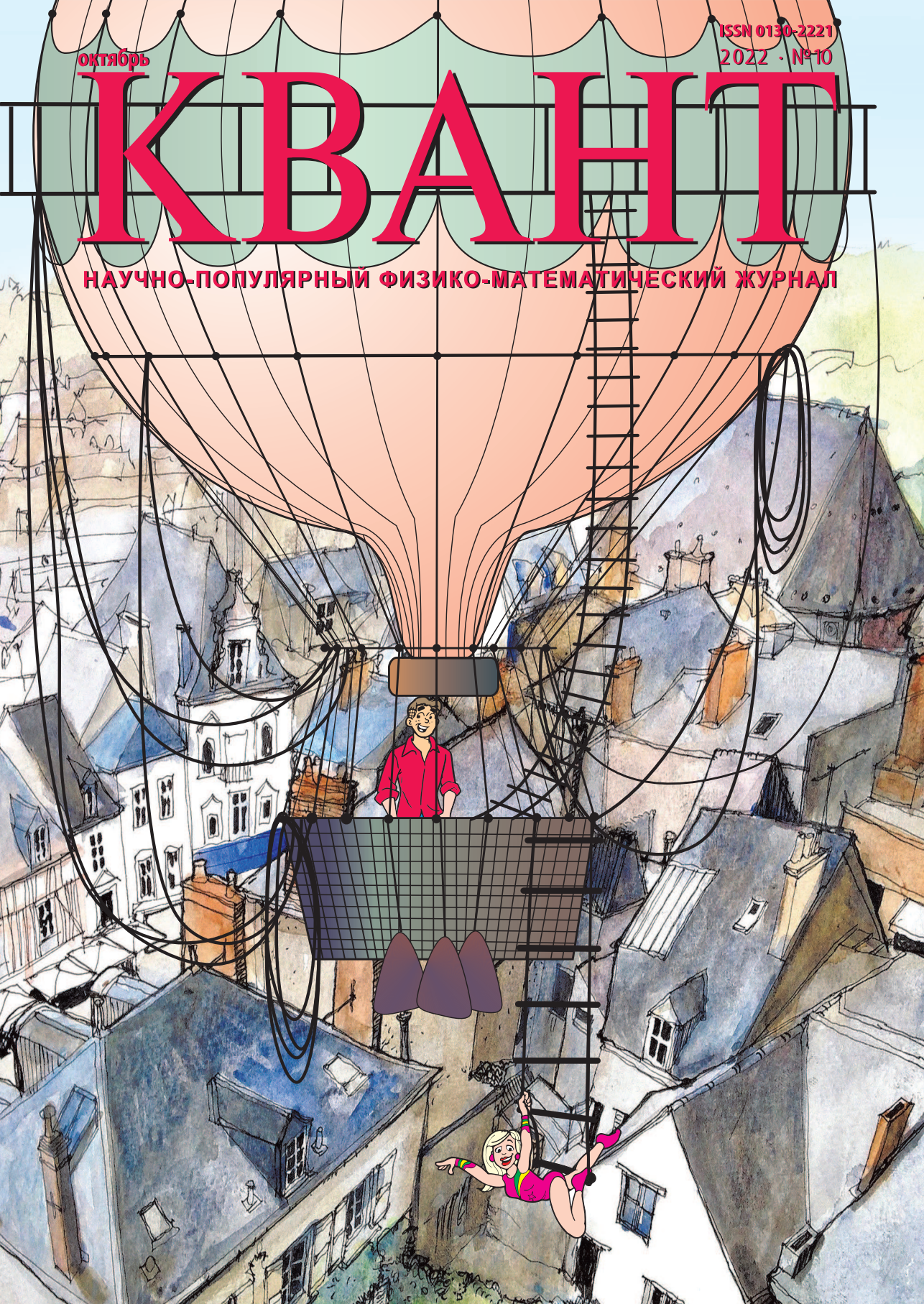


октябрь

ISSN 0130-2221
2022 · №10

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



ЁЛОЧКА

Эта изящная головоломка была придумана австрийским изобретателем Стефаном Баумеггером (Stephan Baumegger). Она состоит из 11 деталей, которые получаются из брусочков сечением 2×2 путем выпиливания лишнего. На фотографии хорошо видно, как устроена каждая деталь.



«Ёлочка» относится к так называемым головоломкам-колючкам, в которых требуется составить какую-либо симметричную объемную фигуру из брусочков с пропилами, позволяющими сцеплять их друг с другом. Обычно получающаяся фигура действительно выглядит достаточно колючей, чтобы оправдать название этого жанра головоломок. А в этом случае еще и «прообраз» подходящий: как всем хорошо известно, ёлки – действительно колючие деревья.

Желаем успеха!

Е.Епифанов

В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук
Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН
Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,
М.Н.Бондаров, А.А.Варламов,
С.Д.Варламов, А.П.Веселов,
А.Н.Виленин, Н.П.Долбилин,
С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,
А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов,
П.А.Кожевников, С.П.Коновалов,
К.П.Кохась, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,
А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,
А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,
А.В.Устинов (заместитель главного
редактора), А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора)**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, В.И.Берник,
А.А.Боровой, В.В.Козлов,
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

- 2 Обобщение теоремы Данделена (к 200-летию доказательства). *Ф.Нилов*
9 Воздушный шар Перельмана. *И.Акулич*

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 13 Задачи 5–8

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 14 Задачи M2718–M2721, Ф2725–Ф2728
15 Решения задач M2706–M2709, Ф2713–Ф2716

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 23 Задачи

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 24 Невинная Ифигения и разложение сил.
А.Стасенко

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 26 Бесквадратные целые, функция Мёбиуса и свертка Дирихле

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 30 Пружина, стержень и предельный переход.
И.Горбатый

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Геометрические головоломки в картинках

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 34 Как мы видим предмет сквозь толщу воды или стекла? *Ю.Носов*

ОЛИМПИАДЫ

- 37 Международная физическая олимпиада

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 43 Олимпиада «Покори Воробьевы горы!»
Математика
45 Институт криптографии, связи и информатики
Академии ФСБ России

- 52 Ответы, указания, решения
Вниманию наших читателей (22)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «Воздушный шар Перельмана»*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

Обобщение теоремы Данделена (к 200-летию доказательства)

Ф.НИЛОВ

РАССМОТРИМ КОНУС ВРАЩЕНИЯ и некоторую плоскость, не проходящую через его вершину (рис.1). Кривая, которую высекает данная плоскость на

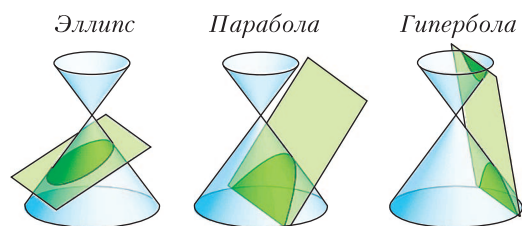


Рис. 1. Конические сечения

конусе, называется *коническим сечением* или *коникой*. Что это может быть за кривая? Оказывается, она является либо эллипсом, либо гиперболой, либо параболой. По-видимому, впервые этот факт обнаружил древнегреческий математик Менехм в IV веке до н.э., однако его труды не дошли до наших дней. Аполлоний Пергский, один из трех (наряду с Евклидом и Архимедом) великих геометров античности, живший в III веке до н.э.), посвятил коническим сечениям обширную монографию из 8 книг. Ровно 200 лет назад, в 1822 году бельгийский математик и инженер Жерминаль Данделен придумал изящную геометрическую конструкцию, описывающую все конические сечения (см. [1]). В этой статье мы обсудим данную конструкцию и обобщим ее на случай сечений произвольной *поверхности вращения второго порядка* (определение которой мы дадим позже).

Начнем с того, что вспомним геометрические определения эллипса, гиперболы и



Жерминаль Данделен

параболы. Для эллипса и гиперболы существует *бифокальное определение*. Зафиксируем две точки F_1 и F_2 (фокусы). *Эллипсом* называется геометрическое место точек (ГМТ) M таких, что $MF_1 + MF_2 = c$, где c – фиксированная величина, большая $|F_1F_2|$ (рис.2). Отметим, что если точки F_1 и F_2 совпадают, то это ГМТ становится окружностью, которую мы тоже будем считать эллипсом. *Гиперболой* называется ГМТ M таких, что $|MF_1 - MF_2| = c$, где $c > 0$ –

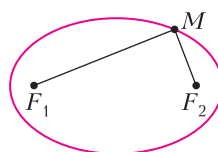


Рис. 2. Бифокальное определение эллипса

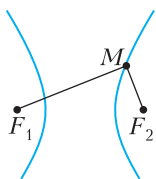


Рис. 3. Бифокальное определение гиперболы

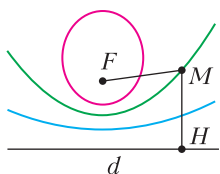


Рис. 4. Фокально-директориальное определение коник

фиксированная величина, меньшая $|F_1F_2|$ (рис.3).

Для параболы, эллипса и гиперболы существует *фокально-директориальное определение* (рис.4). Зафиксируем точку F (фокус) и прямую d (директриса). Рассмотрим ГМТ M таких, что $\frac{MF}{MH} = \epsilon$, где H – проекция точки M на прямую d , а ϵ – фиксированная величина, называемая *эксцентриситетом*. Если $\epsilon = 1$, то это ГМТ – парабола, если $\epsilon < 1$, то эллипс, если $\epsilon > 1$, то гипербола. Отметим, что фокусы, рассматриваемые в бифокальном и фокально-директориальном определениях, совпадают; для каждого фокуса есть своя директриса. Фокально-директориальное определение является в некотором смысле более универсальным, чем бифокальное (с помощью бифокального нельзя определить параболу, в определении гиперболы появляется модуль). Отметим, что с помощью геометрических определений можно вывести целый ряд замечательных свойств коник (см. [2]).

Упражнение 1. Пусть прямая F_1F_2 пересекает эллипс (или гиперболу) в точках X и Y .

Докажите, что $|XY| = c$ и $\frac{|F_1F_2|}{|XY|} = \epsilon$.

Теперь мы готовы перейти к описанию классической конструкции Данделена.¹ Итак, пусть нам дан конус вращения и некоторая плоскость, не проходящая через его вершину. Наша задача – доказать, что эта плоскость высекает на конусе либо эллипс, либо гиперболу, либо параболу. Идея Данделена заключается в рассмотрении сфер, вписанных в конус (каждая из таких сфер касается конуса по окружности).

¹ Эта конструкция и известна сейчас как «теорема Данделена». (Прим. ред.)

Посмотрим на всю эту конфигурацию в направлении, параллельном данной плоскости и перпендикулярном оси конуса. Тогда сама плоскость будет изображаться как прямая, полости конуса – как два угла, образованные парой прямых, сферы, вписанные в конус, – как окружности, вписанные в эти углы. Кривая, по которой пересекаются конус и плоскость, может изображаться (рис.5) либо отрезком (в этом

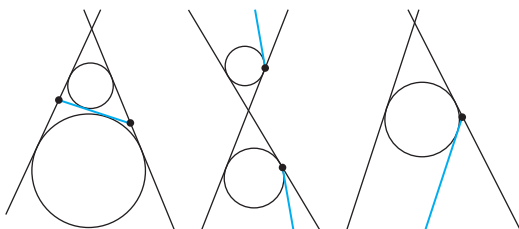


Рис. 5

случае плоскость пересекает все образующие конуса в точках одной полости конуса), либо парой лучей (в этом случае плоскость параллельна двум образующим конуса и пересекает обе полости), либо одним лучом (в этом случае плоскость будет параллельна ровно одной образующей конуса).

В первом и втором случаях существуют ровно две окружности, вписанные в данные два угла и касающиеся прямой, являющейся изображением секущей плоскости, в последнем – такая окружность единственная. Значит, в первом и втором случаях существует ровно две сферы, вписанные в конус и касающиеся плоскости, а в третьем случае такая сфера одна.

Рассмотрим первый случай (рис.6), когда секущая плоскость пересекает лишь одну полость конуса. Построим сферы, вписанные в конус и касающиеся плоскости в точках F_1 и F_2 . Возьмем произвольную точку M на кривой пересечения конуса с плоскостью и образующую конуса, проходящую через нее. Пусть она касается сфер в точках T_1 и T_2 . Тогда $MF_1 = MT_1$ и $MF_2 = MT_2$ как касательные к сферам. Значит, $MF_1 + MF_2 = MT_1 + MT_2 = T_1T_2$. Легко видеть, что длина отрезка T_1T_2 не зависит от выбора точки M , а значит, и сумма $MF_1 + MF_2$ не зависит от выбора

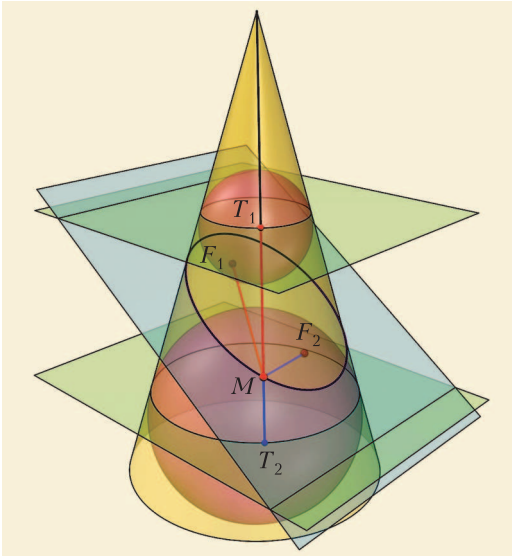


Рис. 6

точки M . Поэтому плоскость отсекает на конусе эллипс с фокусами F_1 и F_2 .

Упражнение 2. Докажите аналогично, что во втором случае, когда плоскость пересекает обе полости конуса, кривая пересечения является гиперболой.

Рассмотрим третий случай (рис.7), когда секущая плоскость параллельна ровно одной образующей r конуса. Тогда, как мы уже говорили, существует ровно одна сфера, вписанная в конус и касающаяся плоскости в точке F . Пусть M – произвольная точка на сечении. Обозначим через d пря-

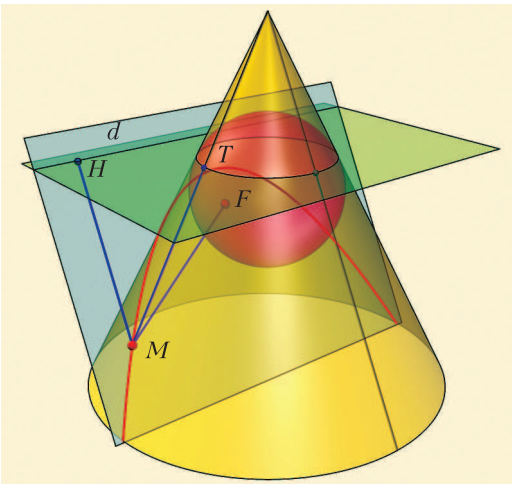


Рис. 7

мую, по которой пересекаются секущая плоскость и плоскость, содержащая точки касания конуса со сферой. Обозначим через H проекцию точки M на прямую d .

Упражнение 3. Докажите, что прямая MH параллельна образующей r конуса.

Пусть T – точка касания образующей конуса, проходящей через точку M , со вписанной сферой. Тогда $MF = MT$ как касательные к сфере. Заметим, что MT и MH образуют равные углы с плоскостью, содержащей точки касания вписанной сферы с конусом, поскольку MT является образующей конуса, а MH параллельна другой образующей r . Тогда $MT = MH$. Таким образом, $MF = MH$, т.е. сечение конуса является параболой.

Упражнение 4. Используя конструкцию, аналогичную рассмотренной в третьем случае, докажите, что для первых двух случаев прямая, по которой пересекаются секущая плоскость и плоскость, содержащая точки касания вписанной сферы с конусом, является директрисой коники.

Замечание 1. В своей работе [1] Данделен не доказывал утверждение упражнения 4. Это было сделано ирландским математиком Пирсом Муртоном в 1829 году. Ирландский математик и епископ Хью Гамильтон в 1758 году в своем трактате о конических сечениях делал похожие на конструкцию Данделена построения. И хотя Гамильтон не вписывал в конус сферы, он рассматривал окружности касания таких сфер и конуса. Определял он такую окружность как окружность на конусе, лежащую на таком же расстоянии вдоль образующей от вершины коники, на котором находится ее фокус. Для такой окружности он доказал, что для любой точки конического сечения длина образующей до окружности равна расстоянию до фокуса и плоскость окружности пересекает с плоскостью коники по ее директрисе.

Отметим, что если изначальная плоскость проходит через вершину конуса, то она пересекает конус либо по точке, либо по паре прямых, либо по одной прямой. Иногда такие сечения называют *вырожденными кониками*. Таким образом, мы описали все конические сечения. По ссылке <https://etudes.ru/etudes/Dandelin-spheres/> можно посмотреть красивые анимации, посвященные конструкциям Данделена.

А чем будут являться сечения других поверхностей вращения? Например, для цилиндра вращения любое его сечение плоскостью, не параллельной оси вращения, является эллипсом. В этом случае работает в точности такая же конструкция.

Упражнение 5. Проведите аналогичные рассуждения для цилиндра.

В следующем разделе мы рассмотрим сечения некоторых других поверхностей вращения и обобщим для них конструкцию Данделена.

Обобщенная теорема Данделена

Мы начнем с некоторых определений.

Очевидно, что у эллипса и гиперболы есть две оси симметрии, а у параболы такая ось ровно одна. Для эллипса и гиперболы одна ось проходит через фокусы и называется *большой*, другая ось называется *малой*. *Квадрикой вращения* или *поверхностью вращения второго порядка* мы назовем поверхность, образованную вращением коники относительно одной из ее осей симметрии (рис.8), которая называется *осью вращения квадрики*. Поверхность, образованная вращением эллипса относительно его большой или малой оси, называется *вытянутым* или *сплюснутым эллипсоидом вращения* соответственно. Поверхность, образованная вращением гиперболы относительно ее большой или малой оси, называется *двухполостным* или *одноплостным гиперboloидом вращения* соответственно. Поверхность, образованная вращением параболы относительно ее оси, называется *параболоидом вращения*.

Мы будем говорить, что сфера *вписана в квадрику вращения*, если сфера касается ее вдоль некоторой окружности. Отметим, что центр сферы, вписанной в квадрику, всегда лежит на ее оси вращения.

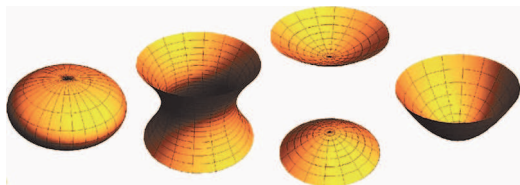


Рис. 8. Слева направо: эллипсоид, однополостный гиперboloид, двухполостный гиперboloид, параболоид

Обобщенная теорема Данделена. Пусть плоскость пересекает квадрику вращения по конике. Рассмотрим сферу, которая вписана в квадрику и касается плоскости (рис.9, 10). Тогда а) точка касания сферы и плоскости является фокусом коники; б) прямая, по которой плоскость, содержащая точки касания квадрики и сферы, пересекает данную плоскость, является директрисой коники.

Для сплюснутого эллипсоида вращения условия данной теоремы не могут выполняться: сфера, касающаяся эллипсоида по окружности, не может касаться плоскости, пересекающей эллипсоид, она ее пересекает

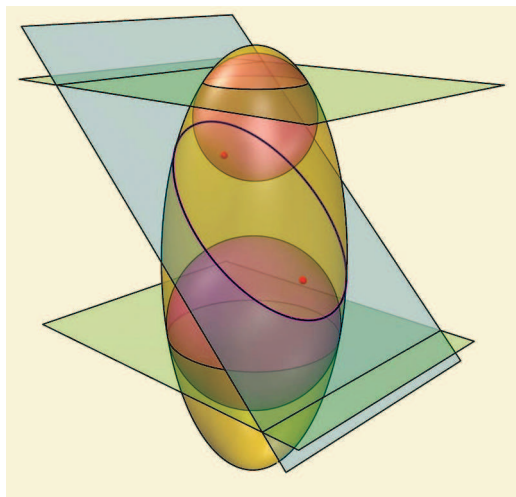


Рис. 9

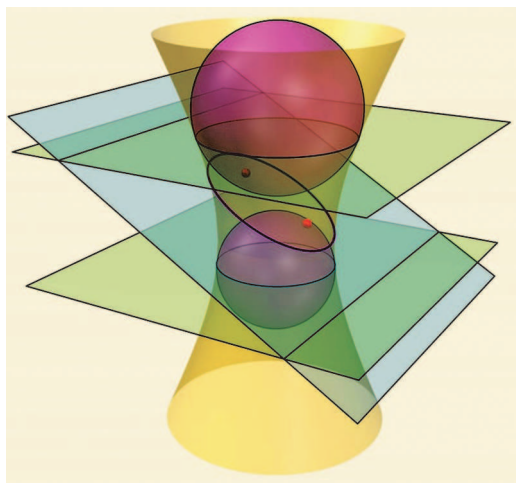


Рис. 10

ет. Для всех других квадрик вращения теорема имеет смысл. Отметим, что ключевой идеей в доказательстве классической теоремы Данделена являлось наличие образующих у конуса. Такие образующие есть и у цилиндра. Оказывается, что на однополостном гиперболоиде также есть два семейства прямолинейных образующих и аналогичные рассуждение можно провести и для него, что и сделал сам Данделен четырьмя годами позже знаменитой теоремы (см. [3]). На других квадриках вращения образующих нет, поэтому напрямую обобщить эту теорему не получится. По всей видимости, это обобщение теоремы Данделена, опубликованное в 2013 году (см. [4]), было неизвестно. Для доказательства нам потребуется обобщенное фокально-директориальное свойство коник, которое мы обсудим в следующем разделе.

Обобщенные фокальные свойства коник

Мы будем говорить, что окружность и коника *дважды касаются*, если они имеют две различные точки касания. Отметим, что эллипс и гипербола имеют два семейства дважды касающихся их окружностей. Центры окружностей одного семейства лежат на большой оси, центры окружностей другого семейства лежат на малой оси. Для параболы такое семейство только одно, центры окружностей лежат на ее оси.

Замечание 2. Точки касания коники и окружности могут быть мнимыми; случай мнимого касания изображен на рисунке 11, а–в. В

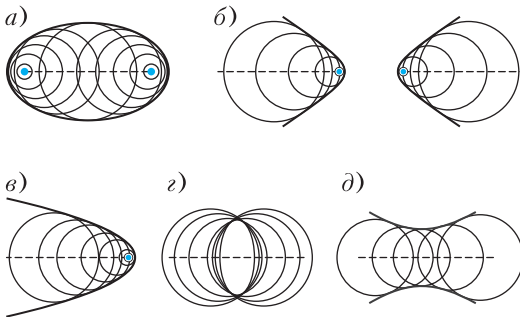


Рис. 11. а – в) Семейства окружностей, дважды касающихся коники, центры которых лежат на большой оси данной коники. г, д) Семейства окружностей, дважды касающихся коники, центры которых лежат на малой оси данной коники

дальнейшем мы будем предполагать, что все точки касания являются вещественными, если не оговорено противное. Фокусы коники можно рассматривать как окружности нулевого радиуса. Каждый из фокусов является вещественной точкой пересечения двух комплексно сопряженных прямых, касающихся коники. Вещественная прямая, проходящая через точки касания, является соответствующей директрисой.

Оказывается, что в классических определениях коники (с помощью фокусов и директрис) каждый из фокусов может быть заменен на произвольную окружность, дважды касающуюся данной коники. Вместо соответствующей директрисы рассматривается прямая, проходящая через точки касания. При этом расстояние до фокуса заменяется на длину касательной к окружности (рис. 12).

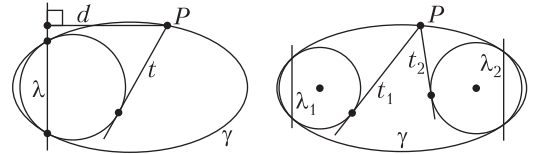


Рис. 12. Слева: обобщенное «фокально-директориальное» свойство коники. Справа: обобщенное «бифокальное» свойство коники

Отметим, что эти обобщенные фокальные свойства коник рассматривались уже начиная с XIX века; в частности, их рассматривали Я.Штейнер, В.Клиффорд и А. Лебег (см. [5]). Недавние применения можно посмотреть в [6, 7].

Перед формулировкой обобщенных фокальных свойств нам потребуется следующее определение.

Определение. Тангенциальным расстоянием $t(A, \omega)$ от точки A до окружности ω

мы будем называть величину $\sqrt{|d^2 - r^2|}$, где через d и r обозначены расстояние от точки A до центра окружности ω и радиус окружности ω соответственно.

Таким образом, если точка A лежит вне окружности ω , то тангенциальное расстояние равно длине касательного отрезка, проведенного из точки A к окружности ω . Через $d(P, \lambda)$ мы будем обозначать расстояние от точки P до прямой λ .

Обобщенное «фокально-директориальное» свойство (см. [5, Теорема 3]). Дана произвольная коника γ . Рассмотрим произвольную окружность ω , дважды касающуюся γ . Рассмотрим прямую λ , проходящую через точки касания ω и γ (см. рис. 12 слева). Если центр окружности ω лежит на большой оси коники γ , то для произвольной точки $P \in \gamma$ мы имеем $\frac{t(A, \omega)}{d(P, \lambda)} = \varepsilon$, где ε – эксцентриситет γ . Если центр окружности ω лежит на малой оси коники γ , то для произвольной точки $P \in \gamma$ мы имеем $\frac{t(A, \omega)}{d(P, \lambda)} = \varepsilon'$, где $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{|1 - \varepsilon^2|}}$ – величина, называемая сопряженным эксцентриситетом γ .

Обобщенное «бифокальное» свойство (см. [5, Теорема 3]). Дана коника γ . Рассмотрим две произвольные окружности ω_1 и ω_2 , дважды касающиеся коники γ , такие, что их центры лежат на одной оси симметрии коники γ (см. рис. 12 справа). Обозначим через λ_1 прямую, проходящую через точки касания γ и ω_1 . Обозначим через λ_2 прямую, проходящую через точки касания γ и ω_2 . Если точка $P \in \gamma$ лежит в полосе, ограниченной λ_1 и λ_2 , то $t(P, \omega_1) + t(P, \omega_2) = \text{const}$. Если точка $P \in \gamma$ лежит вне полосы, ограниченной λ_1 и λ_2 , то $|t(P, \omega_1) - t(P, \omega_2)| = \text{const}$.

Замечание 3. Бифокальное свойство легко выводится из фокально-директориального. Фокально-директориальное проще всего доказывать аналитически (см. [2, §4.7]). Для геометрического доказательства приходится рассматривать различные случаи и для каждого из них проводить свое рассуждение. Для всех случаев, кроме того, когда γ является эллипсом, а центр ω лежит на малой оси, можно действовать по аналогии с классической конструкцией Данделена (см. [5, Теорема 1]), рассматривая γ как сечение однополостного гиперболоида и вписывая в него всевозможные сферы (а не только те, которые касаются плоскости сечения). Эти сферы будут высекать на плоскости сечения окружности, которые дважды касаются коники γ , далее доказательство аналогично упражнению 4. Для оставшегося случая можно рассмотреть ортогональную проекцию окружности на сфере на какую-нибудь

фиксированную плоскость, проходящую через центр сферы. Тогда эта окружность проецируется в эллипс, дважды касающийся окружности, по которой пересекаются плоскость и сфера.

Упражнения

6. В угол вписаны две окружности. К данным окружностям провели общую внутреннюю касательную, касающуюся окружностей в точках T_1 и T_2 и пересекающую стороны угла в точках P_1 и P_2 . Докажите, что $T_1P_1 = T_2P_2$.

7. В эллипс вписаны две окружности, центры которых лежат на большой оси эллипса. К данным окружностям провели общую касательную, касающуюся окружностей в точках T_1 и T_2 и пересекающую эллипс в точках P_1 и P_2 . Докажите, что $T_1P_1 = T_2P_2$.

8. В эллипс вписаны две окружности, центры которых лежат на большой оси эллипса, пересекающиеся в точках P и Q . Пусть одна окружность касается эллипса в точках K_1 и K_2 , а вторая окружность – в точках L_1 и L_2 . Докажите, что расстояние между прямыми PQ и K_1K_2 равно расстоянию между прямыми PQ и L_1L_2 .

Доказательство обобщенной теоремы Данделена

Обозначим через γ сечение квадрики данной плоскостью, через λ прямую, по которой данная плоскость пересекается с плоскостью, содержащей точки касания сферы и квадрики, и через ϕ угол между этими плоскостями (рис. 13).

Пусть M – произвольная точка на данной конике γ . Рассмотрим плоскость, содержащую ось вращения квадрики и проходящую через M . Пусть эта плоскость

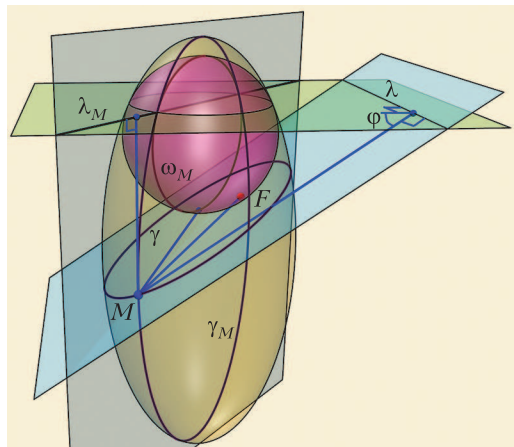


Рис. 13

пересекает квадртку, данную сферу и плоскость, содержащую точки касания, по конике γ_M , по окружности ω_M и по прямой λ_M соответственно. Ясно, что окружность ω_M дважды касается коники γ_M , причем прямая λ_M проходит через точки касания ω_M и γ_M . Выражение $\frac{d(M, \lambda_M)}{d(M, \lambda)} = \sin \varphi$ не зависит от точки M , лежащей на конике γ . Заметим, что $MF = t(M, \omega_M)$, поскольку MF и $t(M, \omega_M)$ являются длинами отрезков касательных к данной сфере. По обобщенному «фокально-директориальному» свойству отношение $\frac{t(M, \omega_M)}{d(M, \lambda)}$ не зависит от точки M , лежащей на данной конике γ . Поэтому величина

$$\frac{d(M, \lambda_M)}{d(M, \lambda)} \cdot \frac{t(M, \omega_M)}{d(M, \lambda_M)} = \frac{t(M, \omega_M)}{d(M, \lambda)} = \frac{MF}{d(M, \lambda)}$$

не зависит от точки M , лежащей на данной конике γ . Значит, точка F и прямая λ являются фокусом и директрисой коники γ .

Замечание 4. Можно было бы доказать обобщенную теорему Данделена по-другому, используя мнимые точки касания. Любая плоскость высекает на квадртке и вписанной сфере дважды касающиеся конику и окружность, точки касания находятся на пересечении этой плоскости и плоскости, содержащей точки касания квадртки и сферы. В случае, когда плоскость касается сферы, мы получаем в пересечении окружность нулевого радиуса, дважды касающуюся коники (см. замечание 2), т.е. фокус, при этом линия пересечения будет соответствующей директрисой.

В заключение предложим читателю следующие задачи.

1. Дан эллипс с фокусом F и окружность с центром O на малой оси и радиусом R , которая касается его дважды. Докажите, что $\frac{OF}{R} = \varepsilon$.

2 (А.Заславский, А.Канель-Белов, Устная олимпиада имени И.Ф.Шарыгина, 2012). Даны окружность с центром O и точки A, B внутри нее такие, что $OA = OB$. Постройте точку X на окружности, для которой сумма $XA + XB$ минимальна.

3 (Д.Резник, А.Заславский). Найдите геометрическое место фокусов эллипсов, вписан-

ных в круговой сектор (т.е. касающихся двух радиусов и дважды касающихся дуги).

4. Можно ли доказать геометрически, что сечения сплюснутого эллипсоида вращения будут являться эллипсами?

5. Докажите геометрически, используя обобщенное фокально-директориальное свойство гиперболы, что на однополостном гиперболоиде есть два семейства прямолинейных образующих. (Отметим, что на странице 19 замечательной книги [8] говорится, что это утверждение может быть доказано лишь только аналитическим путем.)

Автор благодарен А.А.Заславскому и П.А.Кожевникову за ценные замечания.

