ISSN 0130-2221
2022 · №11-12
ноябрь-декабрь

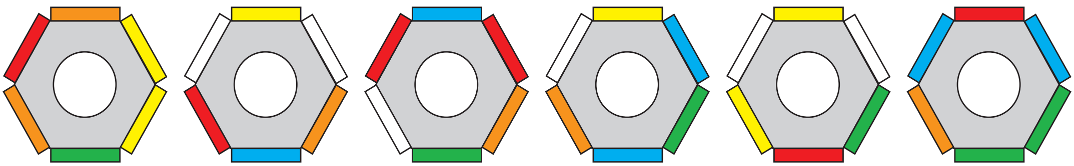
# КВАНТ

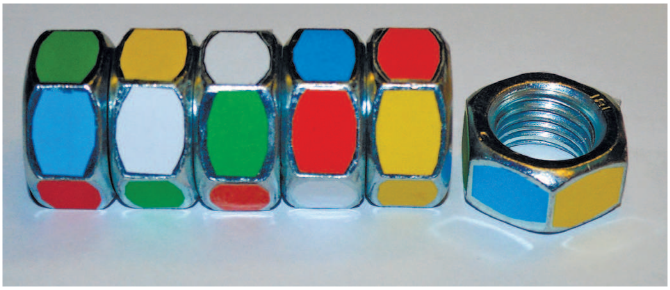
НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

# Разноцветные гайки

На первом рисунке показана головоломка, состоящая из шести одинаковых шестиугольных призм. На их боковых гранях – разноцветные наклейки. Цель головоломки – сложить из шести малых призм одну большую призму так, чтобы на каждой ее боковой грани присутствовали все шесть цветов.

Чтобы поиграть с этой головоломкой, необязательно искать ее по интернет-магазинам. Головоломку легко сделать из подручных материалов: вам потребуются шесть одинаковых гаек и разноцветная изолента или цветная бумага. Схема раскраски граней гаек показана на втором рисунке (будьте внимательны – не перепутайте красные и оранжевые грани).





В результате у вас получится своя «гаечная» версия головоломки, похожая на предлагемый вариант, изображенный на третьем рисунке. Можно приступать к решению!

*Н.Авилов*

# КВАНТ

НОЯБРЬ-ДЕКАБРЬ 2022 №11-12

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

## В номере:

# Нобелевская премия 2022 года

*Л.БЕЛОПУХОВ*

НОБЕЛЕВСКАЯ ПРЕМИЯ ПО ФИЗИКЕ этого года присуждена «за эксперименты со спутанными фотонами, которые продемонстрировали нарушение неравенств Белла и дали начало квантовой информатике».

Вспомним слова из завещания Нобеля: «… назначение его <фонда> – ежегодное награждение денежными премиями тех лиц, которые в течение предыдущего года сумели принести наибольшую пользу человечеству». С самого начала присуждения премий не соблюдалось условие «в течение предыдущего года». И уже первая Нобелевская премия по физике была присуждена в 1901 году К.Рентгену за открытие, которое было сделано за 4 года до этого. Но польза применения рентгеновского излучения несомненна, она была доказана американскими врачами через месяц после публикации об открытии. А вторая премия по физике была присуждена Х.Лоренцу и Т.Зееману «за исследование влияния магнетизма на процессы излучения», или, как это сейчас формулируется, за «открытие и объяснение тонкой структуры спектров». В этом случае «польза человечеству» не очень проглядывается.

Стало ясно, что если в открытиях по медицине, по химии, по экономике, как и в премиях мира, можно четко представить «пользу человечеству» от достижений лауреатов, то по отношению к физике это сделать нелегко (так же, кстати, как и для премий по литературе). По одной из версий считается, что Нобель потому и не включил в перечень номинаций математику, что в математических достижениях только посвященные могут усмотреть конкретную полезность для людей, а не только для самой математики.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20221101

Из 22 премий по физике, присужденных в этом веке, пожалуй, только в двух случаях конкретная польза легко просматривается. Это – премия 2014 года за энергосберегающие светодиоды и премии 2009 года за полупроводниковые схемы для формирования изображений и за новые материалы для волоконной оптической связи. С натяжкой можно распространить термин «польза» на те достижения, которые расширяют кругозор людей и удовлетворяют любопытство по отношению к природе. Таковы премии за доказательство ускоренного расширения Вселенной (2011), за открытие гравитационных волн (2017), за экзопланеты (2019), за черные дыры (2020).Остальные премии присуждены за теоретические и экспериментальные достижения по отдельным проблемам современной физики и поэтому вызывают интерес прежде всего только у самих физиков.

На этом фоне последняя нобелевская премия представляет собой особое явление. С одной стороны, суть проблемы, в решение которой внесли свой вклад лауреаты, понятна лишь небольшому числу физиков-теоретиков, занимающихся обоснованием квантовой механики. Даже на физических факультетах университетов эта проблема затрагивается только в некоторых магистерских программах. Большинство же физиков, если и слышали о ней, то глубоко в нее не вникали. А с другой стороны, в последние годы в научно-популярной прессе стали часто появляться термины «запутанные фотоны», «квантовая телепортация», «квантовые компьютеры». К этим терминам стали привыкать, не очень понимая, что это такое.

Буквально с первых же дней после присуждения премии в интернете стали появляться статьи, в которых делались попыт-

*Лауреаты Нобелевской премии по физике 2022 года (слева направо): Ален Аспе, Джон Клаузер и Антон Цайлингер*

ки объяснить, за что же она дана. И наряду с серьезными материалами появились и не очень вразумительные, но зато носящие кричащие или игривые заголовки. Вот только некоторые из них: «Эйнштейн был не прав», «Бог играет в эти игры», «Что доказали ученые и почему это касается именно тебя», «Бог существует – научное доказательство», «В миллиарды раз быстрее света», «Страсть на расстоянии», «Квантовая запутанность и квантовая телепортация – хайп», «Когда носок становится правым». Серьезные же материалы стали появляться задолго до премии, с 2007 года.

Так кто же стали лауреатами?

Американский физик **Джон Фрэнсис Клаузер** (John F. Clauser) родился в 1942 году в Пасадене. Он закончил Калифорнийский технологический институт, в котором на курсе обучается всего лишь 200 студентов, а профессоров, которые их учат, – не меньше. С этим вузом связан 31 нобелевский лауреат (теперь – 32). В 29 лет Клаузер стал доктором наук, защитив диссертацию в Колумбийском университете. После этого он работал и продолжает работать в нескольких престижных научных лабораториях США.

Французский физик **Ален Аспе** (Alain Aspect) родился в 1947 году в маленьком городке Ажен. Учился он в одном из парижских университетов, в другом защитил докторскую диссертацию и работал в парижских научных учреждениях. Основные его исследования были связаны с квантовой оптикой – применением лазеров в различных физических экспериментах.

Австрийский физик **Антон Цайлингер** (Anton Zeilinger) родился в 1945 году в небольшом австрийском городе Рид. Он закончил Венский университет, стал там же в 1971 году доктором наук, всю жизнь проработал в этом университете и сейчас является его почетным профессором. Занимался он вначале нейтронной интерферометрией, а потом уже квантовой оптикой.

Из этих кратких биографических данных видно, что лауреаты – почти ровесники солидного возраста (75, 77 и 80 лет). Свои эксперименты со спутанными фотонами они начали несколько десятков лет назад (Клаузер – в 1972, Аспе – в 1981, Цайлингер – в 1997 году). В 2010 году все трое были отмечены премией Вольфа. Эта премия по физике считается по престижности второй после нобелевской. В 2004 году она была присуждена российскому физику Виталию Гинзбургу, в 2007 году – знаменитому английскому физику Стивену Хокингу. Значение премии Вольфа особенно велико по тем номинациям, которых нет в нобелевской премии, – по математике, сельскому хозяйству, по искусству и культуре.

Вот формулировка обоснования премии Вольфа Аспе, Клаузеру и Цайлингеру –

«за фундаментальный концептуальный и экспериментальный вклад в основы квантовой физики, в частности за серию возрастающих по сложности проверок неравенства Белла (или расширенных версий этого неравенства) с использованием запутанных квантовых состояний». Это обоснование отличается от обоснования нобелевской награды отсутствием упоминания о квантовой информатике.

Но, пожалуй, главное в обосновании вольфовской премии – это слова «вклад в основы квантовой физики». И именно тогда, в 2010 году в научной прессе прозвучали слова о «Второй Квантовой Революции». Именно так, прописными буквами. Нобелевский комитет тоже нашел торжественные слова в более подробном обосновании премии: «Мы вступаем в новую эру благодаря современным инструментам для управления системами запутанных частиц, разрабатываем совершенно новые способы для хранения, передачи и обработки информации».

Для того чтобы хоть немного разобраться во второй квантовой революции, нужно вернуться к первой, к появлению сто лет назад квантовой механики. На страницах журнала «Квант» и в книгах «Библиотечки «Квант» печатались прекрасные научные обзоры (А.Б.Мигдал, М.И.Каганов, И.К.Кикоин, Я.Б.Зельдович). Последний по времени обзор – это 122-й выпуск «Библиотечки» (А.З.Долгинов. «Строение материи: от атомов до Вселенной»). В этой книге уже есть глава «Квантовая телепортация». А перед ней изложено содержание первой квантовой революции. Автор, известный российский физик-теоретик в области космологии и астрофизики, по-видимому счел это совершенно необходимым перед рассказом о квантовой телепортации и о новейших успехах в постижении Вселенной.

### Первая квантовая революция

Этой революции предшествовало рождение квантовых представлений об электромагнитном излучении (М.Планк, А.Эйнштейн, А.Комптон). Нильс Бор первым решился квантовать механические характеристики атомного электрона и получил хорошее согласие с опытом для спектра атома водорода. Но применение его метода квантования к многоэлектронным атомам и простейшим молекулам не давало согласия с опытными данными. Бор прекрасно понимал, что все дело в нелогичности его подхода. Квантование энергии и других характеристик атомного электрона недопустимо с точки зрения законов классической физики, основанной на математических выражениях, в которых все величины должны быть непрерывными. Именно таковы законы ньютоновской механики, термодинамики и электродинамики, которые Бор использовал в своих расчетах и которые были многократно проверены на опыте – на их основе работают станки, двигатели пароходов, поездов и автомобилей, электрическое освещение, телеграф, телефон и радио. Но одновременно с этим Бор «волевым порядком» ввел квантование характеристик состояния электрона вместо их непрерывности. Это было нелогично, но необходимо для выводов.

Бор интуитивно понимал, что классические законы создавались и применялись в так называемом макромире (соразмерном с размерами человека и возможностями его органов чувств). А для микромира, прежде всего для электронов с их ничтожной массой, нужны другие законы. Он понимал, конечно, что новая механика будет не похожа на классическую физику, но какой она должна быть с математической стороны, он не знал. И еще ему было ясно, что новые законы не должны отменить старые. Классические законы должны вытекать из новых законов для объектов достаточно большой массы.

Случилось так, что в середине 20-х годов прошлого столетия активно проявили себя несколько физиков-теоретиков, которые решительно подошли к проблеме описания поведения микрочастиц. Луи де Бройль ввел представление о волновых свойствах объектов, имеющих массу. Эрвин Шрёдингер ввел понятие о волновой функции объекта волна-частица и постулировал уравнение для нахождения этой функции. Вернер Гейзенберг и Макс Борн пошли еще дальше

– они ввели для микрообъектов принцип вероятностного детерминизма. В классической физике знание состояния объекта в данный момент времени определяет точное состояние объекта в последующие моменты. А в новой (квантовой) механике можно предсказать, рассчитать только вероятности состояния, например, исходя из решения уравнения Шрёдингера. А измеряемыми в опытах величинами могут быть лишь средние величины, находимые по правилам математической статистики, и флуктуации – отклонения от этих средних.

Гейзенберг сформулировал правило, когда нужно использовать квантовый подход к механике микромира. Этот принцип получил название «соотношение неопределенностей». В связи с этим впервые в физике возникла необходимость разобраться с философским вопросом, что такое реальность. В классической физике макромира символы реальности – масса, скорость, энергия, характеристики электрического и магнитного поля – всегда допускают экспериментальную проверку. Точность измерений при этом зависит только от совершенства прибора. Но в микромире привычные характеристики состояния, например координата и скорость, оказались принципиально не измеряемыми точно, даже самыми совершенными приборами, если эти измерения производить одновременно. Критерием перехода к такому принципу стала постоянная Планка, интуитивно введенная ранее Максом Планком, Эльбертом Эйнштейном и Нильсом Бором для решения конкретных задач (теории теплового излучения, корпускулярного поведения электромагнитного излучения, поведения атомного электрона). Оказалось, что постоянная Планка – это мировая константа, которую всегда необходимо учитывать при решении задач в микромире.

Бор пошел еще дальше. Анализируя принцип неопределенности, он пришел к убеждению, что сам факт измерения какой-либо величины так изменяет состояние микрообъекта, что его дальнейшее поведение становится отличным от того, какое было бы без этого измерения. Такой подход к микромиру получил в истории физики название «копенгагенский», поскольку именно в этом городе, где жил Бор, и проходили регулярные и очень частые встречи физиков-новаторов для обсуждения новых принципиальных вопросов.

Несмотря на теоретические сложности применение новой механики оказалось очень полезным. Были подтверждены и предсказаны все более точные измерения спектров химических элементов и соединений. При этом в квантовой теории родилось понятие спина электрона, подтвержденное уточнением квантовых подходов, сделанное Полем Дираком. Вольфганг Паули ввел принцип подхода к коллективу – «ансамблю» частиц, обладающих одинаковым характерным спином (1/2), и показал, как с помощью квантовой механики можно понять структуру периодической системы элементов, т.е. структуру электронных оболочек атомов. Это не требовало решения принципиальных вопросов о вероятностной причинности и физической реальности и стало первым крупным достижением квантовой механики.

Вскоре последовало квантовое объяснение химической связи в молекуле – родилась квантовая химия. И только на ее основе удалось понять строение «молекул жизни» ДНК и РНК. Появилась квантовая физика твердого тела, которая была использована для создания полупроводниковых материалов. Пожалуй, именно это применение квантовой механики сегодня является самым значимым для людей. Ведь без квантовой механики не были бы изобретены и созданы все те электронные приборы, которые нас окружают, – от карманных гаджетов, так сильно изменивших возможности и особенности общения и познания, до суперкомпьютеров. Были объяснены «таинственные» явления ферромагнетизма и сверхпроводимости. И, наконец, квантовая механика оказалась совершенно необходимой в ядерной физике.

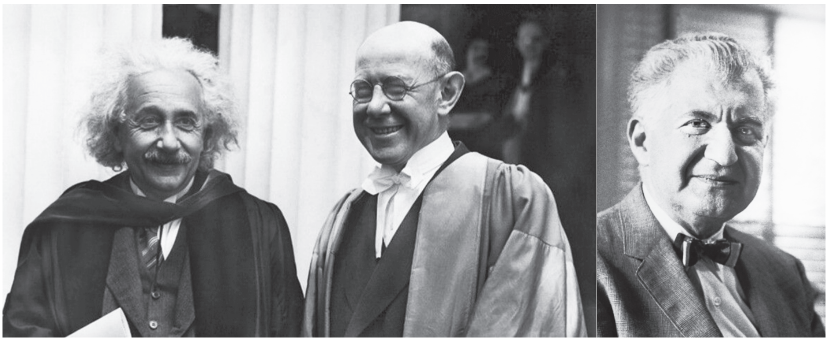
Сомневаться в истинности квантовой механики невозможно, она так же необходима человечеству, как когда-то стали необходимыми классическая механика (ньютоновская) и классическая электродинамика (максвелловская).

## Скрытые параметры в квантовой механике

Однако, несмотря на успехи квантовой механики не все физики были согласны с принципиальным отсутствием наглядности и возможности точных предсказаний в квантовой механике. В их числе были и де Бройль, и Шрёдингер, и Эйнштейн. В 1932 году математик Джон фон Нейман в фундаментальной монографии «Математические основы квантовой механики» привел теорему, интерпретацией которой стало отсутствие «скрытых параметров». Так были названы некие, пока неизвестные характеристики состояния квантовой частицы (системы), которые позволяли бы определить ее состояние однозначно, а не вероятностно. Эйнштейн назвал это принципом локальной реальности, и он верил в существование таких параметров. Тем более, что математики нашли в доказательствах фон Неймана некоторые неточности.

А главное, Эйнштейн не был согласен с «копенгагенской» интерпретацией квантовой механики, заключавшейся в обязательном влиянии процесса измерения на объект. На международных конгрессах физиков и в переписке он вступил в полемику с Бором, предлагая мысленные реальные эксперименты, в которых, по его мнению, можно было обнаружить скрытые параметры и обойти тем самым требования соотношений неопределенностей и вероятностную трактовку поведения микрообъектов. «Бог не играет в кости» – стало для Эйнштейна лозунгом в этой полемике. А в одном из диалогов Бор сказал Эйнштейну: «По-моему, вы навязываете Богу свои правила игры!» Однажды на вечерней прогулке после напряженного дня заседаний Эйнштейн заметил Бору: «Неужели вы считаете, что если смотреть на Луну в телескоп, то она изменит свое состояние?» Бор ответил: «Но ведь Луна не микрообъект». Полемика Эйнштейна с Бором длилась больше 20 лет. Бор каждый раз находил ошибку в мысленных экспериментах Эйнштейна. Но это противостояние не мешало Бору заниматься проблемами ядерной физики, а Эйнштейну – поисками единой теории поля. Может быть, именно его неверие в истинность квантовой механики не позволило ему достичь успеха в этой грандиозной задаче, которая не имеет пока своего решения.

В 1935 году появилась статья Эйнштейна, написанная совместно с ассистентом Принстонского университета Натаном Розеном и Борисом Подольским, за несколько лет до этого руководившим отделом теоретической физики Харьковского физико-технического института. Это тройное авторство впоследствии во всех ссылках обозначалось краткой аббревиатурой ЭПР. Статья называлась «Можно ли считать квантово-механическое описание физической реальности полным?» В мысленном эксперименте показывалось, что если состояние двух частей системы было взаимозависимым, например подчинялось закону сохранения импульса, то после пространственного разделения этих частей взаимозависимость должна оставаться однозначной и допускать локальную реальность любых одновременных измерений. А согласно соотношению неопределенностей, если измерять, например, скорость частицы как можно точнее, то ее положение в пространстве становится все более и более неопределенным. По мнению ЭПР, «никакое разумное определение реальности не должно, казалось бы, допускать этого». В



*Альберт Эйнштейн, Натан Розен, Борис Подольский* этом и заключалась ситуация, которая получила название «парадокс ЭПР».

В статьях 1948 и 1953 года Эйнштейн повторяет и усиливает этот вывод: «Во всяком случае, нужно, по моему мнению, остерегаться того, чтобы при отыскании единой основы для всей физики опираться на схему современной теории». Речь при этом шла о квантовой механике. Такого же мнения придерживался и создатель понятия пси-функции Шрёдингер. Ободренный статьей ЭПР, он в 1936 году ввел термины «квантовая запутанность», «спутанные» или «запутанные» частицы.

Полемикой Эйнштейна с Бором с участием Шрёдингера в то время мало кто из физиков интересовался. Подавляющее большинство ученых использовали квантовую механику, пусть и не до конца еще доказанную. Нобелевский лауреат Ричард Фейнман в 1960-е годы сказал: «Однако, я могу ответственно заявить, что никто не понимает квантовую механику. Если есть возможность, прекратите спрашивать себя, как же это возможно. Этот вопрос занесет вас в тупик, из которого еще никто не выбрался». А вот слова другого нобелевского лауреата Льва Ландау в 1962 году: «Величайшим достижением науки двадцатого века является тот факт, что физики научились работать с образами, которые принципиально невозможно наглядно себе представить».

Успешное применение пусть еще и не до конца понятной квантовой механики и получило название «квантовой революции».

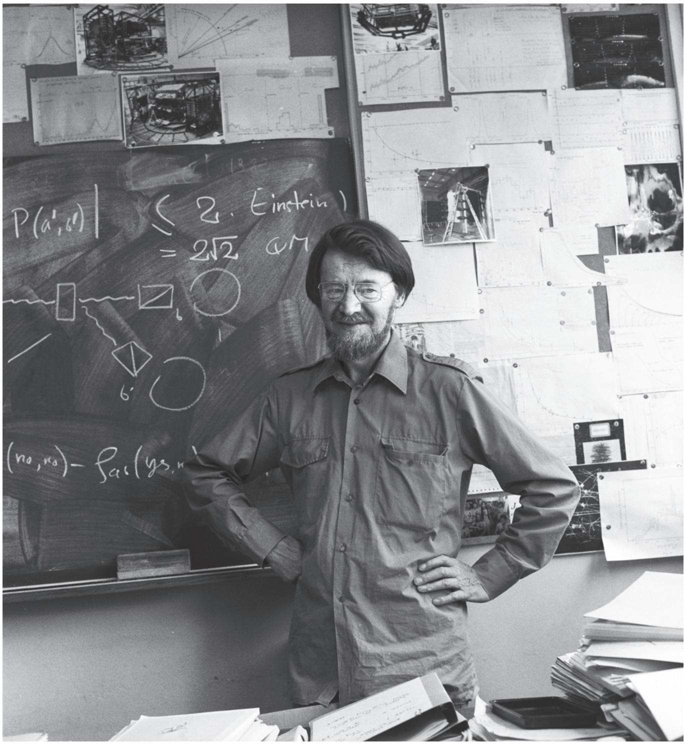
### Поиск экспериментальных путей проверки наличия или отсутствия скрытых параметров

Но все-таки были беспокойные физики, которые искали экспериментальные пути подтверждения или опровержения существования скрытых параметров. Одним из них был американский физик Дэвид Бом. В 50-е годы он предложил поставить эксперименты, в которых из частицы с нулевым спином рождались бы две частицы со спиновыми числами $+1/2$ и $-1/2$.

Напомним, что спином называется особое специфическое свойство микрочастицы быть как бы маленьким магнитиком, наподобие того, каким является вращающийся электрический заряд или виток с током. Первоначально это понятие связывали с собственным вращением электрона вокруг некоторой его оси. Отсюда и название явления (англ. spin – вращение, штопор, веретено ткацкой машины). В принципе спин – это вектор. В квантовой механике наглядного образа электрона не существует, но понятие спина, как одной из характеристик микрочастицы, совершенно необходимо (в том числе и для частиц, не имеющих электрического заряда). Из квантовой теории следует, что такая частица, как электрон, имеет характеристику вращательного движения (проекцию момента импульса), равную $\pm(1/2)\hbar$, ($\hbar$ – постоянная Планка). Обычно спином электрона называют просто число 1/2.

Контролировать направление вектора спина у частиц Бом предложил с помощью резко неоднородных магнитных полей, поворачивающих этот вектор и отклоняющих частицу. До измерений направление спина неизвестно. Оно может быть любым, лишь бы у двух частиц векторная сумма спинов была равна нулю (закон сохранения суммарного спина в квантовой механике так же незыблем, как и другие законы сохранения классической физики). После определения направления спина у одной из частиц могло оказаться, что у второй частицы из рожденной пары направление ее спина тоже локализовывалось, хотя взаимодействия частиц в этот момент уже не было. Бом понимал, что при постановке таких экспериментов всегда будут приборные неточности, которые определят «законный» разброс результатов определения угла поворота спина в магнитном поле и отклонения частицы. И он поставил перед экспериментаторами задачу – попытаться разобраться в том, существуют ли отклонения от средних значений, которые не зависят от приборных ошибок, другими словами, существует ли такое квантовое явление, как спутанность. Или же квантовая механика требует дальнейшего уточнения, выявления скрытых параметров, которые сделают ее более близкой к физической реальности в том смысле, как ее понимали Эйнштейн и другие критики.

Трудно удержаться от того, чтобы не охарактеризовать Бома как человека и ученого. Его самого называли сплошным парадоксом. Под влиянием своего учителя Роберта Оппенгеймера, тоже парадоксального человека, «отца» атомной бомбы, научного руководителя Манхэттенского проекта и в то же время коммуниста по убеждениям, Бом проникся коммунистическими идеями и стал активным членом американской компартии. Во время так называемого «маккартизма» он навсегда покинул родину и стал английским гражданином. Его коммунистические убеждения превратились в размышления о судьбе человечества, о единстве материи и сознания и другие абстрактные философские вопросы. В физике он получил известность работами о каких-то неизвестных полях, пронизывающих все пространство и насыщающих его невероятно большой энергией (его слова: «в каждом кубическом сантиметре пространства содержится больше энергии, чем энергия покоя всей Вселенной»).



*Джон Стюарт Белл*

Тем не менее, работы Бома по схемам экспериментов со спутанными частицами вызывали интерес некоторых ученых.

### Неравенства Белла

Одним из них был ирландский физик-теоретик Джон Стюарт Белл. В 16 лет он стал (для заработка) лаборантом физического факультета Университета Квинс в своем родном городе Белфасте (Северная Ирландия). Талантливому юноше разрешили бесплатно посещать лекции по физике и сдавать зачеты и экзамены. Дальнейшую учебу он смог оплатить и в 20 лет получил специальность «экспериментальная физика», а через год – вторую специальность «математическая физика». Работал он вначале в английском атомном центре в Харуэлле в группе по созданию мощных ускорителей заряженных частиц. Но ему там не нравился прикладной характер работ (создание ядерного оружия). Белл еще в университете увлекся проблемой глубинных теоретических основ квантовой механики, поэтому он с радостью принял предложение перейти на работу в Европейский центр ядерных исследований (ЦЕРН). Там он стал заниматься теорией элементарных частиц и одновременно участвовать в работах по созданию ускорителей, что давало гораздо больше возможностей заниматься тем, что ему нравилось. В 1964 году появилась статья Белла «О парадоксе Эйнштейна–Подольского–Розена». В этой статье речь шла о корреляции результатов измерений, производимых над квантовыми частицами.

Что такое корреляция? Это статистическая взаимосвязь двух или более случайных величин (либо величин, которые можно с некоторой допустимой точностью считать таковыми). В качестве веселого примера можно привести корреляцию между успеваемостью по физике и цветом глаз учащегося. В математике есть формулы для коэффициента корреляции, который находится через разности между средними значениями измеряемой величины и самими измеряемыми величинами, имеющими статистический разброс. Наиболее употребителен коэффициент корреляции для двух величин, который может изменяться в пределах от –1 до +1. В нашем смешном примере коэффициент корреляции скорее всего будет равен –1, т.е. свидетельствовать о полном отсутствии корреляции (взаимосвязи).

Белл в своей статье сформулировал доказательство положения, которое часто называют теоремой Белла (хотя сам он слово «теорема» в своей статье не употреблял). Суть этого положения состоит в следующем. Никакое описание микропроцессов, основанное на гипотезе скрытых параметров, не может объяснить все статистические результаты, полученные в рамках стандартной квантовой механики. Уже из формулировки самой теоремы понятно, что Белл был сторонником полноты квантовой механики и противником гипотезы о скрытых параметрах.

Но Белл был не только теоретиком. Он прекрасно разбирался в эксперименте – недаром он свою научную жизнь начал с работы лаборантом физической лаборатории и работал потом в самой крупной в мире физической лаборатории. Он предложил схему конкретного опыта, которая и легла в основу многочисленных экспериментов. Руководители научных групп, осуществивших наиболее важные эксперименты еще 50–30 лет назад, и стали нобелевскими лауреатами 2022 года. Увы, их главный вдохновитель, Джон Стюарт Белл, ушел из жизни в 1990 году, задолго до присуждения премий Нобеля и Вольфа. А посмертно эти премии не присуждаются.

Вот суть экспериментальной схемы Белла, похожей на ту, что за несколько лет до него предлагал Бом. Есть источник, рождающий электронные пары из некой частицы, имеющей нулевой импульс и нулевой спин. Каждый из членов пары, уже разошедшейся на некоторое расстояние, подвергается с помощью магнитных детекторов анализу на угол поворота его вектора спина, равного $+1/2$ или $-1/2$. После достаточного количества измерений этих углов подсчитывается корреляция между измерениями для одной и другой частицы. Белл ввел специальную величину функции корреляции, удобную для спиновых характеристик частиц. При статистическом разбросе измеряемых углов, который вызывается «обычными» причинами погрешностей измерений, функция Белла $F$ должна находиться в пределах от –2 до +2, т.е. удовлетворять неравенству $-2 \le F \le 2$. Это и есть первое неравенство Белла. Сама функция имеет довольно сложный математический вид, и мы ее в этой статье не приводим.

