводящая керамика, но в резисторах она, кажется, не применяется; и вообще это отдельная большая тема.

Вот еще проблема – шум. То, что заряд дискретен, вы знали давно и про опыт Милликена слышали. Но никогда не придавали значения – а теперь придется. Представьте себе просто идеальный кусок проводника. В нем есть какой-то заряд, который может по нему перемещаться. Если этот заряд непрерывен, то он может, хотя бы в принципе, распределиться по проводнику симметрично, и тогда – и только тогда – напряжение между концами проводника будет равно нулю. Но электроны дискретны, из-за наличия тепловых энергий они движутся хаотично. Они не обязаны распределяться строго поровну, и поэтому между концами проводника возникает хаотично колеблющееся напряжение, «тепловой шум». Среднее напряжение оказывается равным, конечно, нулю, но средний квадрат напряжения подчиняется формуле $U^2 = 4RkT\Delta f$, где

R – сопротивление, k – естественно, постоянная Больцмана, T – температура, Δf – диапазон частот. Теперь вы знаете, почему охлаждаают приемники радиотелескопов. Эта формула универсальна, и вроде бы все резисторы в одинаковых условиях должны шуметь одинаково. Между тем, шумы резисторов нормируются, они указываются в технических условиях, и существуют малозумящие резисторы.

Дело в том, что имеется и другой источник шумов. Шум – процесс хаотический, его источник – случайные события. Какие случайные события есть в резисторе? Во-первых, координаты электронов – это как раз источник тепловых шумов. Во-вторых, это координаты атомов, а это источник сопротивления, которое может изменяться, флуктуировать. Обратите внимание, что этот источник тоже зависит от температуры, но проявляется он только при наличии тока (для напряжения кроме сопротивления нужен ток). Далее, и в электронной подсистеме, и в атомной могут быть групповые движения, волны. Волны в электронной подсистеме называют волнами зарядовой плотности, волны в атомной подсистеме – это звуковые колебания (фононы), перемещения дислокаций и перемещение границ между кристаллами (если объект не монокристаллический). Если эти факторы случайны, то они могут быть источником шумов. Удельное сопротивление однородного проводника зависит от концентрации и подвижности электронов (вы это знаете из школьного курса), и флуктуации этих величин вызывают флуктуации удельного сопротивления и, следовательно, шумы – но возникающие только при пропускании тока.

И последнее – если материал резистора не однороден, если это отдельные проводящие частички, радостно контактирующие друг с другом, то эти контакты могут возникать и пропадать, а это обязательно вызовет колебания сопротивления, которое проявляется, естественно, только при наличии тока. Все такие шумы называют токовым шумом, хотя от температуры они все равно зависят.

А теперь вы узнаете страшное и относящееся ко всей физике. Исследуя какое-то явление, мы стараемся разделить влияния, факторы, пути взаимодействия – как мы сейчас это сделали. Разделили шумы по источникам и механизмам. Мы поступили правильно, но... но где-то в глубине сознания должна гореть «желтая лампочка» (вернее, светодиодик) – сигнал настороженности. Разделить-то мы их красиво разделили, а не взаимодействуют ли они? Не влияют ли они друг на друга? В нашем случае можно привести очевидный пример влияния. Не влияют ли кое-какие волны друг на друга, не замешан ли здесь Огюст Кулон?

Следующая проблема – электроперенос, или электромиграция. Электроны в проводнике разгоняются полем, а тормозятся на ионах решетки, значит – они передают ионам импульс. Кроме того, в проводнике при протекании тока есть электрическое поле, и оно действует на ионы и электроны. Однако ни импульс, переданный электронами ионам, ни поле, действующее на ионы непосредственно, не вызывают движения проводника как целого – потому, что проводник в целом нейтрален. Но действие на разные ионы может оказаться различным, и это существенно, по крайней мере, в двух случаях – если мы имеем дело со сплавом или с контактом двух разных металлов. В электронике и то, и другое встречается не на каждом шагу, а чаще – на каждом выводе каждой детали и каждой микросхемы. Потому что вывод сделан из одного металла, покрыт другим, паяем мы его третьим к дорожке, которая тоже из чего-то сделана. Следствие – на контакте двух металлов ионы могут переползть из одного металла в другой, сечение проводников меняется, и там, где оно меньше, возникает перегрев. И наступает конец – т.е. конец срока службы. Ситуация усугубляется тем, что даже в чистом металле ионы не совсем одинаковы. Во-первых, есть изотопы. Во-вторых, одни ионы находятся внутри кристаллов, другие – на границах между ними. В-третьих, одни на поверхности, другие внутри. И любая из этих разниц может повлечь элек-

троперенос. И не надо уповать на то, что токи в микросхемах маленькие – эти процессы определяются не током, а плотностью тока, которая равна отношению тока к сечению проводника. Значит, сечение проводников делается все меньше и меньше.

Ну и на десерт – проблема дрейфа параметров (она уже упоминалась). В любом объекте, состоящем из разных материалов, может при эксплуатации происходить взаимодействие между ними, а это почти всегда – дрейф параметров. Но и когда материал один, дрейф возможен из-за взаимодействия с атмосферой, окисления, а также из-за процессов в самом материале. Если это порошок, может происходить спекание, рост контактов между порошинками. А если этой проблемы нет, то может перестраиваться кристаллическая структура. Кроме выбора материалов и условий работы (прежде всего, температуры) есть один универсальный способ – «прогон», т.е. какое-то время выдержка резисторов в рабочем режиме или с перегрузкой.

Управление резистором

Резисторы, которые мы обсудили, часто называют постоянными сопротивлениями. Их сопротивление зависело и от внешней температуры, и от режима эксплуатации, и от времени (старение), но эти зависимости были слабыми и не использовались для чего-либо, а считались вредными и подавлялись. Однако существуют резисторы, сопротивление которых изменяется в процессе эксплуатации сильно, и это изменение для чего-то используется. Такие «управляемые резисторы» можно разделить на несколько групп.

Первая группа – резисторы, сопротивление которых зависит от температуры. Их называют терморезисторами и делят на две подгруппы – термисторы, сопротивление которых с увеличением температуры падает, и позисторы, у которых сопротивление растет. Они сделаны из полупроводников, удельное сопротивление которых зависит от концентрации носителей заряда, их подвижности и может изменяться

при фазовых переходах. Эти три фактора и определяют поведение терморезистора. При этом ему важна его собственная температура, и если она определяется только внешней средой, то его можно использовать как термометр. Терморезистор может иметь свой нагреватель, тогда его сопротивление управляется мощностью этого нагревателя. И, наконец, терморезистор может нагреваться текущим по нему самому током – в этом случае мы получаем нелинейную вольт-амперную характеристику. Материалы термисторов разнообразны, это V_2O_4 , V_2O_3 , VO_2 , $BaTiO_3$ и другие соединения. Разрабатываются логические элементы на основе NbN для цифровой техники, которые при нагреве переходят из сверхпроводящего состояния в резистивное.

Вторая группа – нелинейные резисторы, у них вольт-амперная характеристика $I(U)$ нелинейна, причем не из-за выделения мощности, достаточного для разогрева резистора, как в предыдущем примере. Материал этих резисторов – композит, содержащий частицы полупроводника SiC , которые контактируют и образуют проводящие цепочки. Как вы уже знаете, основное сопротивление сосредоточено в контактах, при протекании достаточно большого тока контакты разогреваются (именно контакты, а не весь резистор) и сопротивление уменьшается.

Третья группа – фоторезисторы, сделанные из полупроводника, в котором при освещении возрастает концентрация носителей заряда и уменьшается удельное сопротивление. Материал фоторезисторов – CdS , $CdSe$, PbS , $PbSe$, $InSb$.

Четвертая группа – магниторезисторы, их сопротивление зависит от магнитного поля. При его наличии сила Лоренца искривляет траектории носителей заряда, средняя длина свободного пробега уменьшается, удельное сопротивление увеличивается. Материал магниторезисторов – $InSb$, $InAs$ и другие.

И есть еще одна группа управляемых резисторов – их видел, наверное, каждый школьник. Это...

Механически управляемые резисторы

У резисторов с механическим управлением, т.е. тех, в которых что-то перемещается, могут быть три траектории перемещения – по прямой (это реостат, который все видели в школе), по окружности и по спирали (многооборотные потенциометры). Перемещать может либо сам человек, либо другая часть системы, и параметры, которыми будет характеризоваться резистор, будут одни и те же – хотя требующиеся значения параметров могут оказаться и разными. Сам резистивный элемент может быть двух типов – либо это металлическая проволока, либо резистивная пленка на подложке. Переменные резисторы могут быть совмещенными, т.е. два сопротивления могут изменяться синхронно.

Некоторые параметры постоянных резисторов не имеют большого значения для переменных резисторов, например – временная стабильность и слабая зависимость от температуры. Зато появляются новые параметры. Для переменных резисторов параметр «сопротивление» – это не одно значение, как для постоянных сопротивлений, а диапазон значений (минимальное, максимальное), плавность регулирования (наличие и величина скачков), зависимость сопротивления от перемещения (линейная или какая-то иная). Минимальное значение определяется конструкцией подвижного контакта и естественной дискретностью – переходом подвижного контакта с витка на виток.

Кроме параметров, связанных с сопротивлением, для переменных резисторов проблемой могут быть, естественно, износ резистивного элемента и подвижного контакта, устойчивость контакта при вибрации и ударах и дополнительные шумы, возникающие из-за случайного характера возникновения контакта при перемещении. Проблема промежуточных выводов формально не является специфической, постоянный резистор тоже может их иметь; в обоих случаях это редкость.

На рисунках 11–14 представлены несколько вариантов устройства переменных резисторов.

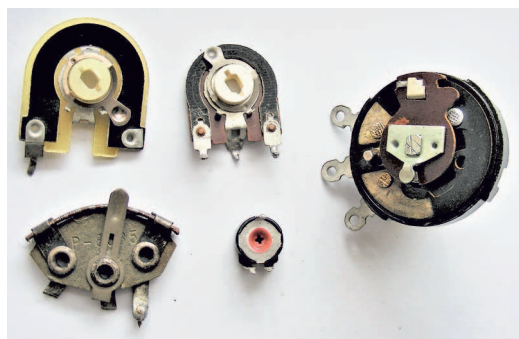


Рис. 11. Переменные резисторы, траектория – часть окружности. Слева внизу – резистивный элемент из проволоки, остальные – проводящая пленка

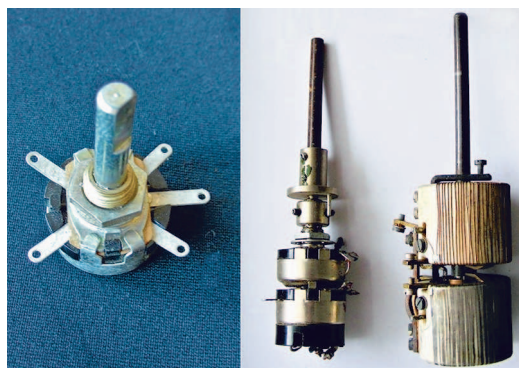


Рис. 12. Слева – резистор с выводами, справа – двойные резисторы, пленочные и проволочные

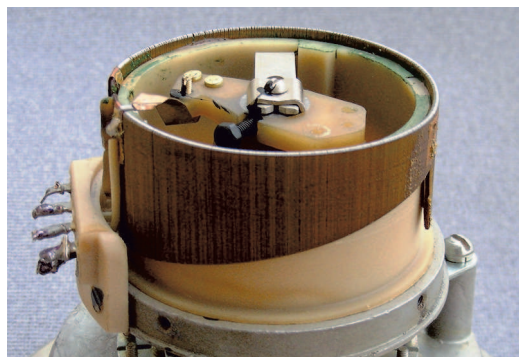


Рис. 13. Резистор с нелинейной зависимостью сопротивления от угла поворота (сообразите, какова она)

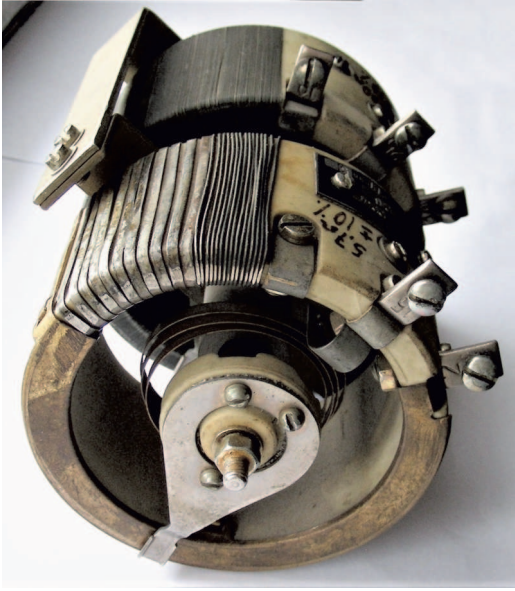


Рис. 14. Необычный переменный резистор

У резистора на рисунке 14 для увеличения диапазона регулирования, т.е. для расширения диапазона регулирования в области малых величин, резистивный элемент сделан из трех частей, с разной зависимостью сопротивления от угла поворота. Первый участок сделан из медной ленты, второй – из резистивной ленты меньшего сечения, третий – из резистивной проволоки меньшего сечения.

Следующие два рисунка, 15 и 16, иллюстрируют относительность движения. Обычно резистивный элемент неподвижен, в двух этих случаях наоборот – он

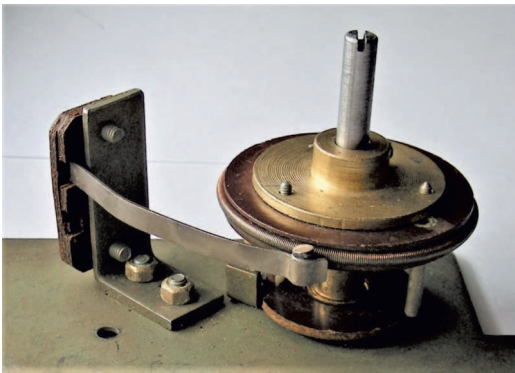


Рис. 15. Подвижен резистивный элемент

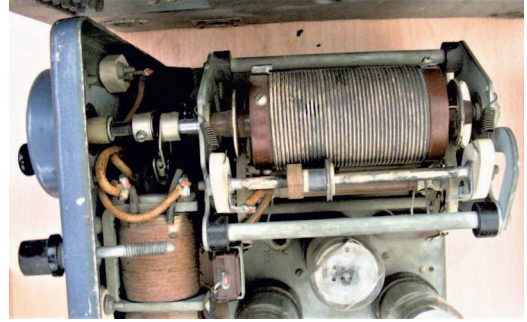


Рис. 16. Подвижен резистивный элемент, но контакт на переползает с витка на виток, а скользит вдоль проволоки

подвижен, причем во втором случае движение организовано так, что дискретность витков не имеет значения, так как контакт скользит вдоль проволоки. Этот последний вариант можно считать предтечей многооборотных потенциометров, в которых, правда, резистивный элемент был неподвижен.



Рис. 17

И в заключение – немного о красоте (рис. 17).

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задача M2746 предлагалась на 12-й Европейской олимпиаде для девушек.

Задача M2748 предлагалась на устном туре XLIV Турнира городов.

Автор задач Ф2753–Ф2756 – В.Плис.

Задачи M2746–M2749, Ф2753–Ф2756

M2746. Улитка Турбо сидит в некоторой точке окружности длиной 1. Дана бесконечная последовательность положительных чисел c_1, c_2, \dots . Турбо последовательно проползает расстояния c_1, c_2, \dots по этой окружности, каждый раз выбирая, ползти ли ей по часовой стрелке или против часовой стрелки. Определите наибольшую константу $C > 0$ со следующим свойством: для любой последовательности положительных чисел c_1, c_2, \dots таких, что $c_i < C$ для каждого i , Турбо может (после изучения последовательности) гарантировать, что на окружности есть точка, которую она никогда не посетит и не переползет.

M2747. В тетраэдре $ABCD$ на продолжении ребер AB , AC и AD за точку A отметили три точки, находящиеся от A на расстоянии, равном полупериметру треугольника BCD . Аналогично отметили по три точки, соответствующие вершинам B , C и D . Докажите, что если существует сфера, касающаяся всех ребер тетраэдра $ABCD$, то отмеченные 12 точек лежат на одной сфере.

В. Александров

M2748. В таблице 44×44 часть клеток синие, а остальные – красные. Никакие синие клетки не граничат друг с другом по стороне. Множество красных клеток, наоборот, связно по сторонам (от любой красной клетки можно добраться до любой другой красной, переходя из клетки в

клетку через общую сторону и не заходя в синие клетки). Докажите, что синих клеток в таблице меньше трети.

Б. Френкин

M2749*. Из n монет одна фальшивая, которая отличается по весу от настоящей неизвестно в какую сторону. Чашечные весы работают правильно, если груз на одной чаше тяжелее, чем на другой, а при равенстве могут показать что угодно. При каких n можно найти фальшивую монету и определить, легче она настоящей или тяжелее, за k взвешиваний?

А. Заславский

Ф2753. Снаряд летит по вертикали и разрывается в высшей точке траектории на множество осколков, разлетающихся во всевозможных направлениях с равными по модулю скоростями. Через $t_1 = 0,4$ с после разрыва все осколки находятся в полете, один из осколков движется горизонтально, его импульс $p_1 = 30$ кг·м/с. Масса снаряда $M = 10$ кг.

1) Найдите модуль p_2 суммарного импульса всех остальных осколков в этот момент времени. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

2) Найдите угол α между векторами \vec{p}_2 и \vec{g} в этот момент времени. В ответе укажите значение тригонометрической функции угла: $\sin \alpha$ или $\operatorname{tg} \alpha$.

Наибольшее расстояние от точки разрыва до точки падения осколков на горизонтальную поверхность $d = 80$ м.

3) Найдите продолжительность T полета таких осколков. Сопротивление воздуха считайте пренебрежимо малым.

Ф2754. Брусок установлен вплотную к вертикальной стенке (рис. 1). На бруске закреплено кольцо радиусом $R = 1$ м, на которое надет шарик. Массы бруска и шарика одинаковы. Кольцо и держатель легкие. Трения нет. Из верхней точки

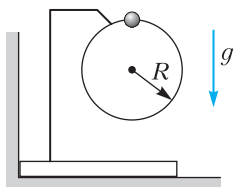


Рис. 1

ки кольца шарик начинает скользить с пренебрежимо малой начальной скоростью.

1) Найдите ускорение \vec{a} шарика в тот момент, когда сила, с которой брусок действует на вертикальную стенку, обращается в ноль. В ответе укажите модуль и направление вектора ускорения.

2) Найдите вертикальное перемещение h шарика к этому моменту времени.

3) Найдите наибольшую скорость v бруска. Все перемещения происходят в одной вертикальной плоскости. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². В процессе движения брусок не отрывается от гладкой горизонтальной плоскости.

Ф2755. Школьник втаскивает санки на горку. Профиль горки показан на рисунке 2. Чтобы, двигаясь по прямой, медленно втащить санки массой $m = 5$ кг из точки 0 в точку 1, прикладывая силу вдоль плоской поверхности горки, необходимо совершить работу $A_1 = 300$ Дж. В точке 1 школьник отпускает санки. Вертикальная координата точки старта $h = 4,6$ м, начальная скорость санок нулевая. Коэффициент трения скольжения санок по горке одинаков на всей поверхности горки. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

1) Найдите скорость v санок у основания горки в точке 0.

2) Какую работу A_2 следует совершить, чтобы медленно переместить санки по горке из точки 1 в точку 2? В точке 2

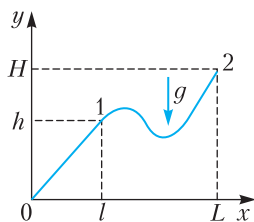


Рис. 2

вертикальная координата $H = 10$ м, $L = 4l$. На каждом элементарном перемещении вектор силы, которую школьник прикладывает к санкам, и вектор перемещения санок лежат на одной прямой. Все перемещения происходят в одной вертикальной плоскости.

Ф2756. В цикле 1–2–3–4–1 тепловой машины две изобары и две изотермы (рис. 3). Рабочее вещество – одноатомный идеальный газ. В процессе изобарного расширения до удвоения объема газ совершает работу A . Такую же работу A совершает газ при изотермическом расширении.

1) Найдите количество теплоты Q_{123} , подведенное к газу в процессах 1–2–3.

2) Найдите количество теплоты Q_{34} , отведенное от газа в процессе изобарического сжатия 3–4 ($Q_{34} > 0$).

3) Найдите КПД η цикла.

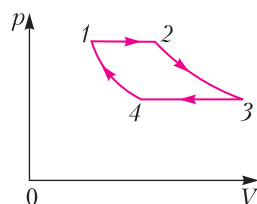


Рис. 3

Решения задачи М2734–М2737, Ф2741–Ф2744

М2734. В вершинах n -угольника расставляют вещественные числа, а на каждой стороне записывают сумму двух чисел, стоящих в концах этой стороны. Для каких n могло оказаться, что суммы, записанные на сторонах, взятые в некотором порядке, равны 1, 2, 3, ..., n ?

Ответ: для нечетных n и для n , делящихся на 4.

Пусть числа в вершинах равны x_1, x_2, \dots, x_n . Тогда в задаче спрашивается, является ли совместной (т.е. имеет ли хотя бы одно решение) система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = s_1, \\ x_2 + x_3 = s_2, \\ \dots \\ x_n + x_1 = s_n \end{cases} \quad (*)$$

для какой-нибудь перестановки s_1, s_2, \dots, s_n чисел 1, 2, ..., n .