Литература

1. G.Dandelin. Mémoire sur quelques propriétés remarquables de la focale parabolique. – Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, т. 2, pp. 171–202, 1822.

2. А.В.Акопян, А.А.Заславский. Геометрические свойства кривых второго порядка (2-е изд., дополн.) – М.: МЦНМО, 2011.

3. G.Dandelin. Mémoire sur l'hyperboloïde de révolution, et sur les hexagones de Pascal et de M.Brianchon. – Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, т. 3, pp. 1–14, 1826.

4. F.K.Nilov. A generalization of the Dandelin theorem. – Journal of classical geometry, vol. 2, pp. 57–65, 2013.

5. Tom M.Apostol and Mamikon A.Mnatsakanian. New Descriptions of Conics via Twisted Cylinders, Focal Disks, and Directors. – The American Mathematical Monthly, vol. 115, no. 9, pp. 795–812, 2008.

6. Ф.К.Нилов. Параболические многоугольники. – Математическое просвещение, сер. 3, вып. 12, с. 195–204, 2008.

7. А.А.Заславский. О вписанно-описанных четырехугольниках, моделях геометрии Лобачевского и «лемме Нилова». – Математическое просвещение, сер. 3, вып. 25, с. 163–166, 2020.

8. Д.Гильберт, С.Кон-Фоссен. Наглядная геометрия. – М.–Л., ОНТИ, 1936.

Воздушный шар Перельмана

И. АКУЛИЧ

В СВОЮ ЗНАМЕНИТУЮ КНИГУ «Знаете ли вы физику?» (первое издание книги вышло в 1934 году, после чего книга переиздавалась многократно) классик-популяризатор естественных наук Я.И.Перельман включил такую задачу:

«С воздушного шара, неподвижно держащегося в воздухе, свободно свешивается лестница. По ней начал взбираться человек. Куда при этом подвинется шар: вверх или вниз, и на сколько?»

Там же он разместил и вот такое решение:

«Шар в покое не останется. Пока человек взбирается по лестнице, аэростат будет опускаться. Здесь происходит то же, что наблюдается, когда вы идете по приставшей к берегу легкой лодке, чтобы выбраться на сушу: лодка отступает под вашими ногами назад. Точно так же и лестница, отталкиваемая вниз ногами взбирающегося по ней человека, будет увлекать аэростат к земле.

Переходя к решению этой задачи с точки зрения законов механики, мы должны рассуждать так. Шар с лестницей и человек на ней представляют собой изолированную систему, центр тяжести которой не может быть перемещен действием внутренних сил. Он сохранит неизменным свое положение при подъеме человека по лестнице только тогда, когда сам шар опустится вниз, иначе центр тяжести поднялся бы.

Что касается величины перемещения шара, то оно во столько же раз меньше высоты поднятия человека, во сколько раз шар тяжелее человека».

Здесь имеет место как раз тот самый случай, когда заслуженный авторитет Якова Исидоровича сыграл злую шутку, потому что эта задача вместе с приведенным

решением, что называется, пошла в народ. Так, в 1989 году она была напечатана в «Кванте» (условие – №7, решение – №9).

Читатель может спросить: а что здесь не так? Решение-то вполне логичное и обоснованное, и на уровне здравого смысла представляется безупречным. Как бы не так! Чтобы ошибка стала вполне наглядной, попробуем решить тем же способом другую (но по сути – абсолютно такую же) задачу. В решении, как мы помним, Перельман упомянул лодку. Вот ее и используем:

На поверхности водоема находится лодка массой 100 кг. С нее спущена в водоем лестница, на ступеньке которой на глубине 10 м стоит водолаз массой тоже 100 кг. Водолаз поднимается по лестнице вверх, пока не достигнет лодки. Куда и на сколько сдвинется лодка?

Задача действительно полностью аналогична – здесь лишь среда, создающая выталкивающую силу, является не воздухом, а водой. Но какая разница?

Если решать задачу, используя те же рассуждения, что и Перельман, то, учитывая равные массы лодки и водолаза, можно сделать однозначный вывод: водолаз и лодка встретятся на глубине 5 метров *под водой*. Каково? Но еще более впечатляющим оказывается ответ, если водолаз начнет не подниматься, а спускаться по лестнице. Тогда к тому моменту, как он окажется на глубине 20 метров, лодка поднимется в воздух на высоту 10 метров над поверхностью воды! Хотелось бы посмотреть на такое – зрелище, наверное, внушительное.

В чем же ошибка рассуждений? Перельман утверждает, что шар с лестницей и человеком на ней представляют собой изолированную систему, центр тяжести которой не может быть перемещен действием внутренних сил. И приводит в

качестве аналога лодку, скользящую горизонтально по поверхности воды, когда человек проходит по ней. Да, для человека с лодкой их суммарный центр тяжести сохранит свое местоположение, но только потому, что в направлении движения человека и лодки не действуют никакие внешние силы (и система является изолированной в проекции на ось, по которой идет человек и сдвигается лодка).

А для воздушного шара все наоборот – система *не* изолирована, поскольку именно в вертикальном направлении на все ее элементы действуют весьма существенные внешние силы. Это, во-первых, сила тяжести, а во-вторых – выталкивающая сила воздуха. Они и определяют перемещение шара. Да, собственно говоря, само по себе нахождение шара с человеком в воздухе в состоянии равновесия определяется в первую очередь именно этими внешними силами, а не каким-то там перемещением человека по лестнице.

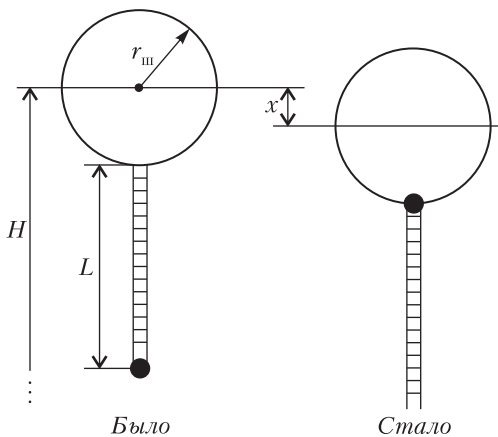
Что, не очень убедительно? Ладно. Поскольку лучший критерий правильности любой теории – практика, давайте выполним расчет и выясним, каково же будет действительное смещение шара, если принять некие более-менее реальные условия.

Изобразим схематично (см. рисунок) положение шара и человека на лестнице в начале подъема (слева) и в конце (справа). Здесь человек обозначен маленьким черным кружком, а шар – большим белым. Конечно, кое-что пришлось упростить. В частности, не нарисована корзина

– неперенный атрибут любого воздушного шара. Но вполне допустимо считать, что корзина составляет неразрывное целое с самим шаром, так что масса корзины включена в массу шара. Находится же корзина непосредственно под самой нижней частью шара – практически вплотную. А так как немаловажную (даже, пожалуй, первостепенную) роль в нашей задаче играет выталкивающая сила, то заодно отметим, что собственным объемом корзины и оболочки шара вполне можно пренебречь, а выталкивающую силу, действующую на них, считать отсутствующей. В отношении лестницы будем еще суровее – пренебрежем и ее массой, и объемом.

Таким образом, из рассматриваемых объектов остаются два: заполненный газом шар и человек. Массу оболочки шара (с учетом корзины) примем равной $m_{ш} = 200$ кг, массу человека – $m_{ч} = 80$ кг. Полагаем, что шар находится довольно высоко – на высоте $H = 1000$ м над уровнем моря, а длину лестницы будем считать равной $L = 100$ м. После подъема человека снизу под самое «брюхо», согласно Перельману, шар опустится на некую величину x , которую мы и будем искать. На рисунке фигурирует еще одна величина – радиус воздушного шара $r_{ш}$ (будем считать его сферическим). Этим значением задаваться нельзя – его придется вычислять из условий равновесия. Но об этом чуть позже.

Выталкивающая сила со стороны воздуха на находящиеся в нем тела определяется плотностью воздуха. Плотность воздуха, как известно, убывает с высотой (и, кстати, именно это убывание позволяет воздушным шарам «зависать» на определенной высоте – в противном случае шар поднимался бы вверх до самого конца атмосферы). Но *как* убывает? На этот счет подробные сведения противоречивы, однако есть широко известная зависимость среднего давления воздуха от высоты (справедливая вплоть до нескольких километров): на уровне моря давление составляет 760 мм рт. ст. (или $101,3 \cdot 10^3$ Па) и снижается на 1 мм рт. ст. (133,3 Па) при подъеме на каждые 12 м. Следовательно, подъем на 1 м приводит к уменьшению давления



на $133,3 \text{ Па}/12 = 11,11 \text{ Па}$. Получаем эмпирическую зависимость давления воздуха p_B (Па) от высоты h (м) над уровнем моря:

$$p_B = 101,3 \cdot 10^3 - 11,11 \cdot h.$$

Но при чем здесь давление? Нам-то плотность нужна. Ничего, сейчас и ее определим.

Атмосферный воздух достаточно близок к идеальному газу, так что вполне можно применить уравнение Клапейрона–Менделеева:

$$p_B V_B = \frac{m_B}{M_B} RT.$$

Здесь V_B – занимаемый воздухом объем (м^3), m_B – его масса (кг), M_B (кг/моль) – молярная масса, которую для воздуха принимаем равной $29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $R = 8,314$ Дж/(моль \cdot К) – универсальная газовая постоянная, T – абсолютная температура (К). Чему бы температура могла быть равна? На высотах порядка километра не слишком-то жарко – не зря воздухоплаватели вовсю используют теплые свитера. Будем считать $T = 280$ К (т.е. около 7°C). С помощью этого уравнения можно определить желанную плотность воздуха $\rho_B = m_B/V_B$ (кг/м 3) в виде функциональной зависимости от высоты подъема над уровнем моря h (м):

$$\rho_B(h) = \frac{p_B M_B}{RT} = 1,262 - 0,1384 \cdot 10^{-3} \cdot h.$$

Но этого пока недостаточно – надо еще определить и другие плотности – газа, наполняющего оболочку шара, а также... самого человека.

Будем считать, что шар заполнен гелием. (Во времена выхода в свет книги Перельмана широко использовали и водород, но это слишком уж рискованно. Поэтому будем соблюдать пожарную безопасность.) Для него тоже запишем уравнение газового состояния, из которого сразу выразим интересующую нас плотность гелия ρ_r (кг/м 3):

$$\rho_r = \frac{p_r M_r}{RT}.$$

Давление гелия в шаре должно быть чуть выше атмосферного – чтобы шар был надут. Примем его на 10% больше нормального атмосферного давления на уровне моря, т.е. $p_r = 1,1 \cdot 101,3 \cdot 10^3 \text{ Па} = 111,43 \cdot 10^3 \text{ Па}$. Молярную массу гелия найдем из таблицы Менделеева: $M_r = 4$ г/моль = $4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Температура, естественно, совпадает с температурой окружающего воздуха $T = 280$ К. Поэтому получаем

$$\rho_r = 0,1915 \text{ кг/м}^3.$$

Ну, а человек? Поскольку по химическому составу он представляет собой, в основном, воду, то его плотность примем близкой к плотности воды: $\rho_q = 1000$ кг/м 3 . Поэтому объем человека равен

$$V_q = \frac{m_q}{\rho_q} = 0,08 \text{ м}^3.$$

Если радиус шара $r_{ш}$, то его объем

$$V_{ш} = \frac{4}{3} \pi r_{ш}^3 = 4,189 r_{ш}^3.$$

Выталкивающую силу $F_{ш}$, действующую на шар, можно определить, используя плотность воздуха на высоте центра шара, т.е. на высоте $H = 1000$ м (это вполне допустимо, так как части шара, расположенные выше его центра, выталкиваются воздухом слабее, но зато те, что ниже, – сильнее, так что в среднем получается именно то, что надо):

$$F_{ш} = V_{ш} \cdot \rho_B(H) \cdot g,$$

где $g = 9,81$ м/с 2 – ускорение свободного падения. Таким образом,

$$F_{ш} = 4,189 r_{ш}^3 \cdot (1,262 - 0,1384 \cdot 10^{-3} \cdot 1000) \cdot 9,81 = 46,1733 r_{ш}^3.$$

На человека тоже действует выталкивающая сила, но он находится ниже шара – в самой нижней точке лестницы, поэтому высота его над уровнем моря составляет $H - r_{ш} - L$ и плотность воздуха там равна $\rho_B(H - r_{ш} - L) =$

$$= 1,262 - 0,1384 \cdot 10^{-3} \cdot (1000 - r_{ш} - 100) = 1,13744 - 0,1384 \cdot 10^{-3} \cdot r_{ш}.$$

А потому выталкивающая сила равна

$$F_q = V_q \cdot \rho_B (H - r_{ш} - L) \cdot g = \\ = 0,89266 - 0,10862 \cdot 10^{-3} \cdot r_{ш}.$$

Суммарная выталкивающая сила, действующая на шар и человека, должна компенсировать суммарную силу тяжести шара (оболочки и гелия в нем) и человека. Массами человека и оболочки шара мы задались, а масса гелия составляет

$$m_r = \rho_r \cdot V_{ш} = 0,80219 r_{ш}^3.$$

Тогда суммарная сила тяжести равна

$$F_{ш+г+ч} = (m_{ш} + m_r + m_q) \cdot g = \\ = 2746,8 + 7,86948 r_{ш}^3.$$

Итак, составляем уравнение равновесия шара с висящим на конце лестницы человеком:

$$F_{ш} + F_q = F_{ш+г+ч},$$

или

$$46,1733 r_{ш}^3 + 0,89266 - 0,10862 \cdot 10^{-3} \cdot r_{ш} = \\ = 2746,8 + 7,86948 r_{ш}^3.$$

После упрощений получаем

$$38,3038 r_{ш}^3 - 0,10862 \cdot 10^{-3} \cdot r_{ш} = 2745,91.$$

Отсюда можно, наконец, определить радиус шара. Но как? Уравнение-то кубическое! Конечно, для нынешней математики это не проблема – существует, например, формула Кардано. Но можно и не рыться в справочниках, а обратить внимание, что коэффициент при $r_{ш}$ чрезвычайно мал по сравнению с остальными. Поэтому левая часть равенства от него почти не зависит. В этих случаях удобен итерационный метод, позволяющий быстро получить результат. Для начала отбросим слабое, содержащее $r_{ш}$, и получим

$$38,3038 r_{ш}^3 = 2745,91,$$

что дает нам исходное значение

$$r_{ш0} = \sqrt[3]{\frac{2745,91}{38,3038}} \text{ м} = 4,15414 \text{ м}.$$

Теперь перепишем уравнение в виде

$$r_{ш} = \sqrt[3]{\frac{2745,91 + 0,10862 \cdot 10^{-3} r_{ш}}{38,3038}},$$

а далее выполним нужное число итераций. Подставив в правую часть значение $r_{ш0}$, получаем в левой части $r_{ш1}$, затем подобным образом получаем $r_{ш2}$, $r_{ш3}$ и т.д., пока очередные последовательные значения $r_{ш}$ не станут достаточно близкими. В результате выясняется, что уже второе вычисленное значение с точностью до пяти знаков после запятой совпадает с первоначальным. Поэтому окончательно $r_{ш} = 4,15414 \text{ м}$ (что, собственно, и ожидалось).

Что ж, перейдем к анализу условия равновесия в тот момент, когда человек поднялся на самую верхнюю ступеньку. При этом шар опустился на величину x , потому высота центра шара над уровнем моря составила $H - x$, а человека – на $r_{ш}$ меньше, т.е. $H - r_{ш} - x$. Выталкивающие силы (в Н), действующие на шар и человека, соответственно составляют

$$F_{ш} = V_{ш} \cdot \rho_B (H - x) \cdot g = \\ = 4,189 \cdot 4,15414^3 (1,262 - 0,1384 \cdot 10^{-3} \cdot (1000 - x)) \times \\ \times 9,81 = 3310,049 + 0,40772 \cdot x,$$

$$F_q = V_q \cdot \rho_B (H - r_{ш} - x) \cdot g = \\ = 0,08 (1,262 - 0,1384 \cdot 10^{-3} \cdot (1000 - 4,15414 - x)) \times \\ \times 9,81 = 0,882 + 0,00011 \cdot x.$$

Суммарная сила тяжести шара, гелия в нем и человека (в Н) не изменится и останется равной

$$F_{ш+г+ч} = 2746,8 + 7,86948 \cdot 4,15414^3 = \\ = 3310,943.$$

Условие равновесия примет вид

$$(3310,049 + 0,40772 \cdot x) + \\ + (0,882 + 0,00011 \cdot x) = 3310,943,$$

откуда находим

$$x = 0,0294 \text{ м},$$

т.е. меньше 3 сантиметров (!). Вряд ли такой сдвиг заметил бы даже сидящий в корзине напарник человека на лестнице. А ведь согласно Перельману это смещение должно быть равно той доле от длины лестницы, которую масса человека составляет от суммарной массы человека и шара

с гелием. Как нетрудно подсчитать (проверьте), получается около 23,7 м. Таким образом, Перельман ошибся примерно в 800 раз. Бывает. Так что, дорогой читатель, будьте бдительны при чтении даже многократно переизданной литературы, ибо от ошибок никто не застрахован, в том числе и самые авторитетные авторы.

И – напоследок. Читатель может удивиться: почему промежуточные вычисления выполнялись с такой явно избыточной

точностью – порой до шести значащих цифр, ведь речь шла лишь об оценке? Ответ на этот вопрос дает самое последнее уравнение, из которого мы определяли x . В нем приходится вычитать одно число из другого, причем эти числа довольно велики и при этом близки между собой. Будь вычисления менее точными (две-три значащие цифры), мы на выходе получили бы ноль!

КОНКУРС ИМЕНИ А. П. САВИНА

Мы продолжаем конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на учащихся начиная с 8–9 классов, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт kvantik.com).

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com. Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest. Желаем успеха!

5. В слове СЛУЧАЙНОСТЬ школьники случайным образом заменяют буквы на цифры (одинаковые буквы на одинаковые цифры, а разные буквы на разные цифры, причем первая буква слова не может заменяться на цифру 0). Найдите вероятность того, что полученное в результате число делится на 3 (т.е. какую долю среди всех возможных вариантов составляют числа, делящиеся на 3).

С.Костин

6. Все грани треугольной пирамидки – одинаковые равносторонние треугольники. У каждой грани отметили середины сторон и соединили друг с другом, разбив грань на 4 одинаковых маленьких треугольничка. Каждый из этих 16 получившихся треугольничков окрасили в один из трех цветов – красный, синий или зеленый – так, что любые два треугольничка с общей стороной окрашены в разные цвета (не забудьте, что

треугольнички с общей стороной могут принадлежать и разным граням). Какое наибольшее количество красных треугольничков могло получиться?

М.Евдокимов

7. Какое наибольшее количество решений может иметь при некотором a уравнение

$$|x - 100| + |x - 99| + \dots + |x - 1| + |x| + |x + 1| + \dots + |x + 99| + |x + 100| = x^2 + a$$

а) в целых x ; б) в действительных x ?

Е.Бакаев

8. Вася нарисовал треугольник и отметил середины его сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами. Некоторые из этих девяти точек могли совпасть – всего получилось k различных точек. При каких k могло оказаться, что эти точки являются вершинами правильного k -угольника?

И.Вайнштейн, М.Дидин

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задача M2718 предлагалась на Иранской математической олимпиаде, задачи M2719 и M2720 предлагались на XVII Южном математическом турнире.

Автор задач Ф2725–Ф2728 – С.Варламов.

Задачи M2718–M2721, Ф2725–Ф2728

M2718. Клетчатый прямоугольник $m \times n$ разбит на клетчатые квадратики 2×2 и прямоугольники 1×3 . Докажите, что количество способов положить доминошку 1×2 так, чтобы одна ее клетка накрыла клетку квадрата 2×2 , а вторая – клетку прямоугольника 1×3 , четно.

Алиреза Алипур (Иран)

M2719. Верно ли, что по множеству остатков, которые могут давать степени двойки при делении на нечетное натуральное число $n > 1$, можно однозначно восстановить само число n ?

Д.Кузнецов

M2720. Пусть Ω – описанная окружность треугольника ABC ; точки M_a, M_b, M_c –

середины сторон BC, CA, AB соответственно; A_l, B_l, C_l – точки пересечения Ω с лучами M_cM_b, M_aM_c, M_bM_a соответственно; A_r, B_r, C_r – точки пересечения Ω с лучами M_bM_c, M_cM_a, M_aM_b соответственно (рис. 1). Докажите, что среднее арифметическое площадей треугольников $A_lB_lC_l$ и $A_rB_rC_r$ не меньше площади треугольника ABC .

Л.Шатунов, Т.Казанцева

M2721. Пусть n – натуральное число, а f – многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что для любого целого m найдется целое k такое, что $f(k) - m$ делится на n . Докажите, что существует такой многочлен g с целыми коэффициентами, что $f(g(m)) - m$ делится на n при любом целом m .

Фольклор

Ф2725. Свежеуложенный асфальт совсем не смачивается водой. Прошел и прекратился осенний дождь с крупными каплями. При ударе о поверхность такие капли разбиваются на мелкие капельки, которые катятся по поверхности во все стороны и, сталкиваясь друг с другом, сливаются в более крупные капли – вплоть до образования лужиц (рис. 2). Оказалось, что горизонтальная поверхность только что заасфальтированной площадки покрыта лужами на 20%. Сколько миллиметров осадков выпало за время этого дождя? Коэф-

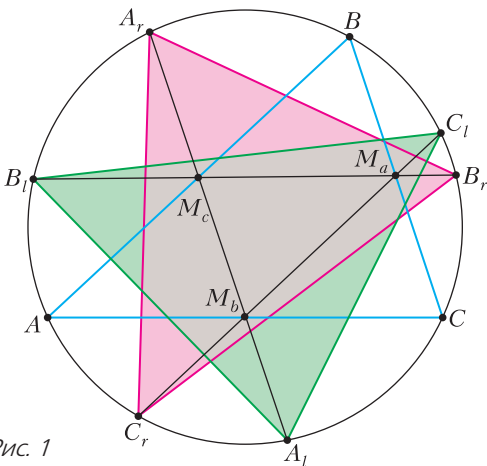


Рис. 1



Рис. 2

коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 0,07 \text{ Дж/м}^2$.

Ф2726. Оцените среднюю скорость ветров в атмосфере Земли, если средняя температура поверхности земли/воды вблизи экватора $+27^\circ\text{C}$. Считайте, что «цикл» работы атмосферы длится 1 сутки. Альbedo Земли 35%, солнечная постоянная $E = 1,37 \text{ кВт/м}^2$.

Ф2727. Одно и то же масляное пятно на мокром асфальте было сфотографировано смартфоном дважды с разницей во времени приблизительно 16 секунд. Смартфон по отношению к стоящему на асфальте

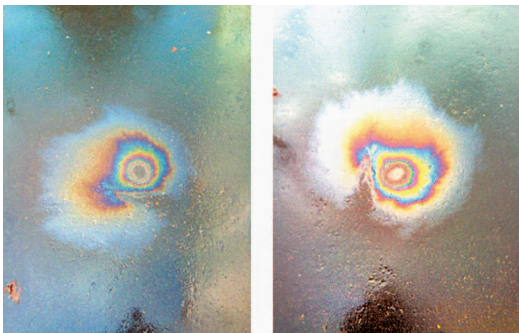


Рис. 3

фотографу занимал одинаковое положение. Эта ли разница во времени или что-то другое послужило причиной столь разительного различия изображений (рис. 3)?

Ф2728. Оцените высоту дерева, сквозь листву которого пробиваются лучи света Солнца. Пятна света образовались на асфальте (рис. 4). Ширина (отмечена голу-



Рис. 4

бой стрелкой) ботинка, который частично виден на фотографии, равна 12,5 см (измерена независимо линейкой).

Решения задач M2706–M2709, Ф2713–Ф2716

M2706. Шестнадцать команд Национальной хоккейной лиги в первом раунде плей-офф разбиваются на 8 пар и играют друг с другом серии до четырех побед (таким образом, счет в серии может быть 4–0, 4–1, 4–2 или 4–3). После каждого раунда команды, победившие в своих парах, снова разбиваются на пары, а проигравшие команды больше не принимают участие в турнире. После четвертого финального раунда оказалось, что ровно у k команд суммарное количество побед во все играх не меньше, чем количество поражений (например, под условие подходит коман-

да, победившая в первом раунде со счетом 4–2 и проигравшая во втором со счетом 4–3: у нее $4 + 3 = 7$ побед и $2 + 4 = 6$ поражений). Найдите наименьшее возможное значение k .

Ответ: 2.

Пример. Устроим турнир так, что в первом раунде все серии закончились со счетом 4–3, во втором раунде все серии закончились со счетом 4–2, а в третьем – со счетом 4–0. Тогда у всех, кто вылетел до финала, побед меньше, чем поражений, а у финалистов на момент выхода в финал побед на 7 больше, поэтому при любом исходе финальной серии $k = 2$.

Оценка. Заметим, что команда A , которая выиграет турнир, выиграет все серии, поэтому побед у нее будет больше. Предположим, что у команды B , проигравшей в финале, поражений больше, чем побед. Но эта команда выиграла три серии на пути к финалу, т.е. к этому моменту разность побед и поражений хотя бы 3, а в финале разность уменьшилась не более чем на 4. Единственный шанс команде B иметь отрицательную разность побед и поражений – это выиграть все серии до финала с перевесом в одну победу, а финал проиграть 0–4. Но тогда у команды C , которую команда B выбила в полуфинале, было две выигранные серии и одна проигранная со счетом 3–4, поэтому у C побед больше, чем поражений. Таким образом, в любом случае $k \geq 2$.

П.Кожевников

M2707. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, представимых в виде $\frac{a-1}{b} + \frac{b-1}{c} + \frac{c-1}{a}$, где a, b, c – попарно различные натуральные числа, большие 1.

Рассмотрим тройки вида $a = 12k + 2$, $b = 6k + 1$, $c = 3$. Тогда указанное выражение равно $\frac{12k+1}{6k+1} + \frac{6k}{3} + \frac{2}{12k+2} = 2k + 2$.

Получается, что все четные числа, боль-

шие двух, точно представимы в таком виде, а их бесконечное число.

Л.Емельянов, И.Кухарчук

M2708. а) Можно ли отметить на плоскости 2021 точку с целыми координатами, чтобы попарные расстояния между точками оказались последовательными целыми числами?

б) Существуют ли 100 точек на плоскости такие, что попарные расстояния между ними – попарно различные последовательные целые числа, большие 2022?

Ответ: нет, в обоих пунктах.

Приведем сначала авторское решение Мортезы Сагафияна, работающее для пункта а).

Предположим противное. Количество попарных расстояний равно $\frac{2021 \cdot 2020}{2}$, и тогда среди них должно быть ровно $\frac{2021 \cdot 2020}{4}$ нечетных – это нечетное количество.

Пусть среди данных 2021 точек a точек имеют нечетную сумму координат и $b = 2021 - a$ – четную. Докажем, что нечетными будут в точности расстояния между точками с суммой координат разной четности. Пусть одна точка имеет координаты $(x_1; y_1)$, а вторая – $(x_2; y_2)$. Квадрат расстояния $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ будет нечетным тогда и только тогда, когда скобки $(x_1 - x_2)$ и $(y_1 - y_2)$ разной четности, или, что эквивалентно, когда суммы $x_1 + y_1$ и $x_2 + y_2$ – разной четности. Таким образом, нечетных расстояний всего ab , что является четным числом (так как a и b разной четности). Тем самым, получено противоречие.

Далее приведем решение пункта б). Предположим противное. Тогда расстояния между точками равны $n + 1, n + 2, \dots, n + 4950$. Нарисуем круги K_1, K_2, \dots, K_{100} с центрами в каждой из этих точек и радиусом $\frac{n}{2}$. Эти круги попарно не пересекаются. С другой стороны, рассмотрим две точки A и B , расстояние между которыми максимально.

Тогда все точки находятся внутри круга радиусом $n + 4950$ с центром A . Значит, все круги K_1, K_2, \dots, K_{100} находятся внутри круга радиуса $\frac{3n}{2} + 4950$ с центром A . Поэтому суммарная их площадь не более площади этого большого круга. Получаем неравенство $\pi \left(\frac{3n}{2} + 4950 \right)^2 \geq 100 \cdot \pi \cdot \frac{n^2}{4}$. После преобразований имеем $(3n + 9900)^2 \geq 100n^2$, откуда $3n + 9900 \geq 10n$, или $9900 \geq 7n$, что неверно, так как $n \geq 2022$.

В.Брагин, М.Сагафиян

M2709*. *В стране $n > 2022$ городов. Некоторые пары городов соединены прямыми авиалиниями. Назовем распределение авиалиний между двумя компаниями правильным, если в нем не найдется трех городов, любые два из которых соединены одной и той же компанией. Оказалось, что правильного распределения авиалиний не существует. Правительство хочет закрыть все города, кроме 2022-х. Всегда ли это можно сделать так, чтобы у авиалиний между оставшимися городами не было правильного распределения?*

Ответ: нет, не всегда.

Пусть страна состоит из 2023 регионов, а в каждом регионе по 5 городов. Будем обозначать i -й регион R_i , а j -й город i -го региона c_i^j . Пусть каждые два города одного региона соединены авиарейсом. Между регионами с соседними номерами R_i и R_{i+1} проведем рейсы между городами с разными номерами внутри своих регионов, т.е. между c_i^j и c_{i+1}^k , где $j \neq k$. Между R_1 и R_{2023} проведем все ребра, кроме $c_1^1 c_{2023}^1, c_1^2 c_{2023}^2, c_1^3 c_{2023}^4, c_1^4 c_{2023}^5, c_1^5 c_{2023}^3$. Между остальными регионами ребра не проводим.

Сначала заметим, что для любых пяти городов, попарно соединенных авиарейсами, при любом правильном распределении из каждого города ведет ровно по два рейса каждой авиакомпании. Действительно, иначе можно было бы найти город u , из которого ведут три авиарейса одной ком-

пании в города x, y, z , тогда среди рейсов xy, yz и zx не могут быть все рейсы одной компании, значит, один из них той же компании, что и рейсы ix, iy, iz . Не умаляя общности, считаем, что это рейс xy , тогда рейсы xy, ix, iy соединяют три города и принадлежат одной компании, противоречие.

Далее используем следующую терминологию. Для двух упорядоченных подмножеств городов $a_1 \dots a_k$ и $b_1 \dots b_k$ таких, что соответствие $a_i \leftrightarrow b_i$ переводит рейс в рейс, скажем, что *их распределения рейсов совпадают*, если для любого правильного распределения рейсов соответствие $a_i \leftrightarrow b_i$ переводит рейс компании в рейс той же компании.

Покажем, что для шести городов a, b, c, d, x, y таких, что соединены все, кроме xy , для любого правильного распределения рейсов для пятерок $abcdx$ и $abcdy$ их распределения совпадают. В пятерке $abcdx$ из x выходят два рейса первой и два рейса второй компании (допустим в a, b и c, d соответственно), тогда в четверке $abcd$ из a, b выходят по два рейса второй компании, а из c, d выходят по два рейса первой, и, значит, ay, by должны быть рейсами первой компании, а cy, dy — рейсами второй компании.

Рассмотрим правильную раскраску ребер $R_i \cup R_{i+1}$. Если посмотреть на последовательность пятерок городов $c_i^1 c_i^2 c_i^3 c_i^4 c_i^5, c_{i+1}^1 c_i^2 c_i^3 c_i^4 c_i^5, c_{i+1}^1 c_{i+1}^2 c_i^3 c_i^4 c_i^5, c_{i+1}^1 c_{i+1}^2 c_{i+1}^3 c_i^4 c_i^5, c_{i+1}^1 c_{i+1}^2 c_{i+1}^3 c_{i+1}^4 c_i^5$, то ясно, что распределения городов между компаниями в любых двух пятерках совпадают, а значит, совпадают и для R_i и R_{i+1} .

Допустим, что для приведенного примера городов и рейсов между ними существует правильное распределение. Тогда для всех пар R_i и R_{i+1} совпадают распределения рейсов (если смотреть в порядке $c_i^1 c_i^2 c_i^3 c_i^4 c_i^5$). По тем же причинам совпадают распределения для пятерок $c_i^1 c_i^2 c_i^3 c_i^4 c_i^5$ и $c_{2023}^1 c_{2023}^2 c_{2023}^3 c_{2023}^4 c_{2023}^5$ (именно в таком порядке). В таком случае, так как для всех R_i и R_{i+1} распределения совпадают, то и для R_1 и R_{2023} они

совпадают. А значит, совпадают распределения между компаниями для $c_1^1 c_2^2 c_3^3 c_4^4 c_5^5$ и $c_1^1 c_2^2 c_3^5 c_4^3 c_5^4$. Тогда рейсы $c_1^5 c_1^3$, $c_1^3 c_1^4$ и $c_1^4 c_1^5$ принадлежат одной компании. Это противоречит тому, что распределение правильное.