Если же результаты измерений таковы, что их статистический разброс много больше разброса, вызванного только несовершенством приборов и способа измерения, то значение функции Белла должно выходить за эти пределы. А что это за добавочный разброс результатов? Он может быть вызван самой природой явления, т.е. влиянием соотношения неопределенностей, отсутствием локальной реальности частиц (по Эйнштейну, отсутствием локальной физической реальности) и наличием явления спутанности. Иными словами, действующая квантовая механика является полной, она не требует введения какихлибо скрытых параметров.

## Экспериментальная проверка неравенств Белла

Благодаря теоретическим работам Бома и Белла на передний край в решении вопроса о полноте квантовой механики вышли экспериментаторы. Им было ясно, что осуществить схему опытов так, как это предложил Белл, магнитные детекторы не позволят. Для их более или менее точной работы в этом случае потребуются очень сильные магнитные поля, даже более сильные, чем те, которые используются в современных томографах (порядка нескольких тесла). Для создания таких полей необходимы сверхпроводящие обмотки электромагнитов, а значит, и охлаждение до температур жидкого гелия. (Кстати, именно это обстоятельство определяет высокую стоимость медицинской томографической диагностики.)

Через пять лет после статьи Белла была опубликована статья четырех физиков-экспериментаторов из трех американских университетов. По первым буквам фамилий эта статья именуется CHSH. Первым и по букве фамилии и по значению в этой статье был один из нынешней тройки лауреатов – Джон Клаузер. Статья называлась «Эксперименты, предлагаемые для проверки локальных теорий со скрытыми параметрами». В этой статье предлагалось вместо электронных пар работать с фотонами, направление спина которых называлось направлением поляризации фотонов (ориентацией плоскости, в которой в волновой модели кванта колеблется вектор электрической напряженности). В упрощенной волновой модели фотон вращается вокруг оси своего распространения, имея два возможных состояния – по или против часовой стрелки (так называемая круговая поляризация). В квантовой механике поляризация фотона означает наличие у фотона спина, который может иметь два значения: $+\hbar$ или $-\hbar$. Управлять направлением поляризации фотона или фиксировать это направление можно с помощью кристаллов-поляроидов. Это значительно проще и дешевле, чем управление спинами электронов с помощью магнитного поля. Трудности этих экспериментов заключаются в другом: в частности, трудно получать отдельные фотоны или пучки фотонов с одинаковой длиной волны и одинаковым направлением поляризации.

Первый успех был достигнут Д.Клаузером (совместно со своим аспирантом С.Фридманом). В этих экспериментах фотоны рождались в устройстве, содержащем пар возбужденных ионов кальция, и выпускались парами. На пути пар стояли поляроиды, вращением которых можно было управлять и фиксировать при этом направление поляризации фотонов. Эксперимент длился несколько суток, и за это время набиралось огромное количество статистических данных об углах поляризации фотонов. Автоматическая обработка этих данных позволяла вычислить функцию, которая для этого опыта выражалась вторым неравенством Белла $-1 \le F \le 0$. Значение корреляционной функции оказалось больше нуля. Это свидетельствовало о нарушении неравенства Белла, т.е. о ненужности поисков скрытых параметров и о справедливости стандартной квантовой механики.

Но нужно было продолжать эксперименты, чтобы надежнее определять корреляционную функцию. Следующий шаг был сделан А.Аспе с сотрудниками в 1982 году. В это время уже получила широкое развитие лазерная техника, и Аспе, будучи физиком-лазерщиком, для получения пар фотонов применил лазерные пучки. Это позволило значительно эффективнее и быстрее получать пары фотонов. Было надежно определено, что функция Белла больше нуля: $F = 0{,}101 \pm 0{,}020$. Причем значение этой функции, рассчитанное по стандартной квантовой механике, было 0,112, т.е. как раз посередине доверительного интервала. Из результатов этих опытов надежно вытекал тот факт, что фотоны каждой пары находились в спутанном состоянии. Уверенно подтвердилась еще раз полнота квантовой механики.

В опытах Аспе можно было с помощью вращения поляроидов менять ориентацию спинов фотонов каждые 10 наносекунд. Расстояние же между поляроидами, фиксирующими направление спинов в паре фотонов, составляло 12 метров. Свет проходит такое расстояние за 40 наносекунд, а изменение состояния фотонов происходило в 4 раза чаще. Следовательно, корреляция между одним и другим фотонами пары происходила не из-за передачи информации, а потому, что каждая пара фотонов, идущих в противоположных направлениях, изначально представляла собой нечто общее, запутанный двухфотонный объект, для которого расстояние между его частями просто не существует. И скорость света тут не при чем.

Однако окончательное торжество нарушения неравенства Белла в опытах со спутанными фотонами произошло в самые последние годы прошлого века. А.Цайлингер с сотрудниками в 1998 году опубликовали статью, где сообщили об опытах, в которых фиксирующие состояние пары фотонов измерительные приборы находились друг от друга на расстоянии 400 метров. И опять неравенства Белла были нарушены, два фотоны оставались спутанными и на таком расстоянии.

И пошло, поехало. Одно за другим публиковались сообщения о новых опытах. Использовались уже не пары, а триады фотонов. В 2005 году была создана спутанная система из шести атомов бериллия, а в 2006 году удалось «спутать» атом и фотон. Цайлингер или сам принимал участие во многих новых опытах, или обсуждал их постановку и результаты. Во всех этих опытах главной трудностью была защита спутанных пар от разрушения по причине случайного воздействия других частиц вещества и излучений. В большинстве опытов необходимо было охлаждать все элементы устройства до температур жидкого гелия (4К). Все эти опыты были не только сложными, но и дорогими.

Так или иначе, в нынешнем веке проблема скрытых параметров перестала тревожить квантовую науку. И нобелевская и вольфовская премии трем главным экспериментаторам, «защитникам квантовой механики», стали достойными оценками их деятельности.

### Квантовая телепортация

Еще в 1963 году появилась первая статья, в которой присутствовал термин «квантовая телепортация». Но этот же термин широко использовался и в фантастической литературе для почти мгновенных перемещений масс и энергий на любые расстояния и в любые времена, что невозможно ни в классической, ни в квантовой науке.

Так что же такое квантовая телепортация?

Квантовая телепортация – это передача квантового состояния на расстояние при помощи разделенной в пространстве спутанной квантовой пары (например, фотонов) $A$ и $B$. Кто-то в одной из первых научных статей на эту тему назвал один объект пары «Алиса», а другой объект – «Боб» (кажется, это был сам Цайлингер). Во многих научно-популярных статьях (и иллюстрациях к ним) используются эти имена. Последуем этому примеру.

Когда состояние Алисы возмущается каким-либо посторонним источником, например третьим фотоном (так называемое фотон-фотонное взаимодействие), состояние спутанности разрушается. Алиса переходит в новое состояние, но и Боб при этом тоже переходит в новое состояние, соответствующее состоянию Алисы. Иными словами, Боб в тот же момент получает информацию, которая была введена в систему в той точке, где находится в этот момент Алиса. Но все то же пресловутое соотношение неопределенностей (или, если угодно, вероятностное поведение микрочастиц) не дает возможности Бобу распознать информацию точно, а не вероятностно. Он должен получить от Алисы некий «пароль». Квантовые расчеты показали, что этот пароль для фотонов может быть минимальным – всего два бита информации. Но эти два бита не могут дойти от Алисы до Боба быстрее, чем свет. При этом получение этих битов от Алисы разрушает ее новое состояние. Поэтому для осуществления квантовой телепортации совершенно необходимым является и обычный, «классический» канал связи – голосовой телефон, смартфон и др. В определениях квантовой телепортации обязательно упоминается о наличии кроме спутанной пары обычного, классического канала связи. Заметьте, что никто, кроме

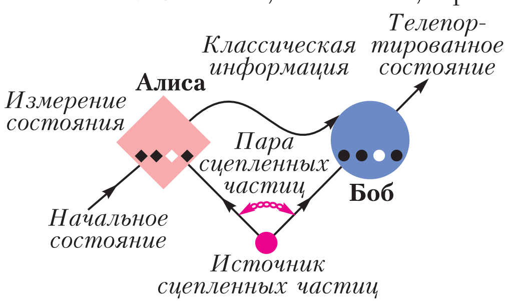



*Схема телепортации*

отправителя, не может узнать, какое изменение (информация) было передано, поскольку после передачи это состояние исчезло, оно оказалось не у Алисы, а у Боба.

Но зачем же все эти усложнения в передаче информации? Дело в том, что в сегодняшнем мире самое ценное – это не вклады в банках, не заводы и даже не чудодейственные лекарства. Самое ценное – это информация, финансовая, экономическая, политическая и, конечно, научная. И безопасность передачи информации (и ее хранения) выходит на передний край. Сегодня эту безопасность называют компьютерной безопасностью, но, возможно, через какое-то время появится термин «квантовая безопасность».

По-видимому, это стало одной из причин того, что с самого начала нынешнего века эксперименты с квантовой телепортацией стали производиться во многих странах и все больше усложнялись. Ведь эти эксперименты далеко не просты и достаточно дороги. В этой статье нет места для их детального описания – как с помощью лазеров получить спутанные пары фотонов, какие существуют способы получения других спутанных частиц, как использовать поляроиды или другие кристаллические структуры для управления квантовыми состояниями частиц и для анализа этих состояний и т.п. По-прежнему труднейшей проблемой было оградить частицы пары от всякого постороннего вмешательства.

Но трудности преодолевались. В 2003 году была осуществлена квантовая телепортация состояния атомов (суммарных спинов электронных оболочек), в 2006 году – телепортация между атомами и фотонами. В 2010 году расстояние телепортации между фотонами достигло 10 км, в 2012 году – 143 км, в 2017 году – 1200 км, телепортация с Земли на спутник (китайский). Начиная с 2012 года наряду с телепортацией через вакуум (воздух) стали производиться эксперименты с телепортацией через оптоволокно, в 2015 году – на расстояние 100 км.

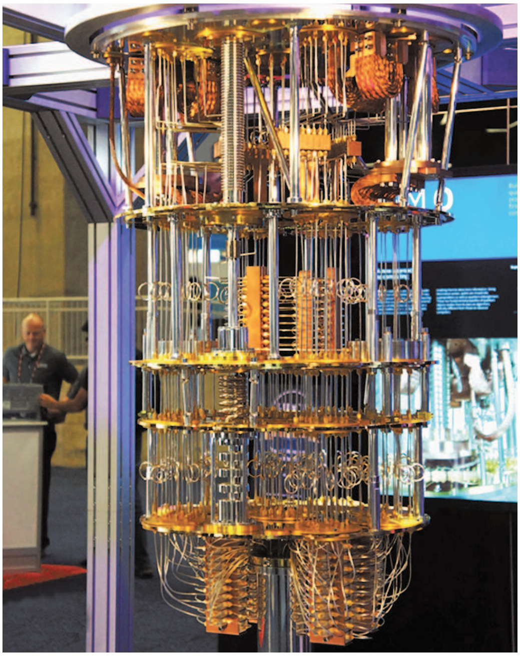
## Квантовые компьютеры

В тексте обоснования нынешней нобелевской премии нет упоминания о квантовой телепортации. Но зато там говорится о квантовой информатике. Это тоже новый научный термин, быстро переименованный в научно-популярных статьях и средствах массовой информации в «квантовые компьютеры».

Современная информатика основана на технологиях, которые часто называют транзисторными. Это означает, что главной ячейкой всех технических устройств является элемент, который может быть только в двух состояниях – ноль или единица. Один сигнал из двух возможных и есть один бит информации Битом называют и само устройство, независимо от его физической сущности. Любая информация подвергается оцифровыванию, превращению ее в длинный ряд чередующихся нулей и единиц, создаваемому по заданному (тоже в цифровом виде) алгоритму. Несмотря на огромное количество нулей и единиц, обрушивающихся на компьютерное устройство, оно справляется с обработкой этой информации благодаря огромному числу битов в этом устройстве.

На заре компьютерной эры размер ячейки в один бит (неоновая лампочка) был порядка нескольких миллиметров и простенькая вычислительная машина занимала целую комнату. Квантовая механика позволила создать искусственные полупроводниковые материалы, а информационной ячейкой (битом) стал контакт двух полупроводников (так называемый $p$–$n$ переход). Сегодня размер ячейки в один бит составляет всего несколько нанометров. «Флешка» с рабочим объемом устройства меньше одного кубического сантиметра может содержать больше двух триллионов информационных ячеек. Но еще немного и наступит предел миниатюризации ячеек. Он уже почти достигнут (надежность свойств $p$–$n$ перехода должны обеспечивать не меньше ста атомов вещества).

Около 40 лет назад возникла идея использовать в качестве компьютерной ячейки гораздо меньшие по размерам кванто-



*Квантовый компьютер*

вые объекты. Одним из авторов этой идеи был выдающийся физик Ричард Фейнман. На конференции по физике вычислений в Массачусетском технологическом институте в 1981 году он выступил с докладом об ограниченности возможностей обычных компьютеров и необходимости разработки новых принципов алгоритмирования и программирования для перехода к совершенно другим физическим устройствам передачи и обработки информации.

Квантовое свойство микрообъекта (например, ориентация спина) может иметь не два значения, как классический информационный объект (ноль или единица), а множество значений, ограниченных этими крайними величинами. Квантовая механика позволяет рассчитать их вероятности. Это означает, что одна информационная ячейка может содержать не один бит информации, а с достаточной вероятностью мега- и гигобайты. Ввод и вывод информации и ее обработка могут осуществляться через спутанные пары, т.е. без затраты времени, мгновенно. Такая ячейка информации получила название «квантовый бит», сокращенно «кубит» (от quantum bit).

Спутанные пары в кубитах достигаются различными способами, и везде используются процессы, требующие сложной и дорогостоящей аппаратуры. Но тем не менее, в начале нынешнего века во всех развитых странах начали активно развиваться работы и по созданию алгоритмов и программ для квантовых компьютеров, и по созданию кубитов и их комбинаций. Уже пять лет назад государственные затраты на работы по квантовой информатике достигли в Евросоюзе миллиарда долларов, в Англии – 400 миллионов, в США – 300 миллионов, в Китае – 220 миллионов. В чем причины этого?

Мощность и эффективность квантовых компьютеров несомненна. Так, в 2021 году в Национально-техническом университете Китая была продемонстрирована работа вычислительного квантового компьютера, состоящего из 113 кубитов. За несколько минут квантовый компьютер произвел вычисления, для выполнения которых на классическом компьютере потребовалось бы несколько миллиардов лет (!). Квантовые компьютеры для совершения одной какой-либо операции, например поиска, уже появились в продаже (США, Китай). Стоимость – миллионы долларов, размер – огромный холодильник.

Огромные объемы обрабатываемой информации становятся необходимыми в современной медицине (синтез белков), в задачах оптимизирования логистики, в современной метеорологии, в астрофизике (обработка данных тысяч радиотелескопов) и т.п. Но на первый план выступает невозможность постороннего доступа к информации, обрабатываемой и передаваемой квантовыми компьютерами, и возможность зашифровки информации так, что ее принципиально невозможно будет расшифровать (следствие вероятностного характера информации). Понятно, какое значение это приобретает в современном мире в экономической и политической сферах.

# Путешествия по графам

**_Д.ФОМИН_**

НА САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЙ ГОродской математической олимпиаде школьников 2022 года десятиклассникам была предложена следующая задача.

**Задача** (М2713). *Питерский бизнес-клуб «Эльдорадо» был основан много лет назад знаменитым миллионером Пафнутием Копейко, который вначале был его единственным членом. Потом клуб только расширялся, но по правилам каждый новый эльдорадовец должен быть личным другом ровно одного из старых членов клуба. Бизнесмена называют неудачником, если его состояние не превосходит среднего арифметического состояний всех его друзей в клубе, увеличенного на 1 биткойн. Сегодня оказалось, что в клубе $n+1$ членов, все они неудачники, а сам Пафнутий вообще полностью разорен. Докажите, что состояние любого члена клуба не превосходит $n^2$ биткойнов.*

В этой статье мы приведем решение задачи и ее обобщения. Кроме того, рассмотрим любопытные интерпретации и связи этой задачи.

## Решение задачи

Переформулируем данную задачу на языке теории графов. Граф $T$ членов клуба и их дружеских отношений является деревом с $n$ ребрами – условие о *единственном* друге нужно именно для того, чтобы $T$ был не произвольным конечным связным графом, а именно деревом. Каждая его вершина $v$ помечена неотрицательным числом $f(v)$ (иначе говоря, нам дана функция $f$, отображающая множество вершин дерева $T$ в множество неотрицательных вещественных чисел; речь, конечно, идет о состоянии, т.е. о богатстве каждого члена клуба). При этом для одной из вершин – назовем ее $K$ («корень» дерева, она же – олигарх Копейко) – это число равно нулю, а для любой другой вершины $v \in T$ выполняется неравенство

$$f(v) \le 1 + \frac{1}{d(v)} \sum_{u \in T_v} f(u), \qquad (1)$$

где $T_v$ обозначает множество вершин графа, непосредственно соединенных с вершиной $v$, а $d(v)$ – степень вершины $v$, т.е. количество ребер, выходящих из нее. Требуется доказать, что $f(v) \le n^2$. (Единица в данной переформулировке обозначает один биткойн.)

Начнем наше решение с того, что для любой вершины $A$, кроме $K$, мы назовем ее *хвостом* множество всех вершин и ребер дерева $T$, которые отделены от вершины $K$ вершиной $A$ (включая саму вершину $A$). Назовем *весом* этой вершины величину $w(A) = 2k+1$, где $k$ – это количество ребер в хвосте вершины $A$. Теперь пометим каждую вершину ее весом (рис. 1). Вес вершины $K$ по определению положим равным нулю.

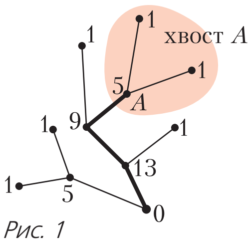
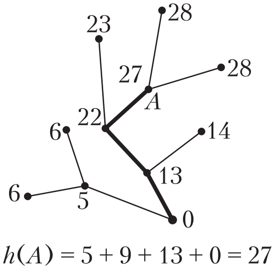



*Рис. 1*

Далее, для каждой вершины $A$ существует ровно один несамопересекающийся путь, который соединяет ее с корнем $K$. Сложим веса всех вершин на этом пути и обозначим это число через $h(A)$ (рис. 2).




$h(A) = 5 + 9 + 13 + 0 = 27$

*Рис. 2*

Эта новая функция удовлетворя-

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20221102

ет равенству

$$h(v) = 1 + \frac{1}{d(v)} \sum_{u \in T_v} h(u) \qquad (2)$$

для любой вершины $v$, кроме корня $K$. Чтобы доказать это, рассмотрим любую вершину $v$, не равную $K$, и ее соседей $u_0$, $u_1$, …, $u_d$ (рис. 3). Ровно одна из этих вершин, будем считать, что это вершина $u_0$, находится по ту же сторону от вершины $v$, что и корень $K$. Ясно, что вершина $u_0$ – это следующая вершина на том самом несамопересекающемся пути, который соединяет $v$ и $K$.

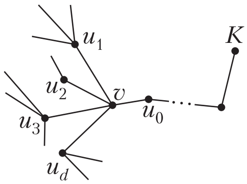


Рис. 3

Вычитая $h(v)$ из каждого значения функции $h$ в равенстве (2), мы получим, что нам надо доказать равенство

$$0 = 1 + \frac{1}{d(v)}\left(\left[\sum_{i=1}^{d} w(u_i)\right] - w(v)\right),$$

или, что то же самое,

$$w(v) - d(v) = \sum_{i=1}^{d} w(u_i).$$

И в самом деле, оба выражения – и слева и справа – равны удвоенному числу ребер в хвостах вершин $u_1, \ldots, u_d$ плюс $d = d(v) - 1$.

Теперь рассмотрим числа $\Delta(v) = f(v) - h(v)$. Вычитая равенство (2) из неравенства (1), мы получаем, что функция $\Delta$ удовлетворяет неравенствам

$$\Delta(v) \le \frac{1}{d(v)} \sum_{u \in T_v} \Delta(u) \qquad (3)$$

для любой вершины $v$, кроме $K$.

Докажем, что все числа $\Delta(v)$ неположительны. И в самом деле, если наибольшее из этих чисел положительно, то оно не может находиться в вершине $K$, поскольку $\Delta(K) = f(v) - h(v) = 0 - 0 = 0$. Тогда все его «соседи» должны быть ему равны в силу неравенства (3) и максимальности этого числа среди всех значений функции $\Delta$. Далее, все их соседи точно также должны быть равны тому же самому числу и так далее – в силу связности дерева, мы в конце концов получим, что $\Delta(K)$ также должно иметь то же самое положительное значение. А это противоречит тому, что $\Delta(K) = 0$.

Стало быть, для любой вершины $v$ верно неравенство $f(v) \le h(v)$. Осталось доказать, что $h(v) \le n^2$. По определению, $h(v)$ есть сумма нескольких различных (!) нечетных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит $2n - 1$. Следовательно,

$$h(v) \le (2n-1) + (2n-3) + \ldots + 1 = n^2,$$

что нам и требовалось.

### Замечания

**1.** На самом деле последнее неравенство доказывает, что если вершина $v$ находится от корня на расстоянии $k$ (т.е. кратчайший путь, соединяющий ее с корнем, состоит из $k$ ребер), то мы имеем

$$f(v) \le n^2 - (n-k)^2.$$

Ну и, конечно, из этого опять следует, что максимум функции $f$ не превышает $n^2$.

**2.** То, что неравенство $f(v) \le n^2$ точное, можно продемонстрировать на примере так называемого дерева-пути. Это просто-напросто дерево с $n+1$ вершинами, занумерованными $1, \ldots, n+1$, и $n$ ребрами, которые соединяют вершины с индексами, отличающимися ровно на 1. Из приведенного в замечании 1 неравенства легко следует, что дерево, для которого может достигаться равенство, единственно.

## Обобщенная задача

Оказывается, утверждение задачи верно не только для дерева, но и для любого связного графа с $n$ ребрами – т.е. условие о единственном друге на самом деле не нужно – но решение задачи становится тогда заметно сложнее.

Решение обобщенной задачи начнем со следующей леммы.

**Лемма.** *Для любого конечного связного графа $G$ с $n$ ребрами и для любой его вершины $K$ (будем называть эту вершину полюсом графа $G$) существует ровно одна функция $h : G \to \mathbb{R}_+$ (т.е. расстановка неотрицательных вещественных чисел в вершинах $G$) такая, что* *а) $h(K)=0$ (другими словами, в вершине $K$ поставлен ноль),*

*б) для любой другой вершины верно равенство*

$$h(v)=1+\frac{1}{d(v)}\sum_{u\in G_v} h(u),$$

*где $G_v$ обозначает множество вершин графа $G$, соседних с вершиной $v$, а $d(v)$ – степень вершины $v$. При этом для любой вершины $v$ имеет место неравенство $h(v)\le n^2$.*

Из этой леммы немедленно следует нужный нам факт. В самом деле, если мы рассмотрим функцию $\delta=f-h$ на графе $G$, то для любой вершины $v\ne K$ она удовлетворяет неравенству

$$\delta(v)\le\frac{1}{d(v)}\sum_{u\in G_v}\delta(u).$$

Отсюда сразу следует, что максимум функции $\delta$ достигается в полюсе $K$, для которого, как нетрудно видеть, $\delta(K)=0$. Значит, $f(v)\le h(v)$ для каждой вершины $v\in G$ и, следовательно, $f(v)\le n^2$, что нам и требовалось.

**Доказательство леммы.** Предполагая существование хотя бы одной такой функции $h$, докажем ее *единственность*. Допустим, что есть две функции $h_1$ и $h_2$, которые удовлетворяют обоим условиям пунктов а) и б). Тогда их разность $\Delta=h_1-h_2$ является функцией, которая равна нулю в вершине $K$ и удовлетворяет равенству

$$\Delta(v)=\frac{1}{d(v)}\sum_{u\in G_v}\Delta(u)$$

для каждой вершины $v\ne K$. Из этого равенства очевидным образом следует, что и минимум, и максимум функции $\Delta$ достигаются в $K$, а следовательно, $\Delta\equiv 0$, т.е. $h_1\equiv h_2$.

Итак, нам остается доказать *существование* функции $h$. Сделаем это индукцией по $n$. База индукции: $n=1$, т.е. граф с одним ребром, которое соединяет полюс $K$ и вторую вершину $V$. Расстановка чисел очевидна: $h(K)=0$, $h(V)=1$.

Докажем теперь индукционный переход от $n$ к $n+1$. Рассмотрим произвольный граф $G$ с $n+1$ ребром и полюсом $K$. Имеется два существенно различных случая: $d(K)=1$ и $d(K)\ge 2$.

В первом случае в графе $G$ имеется одно-единственное ребро $KA$, выходящее из полюса $K$. Получаем, что $G=G^*\cup\{K\}$, где граф $G^*$ имеет $n$ ребер, а в качестве его полюса можно рассмотреть вершину $A$ (рис. 4). По индукционному предположению, в вершинах графа $G^*$ можно расставить неотрицательные числа $h(v)$ с выполнением условий а) и б).

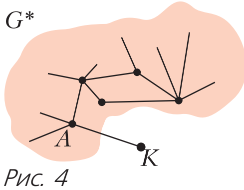


Рис. 4

Равенство (2) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{u\in G_v}\left(h(v)-h(u)\right)=d(v), \qquad (4)$$

где $d(v)$ обозначает степень вершины по отношению к графу $G^*$. Если мы для каждой вершины $v$ графа $G^*$ напишем в начале каждого выходящего из нее ребра $(vu)$ разность $h(v)-h(u)$, то равенство (4) равносильно тому, что для любой вершины, кроме $A$, сумма этих разностей, написанных рядом с ней, равна степени этой вершины. С другой стороны, в концах каждого ребра написаны противоположные числа, а значит, сумма всех этих чисел равна нулю. Получаем, что

$$0=\sum_{v\in G^*,v\ne A} d(v)+\sum_{v\in G_A^*}\left(h(A)-h(u)\right)=$$
$$=\sum_{v\in G^*} d(v)-d(A)-\sum_{u\in G_A^*} h(v)=$$
$$=2n-d(A)-\sum_{u\in G_A^*} h(u)$$

и, следовательно,

$$\sum_{u\in G_A^*} h(u)=2n-d,$$

где $d$ обозначает $d(A)$.

Теперь для всех вершин $v\in G^*$ определим функцию $H(v)=h(v)+p$ для некоторой константы $p$. Также определим значение функции в полюсе $K$ равным нулю, т.е. $H(K)=0$.

Тогда условие а) выполнено, и для всех вершин, кроме $A$, условие б) также выполняется. Осталось подобрать константу $p$ так, чтобы равенство в пункте б) было верно и для $A$. Оно должно быть таким, чтобы выполнялось равенство

$$p = 1 + \frac{1}{d+1} \sum_{u \in G_A} \left(h(u) + p\right)$$

(напоминаем, что $H(K) = 0$). Иными словами,

$$(d+1)(p-1) = dp + \sum_{u \in G_A^*} h(u).$$

Значит,

$$p = \sum_{u \in G_A^*} h(u) + d + 1 = 2n + 1.$$

Итак, функция $H(v) = h(v) + 2n + 1$ (доопределенная нулем в вершине $K$) и является требуемой функцией для графа $G$. Поскольку значения функции $h$ по индукционному предположению не превосходят $n^2$, то все значения функции $H$ не превосходят $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$, что нам и требовалось. Итак, для первого случая все доказано.

Во втором случае мы имеем более чем одно ребро, соединяющее полюс $K$ с остальными вершинами графа $G$. Рассмотрим произвольное такое ребро $KA$. Сначала допустим, что удаление этого ребра приводит к тому, что граф $G^* = G \setminus (KA)$ становится несвязным и распадается на две нетривиальные компоненты $G_1$ и $G_2$, при этом $K \in G_1$, $A \in G_2$ (рис. 5). Тогда для каждого из графов $G_1$ и $G_2 \cup (KA)$ можно воспользоваться индукционным предположением и найти соответствующие функции $h_1$ и $h_2$.

