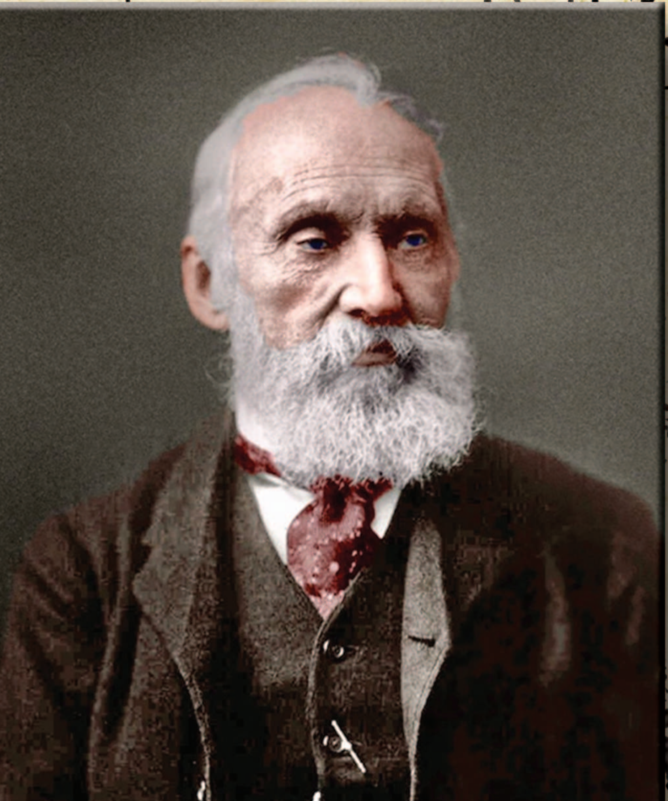
ISSN 0130-2221
ИЮЛЬ
2022 · № 7

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



ЙОГА-упаковка

Эта головоломка — очень необычный представитель класса головоломок на упаковку. Перед вами коробка 6×6 и семь деталей, которые нужно в этой коробке разместить. Каждая деталь — это пара брусочков, соединенных стержнем. Размеры брусочков следующие (мы указываем сразу пары соединенных брусочков для удобства): (2×1, 2×1), (3×1, 2×1), (2×2, 2×1), (2×2, 1×1), (4×1, 2×1), (4×1, 1×1), (3×1, 2×1). Обратите внимание на то, как именно расположены соединительные стержни: их концы всегда закреплены в центрах единичных квадратиков, на которые можно разделить брусочки.

Важно, что стержни закреплены не жестко, поэтому брусочки можно поворачивать. Это добавляет «степеней свободы» головоломке, значительно ее усложняет и обогащает. Единственное требование – в положении, когда стержень перпендикулярен сторонам брусочков, расстояние между ними должно быть равно 1. В домашних условиях легко сделать такой набор деталей из толстого картона и проволоки.

Видимо, автору этой головоломки, американке Люси Пауэлз (Lucie Pauwels), такая подвижность деталей напомнила занятия йогой — отсюда и название.

Автор предлагает и несколько дополнительных заданий: сложить квадрат 4×4 из трех деталей, сложить квадрат 5×5 из пяти деталей, сложить прямоугольник 3×5 из трех деталей, сложить прямоугольник 4×5 из четырех деталей, сложить прямоугольник 5×6 из шести деталей, сложить прямоугольник 4×9 из всех семи деталей.

В общем, разнообразие задач, которые ставит перед нами эта оригинальная головоломка, мало уступает разнообразию поз в йоге.

Желаем успеха!

Е.Епифанов

КВАНТ ИЮЛЬ 2022 № 7

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

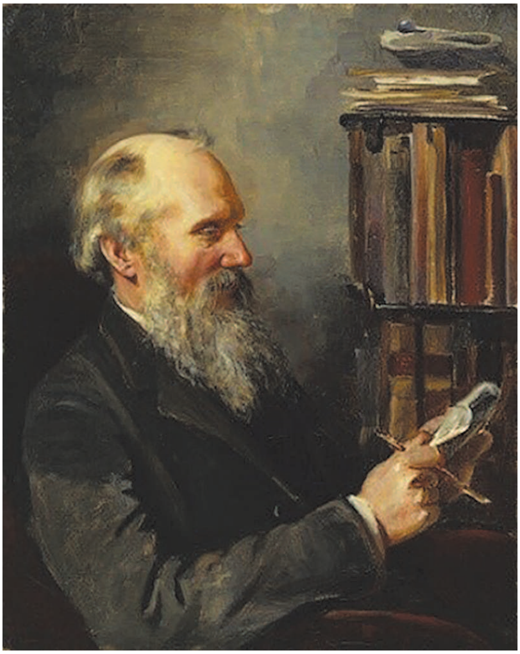
Кельвин и системы единиц

Л.БЕЛОПУХОВ

В ТРАДИЦИИ НАШЕГО ЖУРНАЛА публикация статей об ученых – физиках и математиках. Обычно эти статьи появляются в юбилейный год. Нарушая традицию, мы публикуем эту статью за два года до знаменательной даты – двухсотлетия со дня рождения одного из самых знаменитых физиков XIX века Уильяма Томсона, которого весь мир знает как лорда Кельвина.

Каждому школьнику известно, что абсолютная температура измеряется в кельвинах и что это такая температура, ниже которой нет нигде – ни на Земле, ни в Солнечной системе, ни в нашей Галактике, ни во всей Вселенной. Пожалуй, понятие об абсолютной температуре – это действительно самое выдающееся достижение Кельвина. Но одного этого было бы недостаточно для того, чтобы в 1896 году на торжества по случаю пятидесятилетия его научной деятельности в Глазго, в университет, где он проработал 50 лет в должности заведующего кафедрой теоретической физики, приехали 2500 ученых из всех мировых университетов и академий. Три дня продолжались юбилейные научные конференции. Россию представлял на этих конференциях выдающийся российский физик Н.А.Умов.