Если закрыты все города, кроме 2022-х, то в каком-то регионе закрыты все города. Тогда достаточно показать, что существует правильное распределение, если полностью закрыт один регион, потому что если для некоторого набора городов существовало правильное распределение, то и после закрытия некоторых из них оно также будет существовать. Если закрыт R_k , то обозначим через S^i такой набор городов: все c_j^i для $1 \leq j < k$ и c_j^i при $i = 1, 2$; c_j^{i-1} при $i = 4, 5$; c_j^5 при $i = 3$ для $k < j \leq 2023$. Значит, города R_j и R_{j+1} соединены тогда и только тогда, когда они принадлежат разным S^i .

Отдадим рейсы между $S^1 S^2$, $S^2 S^3$, $S^3 S^4$, $S^4 S^5$ и $S^5 S^1$ первой авиакомпании, а рейсы между $S^1 S^3$, $S^3 S^5$, $S^5 S^2$, $S^2 S^4$ и $S^4 S^1$ второй авиакомпании (S^i считаются для новой нумерации). Тогда, если в тройке городов есть два из S^i , то между ними нет рейса, значит, эта тройка не может нарушать правильности распределения. Среди любых трех городов, в которых нет двух из одного S^i , найдется пара из $S^1 S^2$, $S^2 S^3$, $S^3 S^4$, $S^4 S^5$ или $S^5 S^1$ и найдется пара из $S^1 S^3$, $S^3 S^5$, $S^5 S^2$, $S^2 S^4$ или $S^4 S^1$, поэтому эти три города не могут быть соединены рейсами одной авиакомпании.

В дополнение отметим связь этой задачи с наукой. Если бы ответ на вопрос задачи был положительным, то можно было бы придумать полиномиальный алгоритм проверки существования правильной раскраски графа, но задача проверки существования правильной раскраски NP-полна.

Д. Демин

Ф2713. Динамометр состоит из корпуса массой M , скрепленного с однородной пружиной массой m . На корпусе нанесены

деления шкалы. Масса пружины распределена равномерно по ее виткам. К крючку на корпусе приложили силу \vec{F} , а к свободному концу пружины приложили силу \vec{f} , направленную противоположно силе \vec{F} . Силу какой величины показывает этот динамометр? Никаких других сил, которые действовали бы на него, нет.

В установившемся режиме движения в любой момент времени все части динамометра движутся с одной и той же скоростью, которая со временем изменяется линейно, т.е. динамометр движется с ускорением. Вектор ускорения лежит на линии, вдоль которой действуют приложенные к концам динамометра силы. За положительное направление примем направление действия силы \vec{f} . Проекция ускорения на это направление равна

$$a = \frac{f - F}{M + m}.$$

Сила \vec{f}_1 , с которой корпус динамометра действует на пружину, противоположна по направлению силе \vec{f} и равна по величине

$$f_1 = \frac{fM + Fm}{M + m}.$$

Пружина под действием двух противоположно направленных сил, приложенных к ее концам, растянется на величину $(f + f_1)/(2k)$. Следовательно, динамометр покажет величину силы

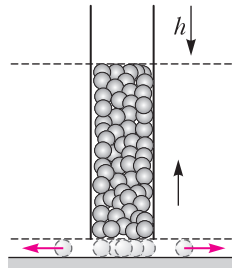
$$F_x = \frac{f(2M + m) + Fm}{2(m + M)}.$$

Заметим, что динамометр всегда будет показывать силу f , если масса пружины равна нулю, и покажет силу f в том случае, когда $F = f$.

С. Дмитриев

Ф2714. На гладкой горизонтальной поверхности вертикально стоит стеклянная трубка (см. рисунок). В этот прозрачный сосуд (без доньшка) насыпают большое число очень маленьких идеальных по форме шариков. В некоторый

момент времени трубку быстро поднимают на высоту чуть больше диаметра шарика. Под действием гравитации эта «шариковая» жидкость начинает выливаться из трубки, растекаясь по горизонтальной плоскости. Определите время вытекания и радиальную плотность двумерной шариковой пленки к этому моменту времени. Считайте данными следующие величины: h – начальная высота шариковой жидкости в сосуде, g – ускорение свободного падения. Диаметр шариков d значительно меньше диаметра сосуда и начальной высоты h . Трение в системе отсутствует.



Скорость шариков при выходе из трубки – в точке r , при высоте столба y – определяется законом сохранения энергии:

$$v(r, y) = \sqrt{2gy}.$$

Время вытекания столба равно

$$t(y) = \sqrt{\frac{2y}{g}} \cdot \frac{r}{2d},$$

где коэффициент $\frac{r}{2d}$ равен отношению площади «окна» вытекания к площади сечения сосуда.

К моменту времени полного вытекания

$$t(h) = \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \frac{r}{2d}$$

на горизонтальной поверхности образуется неоднородная по плотности двумерная структура разбегающихся шариков с центральной симметрией. Радиус структуры будет равен

$$R = v(r, h) \cdot t(h) = r \frac{h}{d} \gg r.$$

Определим распределение скоростей в этой структуре. В соответствии с результатом $r \ll R$ можно считать, что в центре скорость равна нулю. На границе структуры скорость максимальна и равна

$v(R) = \sqrt{2gh}$. Для определения скорости в интервале определим точку, в которой будет скорость, соответствующая столбу шариков высотой y :

$$x(y) = v(r, y) \cdot t(y) = \sqrt{2gy} \cdot \sqrt{\frac{2y}{g}} \cdot \frac{r}{2d} = r \frac{y}{d},$$

или $y = \frac{d}{r} x$.

Отсюда получаем радиальную функцию распределения скоростей:

$$v(x) = \sqrt{\frac{2gd}{r}} x.$$

Теперь обсудим вопрос о двумерной радиальной плотности шариков. В области дна трубки плотность шариков остается равной ρ_0 . Будем искать функцию плотности за пределами дна трубки ($x \geq r$). Рассмотрим тонкий кольцевой объем шариков в начальный момент его выхода из трубки и в момент, когда он оказался на расстоянии x от центра. Запишем очевидное равенство числа шариков:

$$\rho_0 \cdot 2\pi r d \cdot (dx) = \rho(x) \cdot 2\pi x \cdot (k dx).$$

Здесь деформированную радиальную толщину кольца мы записали через начальную его толщину dx , умноженную на некоторый коэффициент k . Из полученного равенства находим

$$\rho(x) = \rho_0 \cdot \frac{r}{kx}.$$

Теперь возьмем интеграл по всему объему:

$$\begin{aligned} \rho_0 \cdot \pi r^2 \cdot h &= \int_0^{\frac{r}{d} h} \rho_0 \cdot \frac{r}{kx} \cdot 2\pi x d \cdot dx = \\ &= \rho_0 \cdot \pi r^2 \cdot h \cdot \frac{2}{k}. \end{aligned}$$

Видим, что тождество получается при $k = 2$. В итоге функция радиальной плотности принимает вид

$$\rho(x) = \rho_0 \cdot \frac{r}{2x}.$$

Подправим этот результат:

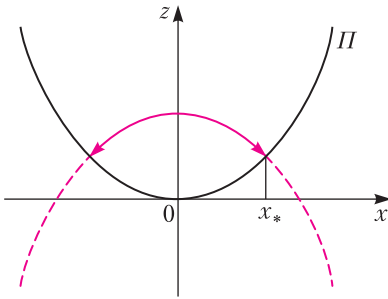
$$\rho(x) = \rho_0 \cdot \frac{r}{2x - r}$$

Эта «безобидная» правка подгоняет плотность в точке r под величину ρ_0 .

А.Власов

Ф2715. Тяжелый шарик пренебрежимо малых размеров может совершать движение над осесимметричной параболической чашей, ось которой направлена вертикально вверх, абсолютно упруго отражаясь от ее стенок. Предполагается, что в начальный момент времени шарик находился на оси чаши на расстоянии h от его доньшка и ему была придана начальная скорость, перпендикулярная этой оси. Оказалось, что начальная скорость была подобрана так, что, отразившись от стенки чаши, шарик по той же траектории начал движение назад, т.е. в силу симметрии чаши движение оказалось периодическим. Найдите период этого периодического движения, предполагая, что ускорение силы тяжести равно g , а чаша получена вращением параболы $z = \frac{x^2}{2p}$ вокруг вертикали, содержащей ее ось. Параметр параболы p имеет размерность длины.

Пусть xuz – система отсчета, начало которой совпадает с доньшком чаши, оси x и y горизонтальны, а ось z направлена вертикально вверх. В осевом сечении чаши



плоскостью xz получается парабола Π , ось симметрии которой совпадает с осью z (см. рисунок). По условию уравнение параболы имеет вид

$$f(x, z) = z - \frac{x^2}{2p} = 0, \quad (1)$$

а сама чаша получается в результате вращения этой параболы вокруг своей оси. Запустим шарик из точки $(0, 0, h)$ с начальной скоростью $\vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$. В силу сим-

метрии траектория шарика будет оставаться в плоскости $y = 0$ и задаваться уравнениями

$$x = v_0 t, \quad y = 0, \quad z = h - \frac{gt^2}{2}.$$

При этом скорость шарика будет изменяться так:

$$v_x = v_0, \quad v_y = 0, \quad v_z = -gt.$$

Уравнение траектории при этом будет иметь вид

$$z = h - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \quad (2)$$

Сопоставляя уравнения (1) и (2), находим точку $(x_*, 0, z_*)$, в которой шарик первый раз столкнется с чашей. Если $v_0 > 0$, то из равенства

$$x^2 \left(\frac{1}{p} + \frac{g}{v_0^2} \right) = 2h$$

имеем

$$x_* = \sqrt{\frac{2phv_0^2}{v_0^2 + pg}}, \quad z_* = \frac{hv_0^2}{v_0^2 + pg},$$

причем время движения и скорость прибытия шарика составляют, соответственно,

$$t_* = \frac{x_*}{v_0} = \sqrt{\frac{2ph}{v_0^2 + pg}}$$

и

$$\vec{v}_* = \left(v_0, 0, -g\sqrt{\frac{2ph}{v_0^2 + pg}} \right). \quad (3)$$

Далее, единичная нормаль к чаше в точке $(x, 0, z)$ задается соотношением

$$\vec{n}(x, 0, z) = \left(1 + \left(\frac{x}{p} \right)^2 \right)^{-1/2} \left(-\frac{x}{p}, 0, 1 \right).$$

Возвращение шарика по той же траектории будет осуществляться в случае, когда скорость прибытия коллинеарна вектору нормали в точке прибытия, т.е. когда выполняется условие

$\vec{n}(x_*, 0, z_*) \parallel \vec{v}_*$, или

$$-\frac{1}{p} \sqrt{\frac{2phv_0^2}{v_0^2 + pg}} : v_0 = 1 : \left(-g\sqrt{\frac{2ph}{v_0^2 + pg}} \right), \text{ или}$$

$$v_0 = \sqrt{(2h - p)g}. \quad (4)$$

Иными словами, обсуждаемые движения возможны лишь в том случае, когда начальная точка находится на высоте, превосходящей половину параметра параболы.

Замечание. Известно¹, что подскоки тяжелого шарика над точкой минимума графика любой кривой устойчивы, если высота подскока не превосходит половины радиуса кривизны в этой точке, т.е. в случае параболы – половины ее параметра. При прохождении значения в половину радиуса кривизны такие подскоки становятся неустойчивыми и потеря устойчивости сопровождается рождением обсуждаемого класса периодических движений.

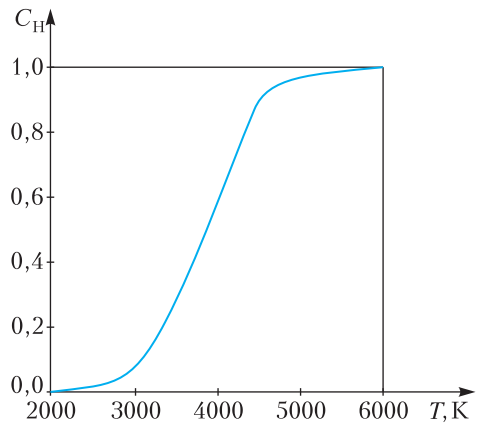
Подставляя соотношение (4) в выражение (3), находим

$$t_* = \sqrt{\frac{2ph}{(2h - p)g + pg}} = \sqrt{\frac{p}{g}}.$$

Оказывается, при выполнении условия периодичности движения вдоль таких траекторий период $T = 4t_* = 4\sqrt{\frac{p}{g}}$ не зависит от величины h – высоты начальной точки.

А.Буров

Ф2716. В сосуде кубической формы объемом 1 л с жесткими, не проводящими тепло и не имеющими теплоемкости зеркальными (100%) стенками находился атомарный водород при температуре 1 К и под давлением 1 Па. В результате столкновений атомов часть атомов объединились и образовались пары, т.е. молекулярный водород. Какая температура установилась в этом сосуде, когда процесс образования пар закончился и наступило тепловое равновесие? На рисунке показана зависимость от температуры части (от общего количества) диссоциировавших двухатомных молекул водорода. Можно считать, что при температурах меньше 3000 К эта часть равна нулю,



при температурах больше 5000 К эта часть равна единице, т.е. диссоциировали все молекулы, а в промежутке от 3000 до 5000 К эта зависимость линейная. Энергия диссоциации одной молекулы водорода равна 4,477 эВ.

Сначала выясним, какой будет температура в гипотетическом случае, когда все атомы объединились в жесткие пары и пары эти не распадаются, а еще при этом вся энергия, выделившаяся при образовании пар, пошла только на нагрев вещества. Для этого приравняем энергию слияния двух атомов, равную $E = 4,477$ эВ, кинетической энергии, которую будет иметь двухатомная молекула, т.е. $(5/2)kT$. Получается очень высокая температура – порядка $20,6 \cdot 10^3$ К, т.е. при такой температуре все молекулы водорода должны распасться на атомы. Следовательно, при установившемся равновесии только некоторая часть всех атомов будет существовать в виде двухатомных молекул, а оставшиеся атомы будут «жить поодиночке». По-видимому, равновесие будет соответствовать температуре больше $T_{\text{ниж}} = 3000$ К и меньше $T_{\text{верх}} = 5000$ К. При такой высокой температуре двухатомные молекулы нельзя считать «жесткими», т.е. уже будут «включены» колебательные степени свободы. В результате одна двухатомная молекула будет иметь среднюю энергию $(7/2)kT$, а отдельно живущие атомы водорода будут иметь энергию $(3/2)kT$ каждый.

Количество атомов водорода, которые сначала находились в сосуде и были одиноч-

¹ См., например, книгу В.В.Белецкого «Регулярные и хаотические движения твердых тел» (лекция 4).

ными, найдем из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$N = \frac{N_A}{8,31 \cdot 10^3} = 0,72 \cdot 10^{20},$$

где $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹ – число Авогадро. Оценим энергию, которую в рассматриваемом случае в нашем сосуде с зеркальными стенками будет иметь тепловое излучение. Плотность энергии теплового излучения, как известно, равна $4\sigma T^4/c$, где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м² · К⁴) – постоянная Стефана-Больцмана, T – температура по шкале Кельвина, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света. В указанном диапазоне от 3000 до 5000 К в объеме 1 л будет находиться равновесное тепловое излучение с энергией от 0,06 до 0,47 Дж.

Даже если при температуре 3000 К в сосуде находится только одноатомный газ, то его тепловая энергия будет равна $(3/2)p_0 \times V_0 \cdot T_{\text{кон}}/T_{\text{нач}} = 4,5$ Дж. Эта величина во много раз больше энергии теплового излучения, поэтому можно с уверенностью в правильности этого действия пренебречь наличием в сосуде теплового излучения. Начальная тепловая энергия, которую имели атомы водорода в сосуде, была равна $(3/2)pV = 0,0015$ Дж, так что ею тоже, конечно, можно пренебречь.

Обозначим через x долю от всех N атомов водорода, находившихся сначала в сосуде, которые образовали пары. Соответственно, $(1-x)$ – это доля от всех атомов, которые остались «жить поодиночке». При образовании пар выделилась энергия $ENx/2$, которая перешла в энергию теплового движения молекул и атомов водорода:

$$\frac{Nx}{2} \cdot \frac{7}{2} kT + (1-x)N \cdot \frac{3}{2} kT = \frac{ENx}{2},$$

или

$$\frac{x}{2} + 3 = \frac{Ex}{kT}.$$

Второе уравнение связывает долю x и температуру T :

$$\frac{T - T_{\text{ниж}}}{T_{\text{верх}} - T_{\text{ниж}}} = \frac{(1-x)/2}{1/2},$$

или

$$1-x = \frac{T \cdot 10^{-3} - 3}{2}.$$

Численное решение этих двух уравнений дает значение температуры $T = 4461$ К. Этой температуре соответствует $x = 0,27$. Энергия, выделившаяся при образовании пар, равна $ENx/2 = 4,37$ Дж. Энергия теплового излучения в сосуде емкостью 1 л с зеркальными стенками для такой температуры составляет 0,3 Дж. Эта энергия действительно мала в сравнении с энергией движения частиц.

Обратим внимание читателей на возможность более точного вычисления итоговой температуры с учетом энергии излучения. Понятно, что эта итоговая температура будет немного меньше 4461 К. А вот если бы в условии был указан объем сосуда не 1 л, а 1 м³, давление не 1 Па, а 1 мПа, тогда наличие излучения и энергию теплового излучения было бы просто необходимо учитывать.

С. Варламов

БИБЛИО-ГЛОБУС
ВАШ ГЛАВНЫЙ КНИЖНЫЙ
1957

МЫ ПРЕДЛАГАЕМ
БОЛЬШОЙ ВЫБОР ТОВАРОВ И УСЛУГ

УСЛУГИ

- Интернет-магазин
www.bgshop.ru
- Кафе
- Клубные (дисконтные)
карты и акции
- Подарочные карты
- Предварительные
заказы на книги
- Встречи с авторами
- Читательские клубы
по интересам
- Индивидуальное
обслуживание
- Подарочная упаковка
- Доставка книг из-за рубежа
- Выставки-продажи

АССОРТИМЕНТ

- Книги
- Аудиокниги
- Антиквариат
и предметы
коллекционирования
- Фильмы, музыка,
игры, софт
- Канцелярские
и офисные товары
- Цветы
- Сувениры

г. Москва,
м. Лубянка,
м. Китай-город
ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1
8 (495) 781-19-00
www.biblio-globus.ru
пн - пт 9:00 - 22:00
сб - вс 10:00 - 21:00
без перерыва на обед

www.biblio-globus.ru

Задачи

1. В очереди под дождем стояли 11 человек, каждый держал зонтик. Они стояли вплотную, так что зонтики соседей соприкасались. Дождь закончился, люди закрыли зонтики и встали, соблюдая дистанцию в 50 см меж-



ду соседями. Во сколько раз уменьшилась длина очереди? Людей можно считать точками, а зонтики — кругами радиуса 50 см.

Т.Корчемкина

2. Из 100 членов Совета Двух Племен часть — эльфы, остальные — гномы. Каждый написал два числа: количество эльфов в Совете и количество гномов в Совете. При этом своих соплеменников каждый посчитал верно,

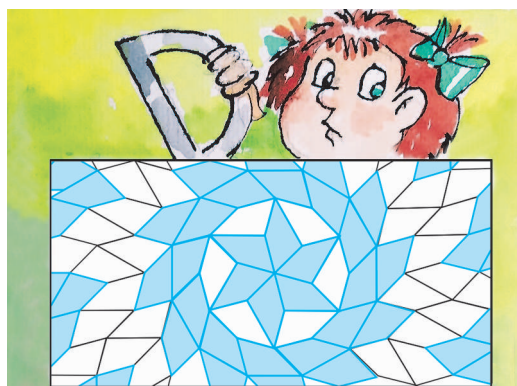


Эти задачи предлагались на XLV Турнире имени М. В. Ломоносова.

а при подсчете иноплеменников ошибся ровно на 2. В написанных числах одна цифра встретилась не менее 222 раз. Сколько эльфов и сколько гномов могло быть в Совете? Если вариантов несколько — укажите один из них.

*Т.Казицына, Б.Френкин,
А.Шаповалов*

3. В маленьком доме в Португалии пол выложен из четырехугольных пли-



ток одинаковой формы и размера. Найдите все четыре угла плитки. Ответ дайте в градусах.

Г.Дамашди (G.Damádsdi)

4. Произведение пяти различных целых чисел равно 2022. Чему может равняться их сумма? Если ответов несколько — укажите их все.

А.Блинков



Невинная Ифигения и разложение сил

А. СТАСЕНКО

*Так дремлет недвижим корабль
в недвижимой влаге,
Но чу! – матросы вдруг кидаются, ползут
Вверх, вниз – и паруса надулись, ветра
полны;
Громада двинулась и рассекает волны.
Плывет...*

А.С.Пушкин

Как сообщает великий Гомер, страшное событие произошло в четырнадцатом веке до нашей эры в беотийской гавани Авлиды. Ахейские греки уже собрали мощный флот для покорения Трои, да вот беда – богиня Артемида, обиженная главнокомандующим флота Агамемноном, наслала северные ветры, не только мешавшие походу, но и крушившие корабли в самой авлидской гавани. И тут прорицатель Калхонт предложил принести в жертву богам самое дорогое, что было у Агамемнона, – дочь-красавицу Ифигению...

Но почему для движения корабля нужен непременно попутный ветер? Да потому, что в те времена был известен только *прямой* парус. Впрочем, и в новые времена огромные скопления кораблей, груженных золотом Америки и пряностями Востока, ждали попутного ветра, чтобы войти в пролив Ла-Манш. Однако, постепенно входил в моду и *косой* парус, который позволял судну двигаться – страшно сказать – против ветра! А сотню лет назад бермудское вооружение яхт (стаксель + грот) вытеснило остальные варианты.

В чем тут дело? Прежде всего необходимо выяснить, от чего зависит сила \vec{f} (ее размерность $\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$), с которой воздух действует на помещенное в него тело. Из соображений

размерности и здравого смысла ясно, что тут должна играть роль плотность потока ρ (размерность $\text{кг}/\text{м}^3$), площадь поперечного сечения тела S (размерность м^2) и, конечно, квадрат скорости обтекания $(\vec{V} - \vec{v})^2$ (размерность $(\text{м}/\text{с})^2$), так что

$$\vec{f} \sim \rho S (\vec{V} - \vec{v}) \cdot |\vec{V} - \vec{v}|. \quad (*)$$

Здесь квадрат относительной скорости разбит на два множителя, чтобы показать, куда направлен вектор силы. Конечно, соображения размерности не позволяют найти безразмерный множитель, зависящий, в частности, от формы тела и называемый коэффициентом сопротивления. Но для наших качественных рассуждений это не важно.

Видно, что сила тяги паруса зависит не только от скорости ветра (\vec{V}), но и от скорости судна относительно берегов (\vec{v}). Для начала будем считать, что судно стоит на якоре ($v = 0$), а парус – это часть плоскости площадью S . Его положение (перпендикулярно относительно ветра) изображено отрезком $\Pi_0\Pi_0$ (рис. 1). Поскольку при ударе о парус ветер полностью теряет свою нормальную компоненту скорости, поток импульса, действующий на парус, пропорционален $\vec{f} \sim \rho S \vec{V} |\vec{V}|$. Если парус отклонен от

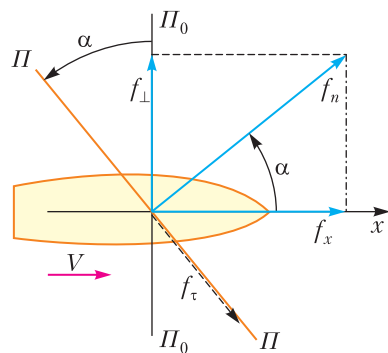


Рис.1. Прямой парус $\Pi_0\Pi_0$ повернут по отношению к ветру в положение $\Pi\Pi$; f_n – нормальная компонента силы ветра; f_x – сила тяги в направлении ветра, которая уменьшается с ростом угла α ; f_{\perp} – сила поперек направления ветра; f_{τ} – тангенциальная компонента потока импульса ветра (сила трения), которой пренебрегаем

первоначального положения на угол α в положение $ПП$, нормальная компонента f_n потока импульса на поверхность паруса уменьшается. А тангенциальный поток импульса ветра f_x скользит вдоль паруса и, если считать воздух невязким газом, его участием в игре сил можно пренебречь.

Таким образом, единственную силу, действующую на парус, можно разложить на две составляющие, из которых одна (f_x) направлена вдоль ветра, а другая (f_n) перпендикулярна ветру, что приводит к боковому сносу, тем меньшему, чем больше относительная боковая поверхность судна – не случайно его корпус делают удлиненным. Понятно, что с ростом угла α сила тяги паруса падает. Известно, что уже при углах больше 60–70 градусов корабль не может бежать «себе в волнах на раздутых парусах».

Но перейдем к другому случаю. Пусть при помощи «выбранных втугую» шкотов парус действительно можно превратить почти в плоскость $ПП$ (рис. 2). При этом нормальная компонента потока импульса ветра останется прежней, f_n . Но теперь повернем плоскость судна на угол β относительно паруса, уже частично «навстречу» ветру. И – о чудо! Мы видим, что эта сила f_n приобретает компоненту вдоль оси судна (штрих-пунктирная линия), т.е. силу тяги $f_{||} = f_n \sin \beta$. А строго против ветра направлена ее составляющая $f_{-x} = f_n \sin \beta \sin(\alpha - \beta)$. Конечно, она невелика, но она есть! И это вселяет надежду.

Однако, рано радоваться – вспомним, что

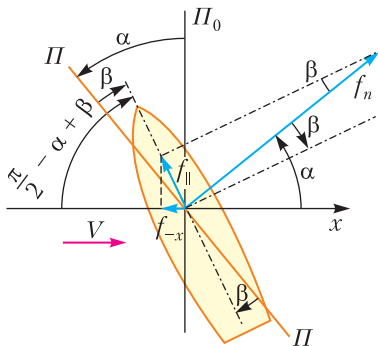


Рис.2. Отклонение паруса относительно оси судна (штрих-пунктирная линия) в противоположном направлении на угол β создает силу f_{-x} , направленную против ветра; тут уже видна принципиальная возможность спорить с ветром!

мы все еще стоим на якоре, а парус считаем плоским. Если ветер дует по пути судна (Фордевинд, $\alpha < \frac{\pi}{2}$), «громада» действительно начнет двигаться, и по мере ускорения корабля разность скоростей $\vec{V} - \vec{v}$ будет уменьшаться, пока сила тяги не уравнивается силой сопротивления воды, неподвижной относительно берегов. Ее можно записать, аналогично (*), в виде $f_b \sim \rho_b S_b v^2$, где ρ_b – плотность воды, S_b – лобовое сопротивление подводной части судна. Однако, если ветер «противный» (бейдевинд) – едва ли можно рассчитывать на то, что открытая нами столь желанная сила f_{-x} сразу потащит корабль вперед.

На рисунке 3 показана система сил и скоростей с учетом движения самого корабля

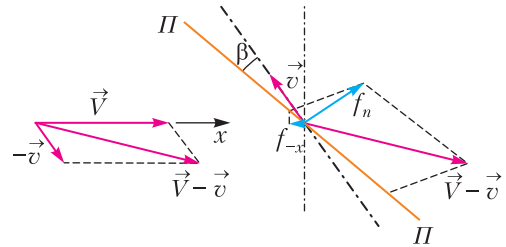


Рис.3. Диаграмма векторов с учетом собственной скорости судна относительно берегов. Слева: $\vec{V} - \vec{v}$ – вымпельный ветер и его компоненты; справа: $ПП$ – плоскость паруса, штрих-пунктирная линия – ось судна, идущего против ветра

(его скорость $v \neq 0$). Напомним, что вектор аэродинамической силы совпадает по направлению с вектором скорости обтекания тела $\vec{V} - \vec{v}$ (направление которого указывают легкие нити, привязанные к вантам). Кто любит теорему косинусов, может получить здесь удовольствие. Мы увидели главное – можно идти против ветра под парусом. А знающие люди говорят, что парусный экипаж может двигаться даже быстрее ветра. Правда, чтобы выдержать заданный курс «в среднем», приходится идти в лавировку, подставляя ветру то левый борт, то правый.

Ряд других факторов еще больше усложняют картину. Обтекание паруса воздухом и подводной части судна водой является трехмерным и, вообще говоря, нестационарным процессом, хотя бы из-за наличия волн, встречных или попутных течений, крена – особенно сильного при боковом ветре (бак-

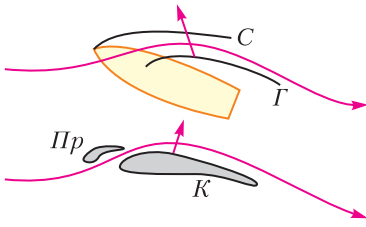


Рис.4. Аналог работы центробежной силы для бермудского парусного вооружения (вверху, где C – стаксель, Γ – грот) и предкрылка с крылом (внизу, где $Пр$ – предкрылок, K – крыло)

штаг). Кроме того, и воздух и вода обладают вязкостью, сказывающейся на тангенциальных компонентах силы, и даже мачта – и та

«гнется и скрипит». В частности, наличие кривизны паруса очень важно – она порождает центробежную силу (инерции). А этим явлением можно даже управлять, для чего перед основным парусом – гротом – располагают стаксель, подправляющий основной поток (рис. 4). Как это похоже на работу предкрылков, помогающих при малых скоростях самолета (например, при посадке) увеличить подъемную силу крыла! Так что изобретение бермудских рыбаков «работает» и в авиации.

А что же Агамемнон? Знал бы он про разложение сил, не пришлось бы ему требовать от Артемиды попутного ветра, оплаченного жертвой Ифигении.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Бескватдратные целые, функция Мёбиуса и свертка Дирихле

На осенней болгарской олимпиаде 2008 года была задача, которая, судя по результатам, оказалась за пределами сложности: никто из участников не смог ее решить. Эта статья – попытка показать метод, который позволяет решать задачи такого рода.

Число $a \in \mathbb{N}$ называется *бескватдратным*, если не существует простого числа p такого, что $p^2 \mid a$. Это означает, что число a имеет следующее разложение на простые множители:

$$a = p_1 p_2 \dots p_k,$$

где $p_i, i = 1, 2, \dots, k$, – различные простые числа.

Приведем условие упомянутой задачи и решение, предлагаемое автором.

Статья подготовлена по материалам А.Иванова и Д.Грозева (<https://dgrozev.wordpress.com/>).

Задача (А.Иванов). Для натурального n найдите количество всех бескватдратных положительных целых a таких, что $\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{a}} \right\rfloor$ нечетное.

Решение. Пусть A – множество бескватдратных натуральных чисел и m – произвольное натуральное число. Сначала докажем, что

$$\sum_{a \in A} \left\lfloor \frac{m}{\sqrt{a}} \right\rfloor = m^2.$$

Всякое натуральное число может быть единственным образом представлено в виде $p^2 a$, где a – бескватдратное, а p – натуральное. При некотором фиксированном a рассмотрим все числа вида $p^2 a$, не превосходящие m^2 . Если их количество равно k , то k – наибольшее число такое, что $k^2 a \leq m^2$, т.е.

$k = \left\lfloor \frac{m}{\sqrt{a}} \right\rfloor$. Тогда сумма $\sum_{a \in A} \left\lfloor \frac{m}{\sqrt{a}} \right\rfloor$ и даст все натуральные числа, не превосходящие m^2 , т.е. она в точности равна m^2 .