Для нечетного $n = 2k - 1$ система (*) имеет единственное решение при любых заданных s_1, s_2, \dots, s_n . Действительно, x_i однозначно находятся из равенств

$$\begin{aligned} 2x_1 &= (x_1 + x_2) - (x_2 + x_3) + \\ &+ (x_3 + x_4) - \dots + (x_n + x_1) = \\ &= s_1 - s_2 + s_3 - \dots + s_n, \\ 2x_2 &= s_2 - s_3 + s_4 - \dots - s_n + s_1 \end{aligned}$$

и т.д. Для найденных значений справедливы равенства (*).

Пусть $n = 2k$ чётно. Если система (*) совместна, то

$$\begin{aligned} s_1 + s_3 + s_5 + \dots + s_{2k-1} &= \\ = (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + \dots + (x_{2k-1} + x_{2k}) &= \\ = (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5) + \dots + (x_{2k} + x_1) &= \\ = s_2 + s_4 + s_6 + \dots + s_{2k}. \end{aligned}$$

Значит, числа s_1, s_2, \dots, s_{2k} можно разбить на 2 группы по k чисел с равными суммами. Наоборот, если $s_1 + s_3 + s_5 + \dots + s_{2k-1} = s_2 + s_4 + s_6 + \dots + s_{2k}$, то наша система (*) имеет бесконечно много решений следующего вида:

$$\begin{aligned} x_1 &= t, \quad x_2 = s_1 - t, \quad x_3 = s_2 - s_1 + t, \\ x_4 &= s_3 - s_2 + s_1 - t, \quad x_5 = s_4 - s_3 + s_2 - s_1 + t, \dots \\ \dots, \quad x_{2k} &= s_{2k-1} - s_{k-2} + \dots + s_1 - t. \end{aligned}$$

Для таких значений x_i все уравнения системы (*), кроме последнего, очевидно, верны, но и последнее – тоже, так как $x_{2k} + x_1 = s_{2k-1} - s_{2k-2} + \dots + s_1 = s_{2k}$.

При нечетном k сумма $1 + 2 + \dots + 2k$ нечетна, поэтому числа $1, 2, \dots, 2k$ невозможно разбить на две группы с равными суммами (иначе эти суммы должны быть целыми, и тогда общая сумма всех чисел четна).

При четном $k = 2m$ нужное разбиение возможно: пусть числа $s_1, s_3, \dots, s_{2k-1}$ равны (в любом порядке) числам $1, 2, \dots, m, 3m + 1, 3m + 2, \dots, 4m$, а числа s_2, s_4, \dots, s_{2k} равны числам $m + 1, m + 2, m + 3, \dots, 3m$.

Таким образом, для $n = 2k$ ответ в задаче положительный при четных k и отрицательный в противном случае.

П. Кожевников

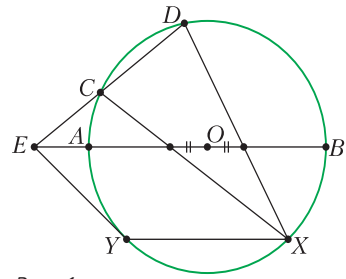


Рис. 1

M2735. Пусть AB – диаметр окружности Ω с центром O (рис. 1). Точки C, D, X и Y выбраны на Ω так, что отрезки CX и DX пересекают отрезок AB в точках, симметричных относительно O , а $XY \parallel AB$. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке E . Докажите, что касательная к Ω , проведенная через Y , проходит через E .

Продлим XO до диаметра XZ (рис. 2). Тогда $YZ \perp AB$, $XY \parallel AB$ и $XO = ZO$, значит, AB – средняя линия в треугольнике XYZ , и точки Y и Z симметричны относительно AB . Из симметрии, касательные к окружности, проведенные в точках Y и Z , пересекаются на AB . Поэтому для завершения решения достаточно показать, что в четырехугольнике $YCZD$ касательные к описанной окружности, проведенные в точках Y и Z , пересекаются на CD .

Докажем, что в четырехугольнике $YCZD$ произведения противоположных сторон равны (вписанные четырехугольники с таким свойством называются гармоническими). Имеем

$$\frac{CY}{DY} = \frac{R \sin \angle CXY}{R \sin \angle DXY} = \frac{\sin \angle XC'D'}{\sin \angle XD'C'}$$

где C' и D' – точки пересечения XC и XD с AB . Применяя теорему синусов к тре-

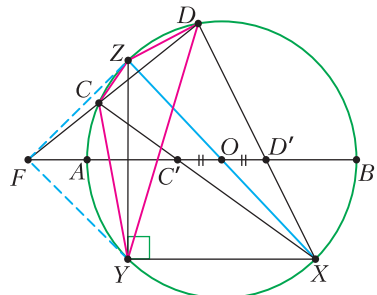


Рис. 2

угольникам XOC' и XOD' , получаем

$$\frac{\sin \angle XC'D'}{XO} = \frac{\sin \angle C'XO}{OC'},$$

$$\frac{\sin \angle XD'C'}{XO} = \frac{\sin \angle D'XO}{OD'}.$$

Поделив одно равенство другое и учитывая, что $OC' = OD'$, получаем

$$\frac{\sin \angle XC'D'}{\sin \angle XD'C'} = \frac{\sin \angle C'XO}{\sin \angle D'XO}.$$

И так как

$$\frac{\sin \angle C'XO}{\sin \angle D'XO} = \frac{R \sin \angle C'XZ}{R \sin \angle D'XZ} = \frac{CZ}{DZ},$$

имеем

$$\frac{CY}{DY} = \frac{CZ}{DZ}.$$

Пусть теперь для гармонического четырехугольника $YCZD$ касательные, проведенные в точках Y и Z , пересекаются в точке F . Покажем, что F лежит на прямой CD . Пусть FC вторично пересекает окружность в точке D_1 . Тогда из подобий

$$FYC \sim FD_1Y \text{ и } FZC \sim FD_1Z \text{ вытекает } \frac{CY}{D_1Y} = \frac{YF}{D_1F} = \frac{ZF}{D_1F} = \frac{CZ}{D_1Z}.$$

Получается, что

$YD/ZD = YD_1/ZD_1$. И поскольку углы YDZ и YD_1Z равны (опираются на одну дугу), треугольники YDZ и YD_1Z подобны, а так как YZ – общая сторона, эти треугольники равны и, значит, они совпадают. Тем самым доказано совпадение точек D и D_1 , завершающее решение.

Отметим, что приведенное решение станет короче, если перейти на язык «переброски» двойных отношений: тройка точек C', O, D' вместе с бесконечно удаленной точкой прямой AB образует гармоническую четверку. Следовательно, четверка прямых XC', XO, XD', XY гармоническая, а значит (проекция на окружность с центром X), четверка C, Z, D, Y гармоническая.

В завершение скажем, что из данной конструкции можно получить алгоритм быстрого построения точки X такой, что C' и D' симметричны относительно O , по данным

точкам A, B, C, D . Действительно,

$$EX^2 = EZ^2 + ZX^2 = (EO^2 - R^2) + 4R^2 = EO^2 + (\sqrt{3}R)^2.$$

Тогда точка X лежит на окружности с центром E и радиусом, равным расстоянию от E до вершины равностороннего треугольника, построенного на отрезке AB как на основании.

К. Кноп

M2736. Найдите остаток при делении биномиального коэффициента $C_{3^n}^{2^n}$ на 3^{n+1} .

Ответ: 3^n при нечетном n , $2 \cdot 3^n$ при четном n .

Заметим, что $A_n = C_{3^n}^{2^n}$ – это целое число, равное

$$\frac{3^n (3^n - 1)(3^n - 2) \dots (3^n - 2^n + 1)}{(2^n)!} = \frac{3^n}{2^n} \cdot \frac{(3^n - 1)(3^n - 2) \dots (3^n - 2^n + 1)}{(2^n - 1)!} = \frac{3^n}{2^n} \cdot C_{3^n - 1}^{2^n - 1}.$$

Но $B_n = C_{3^n - 1}^{2^n - 1}$ – целое число. Из равенства

$$B_n \cdot 3^n = A_n \cdot 2^n \quad (*)$$

следует, что A_n делится на 3^n , и для нахождения остатка от деления A_n на 3^{n+1} достаточно знать остаток при делении B_n на 3.

Далее, B_n равно произведению дробей вида $\frac{3^n - k}{k}$ (для $k = 1, 2, \dots, 2^n - 1$). Пусть 3^m – наибольшая степень тройки, на которую делится k , так что $k = 3^m \cdot s$, где s не делится на 3. Ясно, что $m < n$ и $\frac{3^n - k}{k}$ приводится к (несократимому) виду $\frac{3^{n-m} - s}{s}$. Итак, B_n равно произведению $2^n - 1$ дробей вида $\frac{3^{n-m} - s}{s}$. После домножения на знаменатели имеем равенство

$$B_n \cdot \prod s = \prod (3^{n-m} - s),$$

(Продолжение см. на с. 34)

Citius, altius, fortius!

Девиз олимпийского движения

Я часто видел, как теннисный мяч при ударе наклонной ракеткой описывает кривую...

Исаак Ньютон

Исходя из этого принципа (закона упругости – АЛ), легко можно будет вычислить силу луков...

Роберт Гук

С игрой в гольф связано так много проблем динамики, что обсуждение их всех заняло бы гораздо больше времени, чем имеется сегодня в моем распоряжении.

Джозеф Джон Томсон

...ниже колена я состою в основном из гаек и болтов, а еще в моих ногах 24 сенсора, 6 микропроцессоров и всякие механизмы, подобные мышцам и сухожилиям. С такими ногами я могу прыгать, бегать и танцевать.

Хью Герр

А так ли хорошо знакомы вам ФИЗИКА + СПОРТ ?

История взаимодействия науки и спорта, пусть робко и неосознанно, берет начало, по крайней мере, с зародившихся в Древней Греции Олимпийских игр. И с тех пор все это долгое время спортсменов волновал вопрос: как улучшить свои достижения? Настоячивыми тренировками, развивая силу и скорость – так сказать, лишь надеясь на природные данные? Или опереться на достижения ученых, новинки изобретателей и инженеров? Да еще когда стали появляться необычные поначалу виды спорта, где вообще без техники и особой амуниции не обойтись: авто-, мото- и велогонки, парусные регаты, альпинизм, серфинг, горные лыжи, прыжки с трамплина... И все же, на что еще способен сам человек?

Похоже, мы вступаем в эпоху смыкания естественного и искусственного, когда новые технологии могут принципиально изменить представления о наших возможностях, что, безусловно, в большой степени отразится на спорте. Пока же, вооружившись олимпийским девизом, давайте постараемся обнаружить и в школьном курсе физики немало спортивных сюжетов.

Вопросы и задачи

1. Для чего на уроках физкультуры при выполнении некоторых упражнений

на снарядах ладони натирают магниезией, а подошвы – канифолью?

2. Как баскетболисты ослабляют силу удара тяжелого мяча, когда ловят его руками?

3. Куда должна быть направлена сила, с которой легкоатлет действует на землю в момент прыжка в длину, чтобы дальность полета была максимальной? Рассмотрите прыжки с места и с разбега. Спротивлением воздуха пренебречь.

4. Во время соревнований некоторые бегуны держатся позади противника и вырываются вперед лишь у финиша. Почему?

5. Почему конькобежец, чтобы остановиться, ставит коньки под углом друг к другу?

6. Лезвия беговых коньков делают более тонкими, чем лезвия коньков других видов, например хоккейных. Почему?

7. Каким образом футболист при штрафном или угловом ударе посылает мяч по искривленной траектории, обходя «стенку» и попадая в ворота?

8. С какой целью метатель диска сообщает вращение своему снаряду во время броска?

9. Почему использование перчаток сделало бокс менее опасным?

10. Как объяснить, зачем борцы во



время поединков широко расставляют ноги?

11. Почему вытянутой рукой нельзя удержать такой же груз, например гантелю, как согнутой?

12. Штангист «взял» в рывке штангу весом 1000 Н. Действительно ли он развивал такую силу во время подъема снаряда?

13. Отчего туго натянутая волейбольная сетка может порваться от удара мяча?

14. Велосипед становится устойчивым и не падает, если его разогнать, и чем больше скорость, тем выше его устойчивость. Почему?

15. Для чего у парусных яхт делается большой киль?

Микроопыт

Попробуйте забраться на шведскую стенку и, ухватившись руками за одну из ее перекладин, повиснуть на ней. Как при этом следует расположить ваши руки, чтобы их усилия были наименьшими?

Любопытно, что...

... правилами древнегреческих олимпийских игр разрешалось прыгать в длину с какими-либо тяжелыми предметами в руках, которые в прыжке следовало отбросить вниз и назад. Возможно, это и привело к увеличению дальности полета, превышающую порой результаты нынешних рекордсменов.

... ни одно животное не сможет соревноваться с человеком в марафоне, так как не способно пробежать без отдыха и остановки 42 километра. Наши сухожилия, играя роль своеобразных пружин, около 90% потенциальной энергии возвращают в кинетическую, что приводит к высокой экономичности циклических движений. Мощность же, затрачиваемая взрослым человеком, меняется от 80 Вт в состоянии покоя до 10 кВт при спринтерском беге.

... уже в 1671 году Исаак Ньютон объяснил отклонение вращающегося мяча возникновением поперечной разницы давлений во время его полета. В 1852 году подобное толкование было дано немецким физиком Генрихом Магнусом, именем которого назван этот эффект, а математи-

ческую его теорию представил в 1877 году лорд Рэлей.

... в 1697 году швейцарский ученый Иоганн Бернулли показал, что интересующая еще Галилея форма кривой наискорейшего спуска в отсутствие трения – это циклоида. Ее уравнение используют при проектировании санных трасс.

... учет роста спортсмена при толкании ядра или метании молота приводит к уменьшению угла, при броске под которым достигается максимальная дальность полета, составляя, по расчетам, заметно меньше 45°.

... переход от прыжка «перекатом» к технике «фосбери-флоп» позволил заметно увеличить рекорды прыжков в высоту, так как во втором случае спортсмену удается удерживать свой центр тяжести ниже уровня планки.

... на старт одной из гонок «Формулы-1» был выведен болид, оснащенный большим вентилятором, высасывающим воздух из-под днища машины, благодаря чему понижалось его давление и возрастала прижимная сила. Это позволило обогнать всех соперников, однако их протесты привели к дальнейшему запрету подобных «ухищрений».

... профессор Массачусетского технологического института, создатель бионических протезов Хью Герр, потеряв обе ноги, смог вернуться в спорт благодаря созданию искусственных частей тела. К концу этого века, считает он, строение и динамика наших тел будут до неузнаваемости отличаться от сегодняшних, так что мы сможем даже летать.

Что читать в «Кванте» о союзе физики и спорта

1. «Физика и спорт» – 2000, Приложение №5;
2. «Шайба, мяч и копье» – 2013, №2, с.38;
3. «Спринтеры и стайеры» – 2017, №11, с.11;
4. «Канатоход Толи Втулкина» – 2018, №3, с.30;
5. «Невинная Ифигения и разложение сил» – 2022, № 10, с. 24.

Материал подготовил А. Леонович



(Начало см. на с. 28)

$3^{n-m} - s \equiv -s \pmod{3}$) $B_n \cdot \prod s \equiv \prod (-s) \pmod{3}$,
и далее (так как количество сомножителей
равно $2^n - 1$ – нечетно) $B_n \cdot \prod s \equiv$
 $\equiv -\prod s \pmod{3}$. Тогда $\prod s (B_n + 1)$ делится
на 3, и поскольку $\prod s$ взаимно просто с 3,
 $B_n \equiv -1 \pmod{3}$. Так как $2^n \equiv -1 \pmod{3}$ при
нечетном n и $2^n \equiv 1 \pmod{3}$ при четном n , то
 $\frac{B_n}{2^n} = 3t \pm 1$, где $(+1)$ – в случае нечетного n
и (-1) – в случае четного n .

Возвращаясь к равенству (*), получаем,
что при нечетном n число $A_n = 3^n (3t + 1) \equiv$
 $\equiv 3^n \pmod{3^{n+1}}$, а при четном n :
 $A_n = 3^n (3t - 1) \equiv 2 \cdot 3^n \pmod{3^{n+1}}$.

В. Расторгуев

M2737. На доске выписаны все делители
числа а) 8000000, б) 360^{10} . За один ход
можно взять два числа, ни одно из кото-
рых не делится на другое, и заменить
числа на их НОД и НОК. В какой-то
момент новые операции выполнять бу-
дет нельзя. Сколько различных чисел
будет на доске в этот момент?

Ответ: а) 16; б) 61.

Условие известной задачи гласит: если
данные операции применять, начав с про-
извольного набора натуральных чисел, то
процесс завершится через конечное коли-
чество шагов.

Назовем пару чисел *правильной*, если одно
из них делится на другое. Заметим, что
при каждой операции число правильных
парувеличивается. Действительно, за один
ход какая-то неправильная пара a, b заме-
няется на правильную пару $d = \text{НОД}(a, b)$,
 $M = \text{НОК}(a, b)$. Если любое другое число
 x из нашего набора делилось на одно из
чисел a, b , то оно делится на d ; если же x
делилось на оба числа a, b , то x делится и
на d , и на M . Аналогично, если x являлось
делителем одного из чисел a, b , то оно
является делителем M ; если же x являлось
делителем обоих чисел a, b , то оно являет-
ся делителем и M , и d . Таким образом, за
конечное количество шагов все пары ста-

нут правильными, и процесс прекратится.
Далее заметим, что для каждого простого
 p инвариантом при данной операции явля-
ется набор степеней вхождения p в разло-
жение чисел. (Например, если в началь-
ном наборе ровно 5 чисел x , для которых
 $v_p(x) = 3$ (т.е. которые делятся на p^3 , но не
делятся на p^4), то это свойство сохранится
и после применения любого количества
операций.)

Пусть изначально выписаны все делители
числа n , имеющего каноническое разложе-
ние на простые множители $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$.
Пусть $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_t$ – набор чисел, кото-
рый получился в конце; здесь
 $t = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$ – количество
делителей числа n . Согласно наблюдениям
выше, в ряду чисел $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_t$ каждое
следующее число делится на предыду-
щее, отсюда следует, что для вхождений
данного простого p в разложение тоже
имеется монотонность: $v_p(b_1) \leq v_p(b_2) \leq \dots$
 $\dots \leq v_p(b_t)$. Чтобы узнать ответ в задаче
(количество различных чисел среди b_i),
достаточно определить, сколько в после-
довательности $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_t$ знаков стро-
го неравенства.

В начальном наборе ровно по $\beta_i = \frac{t}{\alpha_i + 1}$
чисел x , для которых $v_{p_i}(x) = 0, 1, 2, \dots, \alpha_i$.

Значит, $v_{p_i}(b_i) < v_{p_i}(b_{i+1})$ тогда и только
тогда, когда i делится на β_i . Теперь ясно,
что $b_i < b_{i+1}$ тогда и только тогда, когда i
делится хотя бы на одно из чисел β_i ,
 $i = 1, 2, \dots, k$.

Остается разобрать случаи конкретных
чисел а) и б).

а) $n = 8000000 = 2^9 \cdot 5^6$. Здесь $t = 70$, и
 $b_i < b_{i+1}$ тогда и только тогда, когда i
делится или на 10, или на 7 – всего
 $6 + 9 = 15$ различных индексов.

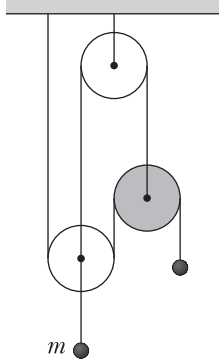
б) $360^{10} = 2^{30} \cdot 3^{20} \cdot 5^{10}$. Здесь $t = 31 \cdot 21 \cdot 11$,
и $b_i < b_{i+1}$ тогда и только тогда, когда i
делится или на $21 \cdot 11$, или на $11 \cdot 31$, или на
 $31 \cdot 21$ – всего $30 + 20 + 10 = 60$ различных
индексов. Задача решена.

В завершение отметим следующую интер-
претацию: для данного $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$
ответом в задаче будет количество частей,
на которые разбивается отрезок, если его
разбить точками на $\alpha_1 + 1$ равных отрез-

ков, затем (поверх первого разбиения) – на $\alpha_2 + 1$ равных отрезков, ..., на $\alpha_k + 1$ равных отрезков.

В. Брагин

Ф2741. Система, изображенная на рисунке, состоит из трех блоков, невесомых и нерастяжимых нитей и двух грузов. Масса левого груза $m = 1$ кг, два белых блока невесомы, а масса серого блока $m_0 = 200$ г. Система находится в равновесии. Ускорение свободного падения $g = 10$ Н/кг.



1) Чему равна масса правого груза? Ответ выразите в граммах, округлите до целого числа.

2) Ось серого блока утяжеляют, а массу правого груза уменьшают так, что система по-прежнему находится в равновесии. На какую максимальную величину можно утяжелить ось массивного блока? Ответ выразите в граммах и округлите до целого числа.