Стремительное развитие физики, начавшееся как раз в 1896 году с открытия электрона, рентгеновского излучения и радиоактивности, выдвинуло на передний край известности других ученых – таких, как Рентген, Эйнштейн, Кюри, Резерфорд, Бор, и плеяду создателей квантовой механики. Память о Кельвине потускнела на фоне этих имен, и имя Кельвина остается незабытым лишь в названии единицы абсолютной температуры. Но 100 лет назад, в 1924 году его еще хорошо помнили. И к столетней годовщине рождения Кельвина вышел специальный номер английского научного журнала «Электричество», целиком посвященный памяти Кельвина и его научным достижениям. Номер журнала так и назывался «Lord Kelvin number».



Лорд Кельвин

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20220701

Проблема единиц измерения

Температуру измеряют по-разному. Мы привыкли к градусам Цельсия. В некоторых англоязычных странах, и прежде всего в США, в ходу градусы Фаренгейта. А в Германии и в России до 1918 года очень популярной была шкала Реомюра. Эти температурные шкалы стали называть именами их основателей еще при жизни этих ученых.

Шкала Кельвина до 1892 года именовалась шкалой Томсона, затем единицей абсолютной температуры стал градус Кельвина. А когда в 1960 году Международный комитет мер и весов утверждил для предпочтительного применения Международную систему единиц (СИ), градус Кельвина стал одной из семи основных единиц этой системы. И он стал называться не «градус кельвина» (°К), а просто «кельвин» (К).

Остановимся кратко на вопросах об утверждении систем единиц и их «именных» названиях. Сегодня почти 30 единиц измерения физических величин имеют «имена». В системе СИ среди 7 основных единиц – это *кельвин* и *ампер*, а 5 других основных единиц – не именные метр, килограмм, секунда, моль и кандела. Их названия установились стихийно и произошли от латинских корней во французском произношении.

Стремление называть единицы измерения каким-либо житейским словом возникло на заре человеческой истории. Такими были, например, единицы длины *локоть*, *пядь*, *фут*, *ярд*, *поприще*. Трудно установить происхождение таких мер, как *грамм*, *фунт*, *пуд*, *секунда*, *минута*, *час*. Естественно, что эти названия возникали и устанавливались в сравнительно небольшом ареале проживания одного народа или даже племени и затем распространялись на государства, объединявшие разные народы. И очень часто в государстве существовало одновременно несколько единиц измерения одной и той же величины. Конечно, это затрудняло общение людей, живших в разных местностях. Так было поначалу и с денежными единицами. Но в этом случае государственные власти устанавливали (хотя и не сразу) единые единицы и их названия. Например, в огромной Римской империи была одна главная золотая единица – *ауреус* и три серебряные монеты понижающегося достоинства.

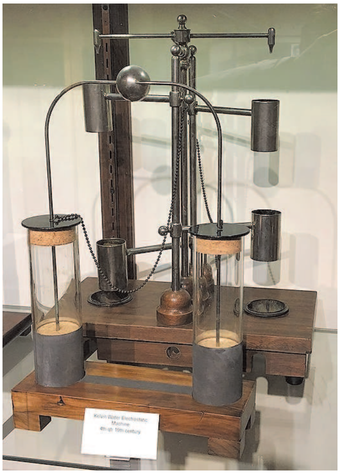
На другие единицы измерения государственные власти обращали мало внимания. Юлий Цезарь сделал такие попытки для единиц веса и длины, но не смог довести их до конца. Преуспел он только в установлении единого календаря, который и получил его имя. А после падения Рима в средневековой Европе настала полная анархия в этом вопросе. Шедевром неразберихи, пожалуй, можно считать существование во Франции вплоть до XIX века свыше тысячи (!) различных единиц длины. Например, длина отреза ткани измерялась в единицах, представляющих ширину ткацкого станка данной местности, а площадь пахотного участка – днями, необходимыми для вспашки крестьянином этой земли. До наших дней сохранилось только одно старое название – *лье*. В России еще был по сравнению с такой анархией относительный порядок. Заботами царей-реформаторов от Ивана III до Екатерины II остались только 8 единиц – *ладонь*, *пядь*, *локоть*, *фут*, *шаг*, *аршин*, *маховая сажень* и *косая сажень*.

Одной из забот Французской академии наук стала работа по унификации единиц измерений, и в первую очередь единиц длины. В Академию наук в составе астрономического института входило Бюро долгот, которое и занималось этим вопросом. Было предложено много разных вариантов, например – длина некоторого стандартного маятника и целый ряд астрономических вариантов. Но успех был достигнут только в 1795 году, когда Бюро долгот, получившее название Палаты мер и весов, возглавили несколько ученых, в том числе выдающийся французский ученый, математик, астроном и физик Пьер-Симон Лаплас. Лапласом в качестве единицы длины была окончательно выбрана астрономическая, точнее «общеземная», единица – одна сорокамиллионная часть земного меридиана, проходящего через Париж. И эта единица была названа *метром* (от древнегреческого μετρον – мера, измеритель). Палата мер и весов привлекла ученых к измерению (угловому) участка земного меридиана, к установлению вещественного эталона метра и соответственно – к выражению всех прежних единиц длины, площади и объема через метр. Были установлены и единицы веса (массы) и времени. Появилась система единиц МКС – метр, килограмм, секунда. Но интересно, что к окончательной (законодательной) установке единых единиц Франция пришла только в середине XIX века, при подготовке к открытию первой в мире Международной промышленной выставки.