Поскольку обе эти функции принимают одно и то же значение (а именно ноль) в полюсе $K$, то эти функции можно «склеить» вместе в одну функцию $H$ по формуле

$$H(v) = \begin{cases} h_1(v), & v \in G_1, \\ h_2(v), & v \in G_2. \end{cases}$$

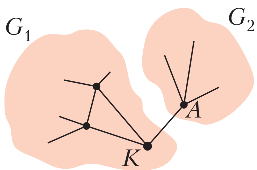


*Рис. 5*

Вполне очевидно, что данная функция удовлетворяет условиям а) и б), а все ее значения не превосходят $n^2$.

Осталось разобрать последний вариант, когда граф $G^*$ связен, а полюс $K$ при этом соединен более чем с одной вершиной (рис. 6). Начнем с того, что из этих вершин (соседей полюса) случайным образом выберем вершину $A$.

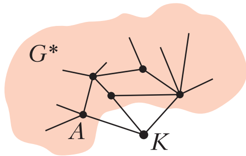


*Рис. 6*

Теперь рассмотрим два графа: $G_1$, который получается из графа $G$ удалением ребра $KA$ (рис. 7), и $G_2$, получающийся из $G$ «стягиванием» ребра $KA$ (рис. 8). Под

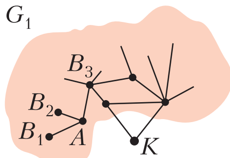


*Рис. 7*

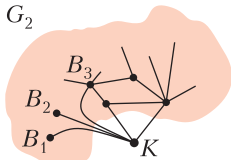


*Рис. 8*

стягиванием мы имеем в виду следующую операцию. Вершина $A$ удаляется (она как бы «поглощается» вершиной $K$), а все ребра вида $B_iA$, которые в нее ведут (за исключением ребра $KA$, которое просто исчезает), превращаются в ребра $B_iK$.

Надо учесть, что при такой операции граф $G$ может превратиться в *мультиграф* $G_2$, т.е. в такой граф, в котором есть кратные ребра (в мультиграфе две вершины могут быть соединены более чем одним ребром). В этом нет ничего страшного, так как наша лемма легко обобщается на случай мультиграфов и именно для них мы и будем доказывать данный случай индукционного перехода. Все остальные уже рассмотренные нами случаи также легко обобщаются для случая кратных ребер.

Оба графа $G_1$ и $G_2$ имеют на одно ребро меньше, чем $G$, а значит, к ним можно применить индукционное предположение. Следовательно, на графе $G_1$ и на графе $G_2$

(в обоих случаях роль полюса по-прежнему играет вершина $K$) существуют, соответственно, функции $h_1$ и $h_2$, удовлетворяющие условиям леммы.

Зададим величины $S_1$ и $S_2$ при помощи равенств

$$S_1 = \sum_{i=1}^{k} h_1(B_i), \quad S_2 = \sum_{i=1}^{k} h_2(B_i),$$

после чего определим число $\alpha$ следующим образом:

$$\alpha = \frac{k(k+1) + kS_2}{k(k+1) + kS_2 + S_1},$$

где $k$ – это степень вершины $A$ в графе $G_1$, т.е. количество вершин $B_i$, соседних с $A$ в графе $G$, за исключением полюса $K$.

Далее определим функцию $f : G \to \mathbb{R}$ по формуле

$$h(v) = \begin{cases} \alpha h_1(v) + (1-\alpha) h_2(v), & v \neq A, \\ \alpha h_1(v), & v = A. \end{cases}$$

Иначе говоря, если мы формально положим значение функции $h_2$ в вершине $A$ равным нулю, то просто-напросто

$$h(v) = \alpha h_1(v) + (1-\alpha) h_2(v).$$

Очевидно, что функция $h$ удовлетворяет равенству (2) во всех вершинах графа $G$, отличных от $A$ и $B_i$, вне зависимости от значения $\alpha$. Нетрудно также проверить и то, что это равенство верно и для всех вершин $B_i$. Остается только вершина $A$. Но мы специально так подобрали значение числа $\alpha$, чтобы равенство (2) для функции $h$ выполнялось и в вершине $A$.

Обратим внимание на то, что число $\alpha$ неотрицательно и меньше 1. Поскольку обе функции $h_1$ и $h_2$ по индукционному предположению неотрицательны и их значения не превосходят $n^2$ (на самом деле они даже не превосходят $(n-1)^2$, поскольку число ребер в обоих графах $G_i$ равно $n-1$), то их выпуклая линейная комбинация $h$ также неотрицательна и нигде не превосходит $n^2$.

Это рассуждение и завершает доказательство леммы.

**Замечание 3.** Существует и более короткое, но существенно менее элементарное, доказательство леммы. Дело в том, что уравнения, заданные условиями а) и б), образуют систему из $m$ линейных уравнений для $m$ неизвестных, где $m$ – это число вершин графа $G$. По известной (но нетривиальной!) матричной теореме о деревьях (она же теорема Кирхгофа), модуль определителя матрицы этой системы совпадает с количеством остовных деревьев графа $G$ и потому не равен нулю. Отсюда следует и существование и единственность решения этой системы. Несколько сложнее, однако, обстоит дело с доказательством того, что все элементы $(x_i)$ этого единственного решения неотрицательны и удовлетворяют неравенству $x_i \leq n^2$.

Основная часть леммы допускает следующее обобщение.

**Лемма*.** *Дан произвольный конечный связный мультиграф $G$, в котором выбрано произвольное подмножество его вершин $R$ (будем называть элементы $R$ полюсами или особыми вершинами данного графа), а также произвольная функция $f : G \to \mathbb{R}$. Тогда существует ровно одна функция $h : G \to \mathbb{R}$ (т.е. расстановка вещественных чисел в вершинах $G$) такая, что*

*а) $h(v) = f(v)$ для любой особой вершины $v \in R$,*

*б) для любой неособой вершины $v \notin R$ выполняется равенство*

$$h(v) - \frac{1}{d(v)} \sum_{u \in G_v} h(u) = f(v). \qquad (5)$$

*Напоминаем, что $G_v$ обозначает множество вершин графа $G$, соседних с вершиной $v$, а $d(v)$ – степень вершины $v$.*

Иными словами, любой набор чисел, расставленных в полюсах (вершинах подграфа $R$), может быть единственным образом расширен до набора чисел в вершинах всего графа $G$ так, что во всех обычных (неособых) вершинах выполняется равенство (5) – т.е. число в каждой неособой вершине отличается от среднего арифметического своих соседей на некоторую заданную заранее величину (свою в каждой вершине).

## Случайные блуждания на графах

Рассматриваемая задача появилась из переведенного на язык элементарной математики сравнительно недавнего результата про так называемые случайные блуждания на конечных графах.

Представьте себе конечный связный граф $G$ с $n$ ребрами. Исходно в одной из вершин графа находится фишка. Каждую секунду эта фишка передвигается из вершины $v$, в которой она находится, в одну из соседних вершин, причем выбор новой вершины происходит случайным образом – если из вершины $v$ выходит $d$ ребер, то выбор из концов этих ребер происходит с равной вероятностью (для каждой такой вершины вероятность ее выбора равна, конечно, $1/d$). Такой процесс называется *простым симметричным случайным блужданием* на графе $G$.

Один из наиболее естественных и часто изучаемых вопросов для такого случайного блуждания таков: если мы выберем какие-то две вершины $A$ и $B$, то каково среднее время, за которое фишка, стартовавшая в вершине $A$, достигнет вершины $B$? Если мы выберем одну из вершин графа – назовем ее $K$ – и вычислим для каждой вершины $v$ графа $G$ среднее время «достижения» вершины $K$ из вершины $v$, то мы получим функцию $h: G \to \mathbb{R}$. Нетрудно проверить, что эта функция удовлетворяет равенству (2), принимает только неотрицательные значения и равна нулю в вершине $K$. Остается только доказать, что она ограничена сверху числом $n^2$. Можно доказать и более точные неравенства, а также другие, менее элементарные обобщения данной задачи (см. статью: Dmitri Fomin, Upper Bounds For Hitting Times Of Random Walks On Sparse Graphs, https://arxiv.org/abs/1702.04026).

## Проблема связности графа

Наша задача связана с важным вопросом теории сложности о создании компьютерных алгоритмов с ограниченной памятью, выясняющим, является ли данный граф связным. Иными словами, как нам, обладая лишь небольшим конечным набором ячеек памяти, определить, можно ли соединить путем две данные вершины $u$ и $v$ некоего конечного графа $G$? Про граф $G$ нам при этом очень мало что известно. Например, нам известны число вершин и число ребер в нем, а также дана функция (компьютерная процедура), которая для произвольной вершины графа возвращает нам массив ее соседей в $G$ (это наиболее популярный локализованный способ представления графа в компьютерных алгоритмах).

Проблема определения связанности двух вершин в произвольном графе имеет в теории сложности вычислений название STCON и принадлежит к классу так называемых NL-проблем – это означает, что ее можно решить при помощи недетерминистской машины Тьюринга с логарифмической памятью (с памятью, размер которой логарифмически зависит от размера графа, например, от числа его вершин). Вопрос о том, можно ли решить эту задачу при наличии лишь конечной памяти фиксированного размера, не зависящего от графа, насколько нам известно, является на данный момент нерешенной проблемой.

Выше речь шла об абстрактных алгоритмах. А вот в реальной компьютерной действительности не исключено, что нас удовлетворит алгоритм, который определяет ответ на вопрос «соединены ли вершины $u$ и $v$ путем в графе $G$?» либо однозначно в случае положительного ответа, либо с некоторой высокой вероятностью правильности в случае отрицательного ответа. Тем самым, ответ алгоритма будет или «Да, соединены», или «Нет, почти наверняка, не соединены». Здесь выражение «почти наверняка» обозначает, например, «с вероятностью 99,9%».

Такой алгоритм можно построить, используя случайное блуждание на графе $G$. Допустим, граф $G$ имеет $n$ ребер. Будем двигать нашу фишку, начав в вершине $v$ и произведя, скажем, $2n^2$ переходов в соседние вершины. Если на каком-то шагу фишка оказывается в вершине $u$, то алгоритм останавливается и выдает ответ «Да, вершины $u$ и $v$ связаны путем в $G$». Если же это не произошло, то повторим это случайное блуждание с самого начала, опять стартовав в вершине $v$, и так далее. Если вершины $u$ и $v$ связаны путем в $G$, то в силу доказанной нами теоремы и по неравенству Маркова вероятность того, что после $2n^2$ переходов мы все еще не достигли вершины $u$, не превосходит 1/2. Следовательно, если мы повторим случайное блуждание, например, 10 раз и никогда не достигнем вершины $u$, то вероятность того, что $u$ и $v$ находятся в одной компоненте связности графа $G$, не превосходит $(1/2)^{10} =$ $= 1/1024 < 0{,}001$. Тогда алгоритм может, наконец, остановиться и выдать ответ: «Вероятность того, что вершины $u$ и $v$ не могут быть соединены путем в данном графе, чрезвычайно велика – не меньше чем 0,999».

### Связь с электрическими цепями

Еще одно, весьма интересное и нетривиальное истолкование этой задачи относится к теории электрических цепей. Представим себе, что наш граф $G$ есть не что иное, как набор гибких металлических проводов, соединяющих несколько точек в пространстве. Также предположим, что все провода, независимо от своей длины, имеют одно и то же сопротивление, равное 1. Теперь подключим один из узлов $S$ нашей цепи (т.е. одну из вершин графа) к источнику напряжения (иными словами, соединим его с батарейкой), а другой узел $T$ заземлим (рис. 9). Тогда, как говорит нам теория электрических цепей, в цепи возникнет стабильное распределение потенциалов, а по всем проводам будет течь ток той или иной силы. При этом должны соблюдаться хорошо известные правила Кирхгофа.

Мы будем называть вершину $S$ источником, а вершину $T$ – стоком нашей цепи. Также мы будем называть обе эти особые вершины полюсами данной цепи.

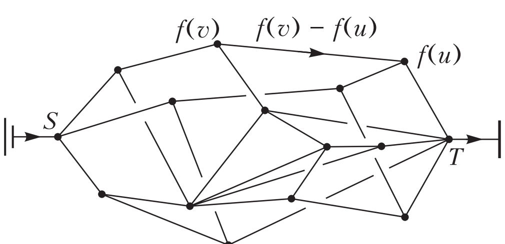



Рис. 9

Рассмотрим потенциал в каждом узле. С точки зрения математика, этот набор чисел есть некая функция $f : G \to \mathbb{R}_+$, причем такая, что значение $f$ в источнике $S$ равно единице, а в стоке $T$ оно равно нулю. Далее, поскольку сопротивление каждого провода равно 1, то сила тока, текущего вдоль произвольного ориентированного ребра $\overrightarrow{vu}$, равна разности потенциалов $f(v) - f(u)$. Если мы ориентируем ребро в другую сторону, то сила тока изменит знак. Если сила тока получается отрицательной, то это надо воспринимать как «намек» на то, что стоит поменять ориентацию данного ребра.

Следовательно, первое правило Кирхгофа можно записать так: для любой вершины $v$, кроме полюсов $S$ и $T$, выполняется равенство

$$\sum_{u \in G_v} \left( f(v) - f(u) \right) = 0, \qquad (6)$$

где, как и раньше, $G_v$ обозначает множество узлов цепи, которые непосредственно соединены проводами с узлом $v$. Это равенство, после уже известной нам простой трансформации, превращается в равенство

$$f(v) = \frac{1}{d(v)} \sum_{u \in G_v} f(u), \qquad (7)$$

где $d(v)$ обозначает степень вершины $v$ в графе $G$. В особых точках (полюсах) нашей цепи равенство (7) не выполняется. Однако, если мы сложим все равенства (6) для всех вершин цепи, включая и полюса, то с одной стороны мы получим ноль. В то же время, для всех пар вершин, не являющихся полюсами, выражения $f(v) - f(u)$ сократятся между собой – так как $\left( f(v) - f(u) \right) + \left( f(u) - v(v) \right) = 0$. Отсюда следует равенство

$$\sum_{u \in G_S} \left( f(S) - f(u) \right) = \sum_{u \in G_T} \left( f(u) - f(T) \right).$$

Другими словами, сумма токов, вытекающих из источника $S$, равняется сумме токов, втекающих в сток $T$. Это и не удивительно, ибо в силу первого правила Кирхгофа токам, так сказать, некуда деваться. Эта сумма называется суммарным током цепи, и мы обозначим его через $I$. Тогда получается, что величины

$$f(v)-\frac{1}{d(v)}\sum_{u\in G_v} f(u) \qquad (8)$$

равны нулю во всех обычных узлах цепи, а в полюсах $S$ и $T$ они равны $I/d(S)$ и $-I/d(T)$ соответственно. Для удобства терминологии давайте называть величину в формуле (8) (т.е. разность между значением функции $f(v)$ и средним арифметическим значений $f$ во всех соседях узла $v$) дифференциалом функции $f$ в соответствующей вершине $v$.

Очевидно, что дифференциал обладает свойством линейности. Это означает, что дифференциал суммы функций равен сумме их дифференциалов; если же умножить функцию на произвольный вещественный множитель, ее дифференциал также умножится на то же число.

Пользуясь этим подходом, можно еще раз доказать лемму о существовании функции, удовлетворяющей равенству (2).

Умножим неотрицательную функцию $f$, которую мы только что сконструировали, на положительное число $d(S)/I$ и получим функцию, дифференциал которой во всех обычных вершинах равен нулю, в источнике $S$ равен 1, а в стоке $T$ принимает значение $-d(S)/d(T)$.

Теперь, поочередно подключая «батарейку» ко всем другим узлам сети, кроме стока $T$, мы получим набор функций, дифференциал которых равен нулю всюду, кроме одной вершины, в которой он равен единице (на значение в стоке $T$ не будем обращать внимание). Сложив все эти функции, мы получим неотрицательную функцию $h$, дифференциал которой в каждой вершине кроме $T$ равен 1, что нам и требовалось.

Для физика или для человека, хорошо знакомого с теорией электрических цепей, это доказательство выглядит вполне исчерпывающе. Однако для математика, привыкшего к полностью формализованным доказательствам, это рассуждение может показаться хитро замаскированным полуобманом, внутри которого где-то, наверное, прячется настоящее доказательство. Оторванный от «физической реальности» математик вполне может и не принять на веру тот факт, что подсоединение батарейки и земли к материальной электрической цепи аккуратно решает нашу задачу. Вообще говоря, он совершенно прав в том смысле, что токи, источники, проводники, электрические цепи и так далее не являются формализованными математическими понятиями.

Это не значит, что математикам не надо даже и пытаться решать задачу таким способом. Скорее наоборот, если моделирование вашей задачи средствами физики приводит к некоему «естественному» решению, то этим подходом надо воспользоваться хотя бы для того, чтобы на его основе попытаться прийти к более формальному и математически корректному доказательству. Иметь лишний инструмент в своем арсенале никак не повредит. Надо только уметь правильно пользоваться этим инструментом, хорошо знать его достоинства и недостатки.

# Задачи по математике и физике

***Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.***

***Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».***

***Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.***

***Задачи М2722 – М2724 предлагалась на XLIV Турнире городов.***

***Задача М2726 предлагалась на Южно-Российской математической олимпиаде «Ассара».***

***Автор задач Ф2729–Ф2736 – С.Варламов.***

## Задачи М2722–М2729, Ф2729–Ф2736

**М2722.** Дан остроугольный неравнобедренный треугольник. Одним действием разрешено разрезать один из имеющихся треугольников по медиане на два треугольника. Могут ли через несколько действий все треугольники оказаться равнобедренными?

*Е.Бакаев*

**М2723.** Известно, что среди нескольких купюр, номиналы которых – попарно различные натуральные числа, есть ровно $N$ фальшивых. Детектор за одну проверку определяет сумму номиналов всех настоящих купюр, входящих в выбранный нами набор. Докажите, что за $N$ проверок можно найти все фальшивые купюры, если: а) $N = 2$; б) $N = 3$.

*С.Токарев*

**М2724.** В бесконечной арифметической прогрессии, где все числа натуральные, нашлись два числа с одинаковой суммой цифр. Обязательно ли в ней найдется еще одно число с такой же суммой цифр?

*А.Шаповалов*

**М2725.** Даны два одинаково ориентированных правильных $(2n)$-угольника $A_1A_2\ldots A_{2n}$ и $B_1B_2\ldots B_{2n}$. Проведены серединные перпендикуляры $l_i$ к отрезкам $A_iB_i$. Пусть прямые $l_i$ и $l_{i+1}$ пересекаются в точке $K_i$ (здесь и далее индексы $i$ и $i+2n$ считаем одинаковыми). Обозначим через $m_i$ прямую $K_iK_{i+n}$. Докажите, что $n$ прямых вида $m_i$ пересекаются в одной точке и при этом углы между прямыми $m_i$ и $m_{i+1}$ равны.

*Чан Куанг Хунг (Вьетнам), А. Заславский*

**М2726.** Выясните, какое из двух чисел больше:

$$\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{\ddots+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2}}}}} \quad \text{или} \quad \cfrac{3}{3+\cfrac{3}{3+\cfrac{3}{\ddots+\cfrac{3}{3+\cfrac{3}{3}}}}}?$$

(В каждом выражении по 2022 знака дроби.)

*П.Кожевников*

**М2727.** Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть $O_a, O_b, O_c, O_d$ – центры окружностей $(DAB)$, $(ABC)$, $(BCD)$, $(CDA)$ соответственно. Точки $O_a, O_b, O_c, O_d$ являются вершинами выпуклого четырехугольника (рис.1). Докажите, что его площадь равна половине модуля разности площадей че-

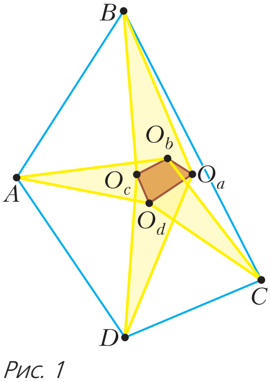


Рис. 1

тырехугольников $AO_bCO_d$ и $BO_cDO_a$.

*В.Дубровский*

**М2728.** Дано натуральное $n \geq 3$. Найдите наименьшее $k$, для которого верно утверждение: для любого $n$-угольника и любых двух точек внутри него найдется $k$-звенная ломаная, соединяющая эти точки, лежащая целиком внутри $n$-угольника.

*Л.Емельянов*

**М2729.** Найдите все натуральные $m$ и $n$ такие, что выполнено равенство

$$m^n = n^{3m}.$$

*И.Дорофеев*

**Ф2729.** Рыхлые снежинки (комочки снега) имеют характерный размер 0,5 см и падают в спокойном воздухе со скоростью 1 м/с. Оцените количество атомов, составляющих одну такую снежинку.

**Ф2730.** Пустотелый упругий шарик $A$ имеет массу стенок $m$ (стенки всюду одинаковой толщины). Тонкая прокладка из пенополиуретана (материал очень малой плотности) отделяет внутренние стенки полости шарика $A$ от расположенного внутри этой полости второго шарика $B$ массой $m/2$. Этот «комбинированный» шарик падает с высоты $h$ (без начальной скорости) на жесткую горизонтальную поверхность. Удар одного шарика $A$ с этой поверхностью абсолютно упругий. На какую высоту после удара взлетит «комбинированный» шарик?

**Ф2731.** Механическая система состоит из четырех грузов с одинаковыми массами и двух идеальных блоков с неподвижными горизонтальными осями (рис. 2). Нити, соединяющие грузы, идеальные (т.е. гибкие, невесомые и нерастяжимые). Участки нити, к которым прикреплены грузы слева и справа, вертикальные и очень длинные. В начальный момент все грузы неподвижны. Радиусы шкивов блоков $R$, расстояние между осями блоков $L > 2R$. С какими скоростями будут двигаться грузы через большое время после их отпускания, если левый и правый грузы до блоков еще не добрались? Сопротивление воздуха не учитывать.

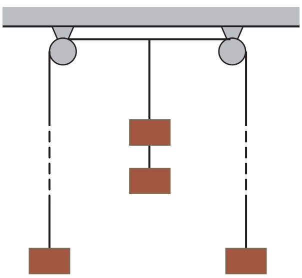


Рис. 2

**Ф2732.** Три непроводящих легких стержня одинаковой длины $2R$ жестко скреплены своими средними точками так, что их концы располагаются в вершинах правильного шестиугольника. На концах каждого стержня находятся одинаковые маленькие шарики с одинаковыми массами $m$. Два шарика, расположенные в соседних углах шестиугольника, обладают одинаковыми электрическими зарядами $Q$, а остальные шарики не заряжены. Конструкция из стержней может вращаться вокруг своей вертикальной оси симметрии, т.е. все шарики могут двигаться по одной и той же круговой траектории радиусом $R$. У экспериментатора Васи имеется еще один длинный непроводящий стержень с таким же маленьким шариком на конце. А заряд этого шарика равен $-Q$. Конструкция очень медленно вращалась. Вася дождался момента и быстро разместил шарик на своем стержне в точности посередине между двумя соседними шариками конструкции. В тот момент, когда расстояния между его (неподвижным) шариком и шариками этой пары стали отличаться в два раза, Вася быстрым движением удалил свой шарик на большое расстояние от конструкции. Такую операцию Вася проделал $N$ раз. С какой угловой скоростью вращается после этого конструкция? Трение отсутствует.

**Ф2733.** К батарейке подключили амперметр и вольтметр, соединенные последовательно. Приборы показали ток $I_1$ и напряжение $U_1$. Потом к этой же батарейке подключили эти же приборы, соединенные параллельно. Показания приборов стали $I_2$ и $U_2$. Что покажет амперметр, подключенный (один) к этой батарейке? Что покажет вольтметр, подключенный (один) к этой батарейке? Параметры измерительных приборов (их внутренние сопротивления) и параметры батарейки (ее ЭДС и внутреннее сопротивление) не известны.

**Ф2734.** В электрической схеме (рис. 3), давно подключенной к источнику переменного напряжения $U_0 \cos \omega t$, все 7 резисторов одинаковы, их сопротивления равны $R$. Емкость конденсатора $C$ и индуктивность катушки $L$ подобраны такими, что выполняется соотношение $\omega L = 1/(\omega C)$. Сколько тепловой энергии выделится в каждом из резисторов, расположенных справа от ключа, после его замыкания?

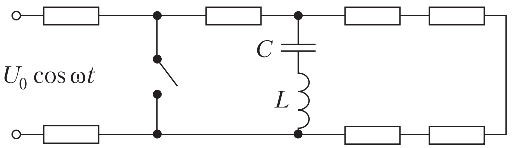


Рис. 3

**Ф2735.** Карбид бора $B_4C$ характеризуется такими параметрами: плотность 2,52 г/см$^3$, микротвердость 49,1 ГПа, модуль упругости 450 ГПа. Прочность на сдвиг у карбида бора примерно в 2–3 раза меньше величины микротвердости, поэтому его используют в защитных пластинах для бронежилетов (рис. 4). В середину пластины из такого материала перпендикулярно ей попадает пуля (стальной шарик или цилиндр с одинаковыми диаметром и длиной) массой 10 г, летящая со скоростью 500 м/с. Какими должны быть параметры (толщина и площадь) пластины, чтобы она выполняла свою функцию? Твердость стали 60 МПа, ее плотность и модуль Юнга 7,9 г/см$^3$ и 200 ГПа соответственно.


Рис. 4

**Ф2736.** Замкнутая в кольцо веревка охватывает шкивы двух блоков с горизонтальными и параллельными друг другу осями симметрии. Сбоку веревка выглядит симметричной, повернутой на 90° восьмеркой ($\infty$). Оси расположены на расстоянии 2 метра друг от друга на одном горизонтальном уровне и радиусы шкивов одинаковы. В канавки шкивов сверху (над тонкой веревкой) положен длинный, длиной 3 метра, однородный прямой стержень круглого сечения. При медленном движении веревки (с постоянной по величине скоростью каждой ее точки в каждом месте на веревке) стержень смещается от одного положения до другого, причем по одному из шкивов стержень проскальзывает, а по другому шкиву движется без проскальзывания. В момент остановки расстояния от концов стержня до ближайших точек касания стержня и шкива отличаются в полтора раза. После остановки стержень меняет направление скорости, и ситуация с проскальзыванием и непроскальзыванием по отношению к шкивам изменяется на противоположную. В некоторый момент скорость движения веревки увеличилась, и теперь стержень, двигаясь поступательно, совершает гармонические колебания с периодом 3 секунды. Каков коэффициент трения при скольжении стержня по шкиву? Каков максимальный коэффициент трения покоя?

## Решения задач М2697, М2710–М2713, Ф2717–Ф2720

**М2697*.** *На круговой автодороге стоят бензоколонки. Суммарного количества бензина в них хватает на два круга. Два водителя хотят заправиться на одной колонке и, стартовав от нее в разные стороны, объехать каждый весь круг; по пути можно заправляться на других колонках, не обязательно забирая весь бен-*

*зин. Докажите, что водители всегда смогут это сделать.*

Для бензоколонки номер $i$ обозначим через $v_i$ общее количество бензина в ней, через $l_i$ – количество бензина, которое нужно забрать из нее машине, чтобы проехать круг, выехав налево, через $r_i$ – количество бензина, которое нужно забрать из нее машине, чтобы проехать круг, выехав направо. Если $l_i$ или $r_i$ больше $v_i$, то мы заменяем это значение на $v_i$.
Рассмотрим два случая.
1. Найдется бензоколонка, для которой $v_i \geq r_i + l_i$. Поскольку $r_i$ и $l_i$ положительны, каждое из них строго меньше $v_i$, поэтому их значения не заменялись. Тогда запустим машины в разные стороны от этой бензоколонки, выдав им соответственно $r_i$ и $v_i - r_i$. По нашим обозначениям, эти машины проедут круг. Правая машина будет забирать весь бензин из всех колонок по пути. Предположим, что она суммарно наберет бензина на весь круг в бензоколонке $j$. Тогда левая машина может собирать весь бензин вплоть до колонки $j$ и ей будет хватать его, чтобы доезжать до следующей колонки. В колонке $j$ она возьмет то, что по плану не возьмет правая машина, и, поскольку суммарного количества бензина хватает на два круга, этого как раз хватит на то, чтобы доехать весь круг.
2. Для всех бензоколонок выполнено $v_i < r_i + l_i$. Тогда либо $\sum_i r_i$, либо $\sum_i l_i$ больше, чем нужно на весь круг. Без ограничения общности можно считать, что это «правая» сумма. Выберем такое $\varepsilon$, что $\sum_i (1-\varepsilon) r_i$ хватит на весь круг. Зальем в колонки $(1-\varepsilon) r_i$ бензина. В силу выбора $r_i$, машина не сможет стартовать ниоткуда, чтобы направо проехать весь круг (она не могла стартовать ниоткуда, даже добирая по пути $v_j$!). Но от одной из колонок стартовать направо уж точно можно, по классической задаче М82, несколько видоизмененное условие которой звучит так:
«На кольцевой дороге расположено несколько бензоколонок. Известно, что суммарного количества бензина в них хватит, чтобы объехать весь круг. Докажите, что можно стартовать с некоторой бензоколонки и объехать полный круг по часовой стрелке (заправляясь по пути)».
Противоречие.