Пусть снова a не содержит квадратов и $\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{a}} \right\rfloor$ – нечетное число. Тогда $\frac{n}{\sqrt{a}} = 2t + 1 + \alpha$, где t – неотрицательное целое число и

$0 \leq \alpha < 1$. Значит, $\frac{1}{2} \leq \frac{\alpha+1}{2} < 1$, откуда $2 \left\{ \frac{n}{2\sqrt{a}} \right\} = 2 \left\{ \frac{\alpha+1}{2} \right\} = 2 \frac{\alpha+1}{2} = \alpha+1$. Поскольку $1 \leq \alpha+1 < 2$, получаем

$$\left[2 \left\{ \frac{n}{2\sqrt{a}} \right\} \right] = 1.$$

Аналогично, если $\left[\frac{n}{\sqrt{a}} \right]$ – четное число, то $\left[2 \left\{ \frac{n}{2\sqrt{a}} \right\} \right] = 0$. Следовательно, если A – множество бесквадратных чисел, то количество среди них таких, что $\left[\frac{n}{\sqrt{a}} \right]$ – нечетное число, равно $\sum_{a \in A} \left[2 \left\{ \frac{n}{2\sqrt{a}} \right\} \right]$. Вычислим эту сумму.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \left[\frac{n}{\sqrt{a}} \right] &= \left[2 \frac{n}{2\sqrt{a}} \right] = \left[2 \left[\frac{n}{2\sqrt{a}} \right] + 2 \left\{ \frac{n}{2\sqrt{a}} \right\} \right] = \\ &= 2 \left[\frac{n}{2\sqrt{a}} \right] + \left[2 \left\{ \frac{n}{2\sqrt{a}} \right\} \right], \end{aligned}$$

откуда

$$\left[2 \left\{ \frac{n}{2\sqrt{a}} \right\} \right] = \left[\frac{n}{\sqrt{a}} \right] - 2 \left[\frac{n}{2\sqrt{a}} \right].$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{a \in A} \left[2 \left\{ \frac{n}{2\sqrt{a}} \right\} \right] &= \sum_{a \in A} \left[\frac{n}{\sqrt{a}} \right] - 2 \sum_{a \in A} \left[\frac{n}{2\sqrt{a}} \right] = \\ &= n^2 - 2 \left[\frac{n^2}{4} \right]. \end{aligned}$$

Легко проверить, что при n четном

$$n^2 - 2 \left[\frac{n^2}{4} \right] = \frac{n^2}{2}, \text{ а при } n \text{ нечетном}$$

$$n^2 - 2 \left[\frac{n^2}{4} \right] = \frac{n^2+1}{2}. \text{ Задача решена.}$$

Как видим, решение довольно-таки «хитрое». Мы познакомим читателя с функцией Мёбиуса, а затем с ее помощью дадим более «прямое» решение задачи.

Функция Мёбиуса. Свертка Дирихле

Рассмотрим функцию $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, -1\}$, определяемую следующим образом:

$\mu(m) = 0$, если m не бесквадратное,

$\mu(m) = 1$, если m бесквадратное и имеет четное число простых делителей,

$\mu(m) = -1$, если m бесквадратное и имеет нечетное число простых делителей.

Эта функция называется функцией Мёбиуса. На первый взгляд она может показаться надуманной, однако она удобна.

Функцию, определенную на множестве натуральных чисел, назовем *мультипликативной*, если для любых $m, n \in \mathbb{N}$ таких, что $(m, n) = 1$, выполняется $f(mn) = f(m)f(n)$.

Значения мультипликативной функции на натуральных числах определяются ее значениями на числах вида p^α , где p – простое. Действительно, пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, тогда

$$f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}) = \prod_{i=1}^k f(p_i^{\alpha_i}).$$

Отсюда следует, что для доказательства равенства двух мультипликативных функций f и g на множестве натуральных чисел, т.е. для доказательства того, что $f(n) = g(n)$ для любого натурального n , достаточно доказать это равенство только на числах вида $n = p^\alpha$ для каждого простого p .

Рассмотрим некоторые свойства функции Мёбиуса.

Свойство 1. *Функция Мёбиуса $\mu(n)$ мультипликативна.*

Доказать это свойство можно непосредственной проверкой, и мы оставляем ее читателю.

Свойство 2. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 0, & n > 1, \\ 1, & n = 1. \end{cases}$$

Доказательство. Положим

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 0, & n > 1, \\ 1, & n = 1 \end{cases}$$

и

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d).$$

Тогда достаточно доказать, что $f(n) = \varepsilon(n)$. Заметим, что обе функции мультипликативны, поэтому достаточно доказать это равен-

ство для $n = p^\alpha$ для каждого простого p . Это мы вновь оставим читателю.

Свойство 3. Для любого $n \in \mathbb{N}$ верно равенство

$$|\mu(n)| = \mu(n)^2 = \sum_{d^2|n} \mu(d).$$

Доказательство. Обозначим $f(n) = \sum_{d^2|n} \mu(d)$ и докажем сначала, что f – мультипликативная функция. Возьмем $m, n \in \mathbb{N}$ такие, что $(m, n) = 1$, тогда

$$\begin{aligned} f(m)f(n) &= \left(\sum_{r^2|m} \mu(r) \right) \left(\sum_{s^2|n} \mu(s) \right) = \\ &= \sum_{r^2|m, s^2|n} \mu(r)\mu(s) = \sum_{r^2|m, s^2|n} \mu(rs) = \\ &= \sum_{d^2|mn} \mu(d) = f(mn). \end{aligned}$$

Заметим, что в этой выкладке в четвертом равенстве используется взаимная простота m и n . Теперь, чтобы убедиться в равенстве $|\mu(n)| = f(n)$, достаточно его проверить для $n = p^\alpha$ для каждого простого p . Это мы вновь оставим читателю.

Для двух функций f и g на множестве натуральных чисел определим еще одну функцию следующим образом:

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Функция h называется *сверткой Дирихле* функций f и g и обозначается $h = f * g$.

Пример. Свойство 2 в терминах сверток может быть переформулировано так: $\varepsilon(n) = (\mu * 1)(n)$, где $1(n) = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Допустим, у нас две функции f и g и

$$g(n) = \sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) = (f * 1)(n).$$

Рассмотрим $A(n) = \sum_{d|n} \mu(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$. Тогда

$$A(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{d_1|\frac{n}{d}} f(d_1). \quad (1)$$

Условия, наложенные на d и d_1 , могут быть переписаны так: $n = kdd_1$, $k, d, d_1 \in \mathbb{N}$. Тогда

$$A(n) = \sum_{d, d_1: n=kdd_1} \mu(d)f(d_1) = \sum_{d_1|n} f(d_1) \sum_{\frac{d_1}{d}|n} \mu(d). \quad (2)$$

Таким образом, мы поменяли порядок суммирования в (1). Из второго свойства получим:

$$\sum_{d_1|\frac{n}{d}} \mu(d) = \varepsilon(n/d_1),$$

но отсюда следует, что вторая сумма в (2) не равна 0 только в случае $d_1 = n$, значит, $A(n) = f(n)$, т.е.

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Это – формула обращения Мёбиуса. Полученное можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема (формула обращения Мёбиуса). Пусть $g = f * 1$, тогда $f = \mu * g$.

Главное здесь не в том, чтобы запомнить формулу, а в том, чтобы понять стоящую за ней основную идею. Эта идея – в смене порядка суммирования в (1) и затем применении основных свойств μ .

Решение задачи

Для решения задачи нам нужно посчитать

$$A(n) = \sum_{a=1}^{n^2} \mu(a)^2 \theta\left(\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{a}} \right\rfloor\right),$$

где $\theta(y)$ – функция, равная 1, если y – нечетное, и 0, если четное. Действительно: $\mu(a)^2$ равно 1, если a – бесквадратное, и 0 в противном случае.

Воспользовавшись свойством 3, мы можем записать:

$$\mu(a)^2 = \sum_{d^2|a} \mu(d).$$

С тем, чтобы применить некий трюк, как это было сделано в случае свертки Дирихле, представим функцию $\theta(y)$ как сумму значений некоторой другой функции f , т.е. найдем подходящую f такую, что

$$\theta(y) = \sum_{x \leq y} f(x).$$

После нескольких попыток можно заметить, что подходящей является функция

$$\theta(y) = \sum_{x \leq y} (-1)^{x+1}.$$

Таким образом, для каждого натурального x , не превосходящего y , просуммируем 1 со знаками + или - в зависимости от того, является x четным или нечетным, нечетные берем со знаком +. Тогда получим

$$A(n) = \sum_{a=1}^{n^2} \left[\sum_{d^2|a} \mu(d) \sum_{x \leq \frac{n}{\sqrt{a}}} (-1)^{x+1} \right]. \quad (3)$$

Поменяем в (3) порядок суммирования. Зафиксируем x и просуммируем $(-1)^{x+1}$, умноженные на всевозможные слагаемые в зависимости от a , которые удовлетворяют неравенству $x \leq \frac{n}{\sqrt{a}}$, т.е. $a \leq \frac{n^2}{x^2}$. Получим

$$A(n) = \sum_{x=1}^n \sum_{a \leq \frac{n^2}{x^2}} (-1)^{x+1} \sum_{d^2|a} \mu(d).$$

Разобьем на две суммы - со знаками + и -:

$$A(n) = \sum_{x=1}^n \sum_{a \leq \frac{n^2}{x^2}} \sum_{d^2|a} \mu(d) - 2 \sum_{\substack{x \leq n, \\ x \text{ четное}}} \sum_{a \leq \frac{n^2}{x^2}} \sum_{d^2|a} \mu(d).$$

Положив $x = 2t$ в последней сумме, получим

$$\sum_{\substack{x \leq n, x \\ \text{четное}}} \sum_{a \leq \frac{n^2}{x^2}} \sum_{d^2|a} \mu(d) = \sum_{t \leq \frac{n}{2}} \sum_{a \leq \frac{(n/2)^2}{t^2}} \sum_{d^2|a} \mu(d).$$

Значит, мы можем записать

$$A(n) = A_1(n) - 2A_1(n/2), \quad (4)$$

где обозначено

$$A_1(m) = \sum_{x \leq m} \sum_{a \leq \frac{m^2}{x^2}} \sum_{d^2|a} \mu(d).$$

Переставим местами суммирование по переменным a и d :

$$A_1(m) = \sum_{x \leq m} \sum_{d \leq \frac{m}{x}} \mu(d) \sum_{a \leq \frac{m^2}{x^2}, d^2|a} 1.$$

В последней сумме $a = d^2 a_1$, $a_1 \leq m^2 / (x^2 d^2)$.

Значит, эта сумма равна $\left\lfloor \frac{m^2}{x^2 d^2} \right\rfloor$, и

$$A_1(m) = \sum_{x \leq m} \sum_{d \leq \frac{m}{x}} \mu(d) \left\lfloor \frac{m^2}{x^2 d^2} \right\rfloor.$$

Введем новую переменную $r = xd$. Тогда сумму $A_1(m)$ можно будет переписать в виде

$$A_1(m) = \sum_{r \leq m} \left\lfloor \frac{m^2}{r^2} \right\rfloor \sum_{d|r} \mu(d) = \left\lfloor m^2 \right\rfloor.$$

Подставляя это в (4), получим

$$A(n) = \left\lfloor n^2 \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

В случае четного n будет $A(n) = \frac{n^2}{2}$, а в

случае нечетного - $A(n) = \left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor + 1$.

Задача решена.

Таким образом, мы решили задачу с помощью довольно прямых, хотя и не очень простых вычислений. Впрочем, эти вычисления стандартны для такого рода задач и, если проделать их несколько раз, они перестанут казаться сложными.

Использование функции Мёбиуса является частым приемом при решении задач, связанных с мультипликативными функциями. Как только удастся переформулировать задачу в терминах функции Мёбиуса, решение сводится уже к техническим трудностям.

Пружина, стержень и предельный переход (по следам известной задачи)

И. ГОРБАТЫЙ

ЕСЛИ ЗАДАЧА РЕШЕНА И ОТВЕТ получен в виде алгебраической формулы, то появляется возможность проанализировать ответ для различных специальных случаев. Обычно принимаются такие значения параметров задачи, когда ее решение уже известно или существенно упрощается.

Пусть, например, решена задача о движении двух грузов, соединенных невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый неподвижный блок без трения. Для ускорения грузов получена формула

$$a = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.$$

Из нее, в частности, следует, что при равенстве масс грузов их ускорение равно нулю. Это тривиальный результат, к которому можно прийти из соображений симметрии, не записывая законы Ньютона. В другом специальном случае, когда $m_2 = 0$, из формулы следует $a = g$. Это тоже очевидный результат: при невесомой нити, невесомом блоке и $m_2 = 0$ груз массой m_1 падает свободно.

Если анализ специальных случаев приводит к противоречиям, то чаще всего это связано с ошибками, допущенными при выводе формулы. Но иногда эти противоречия вскрывают тонкие и поучительные физические моменты в решаемой задаче. Об одной такой задаче и пойдет речь в данной статье. Условие мы приведем из известного задачника И.Е.Иродова.

Задача. Два бруска массами m_1 и m_2 , соединенные недеформированной пружиной, лежат на горизонтальной плоскости (рис. 1). Коэффициент трения между брусками и плоскостью равен μ . Какую минимальную постоянную силу нужно прило-

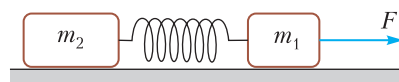


Рис. 1

жить в горизонтальном направлении к бруску массой m_1 , чтобы другой брусок сдвинулся с места? Рассматривается случай поступательного движения брусков.

Чаще всего студенты и школьники, безло прочитав условие, приводят следующее решение. Брусок 2, масса которого m_2 , начнет двигаться, когда сила упругости пружины становится равной силе трения этого бруска о плоскость:

$$kx = \mu m_2 g,$$

где k – жесткость пружины, x – ее растяжение. Если медленно наращивать силу так, что в любой момент времени ускорение бруска 1 равно нулю, то в момент начала движения бруска 2 сила, приложенная к бруску 1, будет равна

$$F = \mu m_1 g + kx = \mu (m_1 + m_2) g.$$

Посмотрев страницу с ответами в задачнике и обнаружив, что ответ ошибочный, вдумчивый студент или школьник обращает внимание на то, что приложенная сила по условию задачи *постоянная*, ее не постепенно наращивают, как в приведенном решении, а в некоторый начальный момент прикладывают к бруску 1 и далее не изменяют. При $F > \mu m_1 g$ брусок 1 начнет двигаться с ускорением, проскочит положение равновесия с максимальной скоростью и далее будет двигаться замедленно, продолжая растягивать пружину.

Для решения задачи приращение кинетической энергии бруска 1 приравняем к суммарной работе действующих на него сил:

$$\frac{m_1 v^2}{2} = (F - \mu m_1 g)x - \frac{kx^2}{2},$$

где $x = \mu m_2 g / k$ – растяжение пружины в момент времени, когда брусок 2 начнет двигаться, v – скорость бруска 1 в этот момент. Учитывая, что сила F минимальна при $v = 0$, получим

$$F_{\min} = \mu g \left(m_1 + \frac{m_2}{2} \right) \quad (1).$$

Поскольку сила F_{\min} не зависит от жесткости пружины, то эта формула верна при

любой жесткости пружины. Предельный случай $k \rightarrow \infty$ означает превращение пружины в абсолютно твердый стержень, соединяющий бруски. Но чтобы сдвинуть бруски, соединенные жестким стержнем, необходимо приложить минимальную силу

$$F_{\min} = \mu g(m_1 + m_2), \quad (2)$$

большую, чем предписывает формула (1). Получается, что формула (1) в предельном случае $k \rightarrow \infty$ дает неверный результат!

Чтобы разобраться с причинами этого противоречия, разберем задачу более подробно, используя подход, основанный на уравнении динамики Ньютона. Для краткости для сил трения скольжения введем такие обозначения:

$$f_1 = \mu m_1 g, \quad f_2 = \mu m_2 g.$$

Пусть в момент $t = 0$ к бруску 1 приложена постоянная сила F . Если $F > f_1$, то брусок 1 начнет двигаться, а брусок 2 останется в покое до тех пор, пока растяжение пружины не достигнет величины $x = x_2 = f_2/k$. До этого момента брусок 1 движется, как груз, подвешенный на пружине, только вместо постоянной силы тяжести на него действует постоянная сила $F - f_1$. Положение равновесия бруска 1 достигается при растяжении пружины $x_0 = (F - f_1)/k$, а закон движения бруска описывается формулой $x = x_0(1 - \cos \omega t)$, где $\omega = \sqrt{k/m_1}$. Момент времени t_2 , когда брусок 2 начнет двигаться, найдем из уравнения

$$x_0(1 - \cos \omega t_2) = x_2.$$

После подстановки в него x_0 и x_2 получим

$$f_2 = (F - f_1)(1 - \cos \omega t_2). \quad (3)$$

Поскольку $1 - \cos \omega t_2 \leq 2$ и $F > f_1$, то

$$\frac{f_2}{F - f_1} \leq 2,$$

или

$$F > f_1 + \frac{f_2}{2} = \mu g \left(m_1 + \frac{m_2}{2} \right).$$

При выполнении этого неравенства уравнение (3) имеет такое решение:

$$\cos \omega t_2 = \frac{F - f_1 - f_2}{F - f_1}.$$

Так как $\omega = \sqrt{k/m_1}$, то время $t_2 \sim 1/\sqrt{k}$. Следовательно, с увеличением жесткости пружины промежуток времени, в течение которого брусок 1 движется, а брусок 2

покоится в стартовой позиции, сокращается и стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$.

Проблема предельного перехода, кажется, решена: с увеличением жесткости пружины сокращается длительность стадии «раздельного движения», когда брусок 1 движется, а брусок 2 покоится, и при $k \rightarrow \infty$ этот режим вообще не реализуется (его длительность стремится к нулю). Однако, есть еще одно интересное обстоятельство.

Кажется странным, что при одной и той же силе, удовлетворяющей неравенствам

$$f_1 + \frac{f_2}{2} < F < f_1 + f_2, \quad (4)$$

система из двух брусков и твердого стержня покоится, а система из тех же брусков и пружины движется. Найдем расстояние, которое проходят бруски, соединенные пружиной в этом случае. Пусть за некоторое время брусок 1 прошел расстояние l , кинетическая энергия брусков в этот момент равна E_k , а удлинение пружины равно x . Приращение механической энергии системы равно суммарной работе силы F и сил трения:

$$E_k + \frac{kx^2}{2} = Fl + A_1 + A_2.$$

Работы сил трения, действующих на бруски 1 и 2, отрицательные и удовлетворяют неравенствам

$$|A_1| = -A_1 \geq f_1 l, \quad |A_2| = -A_2 \geq f_2(l - x),$$

Неравенства учитывают возможность того, что бруски при некоторых параметрах могут изменять направления движения. Отсюда получаем

$$-A_1 - A_2 = Fl - E_k - \frac{kx^2}{2} \geq f_1 l + f_2(l - x),$$

или

$$l(f_1 + f_2 - F) \leq \Phi(x) - E_k,$$

где $\Phi(x) = f_2 x - \frac{1}{2} kx^2$. Максимальное значение функции $\Phi(x)$ нетрудно найти: $\Phi \leq \frac{f_2^2}{2k}$.

Поэтому

$$l \leq \frac{f_2^2}{2k(f_1 + f_2 - F)} = l_{\max}.$$

Таким образом, при умеренной величине силы, когда выполняются неравенства (4), бруски смещаются лишь на конечное рас-

(Продолжение см. на с. 34)

Геометрические головоломки в картинках

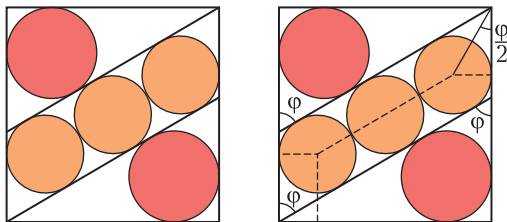
Предлагаем читателям несколько задач от Катрионы Ширер (Catriona Shearer). Катриона – учитель математики и любитель геометрических задач. Свои задачи она публикует в интернете, коллекция постоянно пополняется. На ее странице можно обсуждать задачи, выкладывать свои решения. Нередко, вдохновляясь задачами Катрионы, любители геометрии присылают свои задачи. Что могут сделать и наши читатели.

Задачи всегда сформулированы завлекательно, но, конечно, не только этим они ценны. Часто встречаются красивые геометрические идеи.

Многие задачи решаются с помощью алгебраического подхода. Однако, прежде чем начинать считать, попробуйте все-таки сначала найти геометрическое решение.

Рассмотрим пример.

Задача. В квадрате расположены пять кругов. Площадь красных кругов равна 24. Найдите площадь оранжевых кругов.



Решение. Найдём значение угла φ . Зная угол φ , несложно найти сторону квадрата, радиусы оранжевых кругов, а затем и искомую площадь.

Покажем сначала, как сделать это с помощью вычислений. Выразим длину стороны квадрата двумя способами. С одной стороны, она равна $2r + 4r\sin\varphi$ (горизонтальная сторона), а с другой, $2r\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} + 4r\cos\varphi$ (вертикальная сторона), здесь r – радиус оранжевого круга. Приравняв эти значения и сокращая на $2r$,

получим уравнение

$$1 + 2\sin\varphi = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} + 2\cos\varphi.$$

Решить его можно с помощью замены $s = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, которая приводит к кубическому уравнению

$$3s^3 + 3s^2 - s - 1 = 0,$$

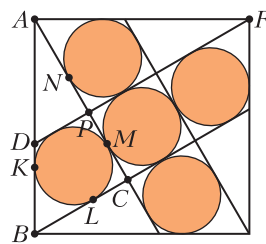
а его корни можно найти с помощью разложения на множители:

$$(s-1)\left(s - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(s + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0.$$

Нам подходит единственный корень $s = \frac{1}{\sqrt{3}}$, который даёт $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Зная угол φ

и радиус красного круга, который можно получить из заданной площади, несложно вычислить сторону квадрата, а затем и радиус оранжевых кругов. Опуская несложные дальнейшие расчеты, в итоге получим, что суммарная площадь оранжевых кругов равна 27.

Приведем теперь геометрическое решение. Из соображений симметрии заметим, что в квадрате можно располо-



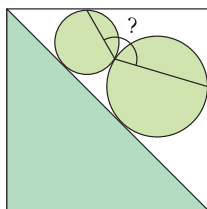
жить пять оранжевых кругов.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC . Из теоремы об отрезках касательных, проведенных из одной точки, получим, что $BK = BL$ и $AK = AM = AN + NM = AN + 2PN$. Кроме того, из равенства прямоугольных треугольников ABC и APF получим, что $PN = LC$ и $BL = AN$. Тогда $AB = AK + KB =$

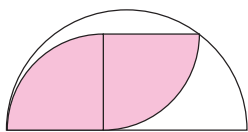
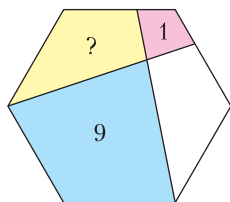
$= 2(BL + LC) = 2BC$. Следовательно, угол BAC равен $\frac{\pi}{6}$, поэтому $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Треугольник ABC подобен треугольнику ADF . Коэффициент подобия, как несложно заметить, равен $\frac{AC}{AB} = \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Значит, радиусы красных и оранжевых кругов относятся как $\sqrt{3}$ к 2, а площади как 3 к 4, и в итоге снова получаем площадь 27.

Попробуйте решить следующие задачи Катрионы. Все задачи приведены в авторских формулировках.

1. Два круга расположены в квадрате. Найдите отмеченный угол.

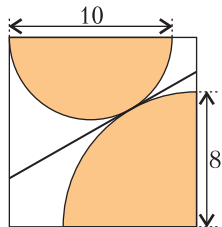


2. Отрезки разбивают правильный шестиугольник на 4 части. Точка пересечения отрезков лежит на большой диагонали шестиугольника. Найдите площадь желтой части.

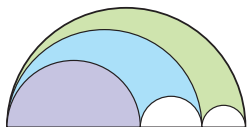


3. Какую часть площади полукруга покрывают четверти кругов?

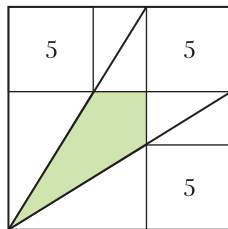
4. Четверть круга и полукруг расположены внутри квадрата. Чему равна длина отрезка касательной?



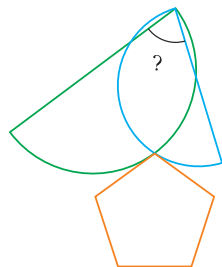
5. Три раскрашенные области имеют одинаковые площади. Какую часть площади полукруга они составляют?



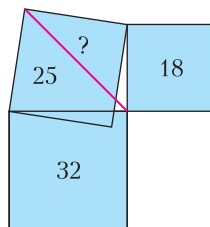
6. Три маленьких квадрата расположены в углах большого. Найдите зеленую площадь.



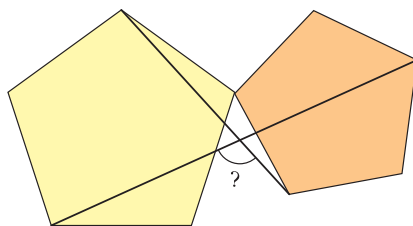
7. Правильный пятиугольник касается двух полуокружностей. Чему равен угол между диаметрами? Как изменится ответ, если рассмотреть другие правильные многоугольники?



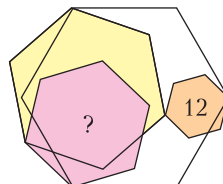
8. Известны площади квадратов. Найдите длину красного отрезка.



9. Даны два правильных пятиугольника. Найдите отмеченный угол.



10. Даны четыре правильных шестиугольника. Чему равна розовая площадь?



Материал подготовил Н. Панюнин

$$S = \frac{r^2}{3}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3}$$

(Начало см. на с. 30)

стояние и останавливаются. Причем с увеличением жесткости пружины это смещение уменьшается и стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$.

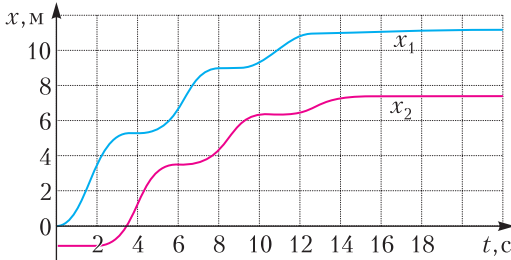


Рис. 2

На рисунке 2 показаны графики зависимости от времени координат первого (x_1) и второго (x_2) грузов от времени для следующих

параметров: $f_1 = f_2 = 30$ Н, $F = 56$ Н, $k = 10$ Н/м, $m_1 = m_2 = 10$ кг. При этом $l_{\max} = 11,25$ м.

Подведем некоторые итоги. Простейшая модель связи брусков — невесомый абсолютно жесткий стержень. В рамках этой модели все просто: при малой внешней силе бруски покоятся, при $F > f_1 + f_2$ бруски движутся. Если использовать более продвинутой модель, заменив стержень легкой пружиной, то возникают еще два режима движения. При $f_1 \leq F \leq f_1 + (f_2/2)$ движется только первый брусок, при $f_1 + (f_2/2) \leq F \leq f_1 + f_2$ движутся оба бруска. Движения брусков в обоих режимах происходят в течение конечных промежутков времени и заканчиваются их остановкой. С ростом жесткости пружины длительность этих режимов сокращается и стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$.

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Как мы видим предмет сквозь толщу воды или стекла?

Ю.НОСОВ

МНОГО РАЗ НАБЛЮДАЛОСЬ ТАКОЕ явление: при рассмотрении предмета через слой воды (например, камня на дне водоема) этот предмет кажется находящимся ближе к поверхности и больше по размеру. Объяснение явления связано с преломлением лучей света на границе раздела вода — воздух. Здесь действует закон преломления света:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n,$$

где α — угол падения луча, β — угол преломления, n — показатель преломления второй среды относительно первой. Преломление приводит к тому, что идущие от предмета лучи выходят из воды расходящимся пучком и глаз, собирая этот пучок, видит мнимое увеличенное изображение предмета. Подобное явление мы наблюдаем и в случае, когда лучи света проходят сквозь стекло или прозрачный кристалл.

Пусть в глубине кристалла имеется дефект — сферическая пора, т.е. газовое включение. Мы видим эту пору, можем ее сфотографировать. Возникает вопрос: если мы видим увеличенное изображение поры, то каков ее реальный размер?

Наши эксперименты

Опыты с кристаллами и стеклами. Прозрачный кристалл или стеклянный образец с плоскопараллельными поверхностями устанавливается на линейке с миллиметровыми делениями. При этом штрихи линейки видны одновременно и сквозь кристалл (стекло) и напрямую. В качестве примера на рисунке 1 приведена сделанная таким образом фотография через прозрачный кристалл

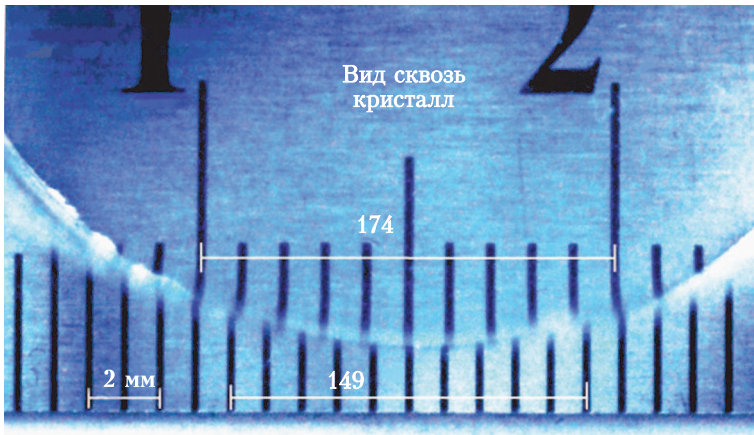


Рис. 1

флюорита (CaF_2 , $n = 1,43$) толщиной 40 мм и диаметром 25 мм. Видим, что расстояния между штрихами-изображениями через флюорит существенно больше, чем между исходными штрихами. По аналогии с линейным увеличением линзы введем для наших опытов увеличение K как отношение размера изображения к исходному размеру предмета. Измерение расстояний между одинаковым количеством штрихов-изображений и исходных штрихов на рисунке 1 позволило получить $K = \frac{174}{149} \approx 1,17$, т.е. увеличение равно 17%. Такие же опыты были проведены для кварцевого стекла ($n = 1,46$) различной толщины h . Значения K , найденные в этих опытах, приведены на рисунке 2, линия 1. (В работе использовался фотоаппарат SONY α -390 с объективом SIGMA 50 mm DG MACRO. Передняя линза объектива находилась на расстоянии 5–7 мм от поверхности кристалла (стекла).)

Опыты с водой. Контрольная линейка с миллиметровыми делениями помещалась

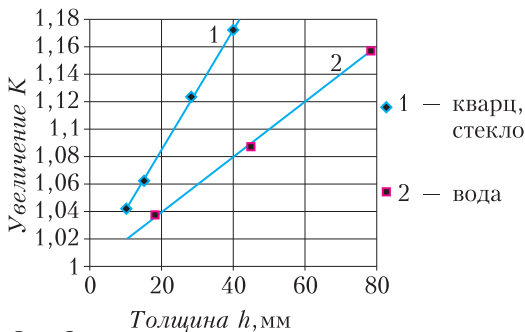


Рис. 2

на дне сосуда с водой ($n = 1,33$). Такая же линейка располагалась рядом на том же уровне вне сосуда. На фотографии получались обе линейки, что позволяло сравнивать изображение, полученное сквозь толщину воды, и исходную картину. Во всех случаях изображения, полученные сквозь толщину воды, являлись увеличением исходной картины. Значения K , найденные по таким фото для столба воды различной высоты

h , даны на рисунке 2, линия 2. Графики, приведенные на этом рисунке, показывают, что величина K растет как с высотой h , так и с ростом показателя преломления n среды.

Немного теории

На дне бассейна глубиной h находится предмет AB размером c (рис. 3). Если воды в бассейне нет, то из точки O предмет виден наблюдателю под углом 2α . Наполним бассейн водой до уровня $T-T$. Тогда предмет кажется наблюдателю на меньшей глубине h_1 . Закон преломления света позволяет найти эту величину:

$$h_1 = \frac{h}{n}. \quad (1)$$

Эта формула справедлива, если наблюдатель смотрит на поверхность воды вертикально – угол падения луча α_1 равен 0 или близок к нему. Но мы имеем дело с протяженным объектом AB и углом α_1 , отличным от 0. Какая ошибка возникает при использовании формулы (1) в этом случае? Расчет по закону преломления света показывает, что с ростом угла α_1 кажущаяся глубина h_1 уменьшается и при достижении $\alpha_1 = 30^\circ$ глубина h_1 примерно на 6,5% меньше рассчитанной по формуле (1). С учетом такой погрешности мы будем далее считать, что, работая в интервале углов α_1 , не превышающих 30° , кажущаяся

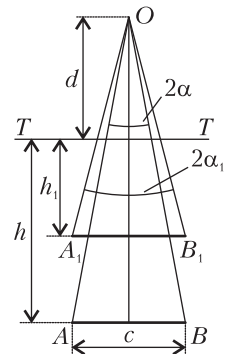


Рис. 3

глубина h_1 всего предмета A_1B_1 остается равной h/n . Поскольку углы $2\alpha_1$ и 2α дают наблюдателю кажущийся и истинный угловые размеры предмета, то величина α_1/α является увеличением K . Нам остается найти значения этих углов и разделить одно на другое.