К этому времени во многих странах в научных работах и технических измерениях уже происходил переход к системе, аналогичной МКС и получившей название системы СГС (сантиметр, грамм, секунда). Развитие науки привело к необходимости единых единиц силы, работы (энергии) и мощности. В системе СГС появились новые единицы *дина* (от древнегреческого δῦναμίζ – сила) и *эрг* (от древнегреческого εργον – работа). А для мощности изобретатель универсальной экономичной паровой машины Джеймс Уатт еще в XVIII веке ввел термин *лошадиная сила*. Все эти единицы выражались через сантиметр, грамм и секунду.

В Англии борьбу за переход от специфических английских мер (дюйм, ярд, акр, фунт и др.) к единицам системы СГС возглавил физик Уильям Томсон (Кельвин). Но специфический английский консерватизм даже в среде ученых сыграл свою роль в том, что не только тогда, но и сейчас вопрос о переходе к международным единицам не решен.

Когда Томсон начал заниматься электричеством, он сразу вслед за Гауссом стал все физические величины выражать в системе СГС. Она получила в электродинамике, с легкой руки Гаусса и Томсона, наименование «система единиц СГСЭ». Ее стали называть также гауссовой системой единиц, поскольку Гаусс уже был в это время всемирно известным королем математиков, а молодого Томсона знали мало. Новые единицы вводились на основании открываемых опытных законов электричества и магнетизма. За основу была взята некоторая мера электрического заряда (количества электричества), она не имела специального названия и просто обозначалась длинным термином «единица количества электричества в СГСЭ-системе». Все другие единицы выражались через нее. Например, единица силы тока обозначалась как эта единица, деленная на секунду. Так появились единицы электрическо-



Капельный гальванометр Томсона

го потенциала, напряжения, проводимости и сопротивления, магнитной индукции и напряженности, магнитного потока и индуктивности.

Затруднением было эталонирование единицы электрического заряда в системе СГСЭ. И решающую роль в этом сыграли работы Томсона по конструированию точных электрических и магнитных приборов. В 1845 году Томсон изобрел прибор, в котором капельки воды, заряжаясь от трения при прохождении в некотором электрическом поле, собирались в изолированных приемниках отдельно для получивших положительный или отрицательный заряды. Прибор получил название «капельный генератор электричества» или «капельный гальванометр Томсона». И некоторое количество накопленного (электростатического) заряда можно было считать эталонным. Но электрические силы, которые впервые были определены Кулоном, тогдашние приборы могли зарегистрировать только тогда, когда в них участвовало огромное количество зарядов, выраженных в системе СГСЭ. Еще важнее было то, что электродинамическая величина – сила тока – во всех экспериментах тоже соответствовала огромному значению единиц СГСЭ.

Конечно, теоретиков это не пугало. Все теоретики применяли эту систему, в том числе Максвелл и Эйнштейн. Да и сейчас она часто используется в теоретической физике. Привлекает отсутствие во многих формулах «лишних» коэффициентов ε_0 и μ_0. И сам Гаусс, и Максвелл сразу обратили внимание на то, что в гауссовой системе в формулах, где присутствовали электрический заряд и магнитные величины, появился размерный коэффициент, равный $3 \cdot 10^{10}$ см/с. Именно такую величину имело уточненное значение скорости света в вакууме, которую надежно измерили в середине XIX века. И именно Максвелл связал электромагнетизм с волновым движением, предсказав существование электромагнитных волн.

Однако практика и родившаяся новая наука «электротехника» настоятельно требовали выделения электрических единиц в особую систему. Кроме того, в капельном томсоновском гальванометре электрический заряд плохо сохранялся. Защитить наэлектризованную воду от потери или приобретения других заряженных частиц, и прежде всего электронов, оказалось невозможным. Томсон пришел к выводу, что эталонировать нужно не электростатическую величину – заряд, а электродинамическую величину – силу тока. Для многих проводящих предметов сила, действующая на этот предмет со стороны магнитов, кусков железа или его окислов, оказалась сравнимой с силой тяжести, когда по предмету шел ток, получаемый тогда от гальванических элементов. В 1848 году Томсон разработал конструкцию и своими руками создал прибор, который получил имя «магнитные весы». В этом приборе можно было добиться неподвижного нахождения провода с током в магнитном поле под действием противодействующих сил – силы тяжести и магнитной силы Ампера. Усовершенствованная конструкция магнитных весов Томсона и сейчас является эталоном единицы силы тока «ампер» в международной современной системе единиц СИ.

Ситуация малости многих единиц в системе СГС по сравнению с практическими величинами сложилась не только в электромагнетизме. В технической механике стала употребляться единица силы $кг \cdot м/с^2$, равная 10^5 дин. Такими единицами и их десятками выражались те силы, с которыми обычно человек имеет дело. Долгое время эта единица измерения силы не имела специального названия, пока наконец в 1948 году не получила от Международного комитета мер и весов торжественное имя *ньютон*. В теплотехнике величины энергии и мощности, с которыми связаны человеческая жизнь и деятельность, тоже оказались равными сотням миллионов и миллиардам эргов или единиц мощности системы СГС.

Все эти неудобства в механике, теплотехнике и электротехнике стали приводить к появлению в разных странах разных единиц и по названию и по отношению к единицам гауссовой системы. Усложнилось преподавание физики и новых научно-технических дисциплин. На повестку дня встала необходимость реформ. В России с ее аршином и фунтом переход к единой системе единиц возглавил великий Д.И.Менделеев. С 1893 года он был директором российской главной палаты мер и весов. Неслучайно подмосковный поселок, где сейчас находится Всероссийский научно-исследовательский институт физико-технических и радиотехнических измерений, носит название Менделеево. В Англии, где этот переход возглавлял У.Томсон, положение было особенно трудным, и по сути переход не закончился до сих пор. Англичане, а вслед за ними и весь мир измеряют экраны телевизоров не в сантиметрах, а в дюймах, а мощности автомобилей не в киловаттах, а в лошадиных силах.