*И.Богданов*

**М2710.** *Дано натуральное число $n$ и дана клетчатая доска $(n^2-1)\times(n^2-1)$. Назовем $n$-элементное подмножество множества клеток прогрессивным, если центры этих клеток лежат на одной прямой через $n-1$ равных промежутков. Найдите количество прогрессивных подмножеств.*

**Ответ:** $\dfrac{(n-1)^2(n+1)^2(n+2)n}{2}$.

Занумеруем столбцы и строки по порядку так, что каждой клетке соответствует пара $(i,j)$, где $i$ – номер столбца, а $j$ – номер строки. В прогрессивное множество входят клетки $(a,b)$, $(a+t,b+s)$, $(a+2t,b+2s)$,… …, $(a+(n-1)t, b+(n-1)s)$, где $s$ и $t$ – некоторые целые числа. Как видим, первая и последняя клетки таковы, что их номера столбцов имеют одинаковые остатки при делении на $n-1$, и номера строк – тоже. Наоборот, если взять пару клеток с таким свойством, т.е. пару клеток $(a,b)$ и $(c,d)$ такую, что $c-a$ и $d-b$ делятся на $n-1$, то эта пара однозначно определяет прогрессивное множество $(a,b)$, $(a+t,b+s)$, $(a+2t,b+2s)$, …, $(a+(n-1)t, b+(n-1)s)$, где $t=\dfrac{c-a}{n-1}$, $s=\dfrac{d-b}{n-1}$. Остается подсчитать количество пар клеток указанного вида.
Для каждого из $n-1$ остатков при делении на $n-1$ имеется $\dfrac{n^2-1}{n-1}=n+1$ столбцов с номером, дающим этот остаток. То же верно для строк. Поэтому для фиксированной пары остатков $(i,j)$ имеется ровно $(n+1)^2$ клеток, для которых номера столбца и строки дают остатки $i$ и $j$ при делении на $n-1$ соответственно. Количество спосо-

бов выбрать пару таких клеток равно

$$C^2_{(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2\left((n+1)^2-1\right)}{2}=$$

$$=\frac{(n+1)^2(n+2)n}{2}.$$

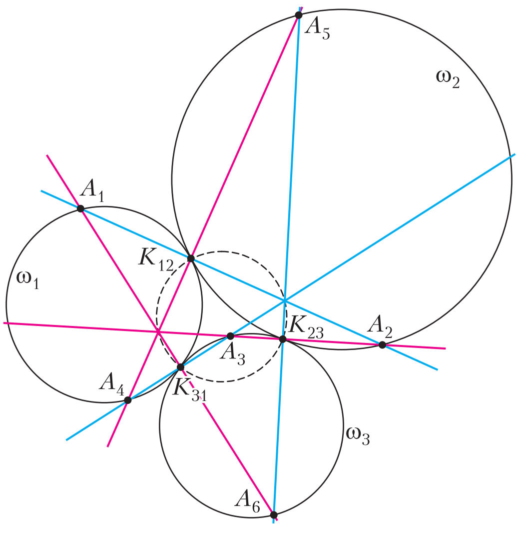
Так как всевозможных пар остатков $(n-1)^2$, получаем ответ. Задача решена.

Можно подсчитать количество прогрессивных подмножеств и по-другому, замечая, что номера столбцов клеток прогрессивного множества образуют арифметическую прогрессию. То же верно для номеров строк клеток прогрессивного множества. Далее нужно понять, как по этим прогрессиям можно восстановить само прогрессивное множество. При таком подходе задача фактически сводится к своему «одномерному варианту».

*П.Кожевников*

**М2711.** *Даны три окружности $\omega_1$, $\omega_2$ и $\omega_3$, попарно касающиеся в точках $K_{12}$, $K_{23}$, $K_{31}$ (см. рисунок). Выбираем точку $A_1$ на окружности $\omega_1$. Пусть прямая $A_1K_{12}$ пересекает вторично $\omega_2$ в точке $A_2$, прямая $A_2K_{23}$ пересекает вторично $\omega_3$ в точке $A_3$, прямая $A_3K_{31}$ пересекает вторично $\omega_1$ в точке $A_4$ и т.д. Докажите, что*

*а) Через шесть шагов процесс зациклится, т.е. $A_7=A_1$;*




*б) прямые $A_1A_2$ и $A_4A_5$ перпендикулярны;*

*в) тройки прямых $A_1A_2$, $A_3A_4$, $A_5A_6$ и $A_2A_3$, $A_4A_5$, $A_6A_1$ пересекаются в двух диаметрально противоположных точках окружности $(K_{12}K_{23}K_{31})$.*

Пусть $l_1$ – касательная к $\omega_1$, проведенная в точке $A_1$, а $l_2$ – касательная к $\omega_2$, проведенная в точке $A_2$. Рассмотрим гомотетию, переводящую окружность $\omega_1$ в $\omega_2$, с центром в их точке касания $K_{12}$. А так как $A_1A_2$ проходит через $K_{12}$, точка $A_1$ переходит при этой гомотетии в $A_2$, значит, $l_1$ переходит в $l_2$, тем самым $l_1 \parallel l_2$. Если направление $l_1$ считать горизонтальным, так что $A_1$ – самая верхняя точка окружности $\omega_1$, то $A_2$ – самая нижняя точка окружности $\omega_2$. Продолжая далее, мы получим, что $A_3$ – самая верхняя точка окружности $\omega_3$, $A_4$ – самая нижняя точка окружности $\omega_1$, …, $A_7$ – самая верхняя точка окружности $\omega_1$. Видим, что $A_7=A_1$, тем самым пункт а) решен.

Кроме того, из описания точек $A_1$ и $A_4$ видно, что они диаметрально противоположны в $\omega_1$. Поэтому $\angle A_1K_{12}A_4=90°$, или, эквивалентно, $A_1A_2 \perp A_4A_5$, что доказывает пункт б).

Далее, из б) следует, что $A_1A_2$ и $A_4A_5$ пересекают окружность $(K_{12}K_{23}K_{31})$ вторично (помимо точки $K_{12}$) в диаметрально противоположных точках $X_{12}$ и $X_{45}$. Аналогично определяем пары диаметрально противоположных точек $X_{34}$, $X_{61}$ и $X_{56}$, $X_{23}$. Теперь достаточно показать, что $X_{61}=X_{45}$. Действительно, аналогично будет доказано $X_{23}=X_{45}$, и тогда три точки $X_{23}$, $X_{45}$, $X_{61}$ совпадают. Аналогично, $X_{12}$, $X_{34}$, $X_{56}$ совпадают, что завершит решение пункта в).

Пусть $l$ – общая касательная к $\omega_2$ и $\omega_3$, проведенная в $K_{23}$. Из касания следуют равенства

$$\angle(K_{23}K_{12},K_{23}K_{31})=\angle(K_{23}K_{12},l)+$$
$$+\angle(l,K_{23}K_{31})=\angle(A_5K_{12},A_5K_{23})+$$
$$+\angle(A_6K_{23},A_6K_{31})=(A_5K_{12},A_6K_{31}).$$

Доказанное равенство $\angle(K_{23}K_{12},K_{23}K_{31})=$ $=\angle(A_5K_{12},A_6K_{31})$ означает, что прямые

$A_5K_{12}$ и $A_6K_{31}$ (они же $A_4A_5$ и $A_6A_1$) пересекаются на окружности $(K_{12}K_{23}K_{31})$. Отсюда следует нужное нам совпадение точек $X_{45}$ и $X_{61}$.

*П.Кожевников*

**М2712.** *Дан треугольник ABC, в котором $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. Докажите неравенство*

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\geq\sqrt{3}.$$

Пусть $r$ и $I$ – радиус и центр вписанной окружности треугольника, $S$ – площадь треугольника, $p$ – его полупериметр. Обозначим отрезки касательных от вершин до точек касания с вписанной окружностью через $x$, $y$, $z$, так что $BC = x + y$, $CA = y + z$, $AB = z + x$.

Из прямоугольного треугольника $IKA$, где $K$ – точка касания вписанной окружности со стороной $AB$, видим, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{x}$. Аналогично, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{r}{y}$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{z}$. Таким образом, наше неравенство преобразуется к виду

$$\frac{z}{xy}+\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}\geq\frac{\sqrt{3}}{r}. \qquad (*)$$

Далее, $r=\frac{S}{p}=\frac{\sqrt{pxyz}}{p}=\frac{\sqrt{xyz}}{\sqrt{x+y+z}}$. В результате $(*)$ равносильно следующему неравенству для $x$, $y$, $z$:

$$\frac{z}{xy}+\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}\geq\frac{\sqrt{3(x+y+z)}}{\sqrt{xyz}}.$$

После домножения на $xyz$ и возведения в квадрат имеем

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\geq 3(x+y+z)xyz.$$

Последнее верно в силу неравенств о средних (между средним квадратическим и средними арифметическим и геометрическим): достаточно перемножить неравенство $\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}\geq\frac{x+y+z}{3}$ с возведенным в куб неравенством $\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}\geq\sqrt[3]{xyz}$.

*Р.Регимов*

**М2713*.** Решение этой задачи приведено в статье «Путешествия по графам».

**Ф2717.** *Команда из двух спортсменов участвует в мультиспортивной гонке, состоящей из трех этапов: бега, велогонки и плавания. По условиям соревнований требуется сначала преодолеть 43 км (суммарно) бегом и на велосипеде, а в конце проплыть 1 км, при этом на старте команде выдается один велосипед, а зачетное время команды фиксируется по времени участника, пришедшего к финишу вторым. Первый спортсмен в среднем пробегает 24 км за 2 часа, проезжает на велосипеде 27 км за час и проплывает 1200 м за 30 мин. Средняя скорость бега второго спортсмена 9 км/ч, езды на велосипеде 24 км/ч, а плавает он со скоростью 3 км/ч. Чему равно минимальное зачетное время, которое может показать эта команда при наилучшей тактике прохождения дистанции?*

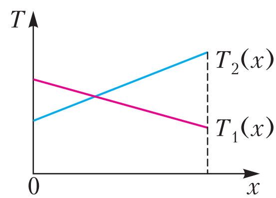
Будем измерять расстояния в километрах, время в часах и скорость в километрах в час. Пусть $x$ – расстояние, которое проехал первый спортсмен на велосипеде. Тогда его время движения на всей дистанции равно

$$T_1=\frac{x}{27}+\frac{43-x}{12}+\frac{1}{2,4}.$$

Время движения второго спортсмена на всей дистанции равно

$$T_2=\frac{43-x}{24}+\frac{x}{9}+\frac{1}{3}.$$

Обе зависимости $T_1(x)$ и $T_2(x)$ являются линейными. На рисунке изображен качественный вид графиков этих функций. Зачетное время команды фиксируется по времени участника, пришедшего к фи-



нишу вторым. Это время минимально в том случае, если спортсмены финишируют одновременно (пересечение графиков на рисунке). Приравнивая $T_1(x)$ и $T_2(x)$ и решая уравнение относительно $x$, получаем

$$x = 16{,}2 \text{ км}.$$

Подставляя это значение $x$, например, в зависимость $T_1(x)$, находим минимальное зачетное время:

$$T_{\min} = 3{,}25 \text{ ч} = 195 \text{ мин}.$$

*А.Бычков*

**Ф2718.** *В схеме, изображенной на рисунке 1, все приборы идеальные. Батарейка, напряжение между выводами которой равно $U = 6$ В, тоже идеальная. Сопротивление любого проводника, соединяющего соседние узлы сетки, равно 200 Ом. Сопротивление подводящих проводов, изображаемых тонкими линиями черного цвета, равно нулю. Найдите показания приборов.*

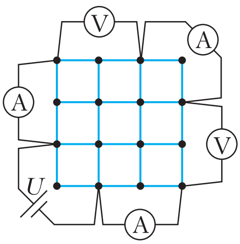



*Рис. 1*

Существуют разные способы решения этой задачи, тем или иным образом использующие симметрию рассматриваемой цепи. Покажем способ, основанный на симметрии распределения потенциалов узлов относительно диагонали сетки. Пусть потенциал узла, к которому подключен положительный полюс батареи, равен +3, а потенциал узла, соединенного с отрицательным полюсом батареи, равен −3 (рис. 2). Тогда в силу симметрии потенциалы узлов на диагонали (обведенные синими окружностями на рисунке) будут равны нулю. Потенциалы узлов, располагающихся симметрично относительно плоскости, перпендикулярной рисунку, равны по модулю и противоположны по знаку.

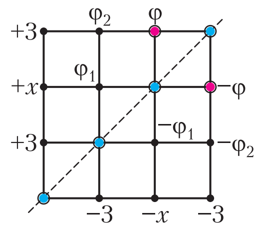



*Рис. 2*

Потенциалы двух узлов (обведенных красными окружностями), ближайших к правому верхнему узлу, равны, ведь они соединены через идеальный амперметр. С другой стороны, если потенциал одного из этих узлов равен $\varphi$, то потенциал другого равен $-\varphi$. Оба утверждения выполняются одновременно только в случае $\varphi = 0$.

Пусть неизвестный потенциал узла на левой вертикальной стороне сетки равен $x$ (считаем, что потенциалы измеряются в вольтах). Сумма токов, втекающих в узел с потенциалом $x$, равна нулю, поэтому справедливо равенство

$$\frac{\varphi_1 - x}{R} + \frac{3 - x}{R} + \frac{3 - x}{R} = 0,$$

где $R$ – сопротивление проводника, соединяющего соседние узлы. Отсюда находим

$$\varphi_1 = 3(x - 2).$$

Аналогично определяется потенциал $\varphi_2$:

$$\varphi_2 = x - 1.$$

Сумма токов, втекающих в узел с потенциалом $\varphi_1$, равна нулю, поэтому

$$\varphi_2 + x = 4\varphi_1,$$

а значит,

$$x = \frac{23}{10} \text{ и } \varphi_2 = x - 1 = \frac{13}{10}.$$

Теперь можно определить показания амперметров. Ток через амперметр на левой вертикальной стороне сетки равен сумме токов, текущих через проводники сопротивлением $R$, присоединенные к этому узлу:

$$I_{A1} = \frac{3 - x}{R} + \frac{3 - \varphi_2}{R} = 12 \text{ мА}.$$

Такое же значение тока показывает амперметр на нижней горизонтальной стороне сетки. Амперметр, соединяющий узлы, ближайшие к правому верхнему узлу, показывает ток

$$I_{A2} = \frac{\varphi_2 - \varphi}{R} = \frac{\varphi_2}{R} = 6{,}5 \text{ мА}.$$

Вольтметры показывают напряжение $U_V = 3$ В.

*П.Крюков*

**Ф2719.** *На грани правильного тетраэдра, изготовленного из пенопласта (диэлектрическая проницаемость равна 1), наклеены одинаковые тонкие металлические пластины в форме правильных треугольников, почти совпадающие по размерам с гранями тетраэдра. Электрического контакта между пластинами нет. Заряд любой пластины изначально равен нулю. Если одной пластине сообщить заряд Q, то ее потенциал будет равен $\frac{Q}{C_0}$. Если теперь заземлить любую незаряженную пластину, то потенциал заряженной окажется равен $\frac{Q}{C_1}$. Найдите разность потенциалов двух пластин, если на одну из них нанесен заряд Q, а заряд второй равен –Q, при условии, что другие две пластины не заряжены. Чему равна емкость конденсатора, одной обкладкой которого является любая пластина тетраэдра, а другой – три оставшиеся пластины, соединенные друг с другом идеальным проводником?*

Решение задачи основано на использовании принципа суперпозиции полей. Из него следует, например, линейная зависимость потенциала поля, создаваемого заряженным проводником, от заряда этого проводника.

Пусть заряд одной пластины тетраэдра равен $Q$, а другие пластины не заряжены; обозначим потенциал, создаваемый заряженной пластиной на любой из незаряженных пластин, $\varphi'$. Из симметрии задачи следует, что заряженная пластина будет создавать одинаковый потенциал на любой из незаряженных. Если заряд $Q$ изменится и станет равен $q$, то в силу линейности потенциал любой из незаряженных пластин станет равен $\frac{q\varphi'}{Q}$. Теперь рассмотрим суперпозицию двух распределений зарядов и потенциалов:

1) на одной пластине заряд $Q$, заряд любой из оставшихся пластин равен нулю;

2) на другой пластине заряд $q_0$, заряд любой из оставшихся пластин равен нулю.

При этом величина заряда $q_0$ такова, что при наложении распределений зарядов 1 и 2 потенциал пластины, несущей заряд $q_0$, становится равен нулю. Отметим, что такое наложение не меняет поля внутри пластин, поскольку в каждом из распределений они равны нулю. Величины зарядов и потенциалов, полученное в результате наложения распределений 1 и 2, удовлетворяют условию задачи в случае, когда одна из пластин заземлена. Таким образом, справедливо равенство

$$0 = \frac{q_0}{C_0} + \varphi'.$$

Первое слагаемое в этом равенстве есть потенциал, создаваемый пластиной, несущей заряд $q_0$ в распределении 2, второе слагаемое – потенциал, создаваемый первой пластиной на второй в распределении 1. Аналогично, для потенциала пластины с зарядом $Q$ имеем

$$\frac{Q}{C_1} = \frac{Q}{C_0} + \frac{q_0\varphi'}{Q}.$$

Из полученных двух равенств находим

$$\varphi' = \frac{Q}{C_0}\sqrt{1 - \frac{C_0}{C_1}}.$$

Запишем подобные соотношения для случая, когда заряд одной пластины равен $Q$, а заряд другой равен $-Q$:

$$\varphi_1 = \frac{Q}{C_0} - \varphi', \quad \varphi_2 = -\frac{Q}{C_0} + \varphi',$$

откуда получим

$$\Delta\varphi = 2\left(\frac{Q}{C_0} - \varphi'\right) = \frac{2Q}{C_0}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{C_0}{C_1}}\right).$$

Чтобы получить ответ на второй вопрос, рассмотрим суперпозицию четырех распределений: заряд первой пластины равен $Q$, заряды остальных равны нулю; заряд $n$-й пластины ($n = 2, 3, 4$) равен $\frac{-Q}{3}$, заряды остальных пластин равны нулю. Каждая из пластин с зарядом $\frac{-Q}{3}$ создает на любой соседней потенциал $\frac{-\varphi'}{3}$, поэтому после наложения четырех распределений потенциал первой пластины равен

$$\varphi_1 = \frac{Q}{C_0} - 3\frac{\varphi'}{3},$$

а потенциал любой из оставшихся, например второй, равен

$$\varphi_2 = -\frac{Q}{3C_0} - 2\frac{\varphi'}{3} + \varphi'.$$

Отсюда находим напряжение на рассматриваемом конденсаторе:

$$U = \frac{4}{3}\left(\frac{Q}{C_0} - \varphi'\right) = \frac{4Q}{3C_0}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{C_0}{C_1}}\right)$$

и искомую емкость:

$$C = \frac{3}{4}\frac{C_0}{1 - \sqrt{1 - \frac{C_0}{C_1}}}.$$

*П.Крюков, А.Бычков*

**Ф2720.** *На графике, приведенном на рисунке 1, можно видеть вольт-амперную характеристику специального источника напряжения – зависимость силы тока $I$ через этот источник от разности потенциалов $U$ положительного и отрицательного полюсов. ВАХ источника, изображенная на графике, похожа на ВАХ солнечной батареи, поэтому далее мы называем этот источник солнечным, а на рисунке 2 слева обозначаем его батарейкой в круге. Другой источник напряжения, далее называем его обычным, состоит из идеальной батарейки с напряжением $U_0 = 2{,}4$ В между выводами и резистора сопротивлением $r = 3$ Ом, как показано на рисунке 2 справа. Солнечный и обычный источники можно соединить параллельно или последовательно (разными способами), тогда получится новый источник напряжения. Чему равен ток короткого замыкания этого нового источника? Если к нему подключить резистор сопротивлением $R = 1$ кОм, то чему будет равно напряжение на этом резисторе? Рассмотрите все возможные случаи.*

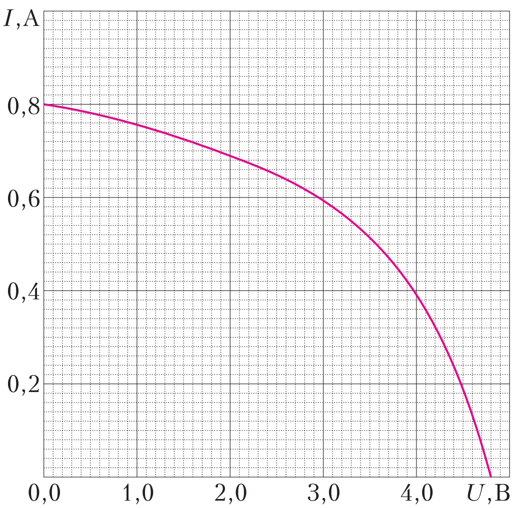



Рис. 1

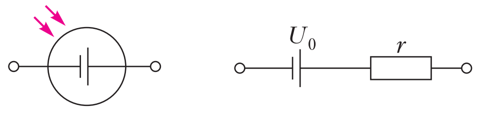



Рис. 2

Есть четыре варианта соединения источников, а следовательно, восемь числовых значений, дающих ответы на вопросы задачи. Рассмотрим два варианта параллельного соединения источников (рис. 3). Определим в каждом случае ток в цепи и напряжение на солнечном источнике.

Найдем сначала ток в схеме *а*). Если бы к источнику был подключен только резис-

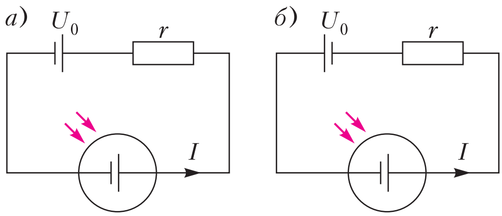



Рис. 3

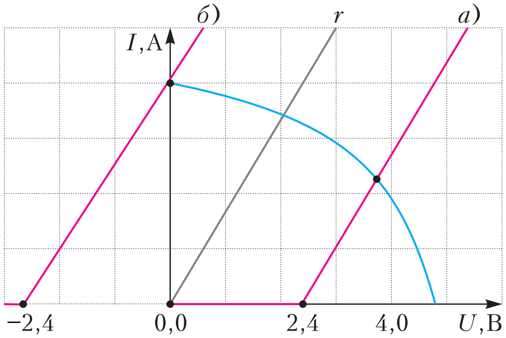



Рис. 4

тор сопротивлением $r$, то напряжение на источнике и ток через него определялись бы графическим решением уравнения

$$Ir = U_c(I),$$

где $U_c(I)$ – зависимость напряжения солнечного источника от тока, текущего через него, задаваемая вольт-амперной характеристикой. Следовало бы построить на графике ВАХ солнечного источника график функции $I = \frac{U}{r}$ (линия черного цвета на рисунке 4) и найти точку пересечения этого графика с ВАХ солнечного источника.

При подключении по схеме *а*) график правой части уравнения получается из графика, построенного для резистора, сдвигом в сторону положительных напряжений на $U_0 = 2{,}4$ В, поскольку суммарное падение напряжения увеличивается, а при подключении по схеме *b*) график, построенный для резистора, сдвигается на $U_0$ в сторону отрицательных напряжений. Отмеченные на рисунке точки пересечения графиков характеризуют ток и напряжение на солнечном источнике для каждой из схем. Сделав построения на графике, данном в условии (см. рис. 1), находим ток $I_a = 0{,}425$ А и напряжение $U_a = 3{,}75$ В в схеме *а*). Для схемы *b*) аналогичные ток и напряжение равны $I_b = 0{,}8$ А и $U_b = 0$. Легко видеть, что полученные значения дают 4 ответа на вопросы задачи. Действительно, токи $I_a$ и $I_b$ – это токи короткого замыкания при последовательном соединении источников. Напряжение $U_a$ (или $U_b$) приближенно равно напряжению на резисторе сопротивлением $R$ при подключении к источникам, соединенным параллельно, поскольку при этом подключении через резистор будет течь пренебрежимо малый ток по сравнению с $I_a$ (или $U_b$).

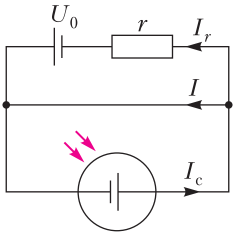



Рис. 5

Определим токи короткого замыкания в цепях с параллельным соединением источников. Рассмотрим схему, представленную на рисунке 5. Токи $I_r$ и $I_c$, обозначенные на схеме, равны токам короткого замыкания обычного и солнечного источника соответственно и равны 0,8 А, поэтому ток $I$ в цепи равен $I_c - I_r = 0$. При измененной полярности подключения обычного источника, очевидно, получится $I = 1{,}6$ А.

Найти напряжение на резисторе сопротивлением $R$ при подключении к последовательно соединенным источникам также несложно. Это напряжение равно сумме (или разности) напряжений на обычном и солнечном источнике при небольших (нулевых) токах. Легко видеть, что искомые напряжения равны 7,2 В и 2,4 В.

Таким образом, $I_{пос1} = 0{,}425$ А, $I_{пос2} = 0{,}8$ А, $I_{пар1} = 1{,}6$ А, $I_{пар2} = 0$; $U_{пос1} = 2{,}4$ В, $U_{пос2} = 7{,}2$ В, $U_{пар1} = 3{,}75$ В, $U_{пар2} = 0$.

*П.Крюков*

*Не совершается ли Живое движение посредством колебаний живой среды, возбуждаемых в Мозгу силой Воли и распространяющихся оттуда через сплошные, прозрачные и однородные капилляры нервов к мышцам, сокращая и растягивая последние?*

Исаак Ньютон

*... мы поклялись выявить правду, что в организме не действуют никакие иные силы, кроме физических и химических.*

Эмиль Дюбуа-Реймон

*Физика не только может, но и должна глубоко вторгаться в биологию как своими средствами исследования, так и свойственными ей теоретическими представлениями.*

Лев Арцимович

*Вопрос о том, что такое ген, ...бессмысленно адресовать генетикам. Вы, физики, должны искать ответ на него.*

Николай Тимофеев-Ресовский

*Потрясающие вещи происходят в биологии. Мне кажется, Джим Уотсон ⟨Нобелевская премия 1962 года за создание модели ДНК. – А.Л.⟩ сделал открытие, сравнимое с тем, что сделал Резерфорд в 1911 году.*

Макс Дельбрюк

*Природа является квантовой, черт возьми!*

Ричард Фейнман

# А так ли хорошо знакомы вам ФИЗИКА + БИОЛОГИЯ ?

Водораздел, существовавший многие столетия между этими областями естествознания и словно обозначавший границу между способами изучения природы живой и неорганической, на самом деле, конечно, не раз «точечно» преодолевался. По мере же возрастания числа как самих объектов исследования, так и методов их постижения, физика и биология все чаще стали не просто пересекаться, а, лучше сказать, сливаться друг с другом. Родились совершенно новые научные направления – биоэнергетика, молекулярная биология, радиационная генетика, фотобиология. Это привело (в основном в прошлом веке) к революционным открытиям и кардинальному пересмотру практически всех сторон нашей жизни – от условий обитания до медицины, от перестройки нашего питания до спорта. Об этом мы постараемся рассказать в следующих выпусках «Калейдоскопа». Но для начала заглянем в школьные учебники (и не только физики!) и оглянемся на окружающих нас «зеленых друзей» и «братьев наших меньших».