Схема на рисунке 3 приводит к следующему выражению:

$$K = \frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{\operatorname{arctg} \frac{c}{2\left(\frac{h}{n} + d\right)}}{\operatorname{arctg} \frac{c}{2(h+d)}}, \quad (2)$$

где d – расстояние от точки наблюдения O до поверхности $T-T$. На рисунке 4 приведены,

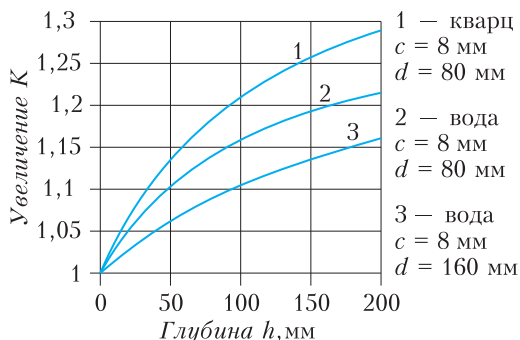


Рис. 4

в качестве примера, графики зависимости K от h , построенные по формуле (2). При построении графиков принято, что для кварца $n = 1,46$, а для воды $n = 1,33$. Общий ход кривых на рисунке 4 одинаков. Особенности этих кривых: во-первых, при уменьшении глубины h величина K стремится к 1, когда истинный размер предмета и размер его мнимого изображения совпадают; во-вторых, с ростом глубины h увеличение K непрерывно растет, стремясь к своему пределу – величине показателя преломления n ; в-третьих, к этой же величине n стремится K при стремлении d к нулю.

Для проверки формулы (2) проведен дополнительный опыт, позволяющий сравнить расчетную кривую $K = f(d)$ с экспериментом. В опыте был использован прозрачный кристалл фторида лития (LiF , $n = 1,39$) толщиной 30,7 мм. Линейка с миллиметровыми делениями фотографировалась через этот кристалл при различных расстояниях d , что позволило найти для этих точек увеличения K . На рисунке 5 крестиками показаны экспериментальные точки, а

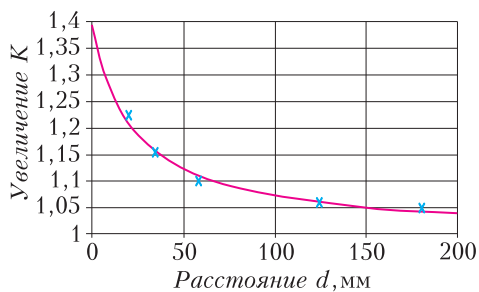


Рис. 5

сплошной линией изображен график $K = f(d)$, построенный по формуле (2). Видим хорошее согласие расчетной кривой с экспериментальными данными.

Таким образом, слой воды (стекла) в опыте является рассеивающей линзой, дающей увеличенное мнимое прямое изображение предмета. (Напомним, что обычная рассеивающая линза позволяет получить только уменьшенное мнимое прямое изображение.) Для воды максимальное увеличение равно 1,33, или 33%.

В заключение, используя формулу (2), приведем два примера расчета увеличения K для случаев, близких к жизни.

Рыба в воде. Если наблюдатель смотрит на поверхность воды с высоты 1 м и на глубине 1 м плавает рыба размером 300 мм, то расчет дает кажущийся размер рыбы примерно на 14% больше ее реального размера. В популярной литературе часто встречается цифра увеличения 33%, но это справедливо только в предельных случаях: либо когда наблюдатель наклонится к самому зеркалу воды ($d = 0$), либо когда глубина водоёма велика.

Пора в кварцевом стекле. При изучении дефектов в объеме прозрачных тел (стеклах, кристаллах) исследователю всегда важно знать истинный размер дефекта. Пусть в объеме кварцевого стекла на глубине 200 мкм от поверхности находится пора диаметром 10 мкм. Возьмем предельно малое расстояние 5 мм от точки наблюдения до поверхности стекла. Расчет увеличения дает $K \approx 1,012$, т.е. наблюдаемый диаметр поры примерно на 1% больше истинного. В этом случае увеличение невелико.

Заметим, что если у вас на фото несколько пор, находящихся на разной глубине, то их увеличение будет различным – чем глубже пора, тем больше увеличение.

Автор благодарен В.Крымову за полезные советы при выполнении этой работы.

Международная физическая олимпиада

В 2022 году международные соревнования школьников по физике были организованы Швейцарией. Наши школьники приняли участие в индивидуальном порядке на площадке Московского физико-технического института (национального исследовательского университета). Возможность участия в Международной олимпиаде ребята получили по итогам двух Всероссийских олимпиад и квалифицированных сборов. Подготовка и отбор участников проходили на базе МФТИ и образовательного центра «Сириус».

Победителями 52-й Международной олимпиады школьников по физике, завоевав пять золотых медалей, стали российские школьники

Вадим Ерин – г. Долгопрудный Московской области, Физико-технический лицей имени П.Л.Капицы,

Максим Пермяков – г. Саранск Республика Мордовия, Республиканский лицей для одаренных детей,

Даниил Рынкевич – г. Москва, Школа Центра педагогического мастерства,

Олег Калашников – г. Долгопрудный Московской области, Физико-технический лицей имени П.Л.Капицы,

Илья Гладышев – г. Москва, Лицей «Вторая школа».

Ниже приводятся условия задач теоретического тура олимпиады.

Теоретический тур

Задача 1. Постоянные магниты

Сильные постоянные магниты изготавливают из сплава NdFeB, гистерезисная петля которого достаточно широкая, так что намагниченность J можно считать постоянной; в дальнейшем считайте, что $J = 1,5 \text{ Тл}/\mu_0$, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2$, а все постоянные магниты намагничены однородно. Намагниченность определяется как объемная плотность магнитного дипольного момента вещества.

Подсказка 1. Следующее равенство может быть полезным:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Подсказка 2. Магнит в форме шара создает магнитное поле, которое совпадает с полем точечного диполя. Магнитные поля, создаваемые магнитами другой формы, описываются формулой для поля точечного диполя только на расстояниях, много больших их диаметра.

Подсказка 3. Электрическое поле точечного электрического диполя и магнитное поле точечного магнитного диполя как функции дипольного момента и координат аналогичны, т.е. одна может быть получена из другой умножением на соответствующую константу.

Подсказка 4. Индуцированное в некоторой области за счет граничных условий поле можно заменить полем некоторой конфигурации источников поля вне этой области.

Часть А. Взаимодействие магнитов (4,5 балла)

На расстояниях от магнита много больше его размера создаваемое им магнитное поле можно приблизить магнитным полем точечного



Команда России (слева направо): М.Пермяков, Д.Рынкевич, О.Калашников, В.Ерин, И.Гладышев

диполя с тем же магнитным моментом \vec{m} :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (2\vec{m}_{\parallel} - \vec{m}_{\perp}).$$

Здесь $r = |\vec{r}|$, а дипольный момент представлен в виде суммы компонент, параллельной и перпендикулярной радиус-вектору \vec{r} , проведенному от диполя до точки наблюдения: $\vec{m} = \vec{m}_{\perp} + \vec{m}_{\parallel}$.

A1. Найдите величину силы взаимодействия между двумя коаксиальными цилиндрическими магнитами диаметром $d = 20$ мм и толщиной $h = 2$ мм, намагниченность которых направлена вдоль оси цилиндров, если расстояние между центрами магнитов $L = 20$ см (рис. 1). Считайте, что $L \gg d, h$.

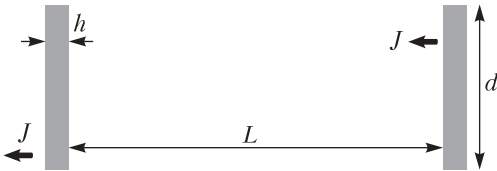


Рис. 1

A2. Поле магнита из пункта A1 на расстояниях много больше $\frac{h}{2}$ совпадает с полем кругового витка с током I . Найдите I .

A3. Найдите силу взаимодействия магнитов из A1, если теперь расстояние между ними $L = 5$ мм. Считайте, что $d \gg L \gg h$.

A4. Одинаковые шаровые магниты диаметром $\delta = 5$ мм, скрепленные друг с другом силой магнитного притяжения, образуют цепочку. Чему равна максимальная длина l такой цепочки, при которой она еще не разрывается под действием собственного веса, если

ее подвесить за верхний магнит? Плотность магнитов из NdFeB равна $\rho = 7500$ кг/м³.

A5. Рассмотрим цепочку из пункта A4. Получите выражение для величины магнитного поля B в точке P , которая находится на расстоянии r от одного из концов цепочки O , а угол между цепочкой и линией OP равен θ (рис. 2). Считайте, что $l \gg r$ и $r \sin \theta \gg \delta$.

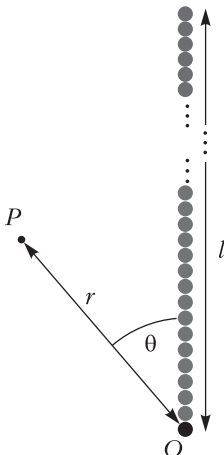


Рис. 2

Часть В. Взаимодействие с ферромагнетиком
(3,5 балла)

Кроме постоянных магнитов у нас есть пластины из ферромагнетика, используемого в сердечниках трансформаторов. Считайте, что у такого ферромагнетика очень большая постоянная магнитная проницаемость: $\mu_r \sim 10^5$.

Подсказка 5. Большая проницаемость материала объекта означает, что снаружи вблизи поверхности объекта линии магнитного поля практически перпендикулярны этой поверхности. Это похоже на поведение силовых линий электрического поля вблизи внешней поверхности проводника.

В1. Шаровой магнит из пункта A4 расположен на расстоянии $s = \delta$ от толстой бесконечной ферромагнитной пластины. Намагниченность магнита направлена перпендикулярно пластине. Нарисуйте линии магнитного поля в плоскости, приведенной в листе ответов. На рисунке в листе ответов отмечены три точки (обозначены 1, 2 и 3 на рисунке 3); вам нужно нарисовать магнитные линии, проходящие через эти три точки. Нарисуйте их целиком настолько, насколько они поместятся

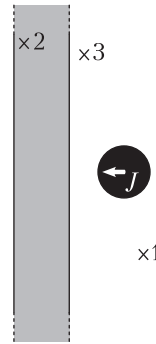


Рис. 3

в область построения на рисунке.

В2. Шаровой магнит приведен в прямой контакт с плоскостью. В какую сторону направлен вектор намагниченности шарового магнита в положении устойчивого равновесия? Чему равна нормальная сила реакции между плоскостью и магнитом? Отметьте правильное (или правильные) направление галочкой в соответствующей рамке в листе ответов (рис. 4).

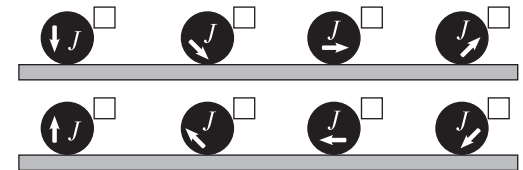


Рис. 4

В3. Магнит из пункта A1 помещен между двумя толстыми круговыми ферромагнитными пластинами диаметром $D = 2d$ так, что

плоские стороны магнита прижаты к плоским сторонам пластин и все три диска расположены коаксиально. Найдите магнитную силу F , действующую на каждую из пластин.

Подсказка 6. Вы можете пренебречь всеми магнитными полями вне ферромагнитных пластин и промежутка между ними.

Часть С. (Анти)ферромагнитное упорядочение (2 балла)

Магнитные свойства материалов определяются магнитными дипольными моментами электронов и атомных ядер. Если дипольные моменты ориентируются параллельно друг другу, то создаваемое ими поле увеличивается – это ферромагнитные материалы. Если же рядом с каждым магнитным диполем есть диполь с антипараллельным моментом, то их поля компенсируют друг друга – это антиферромагнитные материалы.

В дальнейшем мы рассматриваем большое количество шаровых магнитов из пункта А4, расположенных в узлах двумерной решетки; на рисунках 5 и 6 приведены фотографии конфигураций магнитов в устойчивом рав-

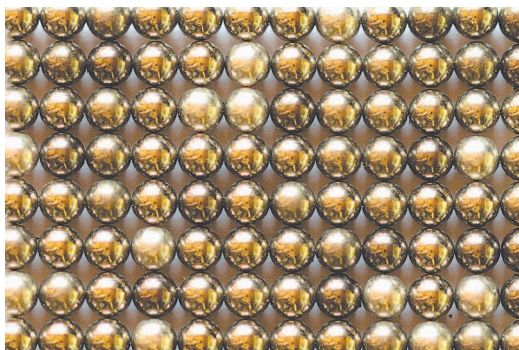


Рис. 5



Рис. 6

новесии. Считайте, что все векторы намагниченности лежат в плоскости рисунка. В вычислениях учитывайте взаимодействие только с ближайшими соседями (на рисунке 5 у каждого магнита четыре ближайших соседа, на рисунке 6 – шесть).

С1. Изобразите направления вектора намагниченности в магнитах на рисунке 5. Вам не нужно доказывать, что предложенная вами конфигурация является единственно возможной. Но вам нужно доказать, что предложенная конфигурация является устойчивой. Найдите энергию, необходимую, чтобы достать один магнит из середины решетки, считая остальные магниты неподвижными. Эта конфигурация отвечает упорядочению в ферромагнитном или антиферромагнитном материале?

С2. Ответьте на такие же вопросы, как и в С1, для конфигурации, изображенной на рисунке 6.

Задача 2. Космический телескоп

Данная задача посвящена физике космического телескопа «Джеймс Уэбб» (рис. 7). Свет от звезды отражается от первичного зеркала с площадью $A_{\text{mirror}} = 25 \text{ м}^2$, а затем отражается от вторичного зеркала. Фокусное расстояние системы $f = 130 \text{ м}$. Свет фокусируется в ISIM, который содержит CCD камеру (прибор с зарядовой связью).

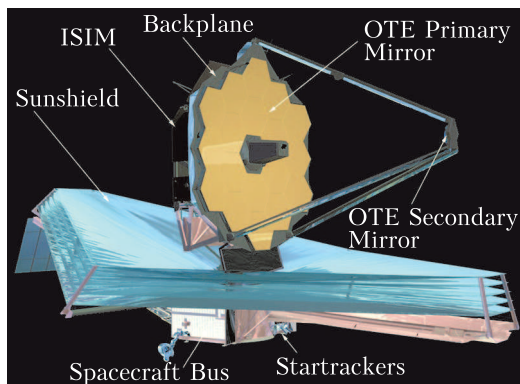


Рис. 7. Схема космического телескопа: Sunshield – «зонт» от Солнца, Backplane – плита-основание, OTE – оптический элемент телескопа, Primary Mirror – первичное зеркало, Secondary Mirror – вторичное зеркало, Startrackers – система наведения на звезду, Spacecraft Bus – системы управления и ориентации, ISIM (Integrated Science Instrument Module) – интегрированный научный инструментальный модуль

Часть А. Изображения звезд

(1,8 балла)

Ближайший красный гигант расположен на расстоянии 89 световых лет и имеет температуру $T_{\text{star}} = 3600 \text{ К}$ и диаметр $d_0 = 1,7 \cdot 10^{11} \text{ м}$.

А1. Вычислите диаметр сфокусированного изображения звезды на матрице CCD камеры.

А2. Оцените диаметр дифракционного максимума на матрице CCD камеры. Считайте, что длина волны $\lambda = 800 \text{ нм}$ (наиболее интенсивная длина волны красного гиганта).

А3. Если CCD камера не охлаждается и может терять теплоту только из-за излучения с поверхности матрицы, какая будет установившаяся температура в области изображения красного гиганта? Считайте, что поверхность CCD матрицы является черным телом. Укажите формулу и вычислите.

Часть В. Счет фотонов

(1,8 балла)

Поглощение фотона CCD камерой приводит к испусканию электрона внутри прибора. Это происходит, если у фотона имеется достаточная энергия для освобождения электрона через энергетический барьер ΔE_g . Считайте, что каждый фотон с достаточной энергией приводит к появлению электрона. Существует просачивание электронов через энергетический зазор, связанное с температурой CCD камеры; этот процесс называется «темновой ток» (dark current) i_d , который измеряется количеством электронов в секунду. Он зависит от температуры по формуле $i_d = i_0 e^{-|\Delta E_g|/(6k_B T)}$, где i_0 – некоторая константа.

В1. Используя график темнового тока (рис. 8), оцените по порядку величины температуру удаленного источника фотонов теплового излучения, которые смогут возбудить электроны в пикселях камеры.

Электроны накапливаются в конденсаторе, а по истечении времени экспозиции τ электроны считаются. В данном процессе есть три основных источника погрешностей: постоянная погрешность, или шум считывания (read out noise); погрешность Пуассона, связанная с темновым током; погрешность Пуассона, связанная с детектированным по-

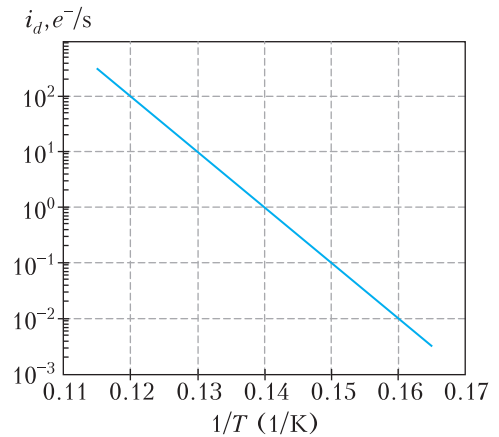


Рис. 8. Зависимость темнового тока от температуры. Единица измерения темнового тока, $e^-/с$, есть количество электронов в секунду

током фотонов. Погрешность Пуассона для некоторого явления равна квадратному корню из числа событий этого явления. Измеренное количество отсчетов фотонов равно количеству электронов в конденсаторе минус количество электронов, связанных с темновым током.

В2. Получите выражение для погрешности общего количества отсчетов σ_t , если известны шум считывания σ_r , темновой ток i_d , количество прилетов фотонов в секунду p , время экспозиции τ .

Для следующих вопросов считайте, что время экспозиции $\tau = 10^4 \text{ с}$. Величина шума считывания $\sigma_r = 14$.

В3. Считайте, что рабочая температура $T_p = 7,5 \text{ К}$. Вычислите минимальное количество прилетов фотонов в секунду p для случая, когда количество отсчетов фотонов в десять раз больше погрешности.

В4. Считайте, что все фотоны такие, что их только-только достаточно для возбуждения электронов через энергетический барьер. Чему в этом случае равна интенсивность источника фотонов из пункта В3 на первичном зеркале? Выразите ответ в Вт/м^2 .

Часть С. Зонт

(4,4 балла)

Инфракрасная CCD камера должна использоваться при низких температурах. Для защиты от солнечного излучения используется «зонт», состоящий из 5 тонких пластин (на рисунке 9 – черные), разделенных пус-

тыми зазорами. Солнечное излучение (на рисунке 9 – серое) падает слева на первую пластину.

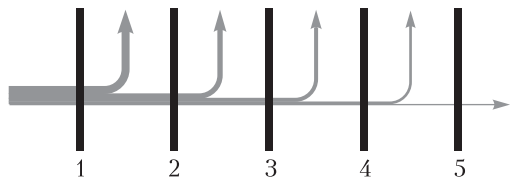


Рис. 9

На рисунке 10 слева схематично изображены две соседние пластины «зонта». Они параллельны между собой, разделены промежутком толщиной h , не соединены друг с другом. Каждая пластина нагрета и излучает энергию со своих поверхностей. Через закрашенную на рисунке 10 справа область

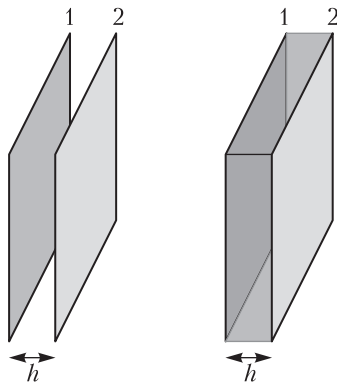


Рис. 10

(по периметру зазора между пластинами) излучение может выходить в окружающий космос. Для простоты будем считать следующее.

- Каждая пластина «зонта» – квадрат площадью $A_{\text{sheet}} = 200 \text{ м}^2$.
- Толщина промежутка между соседними пластинами всюду равна $h = 25 \text{ см}$.
- Пластины излучают рассеянный свет (диффузно). Поглощательная способность пластин («степень черноты») $\epsilon \ll 1$.
- Пластины тонкие, равномерно нагретые, температура каждой пластины одинакова на обеих ее поверхностях.
- Введем коэффициент α следующим образом. Пусть с правой поверхности пластины 1 была испущена энергия Q_1 , а αQ_1 – та доля этой энергии, которая оказалась поглощена пластиной 2, причем $\alpha \leq 1$.
- Пусть αQ_{12} – полный поток энергии от

пластины 1 к пластине 2. Тогда определим коэффициент $\beta < 1$ так, что потери энергии через закрашенную на правом рисунке область равны βQ_{12} – эта энергия безвозвратно рассеивается в окружающий космос.

- Температура окружающего вакуума нулевая.

С1. Выразите равновесные температуры 1-й и 5-й пластин через I_0 (интенсивность падающего солнечного излучения) и константы α и β , а также любые необходимые физические постоянные. Для упрощения выражений можете любые комбинации величин α и β обозначать как новые константы.

С2. Используя геометрические параметры пластин и считая их поглощательную способность равной $\epsilon = 0,05$, получите численные оценки для α и β .

С3. Рассчитайте численно температуры 1-й и 5-й пластин. Интенсивность солнечного излучения $I_0 = 1360 \text{ Вт/м}^2$.

Часть D. Охлаждение камеры (4 балла)

На последнем этапе работы охлаждающей системы гелий из области 1 (рис. 11) подается на пористую перегородку, после прохож-

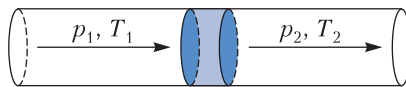


Рис. 11

дения которой он оказывается в области 2 и течет к CCD камере для ее охлаждения. Давления и температуры p_1, T_1 и p_2, T_2 поддерживаются постоянными. При прохождении пористой перегородки значительную роль играет преодоление сил вязкого трения газа о стенки пор. При этом тепло к газу не подводится и не отводится от него. Скорость течения газа в области 2 лишь незначительно выше скорости течения газа в области 1. Гелий в этой задаче нельзя считать идеальным газом, однако он все равно остается газообразным в течение всего процесса.

D1. Пусть 1 моль газа проходит через пористую перегородку. В листе ответов заполните таблицу, сравнив величины, используя знаки $>$, $<$, $=$ или $?$ (если без дополнительной информации нельзя сравнить величины).

D2. Через U (внутреннюю энергию), p (давление) и V (объем) выразите величину,

которая сохраняется при прохождении 1 моля газа через пористую перегородку. Приведите подтверждающие выкладки.

В листах ответов на графиках зависимости внутренней энергии (на единицу массы) от объема (на единицу массы) построены изоэнтальпии и линии постоянной энтропии (рис. 12, 13).

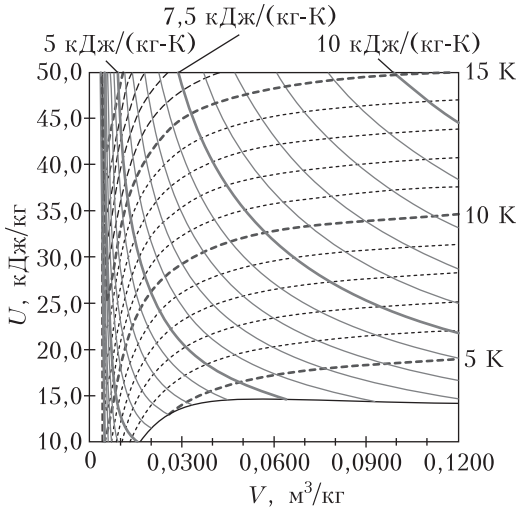


Рис. 12

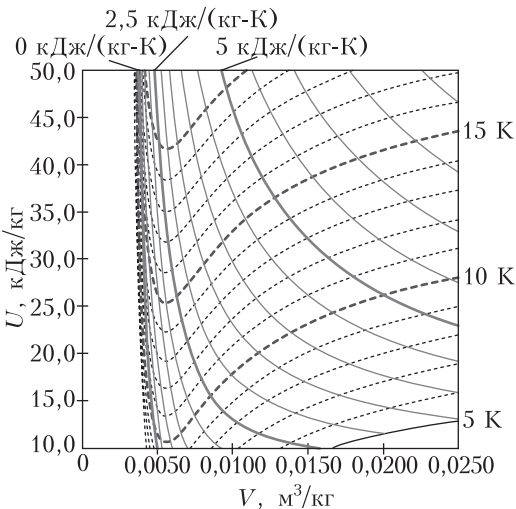


Рис. 13

D3. Принимая $V_2 = 0,100 \text{ м}^3/\text{кг}$ и $T_2 = 7,5 \text{ К}$ и используя график, рассчитайте численное значение сохраняющейся величины, полученной в пункте D2. Приведите все необходимые построения на графике.

D4. Найдите максимально возможную T_1 . Приведите все необходимые построения на графике.

D5. Рассчитайте значение p_1 , соответствующее полученному вами в пункте D4 максимальному значению T_1 .

Задача 3. Законы подобия

Законы подобия описывают функциональную зависимость между двумя физическими величинами, которые масштабированы одна по отношению к другой в пределах значительных диапазонов их изменений. Эта функциональная зависимость может быть степенным законом, но есть и другие варианты. Зачастую точные соотношения невозможно получить, но законы подобия получить можно.

Часть А. Спагетти (2 балла)

A1. Палочка спагетти диаметром d уравновешена в горизонтальном положении отно-

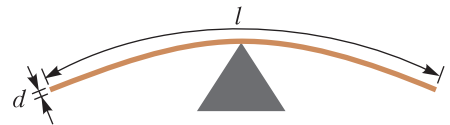


Рис. 14

сительно середины (рис. 14). Если $d = 1 \text{ мм}$, палочка ломается под собственным весом, когда ее длина достигает $l = 50 \text{ см}$. Какова максимальная длина l' палочки диаметром $d' = 1 \text{ см}$, при которой она не сломается под собственным весом?

Часть В. Замок из песка (2 балла)

B1. Средний объем песчинки крупнозернистого песка в 10 раз больше, чем у мелкозернистого песка. Мокрый мелкозернистый песок и мокрый крупнозернистый песок (в обоих случаях с оптимальным содержанием воды, обеспечивающим максимальную прочность сооружения из него) используются для создания двух цилиндров одинаковой формы и размеров. Прочность каждого цилиндра измеряется путем его сжатия между двумя параллельными пластинами. Цилиндр, сделанный из крупнозернистого (coarse-grained) песка, разрушается при силе сжатия пластин $F_c = 10 \text{ Н}$. Какая сила F_f нужна для разрушения цилиндра, сделанного из

мелкозернистого (fine-grained) песка? Силу тяжести не учитывайте.

Часть С. Межзвездное путешествие (2 балла)

С1. Космический корабль, совершающий межзвездное путешествие, движется с постоянным по величине «собственным» ускорением $g = 10 \text{ м/с}^2$, т.е. это ускорение корабля в инерциальной системе отсчета, в которой он в данный момент времени неподвижен. Пассажиры должны вернуться на Землю, прожив 50 лет. Максимальное расстояние, на которое корабль удалится от Земли, равно d . Если ускорение увеличить до $g' = 15 \text{ м/с}^2$, корабль сможет удалиться на расстояние d' . Чему равно отношение d'/d ?

Подсказка 1. Вы можете воспользоваться формулой для сложения релятивистских скоростей. Но есть и другие подходы.

Подсказка 2. Вам, возможно, понадобятся гиперболические функции: $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Подсказка 3. В зависимости от вашего подхода, вам могут понадобиться следующие интегралы: $\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{atanh} x + C$, $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{asinh} x + C$, $\int \sinh x dx = \cosh x + C$, где $\operatorname{asinh} x$ и $\operatorname{atanh} x$ – обратные функции от соответствующих гиперболических функций.

Часть D. Ощущение погружения (2 балла)

D1. Деревянный шар радиусом r_0 плавает в воде. Если пренебречь вязкостью, частота малых колебаний была бы ω_0 , но из-за вязкости частота затухающих колебаний при вертикальном смещении будет $0,99\omega_0$. Каков минимальный радиус r_{\min} плавающего в воде деревянного шара, испытывающего малые колебания после смещения?

Подсказка 4. Сила вязкого сопротивления, действующая на тело в данном случае, пропорциональна его скорости относительно неподвижной жидкости и коэффициенту вязкости жидкости η , в которой движется тело. Коэффициент вязкости измеряется в $\text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$.

Публикацию подготовил В.Шевченко

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Олимпиада «Покори Воробьевы горы!»

Математика

Олимпиада «Покори Воробьевы горы!» в 2021/22 учебном году состояла из двух этапов, каждый из которых проводился в онлайн формате. Победители и призеры отборочного этапа (ноябрь–декабрь 2021 г.) приглашались к участию в заключительном этапе (март 2022 г.). Приводим задачи заключительного этапа олимпиады.

Вариант 1 (5–9 классы)

В скобках после номера задачи указаны классы.

1 (5–6, 7–8). На острове живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят только правду, а лжецы всегда лгут. Однажды они собирали бананы и кокосы. Оказалось, что количество собранных бананов и количество собранных кокосов у всех разное. Каждый житель острова высказал два утверждения:

1) «Нет шести жителей, которые собрали бананов больше, чем я»,

2) «Хотя бы у семи жителей больше кокосов, чем у меня».

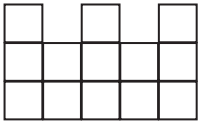
Могло ли это быть, и если да, сколько и каких жителей могло быть на острове? Укажите все возможные ответы.

2 (5–6). Назовем дату «палиндромом», если она слева направо и справа налево читается одинаково (точки не учитываются). Например, дата 22.02.2022 является палиндромом. Когда наступит ближайшая следующая дата-палиндром, записанная в таком же формате, как приведенная?

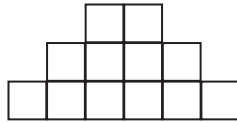
3 (5–6). Коля делал домашнюю работу: за 2 часа он успел сделать половину заданий по математике, $3/4$ заданий по физике и все задания по химии. А когда он полностью закончил работу, то обнаружил, что на задания по химии ушло 25% от общего времени. Известно, что если бы он делал только физику, то сделал бы все задания по ней за час. За какое время Коля сделал все задания? Считаем, что каждое задание по предмету требует для своего выполнения одного и того же времени.

4 (5–6, 7–8, 9). Будем обозначать \overline{abc} трехзначные числа, записанные цифрами a , b , c . Сколько существует трехзначных чисел таких, что разность $\overline{abc} - \overline{acb}$ делится на 72 без остатка?

5 (5–6, 7–8, 9). Петя строит замок из кубиков. В какой-то момент он изобразил недостроенный замок в трех проекциях: вид спереди, вид сбоку и вид сверху. Какое



Вид спереди



Вид сбоку

наименьшее количество кубиков может быть изображено на виде сверху?

6 (5–6, 7–8, 9). К середине XXII века человечество освоило 100 обитаемых планет в других звездных системах. От каждой планеты расходуется 40 гиперпространственных порталов, и к каждой планете ведет 40 порталов от других планет. Все порталы непересекающиеся и строго односторонние, т.е. если есть портал, ведущий из A в B , то нет портала, ведущего из B в A . Мистер Риггз хочет добраться с Галагеи-37 на Пандору за наименьшее число гиперпространственных прыжков. Сколько прыжков ему может потребоваться (укажите все варианты)?