Первыми одумались химики и для своих нужд ввели особую энергетическую единицу – калорию (равную $41{,}87 \cdot 10^6$ эрг). Эта единица означает энергию, необходимую для того, чтобы повысить на 1 °С температуру одного литра воды. Она удобна для выражения количества теплоты, выделяющегося в химических реакциях. Теплотехники, создававшие транспортные двигатели, быстро примкнули к химикам. А для мощности двигателей по-прежнему использовали удобную единицу – лошадиную силу (1 л.с. равна $736 \cdot 10^7$ единиц мощности СГСЭ-системы). А когда с единицами электромагнетизма стали разбираться электротехники, единицей измерения энергии, как механической, так и электрической и тепловой, был выбран предложенный Карлом Вильгельмом Сименсом *джоуль*, а единицей мощности – *ватт*. Но как ни странно, калория не ушла в небытие до сих пор. Дольше всего она удерживается в пищевой промышленности. На современных упаковках пищевых продуктов имеется двойная энергетическая характеристика – в килоджоулях и в килокалориях, причем первая называется энергетической ценностью, а вторая – калорийностью или пищевой ценностью. Это, безусловно, связано с медициной, где все советы по борьбе с перееданием приводятся в виде таблиц, в которых в интернете и сейчас еще частенько присутствуют килокалории. Так они и фиксируются в памяти у большинства людей, безоговорочно верящих медицине. Хорошей нормой энергетической ценности питания и сейчас многие считают легко запоминающиеся 2000 килокалорий в сутки для тех, кто ведет малоподвижный образ жизни. У калории есть и небольшое преимущество перед джоулем – удельная теплоемкость воды почти в точности равна 1 кал/(г · град).

Мне вспоминается, как 60 лет назад после введения в нашей стране закона о предпочтительном употреблении системы СИ почтенный профессор нашего вуза в беседе с провинциальными учеными возмущался: «Что же мы теперь будем покупать джоулейные булочки, а не калорийные?» Был такой продукт – вкусные сдобные булочки с изюмом. А по поводу замены слова «вес», неправильно употребляемого вместо термина «масса», он же говорил: «Не взвешивать будем, а взмассировать, не весы будут, а массы?» Значительные трудности были и при переходе от *атмосферы*, как единицы давления, к *паскалю*. В те же 60-е годы у нас на разных кафедрах применялись как атмосферы, так и метры водяного столба (в гидравлике, например). А тут – приказ переориентироваться на паскали. И вот бедные студенты на разных занятиях на разных кафедрах по-разному должны были вычислять и измерять давление.

Как же происходил этот переход к единой международной системе единиц? Все началось в 1875 году, когда по инициативе Французской академии наук в Париже, а точнее в пригороде Парижа в Севре, где находилась французская Палата мер и весов, собрались представители 20 государств. И 20 мая 1875 года была подписана Международная конвенция по мерам и весам, в которой было заявлено о создании Международного бюро по весам и измерениям, вскоре получившее название Международного комитета по весам и мерам. Конвенция была подписана 18 участниками, имевшими полномочия от своих правительств. От России конвенцию подписал советник посольства Григорий Окунев «от имени императора Александра II».

Согласно конвенции, 18 членов комитета должны ежегодно собираться для отчетов об организации метрологических исследований в странах-участницах; для отчетов о деятельности региональных Палат мер и весов; для выработки рекомендаций генеральным конференциям по мерам и весам. На этих конференциях раз в 4 года должны обсуждаться и утверждаться положения о рекомендуемых изменениях в системах единиц и должен избираться на 4 года руководитель Международного комитета.

С тех пор за почти 150 лет состоялось 26 Генеральных конференций. Некоторые 4-летия были пропущены, в том числе и по причинам мировых войн. Среди выбираемых руководителей комитета были ученые-метрологи из разных стран. В течение 20 лет, с 1915 по 1936 год, роль руководителя исполнял швейцарский ученый Шарль Гийом, который в 1920 году стал лауреатом Нобелевской премии за создание сплавов, обладающих очень малым коэффициентом температурного расширения, необходимых для эталонов длины. С начала 2013 года организацию возглавляет французский ученый Мартин Милри. Несколько последних конференций были посвящены изменению и уточнению эталонов длины, времени и массы. Теперь это уже не предметы, хранящиеся в Севре, а описание приборов, использующих современную физику.

Бюджет комитета и средства для проведения конференций складываются из взносов стран-участниц. Все начиналось с 18 стран. Сегодня членами Международного комитета являются 62 государства и еще 40 государств – ассоциированные (присоединившиеся) члены. Среди них – все промышленные страны мира, в том числе Россия, Казахстан, Белоруссия и Украина. В 1962 году Генеральная конференция приняла решение о преимущественном использовании системы СИ. В России недавно (2018 год) правительством было опубликовано обновленное «Положение о единицах величин, допускаемых к применению в Российской Федерации».

Ничего подобного в мире нет. Только ученые, и прежде всего ученые-физики, смогли создать международную организацию, не имеющую никакого отношения ни к политике, ни к расовым или религиозным предпочтениям. Действительно, наука не знает границ между странами!