Пусть натяжение нити, прикрепленной к потолку и правому грузу, равна T_1 , а натяжение нити, соединяющей блоки, равна T_2 . Запишем условия равновесия нижнего белого и серого блоков соответственно:

$$2T_1 + T_2 = mg,$$

$$T_2 = 2T_1 + m_0g.$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$T_1 = \frac{m - m_0}{4} g = 2 \text{ Н},$$

$$T_2 = \frac{m + m_0}{2} g = 6 \text{ Н}.$$

Следовательно, масса правого груза равна

$$M = \frac{T_1}{g} = 200 \text{ г}.$$

Ось серого блока можно утяжелять до тех пор, пока натяжение T_1 не станет равным нулю. Стало быть, максимальная величина,

на которую можно утяжелить ось массивного блока, равна 800 г.

А.Бычков

Ф2742. В калориметр с горячей водой бросили кусочек льда, температура которого была равна 0°C . После установления теплового равновесия температура воды понизилась на 12°C . Когда в калориметр бросили второй такой же кусочек льда, температура воды понизилась еще на 10°C . На сколько градусов понизится температура воды, если в нее бросить третий такой же кусочек льда, который полностью растает? Теплоемкостью калориметра и теплообменом с окружающей средой можно пренебречь. Ответ выразите в градусах Цельсия и округлите до десятых долей.

Пусть теплоемкость воды C_1 , а теплоемкость одного кусочка льда C_2 . Тогда справедливы следующие равенства:

$$C_1 t_1 = Q + C_2 (t - t_1),$$

$$C_1 (t_1 + t_2) = 2Q + 2C_2 (t - t_1 - t_2),$$

$$C_1 (t_1 + t_2 + t_x) = 3Q + 3C_2 (t - t_1 - t_2 - t_x),$$

где $t_1 = 12^\circ\text{C}$, $t_2 = 10^\circ\text{C}$, Q – количество теплоты, которое требуется, чтобы растопить один кусочек льда, t_x – искомая величина. Исключив из первых двух уравнений Q , приходим к равенству

$$C_1 (t_1 - t_2) = 2C_2 t_2,$$

откуда находим отношение теплоемкостей:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{20}{2} = 10.$$

Если из третьего уравнения системы вычесть сумму первых двух, то получится такое уравнение:

$$C_1 t_x - C_1 t_1 = -C_2 t_2 - 3C_2 t_x.$$

Следовательно, искомая величина равна

$$t_x = \frac{C_1 t_1 - C_2 t_2}{C_1 + 3C_2} = \frac{10t_1 - t_2}{10 + 3} \approx 8,5^\circ\text{C}.$$

А.Бычков

Ф2743. Школьник собрал почти бесконечную электрическую цепь, состоящую

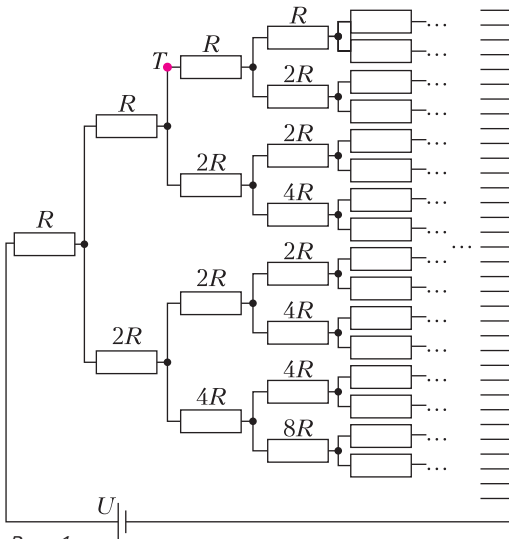


Рис. 1

из очень большого числа резисторов (рис. 1). Если двигаться вдоль этой схемы слева направо, то после каждого ее разветвления сопротивление резистора, находящегося выше точки разветвления, равно сопротивлению резистора, находящегося слева от точки разветвления, а сопротивление резистора, находящегося ниже точки разветвления, в два раза больше, чем сопротивление резистора, находящегося выше точки разветвления. Напряжение источника в этой цепи $U = 27$ В. Найдите силу тока, текущего через поперечное сечение провода в точке T если $R = 20$ Ом. Ответ выразите в амперах и округлите до десятых долей.

Найдем сначала общее сопротивление цепи, обозначив его R_x . Поскольку цепь бесконечна, то сопротивление ее верхней ветви (после первого ветвления) равно сопротивлению всей цепи, а сопротивление нижней ветви в два раза больше. Иными словами, исходная цепь эквивалентна цепи, изображенной на рисунке 2. Получаем уравнение

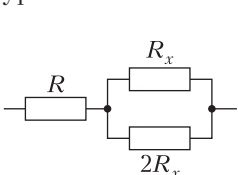


Рис. 2

$$R_x = R + \frac{2R_x R_x}{2R_x + R_x},$$

откуда

$$R_x = 3R = 60 \text{ Ом.}$$

По закону Ома сила тока на входе в цепь

равна

$$I = \frac{U}{3R} = 0,45 \text{ А.}$$

После каждого ветвления сопротивление нижней ветви в 2 раза больше, чем сопротивление верхней, поэтому ток делится между верхней и нижней ветвями в отношении 2 к 1. Значит, на верхнюю ветвь идет $\frac{2}{3}$ тока, входящего в узел. Таким образом, через сечение в точке T течет ток

$$I_T = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot I = \frac{4}{27} \frac{U}{R} = 0,2 \text{ А.}$$

М.Ромашка

Ф2744. Два плоских зеркала размерами $a \times a$, где $a = 10$ см, расположены перпендикулярно плоскости рисунка, касаются друг друга и образуют угол $\beta = 70^\circ$ (рис. 1). Между зеркалами на расстоя-

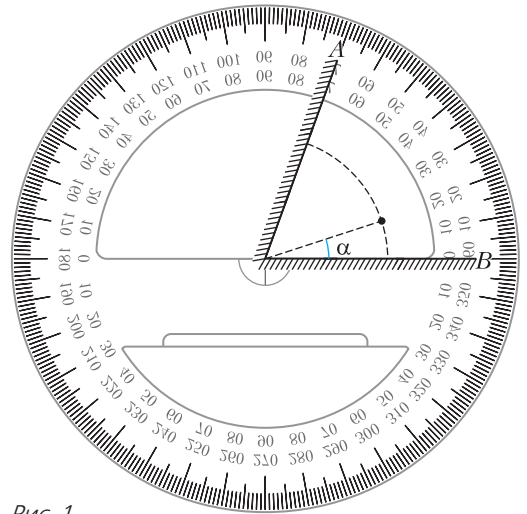


Рис. 1

нии $l = 5$ см от точки их касания располагают небольшое тело, размерам которого можно пренебречь. Угол между зеркалом B и направлением из точки соединения зеркала на тело обозначим α . Определите, при каких значениях угла α в системе зеркал будут создаваться 5 изображений (сам предмет за изображение не считается).

При отражении от плоского зеркала угол отражения равен углу падения. Привыч-

ным для нас является преломлять луч, т.е. изображать происходящее с точки зрения наблюдателя, стоящего на земле. В данной задаче проще связать наблюдателя с лучом. С точки зрения такого наблюдателя, при отражении от зеркала луч продолжает двигаться по прямой, а весь мир вокруг симметрично отражается относительно зеркала. Нарисуем все возможные расположения зеркал при таких отражениях.

Допустим, что луч от источника сначала упал на зеркало A . В результате этого зеркало B отразится в зеркале A и получится зеркало B_1 . Если после этого луч попадет на зеркало B_1 , то зеркало A также отразится в B_1 и получится зеркало A_{12} . Аналогичную картинку получим, если луч сначала упадет на зеркало B . Рассмотрим возможные положения предмета.

Если он расположен под углом $\alpha < 30^\circ$, то луч от него может пройти через зеркала B , A_{12} и B_{12} (луч 1), а также через A и B_1 (луч 2), а вот на A_{12} уже не попадет. Таким образом, получим 5 изображений.

Если $\alpha > 40^\circ$, то аналогично получаем 5

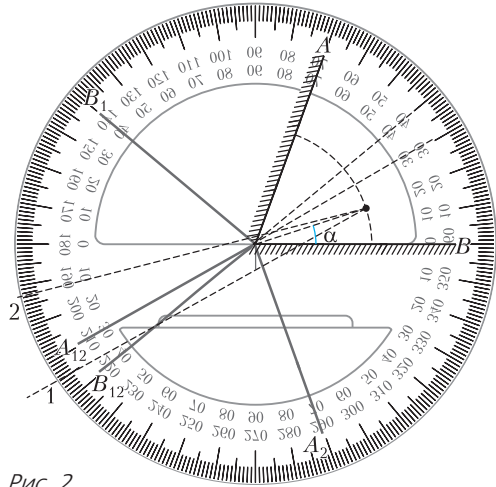


Рис. 2

изображений, луч не попадет только на B_{12} .

Если же $30^\circ < \alpha < 40^\circ$, то луч попадет и на B_{12} и на A_{12} , т.е. получится 6 изображений. При этом от размеров зеркал ответ не зависит.

Значит, пять изображений можно увидеть при $\alpha < 30^\circ$ и $\alpha > 40^\circ$.

М.Карманов

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Диск Фейнмана, конденсатор Тамма и импульс электромагнитного поля

С. ГЕРАСИМОВ

ЕСТЬ МНОГО ЗАДАЧ, СМЫСЛ (И РЕЗУЛЬТАТ) решения которых со временем не только не рассеивается, но и, наоборот, возрастает. Вот – одна из них.

Задача Фейнмана

Очень давно Ричард Фейнман, известный привязанностью к неординарным физичес-

ким проблемам, предложил задачу, которая впоследствии была воспринята как парадокс. Есть тонкий непроводящий диск, на периферии которого на равном расстоянии b от центра диска располагаются заряды q , а на оси диска находится соленоид (рис. 1). Вся конструкция стационарна, диск неподвижен. Возникает вполне законный вопрос: что произойдет с диском, если электрический ток, питающий соленоид, начнет возрастать?

Ответ достаточно необычен: диск вместе с соленоидом должен повернуться под действием сил \vec{F} , действующих на заряды. Это действительно так в полном соответствии с законом электромагнитной индукции

$$\frac{F}{q} \cdot 2\pi b = -\pi a^2 \frac{dB_0}{dt},$$

если \vec{B}_0 – индукция магнитного поля внутри соленоида с внутренним радиусом a . Иное, т.е. отсутствие воздействия на электрические заряды, исключено: если бы переменный

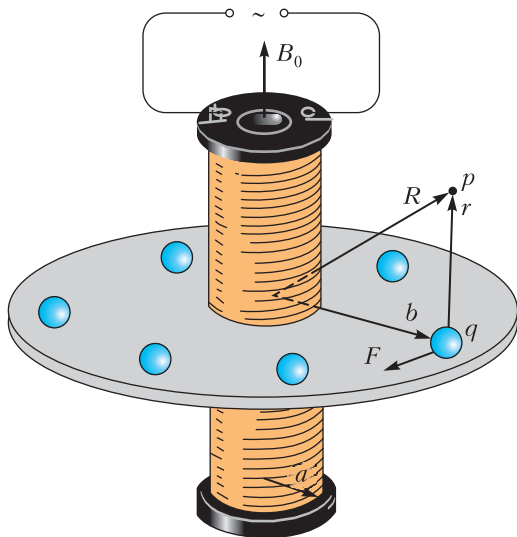


Рис. 1. Диск Фейнмана

ток в соленоиде не действовал на заряды, обычный трансформатор не мог бы работать в принципе. По существу, соленоид, длинный, как на рисунке 1, или короткий, как у Фейнмана, представляет собой первичную обмотку такого примитивного трансформатора, а заряды q – носители тока во вторичной обмотке. Пример с длинным соленоидом достаточно поучителен: индукция магнитного поля вне такого электромагнита чрезвычайно мала, а создаваемое соленоидом вихревое электрическое поле

$$\vec{E}_A = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

являющееся следствием закона электромагнитной индукции, обнулять нет никаких оснований. Такая вот необычная величина этот векторный потенциал \vec{A} : индукции магнитного поля нет, а векторный потенциал есть, причем с расстоянием от оси соленоида он изменяется сравнительно слабо.

Парадоксальность явления не видна до тех пор, пока мы не вспоминаем о законах сохранения импульса и момента импульса. Электрические заряды на соленоид, разумеется, не действуют, значит, при своем повороте они должны от чего-то отталкиваться – «вращаться не задаром» [1], по образному выражению Фейнмана. Далее следует предостережение: «решение не простое, но это и не обман». Тем самым, Фейнман спровоцировал большое число попыток решить задачу «по-школьному», т.е. воспользовавшись

готовым выражением для плотности импульса электромагнитного поля:

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2} [\vec{E} \times \vec{H}],$$

где \vec{H} – напряженность магнитного поля. После интегрирования этой величины по всему объему, занятому полем, должен получиться импульс, равный по величине и противоположный по направлению механическому импульсу \vec{p} , соответствующему классической динамике: $\vec{F} = d\vec{p}/dt$.

Неоднозначность стала очевидной: вне соленоида напряженность магнитного поля – почти ноль, а трансформатор успешно работает. Дело даже не в том, что Фейнман предлагал в центр диска поместить очень маленькую катушку, что, по правде говоря, породило ряд неудачных решений, основанных в том числе и на рассмотрении влияния полюсов соленоида на электрические заряды. Основная проблема, похоже, в другом: записанное выше выражение наиболее адекватно для электромагнитных волн, в которых напряженность электрического поля является результатом изменения магнитного поля. В задаче Фейнмана только вихревая составляющая \vec{E}_A электрического поля зависит от магнитного поля, а напряженность электрического поля, определяемая градиентом потенциала:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

не только не зависит от индукции магнитного поля, но и постоянна.

Задача Тамма

Как выбраться из ситуации с отсутствием магнитного поля в областях, где есть электрическое поле, создаваемое постоянными зарядами? Достаточно рассмотреть пример, в котором магнитное поле не только отлично от нуля в области, где есть электрическое, но и однородно. Это – конденсатор Тамма [2], почему-то спустя некоторое время названный конденсатором Фейнмана. Но это не принципиально. Принципиально другое: длинный цилиндрический конденсатор высотой h и радиусом внешнего цилиндрического электрода b находится во внешнем однородном, но не стационарном магнитном поле (рис. 2). Это можно сделать, к примеру, с помощью катушки Гельмгольца. Пусть

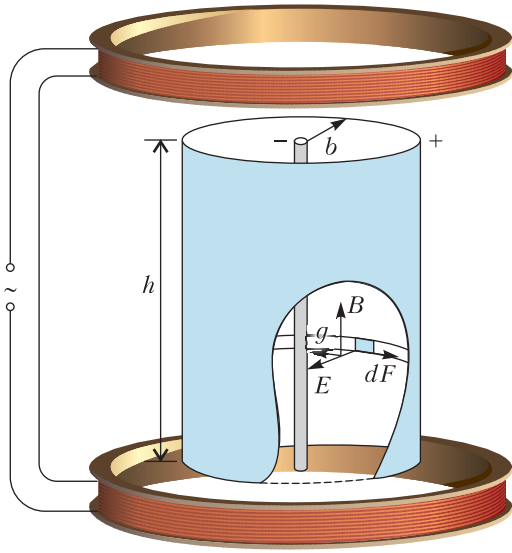


Рис. 2. Конденсатор Тамма

внешняя большая обкладка конденсатора заряжена положительно, неся заряд q , а внутренняя обкладка с почти нулевым радиусом заряжена отрицательно, имея на себе заряд $-q$. Поверхностная плотность заряда, находящегося на внешней обкладке конденсатора, равна $\sigma = \frac{q}{2\pi b h}$. Исходя из закона электромагнитной индукции, на каждый элемент поверхности $ds = b d\psi dh$ действует сила $dF = -\sigma(b/2) ds (dB/dt)$ и элемент вращательного момента $dN = b dF$. Интегрирование дает

$$N = -q \frac{b^2}{2} \frac{dB}{dt}.$$

Пренебрегая краевыми эффектами, напряженность электрического поля внутри конденсатора можно записать в виде $E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r h}$, здесь r – расстояние от оси конденсатора до точки, где вычисляется плотность импульса электромагнитного поля $g = \frac{EB}{c^2\mu_0}$. Нас интересует то, что должно скомпенсировать вращательный момент, с которым магнитное поле действует на внешнюю обкладку конденсатора, т.е. производная от момента импульса электромагнитного поля $dL_{эм} = r g dV = r \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r h} \frac{B}{\mu_0} r dr dh d\psi$. Интегрирование по r от 0 до b дает $L_{эм} = q(b^2/2)B$, а

поскольку производная от момента импульса есть момент сил и так как $c^2 = 1/(\epsilon_0\mu_0)$, то

$$N_{эм} = q \frac{b^2}{2} \frac{dB}{dt} = -N.$$

Это явление подтверждено экспериментально как качественно, так и цифрой [3]. Другое дело, что результат эксперимента, подтвердившего существование скрытого момента импульса поля, был приписан почему-то эфиру. Эффект оказался настолько слаб, что зарегистрировать его удалось только в резонансном режиме. Сегодня он слаб, а завтра окажется очень сильным, если с ним разобраться и придумать, как усилить.

Решена ли задача? Конечно, нет. До тех пор, пока не получено аналогичное решение, с точностью до знака совпадающее с моментом сил, действующих на заряд q , остаются вопросы. А решение с вопросами – не ответ.

Решение задачи Фейнмана

Прежде всего, следует подчеркнуть, что в пространстве, окружающем диск Фейнмана, есть только электрическое поле, а значит, плотность энергии электрического поля это не что иное, как

$$w = \frac{1}{2} (\vec{E} \vec{D}),$$

где \vec{D} – индукция электрического поля. Подставляя сюда напряженность электрического поля, включающую в себя кулоновскую и вихревую составляющие, вводя плотность зарядов ρ , создающих электростатическое поле, и учитывая уравнение $\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$, можно получить выражение для плотности энергии, состоящее из трех слагаемых (желающие могут сделать это самостоятельно). Первое слагаемое – плотность энергии электростатического поля, второе слагаемое – плотность энергии вихревого электрического поля, создаваемого источником магнитного поля, а третье слагаемое – соответствующее энергии, создаваемой и зарядами, и источником магнитного поля. Именно оно и представляет наибольший интерес. Вычислить это слагаемое можно, воспользовавшись теоремой Остроградского–Гаусса, позволяющей свести интегрирование по объему к интегрированию по поверхности, ограничивающей объем. Поскольку объем беско-

нечен, то его ограничивает сфера бесконечного радиуса; так как при $r \rightarrow \infty$ потенциал φ изменяется как $1/r$, а векторный потенциал – как $1/(b+r)$, то результат для диска Фейнмана

$$W_{\text{мэ}} = \frac{qa^2 \dot{B}_0}{2}$$

огорчает. Ибо при переходе от энергии к импульсу, т.е. после деления этой полной энергии на скорость света [4], что эквивалентно умножению на $(\epsilon_0 \mu_0)^{1/2}$, мы ничего хорошего не получим. Мало того, что исчезла зависимость от расстояния b , так еще и появилась величина μ_0 , являющаяся «лакусовой бумажкой» участия магнитного поля, которого, разумеется, нет. Деление на скорость света – рецидив электромагнитных волн, значит, от энергии к импульсу надо переходить другим способом.

Тело, находящееся в электромагнитном поле, обладает энергией и это – потенциальная энергия, а минус градиент потенциальной энергии – это сила. Можно показать (опять же желающие могут это сделать самостоятельно), что скрытая сила, она же производная от полного импульса поля по времени, отличается от силы, с которой вихревое электрическое поле действует на электрический заряд, только знаком. Задачу Фейнмана можно считать почти решенной: диск с зарядами вращается, образно говоря, отталкиваясь от электромагнитного поля.

Но вопросы все-таки остались, и относятся они к конденсатору Тамма. Чтобы их закрыть, можно вычислить момент импульса электромагнитного поля, ссылаясь на полученный результат. На самом деле вариант конденсатора Тамма отличается от диска Фейнмана только тем, что тело, несущее постоянный электрический заряд (он же конденсатор), находится в магнитном поле, а диск – нет. В остальном это даже больше похоже на трансформатор с внешней обмоткой в виде длинного цилиндрического проводника, чем в виде диска с зарядами. И еще: скрытый импульс поля, скрытая сила, приписываемая полю, момент импульса поля формируются в непосредственной близости от зарядов. Все это дает возможность записать дифференциал момента импульса поля, создаваемого магнитным полем и зарядом,

находящимся на элементе поверхности внешней обкладки конденсатора, в виде

$$dL_{\text{эм}} = b \cdot \frac{q}{2\pi b h} ds \cdot \frac{Bb}{2},$$

откуда следует, что

$$L_{\text{эм}} = q \frac{Bb^2}{2}.$$

Конденсатор вращается, отталкиваясь от электромагнитного поля.

На самом деле Тамм решал и решил несколько другую задачу, несомненно более сложную и интересную. Он выяснил, возникают ли импульс и момент импульса поля в том случае, когда магнитное поле однородно и стационарно, а заряд конденсатора меняется. Последнее возможно только в том случае, если заряд меняется вследствие меняющегося электрического тока, например если конденсатор включен в цепь переменного тока, что обеспечивает изменение зарядов на обкладках конденсатора. При этом между обкладками конденсатора возникает так называемый ток смещения, плотность которого равна $\partial \bar{D}/\partial t$ и перпендикулярна индукции магнитного поля внутри конденсатора. Поэтому использование выражения для плотности импульса, пропорциональной векторному произведению напряженности электрического поля на напряженность магнитного, не только допустимо, но и напрашивается само собой.