**Вопросы и задачи**

**1.** Что позволяет прорастать семенам или отросткам из-под земли, даже весьма плотной?

**2.** Кольца в поперечном разрезе дерева имеют разную ширину, причем, как правило, каждое одиннадцатое более широкое. С чем это может быть связано?

**3.** Как растения избавляются от излишков влаги?

**4.** Почему деревья зимой сбрасывают листву?

**5.** Хвойный и лиственный леса шумят неодинаково. Чем это можно объяснить?

**6.** Какие именно части солнечного спектра важны для жизни растений? Почему большинство растений – зеленые?

**7.** Глаза многих насекомых имеют ячеистую структуру. Каково ее предназначение?

**8.** У многих ученых, пытавшихся выделить замечательные краски, наблюдаемые на крыльях тропических бабочек, ничего не вышло. В чем могла заключаться причина их неудач?

**9.** Отчего возникает разность температур между центром улья и его краями? Почему она зависит от численности пчелиной семьи?

**10.** Свежее яйцо от несвежего можно отличить, опуская их в воду. Чем дольше хранилось яйцо, тем легче оно всплывает. Почему?

**11.** Какой воздух богаче кислородом – тот, которым дышим мы, или тот, которым дышат рыбы?

**12.** Отчего у слона такие большие уши?

**13.** Почему у северных животных, например у лис и медведей, выступающие части тел – хвосты, ушные раковины, морды – короче или площе, чем у их сородичей в более теплых краях?

**14.** Что помогает лосям не вязнуть в болотистой низине?

**15.** Отчего глаза у зайца, лошади или оленя, в отличие от кошки или льва, расположены почти по бокам головы?

**16.** Почему черепаха, опрокинувшись на спину, не может перевернуться обратно?

**17.** Подвижный хвост кита, в отличие от остальных участков его тела, не защищен от холода толстым слоем жира, тем не менее он не мерзнет. Объяснение этого нашлось при сравнении китового хвоста с используемым в технике теплообменником. В чем же заключалась аналогия?

### Микроопыт

Разрежьте стебелек или черешок листка вдоль бритвой, но не до конца. Как поведут себя полученные половинки? В чем это нас убеждает?

### Любопытно, что...

… английский физик Роберт Гук в 1665 году усовершенствовал микроскоп, что позволило ему открыть клеточное строение растений, причем он сам ввел термин «клетка». Именно после этого биологи стали воспринимать микроскоп как свой основной инструмент.

… еще в 1678 году Антони ван Левенгук, голландский ученый-любитель, изобретатель однолинзовых микроскопов, обнаружил с их помощью, что эритроциты его крови способны обратимо менять свою форму, т.е. обладают упругостью.

… результатом сотрудничества немецких ученых физиолога и анатома Эрнста Вебера и физика Густава Фехнера в 1858 году стал закон, устанавливающий связь между мерой внешнего воздействия (силы звука, давления, яркости света) и реакцией органов чувств (слуха, осязания, зрения).

… исследования, проводимые на протяжении всего XX века, привели к выводу, что биоэлектрические колебания, наблюдаемые у высших растений, аналогичны распространению возбуждения в нервно-мышечных структурах животных, но происходят с меньшими скоростями.

… первая четкая постановка проблемы генетического кода принадлежит физику Георгию Гамову. Дальнейшие интенсивные поиски химиков, биологов и физиков привели к построению модели ДНК – дезоксирибонуклеиновой кислоты, самой главной молекулы живой природы, переносчика наследственной информации. А расшифровать структуру ДНК удалось с помощью рентгеноструктурного анализа – метода, изобретенного английскими физиками Генри и Лоуренсом Брэггами.

… австрийский физик-теоретик Эрвин Шрёдингер, удостоенный в 1933 году Нобелевской премии за создание волновой механики, издал в 1944 году книгу «Что такое жизнь с точки зрения физика?», в значительной степени простимулировавшую возникновение молекулярной биологии. Особенно ученый подчеркивал соответствие биологических процессов законам квантовой физики.

… колес природа не изобрела, однако вращательное движение осуществить сумела. Так, бактерии, плавая в воде, крутят своими хвостиками-жгутиками, как штопором, с помощью молекулярных электродвигателей, встроенных в стенку бактериальной клетки.

…хитин, входящий в состав тончайших, переливающихся перламутром гребешков на крыльях бабочек, поглощает инфракрасные лучи, преобразуя их в видимые. Одна из энергетических фирм использовала этот эффект и создала высокочувствительный прибор для измерения слабых потоков тепла, служащий, в том числе, для целей медицинской диагностики.

### Что читать в «Кванте» о союзе физики и биологии

*(публикации последних лет)*

1. «Физик в гостях у биолога» – 2015, Приложение №1;
2. «Калейдоскоп “Кванта”» – 2017, №1,4,7,10;
3. «Принцип 80:20 в биологии» – 2017, №10, с.6;
4. «Скейлинги в биологии» –2018, № 3, с.2;
5. «Об ovo» – 2020, №6, с.9;
6. «Квантовая природа поверхностного натяжения» – 2022, №3, с.7.

*Материал подготовил А.Леонович*

# Премия имени Александра Беляева

Литературная премия имени Александра Беляева («Беляевская премия») – ежегодная российская литературная премия, присуждаемая за научно-художественные и научно-популярные произведения. Названа в честь русского советского писателя-фантаста Александра Романовича Беляева (1884–1942, автор романов «Голова профессора Доуэля», «Человек-амфибия» и других произведений).


Беляевская премия впервые вручалась в 1990 году, среди лауреатов того года были Аркадий и Борис Стругацкие за фантастический роман «Град обреченный».

В 2022 году премия имени Александра Беляева в номинации «журналу за наиболее интересную деятельность в течение года» присуждена нашим друзьям и коллегам – журналу «Квантик».

«Квантик» – журнал для любознательных. Основные читатели – школьники, но и взрослые могут найти в нем что-нибудь интересное для себя. Журнал не только рассказывает о математике и физике, но и печатает содержательные, при этом доступные и увлекательные статьи по лингвистике, биологии, истории науки.

«Квантик» сохранил традицию ежемесячных конкурсов задач, ответы на которые читатели присылают в редакцию, и редакция ведет переписку со школьниками. Мощный импульс к учебе получают ребята, чьи фамилии в конце года появляются в любимом журнале, когда публикуется список победителей конкурса. Работники школьных библиотек в разных регионах России отмечают, что «Квантик» стал одним из самых востребованных поступлений как среди школьников, так и среди учителей. Оформление журнала создает большая команда художников. Оно всегда остроумно и разнообразно, журнал приятно взять в руки. Последняя страница обложки журнала – красочно проиллюстрированная занимательная задача. К каждому Новому году из них и из других задач-картинок прошедшего года формируют календари, которые уже издаются не только в России. Материалы всех номеров за все годы можно найти также в Альманахах «Квантика». А еще журнал выпускает свою Библиотечку, в ней уже вышли три книги.

Журнал «Квантик», первый номер которого вышел в январе 2012 года, стал одним из ярчайших явлений российского образования в XXI веке. Поздравляем основателя и бессменного главного редактора «Квантика» Сергея Дориченко и его команду с заслуженной премией и желаем дальнейших успехов и расширения аудитории журнала!

# Задачи

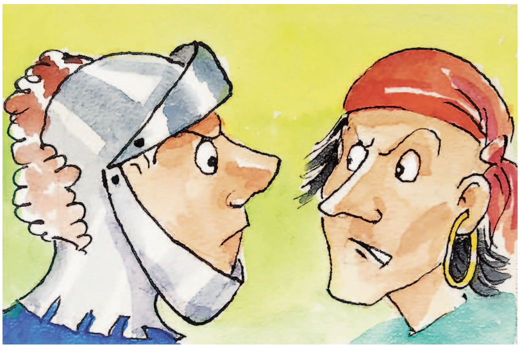
**1.** У Пети есть семь карточек с цифрами 2, 3, 4, 5, 7, 8, 0. Он хочет, использовав все карточки, составить наибольшее натуральное число, кратное 25. Какое число должно у него получиться?

*О.Подлипский*

**2.** Четыре пирата разделили добычу в 100 монет. Известно, что среди них ровно два лжеца (которые всегда лгут) и ровно два рыцаря (которые всегда говорят правду). Они сказали следующее.

Первый пират: «Мы разделили монеты поровну».

Второй пират: «У всех разное количество монет, но каждому досталось хотя бы 20 монет».



Третий пират: «У каждого количество монет делится на 5».

Четвертый пират: «У всех разное количество монет, но каждому досталось не более 35 монет».

Какое максимальное количество монет могло достаться одному пирату?

*О.Подлипский*

**3.** По кругу выписаны 100 целых ненулевых чисел таких, что каждое число больше произведения двух следующих за ним по часовой стрелке чисел. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди этих 100 выписанных чисел?


*Н.Агаханов*

**4.** Можно ли разрезать клетчатый квадрат 25×25 на клетчатые прямоугольники такие, что периметр каждого из них равен 18?

*О.Подлипский*

Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предлагались на муниципальном этапе Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области.

# Статистически высший класс

К.КОХАСЬ

— Да ты, похоже, растолстел за время отпуска? – спросила Огрыза, заваривая чай. На столе лежала только что открытая коробка конфет, стояли вазочки с вареньем и засахаренными орешками, на блюде лежали пирожные.

— Трудно было не растолстеть, – отвечал дятел Спятел. – Я жил в отеле «7 звездочек»!

— Какое нелепое название.

— Это рейтинг отеля. Семь звездочек означает «статистически высший класс обслуживания». Когда ты заселяешься в отель, тебе говорят: «Мы гарантируем очень высокий класс обслуживания, но, к сожалению, хотя мы всеми силами пытаемся этого не допустить, иногда происходят “нежелательные инциденты”, не зависящие от нас. Их вероятность чрезвычайно мала, но все же положительна».

— Что еще за инциденты?

— Например, если бы я поехал отдыхать с тараканом Кузькой, то Кузька точно оказался бы «инцидентом». Завидев его, любой метрдотель тут же терял бы человеческий облик и начинал поливать всех дихлофосом. Но бывают «инциденты» и попроще – можно утонуть, подавиться, выпасть в окно… «Поэтому мы предлагаем вам заселиться в наш отель сразу в нескольких экземплярах. Для этого мы вас распараллелим. Это абсолютно безопасно и не больно. Получится 5 дятлов Спятлов, или 10, или 1000 – сколько закажете. Даже если кому-то из них и не повезет, а это чрезвычайно редкий случай, с остальными клонами ничего такого не случится. А мы сгенерируем вам усредненное впечатление от обслуживания, которое полностью загладит редкий неприятный инцидент и фактически сделает его вероятность равной нулю». – «Да как же я помещусь в ваш отель в таком количестве копий?» – «Ничего, ничего, не беспокойтесь, у нас бесконечно много номеров, еще и свободные останутся».

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20221103

— И ты согласился?

— Не сразу. Мне и одного себя бывает многовато, а тут сразу 1000.

— А как они это делают?

— Да какая разница! Доверьтесь профессионалам. Зато как здорово: приходим на ужин, один я – беру лангуста, другой – капусту, третий – мангуста… В целом полное счастье и обжорство! Но я все же сомневался.

Огрыза задумчиво посмотрела на стол и, переставив для виду вазочки с вареньем, незаметно убрала со стола коробку конфет.

— И как же они тебя убедили?

— Они предложили сыграть в лотерею. «Вечером мы незаметно поменяем таблички с номерами комнат, и каждый постоялец должен попытаться угадать новый номер своей комнаты. Тем, кто угадает, – бесплатный ужин на все время отпуска! Чем больше клонов – тем выше шанс!»

— И ты согласился?

— Нет. Я сказал, что это авантюра, потому что в отеле бесконечно много номеров… Тогда они сказали, что «дополнительно каждому гостю отеля принесут список всех остальных постояльцев, где будут указаны их новые номера».

— Но если ты знаешь, где живут остальные, ты же сможешь вычислить и свой номер.

— Вряд ли. Номеров в отеле бесконечно много, многие могут быть свободны. Да и не все числа используются как номер. Кажется, в моем отеле не было номеров 13 и 666.

— А разные копии одного постояльца могут обмениваться друг с другом информацией?

— Не могут. После распараллеливания общение идентичных сущностей абсолютно исключено.

— Зачем же тогда этот список? Он совершенно не помогает угадыванию.

— Э, нет… Небольшая лазейка остается. Я немного подумал, позвонил Бусеньке и согласился на их предложение.

— Распараллелился?

— Да! Причем Бусенька посоветовала мне заказать бесконечное количество копий!

Огрыза накрыла блюдо с пирожными высокой крышкой и унесла.

— Мне кажется, кто-то из нас спятил, – вернувшись, сказала она и с беспокойством посмотрела на дятла Спятла. – У одного дятла шансы угадать равны нулю. Сколько дятлов ни возьми – сумма нулей все равно 0.

— Что за пессимизм? Конечно, после распараллеливания уже особо не разгуляешься, но до него можно заранее все продумать и подготовиться.

— К чему?

— К угадыванию. Бусенька дала мне подробнейшую инструкцию. Что мы имеем? Есть бесконечное количество дятлов. Для удобства они все пронумерованы – первый, второй, третий и т.д., и у каждого имеется одно число – номер комнаты. Таким образом, задана последовательность чисел – *последовательность расселения*. Так как заранее нам ничего о ней не известно, приготовимся к тому, что последовательность расселения может оказаться совершенно произвольной. Даже не обязательно, чтобы числа в ней были целые.

— Как произвольная? Как не обязательно целые? А еще ведь числа не должны повторяться.

— Неважно. Пусть не обязательно целые, пусть повторяются, не жалко. Каждый дятел, скажем десятый, видит в последовательности расселения все числа, кроме «своего», т.е. десятого. Он может мысленно добавить в эту последовательность на десятое место любое число, обозначающее гипотетический номер его комнаты. Такую последовательность будем считать *перспективной*. Каждый дятел может построить бесконечно много перспективных последовательностей, но они все «почти одинаковые» – отличаются только гипотетическим номером его комнаты. Зато у разных дятлов перспективные последовательности обычно отличаются уже в двух местах – там, где настоящие номера комнат этих двух дятлов заменены на гипотетические.

— По-моему, это какое-то бесперспективное умствование. Угадывать-то как будем?

— Я тоже не видел перспектив, пока Бусенька не открыла мне глаза. Договоримся считать, что две последовательности *похожи*, если они отличаются конечным числом членов. Кстати, если первая последовательность похожа на вторую, а также на третью, то вторая и третья тоже будут между собой похожи. Правда?

— Эээ, ну... кажется, да. Потому что если первая отличается от второй, скажем, в двадцати местах, а от третьей в сорока, то вторая от третьей нигде, кроме этих шестидесяти (или сколько их там) мест отличаться не будет.

— Правильно! Возьмем теперь вместе с последовательностью расселения все последовательности, которые на нее похожи.

— Куда возьмем?

— Ну... не возьмем, а представим себе, что у нас имеется список, где они все выписаны. Если мы теперь придумаем новую последовательность, которой нет в списке, то окажется, что и новая последовательность, и все, которые на нее похожи, у нас тоже не выписаны! Мы тогда их выпишем в новом списке. Теперь снова возьмем последовательность, которая у нас еще не записана ни в том списке, ни в другом. Тогда опять и она, и все последовательности, которые на нее похожи, у нас еще не выписаны. Получается, что множество всех последовательностей можно разбить на такие вот списки – каждый список состоит из похожих друг на друга последовательностей.

— Кажется, это только подчеркивает безнадежность процесса.

— Наоборот. Это делает его воодушевляющим! Давай в каждом списке отметим любую последовательность и будем называть ее *главной* в этом списке.

— Тоже мне триумф.

— А теперь посмотрим на мир глазами дятлов! Каждый дятел знает всю последовательность расселения с точностью до мелочи (он не знает в ней только номера своей комнаты). Значит, он может понять, в каком списке находится последовательность расселения. Тогда пусть он при угадывании назовет тот номер своей комнаты, который указан в главной последовательности этого списка. Понимаешь?

— Не очень.

— Во-первых, все дятлы выберут один и тот же список, а значит, и одну и ту же главную последовательность. Во-вторых, последовательность расселения отличается от главной последовательности только в конечном числе мест. Поэтому все дятлы, кроме конечного числа, правильно угадают номер своей комнаты!

— Ой! – Огрыза панически схватила вазочки с вареньем и орешками и молниеносно спрятала их в буфет.

— Таким образом, бесконечное число дятлов, а лучше сказать, все кроме нескольких, получают право на бесплатный ужин!

— Бедненький. Каждый день ты съедал бесконечное количество бесплатных ужинов? С сегодняшнего дня переходим на низкокалорийную диету! – И она убрала со стола сахарницу. На столе остались только две чашки и заварочный чайник. – Надеюсь, за время отпуска это был единственный неприятный сюрприз?

— Нет, к сожалению. Потом случилось землетрясение. Ведь если вероятность события равна нулю, то это не значит, что оно невозможно!

## Комментарий

Рассмотрим какое-нибудь множество, например, множество товаров, выставленных в торговом зале некоторого магазина. Товары разложены по полкам. Покупатель поочередно обходит полки и кладет в корзину нужные ему товары. Для определенности будем считать, что с каждой полки берут только один товар. Так формируется покупка – множество, состоящее из выбранных товаров. Процесс этот привычный, наглядный и допускает следующее математическое оформление.

*Пусть множество $A$ представлено в виде объединения непересекающихся множеств:*

$$A = B \cup C \cup D \cup \ldots$$

*Тогда можно построить множество $X$, содержащее по одному элементу из каждого множества $B$, $C$, $D$,…*

В нашем примере $A$ – множество товаров в магазине, $B$, $C$, $D$, … – множества товаров, лежащих на полках, $X$ – покупка. И на самом деле в этой формулировке незримо присутствует еще одно множество, замаскированное в формуле значком многоточия, – множество, по которому по которому берется объединение (множество полок в магазине). Разумеется, вместо $A$ можно брать произвольное множество и разбивать его на произвольные части. Так, в сказке множество $A$ – это множество всевозможных последовательностей вещественных чисел, разбитое на части, каждая из которых содержит некоторую «главную» последовательность (на самом деле, это совершенно любая последовательность, выбранная в этой части), а также те и только те последовательности, которые на нее «похожи» (отличаются в конечном числе мест). Эти части множества последовательностей дятел Спятел назвал списками.

Как построить такое разбиение множества последовательностей на списки? В сказке дятел объясняет, как. Чтобы построить первый список, назовем его $B$, возьмем любую последовательность, например $(0, 0, 0, 0,\ldots)$, назовем ее главной и, кроме нее, поместим в список $B$ все последовательности, которые отличаются от главной в конечном числе мест. Список $B$ построен. Кстати, если бы речь шла только о последовательностях целых чисел, можно было бы считать, что $B$ – это действительно бесконечный список: последовательности выписаны в воображаемой таблице, в каждой строке выписана одна последовательность, а сами строки пронумерованы натуральными числами. А вот для последовательностей вещественных чисел множество $B$ окажется несчетным – его элементы нельзя пронумеровать натуральными числами, оно является бесконечным множеством, «более крупным», чем множество натуральных чисел. Называть его списком можно разве лишь в художественном смысле.

Теперь строим второй список, назовем его $C$. Возьмем любую последовательность, которая не входит в $B$, например $(0, 1, 0, 1, 0, 1,\ldots)$, назовем теперь эту последовательность главной и выпишем в списке $C$ все последовательности, отличающиеся от главной в конечном числе мест. Список $C$ тоже построен. Берем теперь следующую последовательность, не содержащуюся ни в $B$, ни в $C$, и т.д.

Отметим, однако, что это последнее «и т.д.» при его кажущейся наглядности и убедительности совсем не очевидное. Что значит «и так далее»? Это значит, что мы аналогично построим третий список, четвертый, сотый, миллионный… Но даже если вообразить, что завершился бесконечный процесс и для каждого натурального $n$ мы построили $n$-й список, содержимое этих списков не исчерпывает все множество последовательностей по той же причине, что и выше: множество последовательностей, состоящих из целых чисел, несчетно, а каждый список содержит лишь счетное множество таких последовательностей. Построить описанным способом множество списков и уж тем более множество всех главных последовательностей нам не удастся! Логика покупателя в магазине здесь дает сбой.

Но если в реальной жизни нельзя, то в сказке-то можно. Видимо, дятел Спятел обладает более мощной способностью «и так далее», чем мы. Быть может, потренировавшись на создании первого–второго–третьего списка, дятел умеет генерировать совокупность списков, которые пронумерованы не натуральными, а, например, вещественными числами.

Да-да, видимо так и есть! С этой способностью дятел без проблем построит и совокупность всех списков, и множество их главных последовательностей, «выдернув» из каждого списка по одному элементу.

Мы же, не обладая сверхспособностями дятла Спятла и будучи неспособными предложить конструкцию построения ни для множества списков, ни для множества главных последовательностей, вправе усомниться: а на каком основании?! Почему эти множества вообще существуют? В сказке приведено рассуждение, где используются эти множества. Мы сами, вжившись в проблемы персонажа, готовы с ними работать. Но… существуют ли они?

Э-э-э-э, кажется, колеблется привычный смысл слов… Одинаково ли мы с вами, читатель, понимаем слово «существуют»? Этак мы навоображаем себе и треугольники с отрицательными углами, и логарифмы отрицательных чисел, и множества, содержащие себя в качестве элементов, и пространства дробной размерности…[1] Да и в конце концов, имеется много теорем, доказываемых «от противного». В них предполагают, что «противное» существует, долго разбираются, каковы должны быть свойства этого «противного», возятся с ним, осматривают со всех сторон и, поднакопив информацию, приходят к выводу, что все-таки это «противное» «в природе не встречается». Вот и скажите мне, что тут существует, а что нет.

Прочь, прочь, от всяких философских дебрей! В математике давно зафиксированы все правила игры,[2] они называются аксиомами. Существование множеств, о которых идет речь в сказке, гарантируется аксиомой выбора. Она утверждает… более-менее то, что написано курсивом во втором абзаце этого комментария – имея объединение непересекающихся множеств, мы можем построить новое множество, взяв из каждого по одному элементу. Пока вы работаете с конечными множествами, это очевидно, как в примере с магазином (а тем, кто все еще сомневается, намекнем: товары в магазине пронумерованы!). Но для «больших» множеств эта очевидность разбивается наивным вопросом «как это сделать?».

Именно благодаря аксиоме выбора множество главных последовательностей, описанное в сказке, корректно определено, как бы далеко оно ни было от возможности построения. Отметим еще, что сама идея того, что после объявления некоторых последовательностей похожими друг на друга[3] мы сумеем множество последовательностей разбить на списки (состоящие из похожих последовательностей), на самом деле тоже опирается на аксиому выбора! Потому что мы не имеем права объединять «что попало» – операция объединения множеств требует по определению (или по аксиоме объединения), чтобы совокупность объединяемых множеств сама была множеством. В нашем случае понятно, что представляет собой отдельный список, а что такое множество всех списков? Да это почти то же самое, что и множество главных последовательностей, – взаимно однозначное соответствие между ними лежит на поверхности!

Вот и хорошо. В торговом зале нашего бесконечного магазина оказались математически корректными и множество полок, по которым разложены товары, и набор товаров, составляющих покупку. И, несмотря на контринтуитивный финал (казалось бы, при отсутствии информации почти все дятлы сумели угадать номер своей комнаты), сказка тоже математически корректна. А то, что такой фокус нельзя провернуть конструктивно… Это просто значит, что вы так не сможете. Это волшебство!

[1] Впрочем, кое-что из этого, кажется, и впрямь существует.

[2] На самом деле, не так уж давно. Да и все ли?

[3] Математически это называется отношением эквивалентности.

# КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

***Мы продолжаем конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на учащихся начиная с 8–9 классов, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт kvantik.com).***

***Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com . Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь.***

***Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.***

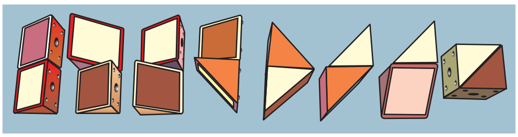
***Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest***

***Желаем успеха!***

**9.** На блюде лежат пирожки с капустой, картошкой и яблоками: больше всего – с капустой, а меньше всего – с яблоками. Школьники по одному подходят и берут по одному пирожку, причем того сорта, которого в этот момент больше всего, а если такой сорт не один – любого из таких сортов. Вскоре оказалось, что пирожков с яблоками столько, сколько всех остальных в сумме, причем все три сорта еще есть. Можно ли определить, сколько в этот момент на блюде пирожков каждого сорта?

*Б.Френкин*

**10.** У Васи сломалась головоломка «Змейка Рубика», состоящая из 24 одинаковых треугольных призм. Каждая призма – это половинка кубика $1\times1\times1$. Из 16 таких полукубиков он склеил 8 различных фигурок так, как показано на рисунке. Сможет ли



Вася из этих восьми фигурок сложить куб $2\times2\times2$?

*Н.Авилов*

**11.** При каком наименьшем $k$ найдется 20-угольник (возможно, невыпуклый), который можно разрезать на $k$ параллелограммов?

*П.Кожевников*

**12.** Числа 1,2, …,100 покрасили в 10 цветов, в каждый цвет по 10 чисел. Затем посчитали все положительные разности между числами разного цвета. Какое наименьшее значение может принимать сумма всех таких разностей?

*Е.Бакаев*

**13.** Буквы русского алфавита заменены числами от 1 до 33 в неизвестном порядке (разные буквы – разными числами). Эмма записала этим кодом свое имя (без пробелов), и так же поступили Вера и Леонтий.

а) Может ли быть, что Эмма и Вера написали одно и то же число?

б) Может ли быть, что одно и то же число написали Эмма и Леонтий?

*Т.Казицына*

**14.** Найдите наибольшую возможную площадь четырехугольника, какие-то две стороны которого равны 1 и какие-то две стороны равны 2.

*Фольклор*

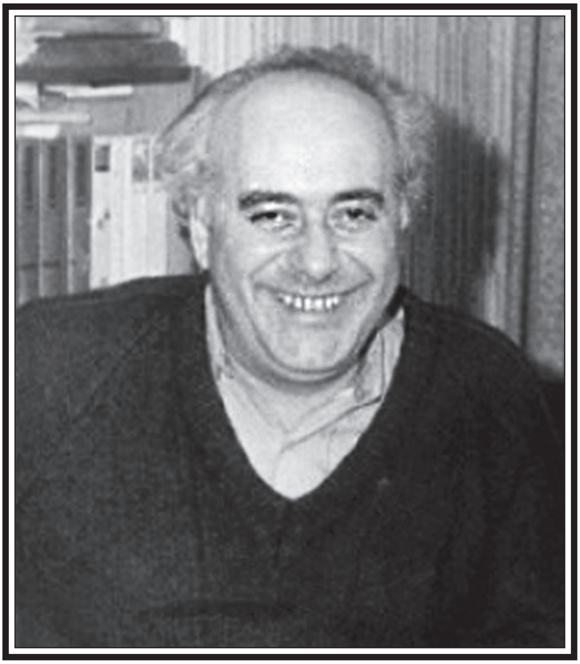
**15.** Блоха сидит в точке $(0;0)$ плоскости. Можно посадить в $n$ любых точек плоскости клопов. Блохе разрешается прыгать симметрично относительно любого клопа. При каком наименьшем $n$ можно посадить клопов так, чтобы до каждой из целых точек вида $(x;y)$, где $0 \le x, y \le 100$, блоха могла добраться за несколько прыжков?

*Е.Бакаев*

**16.** Числа 1, 2, 3, …, 1000000 выписаны в ряд в таком порядке, что сумма любых 10 подряд идущих чисел равна $s$ или $t$. Найдите все пары $s$ и $t$, при которых это возможно.

*Е.Бакаев*

# ПАМЯТИ Ж.М.РАББОТА



**Жозеф Михайлович Раббот**
**(07.03.1943 – 22.11.2022)**

22 ноября 2022 года не стало Жозефа Михайловича Раббота, одного из ярких специалистов в области математического образования в нашей стране. Деятельность Жозефа Михайловича была исключительно разносторонней: он преподавал в школе и вузе, вел маткружки в МГУ, читал по всей стране лекции для школьников и учителей, писал книги, многочисленные статьи и учебные пособия по математике, активно работал в журнале «Квант» с момента его создания, организовывал различные математические олимпиады, на протяжении двенадцати лет работал в жюри Всесоюзной математической олимпиады.