Уильям Томсон в юности

Биографические вехи Кельвина

Уильям Томсон родился 26 июня 1824 года в североирландском городе Белфасте в профессорской семье. Его отец Джеймс Томсон был математиком и профессором в ирландском университете. Предками его были фермеры-шотландцы, переселившимися в Ирландию с ее плодородными землями. В семье было три сына и две дочери. Уильям был младшим сыном. В 1830 году умирает жена Джеймса. Вдовец с пятью детьми решает вернуться к родным корням, в Шотландию. Он становится профессором математики в университете в Глазго, одном из старейших университетов Европы, основанном в 1451 году.

Шестилетний Уильям резко выделяется среди детей своим ранним развитием. Его отец это понимает и обеспечивает младшему сыну особенно качественное домашнее образование. В восьмилетнем возрасте сын начинает посещать университетские лекции отца, в 10 лет становится слушателем математического отделения, а вскоре и его полноправным студентом. В истории высшего образования он был и остается самым молодым студентом естественно-научного направления. И при этом он весел и общителен со своими более старшими коллегами, которые его опекают. Каждый летний период отец путешествует с Уильямом и его братом. В этих путешествиях мальчик овладевает четырьмя главными европейскими языками, а латынь и древнегреческий он превзошел еще в домашнем обучении – память у него превосходная.

В 15 лет для лучшего изучения математики Уильям становится магистром Кембриджского университета. Здесь он сразу оказывается лауреатом университетского конкурса по математике за трактат о форме Земли. А затем пишет и публикует математические работы, посвященные рядам Фурье и их применению в физике. Часть особо важных и трудных статей он публикует под псевдонимом, чтобы не смущать своих педагогов, которых он в этих статьях превзошел. Но одновременно с этим Томсон становится и чемпионом по гребле – традиционном виде спорта английских студентов-технарей. И у него еще

Университет в Глазго

находится время для организации музыкального студенческого общества.

После окончания математического отделения кембриджского Тринити-колледжа Уильям поступает в Коллеж де Франс (Сорбонну), в физическую лабораторию, где получает навыки, необходимые для экспериментальных физических работ. Но он не бросает и теорию, где теперь его интересы сосредотачиваются на самом передовом тогда крае физики – электричестве и магнетизме. В первых своих физических публикациях он разрабатывает метод изображений для решения электростатических задач, вошедший вскоре во все классические курсы физики. На эти (и другие) его работы обращают внимание в университете Глазго. Томсон возвращается в родной город, защищает диссертацию и начинает создавать хорошо оборудованную физическую лабораторию. В это время освобождается профессорская должность заведующего кафедрой теоретической физики и Томсону предлагают принять участие в конкурсе. В 1846 году 22-летний ученый становится профессором и заведующим кафедрой. И он проработал в этой должности 53 года. Тоже своеобразный рекорд!

Томсон продолжает посещать Тринити-колледж в Кембридже, где знакомится с Джоулем. Талант Джоуля, его гениальные идеи и обаяние личности так увлекают Томсона, что он надолго становится адептом науки о преобразованиях теплоты. Он изобретает название этой новой науки – *термодинамика*. Джоуль всего на 6 лет старше Томсона, но он уже пришел к своему великому выводу о единстве понятия энергии в механике, теплоте и электричестве и подтвердил сохранение этой величины точными измерениями. Изучая газовые процессы, Джоуль сформулировал закон, получивший название первого закона (начала) термодинамики. Томсон с азартом включился в совместные работы и вскоре экспериментально обнаружил эффект, казавшийся нарушением этого закона. При расширении сжатого газа в вакуумное пространство, если все сосуды хорошо теплоизолированы, температура не должна изменяться, поскольку не изменяется энергия. Но если расширение происходит достаточно медленно (через пористую перегородку), то температура меняется, причем иногда понижается, а иногда даже повышается. Оказалось, что все дело в неидеальности газов. При расширении меняются силы взаимодействия между молекулами газов, которыми обычно пренебрегалось. Явление вскоре получило название «эффект Джоуля–Томсона» и с тех пор широко применяется для охлаждения газов и доведения их до жидкого состояния. Так, интересное применение этот эффект нашел в газовой промышленности. Поступающий из скважины природный газ всегда содержит много водяного пара. Если этот газ пустить в газопровод, водяные пары сконденсируются и активно пойдет процесс ржавления металла. Поэтому эту конденсацию нужно проводить еще на промысле, сразу после добычи.

Благодаря Джоулю и Томсону Тринити-колледж наряду с Берлинским университетом превращается в мировой центр развития физической науки. Вскоре Томсон формулирует здесь свое эпохальное открытие – понятие термодинамической температуры (ее часто называют абсолютной). Для сохранения традиций он связывает эту температуру со шкалой Цельсия и устанавливает абсолютный ноль температуры. Параллельно с этим Томсон публикует свое толкование второго закона термодинамики, сформулированного немецким физиком Клаузиусом.

В это время профессором Кембриджского университета становится земляк Томсона 28-летний Джеймс Максвелл, занимавшийся молекулярной теорией теплоты. Но вскоре научные интересы Максвелла переместились в область теоретических работ по электричеству и магнетизму. В его выступлениях на заседаниях Лондонского Королевского общества (английской академии наук) впервые прозвучал термин «электромагнитные волны». А в одном из выступлений он провозгласил свое «телеграфное уравнение» как одно из решений уравнений электромагнетизма.

Физическое использование телеграфного уравнения еще до выступления Максвелла позволило создать системы передачи информации по проводам на большие расстояния Такие системы были осуществлены Гауссом, Вебером, Морзе и др. Вся Европа, а вслед за ней и американский континент за считанные годы покрылись густой сетью телеграфных проводов. Экспериментальный дар Томсона не смог устоять перед новым увлечением. Он изобрел ряд приборов для усиления и воспроизводства слабых сигналов. В них использовались резонансные явления в электрических колебательных контурах, являющихся источниками несущей частоты колебаний, кодируемых точками и тире азбуки Морзе. Для частоты колебаний он получил свою знаменитую формулу $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, где L – индуктивность контура, а C – его электроемкость. Эта формула позволила группе инженеров-связистов спроектировать передачу телеграфной информации из Европы в северную Америку по кабелю, проложенному по дну Атлантического океана.