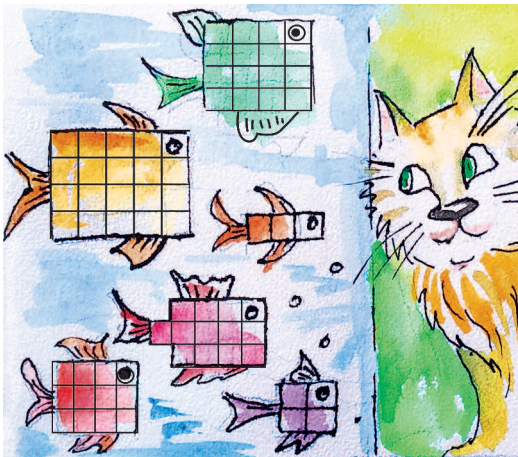
Здесь же по необходимости пришлось коснуться другого варианта задачи. Без него изложение такого сравнительно простого и непротиворечивого решения задачи Фейнмана было бы неполным. Обязательно следует подчеркнуть важность задачи и несомненную заинтересованность в ее адекватном и прозрачном решении. Это тот редкий случай, тот редкий пример, после знакомства с которым сомнения в возможности движения тела с участием электромагнитного поля, создаваемого самим телом, исчезают почти полностью.

Литература

1. Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике, т. 6, гл. 17. – М.: МИР, 1976.
2. И.Е. Тамм. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1989.
3. G.M. Graham, D.G. Lahoz. Observation of Static Electromagnetic Angular Momentum in Vacuo. – Nature, v. 285 (1980), p. 154–155.
4. Дж. Оприр. Физика, гл. 21. – М.: КДУ, 2019.

Задачи

1. Кот за полминуты съел половинку самой маленькой рыбки, а всего он съел 5 рыбок и потратил на это целое число минут (кот ест рыбу с постоянной в «клеточках» скоростью). На ри-



сунке изображены все рыбки, которые были у кота. Какую рыбку кот не стал есть?

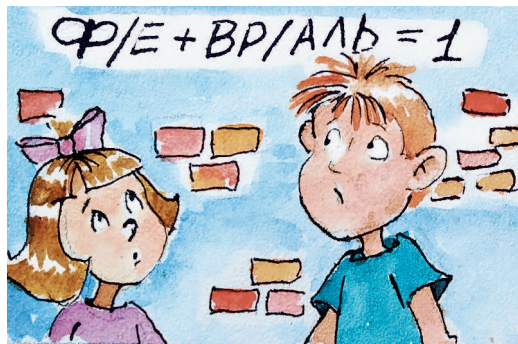
Т. Казицына

2. Найдите какое-нибудь решение ребуса

$$\Phi/E + VP/АЛЬ = 1.$$

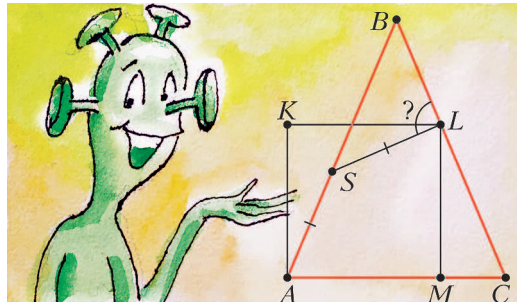
Разным буквам соответствуют разные цифры. Косая черта обозначает деление.

Э. Акопян



Эти задачи предлагались на Математическом празднике.

3. Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) и квадрат $AKLM$ расположены, как на рисунке. Точка S на AB



такова, что $AS = SL$. Найдите $\angle SLB$.

Л. Попов

4. У царя есть 7 мешков с золотыми монетами, в каждом по 100 монет. Царь помнит, что в одном мешке все монеты по 7 г, во втором по 8 г, в третьем по 9 г, в четвертом по 10 г, в пятом по 11 г, в шестом по 12 г, в седьмом по 13 г, но не помнит, где какие.



Иллюстрации Д. Гришуковой

Царь сообщил это придворному мудрецу и указал на один из мешков. Мудрец может вынимать из этого и из других мешков любое количество монет, но на вид они все одинаковы. Однако у мудреца есть большие двухчашечные весы без гирь (они точно покажут, равны ли веса на чашках, а если нет, то какая чашка тяжелее). Может ли мудрец определить, какие монеты лежат в указанном мешке, сделав не более двух взвешиваний?

М. Евдокимов

Парад ледяных сталагмитов

В. ПТУШЕНКО

ВОЗМОЖНО, ЧТО У ЧИТАТЕЛЕЙ И не вызывает удивления существование сталагмитов – сосулек (не важно, ледяных или каменных), растущих снизу вверх. Мне же всегда казалось чем-то удивительным, что падающая сверху капля может не только попасть на тоненькое острие растущей снизу иглы, но и удержаться на нем, не скатиться, не расплескаться, не растерять все свое содержимое (саму ли воду или же растворенные в ней вещества). И хотя возможность увидеть сталагмиты – на фотографиях или даже своими глазами – убеждает в том, что это не фантастика, но все же представить себе такой рост очень сложно, гораздо сложнее, чем привычный рост сосульки сверху вниз. Вот если бы можно было увидеть своими глазами, как растет сталагмит...

Рост сталагмитов – очень медленный процесс, но все же можно найти условия, в которых растут они если и не на глазах, то, по крайней мере, довольно быстро. Вот такой «питомник сталагмитов» мне удалось обнаружить этой зимой. Поселился он на маленьком мостике над рекой, перед самым ее входом в трубу (фото 1). Весь «пол» этого мостика усеян ледяными сталагмитами. Они довольно крупные – многие достигают высоты около десяти-пятнадцати сан-



Фото 1



Фото 2



Фото 3

тиметров (на фото 2 в качестве масштабного отрезка показана шариковая ручка, имеющая длину около 11 см). Легко заметить, что растут они «стройными рядами» – все сталагмиты располагаются вдоль четырех прямых линий (фото 3). И понятно, почему: все капли стекают с двух реек, тянущихся вдоль моста, – под ними и вырастают все ледяные сталагмиты. Мороз и теплая от промышленных сбросов вода реки создают для этого идеальные условия: в изобилии поднимающийся от воды пар конденсируется на рейках моста, по всей их длине вода множеством капель падает вниз и мгновенно застывает на замороженном полу моста или на уже образовавшейся на нем столбчатой наледи.

Конечно, образующиеся ледяные сталагмиты не похожи на иглы – они гораздо толще, чем обычно бывают сосульки-сталактиты. Возможно, что в пещере они получились бы тоньше, но здесь, на открытом всем ветрам пространстве, постоянно меняющиеся потоки воздуха могут приводить к большому разбросу точек падения капель. По изгибам сосулек можно даже заметить, как иногда меняется направление их роста.

Глядя на такой «парад сталагмитов», проще представить себе, как в течение столетий в пещерах нарастают их известковые собраты.

Задача о двух биссектрисах

Е. БАКАЕВ

Недавно на Московской математической олимпиаде восьмиклассникам была предложена такая задача: *Докажите, что в прямоугольном треугольнике с углом 30° одна биссектриса в два раза короче другой.*

Мы приведем здесь разные решения, большая часть из них использует программу 8 класса.

Подобные треугольники

Решение 1. На самом деле, этот пункт состоит из четырех разных решений, но из-за их сходства мы поместили их вместе. Немного посчитав углы, можно заметить, что $\angle ALC = \angle BKC = 75^\circ$ (рис. 1). И как раз к этим углам прилегают отрезки, про которые нужно доказать, что один в два раза длиннее другого. Напршивается мысль: это стороны в подобных треугольниках с коэффициентом подобия 2 (т.е. треугольники, у которых наборы углов одинаковые, а стороны одного в два раза больше сторон другого). Покажем 4 способа, как найти такие подобные треугольники; каждый из этих способов дает решение задачи. Рисунок 2 выглядит устрашающе, потому что на нем все 4 способа изображены одновременно; на

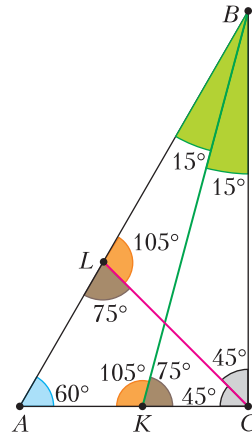


Рис. 1

самом деле для каждого из этих решений нужно только по одной вспомогательной точке.

а) На продолжении AC за точку C отметим точку N такую, что $AC = CN$. Тогда ABN – равнобедренный треугольник. Треугольники KBN и LCA подобны: в них равные углы. При этом $BN = AN = 2AC$, т.е. треугольники подобны с коэффициентом 2, поэтому $BK = 2CL$.

б) Проведем высоту CH . Треугольники KBC и LCH подобны и $BC = 2CH$, так как это катет и гипотенуза в треугольнике BCH с углами 30° - 60° - 90° .

в) Отметим середину M отрезка AB . Треугольники ABK и MCL подобны и $AB = 2CM$, поскольку CM – это медиана прямоугольного треугольника с гипотенузой AB .

г) На продолжении CA за точку A отметим точку P такую, что $AP = AB$. Треугольники

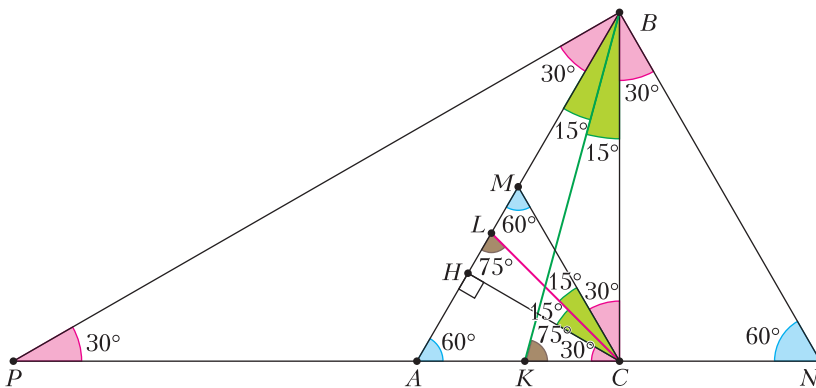


Рис. 2

PBK и BCL подобны и $BP = 2BC$, так как, опять же, это катет и гипотенуза в треугольнике PBC с углами 30-60-90.

Равные треугольники

Вместо подобных треугольников может быть удобнее использовать равные треугольники. Но требуется доказать, что один отрезок в два раза больше другого. Поэтому надо сначала или один отрезок в два раза «укоротить», или другой отрезок в два раза «удлинить». А затем найти треугольники, в которых такие отрезки будут соответствующими сторонами.

Решение 2. В этом решении мы «укоротим» отрезок BK в два раза. В прямоугольном треугольнике BCK проведем медиану CO и тогда $BK = 2CO$ (рис. 3). Отрезок CO и является тем самым «укороченным» отрезком BK . Осталось доказать равенство отрезков CL и KO , найди равные треугольники. Можно найти равные углы: $\angle OKC = \angle ALC = 75^\circ$. Как и в решении 1, теперь нужно построить какую-то сторону напротив этого угла 75° . Проще всего это сделать, пожалуй, проведя высоту CH в треугольнике ABC , как в решении 1,6, и высоту OG в треугольнике OCK . В треугольниках OGK и CHL углы одинаковые и $OG = BC/2 = CH$, поэтому треугольники равны и $OK = CL$. Это решение почти такое же, как 1,6, но с равными треугольниками вместо подобных.

Решение 3 (предложил Г. Мерзон). В этом решении мы «удлиним» CL в два раза. Построим точку N так же, как в решении 1,а (рис. 4). Проведем через точку N прямую, параллельную CL , пусть она пересекается с AB в точке R . Поскольку C – середина AN , то CL – средняя линия треугольника ARN и поэтому

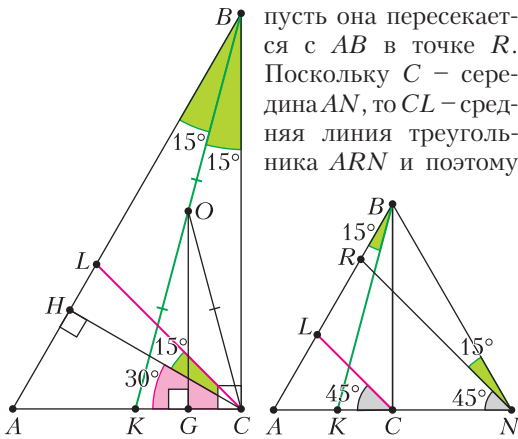


Рис. 3

Рис. 4

$RN = 2LC$. Осталось показать, что $RN = BK$. Действительно, это соответствующие стороны равных (по углам и стороне) треугольников ABK и BNR .

Можно придумать и другие вариации первого решения, с равными треугольниками вместо подобных.

Конструкции

До следующих двух решений догадаться сложно. Основная причина в том, что в них содержится информации больше, чем нужно для того, чтобы решить задачу. С ними полезно разобраться, чтобы лучше понять всю конструкцию и связи элементов в ней. На самом деле факт про биссектрисы был обнаружен как часть следующей конструкции с квадратом.

Решение 4. Построим квадрат $ABCD$ и внутри него равносторонний треугольник ABE (рис. 5). Пусть диагональ AC пересекает BE в точке N , а прямая CE пересекает сторону AD в точке M . Используя то, что треугольник BEC равнобедренный, можно найти углы треугольника ECN и увидеть, что он тоже равнобедренный (рис. 6). Затем можно показать и другие равенства отрезков: $CN = CE = DE = ME$. А дальше можно заметить, что отрезки CN и CM являются биссектрисами в двух одинаковых прямоугольных треугольниках с углами 30-60-90 (рис. 7).

Покажем, какую еще конструкцию можно здесь обнаружить.

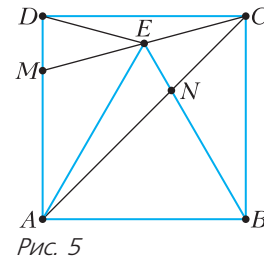


Рис. 5

Решение 5. Рассмотрим равносторонний треугольник ABC со стороной длины 1 (рис. 8). На продолжении его высоты из вершины

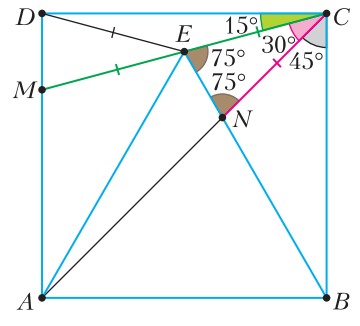


Рис. 6

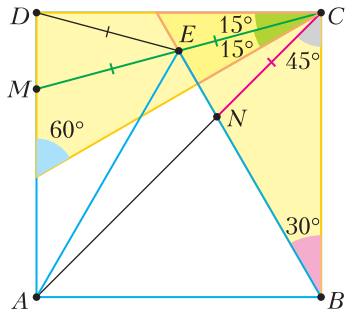


Рис. 7

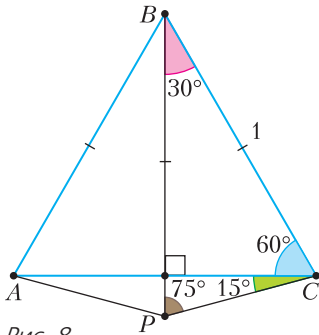


Рис. 8

В отметим точку P так, что $BP = 1$. Сразу можно посчитать, что $\angle BPC = 75^\circ$, $\angle ACP = 15^\circ$. Сделаем такие же построения для других сторон треугольника ABC и получим шестиугольник $AQBRCP$ (рис. 9). Этот шестиугольник замечателен своей симметричностью и тем, что все диагонали в нем равны 1. Все стороны равны, а углы $\angle A = \angle B = \angle C = 90^\circ$, $\angle P = \angle Q = \angle R = 150^\circ$. На продолжении PB за точку B отметим точку M так, что $MB = AB$ (рис. 10). Тогда в треугольнике ABM углы AMB и MAB равны 15° . Угол QAB , как мы выяснили ранее, тоже равен 15° . Значит, точки A, Q и M лежат на одной прямой. Аналогично, точки C, R, M лежат на одной прямой

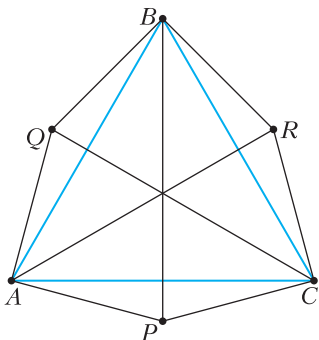


Рис. 9

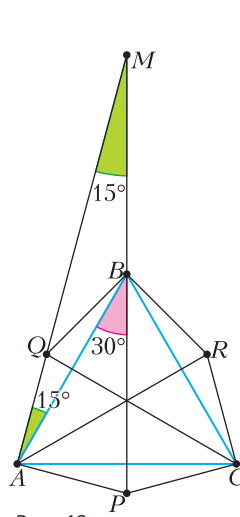


Рис. 10

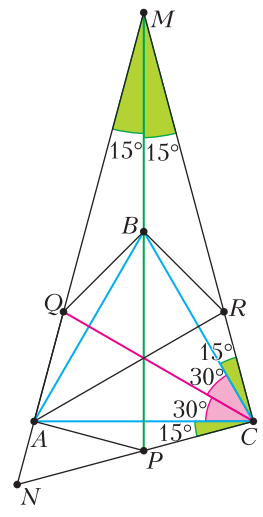


Рис. 11

(рис. 11). Продлим стороны PC и AQ до пересечения в точке N . А теперь посмотрим на треугольник CNM . В нем CQ – это биссектриса прямого угла, а MP – это биссектриса угла величиной 30° . Значит, это и есть наш исходный треугольник! И мы знаем, что $CQ = 1$, $MP = 2$.

Родственные решения задачи состоят в том, чтобы построить некоторые элементы этого шестиугольника (не обязательно весь шестиугольник целиком) внутри данного в задаче треугольника $30^\circ\text{-}60^\circ\text{-}90^\circ$.

Окружности

Приведем решения, связанные с окружностями.

Решение 6 (предложил восьмиклассник В.Кирюшкин). Отразим треугольник ABC относительно стороны AC и проведем в полученном треугольнике биссектрису CN (рис. 12). Требуется доказать, что $BK = 2CN$. Проведем в треугольнике BCK медиану CO и покажем, что треугольник OCN равнобедренный. Заметим, что CN и AN – биссектри-

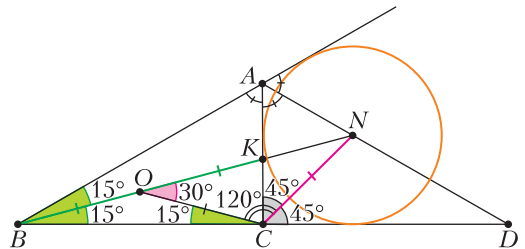


Рис. 12

сы углов, внешних для треугольника ABC (т.е. смежных с его углами C и A). А значит, N – это центр вневписанной окружности треугольника ABC ! Эта окружность касается его стороны AC и продолжений сторон AB и BC . И поэтому N лежит на биссектрисе угла B , т.е. B, K и N лежат на одной прямой. Несложно посчитать, что $\angle KOC = 30^\circ$, $\angle OCN = 120^\circ$ и поэтому в треугольнике OCN стороны OC и CN равны.

Решение 7. Нетрудно посчитать, что угол между BK и CL равен 60° (рис. 13). И

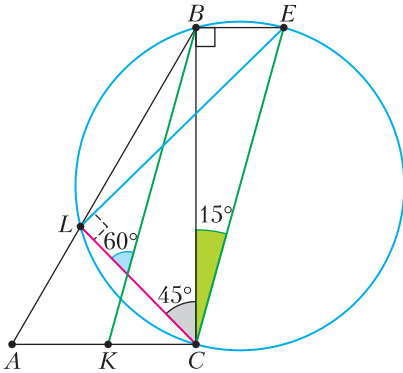


Рис. 13

требуется доказать, что $BK = 2CL$. Это напоминает прямоугольный треугольник с углом 60° : в нем тоже стороны относятся как $1 : 2$. Отсюда можно догадаться до следующего построения: перенесем отрезок BK параллельно так, чтобы K перешла в C , иными словами, построим треугольник BKC до параллелограмма $BKCE$. В треугольнике LCE угол LCE равен 60° и требуется доказать, что $EC = 2LC$. Для этого покажем, что этот треугольник прямоугольный, т.е. что $\angle ELC = 90^\circ$. Так как $\angle CBE = \angle BCK = 90^\circ$, то достаточно показать, что точки C, L, B, E лежат на одной окружности! Несложно посчитать углы: $\angle LBE + \angle LCE = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$, а поэтому признак вписанности четырехугольника $CLBE$ выполнен.

Можно было сделать и наоборот – перенести отрезок CL к BK , а не BK к CL .