В 1966 году организатор и руководитель Всесоюзной заочной математической школы (ВЗМШ, впоследствии Всероссийская заочная многопредметная школа), один из крупнейших математиков XX века И.М.Гельфанд пригласил талантливого выпускника мехмата МГУ, опытного руководителя университетского студенческого кружка Женю Раббота преподавать в свою школу. На протяжении полувека Жозеф Михайлович работал заместителем директора ВЗМШ, многие годы руководил ее математическим отделением.

ВЗМШ – уникальное учреждение, ее замечательные преподаватели работали по переписке по почте с увлеченными математикой и физикой детьми из самых отдаленных мест нашей страны. Этой работой и руководил Ж.М.Раббот. Личный контакт со столичными математиками, их внимание и поддержка имели колоссальное значение для школьника из далекой глубинки и влияли на выбор будущей профессии. Тысячи и тысячи специалистов в самых разных областях науки и ее приложений благодарны Жозефу Михайловичу Рабботу за то, что много лет назад они получали от него по почте сначала задания и пособия, затем рецензии на их работы, слова поддержки, приглашение приехать в Москву.

Светлая память!

# Бум и шшш...

Л.АШКИНАЗИ

Сначала поговорим про «бум» – это удар, а потом про «шшш» – это шуршание при скольжении.

Не так давно в «Кванте» рассматривались разные вопросы, связанные с соударением («Удар и его окрестности». – «Квант», 2021, № 6), но при этом не затрагивался один вопрос – о звуковом сопровождении удара, полагая его частично давно решенным, а частично – слишком сложным. В физике такая ситуация совершенно нормальна и обычна, тем интереснее, когда в области на границе между этими соударяющимися объектами находится что-то необычное.

Для измерения времени соударения твердых тел нужны все-таки приборы, а звук соударения слышен ушами. Частота этого звука обратно пропорциональна времени соударения, а оно, например, при столкновении торцами двух одинаковых цилиндров, сближающихся с не слишком большими скоростями, равно $T = 2L/v_{зв}$, где $L$ – длина, $v_{зв}$ – скорость звука в цилиндрах (Е.И.Бутиков, А.А.Быков, А.С.Кондратьев. «Физика в примерах и задачах». – МЦМНО, 2019). Мы понимаем, что при столкновении генерируется не монохроматический сигнал, что могут возбуждаться колебания разных типов, но все-таки ответ должен быть разумным. Подставляем $L = 1$ см и $v_{зв} = 5000$ м/с (сталь), получаем $T = 2$ мкс. Это соответствует частоте 500 кГц – минимум на два порядка выше того, что мы слышим при соударениях (килогерцы).

Первое естественное возражение – мы сталкиваем не идеальные цилиндры, а непонятно какие объекты, которые касаются друг друга маленькими участками. Для соударения шаров, с которыми мы чаще и работаем, существует теория Герца (это тот самый Генрих Герц, в честь которого названа единица измерения частоты, а список того, что он сделал в физике, удвоил бы размер этой статьи). Согласно его теории, время соударения оказывается (при замене длины $L$ на диаметр) больше в $(v_{зв}/v)^{1/5}$ раз (А.Гросберг, М.Каганов. «Сколько энергии уносит звук». – «Квант», 1996, № 2). Если положить, например, $v = 5$ м/с, то время оказывается больше в 4 раза, а частота будет, соответственно, в 4 раза ниже. Это уже чуть лучше, но до реального звука еще остается 1,5 порядка.

Реальные объекты, однако, не цилиндры с идеальными плоскопараллельными торцами и даже не идеальные шары. Пусть наши объекты соприкасаются шероховатыми поверхностями и пусть шероховатости – простейшая модель – это выступы сечением $s$ и высотой $l$, а весь цилиндр имеет сечение $S$ и длину $L$. Но прежде покажем, как можно провести оценку для цилиндра.

Сначала введем определение модуля Юнга $E$, чтобы потом воспользоваться формулой для скорости звука $v_{зв} = (E/\rho)^{1/2}$, где $\rho$ – плотность, т.е. отношение массы $M$ к объему $SL$. Тогда имеем $\Delta L/L = F/(SE)$, где $F$ – сила, и $F/\Delta L = SE/L$. Далее рассматриваем нашу ситуацию как колебание груза на пружине и имеем период, т.е. время соударения, $T = 2\pi(M/k)^{1/2} = 2\pi(M/(F/\Delta L))^{1/2}$. Подставляя сюда выражение для $F/\Delta L$, получим

$$T = 2\pi L(\rho/E)^{1/2} = 2\pi L/v_{зв}.$$

Иногда просто говорят, что время соударения – это время, за которое звук сбегает туда и обратно, и получают похожий, но без множителя $\pi$, ответ.

Теперь просто повторим этот вывод, причем – это ключевой момент рассуждения – по-прежнему считая, что $M = \rho SL$, однако в выражении для $F/\Delta L$ используя не $S$ и $L$, а s и $l$, т.е. параметры не для всего цилиндра, а для элементов шероховатости. Таким образом мы полагаем, что вся масса тормозится деформацией элементов шероховатости. Уже понятно, что это увеличит время торможения и понизит частоту. Но насколько?

Делаем преобразования:

$$T = 2\pi(M/(F/\Delta L))^{1/2} = 2\pi(\rho SL/(sE/l))^{1/2} =$$

$$= 2\pi(\rho SL^2 l/(sEL))^{1/2} = 2\pi(L/v_{зв})((S/s)(l/L))^{1/2}.$$

Мы получили время большее, а частоту меньшую в $N = ((S/s)(l/L))^{1/2}$ раз. Забавный

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20221104

ответ – все завязано на геометрию. Разумная численная оценка такова. Пусть $L = 1$ см, $S = 1$ см$^2$, $l$ – от 0,1 мкм (шлифование, полирование) до 3 мкм (точение), $s$ – от 0,01 мкм$^2$ до 10 мкм$^2$. В этом диапазоне наш множитель $N = 300{-}60$, т.е. вместо 500 кГц (оценка для цилиндра) получаем 2–10 кгц – звуковой диапазон.

Попутно становится ясно, почему музыканты не используют сталкивающиеся цилиндры, а предпочитают камертоны – шероховатость в значительной мере хаотична, поэтому генерируется широкополосный сигнал. Ну, примерно такой: бум-с!

Но этим дело не кончается, потому что звук возникает не только при ударе, но и при трении. Этакое шуршание, и с ним ситуация еще менее понятна, чем при ударе.

Почему при трении слышен звук? Звук – это колебания воздуха, и вот механизмы их возникновения. Первый – механические колебания твердого тела (камертон, колокол) или жидкости, передающиеся в газ. Второй механизм – импульсный локальный нагрев газа (молния) и его расширение. Третий – колебания, возникающие в потоке газа при огибании им препятствия (краевой тон, вихри Кармана) или на границе области нагрева (пламя).

При трении рукой по бумаге и вообще при не слишком больших скоростях перемещения источником колебаний в воздухе могут быть только колебания в соприкасающихся объектах. Считается, что эти колебания возникают из-за «схватывания», слипания микрошероховатостей и разрушения этих «мостиков» при перемещении. Представьте, что вы натянули пружину и она порвалась – вот и колебания. Действительно, экспериментально показано, что звук громче, если износ поверхностей сильнее. Микрошероховатостей много, и они разные, поэтому получается именно шум – широкополосный и случайный звук. Этот механизм не единственный, имеют значение еще и колебания трущегося тела как целого – такие же, как при ударе.

В общем, это довольно темная область. Может быть потому, что в область контакта между трущимися телами трудно заглянуть? Да и возникновение колебаний при трении атомно-гладких поверхностей еще никто не исследовал…

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

# Физико-математическая олимпиада «Физтех»

## Математика

*10 класс*

### Вариант 1

**1.** Числа $a$, $b$, $c$ являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа $a$, $b$, $c$ не заданы), а четвертый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

**2.** Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

**3.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

**4.** а) В прямоугольном треугольнике $ABC$ на катете $AC$ и гипотенузе $AB$ отмечены точки $D$ и $E$ соответственно такие, что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла $BAC$, если известно, что $\angle CED = 45°$.

б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника $CED$.

**5.** Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Найдите радиусы окружностей и площадь четырехугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

**6.** Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство $2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x - 1|$ выполнено для всех $x$ на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

**7.** Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \le x \le 21$, $1 \le y \le 21$ и $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$.

*11 класс*

**Вариант 1**

**1.** Углы $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют равенствам $\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$. Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определен и что этих значений не меньше трех.

**2.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

**3.** Решите неравенство

$$5^{\log_{12}\left(x^2+18x\right)} + x^2 \ge \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

**4.** Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Прямая, проходящая через точку $E$ перпендикулярно $BC$, повторно пересекает $\Omega$ в точке $F$. Найдите радиусы окружностей, угол $AFE$ и площадь треугольника $AEF$, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

**5.** Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \le x \le 24$, $1 \le y \le 24$ и $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$.

**6.** Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство $\frac{12x+11}{4x+3} \le ax + b \le -8x^2 - 30x - 17$ выполнено для всех $x$ на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right]$.

**7.** Дана пирамида $ABCD$, вершина $A$ которой лежит на одной сфере с серединами всех ее ребер, кроме ребра $AD$. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра $BC$. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

**Вариант 2**

**1.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = 44, \\ y - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = -20. \end{cases}$$

**2.** Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{3x} x^4} \le \log_{9x} \frac{1}{x^2}.$$

**3.** Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12345.

**4.** Даны равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD$ и $BC$ – основания, $AD > BC$) и окружность $\omega$ с центром $C$, касающаяся стороны $AD$. Касательные к $\omega$, проведенные из точки $B$, пересекают прямую $AD$ в точках $P$ и $Q$ (точка $P$ лежит между $Q$ и $D$). На продолжении стороны $CB$ за точку $B$ выбрана точка $N$ так, что $\angle CPN$ прямой. Найдите углы $ADC$, $NQC$ и площадь четырехугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg}\frac{12}{5}$, $AP = \frac{13}{2}$, $NC = 13$.

**5.** Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 9\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right), \\ \cos(x+2y) - \sqrt{3}\sin(x+2y) = -16\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

**6.** Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\sqrt{\frac{275}{4} + 25x - x^2} \le ax + b \le -\frac{x^2}{3} + \frac{5x}{3} + \frac{45}{4}$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $\left[-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right]$.

**7.** Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, грани $ABCD$ и $CDD_1C_1$ которого являются прямоугольниками. Сфера $S$ касается прямых $B_1C_1$ и $C_1D_1$, плоскости $CDD_1$, а также плоскости $ABC$ в точке $A$. Эта сфера повторно пересекает отрезок $AC_1$ в точке $M$. Найдите $\angle BB_1C_1$ и объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AM = 5$, $C_1M = 3$.

## Физика

*9 класс*

### Вариант 1

**1.** Школьник бросает камень вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 12$ м/с.

1) Через какое время $t$ после старта скорость камня будет равна по величине $v_0/3$?

2) На какой высоте $h$, отсчитанной от точки старта, скорость камня будет равна по величине $v_0/3$?

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с$^2$. Сопротивление воздуха не учитывать.

**2.** На горизонтальной поверхности расположены два цилиндрических сообщающихся сосуда (рис. 1), в которых налита жидкость плотностью $\rho$. На свободных поверхностях жидкости находятся легкие поршни. Зазоров между стенками сосудов и поршнями нет. Левый поршень соединен пружиной жесткостью $k$ с верхней опорой. Разность уровней жидкости в сосудах равна $h$. Площадь сечения левого поршня $S$, правого $S/2$. Трение поршней о стенки сосудов пренебрежимо мало. Ускорение свободного падения равно $g$.

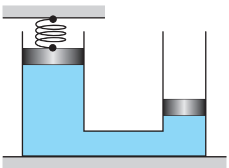


*Рис. 1*

1) Найдите деформацию $x$ пружины.

2) Найдите массу $m$ груза, который следует положить на правый поршень, чтобы пружина стала недеформированной. Поршни при этом не достигают дна.

**3.** Спутник обращается по круговой орбите вокруг планеты. Высота орбиты $h = 0{,}5R$, здесь $R$ – радиус планеты. Плотность планеты $\rho$. Гравитационная постоянная $G$. Объем шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

1) Найдите ускорение $g$ свободного падения на расстоянии $2R$ от центра планеты.

2) Найдите период $T$ обращения спутника.

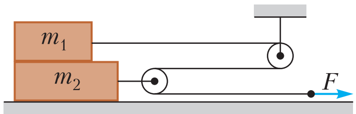



*Рис. 2*

**4.** На горизонтальном столе находятся бруски, соединенные нитью с системой блоков (рис. 2). Массы брусков $m_1 = 2m$, $m_2 = 3m$. Коэффициент трения скольжения нижнего бруска по столу и верхнего бруска по нижнему равен $\mu$. Массы нити и блоков, а также трение в осях блоков пренебрежимо малы.

1) Найдите величину $F_0$ горизонтальной силы, которую следует приложить к свободному концу нити, чтобы нижний брусок скользил по столу, а сила трения, действующая на верхний брусок, была равна нулю.

2) Найдите величину $F$ минимальной силы, при которой нижний брусок скользит по столу, а верхний брусок движется влево относительно нижнего бруска.

**5.** Ко дну бассейна глубиной $H = 2{,}5$ м приклеена осесимметричная конструкция (рис. 3). Клей затвердел. Верхняя поверхность конструкции – полусфера. Объем конструкции $V = 8$ дм$^3$, площадь соприкосновения конструкции с дном через клей $S = 20$ см$^2$. Плотность воды $\rho = 1$ г/см$^3$, атмосферное давление $p_0 = 100$ кПа. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с$^2$.

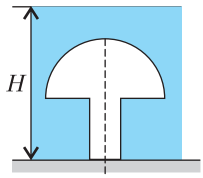



*Рис. 3*

1) Найдите давление $p_1$ вблизи дна.

2) Найдите величину $F$ силы (с указанием направления), с которой вода действует на конструкцию.

*10 класс*

### Вариант 1

**1.** Фейерверк массой $m = 2$ кг стартует после мгновенной работы двигателя с горизонтальной поверхности, летит вертикально вверх и разрывается в высшей точке траектории на множество осколков, которые летят во всевозможных направлениях с одинаковыми по величине скоростями. Высота точки разрыва $H = 65$ м. На землю осколки падают в течение $\tau = 10$ с.

1) Найдите начальную скорость $v_0$ фейерверка.

2) Найдите суммарную кинетическую энергию $E_к$ осколков сразу после взрыва.

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с$^2$. Сопротивление воздуха считайте пренебрежимо малым.

**2.** На гладкой горизонтальной поверхности расположен клин. Гладкая наклонная поверхность клина образует с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Шайбе, находящейся на наклонной поверхности клина, сообщают начальную скорость $v_0 = 2$ м/с (рис. 4), далее шайба безотрывно скользит по клину. Массы шайбы и клина одинаковы. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с$^2$.

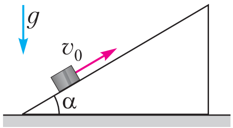


*Рис. 4*

1) На какую максимальную высоту $H$ над точкой старта поднимется шайба на клине?

2) Найдите скорость клина в тот момент, когда шайба вернется в точку старта на клине.

**3.** По внутренней поверхности проволочной металлической сферы радиусом $R = 1{,}2$ м равномерно со скоростью $v_0 = 3{,}7$ м/с движется модель автомобиля. Движение происходит в горизонтальной плоскости большого круга. Масса модели $m = 0{,}4$ кг. Модель приводится в движение двигателем. Силу сопротивления считайте пренебрежимо малой.

1) С какой по величине силой $F$ модель действует на сферу?

2) Рассмотрим модель автомобиля, равномерно движущуюся по окружности в плоскости большого круга, составляющей с горизонтом угол $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Вычислите минимальную допустимую скорость $v_{\min}$ такого равномерного движения. Коэффициент трения скольжения шин по поверхности сферы $\mu = 0{,}9$.

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с$^2$.

**4.** Один моль одноатомного идеального газа участвует в цикле *1–2–3–1* (рис. 5), участок *1–2* – дуга окружности с центром в точке *3*. Температура газа в состоянии *1* равна $T_1$. Универсальная газовая постоянная равна $R$.

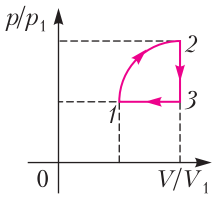


*Рис. 5*

1) Какое количество теплоты $Q$ подведено к газу в процессе расширения?

2) Найдите работу $A$ газа за цикл.

3) Найдите КПД $\eta$ цикла.

**5.** Заряд $Q > 0$ однородно распределен по сфере радиусом $R$. В первом опыте на расстоянии $2R$ от центра сферы помещают небольшой по размерам шарик с зарядом $q > 0$.

1) Найдите силу $F_1$, действующую на заряженный шарик.

Во втором опыте заряд $q$ однородно распределяют по стержню длиной $R$, стержень помещают на прямой, проходящей через центр заряженной сферы. Ближайшая к центру сферы точка стержня находится на расстоянии $2R$ от центра.

2) Найдите силу $F_2$, с которой заряд сферы действует на заряженный стержень.

Все силы, кроме кулоновских, считайте пренебрежимо малыми. Коэффициент пропорциональности в законе Кулона равен $k$. Явлениями поляризации пренебрегите.

*11 класс*

**Вариант 1**

**1.** Массивная плита движется с постоянной скоростью $u$ вертикально вверх. К плите подлетает шарик, имеющий перед ударом скорость $v_1 = 8$ м/с, направленную под углом $\alpha$ $\left(\sin\alpha = \frac{3}{4}\right)$ к вертикали (рис. 6). После неупругого удара о гладкую горизонтальную поверхность плиты шарик отскакивает со скоростью $v_2$, составляющей угол $\beta$ $\left(\sin\beta = \frac{1}{2}\right)$ с вертикалью.

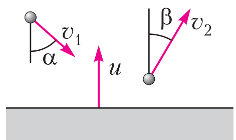


*Рис. 6*

1) Найдите скорость $v_2$.

2) Найдите возможные значения скорости плиты $u$ при таком неупругом ударе.

Действие силы тяжести за малое время удара не учитывать. Ответы допустимы через радикалы из целых чисел.

**2.** Цилиндрический теплоизолированный горизонтально расположенный сосуд разделен на два отсека теплопроводящим поршнем, который может перемещаться горизонтально без трения. В первом отсеке находится азот, во втором – кислород, каждый газ в количестве $\nu = 3/7$ моль. Начальная температура азота $T_1 = 300$ К, а кислорода $T_2 = 500$ К. Температуры газов начинают медленно выравниваться, а поршень начинает медленно двигаться. Газы считайте идеальными с молярной теплоемкостью при постоянном объеме $C_V = 5R/2$ ($R = 8{,}31$ Дж/(моль · К)).

1) Найдите отношение начальных объемов азота и кислорода.

2) Найдите установившуюся температуру в сосуде.

3) Какое количество теплоты передал кислород азоту?

**3.** Две бесконечные плоские прямоугольные пластины $AB$ и $BC$ перпендикулярны друг к другу и образуют двугранный угол с ребром $B$. На рисунке 7 показано сечение угла плоскостью, перпендикулярной ребру $B$.

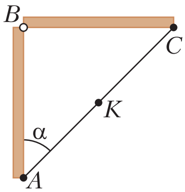


*Рис. 7*

1) Пластина $BC$ заряжена с постоянной поверхностной плотностью заряда. Угол $\alpha = \pi/4$. Во сколько раз увеличится напряженность электрического поля в точке $K$ на середине отрезка $AC$, если пластину $AB$ тоже зарядить с такой же поверхностной плотностью заряда?

2) Пластины $BC$ и $AB$ заряжены положительно с поверхностными плотностями заряда $\sigma_1 = 2\sigma$, $\sigma_2 = \sigma$ соответственно. Угол $\alpha = \pi/7$. Найдите напряженность электрического поля в точке $K$ на середине отрезка $AC$.

**4.** Электрическая цепь собрана из идеальных элементов: источника с ЭДС $\mathscr{E}$, катушек индуктивностями $L_1 = 2L$, $L_2 = L$, конденсатора емкостью $C$, диода $D$ (рис. 8). Ключ $K$ разомкнут, конденсатор не заряжен, тока в цепи нет. После замыкания ключа устанавливаются колебания тока в катушке индуктивностью $L_1$.

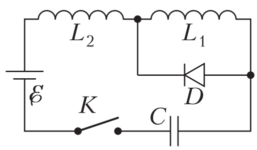


*Рис. 8*

1) Найдите период $T$ этих колебаний.

2) Найдите максимальный ток $I_{m1}$, текущий через катушку индуктивностью $L_1$.

3) Найдите максимальный ток $I_{m2}$, текущий через катушку индуктивностью $L_2$.

**5.** Оптическая система состоит из двух соосных тонких линз $Л_1$ и $Л_2$ (рис. 9,*а*) с фокусным расстоянием $F_0$ у каждой. Расстояние между линзами $3F_0$. Диаметры линз одинаковы и равны $D$, причем $D$ значительно меньше $F_0$. На линзу $Л_1$ падает параллельно оси системы пучок света с одинаковой интенсивностью в сечении пучка. Прошед-

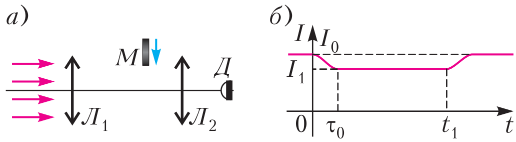


*Рис. 9*

ший через обе линзы свет фокусируется на фотодетекторе $Д$, на выходе которого сила тока пропорциональна мощности падающего на него света. Круглая непрозрачная мишень $M$, плоскость которой перпендикулярна оси системы, движется с постоянной скоростью перпендикулярно оси системы так, что центр мишени пересекает ось на расстоянии $2F_0$ от линзы $Л_1$. На рисунке 9,*б* показана зависимость тока $I$ фотодетектора от времени $t$ (секундомер включен в момент начала уменьшения тока), $I_1 = 3I_0/4$.

1) Найдите расстояние между линзой $Л_2$ и фотодетектором.

2) Определите скорость $v$ движения мишени.

3) Определите $t_1$.

Известными считать величины $F_0$, $D$, $\tau_0$.

### Вариант 2

**1.** Груз массой $m$ подтягивается по гладкой горизонтальной поверхности к стене с помощью лебедки, неподвижного небольшого легкого блока и легкого троса (рис. 10).

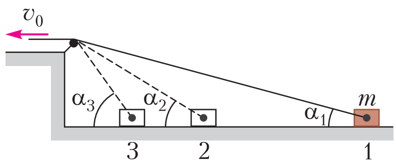


*Рис. 10*

Трос вытягивается лебедкой с постоянной скоростью $v_0$. Груз последовательно проходит точки 1, 2 и 3, для которых $\sin\alpha_1 = \dfrac{1}{4}$, $\sin\alpha_2 = \dfrac{2}{3}$, $\sin\alpha_3 = \dfrac{3}{4}$. От точки 1 до точки 2 груз перемещается за время $t_{12}$.

1) Найдите скорость $v_2$ груза при прохождении точки 2.

2) Найдите работу лебедки $A_{12}$ при перемещении груза из точки 1 в точку 2.

3) Найдите время $t_{13}$ перемещения груза из точки 1 в точку 3.

**2.** Цилиндрический сосуд, стоящий на горизонтальном столике, помещен в термостат, в котором поддерживается постоянная температура $T_0 = 373$ К. Стенки сосуда проводят тепло. Сосуд разделен на две части подвижным (нет трения при перемещении) поршнем. В нижней части находится воздух объемом $V_1$, в верхней – водяной пар и немного воды. Содержимое сосуда в равновесии. Поршень своим весом создает добавочное давление $p_0/8$, где $p_0$ – нормальное атмосферное давление. Сосуд переворачивают и ставят на столик, в верхней части оказывается воздух. Через некоторое время устанавливается новое равновесное состояние.

1) Найдите объем $V_2$ воздуха в сосуде после переворачивания.

2) Найдите изменение массы $\Delta m$ воды.

3) Найдите изменение внутренней энергии содержимого сосуда.

Удельная теплота испарения воды $L$, молярная масса воды М. Массой воды, пара и воздуха по сравнению с массой поршня пренебречь. Объемом воды при конденсации пара можно пренебречь по сравнению с объемом пара, из которого образовалась вода. Воздух считайте идеальным газом.

**3.** Два тонкостенных полых проводящих шара (тонкостенные сферы) с общим центром и радиусами $r_1$ и $r_2$ образуют сферический конденсатор (рис. 11). На внешнем шаре находится положительный заряд $q$, а на внутреннем шаре – положительный заряд $Q$. Внутренний шар соединен с Землей через ключ $K$ и резистор $R$. Ключ замыкают.

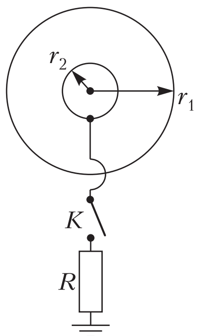


*Рис. 11*

1) Найдите заряд $q_1$ на внешнем шаре после замыкания ключа.

2) Найдите энергию $W_1$ электрического поля в пространстве между шарами (сферами) до замыкания ключа.

3) Какое количество теплоты $W$ выделится в резисторе после замыкания ключа? Сопротивление проводов, шаров и земли не учитывайте. Радиусы шаров значительно меньше расстояния между землей и шарами.

**4.** В проволочную конструкцию впаяны резисторы сопротивлениями $R_1 = R$, $R_2 = 3R$, идеальный источник с ЭДС $\mathcal{E}_0$, вольтметр сопротивлением $R_V = 5R$ (рис. 12). Сопротивление проводов конструкции пренебрежимо мало. Однородное магнитное поле сосредоточено практически в узкой области – магнитном сердечнике с площадью поперечного сечения $S$.

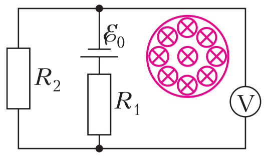


*Рис. 12*

1) Найдите показание $U_1$ вольтметра, если индукция магнитного поля остается постоянной.

2) Найдите показание $U_2$ вольтметра, если индукция магнитного поля возрастает с постоянной скоростью $\Delta B/\Delta t = k > 0$.

**5.** Цилиндрический сосуд с жидкостью вращается с угловой скоростью $\omega = 4\ \text{с}^{-1}$ вокруг вертикальной оси $AB$, совпадающей с осью симметрии сосуда (рис. 13). Наблюдатель, находясь вблизи экватора Земли, рассматривает в полдень изображение Солнца с помощью миниатюрной камеры $K$, расположенной на оси вращения.

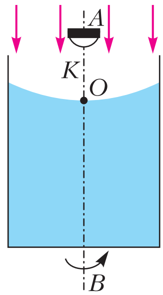


*Рис. 13*

1) Найдите радиус кривизны свободной поверхности жидкости в ее нижней точке $O$.

2) На каком расстоянии от точки $O$ будет наблюдаться изображение Солнца, полученное в отраженных от свободной поверхности жидкости лучах? Примите $g = 10\ \text{м/с}^2$.

*Публикацию по математике подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, И.Глухов, А.Головко, М.Голубев, С.Городецкий, В.Дубинская, Н.Королев, Е.Молчанов, П.Останин, О.Подлипский, С.Саулин, А.Скубачевский, Д.Терёшин;*

*по физике – В.Бабинцев, В.Плис, В.Усков, В.Чивилёв, А.Шеронов, И.Юдин, Ю.Юрьев*

# Секреты новогодней красавицы

**С.САЛИХОВ, Д.ЛИВАНОВ**

*Кристалл сахара под микроскопом*

ПРОВЕДЕМ МАЛЕНЬКИЙ ЭКСПЕРИмент. Возьмем стакан кипятка и начнем сыпать туда сахар, помешивая ложкой. Что мы увидим? Сахара мы не увидим точно, он растворился в воде. Но если попробовать воду на вкус, она будет сладкой. Так что сахар по-прежнему присутствует в воде – в виде мельчайших частиц, молекул.