Интересно, что Томсон принял участие не только в электротехнических расчетах, но и в расчетах механической прочности кабеля, опускаемого с пароходов на океанское дно. До привлечения Томсона к участию в прокладке кабеля произошли два случая его обрыва, приведшие к большим финансовым потерям. Томсон проконтролировал все участки изготовления кабеля, где обнаружил «слабые звенья», приводящие к браку. После этого обрывов больше не было. Он провел и все электротехнические расчеты передач сигналов по кабелю и приборов контроля, обеспечивших его бесперебойную многолетнюю работу вплоть до появления радиосвязи, когда кабель потерял свое значение. Все это время Томсон оставался одним из директоров (и акционеров) Атлантической телеграфной компании. Большой след в его жизни оставило пребывание в море на борту пароходов, обеспечивающих прокладку кабеля. Он стал заядлым яхтсменом, а в старости приобрел прогулочную яхту, на которой проводил многие дни отдыха.

После успешной прокладки трансатлантического кабеля авторитет Томсона не только как физика, но и как инженера-конструктора стал непререкаем. И к нему стали обращаться лаборатории многих университетов с просьбами о создании тех или иных установок. Им было создано множество приборов, причем не только рассчитаны и сконструированы, но и изготовлены зачастую при его непосредственном участии – у него оказались поистине «золотые руки»!

В 1858 году муниципалитет Глазго присваивает Томсону рыцарское (дворянское) звание, и он становится «сэром Томсоном». А в 1892 году в преддверии его семидесятилетия правительственный комитет по наградам передает королеве Виктории представление к присуждению Томсону наследственного пэрства с титулом «барон Кельвин Лангрский из Айршира». Сэр Томсон становится лордом Кельвином, под этим именем он и остается прославленным ученым в истории физики.

В 1894 году отмечается 300-летие Гейдельбергского университета. В связи с этим намечается присвоить почетные докторства университета по всем его специальностям. Но когда наметили Кельвина,

Сэр Томсон

оказалось, что у него уже есть все эти докторские степени от других университетов. «Вакантной» оставалась только степень доктора медицины. И Кельвин вдобавок к своим многочисленным наградам становится почетным доктором медицины Гейдельбергского университета.

Откуда взялся титул «барон Кельвин Ларгский»? Обычаи английского королевского дома требовали присвоения наследственного титула, т.е. титула, передающегося по наследсту старшему в роде, только тогда, когда есть какое-то наследство, прежде всего в виде земельных угодий. Конечно, у профессора Томсона никакой земельной собственности не было. Он предпочитал иметь квартиру в университетском кампусе, как и многие другие университетские преподаватели. Однако когда в соответствии с университетским уставом он по возрасту перестал бы быть профессором-преподавателем, а стал бы «всего лишь» почетным профессором, то ему не разрешалось бы жить в кампусе. И что же делает Кельвин? В кампусе у него друзья, там прошла вся жизнь. И хотя у него было уже собственное роскошное жилье, он не хочет надолго покидать родные места и зачисляется ...студентом университета, который имеет право жить в кампусе. И становится самым старым в истории высшей школы студентом. И в этом весь Кельвин!

Когда надо было за 7 лет до этого решать вопрос о титуле, он не очень волновался по этому поводу и шутя предложил титул «лорд Кабель», поскольку его заслуги перед короной и Англией в осуществлении прокладки трансатлантического кабеля и были главной мотивировкой награды. Томсон в это время уже задумал построить собственный дом, чтобы проводить в нем каникулярное время. Он выбрал место изумительной красоты в устье реки Ларгс в 50 километрах от Глазго. И однажды у него в университетской квартире собрались друзья, чтобы помочь в решении проблемы конкретного имени для титула. Был жаркий летний день и вся компания отправилась купаться в пруду на университетской территории. А этот пруд был образован маленькой речкой со старинным названием Кельвин, почти что ручейком в летнее время. Ручей Кельвин, вновь вытекая из пруда, впадал неподалеку в глав-

Меандр реки Кельвин

ную водную артерию Глазго – реку Клайд. Освеженная после купания дочь одного из друзей Кельвина предложила: «А почему бы не выбрать для титула слово *Кельвин*? Оно ведь старинное и такое красивое!» Всем очень понравилось. Дело стало за малым – купить землю там, где было задумано строить дом. Вопроса о средствах для покупки земли не было. Томсон был в это время достаточно обеспечен доходами от директорства в телеграфной компании и от своих патентов. Правда, много средств он тратил на покупку оборудования для университетской физической лаборатории. Но и оставалось немало. Во всяком случае на покупку земли и даже на строительство замка хватало. И проблема с титулом была решена. Так неприметная речка Кельвин стала прообразом единицы термодинамической температуры.

В последнее десятилетие века лорд Кельвин не только пожинал плоды своего многолетнего научного творчества, но и вел деятельную жизнь. Например, был председателем международной Ниагарской комиссии, одобрившей в конце концов проект ниагарской гидростанции, представленный группой инженеров с участием сербско-американского электротехника Никола Тесла. В Шотландии Кельвин курировал строительство гидростанции для обеспечения электроэнергией одного из первых в мире заводов по производству алюминия. В палате лордов он не пропускает заседаний и выступает по вопросам развития высшего естественно-научного образования и переходу в Англии к метрической системе измерений. Два года он возглавляет Лондонское королевское общество и выступает с принципиально важными докладами. Всего за жизнь Кельвин написал 20 книг, больше 600 научных статей и получил 70 патентов на различные приборы – высокоточные амперметры и вольтметры, навигационный компас и корабельный измеритель скорости, уже упомянутый капельный генератор электрического заряда, приборы для телеграфии и демонстрационные установки для лекций.