Решение 8 (предложил А.Авдеев). Рассмотрим описанную окружность треугольника и продлим биссектрисы до пересечения с ней. Так как углы треугольника и углы между сторонами и биссектрисами кратны 15° , то все эти точки попадут в вершины правильного 12-угольника – они делят ок-

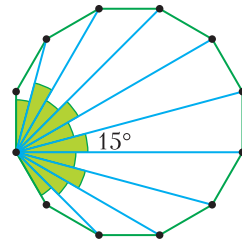


Рис. 14

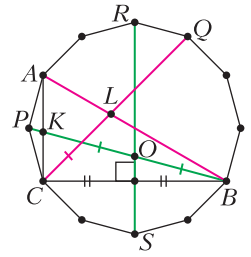


Рис. 15

ружность на 12 дуг величиной по $360^\circ/12 = 30^\circ$, а поэтому все вписанные углы, опирающиеся на такие дуги, равны по 15° (рис. 14). Таким образом, точка L – это пересечение диагоналей AB и CQ этого двенадцатиугольника (рис. 15). Отметим середину O отрезка BK , чтобы впоследствии доказать, что $BO = CL$. Пересечением каких диагоналей является точка O ? Она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BC , т.е. на диагонали RS . Посмотрим, как устроена пара диагоналей AB и CQ и как – пара SR и BP . Они получаются друг из друга поворотом! Можно заметить, что обе пары диагона-

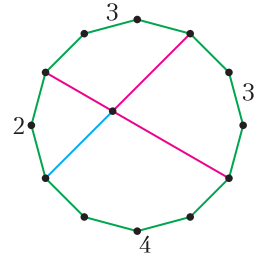


Рис. 16

лей проведены, как на рисунке 16 – они соединяют концы групп из двух, трех, трех и четырех сторон. При совмещении этих пар диагоналей друг другу соответствуют отрезки BO и CL , поэтому эти отрезки равны.

Есть много других решений, более технических – с помощью теоремы Пифагора, тригонометрических теорем, можно и вовсе воспользоваться формулой длины биссектрисы...

Приведем также обобщение этой задачи: *Если в треугольнике ABC угол C равен 60° , то биссектрисы углов A и B обратно пропорциональны противоположащим сторонам.* Предлагаем вам подумать, как некоторые из приведенных решений можно развить для доказательства этого обобщения. Его вариация предлагалась на олимпиаде имени И.Ф.Шарьгина в 2012 году, автор задачи – Б.Френкин.

84-я Московская олимпиада школьников по физике

7 класс¹

1. Гонки Мёбиуса (7 баллов)

На рисунке 1 изображена лента Мёбиуса. В нулевой момент времени по ленте одновременно из одной точки



Рис. 1

начинают двигаться в одном направлении вдоль линии, равноудаленной от краев, два небольших тела с постоянными скоростями, равными v и αv , где α – безразмерный коэффициент ($\alpha > 1$). Если мысленно разрезать ленту по линии, перпендикулярной линии движения точек, то лента развернется в полосу длиной L . Параметры v , α , L считаются известными.

1а. В какой момент времени t_1 тела впервые встретятся?

1б. В какой момент времени t_2 тела впервые встретятся в точке старта, если $\alpha = \frac{5}{3}$?

2. Про деталь (6 баллов)

Согласно паспорту детали, изготовленной из сплава меди и свинца, ее масса равна $m = 1000 \pm 1$ г. Измерив объем детали, рассчитали среднее значение плотности, которое оказалось равным $\rho = 10,0$ г/см³. Сколько граммов меди может содержать в себе деталь, если объем был измерен с погрешностью $\Delta V = 1$ см³? Плотности меди и свинца равны $\rho_m = 8,9$ г/см³ и $\rho_c = 11,3$ г/см³.

3. Модель требушета (7 баллов)

Требушет – это метательное орудие, использовавшееся в средние века для осады городов. Тяжелый груз, закрепленный на коротком конце рычага, разгоняет пращу со снарядом, закрепленную на другом конце рычага, до большой скорости, после чего снаряд отделяется от пращи и летит в цель. Схематично это показано на рисунке 2. Рассмотрим требушет, все детали, снаряд и противовес которого сделаны из одного материала плотностью ρ . Дальнобойность требушета (в предположении, что сила сопротивления воздуха пренебрежимо мала) мо-

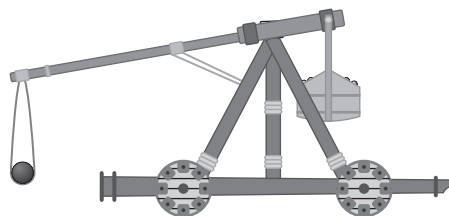


Рис. 2

жет зависеть от следующих размерных параметров: от линейных размеров орудия (например, от высоты) H , от плотности материала ρ , из которого сделаны детали орудия, и от ускорения свободного падения g , равного 10 м/с². На основе соображений размерности определите, во сколько раз отличается дальнобойность требушета от дальнобойности его точной копии, все размеры которой в 10 раз меньше. Во сколько раз при таком изменении размеров изменяется максимальная (в процессе выстрела) сила натяжения веревок, соединяющих рычаг и пращу?

4. LEGO (7 баллов)

Ребенок хочет собрать устойчивую башню, используя минимальное количество LEGO-кирпичиков размером 2×2 (рис. 3).

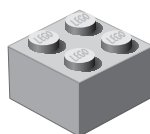


Рис. 3

он ставит либо строго одну на другую, чтобы все штырьки нижнего кирпичика вошли в соответствующие отверстия верхнего кирпичика, либо сдвигает из этого положения вправо или влево на расстояние, равное половине длины детали. На каждом ярусе башни содержится не более одной детали конструктора. Если линия действия результирующей силы тяжести попадает на границу основания башни, то она опрокидывается. Детали хорошо крепятся друг к другу.

4а. Какое количество LEGO-кирпичиков использовал ребенок, если он построил устойчивую башню и при этом оказалось, что верхняя и нижняя детали сдвинуты друг относительно друга по горизонтали на расстояние, равное удвоенной длине кирпичика?

¹ Автор всех задач для 7 класса – А.Бычков.

4б. На каком максимально возможном расстоянии друг от друга по горизонтали могут находиться верхняя и нижняя детали, если ребенок использовал 11 кирпичиков?

В качестве ответов на вопросы приведите схематичные рисунки башен с краткими пояснениями.

8 класс²

1. Маятник (10 баллов)

Небольшое тело, подвешенное на твердом стержне в поле силы тяжести, способно совершать колебательное (повторяющееся) движение, если отклонить его из положения равновесия на небольшой угол и отпустить. Математическим маятником называется физическая модель, описывающая процесс колебаний груза на стержне, в которой тело считается материальной точкой, масса стержня, а также все силы трения и сопротивления движению считаются пренебрежимо малыми. Время, затрачиваемое маятником на одно колебание, иначе говоря, на возвращение в исходную точку, называется периодом колебаний.

1а. Рассмотрим следующие размерные параметры: длина стержня маятника L , масса тела m и ускорение свободного падения g , равное $9,8 \text{ м/с}^2$. Исходя из соображений размерности, определите, от каких параметров зависит период колебаний математического маятника. Во сколько раз изменится период колебаний маятника, если уменьшить длину подвеса в 4 раза?

1б. Заданный интервал времени (например, минута), измеряемый маятниковыми часами, пропорционален периоду колебаний маятника. Рассмотрим маятниковые часы, в устройство которых входит маятник длиной $L = 1 \text{ м}$, сделанный из стали. При такой длине движение маятника в одну сторону занимает $1,00 \text{ с}$. Известно, что при температуре окружающей среды $t_1 = 5 \text{ }^\circ\text{C}$ часы показывают точное время. На сколько отстанут за сутки часы при температуре $t_2 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$? Линейное тепловое расширение тел описывается формулой $L = L_0(1 + \alpha(t - t_0))$, где L и L_0 – размеры тела при температурах t и t_0 соответственно, α – постоянный коэффициент линейного расширения, равный для стали $\alpha = 12,5 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^\circ\text{C}$.

1с. Как должен быть устроен подвес маятника, чтобы период колебаний не менялся при изменении температуры? Считается, что в своей конструкции вы можете соединять стержни, сделанные из двух разных материалов, коэффициенты линейного расширения которых равны α и 2α . В качестве ответа приведите схематичный рисунок с краткими пояснениями.

Указание. Может оказаться полезной приближенная формула $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$, верная при $|x| \ll 1$.

2. Равновесие системы блоков (7 баллов)

Система, изображенная на рисунке 4, состоит из двух подвижных блоков, одного неподвижного двухступенчатого блока, двух грузов и нити. Двухступенчатый блок состоит из легких жестко соединенных дисков с общей осью, диаметры которых равны 15 см и 30 см . Массы грузов равны $m = 1 \text{ кг}$ и $M = 3 \text{ кг}$. Массами нитей и блоков, а также трением в осях блоков можно пренебречь, нить не проскальзывает по поверхностям блоков

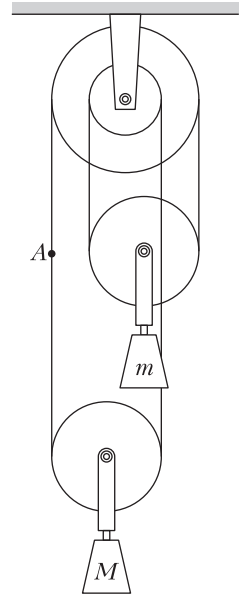


Рис. 4

2а. Пусть в точке A к нити приложена такая сила F , что система находится в равновесии. Куда направлена и чему равна эта сила?

2б. Можно ли привести систему в состояние равновесия, действуя с некоторой вертикальной силой на нить в точке A , если поверхность двухступенчатого блока гладкая (так что нить по ней проскальзывает)? Ответ объясните.

3. Вода и масло (8 баллов)

Цилиндрический сосуд с нанесенной на боковую поверхность мерной шкалой частично заполнен водой, в которой плавает выпуклая пластиковая игрушка. В сосуд начинают добавлять масло, которое течет тонкой струйкой с постоянной скоростью μ , измеряемой в мл/с . Каждую минуту с помо-

² Автор всех задач для 8 класса – А.Бычков.

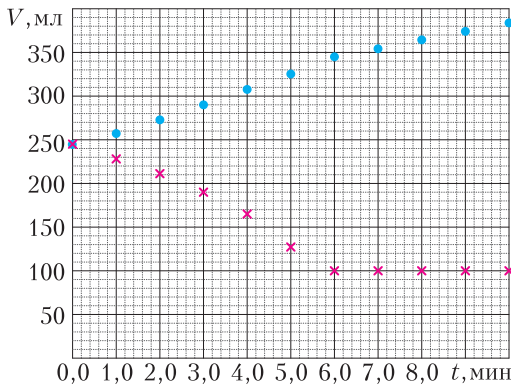


Рис. 5

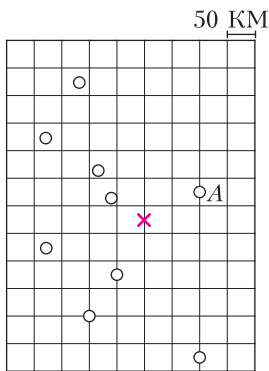
щью мерной шкалы определяют два значения объема, соответствующие положению уровня поверхности воды и масла. Результаты измерений показаны на графике (рис. 5). В процессе эксперимента жидкости не смешиваются. Маркеры одной формы (кружки или крестики) соответствуют одной из жидкостей. Плотность воды равна 1 г/см^3 , плотность масла меньше плотности воды.

3а. Чему равна скорость μ ?

3б. Определите плотность масла.

4. Передвижение вертолета (10 баллов)

Вертолет летит с постоянной по модулю скоростью 200 км/ч . На рисунке 6 изображено положение вертолета (крестик) относительно населенного пункта А и остальных населенных пунктов (кружки) в 12:00. Известно, что вертолет движется на одной высоте над Землей по траектории, состоящей из прямых участков.



В таблице указано

Рис. 6

Время	12:30	13:00	13:30	14:00
$L, \text{ км}$	150	225	250	300

расстояние L от пункта А до точки, где находится вертолет в разные моменты времени. Пользуясь рисунком, а также циркулем и линейкой, ответьте на следующие вопросы.

4а. Пусть известно, что вертолет не менял направление полета с 12:00 до 12:30. В какое самое раннее время он мог пролететь над

каким-либо населенным пунктом? Над каким именно населенным пунктом он бы при этом пролетел?

4б. Пусть известно, что вертолет менял направление полета только один раз в 13:00. В каком населенном пункте оказался вертолет в 14:00?

Все построения делайте на увеличенном рисунке (представленном на олимпиаде на дополнительном листе). Искомые города пометьте, например, «галочкой». Кратко опишите ваши рассуждения и последовательность построений.

9 класс

1. Частота ультразвука (10 баллов)

1а. Источник ультразвуковых импульсов движется по прямой со скоростью v навстречу неподвижному приемнику, располагающемуся на той же прямой. Источник излучает короткие импульсы с частотой f_0 . С какой частотой f их принимает приемник? Как изменится ответ, если источник будет удаляться от приемника? Скорость распространения ультразвука равна c , при этом $c \gg v$.

На дне моря установлен ультразвуковой детектор. Судно движется прямолинейно с постоянной скоростью v , проходя в некоторый момент времени прямо над детектором. На судне установлен источник ультразвуковых импульсов, излучающий их с частотой f_0 с одинаковой интенсивностью в любом направлении. Детектор принимает импульсы с частотой f , отличной от частоты излучаемых импульсов. Обозначим $n = \frac{f}{f_0}$ отношение этих частот.

На рисунке 7, показан фрагмент зависимости отношения n от времени при движении судна. Скорость ультразвука в воде равна 1500 м/с .

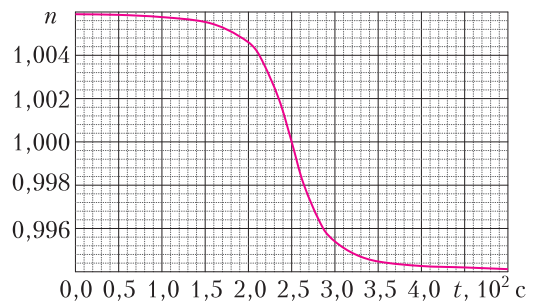


Рис. 7

1б. Чему равна скорость судна? На какой глубине располагается детектор?

Указание. При решении задачи могут оказаться полезными следующие приближенные формулы, справедливые при малых значениях x ($|x| \ll 1$):

$$\sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \frac{1}{1+x} \approx 1 - x.$$

П. Крюков

2. Пошла на дно (6 баллов)

В бутылку с достаточно толстыми стенками вместимостью $V = 700$ мл наливают некоторое количество воды. Прикрыв горлышко пальцем, бутылку переворачивают вверх дном, погружают в ведро с водой и убирают руку. Бутылка плавает, сохраняя вертикальное положение. Над поверхностью воды выступает часть бутылки объемом $\Delta V = 15$ мл. Ведро с бутылкой выносят из комнаты, температура воздуха в которой равна $t_0 = 25$ °С, на мороз. Можно считать, что в процессе охлаждения воздух, находящийся внутри бутылки, сжимается и его объем изменяется по закону $V = V_0(1 + \alpha(t - t_0))$, где V_0 – объем воздуха при температуре t_0 , α – коэффициент, равный $3,6 \cdot 10^{-3}$ 1/°С. Найдите температуру воздуха внутри бутылки в тот момент, когда бутылка полностью погрузится в воду. Масса бутылки равна 300 г, плотность материала, из которого она изготовлена, $\rho = 2600$ кг/м³, плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м³.

А. Бычков

3. Цепь из нескольких звеньев (8 баллов)

Электрическая цепь, показанная на рисунке 8, составлена из пяти одинаковых звеньев, в каждом из которых содержится три одинаковых резистора сопротивлением R . Выводы A и D , а также C и B соединяют проводниками пренебрежимо малого сопротивления попарно. Определите сопротивление между точками A и B образовавшейся цепи.

А. Бычков

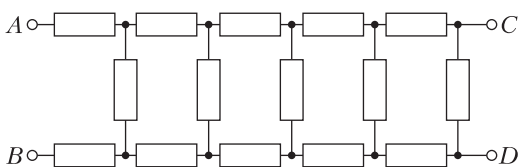


Рис. 8

4. Столкновения на плоскости (8 баллов)

На расстоянии $L = 10$ см друг от друга на достаточно протяженной наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонталью, удерживаются два абсолютно одинаковых бруска. В момент времени $t = 0$ бруски освобождают и они начинают двигаться. Величины, относящиеся к верхнему в начальный момент бруску, далее помечаем индексом 1, а относящиеся к нижнему – индексом 2. Обозначим $v_1(t)$ и $v_2(t)$ скорости брусков в момент времени t . Коэффициенты трения о плоскость равны $\mu_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$ и $\mu_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Ускорение свободного падения считается равным 10 м/с². Размеры брусков пренебрежимо малы, столкновения между ними являются абсолютно упругими.

4а. Для первой секунды движения изобразите графики зависимостей $v_1(t)$ и $v_2(t)$. В какие моменты времени происходят столкновения брусков?

4б. Какое расстояние проходит первый брусок (верхний в исходной конфигурации) к моменту n -го столкновения?

Фольклор

5. Определите по фотографии (10 баллов)

На стробоскопической фотографии (рис. 9) можно видеть положение движущегося в поле тяжести земли мяча, сталкивающегося с горизонтальной поверхностью, в разные моменты времени. Промежутки времени между двумя последовательными вспышками стробоскопической лампы одинаковы. Фотография инвертирована (черный цвет изменен на белый, белый заменен на черный), сетка наложена в графическом редакторе позже для удобства расчетов. Столкновения мяча с горизонтальной поверхностью нельзя считать упругими, в процессе столкновения кинетическая энергия поступательного движения мяча уменьшается.

5а. Далее везде в этой задаче мы предполагаем, что сила сопротивления воздуха пренебрежимо мала. Изучив фотографию, кратко объясните, насколько справедливо наше предположение.

5б. Найдите отношение v_1/v_3 , где v_1 и v_3 – скорости мяча в наивысшей точке траектории после первого и третьего ударов о поверхность соответственно.

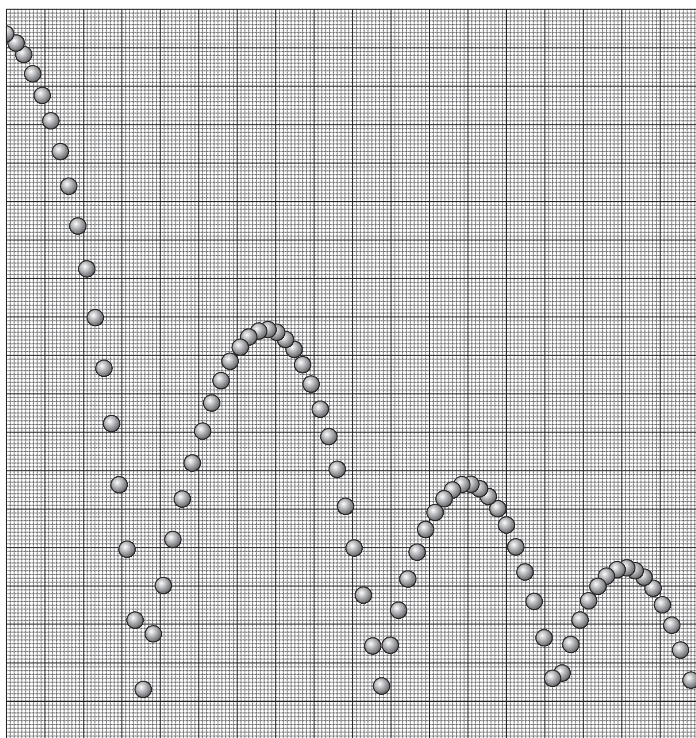


Рис. 9

5с. Определите как можно точнее угол между скоростью мяча сразу после первого столкновения и горизонтом.

5д. Во сколько раз изменяется кинетическая энергия мяча в процессе второго столкновения с поверхностью?

А.Бычков

10 класс

1. Казалось бы, при чем здесь π ? (12 баллов)

На гладком горизонтальном столе покоятся два маленьких бруска, массы которых равны $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 10^N$ кг, где N — некоторая константа. В момент времени $t = 0$ второму бруску сообщают скорость v_0 (рис. 10). Столкновения брусков друг с другом и со стенкой в процессе дальнейшего движения считаются абсолютно упругими.

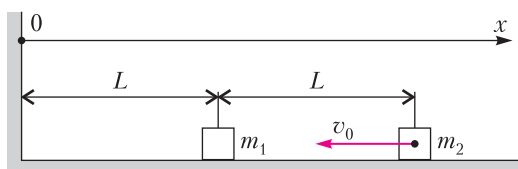


Рис. 10

Пусть ось x направлена вправо, координата стенки равна нулю. Проследим за движением брусков, рассмотрев зависимость $x_2(x_1)$ — координаты второго бруска в некоторый момент времени от координаты первого в тот же момент. Положению брусков, при котором их координаты равны x_1 и x_2 , соответствует точка M с координатами (x_1, x_2) . Со временем координаты брусков изменяются, а точка M движется по плоскости x_1x_2 .

1а. Найдите скорость точки M в момент, когда проекции скоростей брусков на ось x равны v_1 и v_2 соответственно. Какой угол составляет вектор скорости точки M с осью x_1 ? Нарисуйте траекторию движения точки M по плоскости x_1x_2 для значений масс $m_1 = m_2 = 1$ кг ($N = 0$).

Введем в рассмотрение координаты $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, связанные с координатами (x_1, x_2) формулами

$\tilde{x}_1 = \sqrt{m_1}x_1$ и $\tilde{x}_2 = \sqrt{m_2}x_2$. Положению брусков, при котором их координаты равны x_1 и x_2 , соответствует точка \tilde{M} с координатами $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ на плоскости $\tilde{x}_1\tilde{x}_2$.