Если сахар продолжать добавлять, что любят делать сладкоежки, то в какой-то момент он перестанет растворяться. Как бы мы ни мешали, растворить сахар не удастся. И еще одно важное наблюдение – в холодной воде количество растворенного сахара будет меньше. В одном литре воды комнатной температуры (20 градусов Цельсия) можно растворить два килограмма сахара, а в горячей воде (80 градусов) – уже три с половиной. Почему так происходит? Чем выше температура, тем больше объем жидкости, т.е. больше среднее расстояние между молекулами воды. А значит, между ними помещается и больше молекул сахара.

Любопытно, что с раствором можно встретиться... в облаке. Ведь растворы бывают и жидкими, и газообразными (в этом случае они называются смесями), и даже твердыми. С облаком происходит следующее. Когда под действием солнечных лучей вода испаряется, молекулы водяного пара оказываются в воздухе. Чем выше температура воздуха, тем больше водяного пара воздух может содержать. Как и в случае с сахаром в чае, в воздухе при различной температуре также можно растворить разное количество водяного пара.

Но что случится, если чай остынет, а воздух охладится? Если внимательно присмотреться к остывшему чаю, то на дне стакана можно обнаружить немного сахара. Откуда он взялся? Оказывается, при остывании «лишний» сахар выпал из раствора, и у нас получилось то, чем усердно занимаются академические институты, – вырастить кристаллы. Правда, выглядят эти кристаллы не очень впечатляюще. Но если постараться, то в выращивании кристаллов можно все-таки достичь определенных успехов.

С водой в воздухе происходит то же самое. Охлажденный воздух не может держать в себе столько водяного пара, сколько горячий. И молекулам воды в таком негостеприимном воздухе не остается ничего другого, кроме как объединяться в небольшие капельки. Это происходит и при охлаждении облака, и при выходе горячего воздуха с паром из носика чайника, и рано утром, когда выпадает роса. Капельки росы, осевшие на холодной траве или на перилах лестницы, – не что иное, как результат негостеприимства. В таком случае говорят, что воздух перенасыщен водяным паром. (Кстати, то же самое говорят и о растворе сахара, и о других растворах.) Например, при 10 градусах Цельсия в одном кубическом метре воздуха может содержаться 9,5 грамма воды, а при 20 градусах – уже почти 17 граммов.

К слову сказать, совершенно чистый воздух можно перенасытить водяными парами довольно существенно. Однако в атмосфере всегда содержится большое число различных пылинок, кристалликов соли и прочих веществ, которые служат центрами конденсации для капелек воды.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20221105

Если температура воздуха будет ниже нуля градусов, точки замерзания воды, то молекулы воды в облаке сразу будут образовывать мельчайшие кристаллики льда. Размер этих кристаллов – не больше одной десятой миллиметра. Правда, для этого опять нужен помощник – небольшая пылинка, которая сыграет роль затравки. Именно на маленькой пылинке и образуется первый кристаллик льда. Да-да, снежинки начинаются с пыли. Сначала вода испаряется с поверхности любого водоема. Потом происходит подъем водяного пара в воздух, конденсация пара на пылинках уже в облаке и движение вниз по облаку в воздушных потоках, которые ведут себя довольно странно. А в итоге – завораживающие своей красотой волшебные звездочки.

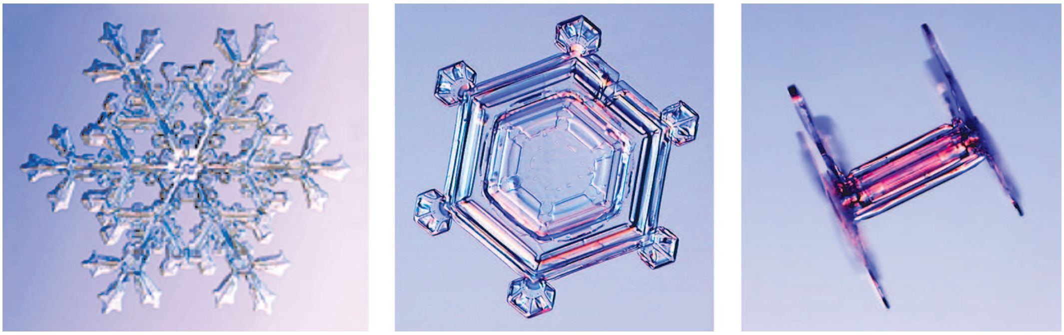
Дальше начинается путешествие кристаллика по облаку и превращение его в снежинку. Если температура в облаке или какой-либо его части выше нуля градусов, то наш кристалл в итоге растает и в дальнейшем будет путешествовать в другом качестве – как капля воды. Выбраться из облака снежинке удастся лишь зимой, когда температура окружающего воздуха опустится ниже нуля. Только тогда снежинка сможет упасть на землю, порадовав нас чистым белым скрипучим снегом.

Что же происходит со снежинкой во время ее перемещения от верхней границы облака до земли? Путешествие начинается, когда в холодном облаке, неспособном удержать большое количество водяного пара, микроскопические капли воды притягиваются к мельчайшим пылинкам, замерзают, а затем этот невзрачный кристаллик льда вырастает в красивую звездочку.

Только в книжках про Деда Мороза все снежинки – красивые шестиконечные звездочки. На самом деле снежинки бывают разными. Иногда это простые пластины, в некоторых случаях – призмы и даже иголки. Форма снежинки определяется двумя главными условиями: температурой и степенью насыщенности воздуха водяным паром. При разных условиях получаются снежинки разных форм. Красивые снежинки любят высокую влажность и не любят сильный мороз.

Говорят, что не существует двух одинаковых снежинок. Но есть то, что все-таки их объединяет. Присмотревшись к разным снежинкам, можно заметить, что в основе их формы всегда лежит шестиугольник. И опять же лучшей иллюстрацией является... сахар. Если иметь достаточно терпения, то можно вырастить и вполне крупные кристаллы сахара или соли. Все кристаллы соли имеют форму маленьких кирпичиков: прямоугольных параллелепипедов. Если удастся вырастить большой кристалл соли, то и его форма будет прямоугольным параллелепипедом, а при некоторых условиях роста – кубом. Разбив этот большой куб, например молотком, легко убедиться, что все осколки также будут иметь форму параллелепипедов.

Человечество давно интересовалось необычными камнями, которые имеют правильную форму, огранку. Древние греки, кстати, считали кристаллы горного хрусталя (кварца) замерзшей навсегда водой. Количество кристаллов, известных человеку, постоянно увеличивалось. Кристаллам стали приписывать различные магические свойства. Богатые люди желали обладать редкими и необычными кристаллами. Из-за некоторых уникальных экземпляров бушевали шекспировские страсти и даже вспыхивали войны. Причи-



*Различные формы снежинок: дендриты, плоские звездочки, столбики* ной этому была не только красота кристаллов, но и то, что уж слишком непонятными были свойства кристаллов: правильная огранка и сохранение формы при разрушении.

Интересно, что изучение снежинок еще в XVII веке привело ученых к гениальной идее о том, что кристаллы состоят из мельчайших и одинаковых частичек, обладающих определенной формой. Так что не будет большим преувеличением сказать, что снежинки положили начало развитию большого раздела физики – кристаллографии.

В основе кристалла льда лежит правильный шестиугольник, образованный молекулами воды. Оказывается, что в молекуле воды угол между связью кислород – водород равен 104 градусам, а вот в твердом состоянии атомы кислорода образуют правильный шестиугольник. Точнее, два правильных треугольника, немного смещенных друг относительно друга вдоль оси, проходящей через их центры. И именно этой геометрической конфигурацией определяется шестиугольная форма снежинки. Можно поэкспериментировать – вырезать из бумаги много шестиугольников и прикладывать их друг к другу. В результате всегда будут получаться фигуры, имеющие в своей основе шестиугольник или, как принято говорить, симметрию шестого порядка.

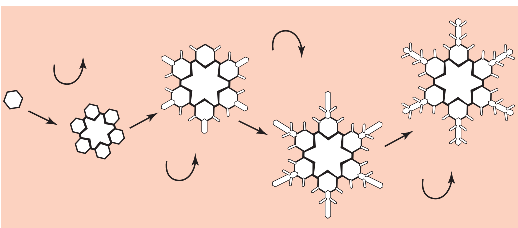
Друза кварца

Алмаз – самый твердый минерал на земле

Кристаллы рубина – вторые по твердости после алмаза

Характерно, что молекулы воды могут присоединиться к кристаллу льда только в определенных местах, обусловленных геометрией химических связей. Похожая ситуация наблюдается при росте и других кристаллов. Например, сахара или соли. Но тогда, казалось бы, снежинки всегда должны иметь форму правильного шестиугольника, как у кристаллов льда. Что же заставляет снежинку «отращивать» лучики?

Кристаллы растут равномерно, увеличивая свои грани только при благоприятных условиях роста: когда для любого места на грани хватает питательного вещества. Если времени для роста слишком мало, а именно так происходит в пересыщенных средах, то основным местом, где происходит рост кристалла, являются его выступающие части. Кристалл как бы тянется за питательным веществом. В результате от вершин шести-



Этапы формирования снежинки

угольного кристалла льда отрастают лучи, которые в процессе роста продолжают ветвиться, образуя неповторимые шестиугольные звездочки.

Таким образом, различные условия роста кристалла как в облаке, так и в ходе путешествия снежинки из облака на землю (когда холодая снежинка, пролетая через более теплые слои атмосферного воздуха, насыщенного водяными парами, продолжает свой рост) формируют совершенно разные формы. Но одно всегда будет общим во всех снежинках – они будут иметь форму шестилучевой звездочки или шестиугольника. Иными словами, форму, которая определяется внутренним строением кристалла.

Удивительное превращение, которое происходит со снежинками, волей-неволей заставляет задуматься о той роли, которую играют законы симметрии – а именно они филигранно оттачивают лучи снежинок – в природе. Ведь свое путешествие каждая снежинка начинает с процессов, казалось бы, не имеющих вообще никакой симметрии и порядка: испарение из лужи, пылинка в роли затравки и так далее. Но природа словно говорит нам о главенстве симметрии, о том, что законы, по которым атомы выстраиваются в кристаллах снежинок, побеждают все случайности.

К сожалению, далеко не все знают о правилах симметрии, о том, как правильно устроена снежинка. Поэтому в новогодних книгах и журналах, в новогоднем украшении наших городов полным-полно снежинок, которые имеют четыре, пять или даже восемь лучей, а ведь в природе таких снежинок не существует. Но мы-то с вами теперь легко отличим настоящие снежинки от поддельных!

*Сращивание снежинок в снежные хлопья*

Мы рассмотрели симметрию снежинок, симметрию расположения атомов в кристалле льда, обусловленную внутренними факторами. Но есть еще и масса факторов внешних. Разглядывая снежинки под лупой или под микроскопом, можно увидеть, что углы между лучами всегда равны 60 градусам, но при этом лучи снежинок развиты неодинаково: одни длиннее, другие короче. Часто можно наблюдать, как несколько снежинок срастаются в одну, образуя снежные хлопья. И там, и там реальная форма большинства снежинок отличается от идеальной симметричной правильной шестиконечной звездочки. Это происходит потому, что внешние факторы всегда привносят изменения в идеальную картину.

Что же это за коварные внешние причины, которые рушат завораживающую симметрию? Все отклонения снежинок от нормы связаны с процессом их роста. Например, если снежинка падала свободно, равномерно вращаясь вокруг своей оси, то ее форма будет близка к правильной. А вот если по каким-то причинам равномерного вращения не получилось и снежинка, скажем, большую часть пути пролетела одним боком, то такое падение будет отражено в ее несимметричной форме.

С падающей снежинкой могут происходить и другие приключения, препятствующие развитию правильной шестиугольной звездочки. Например, к ней может примерзнуть мельчайшая капелька воды – и снежинка уже не будет симметричная. А бывает и так, что в хорошую безветренную погоду слипаются вместе до двухсот снежинок, образуя красивые снежные хлопья. Получается, что не только атомные законы, по которым молекулы воды выстраиваются в кристаллической решетке в правильные шестиугольники, играют роль при формировании реальной формы снежинки. Симметрия внешней среды, в которой снежинка родилась, выросла и прошла путь из облака до земли, также определяет ее облик. Надо только научиться «читать» судьбу снежинки по ее форме.

*Статья представляет собой главу из книги Д.В.Ливанова и С.В.Салихова «Физика всего на свете без формул», которая планируется к выходу в издательстве «Бомбора».*

# Что такое свежий воздух

А.КНЯЗЕВ, А.КНЯЗЕВ (мл.)

Говоря о воздухе, которым мы дышим, обычно интересуются его химическим составом и содержанием, например, пыли в нем. Не стоит забывать и про бактерии и вирусы. Для улучшения состава воздуха в помещениях, на некоторых производствах, на космических станциях и т.п. используются химические и физические фильтры и маски – противогазы, респираторы, вентиляция. Все эти меры в разной степени эффективны как отдельные слагаемые в борьбе за чистоту воздуха. Однако остаются дополнительные факторы, влияющие на физический состав воздуха. Так, важно и то, что мы живем в электромагнитных полях естественного и технологического происхождения. В этой статье мы рассмотрим именно *физический состав воздуха*, которым мы дышим, и влияние на него электрических полей. В настоящее время этот аспект приобретает особенную важность, хотя исследования начались еще в 30-е годы прошлого века.

Приведенный на рисунке 1 коллаж условно показывает, какие физические препятствия стоят на пути света при рассматривании нами нашей ладони. Это прежде всего частицы пыли размером до 10 мкм. Их концентрация даже в чистом комнатном воздухе составляет около 50000 $1/м^3$. Тогда как, например, в помещениях полупроводникового производства концентрация пыли поддерживается в пределах 300 $1/м^3$. Далее – бактерии и вирусы размером до 100 нм, их концентрация 5000 – 1000000 $1/м^3$ (в зависимости от состояния помещения). Уже только эти данные, которые легко найти хотя бы в статьях интернета, наводят на вопрос о том, как мы видим через все это сложное пространство воздуха и чем мы дышим. В школе иногда решают задачу об оценке расстояния видимости в тумане. Ученики 9–11 классов дают ответы разной сложности – от применения простейших геометрических представлений до довольно сложного рассуждения с использованием знаний о дифракции света. Здесь мы не будем этим заниматься, чтобы не уйти в сторону от главного для этой статьи вопроса.

Рис. 1

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20221106

Что же такое свежий воздух, которым мы восхищаемся, попадая «на природу»?

Многие знают, что свежесть – это чистый воздух, которым приятно и легко дышать, и что эффекта свежести можно достичь путем проветривания помещения или размещения в нем живых растений. Вы когда-нибудь замечали, как приятно пахнет белье, просушенное на улице и внесенное в помещение? Некоторые связывают это с добавками в стиральные порошки, забывая, что эту свежесть отмечали и тогда, когда никаких стиральных порошков еще не было. А некоторые считают, что этот воздух насыщен и пахнет озоном, хотя известно, что озон может и убивает бактерии, но очень опасен для дыхания – стоит лишь постоять около сварочного аппарата. Особенно легко дышится на берегу моря, реки, в поле, в горах. Этот эффект ни в какой мере не достигается ни масками, ни кондиционерами.

Таким образом, свежесть воздуха не такое простое явление, каким кажется на первый взгляд. Рассмотрим его с физической точки зрения и постараемся выяснить, каков механизм создания свежести воздуха.

## Общие сведения

В начале XX века русский ученый Александр Леонидович Чижевский исследовал явление аэроионизации, т.е. насыщения воздуха аэроионами – частицами атмосферного воздуха, которые несут положительный или отрицательный заряд. По утверждениям Чижевского, его опытные исследования дали четкий результат: положительно заряженные ионы воздуха негативно влияют на живые организмы, а отрицательно заряженные, напротив, производят благотворное действие. В его опытах домашние птицы и кролики, например, хорошо развивались при доступе воздуха, содержащего отрицательные аэроионы, и, наоборот, развитие угнеталось при недостатке ионизированного воздуха, хотя и прошедшего различные фильтры.

*Александр Леонидович Чижевский (1897–1964)*

Как же возникают аэроионы?

Частицы могут приобретать электрический заряд вследствие таких факторов, как ультрафиолетовое излучение; рентгеновское излучение; космические лучи; атмосферное электричество, в том числе так называемые тихие разряды (например, у крон высоких деревьев или на вершинах гор, «Огни святого Эльма»), провоцируемые высокой напряженностью электрического поля атмосферы; трение о твердые тела – трибоэлектрический эффект (автомобиль сильно электризуется, до нескольких тысяч вольт, проезжая через пыльную или снежную пургу); химические реакции, происходящие в почве; водяное испарение с созданием аэроинов (баллоэлектрический эффект). В дополнение можно сказать, что в одном кубическом сантиметре воздуха каждую секунду на короткое время образуются два свободных электрона в результате действия космических и радиоактивных земных излучений.

Представленная на рисунке 2 схема иллюстрирует механизм аэроионизаци. Аэроионы подразделяются на два типа: легкие и тяжелые. Легкие аэроионы содержат один элементарный заряд. Тяжелые аэроионы образуются при столкновении легких ионов с более крупными частицами и оседании на них. Воздух считается тем чище, чем больше преобладание легких ионов над тяжелыми.

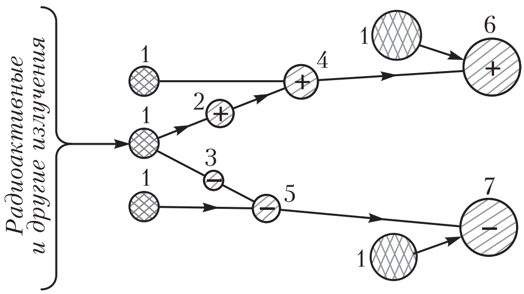



*Рис. 2. Здесь 1 – молекулы воздуха, 2 – нестабильный легкий аэроион, 3 – свободный электрон, 4 и 5 – стабильные легкие аэроионы, 6 и 7 – тяжелые аэроионы*

Чижевский создал электростатический генератор аэроионов, который теперь называют люстрой Чижевского (рис. 3). Она представляет собой заряжаемый до высокого напряжения металлический обруч с натянутой на него проволочной сеткой, в узлах которой закрепляется множество иголочек. Некоторые модификации прибора можно и сейчас встретить в продаже. Сам ученый называл свой прибор электроэффлювиальным аэроионизатором — от греческого «эффлювий», что в переводе означает «ветер»: поднеся к остриям руку, можно ощутить от сетки холодок электронного ветерка.

Подбирая нужный потенциал, можно добиться коронного разряда с потоком ионов $O_3^+$, $CO^+$, $O_2^-$, $NO_2^-$, среди которых будут

*Рис. 3*

преобладать легкие отрицательные ионы с минимальной концентрацией таких вредных ионов, как озон. В других случаях можно добиться высокой концентрации озона – например, для озонирования воздуха с целью его очистки и дезинфекции пространств.

Содержание легких и тяжелых аэроионов напрямую влияет на здоровье человека. Медицинские научные работы доказали неоспоримые преимущества благоприятного воздействия заряженных биполярных ионов. Это – улучшение психологического и физического состояния; увеличение сопротивляемости заболеваниям; снижение количества бактерий в помещении; очищение воздуха от взвешенных микрочастиц.

Давно замечено, что в душных непроветриваемых помещениях, где концентрация легких аэроинов низкая, человек испытывает различного рода дискомфортные состояния: вялость, усталость, потерю аппетита, головную боль, бессонницу, слабость, головокружение, ослабление памяти, дряблость кожи, быстрое старение (но вспомните горных старцев!).

В таблице приведены некоторые данные об аэроионах, которыми пользуются медики-курортологи. Как видим, меньше всего полезных аэроионов содержится в наших помещениях. Это, безусловно, одна из важнейших причин большинства респираторных заболеваний. При этом ни маски, ни кондиционеры не могут изменить это соотношение. Остается единственная радикальная мера – частое проветривание помещений и прогулки на открытом воздухе. Или искусственное создание легких аэроионов внутри помещений, скажем в классах.

**Сравнительное содержание аэроионов в воздухе различных местностей**

| Места определения концентрации | Концентрация отрицательных аэроионов в 1 см$^3$ воздуха |
|---|---|
| Воздух городских квартир | 50–100 |
| Воздух городских улиц | 100–500 |
| Лесной и морской воздух | 1000–5000 |
| Воздух горных курортов | 5000–10000 |
| Воздух у водопада | 10000–50000 |
| Воздух после грозы | 50000–1000000 |

## Наши наблюдения

Научные измерения, например по определению концентрации аэроионов, обычно выполняются с помощью довольно дорогостоящего оборудования. Однако наблюдения условий возникновения аэроионов авторы этой статьи вместе со своими учениками за последние десять лет проводили с помощью простейших устройств. Приведем здесь лишь основные результаты. При этом обратим внимание на два главных механизма возникновения ионов: 1) наличие градиентов электрических полей с высокими перепадами напряженности; 2) облучение мягким ультрафиолетовым излучением.

### Влияние градиентов напряженности

Следуя опытам Чижевского, можно предположить, что лучше всего эффект ионизации достигается на остриях очень малого радиуса кривизны и обладающих большим электрическим потенциалом. Источниками создания ионов могут быть также и заряженные частицы малых размеров.

На рисунке 4 изображен процесс разрыва молекулы за счет перепада напряженности вблизи острия. Так, например, «рвется» молекула CO вблизи заряженного острия любого растения. Атом углерода поглощается растением, имеющим заряд поверхности земли, а атомарный кислород улетает в атмосферу, создавая эффект свежего воздуха. Не вдаваясь в подробности, можно записать для силы, действующей на диполь в неоднородном электрическом поле, такое выражение:

$$F \sim E(r+dr) - E(r) \sim \frac{dE}{dr}\Delta r.$$

Здесь $dE/dr$ – градиент поля. Формула зависимости силы разрыва от изменения напряженности показы-

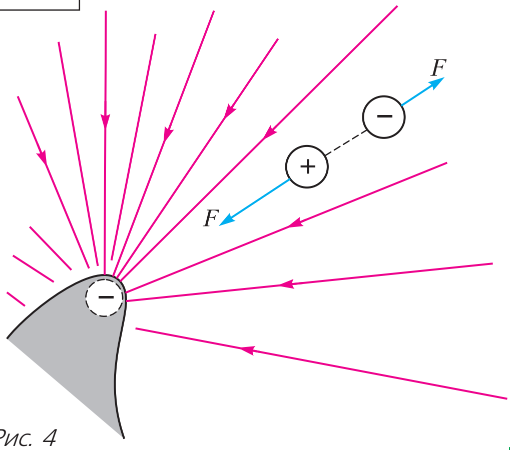


Рис. 4

вает, что чем меньше будет радиус кривизны острия и больше напряженность поля, тем больше будет эффект разрыва молекулы и аэроионизации. Для конкретного расчета можно показать, что сила, действующая на мягкий (деформирующийся в сильном внешнем поле) диполь вблизи острия, обратно пропорциональна пятой (!) степени радиуса. И тогда атомы диполя оказываются в неоднородных полях, сравнимых с внутриатомным полем. При этом энергия поля в этой области будет по порядку величины равна нескольким электронвольтам, что вполне достаточно для ионизации атома. Добавим, что если напряженность внешнего поля, создаваемого на уровне земли, составляет примерно 150 В/м в обычном состоянии атмосферы, то в грозовую погоду она достигает значений около 800 В/м.

*Аэроиоионизация на остриях предметов и живых тел.* Области с повышенной напряженностью электрического поля вполне можно визуализировать. Так, на фотографии на рисунке 5 видно свечение краев листа ком-

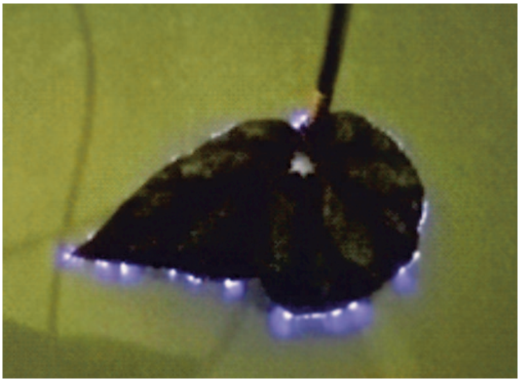


Рис. 5

натного растения, заряженного до высокого (около 15 кВ) напряжения (так называемый эффект Кирлиан). Эксперимент выполнен в 2020 году в лицее №15 города Саратова М.Ледником (11 класс). Подобные фотографии можно получить с помощью аппаратуры ночного видения, используемой при наблюдениях за утечками в линиях электропередач.

Для следующего демонстрационного опыта используется пробник (о нем чуть дальше) и простейшая конструкция прибора Чижевского – бытовой аэроионизатор (рис. 6). Важная часть этого прибора – крохотное одиночное острие, позволяющее ионизировать воздух. В обычном положении пробник

Рис. 6

не фиксирует поля, но при включении прибора пробник начинает фиксировать электрическое поле и по мере приближения к острию диод загорается ярче. А вблизи острия можно ощутить явную свежесть воздуха. Ионизаторы такого типа много лет используются авторами статьи для ионизации небольшой зоны в квартире, например в спальне.

*Аэроиоионизация при сушке белья.* Телами, создающими вокруг себя существенно неоднородное поле с высокой напряженностью, могут быть даже мелкие капельки, образующиеся при испарении сохнущего белья. Это – баллоэлектрический эффект. Сначала мы вывешиваем сухое белье и проверяем наличие небольшого заряда на нем. После стирки и отжима белья вывешиваем его и спустя некоторое время, после стекания воды, начинаем наблюдения. Теперь заряд поверхности легко фиксируется. Опыты проводились в разные годы учениками Лицея прикладных наук и Физико-технического лицея №1 г. Саратова Д.Яковлевым (2010 г.) и А.Алешиным (2022 г.).

Для обнаружения электрического поля насыщенного водяного пара поначалу мы использовали обычный школьный электроскоп с маленьким шариком на приемном стержне-головке. Собирали заряд с поверхности сохнущего полотна на металлический шарик с изолирующей ручкой и переносили его на головку электроскопа. На рисунке 7 прибор показывает потенциал более 600 В. Однако позднее мы отказались от электроскопа в пользу электронного пробника, используемого при поиске скрытой электропроводки. Такой пробник имеет форму отвертки со светодиодом, полевым диодом и батарейкой. При внесении пробника в область интенсивного электрического поля диод

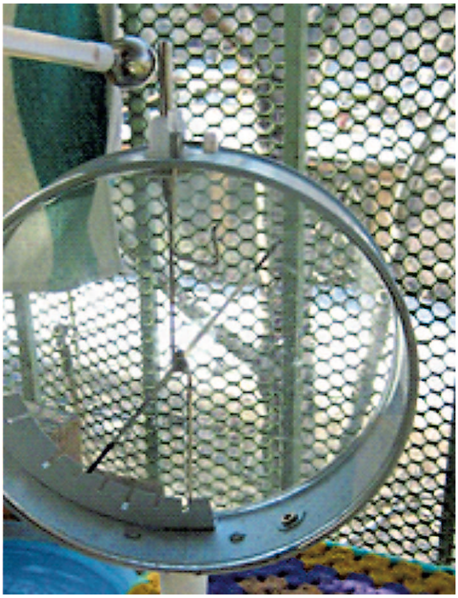


Рис. 7

начинает светиться с яркостью тем большей, чем больше напряженность поля. Зафиксированная нами напряженность около сохнущего белья оказалась сравнимой с напряженностью вблизи экрана кинескопного телевизора (с электронно-лучевой трубкой). Пробник бесконтактным образом фиксирует не заряд тела, а поле вокруг заряженного предмета. Проводя пробник вблизи полотна (рис. 8), мы легко буквально визуализировали область электризации.

При внесении в комнату свежевысушенного белья запах свежести от белья особенно ощутим первые несколько минут, а затем становится слабее. Так же ведут себя во времени и результаты наблюдения за пробником. Это свидетельствует о том, что испарение воды прямо сопровождается аэроионизацией помещения.

Рис. 8

### Влияние мягкого ультрафиолетового излучения

Распространенным сейчас способом аэроионизации является облучение воздуха мягким ультрафиолетовым излучением ртутных ламп с последующей вентиляцией этого воздуха в помещении. Так, в школьном ионизаторе используется УФ излучение в диапазоне 353 нм, но не короче 260 нм. Оно действует как разрушающее молекулы ДНК вирусов и бактерий, но не препятствующее дыханию человека. Его называют сейчас безозоновым излучением. Тогда как излучение с длиной волны около 185 нм используется в бактерицидных целях (озоновые лампы). Возбуждение того или иного участка спектра можно осуществлять подбором соответствующего значения питающего лампу напряжения (опыт Франка и Герца). Заметим, что как УФ излучение, так и аэроионизация по физической природе действуют практически одинаково. Квант ультрафиолетового света при взаимодействии с атомом передает ему энергию $h\nu$ в диапазоне нескольких эВ.