Гальванометр Кельвина

Несмотря на тяжелые личные события (смерть отца, когда Томсону не было еще и 40 лет, смерть жены, с которой он прожил 18 лет), он оставался доброжелательным по отношению к своим коллегам и студентам. Его не покидало чувство юмора. Для Кельвина было большое счастье иметь друга, который восхищался им, но при этом критиковал и поддерживал. Это был знаменитый физик и математик Джордж Стокс, профессор Кембриджского университета. Он был старше на 5 лет и прожил ровно столько же, сколько Кельвин. Их дружба длилась 60 лет и ничто не омрачало ее. Они часто встречались в Кембридже и переписывались. Сохранились сотни (!) писем Кельвина Стоксу.

Кельвин прожил счастливую жизнь. Самым главным в ней была работа, жизнь в науке. Еще во время учебы в Кембридже он составил расписание, оно сохранилось в музее Кельвина: «В 5 ч. утра встать и разжечь камин, до 8.15 чтение научной литературы, до 13 ч. посещение занятий, до 16 ч. решение задач и написание статей, после обеда и до 19 ч. посещение церкви, до 20.30 прогулка (по возможности при любой погоде), в 21.00 сон». Такому распорядку он старался следовать всю жизнь. И только болезнь в два последних года жизни подкосила его.

Кельвин скончался 17 декабря 1907 года в своем шотландском доме. К сожалению, этот дом не сохранился, после Кельвина в нем никто не жил – у него не осталось никаких наследников. Но благодарные ему физики восстановили этот дом в Берлине, где сейчас находится дом-музей Кельвина и собраны все приборы, в создании которых он участвовал. В университете Глазго хранятся многие приборы, которые он сделал собственноручно. Перед одним из университетских зданий сооружен памятник-мемориал. Красивый памятник-столп есть в Белфасте, где он родился. Прах Кельвина и по его титулу и по заслугам покоится в Вестминстерском аббатстве в Лондоне рядом с могилой Ньютона. Тысячи людей провожали повозку с гробом, в котором прах Кельвина перевозили из его дома на ближайшую железнодорожную станцию. А при захоронении в аббатстве попасть на торжественную церемонию могли только члены королевской семьи, главы научных делегаций из тридцати стран и руководители Лондонского королевского общества. Мемориальные мероприятия, на которых присутствовали тысячи приехавших ученых, проходили в больших лондонских залах.

Научные достижения Кельвина и их значение

Достижений так много, что только их перечисление заняло бы несколько страниц. Но самое главное, конечно, это вклад в термодинамику. Да и само слово «термодинамика» придумал Кельвин. Он глубоко понимал теплоту как передающуюся энергию, окончательно поставив крест на теории теплорода. Не повторяя дословно кельвиновской формулировки второго закона термодинамики, отметим только его главную суть – невозможны процессы, единственным конечным результатом которых было бы превращение тепла целиком в работу. Эта формулировка заставляет задуматься – а как же быть с изотермическим процессом, где все полученное газом тепло превращается в работу? Но ведь это не единственный результат процесса, при этом происходит изменение объема газа. Слово «единственный» в формулировке закона очень существенно, без него закон теряет смысл.

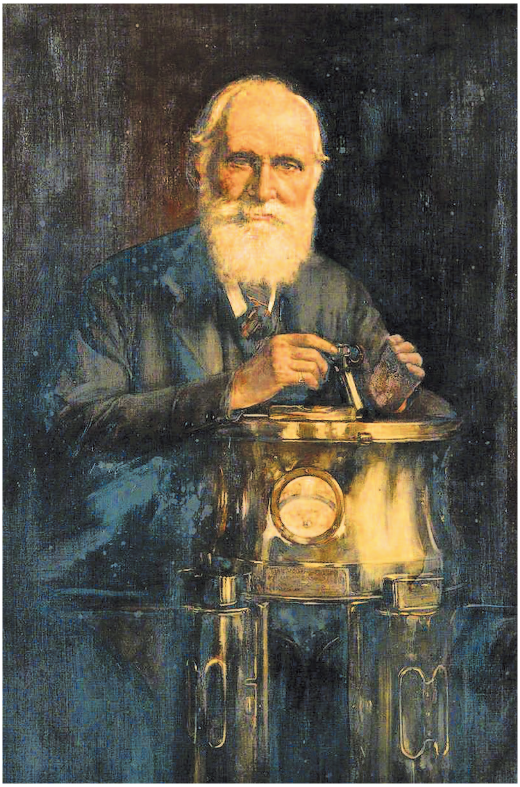
Если бы второго закона не было, то можно было бы, например, построить двигатель, который отнимал бы тепло от океанской воды и превращал его целиком в работу. Это был бы вечный двигатель второго рода. Кельвин сам не раз упрощал свою формулировку закона: «вечный двигатель второго рода невозможен» или «невозможно создать двигатель с КПД, равным единице». Это вначале представлялось несколько загадочным, пока Кельвин, Клаузиус и Больцман не разобрались в том, что скрытая причина второго закона – необратимость реальных тепловых процессов во времени. Формулировка второго закона Клаузиусом так и звучит: «Невозможен самопроизвольный переход тепла от менее нагретого тела к более нагретому, или невозможен процесс, единственным результатом которого был бы такой переход». Самопроизвольно тепло может только рассеиваться. Клаузиус ввел и количественную характеристику такого рассеивания или необратимости. Он назвал ее энтропией, которая самопроизвольно (в теплоизолированной системе) не может уменьшаться.