1б. Воспользовавшись законом сохранения энергии, покажите, что величина скорости точки \tilde{M} сохраняется при абсолютно упругом ударе брусков.

Пусть за мгновение перед столкновением брусков острый угол между прямой, задаваемой уравнением $\tilde{x}_2 = \frac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1}}\tilde{x}_1$, и скоростью точки \tilde{M} равен α . Используя законы сохранения импульса и энергии, докажите, что после столкновения брусков острый угол между прямой $\tilde{x}_2 = \frac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1}}\tilde{x}_1$ и скоростью точки \tilde{M} также равен α .

1с. На каком расстоянии от стенки произойдет пятое столкновение брусков, если параметр N равен 2?

1д. Сколько раз столкнется брусок массой m_1 с бруском массой m_2 и стенкой при $N = 4$?

Указание. Может оказаться полезной приближенная формула $\operatorname{tg} x \approx \sin x \approx x$, справедливая при малых x ($x \ll 1$).

А.Бычков

2. Тянут канат (6 баллов)

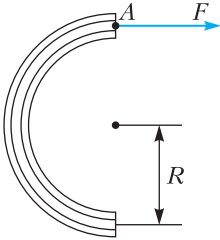


Рис. 11

Внутри закрепленной горизонтальной тонкой трубки, изогнутой в форме полукругности радиусом R , расположен однородный гибкий канат длиной πR , масса которого равна m (рис. 11). Канат начинают тянуть за свободный конец A , прикладывая силу по касательной.

Чему равна и куда направлена суммарная сила реакции трубки, действующая на канат, если ускорение точки A каната равно a ? Считайте внутренние стенки трубки гладкими, а канат нерастяжимым. Рассмотрите начальный момент времени, когда скорость каната равна нулю. Силой тяжести можно пренебречь.

А.Бычков

3. Баллон на платформе (9 баллов)

Тележка установлена на горизонтальных прямолинейных рельсах и может двигаться по ним без сопротивления. На тележке закреплен сосуд цилиндрической формы, ось которого параллельна рельсам. Длина цилиндра и его радиус равны L и r соответственно. Масса тележки с пустым сосудом равна M . Сосуд заполняют идеальным газом массой m при температуре T_0 . Одно основание сосуда поддерживают при температуре T_0 . Температура другого основания в начальный момент также равна T_0 , но затем ее медленно увеличивают до величины $T_0 + \Delta T$ (при этом известно, что $\Delta T \ll T_0$). Боковая поверхность сосуда теплоизолирована. Введем ось x , направив ее вдоль оси цилиндра от основания с температурой $T_0 + \Delta T$ к основанию с температурой T_0 . Пусть начало координат совпадает с основанием цилиндра с температурой $T_0 + \Delta T$. Задачу решайте приближенно, пренебрегая всеми слагаемыми, пропор-

циональными квадрату малого параметра $\delta T = \frac{\Delta T}{T}$ и его старшим степеням. Можно использовать приближенную формулу $(1+x)^n \approx 1+nx$, справедливую при малых x ($|x| \ll 1$).

3а. Определите зависимость $\rho(x)$ плотности газа в цилиндре от координаты.

3б. Найдите смещение тележки d относительно начального положения.

Фольклор

4. Барометр Ломоносова (8 баллов)

Для измерения небольших изменений ускорения свободного падения Δg (обусловленных, например, изменением высоты над уровнем моря или притяжением Луны) Михаил Васильевич Ломоносов предложил создать прибор – универсальный барометр, конструкцию которого описал так: «Возьмем стеклянный шар AB с толстыми стенками и внутренним диаметром в три дюйма; соединим с ним барометрическую трубку BC такой длины, чтобы от центра шара до изгиба C было 28 дюймов; после загиба пусть идет горизонтальная трубочка CP длиной в фут или больше со стеклянным шаром S диаметром в дюйм; просвет в трубочке CP пусть будет диаметром в $\frac{1}{4}$ линии». Схема, сопровождавшая описание, приведена на рисунке 12. Предполагалось, что в прибор заливается ртуть так, чтобы при вертикальном положении и трубки BC большой шар был заполнен

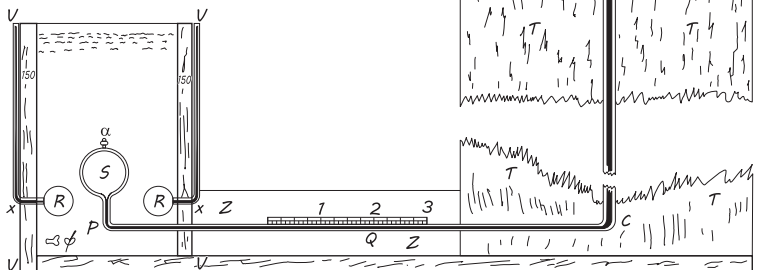


Рис. 12

наполовину (при этом над ртутью не оставалось воздуха), а трубка PC была заполнена до точки Q (середина PC). После этого малый шар герметизировался, оба шара размещались в специальных ящиках, заполненных тающим льдом. Ожидалось, что изменение ускорения свободного падения можно будет обнаружить по изменению положения границы столба ртути в горизонтальной трубке, которое фиксировалось линейкой, расположенной рядом с трубкой. Прибор не был изготовлен; вероятно, заявка Ломоносова была отклонена.

4а. Пусть расстояние между соседними делениями шкалы линейки составляет 1 линию. Какое минимальное относительное изменение $\frac{\Delta g}{g}$ ускорения свободного падения можно было бы обнаружить при помощи универсального барометра? Плотность ртути и давление ее насыщенных паров при 0°C равны $13,6 \text{ г/см}^3$ и $0,25 \text{ кПа}$ соответственно, $1 \text{ фут} = 12 \text{ дюймов}$, $1 \text{ дюйм} = 10 \text{ линий}$, $1 \text{ дюйм} = 2,54 \text{ см}$.

4б. На какой минимальной высоте над уровнем моря можно было бы измерить изменение ускорения свободного падения при помощи описанного прибора с относительной погрешностью не больше чем 20%? Считайте, что погрешность определяется только погрешностью считывания линейки, радиус Земли равен 6400 км .

П.Крюков

5. Кольцо и стержень (6 баллов)

В однородном диэлектрическом цилиндре длиной $2L$ и диаметром $2R$ сделан цилиндрический канал малого радиуса r ($r \ll R$), соосный цилиндру (рис. 13). В канал вставлен однородно заряженный стержень длиной $2L$ круглого сечения, диаметр стержня чуть меньше диаметра канала. Стержень может двигаться свободно вдоль оси канала. На цилиндре закреплено тонкое однородно заряженное кольцо, плоскость которого перпендикулярна оси цилиндра и делит ци-

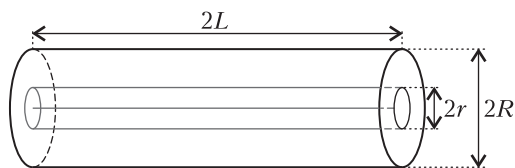


Рис. 13

линдр пополам. Кольцо и стержень на рисунке не изображены. Масса цилиндра с кольцом равна массе стержня и равна M . Стержень и кольцо несут одинаковые заряды разных знаков, равные по абсолютной величине q . Стержень смещают на небольшое расстояние x_0 ($x_0 \ll L$) от положения равновесия и отпускают.

5а. Чему равна максимальная скорость стержня, если цилиндр закреплен?

5б. Чему равна максимальная скорость стержня после освобождения системы, если цилиндр не удерживается внешней силой?

Гравитацией, всеми видами трения, а также эффектами, связанными с поляризацией диэлектрика, можно пренебречь.

П.Крюков

11 класс, тур 1

1. Разная работа

В горизонтально расположенной теплоизолированной трубе между двумя подвижными теплоизолирующими поршнями находится в состоянии теплового равновесия при температуре 310 К две порции идеального одноатомного газа, разделенные жесткой неподвижной хорошо проводящей тепло перегородкой (рис. 14). Поршни могут дви-

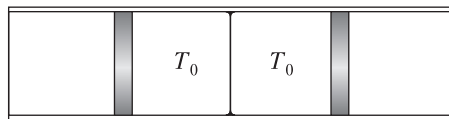


Рис. 14

гаться вдоль оси трубы, не испытывая сопротивления. Снаружи поршней находится воздух при атмосферном давлении. Количество газа в каждой порции равно 1 моль. К правому поршню прикладывается сила (меняющаяся со временем), и поршень медленно перемещается, температура газа при этом квазистатически уменьшается на 30 К . Универсальная газовая постоянная R равна $8,3 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$.

1а. Найдите теплоемкость порции газа, располагающейся справа от перегородки, в начале и в конце процесса охлаждения.

1б. Какую работу A_1 совершает газ, располагающийся справа от перегородки, в процессе охлаждения? Какую работу A_F при этом совершает приложенная к поршню внешняя сила?

П.Крюков, А.Бычков

2. Токи и заряды (7 баллов)

Внутри соленоида, ось которого вертикальна, располагается плоская проволочная сетка размером 3×3 ячейки (рис. 15,а). Ось соленоида перпендикулярна плоскости сетки и проходит через ее центр. Сопротивление перемычки, соединяющей два соседних узла, равно r . В соленоиде создается магнитное поле, направленное так, как показано на рисунке 15. Сила тока в витках соленоида

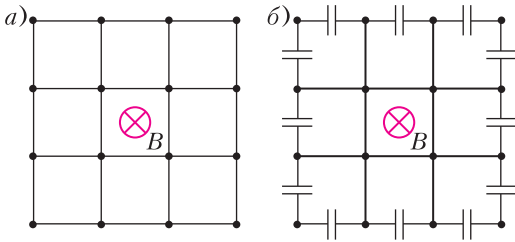


Рис. 15

равномерно увеличивается со временем так, что абсолютная величина скорости изменения магнитного потока через ячейку сетки оказывается равна $\left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = 4\mathcal{E}_0$.

2а. Определите значения токов, текущих в перемычках, соединяющих узлы сетки. Сделайте рисунок, укажите направления этих токов.

2б. Все перемычки на границе сетки заменили на конденсаторы одинаковой емкости (рис. 15,б). Найдите напряжения на конденсаторах.

П.Крюков, А.Бычков

3. Увеличение системы (7 баллов)

Внутри трубы с непрозрачными стенками располагаются две одинаковые тонкие плосковыпуклые линзы. Плоскости линз перпендикулярны оси трубы (рис. 16). Наблюдатель рассматривает через систему линз небольшой предмет S , располагающийся на расстоянии x от передней линзы. График зависимости поперечного увеличения Γ от расстояния x показан на рисунке 17. Предполагая, что изображение формируется параксиальными (приосевыми) лучами, опре-

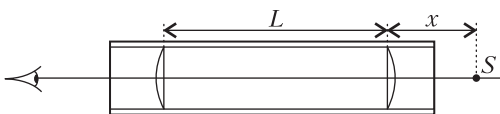


Рис. 16

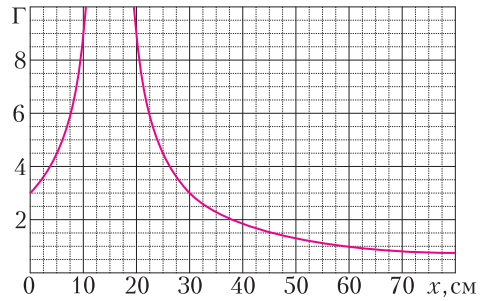


Рис. 17

делите расстояние L между линзами, а также их фокусное расстояние f .

П.Крюков

4. Поджатая пружина (11 баллов)

Зависимость относительного удлинения δx поджатой пружины от силы F , растягивающей ее в невесомости, изображена на графике, представленном на рисунке 18 ($\delta x = \frac{x}{L_0}$,

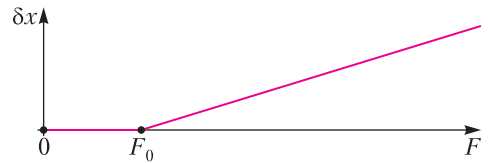


Рис. 18

L_0 – начальная длина пружины, x – удлинение). Пружина не растягивается, пока выполняется неравенство $F \leq F_0$, если же сила F становится больше F_0 , то относительное удлинение δx начинает зависеть от силы F по

линейному закону $\delta x = \frac{F - F_0}{\epsilon}$, где $\epsilon = \text{const}$.

Далее в задаче рассматриваются однородные пружины, для любого участка которых постоянные F_0 и ϵ такие же, как для исходной пружины длиной L_0 . В каждом из пунктов масса пружины обозначается M . Коэффициентом упругости k поджатой пружины считается коэффициент пропорциональности между изменением силы и удлинением:

$$k = \frac{F(x) - F_0}{x} \text{ при } F > F_0.$$

Во всех пунктах задачи рассматривается статическое равновесие пружин. Безразмерные параметры $\gamma = \frac{kL_0}{Mg}$ и $f_0 = \frac{F_0}{Mg}$ (разные в разных пунктах задачи) характеризуют относительные жесткость и силу поджатия пружины, g – ускорение свободного падения.

4а. От поджатой пружины длиной L_0 отрезали участок длиной ΔL (в недеформированном состоянии), который стали растягивать силой F ($F > F_0$) в невесомости. Найдите длину y этого участка под нагрузкой как функцию силы F и параметров $\Delta L, k, L_0$.

4б. Поджатая пружина, параметры которой удовлетворяют соотношениям $f_0 > 1, \gamma = 1$, подвешена в поле тяжести к потолку за один из концов. К другому концу присоединяют груз массой $m = \mu M$ ($\mu > f_0$). Чему будет равна длина пружины в положении равновесия? Ответ выразите через параметры L_0, f_0, μ .

4с. Пусть относительная сила поджатия удовлетворяет неравенству $f_0 < 1$. Пружина подвешена к потолку в поле тяжести за один из концов. Чему равна ее длина в положении равновесия? Ответ выразите через параметры L_0, f_0, γ .

4д. Поджатая пружина подвешена за один конец к потолку. К другому концу присоединяют грузы различной массы, снимая зависимость относительного удлинения $\delta L = \frac{L - L_0}{L_0}$ от относительной массы $\mu = \frac{m}{M}$ грузов (M – масса пружины). Результаты измерений представлены в таблице. Опреде-

μ	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
$\delta L, \%$	1,0	4,0	9,0	16,0	25,0	35,0	45,0

лите относительную жесткость γ и относительную силу поджатия f_0 этой пружины.

А.Власов, П.Крюков

5. Диэлектрический гистерезис (12 баллов)

В плоском нелинейном конденсаторе пространство между обкладками заполнено нелинейным диэлектриком, поэтому зависимость заряда конденсатора от напряжения между обкладками может быть более сложной, чем в линейном случае, для которого $q = CU$. При циклическом изменении напряжения зависимость $q(U)$ для нелинейного конденсатора имеет вид петли гистерезиса.

5а. Для изучения свойств нелинейного конденсатора емкостью C собрали цепь, изображенную на рисунке 19. Емкость обычного (линейного) эталонного конденсатора C_0 удовлетворяет сильному неравенству $C_0 \gg \frac{100S\epsilon_0}{d}$, где d и S – расстояние между обкладками нелинейного конденсатора и их площадь. Сопротивления резисторов подо-

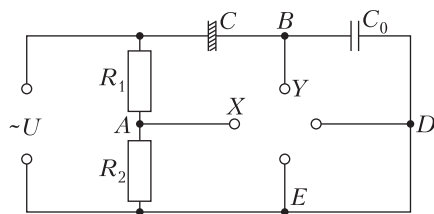


Рис. 19

браны так, что выполняется равенство $\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{S\epsilon_0}{dC_0}$. На вход цепи подается гармоническое напряжение $U(t)$. К точкам A и B подключены выводы пластин осциллографа, отклоняющих луч по горизонтали и вертикали соответственно. На экране осциллографа наблюдается зависимость напряжения $U_y = \varphi_B - \varphi_E$ между точками B и E от напряжения $U_x = \varphi_A - \varphi_D$ между точками A и D , изображенная на рисунке 20. Подключение осциллографа не меняет распределение токов и потенциалов в цепи. Определите абсолютную величину поверхностной плотности поляризаационных зарядов $|\sigma_{п}|$ на одной из сторон диэлектрической пластины (соприкасающейся с обкладкой конденсатора) в состояниях, соответствующих точкам α, β, γ на графике. Найдите напряженность поля в диэлектрике в состояниях α и γ . Площадь обкладок нелинейного конденсатора S , емкость C_0 эталонного конденсатора, обозначенные на графике параметры петли a, b, u считаются известными. Электрическая постоянная равна ϵ_0 .

5б. Другой нелинейный конденсатор подключают последовательно с резистором сопротивлением R к генератору прямоугольных импульсов с частотой n , напряжение между выводами которого в течение первой половины периода равно U_0 , а в течение

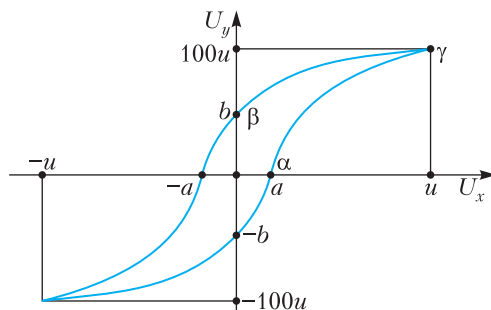


Рис. 20

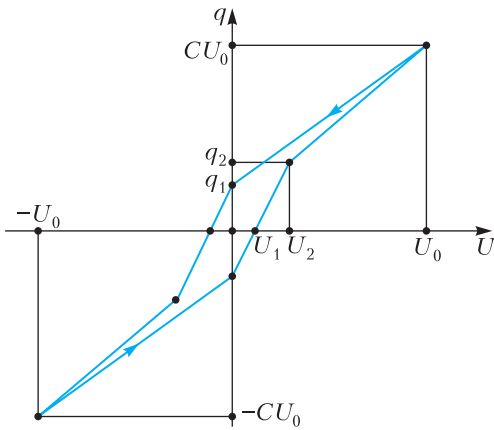


Рис. 21

второй половины периода равно $-U_0$. В установившемся режиме заряд одной из обкладок конденсатора q в зависимости от напряжения между обкладками U изменяется так, как показано на графике на рисунке 21. Параметры петли гистерезиса, обозначенные на графике, равны $U_1 = 0,1U_0$, $U_2 = 0,25U_0$, $q_1 = 2CU_1$, $q_2 = q_1 + 0,1CU_0$. Значения U_0 и C известны, при этом $nRC \ll 1$. Найдите среднюю за период мощность, потребляемую цепью от генератора, и среднюю мощность, выделяющуюся на резисторе. Ответы выразите через параметры C , U_0 , n .

П.Крюков

11 класс, тур 2

1. Как в трансформаторе (9 баллов)

Катушка намотана проводом пренебрежимо малого сопротивления на тороидальный сердечник с большой магнитной проницаемостью так, что при протекании тока по виткам катушки рассеяния магнитного потока не происходит. К витку в середине катушки присоединен провод, и собрана цепь, показанная на рисунке 22,а. Напряжение на выводах идеального генератора меняется по гармоническому закону, амплитуда напряжения не зависит от подключаемой нагрузки. Идеальные амперметры переменного

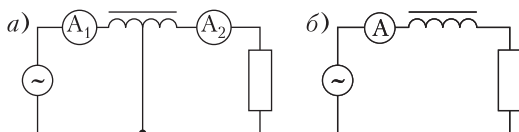


Рис. 22

го тока A_1 и A_2 показывают токи I_1 и I_2 . Что показывает идеальный амперметр переменного тока в цепи на рисунке 22,б, если эта цепь составлена из тех же элементов, что и на рисунке 22,а?

П.Крюков

2. Излучает и падает (10 баллов)

В соответствии с законами классической электродинамики, заряженная частица, движущаяся с ускорением, излучает электромагнитные волны. Релятивистские эффекты в этой задаче не учитываются. Масса и модуль заряда электрона, скорость света в вакууме и электрическая постоянная равны m , e , c и ϵ_0 соответственно.

2а. Пусть электрон движется вокруг протона по орбите, близкой к круговой. Протон считаем неподвижным, поскольку его масса много больше m . Известно, что мощность излучения движущегося электрона дается формулой $P = Ae^{\alpha}c^{\beta}\epsilon_0^{\gamma}a^{\delta}$, где a – ускорение электрона, A – безразмерная константа. Определите показатели степени α , β , γ , δ .

2б. В процессе излучения энергия электрона уменьшается, поэтому он движется не по окружности, а по спирали и в некоторый момент времени должен упасть на протон. Предполагая, что за время, равное периоду обращения электрона, расстояние R между электроном и протоном изменяется незначительно, а также считая известной постоянную A в приведенной выше формуле, определите время Δt , за которое расстояние R уменьшается от известного значения R_0 на ΔR , при условии, что $\Delta R \ll R_0$. Найдите время $t_{1/2}$, за которое расстояние R уменьшается от значения R_0 до значения $R_0/2$.

Указание. Может оказаться полезной формула

$$\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}), \quad n \neq -1.$$

Фольклор

3. Похоже на диод (11 баллов)

Две плоские металлические пластины площадью S располагаются параллельно друг другу в точках с координатами $x = 0$ (первая пластина) и $x = d$ (вторая пластина), при этом $S \gg d^2$. Ось x перпендикулярна пластинам. Первая пластина заземлена, потенциал второй пластины равен $-U_0$. Пространство между пластинами заполнено полу-

проводником, в котором носителями заряда являются частицы с зарядом q ($q > 0$). Ток в полупроводнике – это коллективное направленное движение этих частиц. Диэлектрическая проницаемость полупроводника равна единице. Электрическая постоянная равна ϵ_0 .