7 (7–8, 9). Работники должны были вскопать несколько одинаковых грядок. В первый день работники вскопали 10 грядок,

причем каждый вскопал одинаковое количество (не обязательно целое число) грядок. На следующий день некоторые работники заболели COVID-19, и на работу вышло только 7 человек. Пришедшие работали половину рабочего дня с такой же производительностью, как и в первый день, и доделали оставшуюся работу. Сколько всего грядок было на подсобном участке?

8 (7–8). Найдите все пары натуральных чисел (x, y) , для которых выполнено равенство

$$(x + y)(x + y + 1) + 2y = 100.$$

9 (9). Найдите все пары натуральных чисел (x, y) , для которых выполнено равенство

$$(x + y)(x + y + 1) + y = 2022.$$

10 (9). Учитель выписал на доске квадратное уравнение

$$x^2 + ax + 2022 = 0.$$

Андрей подставил вместо a по очереди все целые числа от 0 до 99 и решил все из получившихся 100 уравнений. Найдите сумму всех получившихся у Андрея действительных корней этих уравнений. При необходимости округлите ответ до сотых.

Вариант 2 (10 класс)

1. Какое число окажется на 2022-м месте в бесконечной последовательности 12, 13, 14, 15, 16, 17, ..., если в ней удалить все квадраты и кубы каких-либо натуральных чисел (т.е. удалить числа $16 = 4^2$, $25 = 5^2$, $27 = 3^3$, ...)?

2. Решите неравенство

$$(18x^3 - 9x^2 - 2x + 1) \arccos(-2x - 1) \geq$$

$$\geq \arccos\left(\frac{1}{4 \sin 50^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \sin 40^\circ}\right).$$

3. Найдите количество натуральных делителей наибольшего целого значения выражения $xyz + xy + yz + zx + 2023$, если сумма отрицательных чисел x , y и z равна 2022.

4. Среди всех вписанных четырехугольников найдите четырехугольник $ABCD$ с наименьшим периметром, в котором $BC = CD = AD$ и все попарные расстояния между точка-

ми A, B, C и D выражаются целыми числами. Чему равна площадь этого четырехугольника?

5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства

$$|x^3 + 2x^2 + x - a| + |x^3 - 2x^2 + x + a| < 4x^2 - 8x$$

представляет собой на числовой прямой промежуток длиной 2.

Вариант 3
(11 класс)

1. Какое число окажется на 2022-м месте в бесконечной последовательности 6, 7, 8, 9, 10, ..., если в ней удалить все квадраты и кубы каких-либо натуральных чисел (т.е. удалить числа $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$, ...)?

2. Решите неравенство

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9)\arccos(x - 1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4 \cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \cos 50^\circ}\right).$$

3. Среди всех вписанных четырехугольников найдите четырехугольник $ABCD$ с наименьшим периметром, в котором $AB = BC = CD$ и все попарные расстояния между

точками A, B, C и D выражаются целыми числами. Чему при этом равен радиус описанной вокруг $ABCD$ окружности?

4. Последовательность a_n задана формулами

$$a_1 = \frac{4043}{2022}, \quad a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n.$$

Найдется ли натуральное число n такое, что $|a_n| \leq \frac{2022}{2021}$? Обоснуйте свой ответ.

5. В треугольной пирамиде $SABC$ в основании лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC . Боковые грани SAB и SAC перпендикулярны плоскости ABC . Сфера с радиусом, равным AC , и с центром в точке S делит пирамиду на две части. Найдите объем большей из этих частей, если $SA = AB = 2$.

6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства

$$|x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| < 4x^2 + 8x$$

представляет собой на числовой прямой промежуток длиной 1.

*Публикацию подготовили
Д.Алексеев, А.Зеленский, А.Козко*

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ России

Вступительные экзамены

Математика

Вариант 1

1. Упростите выражение

$$\frac{\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \sqrt{15}.$$

2. Имеются три раствора кислоты. Концентрация второго раствора в два раза больше концентрации первого. Если смешать 1 литр первого раствора и 2 литра третьего, то получится 25%-й раствор. Если смешать 2

литра второго раствора и 3 литра третьего, то получится 20%-й раствор. Найдите концентрацию третьего раствора.

3. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2 + 6x + 9} - 3}{(x^2 + 3x + 1)^2 - 1} \geq 0.$$

4. Каждый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии в 3 раза больше суммы всех следующих за ним членов. При этом 3-й член прогрессии на $\frac{3}{4}$ больше 4-го члена. Найдите первый член прогрессии.

5. Решите уравнение

$$\sin x - \cos x = (\sin x + \cos x) \cos 2x.$$

6. Решите неравенство

$$\log_x(x+1) \cdot \log_{(x+1)}(2x^2) \leq \\ \leq \log_x(4-x) \cdot \log_{(4-x)}(x^3).$$

7. В остроугольном треугольнике ABC биссектриса BM пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке D . Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ACD , если $AC = \sqrt{3}$, а радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 1.

8. При каких a система

$$\begin{cases} (3x - 4a - 4)(2x - a - 6) \leq 0, \\ x^2 + a^2 + 2a = 24 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Физика

Вариант 1

1. На брусок массой 4 кг, находящийся на гладком горизонтальном столе, действует сила 60 Н, направленная вверх под углом 30° к горизонту. С какой силой брусок давит на стол? Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

2. Газ, совершающий цикл Карно, отдает холодильнику $k = 0,8$ количества теплоты, получаемого от нагревателя. Определите температуру нагревателя, если температура холодильника 248 К.

3. Конденсатору емкостью 4 нФ сообщен заряд 1 мкКл. Обкладки конденсатора соединили проводником. Найдите количество теплоты, выделившееся в проводнике при разрядке конденсатора.

4. На проводник длиной 1 м с током силой 2 А в однородном магнитном поле с индукцией 0,1 Тл действует сила 0,15 Н. Какой угол составляет направление тока в проводнике с вектором магнитной индукции?

5. Чашка пружинных весов совершает гармонические колебания с периодом T вдоль вертикальной оси под действием легкой упругой пружины. Максимальная скорость чашки по модулю равна v_m . На каком расстоянии l от положения равновесия находится чашка в те моменты, когда ее скорость по модулю равна βv_m , где $\beta < 1$?

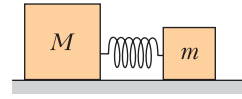


Рис. 1

6. Между двумя кубиками массами m и M находится сжатая пружина (рис. 1). Если кубик массой M удерживать на месте, а другой освободить, то он отлетает со скоростью v . С какой скоростью v_1 будет двигаться кубик массой m , если оба кубика освободить одновременно? Деформация пружины одинакова в обоих случаях. Трением и массой пружины пренебречь.

7. Проволоку общим сопротивлением R разрезали на два куска, длины которых относятся как 2:1, и подсоединили их параллельно к источнику ЭДС \mathcal{E} с внутренним сопротивлением $r = R/9$. Найдите мощность, которая будет выделяться на большем куске проволоки.

8. Стержень пролетает с постоянной скоростью мимо метки, неподвижной в лабораторной системе отсчета (ЛСО). Время пролета стержня мимо метки равно Δt . В системе отсчета, связанной со стержнем, метка движется вдоль стержня в течение времени Δt . Найдите собственную длину стержня L_0 .

Вариант 2

1. Автомобиль проехал по прямой 5 км, затем повернул под прямым углом и проехал еще 10 км. На сколько модуль вектора перемещения автомобиля больше пройденного им пути?

2. Человек поднимает груз массой 3 кг вертикально вверх на высоту 1 м с ускорением 2 м/с^2 . Найдите работу, которую совершил человек. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

3. К аккумуляторной батарее автомобиля с ЭДС 12 В и внутренним сопротивлением 0,02 Ом подключен стартер сопротивлением 0,1 Ом. Найдите разность потенциалов на клеммах батареи.

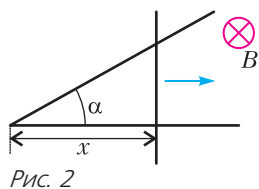
4. Волна красного света проходит через тонкую прозрачную пленку с показателем преломления 1,6. Толщина пленки $3,8 \cdot 10^{-5} \text{ м}$. Определите, сколько раз длина волны света в пленке укладывается на ее толщине, если длина волны в вакууме 640 нм. Волна падает на пленку перпендикулярно ее плоскости.

5. Два одинаковых тела массой m движутся с одинаковыми скоростями v навстречу друг другу вдоль экватора Земли. Радиус Земли равен R . Каково отношение сил давления тел на землю?

6. Горизонтально расположенный цилиндр длиной L разделен пополам закрепленным тонким невесомым поршнем. Слева от поршня давление p_1 , справа p_2 . На какое расстояние передвинется поршень, если его отпустить?

7. В вакууме в пространство между пластинами плоского конденсатора, подсоединенного к источнику постоянного напряжения, влетает заряженная частица параллельно пластинам и вылетает из него под углом $\varphi = 30^\circ$ к начальному направлению. Каков будет угол вылета (угол между векторами скорости на входе и выходе), если напряжение уменьшить в два раза? Силу тяжести не учитывать.

8. Длинную проволоку согнули под углом α так, что $\sin \alpha = 0,6$, и поместили в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,1$ Тл перпендикулярно линиям поля (рис. 2). Вдоль



сторон угла равномерно перемещают перемычку из такой же проволоки так, что она все время образует прямой угол с одной из его сторон. В начальный момент перемычка находится на расстоянии $x_1 = 0,2$ м, а через время $t = 1$ с – на расстоянии $x_2 = 0,6$ м от вершины угла. Какое количество теплоты выделилось в системе за это время? Сопротивление единицы длины проволоки $\rho = 0,01$ Ом/м.

Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных организаций

Математика

1 (9, 10 кл.). 100-значное число имеет вид $a = 1777\dots76$ (посередине – 98 цифр 7).

Число $\frac{1}{a}$ представили в виде бесконечной периодической дроби. Найдите ее период. Ответ обоснуйте.

2 (9, 10 кл.). Есть 5 клеток. Двое поочередно слева направо вписывают в эти клетки по одной из цифр 1 или 2. Если получившееся в итоге 5-значное число будет делиться на 3, то выиграет игрок, ходивший первым, а если не будет делиться на 3 – то ходивший вторым. Какой из игроков выиграет при правильной своей игре и любой игре соперника? Ответ обоснуйте.

3 (9, 10 кл.). Пусть A – множество всех таких целых чисел, которые представимы в виде $x^2 + 2y^2$, где x, y – целые числа. Пусть B – множество всех таких целых чисел, которые представимы в виде $x^2 - 6xy + 11y^2$, где x, y – целые числа (например, $6 \in A$, так как $6 = 2^2 + 2 \cdot 1^2$). Равны ли множества A и B ? Ответ обоснуйте.

4 (9, 10 кл.). Основания трапеции $ABCD$ (рис. 3) связаны соотношением $AD = 4BC$,

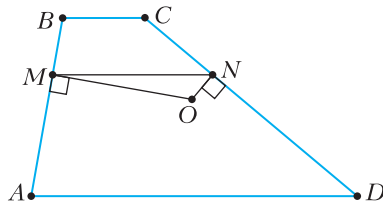


Рис. 3

сумма углов $\angle A + \angle D = 120^\circ$. На боковых сторонах выбраны точки M и N таким образом, что $CN : ND = BM : MA = 1 : 2$. Перпендикуляры, восстановленные в точках M и N к боковым сторонам трапеции, пересекаются в точке O . Найдите AD , если $AO = 1$.

5. Найдите количество цифр в десятичной записи числа а) (9, 10 кл.) 2^{120} , б) (11 кл.) 2^{100} , если известно, что десятичная запись числа 2^{200} содержит 61 цифру.

6. Обозначим через $a_{n,m}$ число, полученное записью подряд всех чисел от n до m включительно, здесь n и m – натуральные числа, причем $n > m \geq 1$. Так, например, число $a_{4,2} = 432$, а число $a_{11,7} = 1110987$. Докажите, что среди таких чисел есть число, делящееся а) (9, 10 кл.) на 2021, б) (11 кл.) на 2022.

7 (9, 10 кл.). Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} x^3 + x + y + 1 = 0, \\ yx^2 + x + y = 0, \\ y^2 + y - x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

не имеет решений.

8 (9, 10, 11 кл.). Зафиксируем 10 натуральных чисел n_1, n_2, \dots, n_{10} и обозначим через n их сумму: $n = n_1 + \dots + n_{10}$. Предположим теперь, что на доске в строчку записаны n чисел a_1, \dots, a_n , каждое из которых равно либо 0, либо 1. Эти числа (в том порядке, как они записаны) разбивают на 10 групп:

$$\underbrace{a_1, \dots, a_{n_1}}_{n_1}, \underbrace{a_{n_1+1}, \dots, a_{n_1+n_2}}_{n_2}, \dots, \underbrace{a_{n_1+\dots+n_9+1}, \dots, a_n}_{n_{10}}.$$

Группу назовем ненулевой, если в ней содержится хотя бы одна 1. В результате разбиения, в зависимости от того, какие числа a_1, \dots, a_n были взяты изначально, можно получить то или иное число ненулевых групп. Нас будут интересовать такие наборы a_1, \dots, a_n , которые при указанном разбиении дают четное число ненулевых групп. Докажите, что число таких наборов a_1, \dots, a_n (где количество ненулевых групп будет четно) находится по формуле

$$2^{n-1} + \frac{1}{2} \cdot (2^{n_1} - 2) \cdot (2^{n_2} - 2) \cdot \dots \cdot (2^{n_{10}} - 2).$$

9 (11 кл.). Есть 101 клетка. Двое поочередно слева направо вписывают в эти клетки по одной из цифр от 0 до 9. Если после заполнения всех клеток сумма всех записанных цифр будет делиться на 11, то выиграет игрок, ходивший первым, а если не будет делиться на 11 – то ходивший вторым. Какой из игроков выиграет при правильной своей игре и любой игре соперника? Ответ обоснуйте.

10 (11 кл.). Сократите дробь

$$\frac{2x^6 + 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 12x - 14}{4x^6 - 4x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 25x - 28}.$$

В результате сокращения степени многочленов в числителе и знаменателе должны уменьшиться.

11 (11 кл.). Решите уравнение

$$8 \cos^5 x - 5 \cos x - 2 \cos 3x = 1.$$

12 (11 кл.). Известно, что положительные числа x, y, z удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 529, \\ x^2 + z^2 + \sqrt{3}xz = 441, \\ z^2 + y^2 = 144. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $\sqrt{3}xy + 2yz + xz$.

13 (11 кл.). Решите уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 6xy$, где x и y – натуральные числа.

14 (9, 10, 11 кл.). На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки E и F таким образом, что угол EAF равен 45° . Длина стороны квадрата равна 1. Найдите периметр треугольника CEF . Решение обоснуйте.

15 (9, 11 кл.). Найдите площадь многоугольника, координаты вершин которого являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} x^4 + \frac{7}{2}x^2y + 2y^3 = 0, \\ 4x^2 + 7xy + 2y^3 = 0. \end{cases}$$

16 (9, 11 кл.). На сторонах AB и BC прямоугольника $ABCD$ (рис. 4) выбраны

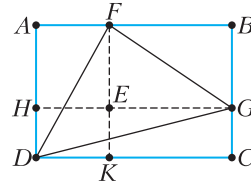


Рис. 4

точки F и G соответственно. На сторону CD из точки F опущен перпендикуляр FK . На сторону AD из точки G опущен перпендикуляр GH . Точка пересечения FK и GH обозначена через E . Найдите площадь треугольника DFG , если известно, что площади прямоугольников $ABCD$ и $HEKD$ равны 20 и 8 соответственно.

Физика 9 класс

1. Для схемы включения реостата с сопротивлением R (рис. 5) нарисуйте график зависимости общего сопротивления R_0 от сопротивления r левой (по рисунку) части реостата (до движка). (15 баллов)

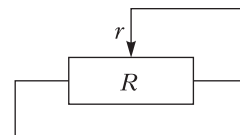


Рис. 5

2. В некотором тепловом процессе (в котором участвует идеальный газ) объем газа

зависит от температуры по закону $V = \alpha T^2$ ($\alpha = \text{const}$). Найдите отношение η конечного давления к начальному ($\eta = p_k/p_n$) в результате проведенного процесса, если занимаемый газом объем увеличился в k раз. (15 б.)

3. Тело бросили вертикально вверх. Через промежуток времени $\Delta t = 1$ с скорость тела уменьшилась в 2 раза. На какую максимальную высоту H поднимется тело? (15 б.)

4. Из однородного диска радиусом R вырезали круглое отверстие радиусом $r < R/2$, как показано на рисунке 6. Центр вырезан-

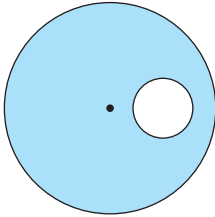


Рис. 6

ного отверстия находится на расстоянии $R/2$ от центра диска. Определите положение центра масс полученного изделия относительно центра диска. (25 б.)

5. На горизонтальном столе покоится груз массой M , коэффициент трения груза о стол μ . К грузу привязана невесомая и нерастяжимая нить, переброшенная через невесомый блок (рис. 7). К нити прикреплена

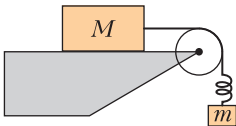


Рис. 7

невесомая пружина жесткостью k . Груз какой массы m надо прикрепить к свободному концу нерастянутой пружины, чтобы, падая, он смог сдвинуть груз массой M с места? (30 б.)

10 класс

1. Эскимос захотел построить иглу (жилище из льда). Для этого он нарезал ледяные блоки массой m_1 , а для их перевозки решил использовать сани. Положив один блок на сани, он стал горизонтально тянуть их с линейно увеличивающейся силой так, что через секунду сила равнялась n . Через время t_0 сани начали выскальзывать из-под

блока. Считая, что поверхность гладкая и горизонтальная, а коэффициент трения между санями и ледяным блоком равен μ , найдите массу саней m_2 . (20 баллов)

2. На берегу озера мальчик играл деревянной игрушкой и положил ее в воду. Найдите работу, которую надо совершить, чтобы полностью погрузить игрушку в воду. Деревянную игрушку считать цилиндром, при этом погружение цилиндра производилось основанием вниз и медленно. Радиус цилиндра 5 см, высота цилиндра 10 см, плотность дерева $0,5 \text{ г/см}^3$, плотность жидкости 1 г/см^3 . (20 б.)

3. Метеозонд сферической формы массой m и постоянного объема V наполнен гелием (He). Шар стартует с поверхности Земли при нормальном атмосферном давлении p , температуре T и плотности воздуха ρ , давление гелия равно атмосферному. Температуру атмосферного воздуха считать постоянной, объемом оболочки метеозонда пренебречь. Определите максимальную высоту подъема зонда h . (20 б.)

4. Во вселенной существуют нейтронные звезды, у которых масса немногим больше массы Солнца, а диаметр около 20 км. Они состоят в основном из нейтронов. У некоторых из них есть очень сильное магнитное поле с индукцией, достигающей 10^{11} Тл. Их называют магнитарами. Когда космический корабль пролетал вблизи магнитара, из-за столкновения с небольшим метеоритом оторвалась защитная крышка иллюминатора. Оцените ускорение, с которым будет падать крышка на звезду после отделения в тот момент, когда расстояние от нее до звезды $R = 1000000$ км, а индукция магнитного поля звезды $B = 5 \cdot 10^3$ Тл. Масса звезды $M = 2,8 \cdot 10^{30}$ кг, электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} \cdot \text{м}^{-1}$, гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1}$. Линии магнитного поля перпендикулярны направлению на центр звезды. Крышка металлическая и плоская, ее объем $V = 1 \text{ м}^3$ и масса $m = 10$ кг. (Считайте, что плоскость крышки параллельна линиям магнитного поля.) (20 б.)

5. В цилиндрическом сосуде, стоящем на горизонтальном столе, под поршнем массой M и площадью S находится вода. Поршень может свободно без трения перемещаться внутри цилиндра. Из небольшого бокового

отверстия в стенке сечением s , находящегося у дна сосуда, вытекает струя воды ($s \ll S$). Высота воды в сосуде равна h . Определите величину и направление силы трения покоя, действующей на сосуд. (20 б.)

11 класс

1. Мальчик съехал на санках с горы и въехал на горизонтальную дорогу, покрытую льдом. Коэффициент трения между полозьями санок и льдом $\mu_1 = 0,05$. Длина полозьев $l = 1$ м. Потом ледяная поверхность резко закончилась и началась снежная дорога. Коэффициент трения между полозьями санок и снегом μ_2 . В тот момент, когда расстояние от правого конца полозьев до начала стыка покрытия составляло l , модуль скорости санок был $v = 2$ м/с. При каком максимальном значении коэффициента трения μ_2 санки полностью въедут на снежную дорогу? (20 баллов)

2. См. задачу 4 для 10 класса. (20 б.)

3. В теплоизолированный сосуд, закрытый теплоизолированным поршнем, помещена смесь водяного пара и воды при температуре T (масса воды много меньше массы пара). Поршень сместили, в результате объем системы уменьшился, температура пара возросла на ΔT , причем $\Delta T \ll T$, а часть воды испарилась. Найдите отношение массы испарившейся воды к массе пара в исходном состоянии. Удельная теплота испарения при температуре T равна λ , пар можно считать идеальным газом с молярной теплоемкостью при постоянном объеме C_V . Теплоемкостью воды пренебречь. Также известно, что малые относительные изменения температуры $\Delta T/T$ связаны с относительными изменениями давления насыщенного пара $\Delta p/p$ соотношением $\Delta p/p = k\Delta T/T$, где k – положительная константа. Молярная масса воды равна M . (20 б.)

4. В океанологии при исследовании солевых и температурных стратификаций Мирового океана используется понятие частоты плавучести – частоты колебаний элемента жидкости, смещенного по вертикали из положения равновесия. Найдите частоту плавучести N маленького шарика, находящегося в слое жидкости с линейно возрастающей с увеличением глубины плотностью. Толщина слоя L , разность плотностей на его границах $\Delta\rho$. Шарик находится в равновесии на

глубине, где плотность жидкости равна ρ . (20 б.)

5. Группа специального назначения захватила секретную лабораторию, в которой был обнаружен прототип дрона, имеющего форму диска диаметром d и массой m , нижняя поверхность которого нагревается до температуры T , а верхняя поддерживается при температуре окружающей среды T_0 ($T_0 < T$). При какой величине T дрон сможет взлететь? Атмосферное давление у поверхности Земли равно p . (20 б.)

Математика и криптография

1 (8–10 классы). Решите уравнение $p^4 + q^2 = n^2$, где p и q – простые числа, а n – натуральное число.

2 (8–11 классы). Дана последовательность $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k$, состоящая из 0 и 1. Пусть N – количество чисел i от 1 до k таких, что $a_i = 0$ и $b_i = 1$. Докажите, что число последовательностей указанного вида, для которых N нечетно, находится по формуле $2^{2k-1} - 2^{k-1}$.

3 (8–11 классы). Петя использует для работы в интернете пароли из шести символов. Опасаясь злоумышленников, он решил в каждом пароле изменить порядок следования символов, используя для этого одно и то же *правило*, которое записал в книжечку. Правило могло выглядеть, например, так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Иными словами, первый символ ставится на третье место, второй – на шестое и так далее. В своем пароле для почты **qwerty** Петя переставил буквы по правилу из книжечки, а затем, для большей надежности, переставил буквы по этому же правилу еще раз. (Если использовать правило, как в примере, то из **qwerty** после первой перестановки получится **tyqerw**, а после второй – **rwtqey**.) а) Какие из нижеследующих комбинаций могли быть получены двойной перестановкой букв в пароле **qwerty** (используя, возможно, другие правила указанного вида):

yeqwrt, wqrtey, yqetwr,
wtqeyr, twyreq, ytqrew?

б) Петя потерял книжечку! Он помнит, что первоначально пароль был **qwerty**, но правило, по которому были в нем дважды пере-

ставлены буквы, не помнит. За какое наименьшее число попыток можно с гарантией подобрать утерянный пароль?

4 (8–11 классы). На вход устройства подается лента с записанными на ней нулями и единицами (рис. 8). За один такт устройство

Лента	00001100101011110100110101100...
Позиции	$\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3 \quad \rightleftarrows$

Рис. 8

считывает с ленты с позиций μ_1, μ_2, μ_3 (на первом такте $\mu_1 = 1$) три значения x, y, z . Если $x + y - z \geq 1$, то устройство на новой ленте печатает 1, иначе – 0. Затем устройство сдвигается на одну позицию вправо, и процедура повторяется. Найдите разности $d_1 = \mu_2 - \mu_1$ и $d_2 = \mu_3 - \mu_2$, если известно, что $d_1 + d_2 \leq 11$, а на новой ленте было напечатано следующее: 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 1... (для примера на рисунке 8 изображен случай $d_1 = 3, d_2 = 5$).

5 (8–11 классы). Знаками открытого и шифрованного текстов являются пары целых от 0 до 31. Для зашифрования используется секретный ключ k (целое число от 0 до 31), заданная таблично функция h (рис. 9), а также функция $g(c, d)$, которая паре целых чисел (c, d) ставит в соответствие пару $(d, c + h(d + k))$ (причем если число $d + k$ или $d + h(d + k)$ превышает 31, то их заменяют остатком от деления на 32). Знак шифрованного текста (b_1, b_2) получается из знака открытого текста (a_1, a_2) путем 128-кратного применения функции g :

$$(b_1, b_2) = g^{128}(a_1, a_2) = g(\dots g(g(a_1, a_2))).$$

Известно, что знак открытого текста $(21, 0)$ преобразовался в знак зашифрованного текста $(15, 25)$, знак $(7, 3)$ преобразовался в $(29, 5)$, $(0, 17)$ – в $(25, 4)$ и, наконец, $(5, 21)$ – в $(22, 9)$. Найдите ключ k .

6 (8–11 классы). Подписью битового сообщения (a_1, \dots, a_5) является любой битовый набор (x_1, \dots, x_{10}) , который удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} a_1 &= b_3 \oplus b_4 \oplus b_5, \\ a_2 &= b_2 \oplus b_4 \oplus b_5, \\ a_3 &= b_2 \oplus b_3 \oplus b_5, \\ a_4 &= b_1 \oplus b_2 \oplus b_3, \\ a_5 &= b_1 \oplus b_3 \oplus b_5, \\ b_1 &= x_1x_9 \oplus x_2x_{10} \oplus x_3x_8 \oplus x_4x_9 \oplus x_5x_9 \oplus x_6x_8 \oplus \\ &\oplus x_7x_8 \oplus x_9x_{10}, \\ b_2 &= x_1x_8 \oplus x_2x_9 \oplus x_3x_{10} \oplus x_4x_8 \oplus x_5x_{10} \oplus x_6x_{10} \oplus \\ &\oplus x_7x_8 \oplus x_8x_9, \\ b_3 &= x_1x_9 \oplus x_2x_{10} \oplus x_3x_8 \oplus x_4x_7 \oplus x_5x_8 \oplus x_6x_8 \oplus \\ &\oplus x_7x_8 \oplus x_8x_9 \oplus x_{10}, \\ b_4 &= x_1x_7 \oplus x_2x_{10} \oplus x_3x_{10} \oplus x_4x_7 \oplus x_5x_7 \oplus x_6x_{10} \oplus \\ &\oplus x_7x_{10} \oplus x_9x_{10}, \\ b_5 &= x_1x_8 \oplus x_2x_7 \oplus x_3x_7 \oplus x_4x_9 \oplus x_5x_9 \oplus x_6x_8 \oplus \\ &\oplus x_7x_8 \oplus x_8x_{10} \oplus x_9. \end{aligned}$$

Здесь \oplus – стандартная операция сложения битов: $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0, 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$. Найдите какую-нибудь подпись для сообщения $(0, 1, 0, 0, 0)$.

7 (11 класс). В Криптоландии используется алфавит, состоящий из четырех латинских букв a, b, c, d . Любая последовательность букв алфавита будет *словом* криптоландского языка при выполнении единственного ограничения: если в последовательности есть хоть одна буква «a», то тогда в ней обязательно должны встретиться две буквы «a» подряд. Например, последовательности *baacda, aabb, ddd* являются словами, а последовательности *bcadda, abba* – не являются. Найдите число слов длины 8 в криптоландском языке.

Публикацию по математике, а также по математике и криптографии подготовили С.Рамоданов, О.Шабанин, по физике – В.Попов, К.Дедушенко

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
$h(i)$	9	1	30	4	24	12	8	23	18	7	16	15	21	26	10	17	19	22	13	28	14	11	2	29	3	6	27	0	5	25	31	20

Рис. 9

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

(с.м. «Квант» №9)

1. Например, $7 \cdot 17 \cdot 17 - 1 = 2022$.
2. Пусть Таня положила на левую чашу 3 красных яблока, а на правую – 4 зеленых. Если бы Саша положил на одну чашу 2 яблока одного цвета, а на другую – остальные 5 яблок, то 5 яблок оказались бы тяжелее (это равносильно тому, что какие-то яблоки с одной чаши уравновешенных весов переложили на другую). Таким образом, чтобы весы остались в равновесии, Саша мог положить только два яблока разного цвета на одну чашу, а остальные 5 яблок на другую. Но это равносильно тому, что после взвешивания Тани он поменял местами два красных яблока и одно зеленое. Если их совсем убрать, то на одной чаше останется красное яблоко, а на другой – три зеленых, причем весы останутся в равновесии. Аналогичное рассуждение можно провести в алгебраической форме, составив два уравнения и найдя их разность.

3. 57.

Так как честные, называя свое количество, использовали только цифры 3, 5 или 7, то достаточно рассмотреть 9 вариантов для количества честных: 33, 35, 37, 53, 55, 57, 73, 75, 77.

Цифру 3 всего назвали 33 раза. Поэтому честных не 33 (тогда бы только они назвали ее 66 раз), не 35, не 37, не 53 и не 73 (тогда бы честные назвали ее соответственное число раз, большее 33).

Цифру 5 назвали 66 раз. Поэтому честных не 55 (тогда бы только они назвали ее 110 раз) и не 75 (тогда бы честные назвали ее 75 раз), а оба эти числа превышают 66.

Честных и не 77, иначе цифру 7 они назвали бы 154 раза. Осталась единственная возможность – 57 честных.

Это возможно во многих случаях, которые в решении приводить не обязательно. Например, если 9 хитрецов также написали 57, а из остальных лжецов и хитрецов 11 написали 33 и 11 написали 73.

4. 54.

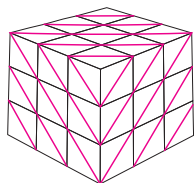


Рис. 1

Всего образовалось $9 \cdot 6 = 54$ квадрата и в каждом из них можно провести диагональ так, чтобы выполнялось условие задачи (рис. 1; на трех невидимых гранях диагонали симметричны проведенным относительно центра куба).

Калейдоскоп «Кванта»

1. 135° .
2. 4.
3. $\frac{16}{25}$.
4. 13.
5. $\frac{108}{121}$.
6. 5.
7. 72° .
8. 7.
9. 108° .
10. 48.

Международная физическая олимпиада

Задача 1

A1. $F_1 = \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi L^4} = 0,21$ мН (здесь $m = \frac{\pi}{4} d^2 h J = 0,75 \text{ A} \cdot \text{m}^2$ – магнитный момент магнита).

A2. $I = Jh = 2,4$ кА (молекулярные токи внутри сокращаются, остается только поверхностный ток).

A3. $F_2 = \frac{\mu_0 I^2 d}{2L} = 14$ Н (магниты заменены на прямые токи).

A4. $l = \frac{\mu_0 m^2 \pi^3}{60 M g \delta^3} = 6,6$ м (здесь $M = \frac{\pi}{6} \rho \delta^3$ – масса шарового магнита; цепочка порвется в верхней точке).

A5. $B = \frac{J \mu_0 \delta^2}{24 r^2}$.

B2. $F = \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi \delta^4} = 5,9$ Н.

B3. $F = \frac{3\pi}{32} J^2 \mu_0 d^2 = 210$ Н (магнитное поле в щели и в магните однородно и направлено перпендикулярно дискам).

C1. $W = \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi \delta^3} = 29$ мДж; антиферромагнитный порядок.

C2. $W = \frac{3\mu_0 m^2}{4\pi \delta^3} = 15$ мДж; ферромагнитный порядок.