### Основные выводы

В данной статье мы рассмотрели физический состав окружающего воздуха и выяснили его возможное влияние на условия дыхания человека при наличии электрических полей и ультрафиолетового излучения. Проанализировали и обосновали возможность использования упомянутых физических факторов на бактериальный и вирусный состав воздуха. С помощью доступного оборудования нам удалось опытным путем визуализировать реальное действие баллоэлектрического эффекта на изменение величины напряженности фонового электрического поля вблизи мелких капель и заряженных иголочек, острий растений и даже вблизи каждого волоска поверхности нашей кожи. В результате мы можем утверждать, что «свежий воздух», т.е. воздух, который ощущается как приятный и легкий для дыхания, это, прежде всего, воздух, насыщенный легкими аэроионами.

## «Квант» для младших школьников

### Задачи

*(см. «Квант» №10)*

**1.** В 2,2 раза.
Длина очереди с зонтиками складывается из 11 диаметров зонтов, т.е. из 22 частей-радиусов длины 50 см. Длина очереди без зонтиков – это 10 промежутков между 11 людьми, причем каждый из промежутков также равен 50 см. Значит, длина очереди уменьшилась в $22:10=2{,}2$ раза.

**2.** Возможные варианты:
- 66 эльфов, 34 гнома (или наоборот – 66 гномов, 34 эльфа);
- 9 эльфов, 91 гном (или наоборот – 9 гномов, 91 эльф).

*Комментарий*. От участников требовалось найти лишь один пример. Покажем, как найти их все.

Пусть по крайней мере 222 раза написана цифра $A$. Кто-то написал $A$ хотя бы три раза (иначе цифр $A$ в ответах будет не больше, чем $100\cdot 2<222$). Назовем этого члена Совета Магистром. Числа Магистра в сумме дают либо 102, либо 98. Несложно убедиться, что случаи, когда одно из этих чисел 100 или 101, не подходят. Значит, можно считать оба написанных Магистром числа двузначными (если одно из них однозначное, напишем на месте десятков ноль).
Итак, одно из чисел Магистра – это $AA$. Если второе начинается на цифру $A$, то их сумма либо не больше $44+49<98$, либо не меньше $55+50>102$. Значит, Магистр написал $AA$ и $BA$. Поскольку сумма этих чисел оканчивается на 2 или на 8, то цифра $A$ может быть равна 1, 6, 4 или 9. Возможны следующие 4 случая:
1) если $AA=11$, то $BA=102-11=91$;
2) если $AA=66$, то $BA=102-66=36$;
3) если $AA=44$, то $BA=98-44=54$;
4) если $AA=99$, то $BA=98-99<0$ – не подходит.
При $AA=11$, $BA=91$ на самом деле гномов и эльфов (в каком-то порядке) либо 11 и 89, либо 9 и 91. В первом случае цифра 1 названа не более чем трижды каждым из 11 человек и максимум по разу каждым из 89, т.е. всего менее 200 раз. Во втором случае 1 может быть названа трижды каждым из 91 человека и ни разу каждым из 9, т.е. всего максимум $91\cdot 3=273$ раза. Этот случай подходит и дает два варианта: 9 эльфов и 91 гном, 9 гномов и 91 эльф.
Аналогичные рассуждения показывают, что в случае 2 в совете могло быть 66 эльфов, 34 гнома (или наоборот – 66 гномов, 34 эльфа), а случай 3 не подходит.

**3.** 45°, 60°, 105° и 150°.
В центре мозаики 6 одинаковых углов с общей вершиной образуют полный угол, значит, каждый из них равен $360°:6=60°$ (рис.1).

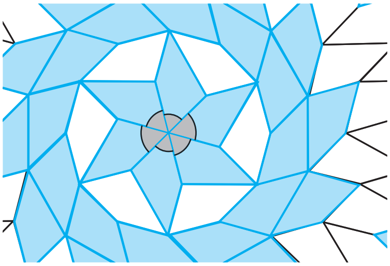


*Рис. 1*

Несколько правее полный угол в 360° складывается из уже известного нам угла 60° и еще двух равных между собой – следовательно, они составляют по 150° (рис.2).

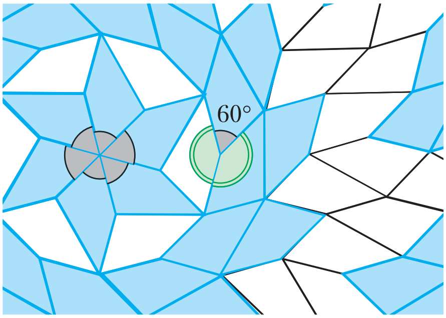



*Рис. 2*

Аналогичным образом вычисляется еще один угол: он равен $(360°-150°):2=105°$ (рис.3).

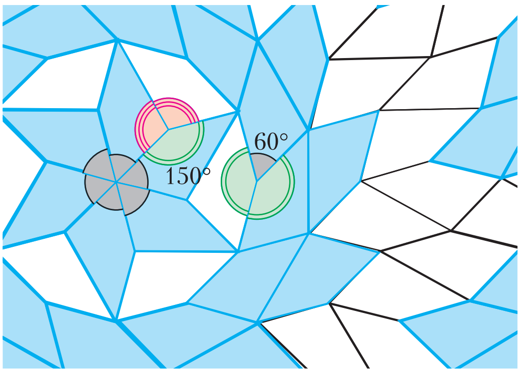



*Рис. 3*

Последний угол плитки можно вычислить либо воспользовавшись тем, что сумма углов четырехугольника равна 360°, либо же с помощью еще одной вершины мозаики (рис.4):

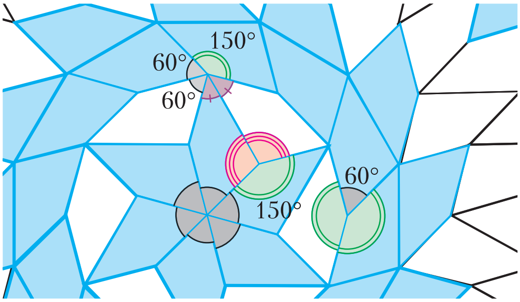



*Рис. 4*

$$(360° - 150° - 2 \cdot 60°) : 2 = 45°.$$

Таким образом, углы плитки равны 45°, 60°, 105° и 150°.

*Комментарии. 1)* Заметим также, что такую плитку одна из диагоналей делит на равносторонний и прямоугольный равнобедренный треугольники (рис.5).

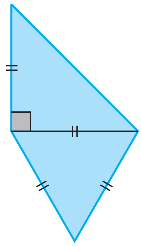


*Рис. 5*

*2)* Разбиение плоскости на многоугольники без дырок и наложений называется *замощением*. Замощения бывают как *периодические* (есть два разных направления, при сдвиге в каждом из которых замощение совмещается само с собой) и *непериодические* (таких сдвигов нет). В задаче приведена часть непериодического замощения плоскости такими четырехугольными плитками, которое придумал Габор Дамашди. Но такими четырехугольниками можно замостить плоскость и периодически (придумайте, как комментарий 1 поможет). А бывает ли многоугольник, которым можно замостить плоскость только непериодически? Это неизвестно!

**4.** 338, 336, –332, –342.

Разложим 2022 на простые множители: $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$, значит, из пяти перемноженных чисел только три могут быть по модулю больше, чем 1. Остальные по модулю обязаны быть равны 1; таких чисел ровно два (1 и –1), следовательно, 2022 получено как $(-1) \cdot 1 \cdot (\pm 2) \cdot (\pm 3) \cdot (\pm 337)$. Остается заметить, что знак «–» должен стоять либо перед одним из чисел 2, 3, 337, либо перед всеми тремя – итого 4 варианта и, соответственно, 4 возможных суммы: 338, 336, –332, –342.

## Задачи

*(см. «Квант» №11-12)*

**1.** 8743250.

Так как число делится на 25, то оно должно заканчиваться на 25, 50 или 75. В любом случае среди последних двух цифр будет цифра 5. Число тем больше, чем бóльшая цифра стоит в более левом разряде. Поэтому нужно, чтобы вместе с цифрой 5 осталась самая маленькая возможная цифра. А это цифра 0. Из оставшихся карточек составляется начало числа. Слева направо ставятся карточки в порядке убывания. В итоге получаем ответ: 8743250.

**2.** 35 монет.

Заметим, что первый и четвертый пираты не могли одновременно сказать правду. Также не могли одновременно сказать правду второй и третий пираты. Действительно, если они оба сказали правду, то у каждого количество монет делится на 5, при этом у всех разное количество, не меньшее 20. Тогда у них вместе не меньше $20 + 25 + 30 + 35 = 110$ монет, чего быть не может. Поэтому среди первого и четвертого пиратов ровно один рыцарь и ровно один лжец (и среди второго и третьего пиратов ровно один рыцарь и ровно один лжец).

Если первый пират – рыцарь, то всем досталось по 25 монет (такая ситуация возможна). И в этом случае максимальное количество равно 25. Если же четвертый пират – рыцарь, то каждому досталось не больше 35 монет. В этом случае одному из пиратов могло достаться ровно 35 монет (и тогда ответ в задаче будет 35). Такая ситуация возможна, если, например, пиратам досталось 35, 30, 20 и 15 монет (второй пират солгал, а третий сказал правду).

*Замечание*. Есть и другие способы распределить монеты так, чтобы одному из пиратов досталось 35 монет. Например, пиратам досталось 35, 24, 21 и 20 монет (третий пират солгал, а второй сказал правду).

**3.** 50.

Заметим, что два подряд идущих числа не могут быть положительными (т.е. натуральными). Предположим противное. Тогда их произведение положительно, и перед ними (против часовой стрелки) также стоит натуральное число. Так как оно больше произведения этих двух натуральных чисел, то оно больше каждого из них. Продолжая рассуждения, мы получим, что все числа будут натуральными, причем, если идти против часовой стрелки, числа будут возрастать. Но когда «круг замкнется», мы придем к противоречию. Значит, в любой паре соседних чисел есть хотя бы одно отрицательное. Разбив наши 100 чисел на 50 пар, мы получим, что записано не меньше 50 отрицательных чисел, а значит, положительных чисел не больше 50. Если же мы будем чередовать положительное число 2 и отрицательное число −2, мы получим пример расположения 50 положительных и 50 отрицательных чисел, удовлетворяющих условию задачи.

**4.** Нельзя.

Предположим, что такое разрезание возможно. Так как периметр прямоугольника равен 18, то сумма длины и ширины равна 9. Это означает, что одна из этих величин – четное число, а другая – нечетное. Поэтому площадь каждого прямоугольника разрезания будет четным числом. Значит, и сумма площадей прямоугольников разрезания также будет четным числом. Но эта сумма должна равняться площади квадрата со стороной 25, т.е. числу нечетному. Противоречие.

## Конкурс имени А.П.Савина

*(см. «Квант» №9)*

**1.** Разрежем данный кусок льда на части шестью разрезами вдоль граней исходного кубика, не разъединяя части. Каждая часть имеет с исходным кубиком либо общую грань, либо только ребро, либо только вершину. Части первого типа – кубики со стороной 1 см (их 6, сколько у куба граней). Части второго типа – четвертинки цилиндров, их 12 (сколько у куба ребер), из них можно сложить 3 цилиндра высоты 1 см и радиусом основания 1 см. Части третьего типа – восьмушки шарика радиуса 1 см, их 8 (сколько у куба вершин), из них можно сложить шарик.

**2.** 1 или 2.

Пусть в вершинах какой-то грани стоят по часовой стрелке числа $a$, $b$, $c$ и $d$. Тогда $a+b=c+d$ и $a+d=c+b$. Это возможно лишь при $a=c$ и $b=d$ (сложив первое и второе равенства, получим $2a=2c$, так как $b+d$ сократится). Значит, в противоположных вершинах любой грани куба числа равны, а тогда при «шахматной» раскраске его вершин (рис. 6) числа в вершинах одного и того же цвета равны. Поэтому больше двух различных чисел быть не может. Два числа получится, если в черных вершинах нули, а в белых – единицы, одно – если все числа одинаковы.

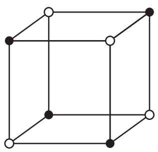


*Рис. 6*

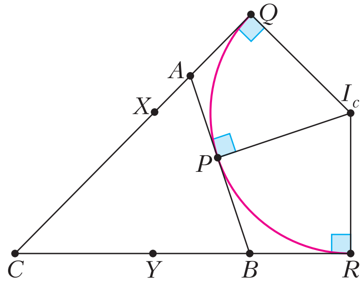



*Рис. 7*

**3.** Пусть $P$, $Q$, $R$ – точки касания вневписанной окружности со стороной $AB$ и продолжениями сторон $AC$ и $BC$ соответственно (рис. 7). Пусть полупериметр треугольника $ABC$ равен $p$, тогда $p=CQ$, так как $CQ=CA+AP$, $CR=CB+BP$, $2CQ=CQ+CR=CA+AP+CB+BP=$ $=CA+CB+AB=2p$. Также, по условию, $CX+CY=p$, значит, $CY=QX$.

Отметим на отрезке $CR$ точку $X'$ так, что $CY=RX'$ (рис. 8). Если $O$ – середина отрезка $CI_c$, то $OY=OX'=OX$. Треугольник $X'OY$ равнобедренный, поэтому $\angle OYR=\angle OX'C=\angle OXC$, поэтому четырехугольник $XOYC$ – вписанный.

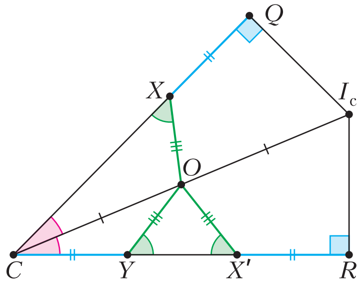



*Рис. 8*

**4.** $C_n=\dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$.

Сопоставим каждой удачной рассадке людей последовательность из $2n$ букв: на $i$-е место в последовательности поставим букву А, если у $i$-го в очереди человека билет на место А, а если на место Б – букву Б.

Чтобы последовательность из $n$ букв А и $n$ букв Б соответствовала удачной рассадке, необходимо и достаточно, чтобы в любом префиксе этой строки (т.е. в любой строке, полученной из исходной отбрасыванием всех символов после некоторого) букв А было не меньше, чем букв Б. Тогда если при рассадке в какой-то момент занято место Б, то место А рядом с ним уже занято ранее, что и требуется. По последовательности такого вида удачная рассадка восстанавливается однозначно.

Количество таких последовательностей равно $n$-му числу Каталана $C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$. Об этом и других свойствах чисел Каталана можно прочитать, например, в «Кванте» №3 за 2004 год.

## Калейдоскоп «Кванта»

### Вопросы и задачи

**1.** Это – избыточное давление, создаваемое выделяемыми из растения капельками воды. Именно они размягчают почву, так как выступают в направлении роста растения.

**2.** На рост дерева влияют состав и интенсивность солнечного излучения. А оно изменяется с периодичностью приблизительно 11 лет.

**3.** Основной способ удаления влаги – испарение через устьица, представляющие собой крохотные отверстия в листе, ширина которых «управляется» вздутием и опаданием соседних клеток.

**4.** Листопад, прошедший вовремя, оберегает дерево от поломки под тяжестью снега, задержанного листьями. Хвойным деревьям с их меньшей площадью иголок такая опасность грозит реже.

**5.** Хвойный лес порождает свистящий звук высокого тона, так как ветер разбивается в его ветвях на мелкие чередующиеся, «снующие», вихри. Шум же лиственного леса происходит от колебания листьев, ударов и трения их друг о друга. Этот звук более низкого тона.

**6.** Мы видим лист зеленым потому, что он отражает лучи зеленого цвета. Значит, этот свет растению не нужен. Главную роль в процессе фотосинтеза должны играть красные и синие лучи.

**7.** В отличие от глаз, например, человека в глазах насекомых нет сетчатки. Поэтому об относительном расположении предметов мозг насекомых судит, анализируя информацию, поступающую от различных ячеек глаза.

**8.** Яркая окраска крыльев бабочек возникает за счет интерференции света при отражении от мелких чешуек, покрывающих крылья. Сами-то чешуйки – бесцветные.

**9.** В процессе жизнедеятельности куколок и личинок выделяется тепло. Чем больше численность семьи, тем выше температура в центре улья и тем значительнее разность температур между центром улья и его краями.

**10.** В скорлупе имеются поры, через которые должен проходить воздух, необходимый развивающемуся зародышу. Но через эти же поры испаряется вода и тем самым увеличивается внутренний воздушный мешок, что уменьшает среднюю плотность яйца и способствует его всплытию.

**11.** Кислород и азот растворяются в воде незначительно (0,07 г и 0,03 г на литр холодной воды). Однако доля кислорода в воде превосходит его же долю в воздухе, так что рыбы дышат воздухом, обогащенным кислородом.

**12.** Дело в том, что у слонов потовые железы расположены только на ушах. Поэтому, чтобы охлаждаться при испарении пота, им пришлось «обзавестись» столь крупными ушами, да еще и размахивать ими.

**13.** Через выступающие части тела должно уходить много тепла, причем они иногда бывают оголены. Поэтому с адаптацией к более холодным районам животным эволюционно выгоднее уменьшить их размеры.

**14.** Когда лось перемещается по болоту, его копыта раздвигаются, натягивая связывающие их перепонки. Давление тела животного распределяется на сравнительно бо́льшую площадь опоры, и лось не вязнет.

**15.** Хищнику для оценки расстояния до добычи необходимо объемное, бинокулярное зрение. Поэтому оба глаза хищника имеют почти одинаковое поле зрения и расположены близко друг к другу. Травоядное же должно замечать врага со всех сторон. Так, у зайца общее поле зрения охватывает около 300°.

**16.** Перевернутая черепаха подобна «ваньке-встаньке». Чтобы выйти из устойчивого положения равновесия, необходимо довольно высоко поднять центр тяжести, что в большинстве случаев, увы, черепахе не удается.

**17.** В хвосте кита вены тесно окружают артерии. В результате теплая артериальная кровь отдает энергию не морской воде, а встречному потоку венозной крови. Такой внутренний теплообмен способствует сбережению энергии.

### Микроопыт

Обе половинки стебелька изогнутся в противоположные стороны. Это показывает, что в стебельке было внутреннее напряжение из-за избыточного давления воды.

# НАПЕЧАТАНО В 2022 ГОДУ

# КВАНТ

**НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ**

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

**НОМЕР ОФОРМИЛИ**

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

**ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР**

**М.Н.Грицук**

**КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА**

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во ПИ №ФС77–54256**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»**

**Тел.: +7 916 168-64-74**

**E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru**

**Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8**

**Тел.: (831) 216-40-40**

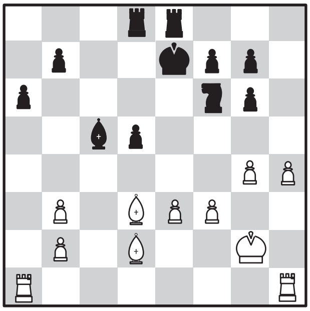
# СкандаЛ В СИНКФИЛДЕ

Уходящий 2022 год запомнится любителям шахмат, прежде всего, двумя событиями, связанными с Магнусом Карлсеном. Первое – его отказ от защиты титула, в результате которого в матче за мировую корону в следующем году сойдутся Ян Непомнящий, выигравший турнир претендентов, и Дин Лижэнь, занявший там второе место. Второе – скандальная партия с Хансом Ниманном на турнире в Синкфилде, после которой Магнус косвенно обвинил соперника в использовании подсказок и снялся с соревнований.

При этом начинался турнир весьма мирно – впервые после прошлогоднего матча за доской в классической партии Магнус встретился с Яном и одержал победу в фирменном позиционном стиле.

### М.Карлсен – Я.Непомнящий
### Синкфилд, 2022

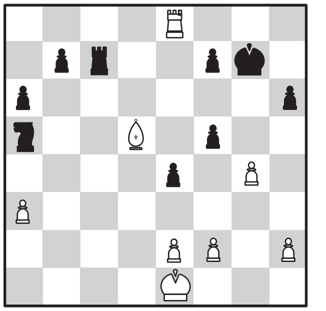
**1. d4 ♞f6 2. c4 e6 3. ♘f3 d5 4. cd ed 5. ♘c3 c6 6. ♗f4 ♝f5 7. e3 ♞bd7 8. h3 ♝e7 9. g4 ♝e4 10. ♗e2 ♛b6 11. ♕b3 ♛b3 12. ab.** Эта партия – хороший пример на тему сдвоенных пешек. В данном случае это не слабость, а наоборот – ресурс для будущей атаки, что очень умело демонстрирует Карлсен по ходу партии. **12...♝g6 13. ♘h4 ♝b4 14. ♘g6 hg 15. f3 ♞f8 16. ♔ f2 ♞e6 17. ♗g3 ♚e7 18. h4 a6?!** Точнее 18...a5, препятствуя будущему движению пешки b. **19. ♔g2 ♜ad8 20. ♗f2 ♝d6 21. ♗d3 ♝b8?! 22. ♘a4 ♝d6 23. ♗e1.** Пока черные ходили туда-сюда, белые создали угрозу захвата пространства на ферзевом фланге после 24. ♘c5. **23...c5?** Первая грубая ошибка и, возможно, сразу решающая. Сильнее 23...♜de8 с давлением на пешку e. **24. ♘c5 ♞c5 25. dc ♝c5 26. ♗d2 ♜he8.**



**27. b4!** (своеобразная атака пешечного меньшинства!) **♝b6 28. b5 a5 29. ♗a5 ♝a5 30. ♖a5 ♚d6 31. ♔f2 ♜e7 32. ♖d1 ♜h8 33. g5 ♞d7 34. ♖a4 ♞c5 35. ♖g4.** Возможно и более острое 35. ♖b4 ♜he8 36. ♗f1 ♜e3 37. ♖bd4 с выигрышем пешки d. **35...♚c7 36. ♗b1 ♜e5 37. ♗a2 f6 38. gf gf 39. ♖d5 ♜d5 40. ♗d5 ♞d3+ 41. ♔g3 ♞e5 42. ♖f4 ♜d8 43. b6+.** Красивый финальный удар. После 43... ♚b8 44. ♖ f6 нельзя брать слона из-за мата по восьмой горизонтали, поэтому **черные сдались.**

### М.Карлсен – Х.Ниманн
### Синкфилд, 2022

**1. d4 ♞f6 2. c4 e6 3. ♘c3 ♝b4 4. g3.** Редкий вариант, не дающий преимущества белым. Видимо, Магнус рассчитывал на эффект неожиданности, но Ниманн на пресс-конференции сказал, что по счастливой случайности разбирал этот вариант накануне. **4...0-0 5. ♗g2 d5 6. a3 ♝c3+ 7. bc dc 8. ♘f3 c5 9. 0-0 cd 10. ♕d4 ♞c6 11. ♕c4 e5 12. ♗g5 h6 13. ♖fd1 ♝e6!** Черные удачно развились, и белые решают перейти в чуть худший эндшпиль после серии разменов. **14. ♖d8 ♝c4 15. ♖a8 ♜a8 16. ♗f6 gf 17. ♔f1 ♜d8 18. ♔e1 ♞a5 19. ♖d1 ♜c8 20. ♘d2 ♝e6 21. c4 ♝c4 22. ♘c4 ♜c4 23. ♖d8+ ♚g7 24. ♗d5 ♜c7 25. ♖a8 a6 26. ♖b8 f5 27. ♖e8 e4.**



**28. g4?!** Жертва пешки некорректна, лучше 28. ♖d8. **28...♜c5 29. ♗a2 ♞c4?! 30. a4?! ♞d6 31. ♖e7 fg?!** Точнее 31...♜c2, активизируя предварительно ладью. **32. ♖d7 e3! 33. fe ♞e4.** Грозит ...♜c1 мат! **34. ♔f1 ♜c1+ 35. ♔g2 ♜c2 36. ♗f7 ♜e2+ 37. ♔g1 ♜e1+ 38. ♔g2 ♜e2+ 39. ♔g1 ♚f6 40. ♗d5 ♜d2 41. ♖f7+ ♚g6 42. ♖d7?** Решающая ошибка, шансы оставляло 42. ♖e7 или 42. ♖f4. **42...♞g5! 43. ♗f7+ ♚f5 44. ♖d2 ♞f3+.** Этот ход, вероятно, просмотрели белые. После размена ладей позиция черных выиграна. **45. ♔g2 ♞d2 46. a5 ♚e5 47. ♔g3 ♞f1+ 48. ♔f2 ♞h2 49. e4 ♚e4 50. ♗e6 ♚f4 51. ♗c8 ♞f3 52. ♗b7 ♞e5 53. ♗a6 ♞c6 54. ♗b7 ♞a5 55. ♗d5 h5 56. ♗f7 h4 57. ♗d5,** и **белые сдались.**

Сложно сказать, использовал ли Ниманн подсказки конкретно в этой партии, но в начале октября известная игровая платформа опубликовала отчет, в котором указано, что Ханс, вероятно, использовал подсказки в более чем 100 онлайн-партиях. В интервью он сам признался, что делал это несколько раз, но только при игре в интернете. Подозрение вызывает также резкий скачок рейтинга FIDE на 200 пунктов, нетипичный для игроков его возраста. В ответ Ниманн подал иск на Карлсена и игровую платформу на 100 миллионов долларов, обвинив их в сговоре и клевете. Развязка истории, вероятно, наступит уже в новом году.

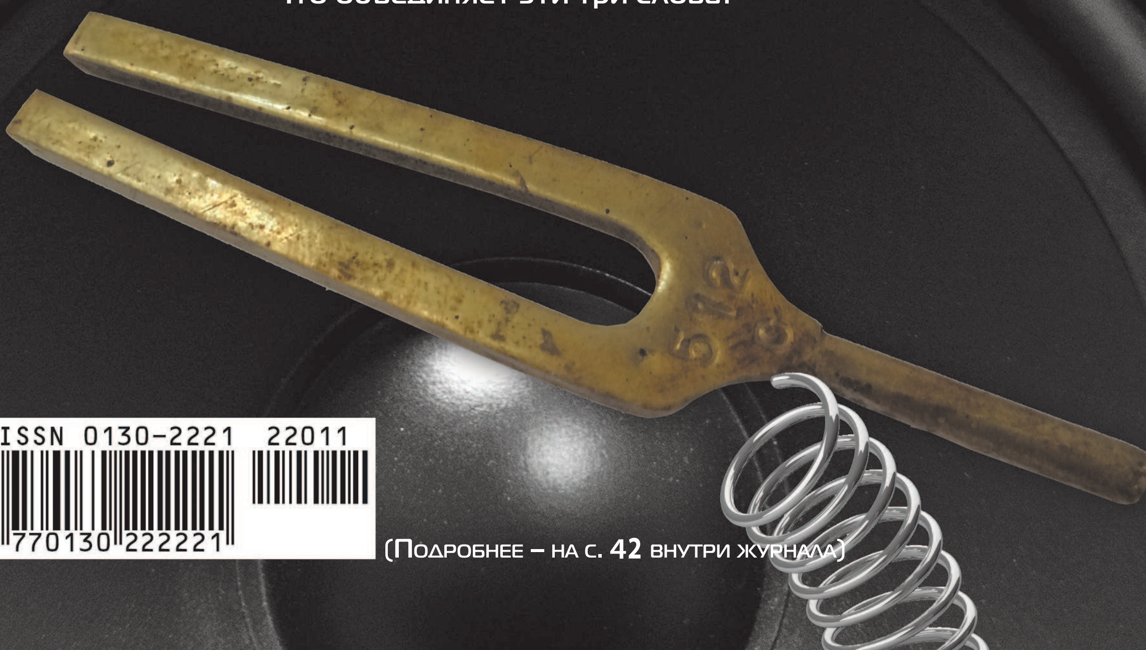
*А.Русанов*

Индекс 90964

# Прогулки с физикой


УДАР, ШУРШАНИЕ, ЗВУК ...

**Что объединяет эти три слова?**




ISSN 0130-2221 22011
9 770130 222221

(Подробнее – на с. 42 внутри журнала)