3а. При больших значениях U_0 можно считать, что средняя скорость движения носителей в направлении поля в точке с координатой x в пространстве между пластинами пропорциональна напряженности поля в этой точке: $v(x) = \mu E(x)$, где μ – известная константа. Пусть ток между пластинами установился, средняя скорость носителей $v(x)$, плотность заряда $\rho(x)$ и потенциал $U(x)$ не меняются со временем. Предполагая, что потенциал зависит от координаты по степенному закону $U(x) = Ax^\alpha$, определите значения постоянных A и α . Найдите ток между пластинами. Считайте известными значения параметров U_0 , μ , d и S .

3б. При небольших значениях U_0 движение носителей обусловлено диффузией. Сила тока в этом случае удовлетворяет соотношению

$$I = -S \left(\frac{\mu kT}{q} \right) \frac{d\rho}{dx},$$

где k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура. Пусть ток между пластинами установился. Предполагая известной степенную зависимость потенциала от координаты: $U(x) = Bx^\beta$, определите значения постоянных B и β . Найдите силу тока. Считайте известными значения параметров U_0 , μ , d , q , T и S .

3с. Какому сильному неравенству вида $U_0 \ll f(q, \mu, T)$ должно удовлетворять значение потенциала U_0 , чтобы его можно было считать небольшим, как в пункте 3б?

Фольклор

4. Термодинамика жидкости (13 баллов)

Коэффициент теплового расширения при постоянном давлении некоторой жидкости равен $\alpha = \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta T} = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$, сжимаемость этой жидкости при постоянной температуре равна $\beta = -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p} = 1,1 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$, а ее молярная теплоемкость при постоянном объеме равна $c_V = 112 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{K})$. Эти парамет-

ры можно считать постоянными в условиях данной задачи. Внутренняя энергия одного моля рассматриваемой жидкости является функцией двух переменных: молярного объема V и температуры T и дается формулой

$$U(V, T) = A_1 T + A_2 V + A_3 VT - pV,$$

где A_1, A_2, A_3 – неизвестные константы, V – молярный объем, $p = p(V, T)$ – давление, являющееся функцией тех же двух переменных V и T .

4а. Считая молярный объем V функцией двух переменных: давления p и температуры T , выразите малое изменение dV через V , малые изменения dp и dT , а также данные в условии постоянные.

4б. Определите зависимость давления от температуры $p(T)$ в изохорном процессе, считая известным значение давления p_0 при температуре T_0 . Ответ выразите через заданные в условии постоянные, а также параметры p_0 и T_0 .

4с. Найдите значения постоянных A_1 и A_3 в выражении для внутренней энергии. Получите числовые ответы.

4д. Рассмотрев бесконечно малый цикл Карно, совершаемый с жидкостью, определите значение постоянной A_2 в выражении для внутренней энергии. Получите числовой ответ.

4е. Для заданной температуры T_0 определите значение молярной теплоемкости при постоянном давлении c_p , если молярный объем жидкости в рассматриваемом состоянии также известен и равен V_0 .

А.Заяц

5. Решетки (12 баллов)

Дифракционная решетка (рис. 23) представляет собой непрозрачную пластинку, в которой с пространственным периодом D

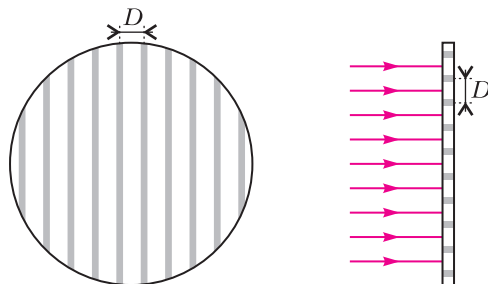


Рис. 23

сделаны N ($N \gg 1$) узких прорезей (штрихов) толщиной h . Обратите внимание, на рисунке прозрачные области показаны серым. В первых двух пунктах этой задачи мы рассматриваем решетки, содержащие $n = 100$ штрихов на миллиметр, считая при этом, что $h = 0,2D$. Решетки располагаются параллельно экрану, на котором наблюдается дифракционная картина, на расстоянии $L = 3$ м от него. Экраном считается участок вертикальной стены высотой 1 м и шириной 2 м. Решетки освещаются лучом лазерной указки, параметры которой одинаковые для всех пунктов: диаметр пучка $d = 2$ мм, длина волны $\lambda = 532$ нм. В первых двух пунктах свет падает на решетки по нормали. Середины решетки и экрана лежат на одном перпендикуляре к плоскости экрана.

5а. Пусть штрихи решетки ориентированы вертикально. При нормальном падении лазерного луча на решетку на экране наблюдается система ярких пятен. Сколько всего светлых пятен будет видно на экране? Чему будет равно расстояние между соседними пятнами вблизи центра экрана?

5б. Пусть две дифракционные решетки накладываются друг на друга. Штрихи одной решетки располагаются горизонтально, а штрихи другой составляют угол α с горизонтальной прямой. В результате получается непрозрачная пластинка, на которой периодически распределяются прозрачные области в виде параллелограммов. Схематично такая пластинка показана на рисунке 24,

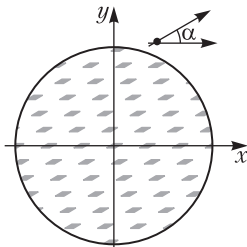


Рис. 24

серые параллелограммы символизируют прозрачные области. При освещении такой двумерной решетки лазером на экране наблюдается система светлых пятен. Пусть на экране задана система координат xy , начало координат находится в центре экрана. Пусть угол α равен $\frac{\pi}{2}$. Сделайте рисунок, изобразите дифракционную картину. Укажите координаты

нескольких светлых пятен на экране, располагающихся вблизи начала координат. Изобразите схематично дифракционную картину и определите координаты светлых пятен для случая $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

5с. Гитарная струна с оплеткой представляет собой отражательную дифракционную решетку. Оплетка – это тонкая проволока, навитая в один слой виток к витку на сердечник струны (рис. 25). При освещении гори-



Рис. 25

зонтально расположенной струны лучом лазерной указки, направленным под небольшим углом к горизонтали (рис. 26), на вертикальном экране, находящемся в 2–3

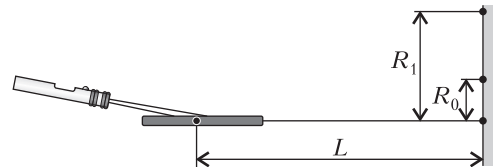


Рис. 26

метрах от струны, наблюдается дифракционная картина в виде концентрических полуокружностей. В эксперименте были измерены следующие величины: расстояние от точки падения лазерного луча на струну до стены $L = 2$ м, радиусы первых двух полуокружностей $R_0 = 4$ см, $R_1 = 12,5$ см. «Первых двух» означает наименьшей и следующей по размеру. Использовался тот же лазер, что и в предыдущих пунктах ($\lambda = 532$ нм). Определите по этим данным диаметр проволоки оплетки.

П. Крюков

Публикацию подготовил П. Крюков

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №4)

1. а) 5; б) 30.

а) Заметим, что в апреле дата записывается **04.23. Поэтому в качестве первых двух цифр можно использовать только 1, 5, 6, 7, 8, 9. Первой из этих цифр может быть только 1, поэтому всего получается пять дат: 15, 16, 17, 18, 19 апреля.

б) Цифры 2 и 3 уже участвуют в номере года, поэтому из всех месяцев нужно рассмотреть только 01, 04, 05, 06, 07, 08, 09 и 10. В каждом из этих номеров есть 0, поэтому в красивой дате не будет дня с номером, начинающимся с 0, 2 и 3, а также не будет дней 10, 11, 12 и 13 – остаются только 6 дней, с 14 по 19. Но тогда в каждом месяце красивая дата начинается с 1, и подходят только 6 месяцев, с 04 по 09. Остается заметить, что для каждого подходящего месяца ровно один день, оканчивающийся на ту же цифру, не будет красивым – значит, в каждом из 6 месяцев по 5 красивых дат, а всего в 2023 году – их 30.

2. Пасмурная.

Рассмотрим любые два дня, идущие подряд. Каждый день решено хотя бы по одной задаче, но ровно по одной оба дня быть не может, значит, за эти два дня решено минимум три задачи. Таким образом, за первые 8 дней Вася решил как минимум $4 \cdot 3 = 12$ задач. Если бы он за девятый день решил хотя бы две задачи, число решенных за 9 дней задач превысило бы 13. Так что за 9-й день была решена ровно одна задача. На 10-й день погода была пасмурной (и Вася решил две задачи), в противном случае он бы решил в этот день 0 задач, а по условию это не так.

Можно привести пример, как такое могло быть: Вася за эти 10 дней последовательно решал 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2 задачи. Нетрудно доказать, что этот пример единственен. В самом деле, доказательство, что Вася решил за 9-й день ровно одну задачу, применимо к любому нечетному дню.

Комментарий. Казалось бы, ответ на вопрос можно было бы дать, вообще не учитывая ни сколько было дней, ни сколько всего решено задач. Действительно, пасмурная погода в последний день ничему противоречить не может, а солнечная может, причем ровно в том случае, когда в предпоследний день решена ровно одна задача. А раз нас просят определить погоду в последний день, то ответ «пасмурная». Тем не менее, такое рассуждение не может считаться решением, так как исходит из неявного предположения, что на задачу можно дать однозначный ответ.

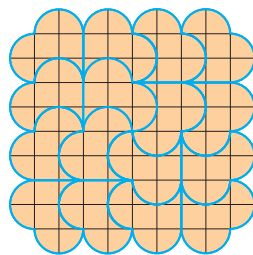


Рис. 1

3. Ответ показан на рисунке 1.

Комментарий. Как можно придумать разрезание? В печенье 64 клеточки и 16 полукругов по краям. Значит, в каждой части скорее всего будет полукруг и 4 клеточки, но тогда откуда внутри фигуры (не на границе) появятся полукруги? Вероятно, придется делать полукруглые разрезы – но тогда у фигурок будут не только выпуклые полукруги, но и вогнутости в виде полукруга. Из соображений площади получается одна вогнутость и две выпуклости. Таких разных фигурок бывает две, одна из них подходит (рис. 2).

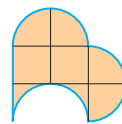


Рис. 2

Можно неформально рассуждать и так. Фигура имеет центр и две оси симметрии и поэтому искомое разрезание можно попытаться получить, ведя из центра к краю печенья четыре одинаковые линии разреза (каждый разрез получается из предыдущего поворотом на 90°). Прямыми эти линии быть не должны, попробуем дуги окружности и получим рисунок 3.

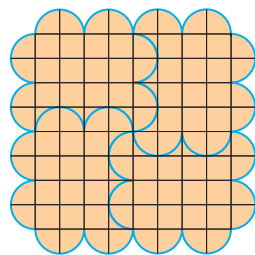


Рис. 3

Каждую из получившихся одинаковых четвертушек печенья уже не очень сложно разрезать на четыре фигурки, описанные выше.

4. Разместить 32 скрипача несложно: например, можно заполнить четыре столбца через один (неважно, правшами или левшами). Однако можно разместить и больше. Возможный пример с 34 скрипачами приведен на рисунке 4.

Комментарий. Можно доказать, что более 34 скрипачей разместить не удастся. В самом деле, рассмотрим вертикальную полосу шириной в две клетки. Всякий скрипач, стоящий в этой полосе

Пр	Л			Пр	Л		
		Пр	Л			Пр	Л
Пр	Л			Пр	Л		
		Пр	Л			Пр	Л
Пр	Л			Пр	Л		
		Пр	Л			Пр	Л
Пр	Л			Пр	Л		Пр
Л		Пр	Л		Пр		Л

Рис. 4

и при этом не в верхней строке, бьет одну какую-то клетку в этой же полосе. Мы можем поставить эту пустую клетку в соответствие данному скрипачу. Если при этом оказалось, что два скрипача бьют одну и ту же пустую клетку (возможны два аналогичных друг другу варианта этого, один из них показан на рисунке 5), то клетка, расположенная под дважды побитой, тоже обязана быть пустой, поэтому ее можно поставить в соответствие одному из двух скрипачей, допустим нижнему. Если же эту клетку бьет смычком скрипач, стоящий еще ниже, поставим ему в соответствие соседнюю с ним по горизонтальной клетку (она заведомо пустая), и так далее. Итак, в полосе может быть максимум 9 скрипачей – двое в верхних клетках и еще семеро в оставшихся 14 клетках, потому что каждому скрипачу там соответствует пустая клетка, т.е. занятых клеток не более половины.

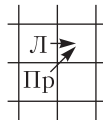


Рис. 5

Однако две полосы с девятью скрипачами не могут соседствовать, иначе в верхней строке четыре скрипача сидели бы подряд. Поэтому таких полос не более двух, в оставшихся двух полосах максимум по 8 скрипачей, так что всего в оркестре не более чем $9 + 9 + 8 + 8 = 34$ музыканта.

Конкурс имени А.П.Савина

(с.м. «Квант» №3)

25. Нет.

Предположим, что покрасить получилось. Пусть числа 1 и n разного цвета (например, синее и красное). Но тогда число $n+1$ – третьего цвета (например, зеленое), число $n+2 = 1 + (n+1)$ – красное, $n+3 = 1 + (n+2)$ – зеленое, $n+4 = 1 + (n+3)$ – красное и так далее: начиная с числа n , красные и зеленые числа будут чередоваться. Получается, что число $2n+1 = n + (n+1)$ должно быть, с одной стороны, синим, а с другой стороны, красным или зеленым – противоречие.

26. 12, 20 или 30.

Каждый стол – это четырехугольник; раз такие столы можно составить по 3, по 4 и по 5 одинаковыми углами к центру, значит, эти углы равны $360^\circ : 3 = 120^\circ$, $360^\circ : 4 = 90^\circ$ и $360^\circ : 5 = 72^\circ$. Тогда оставшийся, четвертый угол стола равен $360^\circ - 120^\circ - 90^\circ - 72^\circ = 78^\circ$. Сами углы могут располагаться разными способами (рис.6).

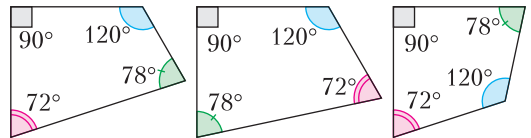


Рис. 6

Когда столы выставлены в круг, их внешние стороны образуют правильный многоугольник, каждый угол которого равен сумме двух углов стола (одних и тех же). Поскольку угол правильного многоугольника не может быть больше 180° , сложить его можно только тремя способами: $90^\circ + 72^\circ = 162^\circ$, $90^\circ + 78^\circ = 168^\circ$ или $72^\circ + 78^\circ = 150^\circ$. Тогда внешние углы этого многоугольника (смежные с внутренними; на рисунке 7 отме-

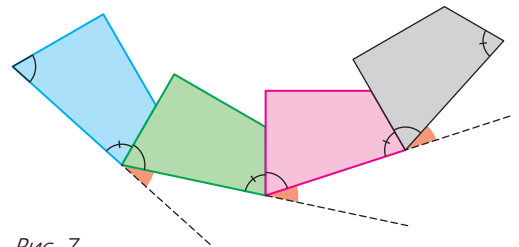


Рис. 7

чены красным) могут быть равны, соответственно, 18° , 12° или 30° . Сумма внешних углов любого многоугольника равна 360° , значит, для n -угольника получаем варианты $18^\circ \cdot n = 360^\circ$, $12^\circ \cdot n = 360^\circ$ или $30^\circ \cdot n = 360^\circ$ соответственно. Следовательно, столы могут стоять по 20, 30 или 12.

Замечание. Если выставлять столы в круг так, чтобы внутренние стороны образовывали многоугольник, ответ получится тот же самый.

27. Способов, когда все суммы нечетны, больше. Найдем количество способов для случая, когда все суммы нечетны. Сначала выберем места для четных и нечетных чисел. В каждом столбце (высоты 2) слагаемые разной четности. Для каждого из первых 99 столбцов выберем, как расположены такие слагаемые: $n+c$ или $c+n$, это можно сделать 2^{99} способами. Четность чисел последнего столбца однозначно восстанавливается, так как в каждой строке должно быть по нечетному количеству нечетных чисел. В последнем столбце числа окажутся разной четности,

так как в первых 99 столбцах стоит 99 нечетных чисел, а всего расставлено четное количество нечетных чисел. Таким образом, в таблице окажется 100 четных и 100 нечетных чисел, и суммы во всех рядах будут нечетны. Распределить нечетные числа по позициям для нечетных чисел можно $100!$ способами, и столько же вариантов для четных чисел. Получаем количество способов: $2^{99} \cdot (100!)^2$.

Теперь найдем количество способов для случая, когда все суммы четны. В каждом столбце слагаемые вида $n+n$ или $ч+ч$. Столбцов типов $n+n$ и $ч+ч$ должно быть по 50, так как всего четных и нечетных чисел по 100. Таким образом, надо выбрать, какие 50 из 100 столбцов будут типа $n+n$, а остальные будут типа $ч+ч$. Это можно сделать C_{100}^{50} способами. Затем распределяем по этим позициям четные и нечетные числа, получаем $C_{100}^{50} \cdot (100!)^2$ способов.

Осталось сравнить числа 2^{99} и C_{100}^{50} :

$$C_{100}^{50} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{50^2 \cdot 49^2 \cdot \dots \cdot 2^2 \cdot 1^2} < \\ < \frac{100 \cdot 100 \cdot 98 \cdot 98 \cdot \dots \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1}{50^2 \cdot 49^2 \cdot \dots \cdot 2^2 \cdot 1^2} = 2^{99}.$$

Таким образом, способов, когда все суммы нечетны, больше.

28. а) Для всех; б) для попавших в интервалы от $\frac{10^m}{m+1}$ до $\frac{10^m-1}{m}$ для какого-либо натурального m ; в) нет.

Пусть число k состоит из m цифр, тогда

$$10^{m-1} \leq k \leq 10^m - 1.$$

Поделив на m и используя то, что $k = nm$, получаем

$$\frac{10^{m-1}}{m} \leq n \leq \frac{10^m - 1}{m}.$$

Таким образом, надо выяснить, для каких n существует такое натуральное m , для которого выполняется последнее двойное неравенство, и тогда число $k = nm$ будет удовлетворять условию.

Для начала рассмотрим интервалы целых чисел между $\frac{10^{m-1}}{m}$ и $\frac{10^m - 1}{m}$ для нескольких начальных m : [1;9], [5;49], [34;333], [250;2499], [2000;19999]. Можно заметить, что соседние интервалы перекрываются – «дыр» между ними нет. Для решения пункта а) мы покажем, что это будет верно и далее, а также что эти интервалы покрывают все натуральные числа. Тогда для

любого n найдется такое m , что число n окажется внутри интервала, и число $k = nm$ удовлетворяет условию. В пункте б) требуется найти, для каких n таких m будет два, т.е. n попадет в пересечение двух соседних интервалов.

Во-первых, докажем, что эти интервалы покрывают все натуральные числа. Левая граница такого интервала может быть сколь угодно большой: $\frac{10^{m-1}}{m} > \frac{10^{m-1}}{5^m} = \frac{2^{m-1}}{5}$, поскольку степень двойки может быть сколь угодно большой. Здесь мы использовали неравенство $m < 5^m$, которое верно для всех натуральных чисел. Его нетрудно доказать по индукции.

Во-вторых, докажем, что правая граница каждого интервала больше левой границы следующего интервала (т.е. что соседние интервалы перекрываются):

$$\frac{10^m - 1}{m} > \frac{10^m}{m+1}.$$

Упростив, получим $10^m > m+1$. Это неравенство также верно для всех натуральных чисел, и это нетрудно доказать по индукции. Множество значений n , для которых существуют два таких числа k , представляет собой все натуральные числа, попавшие в интервалы от $\frac{10^m}{m+1}$ до $\frac{10^m-1}{m}$ для какого-либо натурального m : это числа от 5 до 9, от 34 до 49, от 250 до 333 и т.д.

Для пункта в) ответ отрицателен: таких чисел n не существует. В самом деле, если бы такие числа n существовали, то это означало бы перекрывание трех интервалов. Чтобы показать, что это невозможно, докажем, что правая граница m -го интервала меньше левой границы $(m+2)$ -го интервала, т.е. что $\frac{10^m - 1}{m} < \frac{10^{m+1}}{m+2}$. Преобразовав, получим $0 < 10^m(9m-2) + m+2$, что, очевидно, верно для всех натуральных m .

Данная задача является обобщением задачи Г.Гальперина из конкурса «Квантика» (№3 за 2018 г., задача 32), где требовалось найти все k для частного случая $n = 2018$.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Для увеличения силы трения и уменьшения скольжения.
2. Ситуация, подобная предыдущей задаче. Если, коснувшись рукой мяча, двигать ее по направлению его полета с замедлением, то можно ослабить силу удара мяча.
3. В условиях данной задачи максимальная дальность полета будет достигнута при прыжке под

углом 45° . Если прыгать с места, то отталкиваться от земли нужно под этим же углом. При прыжке с разбега к уже развитой горизонтальной скорости надо добавить вертикальную, т.е. оттолкнуться от земли под углом 90° .