Задача 2

A1. $d_i = (26 \pm 1)$ мкм.

A2. $35 \text{ мкм} \leq d_d \leq 47 \text{ мкм}$.

A3. Без дифракции: $T_i = \left(\frac{A}{\pi f^2} \right)^{1/4} T_g \approx (530 \pm 10) \text{ К}$;

с дифракцией: $T_i = \left(\frac{A}{2,73\pi f^2} \right)^{1/4} T_g \approx (320 \pm 10) \text{ К}$.

B1. $T = 1380 \text{ К}$.

B2. Погрешность как сумма квадратов: $\sigma_t^2 = \sigma_r^2 + (i_d + p)\tau$; как просто сумма: $\sigma_t = \sigma_r + \sqrt{i_d \tau} + \sqrt{p\tau}$.

B3. $0,206 \leq p \leq 0,25$.

B4. $I = (1,8 \pm 0,2) \cdot 10^{-22} \text{ Вт/м}^2$.

C2. $0,25 \leq \alpha \leq 0,35, 0,3 \leq \beta \leq 0,83$.

С3. $250 K \leq T_1 \leq 400 K$, $45 K \leq T_3 \leq 200 K$.

D1. $p_1 > p_2$, $U_1 > U_2$, $S_1 < S_2$, $V_1 < V_2$, $T_1 ? T_2$.

D2. $H = U + pV$.

D3. $40,5 \text{ кДж/кг} < H < 41 \text{ кДж/кг}$.

D4. $10 K \leq T_1 \leq 12 K$.

D5. $1,6 \text{ МПа} \leq p_1 \leq 2,4 \text{ МПа}$.

Задача 3

A1. $l' = 158 \text{ см}$. **B1.** $F_f = 21,5 \text{ Н}$. **C1.** $\frac{d'}{d} = 480$.

D1. $r_{\min} = 0,271 r_0$.

**Олимпиада
«Покори Воробьевы горы!»**

Математика

Вариант 1

1. 13 жителей: 6 рыцарей, 7 лжецов.

1) Если рыцарей больше 6, то рыцарь с наименьшим числом бананов солгал в первом утверждении, значит, рыцарей не больше 6. Если рыцарей меньше 6, то среди 6 человек, собравших наибольшее количество бананов, будет лжец, для которого первое утверждение окажется истинным, – такого быть не может. Значит, рыцарей ровно 6.

2) Если лжецов больше 7, то для лжеца с наименьшим количеством кокосов второе утверждение окажется истинным, чего быть не может. Лжецов меньше 7 тоже быть не может, поскольку тогда среди 7 человек, собравших наибольшее число кокосов, будет рыцарь, для которого второе утверждение будет ложным. Значит, лжецов ровно 7.

Пример: 6 рыцарей и 7 лжецов – любой рыцарь собрал больше бананов, чем любой лжец, а каждый лжец собрал кокосов больше, чем любой рыцарь. Все условия выполняются.

2. 03.02.2030.

Рассматриваем год (он однозначно задает палиндром). Проверим 2023 – не подходит (не бывает 32-го числа). Годы 2024, ..., 2029 пропускаем, поскольку первая цифра числа не может быть больше трех. Год 2030-й подходит.

3. 2 ч 48 мин.

Если бы Коля сделал половину заданий по трем предметам и плюс к этому еще половину заданий по химии, то на это ушло бы 50% всего времени и плюс 12,5% всего времени (так как на все задания по химии уходит 25% времени). С другой стороны, на это уйдет 2 часа минус время, необходимое для выполнения 1/4 задания по физике, т.е. 2 часа минус 15 минут. Таким образом, он потратил бы 1 час 45 мин на 62,5%

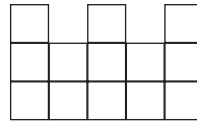
задания. Находим общее время из пропорции $\frac{\text{общее время}}{100} = \frac{105 \text{ мин}}{62,5}$, общее время = 168 мин.

4. 126.

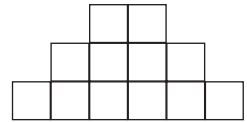
Разность $\overline{abc} - \overline{acb} = \overline{bc} - \overline{cb} = 10b + c - (10c + b) = 9(b - c)$ кратна 72, если $(b - c)$ кратно 8. Имеем 10 вариантов, если $b = c$, два варианта для $b - c = 8$ и два варианта для $b - c = -8$. Итого 14 комбинаций b, c умножаем на 9 вариантов a (число не может начинаться с нуля).

5. 7.

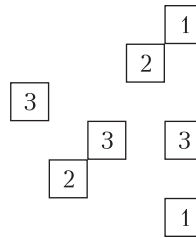
В конструкции должно быть не менее трех столбиков высоты 3, не менее двух высоты 2 и не менее двух высоты 1. Поэтому на виде сверху будет изображено не менее 7 кубиков. На рисунке 2 показано, что случай, когда их ровно 7, возможен.



Вид спереди



Вид сбоку



Вид сверху

*Цифра равна
высоте столбика*

Рис. 2

6. 1, 2 или 3.

Докажем, что кратчайший маршрут потребует не более 3 прыжков. Пусть нет прямого маршрута с Галатей на Пандору. Тогда разобьем планеты на 3 множества:

А – планеты, на которые ведут порталы с Галатей-37 (40 штук);

Б – планеты, с которых ведут порталы на Пандору, и сама Пандора (41 штука);

В – все остальные (включая Галатею).

Если множества А и Б имеют пересечение, то существует маршрут длины 1 или 2. Если пересечений нет, то В состоит из 19 планет.

С планет множества А выходит $40 \cdot 40 = 1600$ порталов. В планеты множества А ведут не более $40 \cdot \frac{39}{2} = 780$ из них. А в планеты множества В

ведут не более $40 \cdot 19 = 760$ из них. Всего получается $780 + 760 = 1540 < 1600$, следовательно, суще-

ствуют порталы, ведущие из А в Б. Тогда найдется маршрут длины 2 или 3.

7. 11.

Пусть n – число работников в первый день, m – число грядок, p – производительность одного работника, измеренная в грядках в день. Из первого условия $p \cdot n = 10$, из второго условия $7 \cdot p \cdot \frac{1}{2} = m - 10$. Выразим p из первого уравнения и подставим во второе: $\frac{35}{n} = m - 10$, следовательно, n является делителем 35. Но поскольку $n > 7$, то единственный вариант $n = 35$, откуда $m = 11$.

8. (4;5).

Если $x + y \geq 10$, то левая часть больше 110 и равенство невозможно.

Если $x + y \leq 8$, то $(x + y)(x + y + 1) \leq 8 \cdot 9 = 72$, поэтому $2y \geq 100 - 72 = 28$, что невозможно.

Остается вариант $x + y = 9$, при подстановке получим $90 + 2y = 100$, откуда $y = 5$, $x = 4$.

9. (2;42).

Аналогично решению задачи 8 покажите, что $x + y = 44$, далее $1980 + y = 2022$, откуда $y = 42$, $x = 2$.

Можно также записать цепочку неравенств

$$(x + y)(x + y + 1) < (x + y)(x + y + 1) + y = 2022,$$

и далее после замены $x + y = t$ получим $t^2 + t < 2022$ и $2022 < t^2 + 2t$. Единственное общее решение в натуральных числах $t = 44$.

10. -945.

Дискриминант уравнения, равный $a^2 - 4 \cdot 2022$, неотрицателен при $|a| \geq 2\sqrt{2022}$. Так как $89 = 2 \cdot 44,5 < 2\sqrt{2022} < 2 \cdot 45 = 90$, то уравнение имеет по 2 корня при всех $a \geq 90$, а при $a \in [0; 89]$ действительных корней не имеет. Так как сумма корней по теореме Виета равна $-a$, то сумма всех действительных корней равна $-(90 + 91 + 92 + \dots + 99) = -\frac{90 + 99}{2} \cdot 10 = -945$.

Вариант 2

1. 2083.

Среди чисел 1, 2, 3, 4, ..., N будет $\lceil \sqrt{N} \rceil$ чисел, которые являются полными квадратами, $\lceil \sqrt[3]{N} \rceil$ чисел, являющихся полными кубами, и $\lceil \sqrt[6]{N} \rceil$ чисел, из которых извлекается как вторая, так и третья степень.

Поэтому количество чисел в последовательности 1, 2, 3, 4, ..., N без полных квадратов и кубов выражается формулой $N - \lceil \sqrt{N} \rceil - \lceil \sqrt[3]{N} \rceil + \lceil \sqrt[6]{N} \rceil$.

Так как в последовательности 12, 13, 14, ..., N таких чисел будет на 7 меньше (это числа 2, 3, 5, 6, 7, 10 и 11), то решаем уравнение

$$N - \lceil \sqrt{N} \rceil - \lceil \sqrt[3]{N} \rceil + \lceil \sqrt[6]{N} \rceil - 7 = 2022.$$

а) Если $N < 2025 = 45^2$, то $N - \lceil \sqrt{N} \rceil - \lceil \sqrt[3]{N} \rceil + \lceil \sqrt[6]{N} \rceil < 2022$.

б) Если $45^2 = 2025 \leq N < 2116 = 46^2$, то $2197 = 13^3 > N > 12^3 = 1728$ и $4096 = 4^6 > N > 3^6 = 729$.

Значит, $N - \lceil \sqrt{N} \rceil - \lceil \sqrt[3]{N} \rceil + \lceil \sqrt[6]{N} \rceil = N - 45 - 12 + 3 = N - 54$. Тогда из уравнения $N - 54 = 2029$ получаем ответ $N = 2083$.

2. $x \in \{-1\} \cup \left[-\frac{1}{3}; 0\right]$.

Так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{4 \sin 50^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \sin 40^\circ} &= \\ &= \frac{\sin 30^\circ \cdot \sin 40^\circ + \cos 30^\circ \cdot \cos 40^\circ}{2 \sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ} = \\ &= \frac{\cos(40^\circ - 30^\circ)}{\sin 80^\circ} = 1, \end{aligned}$$

то получается неравенство

$$(18x^3 - 9x^2 - 2x + 1) \cdot \arccos(-2x - 1) \geq 0.$$

Левая его часть определена при $|-2x - 1| \leq 1$, поэтому $x \in [-1; 0]$. На этом отрезке первый сомножитель, равный $(2x - 1)(3x - 1)(3x + 1)$, неотрицателен при $x \in \left[-\frac{1}{3}; 0\right]$ и отрицателен при $x \in \left[-1; -\frac{1}{3}\right]$. Второй сомножитель всегда неотрицателен и равен нулю при $x = -1$. Отсюда получаем ответ.

3. 70.

Так как $xyz + xy + yz + zx + 2023 = (x + 1)(y + 1)(z + 1) - x - y - z - 1 + 2023 = (x + 1)(y + 1)(z + 1) \leq$

$$\leq \left(\frac{x + 1 + y + 1 + z + 1}{3}\right)^3 = \left(\frac{2022 + 3}{3}\right)^3 = 675^3,$$

то наибольшее целое значение выражения равно $675^3 = 3^9 \cdot 5^6$ и имеет $(9 + 1)(6 + 1) = 70$ натуральных делителей. Равенство достигается при

$$x = y = z = \frac{2022}{3} = 674.$$

4. $\frac{27\sqrt{7}}{4}$.

Так как хорды AB и CD равны, то равны и дуги AB и CD . Это означает, что $ABCD$ – трапеция с равными боковыми сторонами AB и CD . Пусть $AB = BC = CD = a$, $AD = b$, $AC = BD = c$. Высоту

$h = BH$ выразим по теореме Пифагора $h^2 = a^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$, тогда $c^2 = h^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = a^2 + ab$. Заметим, что это же можно было получить с помощью теоремы Птолемея: $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD \Leftrightarrow a^2 + ab = c^2$.

Таким образом, $c^2 = a(a+b)$, где a, b, c – натуральные числа. Кроме того, $3a > b$, т.е. $b \leq 3a - 1$. Если $a = 1$, то $b \in [1; 2]$ и уравнение $c^2 = 1(1+b)$ целых решений не имеет.

Если $a = 2$, то $b \in [1; 5]$ и уравнение $c^2 = 2(2+b)$ целых решений не имеет.

Если $a = 3$, то $b \in [1; 8]$ и уравнение $c^2 = 3(3+b)$ целых решений не имеет.

Если $a = 4$, то $b \in [1; 11]$ и уравнение $c^2 = 4(4+b)$ имеет единственное целое решение $b = 5, c = 6$. Тогда периметр равен 17.

При $a \geq 5$ периметр будет больше 17, так как если $3a + b \leq 17$, то $a = 5$. Но тогда или $b = 1, c^2 = 30$, или $b = 2, c^2 = 35$ – то и другое невозможно.

Итак, $AB = BC = CD = 4, AD = 5, AC = BD = 6$, периметр равен 17.

Тогда высота трапеции равна $\sqrt{4^2 - \left(\frac{5-4}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$, и площадь трапеции равна $\frac{4+5}{2} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{2} = \frac{27\sqrt{7}}{4}$.

5. -4; 8.

В силу представления $|a| + |b| = \max\{|a+b|, |a-b|\}$ исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x^3 + 2x < 4x^2 - 8x, \\ -2x^3 - 2x < 4x^2 - 8x, \\ 4x^2 - 2a < 4x^2 - 8x, \\ -4x^2 + 2a < 4x^2 - 8x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 2x + 5) < 0, \\ x(x+3)(x-1) > 0, \\ x < \frac{a}{4}, \\ (2x-1)^2 - a - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < 0, \\ x < \frac{a}{4}, \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{a+1}{4}. \end{cases}$$

а) Если $a < -1$, то $a+1 < 0$ и требуемое условие выполнено тогда и только тогда, когда

$$\frac{a}{4} = -1 \Leftrightarrow a = -4 (< -1).$$

б) Если $a \geq -1$, то $\frac{a}{4} > -1$ и требуемое условие выполнено тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{a+1}{4}} = -1 \Leftrightarrow a = 8 (\geq -1).$$

Вариант 3

1. 2079.

См. решение задачи 1 для 10 класса.

2. $x \in \left[0; \frac{3}{2}\right] \cup \{2\}$.

См. решение задачи 2 для 10 класса.

3. $\frac{8}{\sqrt{7}}$.

См. решение задачи 4 для 10 класса.

4. Да.

Переписав данную в условии формулу в виде $a_{n+1} = (a_n - 1)^3 + 1$, находим, что если $a_n = 1 + \varepsilon$, то $a_{n+1} = 1 + \varepsilon^3$. В предложенной задаче

$a_1 = 1 + \frac{2021}{2022}$, поэтому $a_2 = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^3, \dots, a_n = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}}$. Так как $a_n \leq \frac{2022}{2021}$, то $1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}} \leq 1 + \frac{1}{2021} \Leftrightarrow \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}} \leq \frac{1}{2021}$. Это неравенство

при достаточно больших n выполняется. Для того чтобы это утверждать, нужно или доказать, что предел этой последовательности равен 0, или

сделать оценку $3^{n-1} \geq \log_{\frac{2021}{2022}}\left(\frac{1}{2021}\right) \Leftrightarrow n \geq 1 + \log_3\left(\log_{\frac{2021}{2022}}\frac{1}{2021}\right)$, откуда следует, что для

любого $n \geq \left\lceil 1 + \log_3\left(\log_{\frac{2022}{2021}}2021\right) \right\rceil + 1$ неравенство выполняется.

5. $\frac{\pi(15 - 8\sqrt{2})}{9}$.

Из условия задачи вытекает, что ребро SA пирамиды перпендикулярно основанию ABC .

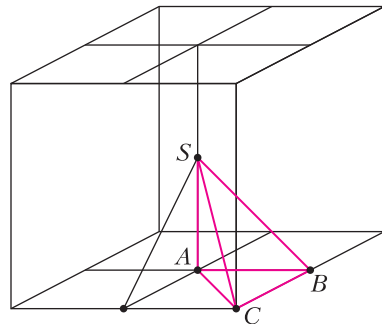


Рис. 3

Обозначим $SA = AB = a$. Пирамида $SABC$ является $1/48$ частью изображенного на рисунке 3 куба с ребром $2a$, причем все 48 пирамид, образующих этот куб, располагаются центрально-симметрично относительно общей вершины S . Поэтому искомым объемом есть $1/48$ объема тела, представляющего собой пересечение шара радиуса $R = \sqrt{2}a$ и данного куба (рис. 4). Это пересечение

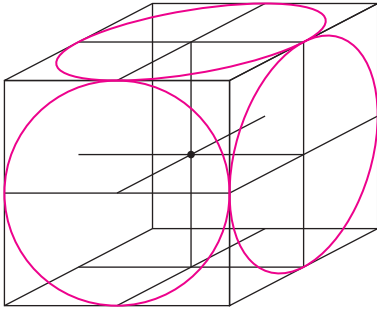


Рис. 4

есть шар без шести шаровых сегментов с высотой шарового сегмента $h = (\sqrt{2} - 1)a$.

Объем этого тела $V = \frac{4}{3}\pi R^3 - 6\pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi a^3(15 - 8\sqrt{2})$. Значит, искомым объемом ра-

вен

$$\frac{2}{3 \cdot 48} \cdot \pi a^3 (15 - 8\sqrt{2}) = \frac{\pi(15 - 8\sqrt{2})}{9}.$$

Отметим, что объем всей пирамиды равен

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} \cdot 2 = \frac{4}{3} \text{ (или, что то же самое, } 1/48 \text{ части}$$

куба, т.е. $\frac{4^3}{48} = \frac{4}{3}$). Несложно доказать, что

$$\frac{\pi(15 - 8\sqrt{2})}{9} > \frac{2}{3} \text{ — это подтверждает, что мы нашли именно объем большей части пирамиды.}$$

6. -24; 8.

См. решение задачи 5 для 10 класса.

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ России

Вступительные экзамены

Математика

Вариант 1

- 4.
- 32%.
- $x \in (-\infty; -6] \cup (-3; -2) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$.
- 16.
- $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

6. $(0; 1) \cup [2; 3) \cup (3, 4)$.

7. $\sqrt{3} - \frac{3}{2}$.

8. $a \in [-6; 2]$.

Физика

Вариант 1

1. $P = mg - F \sin \alpha = 10 \text{ Н.}$

2. $T_n = \frac{T_x}{k} = 310 \text{ К.}$

3. $Q = \frac{q^2}{2C} = 125 \text{ мкДж.}$

4. $\alpha = \arcsin \frac{F}{\Pi B} = \arcsin 0,75 = 40^\circ$.

5. $l = \frac{v_m T \sqrt{1 - \beta^2}}{2\pi}$.

6. $v_1 = v \sqrt{\frac{M}{m + M}}$.

7. $P = \frac{2e^2}{3R}$.

8. $L_0 = c \sqrt{(\Delta\tau)^2 - (\Delta t)^2}$ (здесь c — скорость света в вакууме).

Вариант 2

1. $x = \sqrt{l_1^2 + l_2^2} - (l_1 + l_2) = -4 \text{ км.}$

2. $A = m(a + g)h = 36 \text{ Дж.}$

3. $U = \varepsilon \frac{R}{R + r} = 10 \text{ В.}$

4. $N = \frac{ln}{\lambda_0} = 95$.

5. $\frac{F_1}{F_2} = \frac{T^2 Rg - (2\pi R + vT)^2}{T^2 Rg - (2\pi R - vT)^2}$, где T — период вращения Земли вокруг своей оси.

6. $x = \frac{L}{2} \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}$.

7. $\beta = \arctg\left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) \approx 16^\circ$.

8. $Q = \frac{B^2(x_2^2 - x_1^2)(x_2 - x_1) \operatorname{tg}^2 \alpha}{2\rho t \left(1 + \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}\right)} = 0,012 \text{ Дж.}$

Межрегиональная олимпиада школьников на базе межведомственных образовательных организаций

Математика

1. 99.

Заметим, что $a = 16 \cdot 111 \dots 11$. Последнее число b состоит из 99 единиц. По правилам перевода обыч-

новенной дроби в десятичную, $\frac{1}{b} = 0,(\underbrace{00\dots 09}_{99})$. Ее период равен 99. Тогда при умножении этой дроби на число $\frac{1}{16} = 0,0625$ период не изменится.

2. Второй игрок.

Напомним признак делимости числа на 3: целое число делится нацело на 3 тогда и только тогда, когда сумма всех его цифр делится нацело на 3. Приведем выигрышную стратегию для второго игрока. На каждом шаге, если первый напишет 1, второй напишет 2. Если первый напишет 2, второй напишет 1. В итоге на 4-м шаге сумма записанных цифр делится на 3. А значит, что бы вписал первый в 5-ю клетку, получившееся 5-значное число не будет делиться на 3.

3. Перепишем элементы множества B в виде $x^2 - 6xy + 11y^2 = (x - 3y)^2 + 2y^2$. Отсюда очевидно, что любой элемент множества A является элементом множества B и наоборот.

4. $\sqrt{3}$.

Продлим боковые стороны трапеции до их пересечения в точке S (рис. 5). Угол S равен 60° .

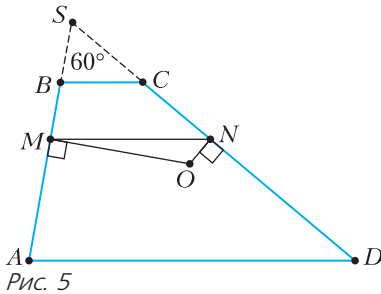


Рис. 5

Треугольники ASD и BSC подобны; коэффициент подобия равен 4. Кроме того, по условию AM вдвое длиннее BM . Отсюда несложно заметить, что $BS = BM$. Поэтому $AM = MS$. Следовательно, MO – серединный перпендикуляр к стороне AS . Аналогично, NO – серединный перпендикуляр к DS . Таким образом, точка O – центр описанной около треугольника ASD окружности, а AO – ее радиус. Запишем формулу для радиуса описанной окружности: $AO = \frac{AD}{2 \sin \angle S}$. Отсюда $AD = \sqrt{3}$.

5. а) 37; б) 31.

Чтобы понять, сколько цифр содержится в записи натурального числа a , надо найти такое неотрицательное целое число n , что будет справедливым неравенство $10^{n-1} \leq a < 10^n$. Такое число n , очевидно, единственно. (Например, $10^2 \leq 992 < 10^3$, поэтому в записи числа 992 три цифры.)

а) Надо найти такое целое неотрицательное n , что $10^n \leq 2^{120} < 10^{n+1}$. По условию $10^{60} \leq 2^{200} < 10^{61}$.

Возведя обе части в степень $\frac{3}{5}$, получим $10^{36} \leq 2^{120} < 10^{36+\frac{3}{5}}$. Значит, в десятичной записи числа 2^{120} содержится 37 цифр.

б) Надо найти такое целое неотрицательное n , что $10^{n-1} \leq 2^{100} < 10^n$. По условию $10^{60} \leq 2^{200} < 10^{61}$.

Возведя обе части в степень $\frac{1}{2}$, получим $10^{30} \leq 2^{100} < 10^{30+\frac{1}{2}}$. Значит, в десятичной записи числа 2^{100} содержится 31 цифра.

6. а) Рассмотрим числа вида $a_{n,1}$. Так как чисел указанного вида бесконечно много, то среди них найдутся два числа $a_{n,1}$ и $a_{k,1}$, $n > k$, имеющие одинаковые остатки от деления на 2021. Тогда разность $a_{n,1} - a_{k,1}$ делится нацело на 2021. При этом $a_{n,1} - a_{k,1} = a_{n,k+1} \cdot 10^{n-k}$. Так как числа 2021 и 10^{n-k} взаимно просты, то число $a_{n,k+1}$ делится нацело на 2021.

б) Рассмотрим числа вида $a_{n,1}$, где n – нечетное. Так как чисел указанного вида бесконечно много, то среди них найдутся два числа $a_{n,1}$ и $a_{k,1}$, $n > k$, имеющие одинаковые остатки от деления на 2022. Тогда разность $a_{n,1} - a_{k,1}$ делится нацело на 2022. При этом $a_{n,1} - a_{k,1} = a_{n,k+1} \cdot 10^{n-k}$ и число $a_{n,k+1}$ является четным. Так как $2022 = 2 \cdot 1011$ и числа 1011 и 10^{n-k} взаимно просты, то число $a_{n,k+1}$ делится нацело на 1011, а следовательно, и на 2022.

7. Заметим, что

$$y(x^3 + x + y + 1) - x(yx^2 + x + y) = y^2 + y - x^2 = 0,$$

что противоречит третьему равенству системы.

8. Искомое число наборов находим, суммируя количество наборов с заданным числом k ненулевых групп.

При $k = 0$ такой набор единственный;

при $k = 2$ имеем $\sum_{1 \leq i < j \leq 10} (2^{n_i} - 2) \cdot (2^{n_j} - 2)$;

при $k = 4$ имеем

$$\sum_{1 \leq i < j < l < s \leq 10} (2^{n_i} - 2) \cdot (2^{n_j} - 2) \cdot (2^{n_l} - 2) \cdot (2^{n_s} - 2);$$

при $k = 10$ имеем $(2^{n_1} - 2) \cdot (2^{n_2} - 2) \cdot \dots \cdot (2^{n_{10}} - 2)$.

Определим многочлены

$$\sigma_k(x_1, \dots, x_{10}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq 10} x_{i_1}, \dots, x_{i_k}.$$

Тогда искомое число равно

$$N = \sigma_0(2^{n_1} - 1, \dots, 2^{n_{10}} - 1) + \sigma_2(2^{n_1} - 1, \dots, 2^{n_{10}} - 1) + \dots + \sigma_{10}(2^{n_1} - 1, \dots, 2^{n_{10}} - 1).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \sigma_0(x_1, \dots, x_{10}) + \sigma_1(x_1, \dots, x_{10}) + \dots + \sigma_{10}(x_1, \dots, x_{10}) = \\ = (x_1 + 1) \cdot \dots \cdot (x_{10} + 1); \end{aligned}$$

$$\sigma_0(-x_1, \dots, -x_{10}) + \sigma_1(-x_1, \dots, -x_{10}) + \dots + \sigma_{10}(-x_1, \dots, -x_{10}) = (-x_1 + 1) \cdot \dots \cdot (-x_{10} + 1);$$

$$\begin{aligned} & \sigma_0(x_1, \dots, x_{10}) + \sigma_1(x_1, \dots, x_{10}) + \dots + \sigma_{10}(x_1, \dots, x_{10}) + \\ & + \sigma_0(-x_1, \dots, -x_{10}) + \sigma_1(-x_1, \dots, -x_{10}) + \dots \\ & \dots + \sigma_{10}(-x_1, \dots, -x_{10}) = 2(\sigma_0(x_1, \dots, x_{10}) + \\ & + \sigma_2(x_1, \dots, x_{10}) + \dots + \sigma_{10}(x_1, \dots, x_{10})). \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} & \sigma_0(x_1, \dots, x_{10}) + \sigma_2(x_1, \dots, x_{10}) + \dots + \sigma_{10}(x_1, \dots, x_{10}) = \\ & = \frac{1}{2}((x_1 + 1) \cdot \dots \cdot (x_{10} + 1) + (-x_1 + 1) \cdot \dots \cdot (-x_{10} + 1)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2} \cdot 2^{n_1} \cdot \dots \cdot 2^{n_{10}} + (-2^{n_1} + 1 + 1) \cdot \dots \cdot (-2^{n_{10}} + 1 + 1) = \\ &= 2^{n-1} + \frac{1}{2} \cdot (2^{n_1} - 2) \cdot \dots \cdot (2^{n_{10}} - 2). \end{aligned}$$

9. Первый.

Выигрышная стратегия будет у первого игрока. Опишем ее.

Чтобы выиграл первый игрок, нам необходимо, чтобы на 101-м шаге сумма всех цифр делилась на 11, т.е. остаток от деления на 11 был равен 0. Мы сможем это обеспечить тогда и только тогда, когда после 100-го шага сумма всех цифр будет давать любой остаток от деления на 11, кроме 1. Чтобы это гарантировать, после 99-го шага сумма должна давать остаток 2. Это получится, если на 98-м шаге остаток будет любым, кроме 3. Тогда первому игроку на 97-м шаге надо обеспечить остаток 4, на 95-м остаток 6, на 93-м остаток 8, на 91-м остаток 10, на 89-м остаток 1 и так далее, на 3-м остаток 10, на 1-м остаток 1.

10. Например, $\frac{x^3 + 2x + 2}{2x^3 - 3x + 4}$.

Найдем наибольший общий делитель многочленов, стоящих в числителе и знаменателе, используя алгоритм Евклида. Для этого поделим с остатком знаменатель на числитель. Поскольку

$$\begin{aligned} 4x^6 - 4x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 25x - 28 &= \\ &= 2 \cdot (2x^6 + 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 12x - 14) - \\ &\quad - 14x^4 - 7x^2 + 49, \end{aligned}$$

то в результате деления получим остаток $-14x^4 - 7x^2 + 49$. Теперь числитель (который сейчас выступал в роли делителя) поделим (например, «уголком») на остаток:

$$\begin{aligned} 2x^6 + 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 12x - 14 &= \\ &= (-14x^4 - 7x^2 + 49) \cdot \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{2}{7}\right) + 4x^3 + 2x - 14. \end{aligned}$$

Далее надо опять разделить делитель на остаток. В этот раз остаток от деления оказывается равным нулю:

$$-14x^4 - 7x^2 + 49 = -\frac{7x}{2} \cdot (4x^3 + 2x - 14).$$

Это означает, что многочлен $4x^3 + 2x - 14$ является искомым наибольшим общим делителем числителя и знаменателя исходной дроби и он может быть «вынесен за скобки» (чтобы избежать появления дробных коэффициентов, будет удобнее использовать многочлен $2x^3 + x - 7$).

Итак,

$$\begin{aligned} \frac{2x^6 + 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 12x - 14}{4x^6 - 4x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 25x - 28} &= \\ &= \frac{(2x^3 + x - 7) \cdot (x^3 + 2x + 2)}{(2x^3 + x - 7) \cdot (2x^3 - 3x + 4)}. \end{aligned}$$

11. $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Выразите $\cos^5 x$ через $\cos 5x$. Тогда исходное уравнение приведет к виду $\cos 5x + \cos 3x = 2$. Последнее равенство возможно только при выполнении условия

$$\begin{cases} \cos 5x = 1, \\ \cos 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

12. $224\sqrt{5}$.

Рассмотрим треугольник ABC с выбранной внутри него точкой O такой, что $AO = y$, $OB = z$, $OC = x$, $\angle AOB = 90^\circ$, $\angle AOC = 120^\circ$, $\angle BOC = 150^\circ$ (рис. 6).

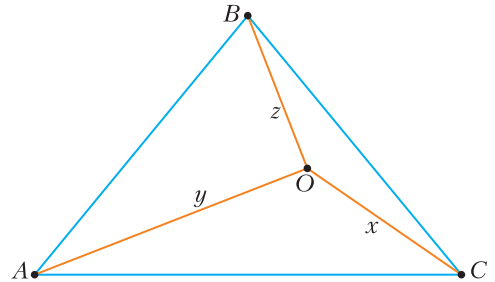


Рис. 6

Условия системы представляют собой теорему косинусов (в том числе теорему Пифагора) для треугольников AOB , AOC , BOC .

Отсюда нетрудно понять, что $AB = 12$, $BC = 21$, $AC = 23$. Теперь заметим, что

$$\sqrt{3}xy + 2yz + xz = 4(S_{AOC} + S_{AOB} + S_{BOC}) = 4S_{ABC}.$$

Площадь треугольника ABC найдем по формуле Герона:

$$p = \frac{12 + 21 + 23}{2} = 28, \quad S_{ABC} = 56\sqrt{5}.$$

Следовательно, $4S_{ABC} = 224\sqrt{5}$.

13. Таких пар нет.

Докажем вспомогательное утверждение.

Утверждение. Пусть пара натуральных чисел (x_0, y_0) удовлетворяет исходному уравнению

$$x^2 + y^2 + 1 = 6xy. \quad (1)$$

Тогда

1) $x_0 \neq y_0$;

2) уравнение (1) имеет еще одно решение в натуральных числах $(6y_0 - x_0, y_0)$.

Доказательство. 1) Положив $x_0 = y_0 = a$ и подставив в (1), получим $2a^2 + 1 = 6a^2$. Очевидно, что $a \notin \mathbb{N}$.