4. Позади первого бегуна образуется область пониженного давления, поэтому на него действует заметная сила лобового сопротивления. У второго же бегуна давления воздуха спереди и сзади почти одинаковы, и сила сопротивления уменьшается.

5. Увеличиваются силы сопротивления со стороны льда, сообщающие спортсмену отрицательное ускорение.

6. Чтобы увеличить давление на лед и обеспечить появление водяной прослойки при больших скоростях движения.

7. Такой удар называют *крученым* или *сухим листом*. Футболист во время удара закручивает мяч, и тот во время полета меняет направление набегающего потока воздуха, изменяя при этом и направление своего движения (эффект Магнуса).

8. Вращение диска приводит к появлению подъемной силы, «растягивающей» время полета снаряда, а следовательно – к увеличению дальности полета.

9. Перчатки помогают распределить приложенную силу боксера на большую площадь, уменьшая давление и вероятность травмы соперника. Также материал, из которого перчатки изготовлены, пружинит во время удара, смягчая его последствия.

10. Для большей устойчивости – такого борца труднее опрокинуть.

11. Сгибая руку, держащую груз, мы уменьшаем плечо и момент его силы тяжести при том же моменте развиваемых мышцами сил.

12. Нет, в начале подъема штангисту необходимо приложить большую силу, чтобы сообщить штанге ускорение и оторвать ее от пола.

13. Даже небольшая сила со стороны мяча вызывает большие поперечные силы натяжения, которые могут превысить предел прочности материала сетки.

14. При разгоне велосипеда оси его вращающихся колес стремятся остаться горизонтальными (следствие закона сохранения момента вращения) и удерживают велосипед от падения.

15. При наклоне яхты киль компенсирует действие силы ветра на парус. Также киль препятствует боковому смещению (дрейфу) яхты.

Микроопыт

Руки должны висеть вертикально, т.е. должны быть расставлены на ширине плеч (см. также решение задачи 13).

84-я Московская олимпиада школьников по физике

7 класс

1. 1а. $t_1 = \frac{2L}{(\alpha - 1)v}$; **1б.** $t_2 = \frac{6L}{v}$.

2. $m_{\text{max}} = 528 \text{ г}$, $m_{\text{min}} = 436 \text{ г}$, $m_{\text{м}} = 482 \pm 46 \text{ г}$ (максимальное значение массы меди будет в том случае, когда масса детали принимает минимальное значение, а объем – максимальное; минимальное значение массы меди будет в противном случае).

3. Дальнобойность орудия пропорциональна его высоте, поэтому дальнобойность копии будет меньше в 10 раз. Для любой силы, действующей в конструкции, можно записать $F = \alpha \rho H^3 g$, где α – безразмерный коэффициент. Поэтому сила натяжения веревок уменьшится в 1000 раз.

4. 4а. Использовано 9 кирпичиков (рис. 8,а).

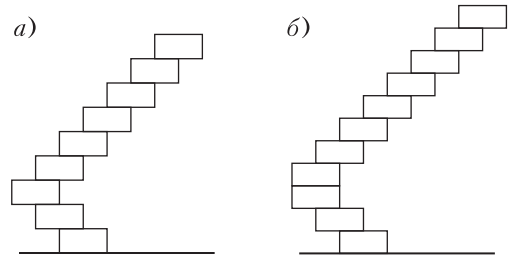


Рис. 8

4б. Верхняя и нижняя детали сдвинуты по горизонтали на $2,5a$, где a – длина детали (рис. 8,б).

8 класс

1. 1а. Период колебаний уменьшится в 2 раза.

1б. $\Delta T = N(T_2 - T_1) = \frac{T}{T_2}(T_2 - T_1) = T \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = T \left(1 - \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{L(1 + \alpha \Delta t)}}\right) \approx T \frac{\alpha \Delta t}{2} = 10,8 \text{ с}$, где $T = 1 \text{ сут}$ –

ки = 86400 с.



Рис. 9

1с. Принципиальная схема устройства подвеса приведена на рисунке 9. Коэффициенты линейного расширения красных и синего стержней равны α и 2α , длины этих стержней одинаковы, а длины черных стержней пренебрежимо малы.

2. 2а. Сила направлена вверх и равна $F = \frac{R - r}{2R}(M - m)g = 5 \text{ Н}$ (это следует, например, из условия равновесия подвижных блоков и из уравнения моментов для двухступенчатого

блока относительно его оси).

2b. Нет, нельзя.

3. 3a. $\mu = \frac{\Delta V_M}{\Delta t} = 10 \text{ мл/мин} = 0,17 \text{ мл/с}$ (здесь

$\Delta V_M = 40 \text{ мл}$ – изменение объема масла за последние $\Delta t = 4 \text{ мин}$ измерений).

3b. $\rho_M = 0,77 \text{ г/см}^3$ (силу тяжести игрушки в начальный момент компенсирует выталкивающая сила со стороны воды, а в конечный момент – со стороны воды и масла).

4. 4a. Нарисуйте окружность радиусом 150 км с центром в центре пункта A и еще одну окружность радиусом 100 км с центром в местонахождении вертолета в 12:00. Пересечения этих окружностей – это два возможных положения вертолета в 12:30. Над ближайшим к одной из этих точек пунктом вертолет окажется через минимальное время и будет лететь над ним с 12:39 до 12:45.

4b. Нарисуйте 4 окружности радиусами 150 км, 225 км, 250 км и 300 км с центрами в центре пункта A и окружности радиусом 100 км, где мог бы оказаться вертолет через 30 мин. Возможны 4 траектории вертолета, одна из которых попадает в искомый населенный пункт.

9 класс

1. 1a. Приемник принимает частоту $f = \frac{f_0}{v \mp \frac{v}{c}}$,

где знак минус соответствует приближению источника ультразвука, а знак плюс – удалению.

1b. В этом случае $f = \frac{f_0}{1 \mp \frac{v \cos \theta}{c}}$, причем при t ,

близких к нулю и при достаточно больших значениях, $\cos \theta \approx 1$. Тогда $1 + \frac{v \cos \theta}{c} \approx 1,006$, откуда

$v \approx 0,006c = 9 \text{ м/с}$. Для определения глубины рассмотрим близкие к $\pi/2$ значения угла θ , тогда $\cos \theta \approx \frac{v\tau}{h}$, где h – глубина, τ – небольшой промежуток времени, отсчитываемый с момента, когда источник оказывается над приемником. Из соотношения

$\frac{\Delta n}{\tau} = -\frac{v^2}{hc}$, определив из данного в условии графика коэффициент наклона касательной к графику в момент времени 250 с, находим

$$h = \frac{v^2 \tau}{c \Delta n} \approx 410 \text{ м.}$$

2. $t = t_0 - \frac{\Delta V}{\alpha V_B} = 4,2 \text{ }^\circ\text{C}$ (здесь $V_B = 200 \text{ мл}$ – объем воздуха в бутылке в состоянии равновесия).

3. $R_{AB} = \frac{19}{33} R$ (запишите для узлов цепи закон сохранения заряда).

4. 4a. Графики зависимостей скоростей брусков от времени представлены на рисунке 10: для

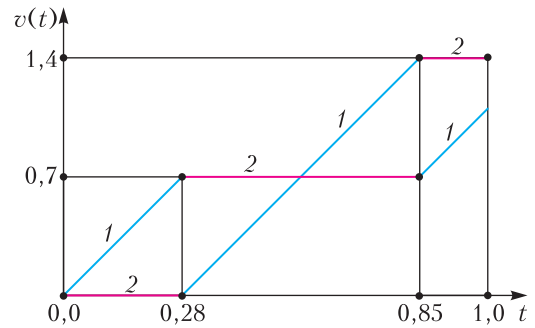


Рис. 10

$v_1(t)$ синим цветом, для $v_2(t)$ красным;

$$t_1 = \sqrt{\frac{8L}{g}} \approx 0,28 \text{ с}, t_k = \sqrt{\frac{8L}{g}} (2k - 1).$$

4b. $s_n = L(2n^2 - 2n + 1)$ (расстояния между столкновениями образуют арифметическую прогрессию).

5. 5a. Арки парабол на рисунке к условию с высокой точностью симметричны относительно вертикальных линий, проходящих через вершины.

$$\mathbf{5b.} \frac{v_1}{v_3} = \frac{l_1 t_3}{l_3 t_1} = \frac{5,8l}{3,4l} \frac{14\tau}{24\tau} \approx 0,995.$$

5c. Дальность полета и высота равны $L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ и $H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$, откуда $\text{tg } \alpha = \frac{4H}{L}$. Согласно дан-

ному графику, после первого соударения $\text{tg } \alpha_1 = \frac{4H_1}{L_1} \approx 6,23$ и $\alpha_1 \approx 81^\circ$.

5d. Непосредственно перед вторым столкновением $E_{к1}$ пропорциональна $\frac{v_1^2}{\cos^2 \alpha_1} = v_1^2 (1 + \text{tg}^2 \alpha_1)$,

а сразу после второго столкновения $E_{к2}$ пропорциональна $v_2^2 (1 + \text{tg}^2 \alpha_2)$. В соответствии с рисунком в условии, $L_2 = 4,6l$ и $H_2 = 5,5l$, тогда

$$\text{tg } \alpha_2 = \frac{4H_2}{L_2} \approx 4,78. \text{ А } \text{tg } \alpha_1 = \frac{4H_1}{L_1} \approx 6,23. \text{ Следова-$$

$$\text{тельно, } \frac{E_{к2}}{E_{к1}} = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \frac{1 + \text{tg}^2 \alpha_2}{1 + \text{tg}^2 \alpha_1} \approx 0,75.$$

10 класс

1. Решение этой задачи будет опубликовано позже.
2. Найдем сначала результирующую силу, действующую на канат. Разобьем канат на N ($N \gg 1$)

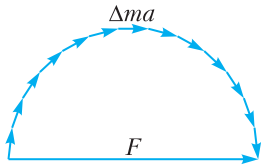


Рис. 11

маленьких элементов массой Δm . На каждый элемент действует тангенциальная результирующая сила Δma , поскольку нормальное ускорение любого элемента равно нулю. Векторная сумма всех таких сил равна результирующей силе \vec{F} , действующей на канат (рис. 11; рисунок повернут на 90° для удобства). Из рисунка следует

$$\text{соотношение } \frac{F}{N\Delta ma} = \frac{2R}{\pi R}, \text{ откуда } F = \frac{2}{\pi} ma.$$

Результирующая сила равна сумме силы, действующей на конец A каната, равной ma и направленной по касательной к канату, и силы реакции трубки. Следовательно, абсолютная величина силы реакции трубки равна

$$R = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi} ma\right)^2 + (ma)^2} = ma \sqrt{\frac{4 + \pi^2}{\pi^2}}.$$

Направлена эта сила под углом $\alpha = \text{arctg} \frac{\pi}{2}$ к линии, соединяющей концы каната.

(Продолжение следует)

Китайские числа

Видим, что последние два знака первых двух чисел повторяют друг друга в обратном порядке. Если предположить, что один из знаков – 9, то второй не может значить ни 6, ни 0; единственная возможная гипотеза в том, что он обозначает разряд десятков, а предшествующий иероглиф в первом числе значит 6. Тем самым можно предполагать, что имеются специальные знаки для разрядов (начиная с десятков), если они ненулевые; нулевые же разряды никак не обозначаются. Китайская запись числа похожа в этом отношении на словесное обозначение числа в русском языке; например, число $379 = \text{триста семьдесят девять}$, т.е. упоминаются: *три, сто, семь, десять, девять*, включая названия разрядов, начиная с десятков; младший разряд не упоминается: *девять*, а не *девять единиц*.

Аналогия (хотя и не совсем полная) со словесным обозначением числа наблюдается и в том, что запись строится двухступенчато. В русском языке слово *тысяча* указывает на разряд 10^3 , *миллиард* – на разряд 10^9 и т.д. Промежуточные разряды не имеют отдельного обозначения; например, 10^4 передается как *десять тысяч*, 10^8 – как *сто миллионов* и т.д. В китайской записи в качестве опорных используются разряды 10^4 , 10^8 и др., а соче-

тания со знаками *+* (10), *百* (100) и *千* (1000) используются для указания значения промежуточных разрядов. Итак:

$$41\ 478\ 599\ 005\ 616 = \\ = \text{四十一兆四千七百八十五亿九千九百万五千六百十六.}$$

Краткое пояснение:

$\llcorner 10^{\llcorner}$	$\llcorner 10^{12} \llcorner$	$\llcorner 1000 \llcorner$	$\llcorner 100 \llcorner$	$\llcorner 10 \llcorner$	$\llcorner 10^8 \llcorner$
四	十	四	千	七	百
4	1	4	7	8	5
10^{13}	10^{12}	10^{11}	10^{10}	10^9	10^8
$\llcorner 1000 \llcorner$	$\llcorner 100 \llcorner$	$\llcorner 10 \llcorner$	$\llcorner 1000 \llcorner$	$\llcorner 100 \llcorner$	$\llcorner 10 \llcorner$
九	千	九	百	万	五
9	9	5	6	1	6
10^7	10^6	10^3	10^2	10^1	10^0

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ
РЕДАКТОР
М.Н.Грицук

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во ПИ №ФС77-54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»

Тел.: +7 916 168-64-74
E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

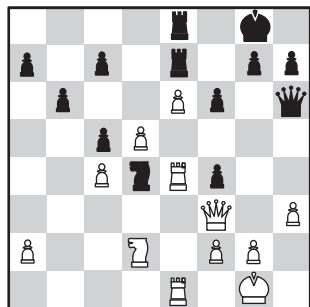
Отпечатано
в соответствии с предоставленными
материалами
в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8
Тел.: (831) 218-40-40

Новый ЧЕМПИОН

В апреле 2023 года в Астане состоялся матч за звание чемпиона мира, победителем которого стал Дин Лижэнь. Поединок выдался очень зрелищным. Мы разберем здесь ряд результативных партий из первой половины матча.

Дин Лижэнь – Я.Непомнящий Астана, 2023, 4 партия

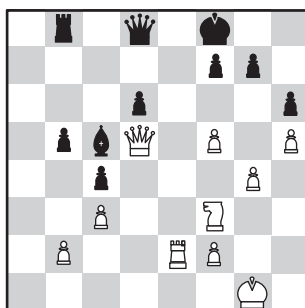
1. c4 ♟f6 2. ♘c3 e5 3. ♟f3 ♘c6 4. e3 ♘b4 5. ♖c2 ♘c3 6. bc d6 7. e4 0-0 8. ♙e2 ♗h5 9. d4 ♟f4 10. ♙f4 ef 11. 0-0 ♗f6 12. ♜fe1 ♞e8 13. ♙d3 ♙g4 14. ♙d2 ♗a5 15. c5 dc 16. e5 ♗h6 17. d5 ♗ad8 18. c4 b6 19. h3 ♙h5 20. ♙e4 ♞e7 21. ♖c3 ♗de8 22. ♟f3 ♙b7 23. ♞e2 f6 24. e6 ♗d6 25. ♞ae1 ♟f5 26. ♙h5 ♗h5 27. ♞e4 ♗h6 28. ♗f3 ♗d4?? Возможно, переломный момент всего матча. Грубый стратегический зевок соперника позволил Дину сравнять счет и «вернуться» в игру после поражения белыми во второй партии.



29. ♙d4! В закрытой позиции подобного типа конь сильнее ладьи. 29...cd 30. ♘b3 g5 31. ♙d4 ♗g6 32. g4! fg 33. fg h5 34. ♙f5 ♗h7 35. ♞e4 ♗h8 36. e7 ♗f7 37. d6 cd 38. ♙d6 ♗g8 39. ♙e8 ♗e8 40. ♗e6 ♗g7 41. ♜f1 ♗h6 42. ♙d1 f5 43. ♖e5+ ♟f7 44. ♗f5+ ♗f6 45. ♗h7+ ♞e6 46. ♗g7 ♗g6 47. ♗f8, черные сдались.

Я.Непомнящий – Дин Лижэнь Астана, 2023, 5 партия

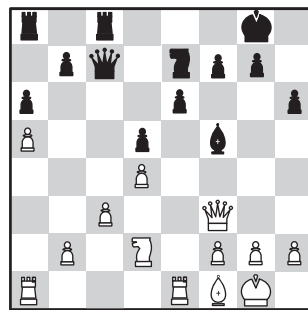
1. e4 e5 2. ♟f3 ♘c6 3. ♘b5 a6 4. ♙a4 ♟f6 5. 0-0 ♙e7 6. d3 b5 7. ♘b3 d6 8. c3 0-0 9. h3 ♘b7 10. a4 ♗a5 11. ♙a2 c5 12. ♙g5 h6 13. ♙f6 ♙f6 14. ab ab 15. ♙bd2 ♘c6 16. ♙d5 ♞a1 17. ♗a1 ♗d7 18. ♞e1 ♞a8 19. ♗d1 ♙d8 20. ♟f1 ♞e7 21. ♘b7 ♙b7 22. ♙e3 ♙b6 23. h4 (с идеей h5 и ♟f3-h4) ♗c6 24. h5 c4 25. d4 ed 26. ♙d4 ♗c5 27. ♗g4. Сильнее 27. ♗f3! с двойной угрозой 28. ♙d5 и 28. e5, захватывая линию e. 27... ♗e5 28. ♟f3 ♗e6 29. ♟f5 ♟f5 (надежнее 29... ♗f6) 30. ef ♗f6?! Черные просчитались, разменяв коней и позволив белому ферзю занять активную позицию на e4. 31. ♗e4 ♗b8 32. ♞e2 ♘c5 33. g4 ♗d8 34. ♙d5 ♗f8.



35. ♟f1! Тонкий профилактический ход, смысл которого раскрывается в последующих вариантах. 35...♘c8 36. ♞e4! ♗b8 (36...♗g8? 37. g5! hg 38. ♗g4 ♗d7 39. ♙g5, и при короле на g1 здесь было бы возможно 39...♗c6 с разменом ферзей) 37. g5 hg 38. ♗g4 ♞a8 (красивый выигрыш получался при 38...f6 39. ♙h4!! gh 40. h6!) 39. ♙g5 ♞a1+ 40. ♙e2 ♗e7+ 41. ♙e4 ♗e8 42. ♟f3 ♗a8 43. ♗a8+ ♞a8 44. f6. Де-факто у белых лишняя фигура, так как черный слон полностью выключен из игры и не способен помешать движению белых пешек. 44...g6 45. hg fg 46. ♗g6 ♞a2 47. ♟g4 ♗b2 48. ♗h6, черные сдались.

Дин Лижэнь – Я.Непомнящий Астана, 2023, 6 партия

1. d4 ♟f6 2. ♟f3 d5 3. ♙f4 c5 4. e3 ♘c6 5. ♙bd2 cd 6. ed ♙f5 7. c3 e6 8. ♘b5 ♙d6 9. ♙d6 ♗d6 10. 0-0 0-0 11. ♞e1 h6 12. ♙e5 ♘e7 13. a4 a6 14. ♙f1 ♙d7 15. ♙d7 ♗d7 16. a5 ♗c7 17. ♗f3 ♗fc8.



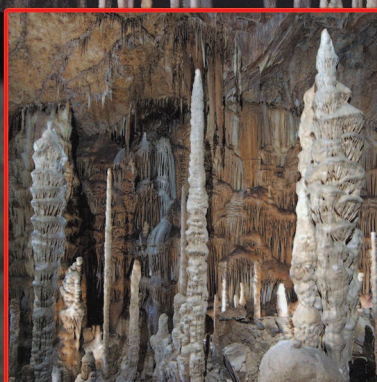
18. ♞a3!? Тонкий ход – ладья в будущем пригодится на 3 горизонтали. 18...♙g6 19. ♘b3 ♘c6 20. ♗g3! ♗e7 21. h4 ♞e8 22. ♙c5 e5 23. ♗b3! (раскрывая суть 18 хода – белые захватывают линию) ♗a5 24. ♞e5 ♗f6 25. ♞a3 ♘c4 26. ♙c4 dc 27. h5?! ♙c2?! Оба игрока упустили из вида комбинацию – 27...♞e5!! 28. de ♗d8! 29. hg ♗d1+ с вечным шахом. 28. ♘b7 ♗b6 29. ♙d6 ♞e5 30. ♗e5 ♗b2 31. ♞a5 ♗h7 32. ♞c5? (у белых был более четкий путь к победе: 32. ♗e1! ♙d3 33. ♙c4! ♙c4 34. ♗e4 f5 35. ♗f5) 32...♗c1+. Черные упускают последний шанс – 32...♗c3! 33. ♞c7 ♗d2! 34. ♙f7 ♗c1+ 35. ♟h2 ♗g5, с вероятной ничьей благодаря отдаленной проходной на линии a. 33. ♟h2 f6 34. ♗g3 a5 35. ♙c4 a4 36. ♙c3 ♙b1 37. ♞c7 ♗g8 38. ♙d5 ♗h8 39. ♞a7 a3 40. ♙e7 ♗f8 41. d5 a2 42. ♗c7 ♗h7 43. ♙g6 ♗g8 44. ♗f7, черные сдались.

А.Русанов

Индекс 90964

Уроки с физикой

Можно ли увидеть, как растут ледяные сталагмиты?



ЛЕДЯНЫЕ СТАЛАГМИТЫ

ISSN 0130-2221 23005



(ПОДРОБНЕЕ – НА С. 42 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)