2) По условию, число x_0 является корнем многочлена

$$\psi(x) = x^2 - 6y_0x + y_0^2 + 1. \quad (2)$$

По теореме Виета, этот многочлен еще имеет корень x_2 , причем $x_2 + x_0 = 6y_0$, $x_2x_0 = y_0^2 + 1$. Отсюда следует, что $x_2 = 6y_0 - x_0$ и $x_2 \in \mathbb{N}$.

Утверждение доказано.

Предположим, что какое-то решение (x_0, y_0) уравнения (1) найдено. Без ограничения общности можно считать, что в этой паре $x_0 > y_0$ (неравенство строгое в силу пункта 1 утверждения). Будем это записывать как $\max(x_0, y_0) = x_0$. Согласно утверждению, уравнение (1) еще имеет решение $(6y_0 - x_0, y_0)$. Это означает, что для многочлена (2) справедливы равенства $\psi(x_0) = \psi(6x_0 - y_0) = 0$. Заметим, что $\psi(y_0) = y_0^2 - 6y_0^2 + 1 < 0$. Поэтому число y_0 лежит между корнями многочлена (2), а именно: $x_0 > y_0 > 6y_0 - x_0$. Значит, $\max(6y_0 - x_0, y_0) = y_0 < \max(x_0, y_0)$. Итак, для любого решения (x_0, y_0) существует другое решение, у которого максимальный элемент окажется меньше. Таким образом, мы можем строить новые решения, у которых максимальный элемент становится все меньше. Но при этом этот максимальный элемент, постоянно уменьшаясь, остается натуральным числом, что невозможно. Пришли к противоречию. Значит, исходное уравнение (1) решений в натуральных числах не имеет.

14. 2.

Если отразить точку D относительно прямой AF , а затем относительно прямой AE , то она перейдет в точку B (рис. 7). Действительно, композиция двух осевых симметрий относительно пересекающихся прямых – это поворот на удвоенный угол между прямыми. Следовательно, в нашем случае эти две симметрии эквивалентны повороту на угол 90° относительно точки A .

Это означает, что образ точки D при симметрии относительно AF и образ точки B при симметрии

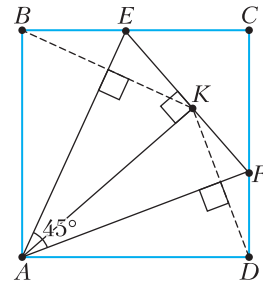


Рис. 7

относительно AE – это одна и та же точка; на рисунке она обозначена K . Из точки K отрезки AE и AF видны под углом 90° (при симметрии сохраняются величины углов, поэтому, например, углы $\angle ABE$ и $\angle AKE$ равны). Значит, точка K – это основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую EF .

И, наконец, поскольку $BE = EK$ и $DF = FK$ (при симметрии длины отрезков сохраняются), видим, что периметр треугольника CEF равен сумме длин сторон BC и CD квадрата.

15. $16\frac{1}{2}$.

Система уравнений в условии имеет всего три действительных решения: $(0; 0)$, $(2; -1)$, $(-\frac{11}{2}; -\frac{11}{2})$. Площадь треугольника, вершины которого имеют такие координаты, равна $16\frac{1}{2}$.

16. 6.

Пусть $AD = a$, $DC = b$, $HD = x$, а $DK = y$. Тогда

$$\begin{aligned} S_{DFG} &= S_{ABCD} - S_{AFD} - S_{FGB} - S_{DGC} = \\ &= ab - \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}(b-y)(a-x) - \frac{1}{2}bx = \\ &= ab - \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}bx = \\ &= \frac{ab - xy}{2} = \frac{S_{ABCD} - S_{HEKD}}{2} = 6. \end{aligned}$$

Физика

9 класс

1. См. рис. 8 $\left(R_0 = \frac{(R-r)r}{(R-r)+r} = \frac{Rr-r^2}{R} \right)$.

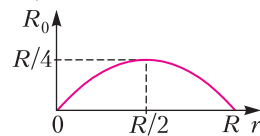


Рис. 8

2. $\eta = \sqrt{\frac{1}{k}} = k^{-1/2}$.

$$3. H = 2g(\Delta t)^2 = 20 \text{ м (если принять } g = 10 \text{ м/с}^2\text{)}.$$

4. Центр масс фигуры находится на расстоянии

$$x = \frac{Rr^2}{2(R^2 - r^2)} \text{ слева от центра однородного диска.}$$

$$5. m > \frac{\mu M}{2}.$$

10 класс

$$1. m_2 = \frac{nt_0}{\mu g} - m_1.$$

$$2. A = \frac{1}{2} \rho_{\text{ж}} g \pi R^2 h^2 \left(1 - \frac{\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{ж}}}\right)^2 \approx 0,1 \text{ Дж.}$$

3. $h = \frac{p}{\rho g} \ln \frac{\rho VRT}{RTm + pMV}$ (воспользуйтесь барометрической формулой изменения давления, а значит, и плотности воздуха с высотой; M – молярная масса гелия).

$$4. a = \frac{GMm}{R^2(m + \epsilon_0 B^2 V)} \approx 1,9 \cdot 10^3 \text{ м/с}^2.$$

$$5. F_{\text{тп}} = 2gs \left(\rho h + \frac{M}{S} \right).$$

11 класс

$$1. \mu_2 = \frac{v^2}{gl} - 3\mu_1 = 0,25.$$

$$3. \eta = \frac{(k-1)R - C_V}{M\lambda + RT} \Delta T.$$

$$4. N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g \Delta \rho}{L \rho}}.$$

$$5. T \geq T_0 \left(\frac{4mg}{\pi d^2 p} + 1 \right)^2.$$

Математика и криптография

1. $p = 2, q = 3, n = 5$.

2. Примените метод математической индукции по параметру k .

3. а) Полученные двойной перестановкой комбинации: yqetwr и ytgrew. б) 270.

4. $d_1 = 2, d_2 = 6$.

5. $k = 19$.

6. Сначала решим систему линейных уравнений и определим значения (b_1, \dots, b_5) . Потом в квадратичной системе от переменных x_1, \dots, x_{10} зафиксируем значения переменных x_7, x_8, x_9, x_{10} произвольным образом и решим полученную систему линейных уравнений относительно оставшихся переменных. Если получится несовместимая система линейных уравнений, то необходимо зафиксировать значения переменных x_7, x_8, x_9, x_{10} другим образом.

7. 27466.

ЕГЭ по физике

(см. «Квант» №9)

Ответы к заданиям 1–23

№ задания	Ответ	№ задания	Ответ
1	24	13	11
2	125	14	205
3	–4	15	1
4	4500	16	2
5	12	17	234
6	12	18	32
7	13	19	12
8	23	20	3
9	1,5	21	13
10	1,5	22	0,250,05
11	4	23	13
12	15		

Решения задач 24–30

24. По условию задачи сопротивлением амперметра можно пренебречь, а сопротивление вольтметра бесконечно велико. При перемещении движка вправо сопротивление реостата R_2 увеличивается, что ведет к увеличению сопротивления R всей внешней цепи: $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. В соответствии с законом Ома для полной цепи сила тока через амперметр уменьшается: $I = \frac{\mathcal{E}}{r + R}$. Напряжение, измеряемое вольтметром, при этом растет: $U = IR = \mathcal{E} - Ir$.

25. В случае гармонических колебаний максимальная потенциальная энергия пружины равна максимальной кинетической энергии тележки: $\frac{kA^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$, где k – жесткость пружины, A – амплитуда колебаний тележки, m – масса тележки, v – максимальная скорость тележки. В итоге получим

$$v = A \sqrt{\frac{k}{m}} = 1 \text{ м/с.}$$

26. Мощность импульса $p = \frac{NE}{t}$, где N – число излученных фотонов, $E = h \frac{c}{\lambda}$ – энергия одного фотона, t – длительность импульса. Получаем

$$t = \frac{NE}{p} = \frac{Nhc}{\lambda p} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

27. Водяной пар в воздухе до момента конденсации является разреженным газом и описывается уравнением Менделеева–Клапейрона $pV = \frac{m}{M} RT$, где p – парциальное давление пара, m – масса пара в рассматриваемом объеме V , T – абсолют-

ная температура, а $M = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная массы воды. При комнатной температуре T_1 и парциальном давлении p_1 в выделенном объеме V содержится $m_1 = M \frac{p_1 V}{RT_1}$ водяного пара, а в выдыхаемом воздухе при температуре T_2 и парциальном давлении p_2 содержится $m_2 = M \frac{p_2 V}{RT_2}$. Масса испаренной воды в этом объеме равна

$$m = m_2 - m_1 = M \frac{p_2 V}{RT_2} - M \frac{p_1 V}{RT_1} = \frac{MV}{R} \left(\frac{p_2}{T_2} - \frac{p_1}{T_1} \right).$$

При $t_1 = 20^\circ\text{C}$ ($T_1 = 293\text{ K}$) и относительной влажности 40% парциальное давление водяного пара $p_1 = 0,4 p_{н1} = 936\text{ Па}$, а при $t_2 = 34^\circ\text{C}$ ($T_2 = 307\text{ K}$) и относительной влажности 100% парциальное давление водяного пара $p_2 = p_{н2} = 5320\text{ Па}$, где $p_{н1}$ и $p_{н2}$ – давления насыщенного водяного пара при температурах t_1 и t_2 соответственно. Через легкие за 1 мин проходит 15 л воздуха, а за 1 ч – 900 л, т.е. $V = 0,9\text{ м}^3$. Подставляя значения физических величин, получим количество потерянной за час воды:

$$m = \frac{MV}{R} \left(\frac{p_2}{T_2} - \frac{p_1}{T_1} \right) \approx 27,6 \cdot 10^{-3}\text{ кг} = 27,6\text{ г}.$$

28. Центростремительное ускорение иона в конденсаторе $a = \frac{v^2}{R}$ определяется силой $F = qE$, действующей со стороны электрического поля. По второму закону Ньютона $qE = m \frac{v^2}{R}$, где q , m и v – соответственно заряд, масса и скорость иона, E – напряженность электрического поля. Отсюда $R = m \frac{v^2}{qE}$. Если заряд иона q увеличивается в 2 раза, то для сохранения прежнего значения радиуса траектории при прежней скорости напряженность поля нужно уменьшить в 2 раза. Поскольку напряженность электрического поля прямо пропорциональна напряжению между обкладками конденсатора: $U = Ed$ (d – расстояние между обкладками конденсатора), то напряжение U нужно уменьшить в 2 раза.

29. По формуле тонкой линзы определим первоначальное положение изображения источника на главной оптической оси (рис. 9):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{d}, \quad f = \frac{Fd}{d - F} = 2F.$$

Определим расстояние d' от источника до плоскости линзы после поворота линзы (рис. 10): $d = d \cos \alpha$, а также расстояние f' от изображе-

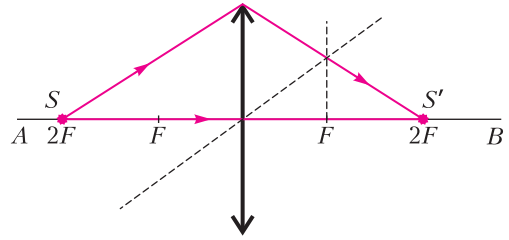


Рис. 9

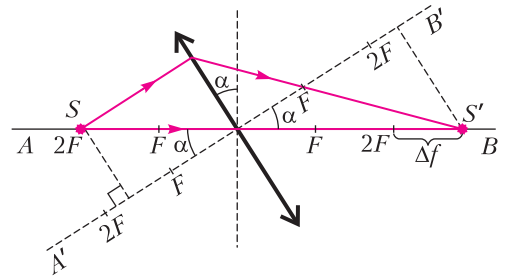


Рис. 10

ния источника до плоскости линзы после поворота в соответствии с формулой линзы

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{d'} + \frac{1}{f}.$$

Здесь $f' = (f + \Delta f) \cos \alpha$, где Δf – смещение изображения источника вдоль исходной главной оптической оси AB . Получим конечное выражение для $\cos \alpha$ в аналитическом и числовом видах:

$$\cos \alpha = \frac{F(d + f + \Delta f)}{d(f + \Delta f)} = \frac{F(d + 2F + \Delta f)}{d(2F + \Delta f)} = 0,9,$$

откуда

$$\alpha = \arccos 0,9.$$

30. Задачу будем решать в инерциальной системе отсчета, связанной со столом. При нахождении ускорений тел будем применять второй закон Ньютона, сформулированный для материальных точек, поскольку тела движутся поступательно. Трением в оси блока и о воздух пренебрежем; блок будем считать невесомым. На рисунке 11 показаны силы, действующие на брусок и на груз. Так как нить нерастяжима, ускорения бруска и груза равны по модулю: $a_1 = a_2 = a$. Так как блок и нить невесомы и трения в блоке нет, то силы натяжения нити, действующие на груз и брусок, одинаковы по модулю:

$$T_1 = T_2 = T.$$

Запишем второй закон Ньютона в проекциях

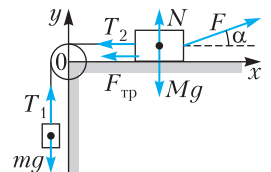


Рис. 11

на оси x и y выбранной системы координат:

$$F \cos \alpha - T - F_{\text{тр}} = Ma,$$

$$N + F \sin \alpha = Mg,$$

$$T - mg = ma.$$

Сила трения, действующая на брусок, равна

$$F_{\text{тр}} = \mu N.$$

Решая полученную систему уравнений, найдем ускорение тел:

$$a = \frac{F(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) - mg - \mu Mg}{M + m}.$$

Так как начальная скорость груза была равна

$$\text{нулю, то } L = \frac{v^2}{2a}.$$

Окончательно получим

$$v = \sqrt{2aL} =$$

$$= \sqrt{2L \frac{F(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) - mg - \mu Mg}{M + m}} \approx 0,7 \text{ м/с.}$$

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

(см. «Квант» №9)

Математика

Отборочный тур

1. 107. 2. 20. 3. 3. 4. 9. 5. 35. 6. 10. 7. 64. 8. 7. 9. 130. 10. 2300.

Заключительный тур

1. 4.

Пусть a и b – цифры двузначного числа n . Тогда $n = 10a + b$, а число m , полученное из n перестановкой цифр, равно $10b + a$. Сумма $n + m$ равна $11a + 11b$ и делится на 11. Если скоро n дает остаток 8 при делении на 11, то m дает остаток 3. Поэтому остаток от деления числа $16n + 10m$ на 11 равен 4.

2. $(-1, -1)$.

Неравенство можно переписать в виде

$$(x+1)^2 - (x+1)(y+1) + (y+1)^2 \leq 0.$$

Поскольку выражение

$$2U^2 - 2UV + 2V^2 = U^2 + V^2 + (U - V)^2$$

принимает строго положительные значения всякий раз, когда $(U, V) \neq (0, 0)$, то единственным решением неравенства является пара $(-1, -1)$.

3. $\sqrt[2]{2}$.

Пусть $n \leq m$. Тогда $n^n \leq m^m$ и $\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[m]{m}$, $\min\{\sqrt[n]{n}, \sqrt[m]{m}\} = \sqrt[n]{n}$. Последний корень окажется наибольшим при $m = n$. Искомое значение следует искать среди чисел вида $\sqrt[n]{n}$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \ln \sqrt[n]{x} = \frac{\ln x}{x}$. Эта

функция имеет производную $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$

при $x > e$ и потому убывает. Наибольшим значением $z = e^{f(n)}$ оказывается $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$.

4. -2.

Прямая $y = b$ окажется осью симметрии графика функции $f(x) = x^4 + ax^3 + x$ в том и только том случае, если при всех t выполняется равенство $f(b-t) = f(b+t)$. Поскольку

$$\begin{aligned} f(b+t) - f(b-t) &= ((b+t)^4 + a(b+t)^3 + (b+t)) - \\ &- ((b-t)^4 + a(b-t)^3 + (b-t)) = \\ &= 2(4b^3t + 4bt^3 + 3ab^2t + at^3 + t), \end{aligned}$$

мы приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 4b^3 + 3ab^2 + 1 = 0, \\ 4b + a = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем $a = -4b$. Подставляя это значение a в первое уравнение, находим

$$8b^3 = 1, b = \frac{1}{2}, a = -2.$$

5. 100.

Поскольку окружности касаются друг друга, то расстояние между центрами O и O_1 (рис. 12) равно разности их радиусов, т.е. равно 6. По

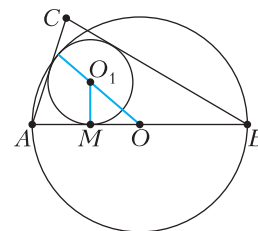


Рис. 12

теореме Пифагора точка M касания вписанной окружности со стороной AB находится на расстоянии $2\sqrt{5}$ от середины O стороны AB . Поэтому $AM = 10 - 2\sqrt{5}$, $BM = 10 + 2\sqrt{5}$.

Пусть a, b, c – длины сторон треугольника ($c = 20$), p – полупериметр. Отметим, что

$$p - a = AM = 10 - 2\sqrt{5}, p - b = BM = 10 + 2\sqrt{5}.$$

По формуле Герона площадь равна

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{80p(p-20)}.$$

Для радиуса вписанной окружности получается формула

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{80 \frac{p-20}{p}}.$$

С учетом условия $r = 4$, приходим к уравнению

$$\sqrt{80 \frac{p-20}{p}} = 4,$$

откуда

$$80(p - 20) = 16p, \text{ и } p = 25.$$

Наконец, $S = \sqrt{80p(p - 20)} = 100$.

6. 4.

Неравенство определено на интервале $(-6\sqrt{2}; 6\sqrt{2})$, в котором лежат 17 целых чисел $0, \pm 1, \dots, \pm 8$. При всех допустимых x знаменатель положительтен. Поскольку при всех допустимых x выполнено неравенство $x - \frac{9\pi}{2} < 0$, числитель принимает вид $\sin \frac{9\pi x}{2}$ и обращается в ноль для четных x , в четырех нечетных точках принимает значение 1 и в четырех нечетных точках значение (-1) .

7. 220.

Пусть второй поезд прошел расстояние S между городами за время t , скорость второго поезда равна $v_2 = \frac{S}{t}$. Поскольку поезда прибыли в пункты назначения одновременно, а первый поезд стоял в течение 40 мин, то первый поезд двигался в течение периода времени $t - 40$ и имел скорость $v_1 = \frac{S}{t - 40}$. До встречи поездов первый поезд прошел расстояние $\frac{1}{3}S + 21v_1 = \frac{1}{3}S + 21 \frac{S}{t - 40}$. Второй поезд находился в движении в течение периода времени $\frac{t - 40}{3} + 61 = \frac{t + 143}{3}$ и прошел расстояние $\frac{t + 143}{3} v_2 = \frac{t + 143}{3t} S$. Сумма расстояний, пройденных поездами до встречи, равна S :

$$\frac{1}{3}S + 21 \frac{S}{t - 40} + \frac{t + 143}{3t} S = S.$$

Упрощая это уравнение, получаем

$$\frac{21}{t - 40} + \frac{t + 143}{3t} = \frac{2}{3}.$$

Отсюда $t^2 - 246t + 5720 = 0$, а это квадратное уравнение имеет корни $t_1 = 220$, $t_2 = 26$. Второй корень не удовлетворяет условиям задачи.

8. 7.

Пусть V — объем емкости. Раствор содержит $0,98V$ кислоты. При первой операции отлили 1 л раствора, количество кислоты уменьшилось на 0,98 и стало равным $0,98(V - 1)$, концентрация снизилась до $\frac{0,98(V - 1)}{V}$. При второй операции отлили 3 л раствора, количество кислоты уменьшилось на $\frac{3 \cdot 0,98(V - 1)}{V}$ и стало равным

$$0,98(V - 1) - \frac{3 \cdot 0,98(V - 1)}{V} = \frac{0,98(V - 1)(V - 3)}{V},$$

концентрация снизилась до $\frac{0,98(V - 1)(V - 3)}{V^2}$.

Поскольку концентрация должна стать равной 48%, получаем уравнение

$$\frac{0,98(V - 1)(V - 3)}{V^2} = 0,48.$$

Умножим уравнение на $100V^2$:

$$98(V - 1)(V - 3) = 48V^2,$$

откуда

$$25V^2 - 196V + 147 = 0.$$

Получено квадратное уравнение с корнями $V_1 = 7$, $V_2 = \frac{21}{25}$. Второй корень не удовлетворяет условиям задачи.

9. $\frac{5}{4}, 5$.

Уравнение определено на промежутке $(1; +\infty)$. Упростим левую часть:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x\sqrt{x-1} + (x-1)\sqrt{x}} &= \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})} = \\ &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x(x-1)}} = \frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Уравнение принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{5}{2x} - \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{5}{2x}.$$

Вводя новое неизвестное $y = \sqrt{x-1}$, получаем $\frac{1}{y} = \frac{5}{2(y^2+1)}$, откуда $2y^2 - 5y + 2 = 0$, и $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = 2$. Возврат к исходному неизвестному дает

решения $\frac{5}{4}, 5$.

10. 9.

Для краткости сумму одночленов со степенями, меньшими степени многочлена, будем заменять на многоточие.

Поскольку для любого натурального k верно равенство $(x+1)^k - x^k = kx^{k-1} + \dots$, то для отличного от константы многочлена $q(x) = a_0x^m + \dots$ разность $\Delta q(x) = q(x+1) - q(x) = a_0mx^{m-1} + \dots$ представляет собой многочлен степени на единицу меньше, чем степень $q(x)$, и со старшим коэффициентом, большим в m раз, чем старший коэффициент $q(x)$. Рассмотрим теперь многочлен $p(x)$ степени n , удовлетворяющий условиям задачи. Тогда $p(x)$ — степени n со старшим коэффициентом 1, $\Delta^1 p(x) = p(x+1) - p(x)$ — степени $n-1$ со старшим коэффициентом n , $\Delta^2 p(x) = \Delta^1 p(x+1) - \Delta^1 p(x)$ — степени $n-2$ со старшим коэффициентом $n(n-1)$, $\Delta^3 p(x) =$

$= \Delta^2 p(x+1) - \Delta^2 p(x)$ – степени $n-3$ со старшим коэффициентом $n(n-1)(n-2)$, ..., $\Delta^n p(x) = \Delta^{n-1} p(x+1) - \Delta^{n-1} p(x)$ – степени 0 со старшим коэффициентом $n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$. Поскольку нулевая степень означает, что многочлен равен константе, то $\Delta^n p(x) = n!$. Из условия последовательно делается вывод о том, что $\Delta^1 p(x)$, $\Delta^2 p(x)$, $\Delta^3 p(x)$, ..., $\Delta^n p(x)$ делятся на 162 при любом целом x . Следовательно, $n!$ делится на 162. Так как $8! = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ не делится на $162 = 2 \cdot 3^4$, то $n \geq 9$.

Для $n=9$ рассмотрим многочлен $p(x) = x(x+1)(x+2) \dots (x+8)$. При целом x значение этого многочлена равно произведению девяти последовательных целых чисел. Из девяти последовательных три делятся на три, одно – на девять. Из двух последовательных одно делится на два. Следовательно, $p(x)$ делится на $3^3 \cdot 3 = 81$ и на 2, а значит, на $81 \cdot 2 = 162$.

Физика

Отборочный тур

- $\Delta t = 3 \frac{\left(\frac{s_3}{t_3}\right)^2 - v_1 v_2}{\frac{s_3}{t_3} (4v_2 - v_1)} t_3 = 30,7$ мин.
- $\rho = \rho_B (3\eta - 2) = 460$ кг/м³.
- $L = H \left(\frac{3}{\operatorname{tg} \alpha_1} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_2} \right) = 15,3$ м.
- $V = \frac{\rho_B h S}{\rho_B - \rho} = 2,40$ л.
- $\eta = \frac{p_2}{p_1} = \frac{(V + \Delta V)^6}{V^5 (V + 6\Delta V)} = 1,17$.
- $m_1 = \frac{\lambda_{II} + c_B \Delta t_2}{\lambda_{I} + c_I \Delta t_1} m_2 = 848$ г.
- $F = \frac{k}{256r^2} (3q_1 + 3q_2 + 2q_3)(11q_1 + 11q_2 + 18q_3) = 15,6$ мкН.
- $\frac{U_2}{U_1} = \frac{R_1 r (R_2 + R_3) + R_2 R_3}{R_3 r (R_2 + R_1) + R_2 R_1} = 0,966$.
- $t_3 = \frac{t_1 t_2}{t_1 - 2t_2} = 103$ с.
- $n_a = \frac{2n_B}{n_B + 1} \cos \alpha = 1,06$.

Заключительный тур

- $v_{\text{отн}} = gt$.
- $\rho_{\text{ж}} = \frac{m_{\text{ип}}}{S \Delta h} = 900$ кг/м³.

$$3. T = 4mg(6 - 5 \cos \alpha) = 16 \text{ Н.}$$

$$4. T_2 = T_1 - \sqrt{\frac{T_1 P}{\alpha \gamma}} = 285 \text{ К} = 12 \text{ }^\circ\text{C.}$$

$$5. F_2 = 8F \text{ (влево); } F_3 = 9F \text{ (вправо).}$$

6. $F = \frac{4L}{9} = 8$ см; условию задачи может удовлетворять только собирающая линза, причем одно из изображений будет действительным, а другое мнимым.

Информатика

Отборочный тур

921600. 2. 63 года; 3 бита. 3. Г, Д, Е, Ж. 4. 448824963136. 5. 16. 6. 49. 7. 7.

Заключительный тур

- АГБ. 2. АБД. 3. 22. 4. 8. 5. 4 (192 – 188). 6. J (наибольшая цифра в двадцатеричной системе счисления).

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

М.Н.Грицук

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

**Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во ПИ №ФС77–54256**

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»**

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

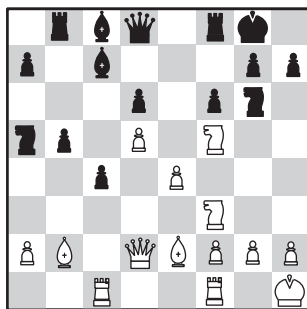
**в соответствии с предоставленными
материалами
в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8
Тел.: (831) 218-40-40**

Ход КОРОЛЕВЫ

«Ход королевы» – один из популярных сериалов последних лет – привел к всплеску интереса к шахматам, в частности, к творчеству шахматисток. Однако среди любителей шахмат мало кто знает о первой женщине, носившей неофициальный титул королевы шахмат в XIX веке. Американка Эллен Гилберт родилась в 1837 году (как и Пол Морфи) и считалась лучшей шахматисткой своего времени, а в игре по переписке – просто одним из сильнейших игроков мира.

У.Хочкин – Э.Гилберт По переписке, 1874

1. e4 e5 2. ♘f3 ♗c6 3. ♘c4 ♗c5 4. b4 ♗b4 5. c3 ♗c5 6. 0-0 d6 7. d4 ed 8. cd ♗b6 9. d5 ♗a5 10. ♗b2 ♗e7 11. ♗d3 0-0 12. ♗c3 ♗g6 13. ♗e2 c5 14. ♖d2 ♗c7 15. ♗g3 f6 16. ♗h1 ♗b8 17. ♖ac1 b5 18. ♗f5 c4 19. ♗e2 (разыгран популярный в XIX веке вариант гамбита Эванса).

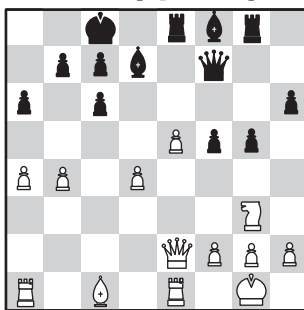


19... ♗e8! Новинка и очень сильный с позиционной точки зрения ход. Черные атакуют пешку e4 и уходят от потенциальнойвилки с c6. 20. ♗g3?! Возможно, стоило пожертвовать вторую пешку – 20. ♗3d4!? ♗e4 21. ♗f3 с контригрой. 20... ♗b7! Черные избавляются от единственной слабости, улучшая по-

зицию коня. 21. ♗d4 ♗c5! 22. ♗fe1 ♗e5 23. ♖c2 ♗ed3! (конь-осьминог на d3, широко известный по партии Карпова и Каспарова из матча 1985 года). 24. ♗d3 ♗d3 25. ♖e2 ♗b6 26. f4 ♗g4 27. ♗f3 ♗c8 28. ♗f1 ♗b2, и белые сдались.

Э.Гилберт – М.Берри По переписке, 1875

1. e4 e5 2. ♘f3 ♗c6 3. ♗b5 a6 4. ♗a4 ♗f6 5. 0-0 ♗e4 6. ♖e1 ♗c5 7. ♗c6 dc 8. d4 ♗e6 9. de ♗e7 (в настоящее время чаще играют 9... ♗d7) 10. ♗c3 ♗d7 11. a4 0-0-0 12. b3 f6 13. ♗e2 ♗f7 14. ♗e4 ♗g8 15. c3 h6 16. b4 f5 17. ♗g3 g5 18. ♗d4 ♗d4 19. cd ♗e8. Белые лучше разыграли дебют, и следует решающее вскрытие линий на ферзевом фланге.

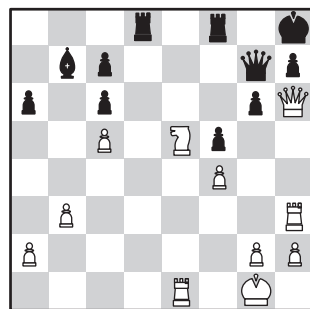


20. b5! cb 21. ab ♗b5 22. e6! ♗g6 (на 22... ♗e2 решает 23. ef! свилкой на обе ладьи) 23. ♗b5!! f4 (ферзя брать нельзя из-за мата с a8). После 24. ♖a6! Эллен объявила мат в 19 ходов (раньше существовала такая традиция в играх по переписке). Сопернику ничего не осталось, как признать свое поражение.

Широкою известность Э. Гилберт принес матч по переписке между США и Англией, в котором Эллен играла на первой доске и уверенно выиграла все 4 партии, в том числе у Дж. Госсипа, считавшегося одним из сильнейших игроков по переписке своего времени.

Э.Гилберт – Дж.Госсип По переписке, 1879

1. e4 e5 2. ♘f3 ♗c6 3. ♗b5 a6 4. ♗a4 ♗f6 5. 0-0 ♗e4 6. ♖e1 ♗c5 7. ♗c6 dc 8. ♗e5 ♗e7 9. d4 ♗e6 10. ♗e3 0-0 11. ♗c3 f6 12. ♗d3 f5 13. ♗e2 ♗d6 14. f4 b5? Неудачный ход, ослабляющий ферзевый фланг. 15. ♖c1 ♗b7 16. c4! (используя недостатки 14 хода черных) bc 17. ♗c5 ♗c8 18. ♖c4 ♗b8 19. b3 ♗f6 20. ♗d3 ♗g6 21. ♖a4 ♗c5 22. dc ♗e7 23. ♗d4 ♗h8 24. ♗c2 ♗h4 25. ♗f2 ♗f2+ 26. ♗f2 ♗e8 27. ♗f3 ♗b7 28. ♗e5! ♗e6 29. ♖c4 ♗bd8 30. ♖c3 ♗f6 31. ♖ce3 ♗f8 32. ♗e2! Решающий маневр, ферзь устремляется на линию h. 32... ♗d4 33. ♗h5 g6. Пешку брать нельзя, так как теряется фигура после 33... ♗f4 34. ♖h3. 34. ♗h6 ♗dd8 35. ♖h3 ♗g7.



В этой позиции Эллен Гилберт объявила мат в 21 ход, приводим его полностью: 36. ♗g6+ ♗g8 37. ♗g7+ ♗g7 38. ♗f8 ♗f8 39. ♖e7+ ♗f7 40. ♖h7+ ♗h7 41. ♖f7+ ♗g6 42. ♖c7 ♗a8 43. ♖a7 ♗b7 44. ♖b7 ♗f6 45. h4 ♗g6 46. ♖c7 ♗f6 47. ♖c6+ ♗e7 48. h5 ♗d7 49. ♖g6 ♗e7 50. c6 a5 51. c7 ♗d7 52. h6 ♗c7 53. h7 a4 54. h8 ♗ab 55. ♗h7+ ♗c8 56. ♖g8x.

А. Русанов

Индекс 90964



«ПАРУСА НАДУЛИСЬ, ВЕТРА ПОЛНЫ...»

Обязательно ли нужен кораблям попутный ветер?



Пролетки с физикой



ISSN 0130-2221 22010



9 770130 222221

(ПОДРОБНЕЕ — НА С. 24 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)