Кельвин указал, что его формулировка второго закона и формулировка Клаузиуса эквивалентны. Как и Клаузиус, он пришел к выводу об окончании в далеком будущем всех тепловых процессов на Земле, когда энтропия достигнет максимума. Именно он назвал эту перспективу «тепловой смертью» Вселенной. Но еще при жизни Кельвина Больцман показал, что существуют гигантские флуктуации (отклонения от среднего), которые этого не допустят. Именно такие флуктуации определяют, в частности, и климат на Земле (Нобелевская премия по физике 2021 года).

Мы не будем здесь останавливаться на математической стороне второго закона и вытекающих из него следствиях, как теоретических, так и практических. Отметим только, что без этого закона немыслимы современная термодинамика, теплотехника, термохимия и другие науки, где речь идет о теплоте. И первый закон термодинамики (Джоуля) и второй закон (Клаузиуса–Кельвина) основываются на понятии термодинамической температуры как меры средней кинетической энергии частиц. Здесь очень важно слово «средней». Оно означает, что понятие термодинамической температуры существенно только для очень большого числа частиц в системе. Бессмысленно говорить о температуре атомных электронов или ядерных частиц.

Кельвин первым ввел еще в 1848 году понятие абсолютного нуля термодинамической температуры, который он, экстраполируя газовые законы, определил как величину, обратную термическому коэффициенту расширения газа, приходящемуся на один градус Цельсия: $1/0,00366 \approx 273,2$. Таким образом, по шкале Цельсия абсолютный ноль равен –273,2 °С и, наоборот, 0 °С соответствует 273,2 К. Сегодня значение абсолютного нуля уточнено до –273,15 °С, а 1 К определяется как температура, которая приводит к изменению энергии, приходящейся на одну степень свободы частицы, на $1,3806 \cdot 10^{-23}$ Дж (значение постоянной Больцмана). Эталонирование кельвина связано с измерением точной температуры тройной точки воды заданного изотопного состава (приблизительно 0,008 °С). Введение Кельвином понятия термодинамической температуры сыграло огромную роль а развитии термодинамики.

Самая низкая температура на Земле составляет 184 К (–89 °С). Она зафиксирована в 1983 году на российской антарктической станции «Восток» неподалеку от Южного полюса. Среди южных полярников родилось даже присловье «Восток – дело холодное», перефразирующее суховское «Восток – дело тонкое» (из «Белого солнца пустыни»). Чуть выше температура была зафиксирована в сибирском «полюсе холода» вблизи Верхоянска. Самая низкая температура планет и спутников Солнечной системы – это 36,6 К на поверхности Тритона, спутника Нептуна, и 43 К на поверхности Плутона. Интересно, что в глубоких кратерах Луны, куда никогда не заглядывает Солнце, температура, по-видимому, еще ниже. Оценка самой низкой температуры газа в Галактике составляет примерно 1 К (в темном облаке туманности «Бумеранг» в 5000 световых лет от Земли). А «температура» реликтового излучения соответствует 2,725 К. В лабораторных условиях с 1911 года самой низкой



Барон Кельвин Лангрский

температурой была температура сжижения гелия – примерно 4 К. Но современная наука изобрела много способов достижения еще более низких температур. Осенью 2021 года достигнута рекордно низкая температура $3,8 \cdot 10^{-11}$ К. И это не предел!

В термодинамике Кельвин сделал немало и кроме своего эпохального открытия. Это и эффект Джоуля–Томсона для реальных газов, и термоэлектрический эффект Томсона. Занимался он и молекулярной физикой, экспериментально измеряя давление под изогнутой поверхностью жидкостей из-за поверхностного натяжения. Рассматривая неустойчивость движения большого количества связанных капель жидкости, он вместе с Гельмгольцем установил возможность появления так называемых «турбулентных облаков», грандиозных облачных и пенных морских вихрей, действительно наблюдаемых в природе. Интересно, что зоркие глаза художников замечали такие облака и включали их в свои пейзажные композиции (например, «Звездная ночь» Ван Гога или «Большая волна в Канагаве» Хокусая).

О достижениях Кельвина в электротехнике рассказано достаточно в предыдущем разделе статьи. Трудно переоценить его роль в создании приборов и установок – это прежде всего точные приборы для измерения количества электричества, силы тока, напряжения, сопротивления, контроля телеграфных передач, оптических измерителей температуры и др. Его увлечение морскими плаваниями привело к созданию точного и удобного навигационного магнитного компаса, защищенного от влияния всех железных предметов и корпуса корабля, а также точного измерителя скорости судна. Сконструировал он и прибор для проверки тормозных вагонных буксов. А водопроводный кран Кельвина является прообразом всех современных хороших водопроводных кранов.

Значительна роль Кельвина в создании в английских университетах научных и учебных физических лабораторий. Им были впервые введены в университетские учебные планы курсы учебной научно-исследовательской работы студентов.

Можно еще много чего рассказать о научных и педагогических заслугах Кельвина. Но вместо этого в заключение остановимся на необычной для юбилейной статьи теме.

О заблуждениях Кельвина

Возможно, что причиной несправедливого забвения достижений великого ученого были два его заблуждения, которые он активно (и слишком нервно) выдвигал и неоднократно защищал в статьях и выступлениях в конце жизни.

Первое – это неправильная оценка возраста Солнца (и соответственно, Земли). По Кельвину, это примерно 50 миллионов лет. В его время, конечно, не могло быть других представлений о Солнце, кроме как об огромной топке, где горит неведомое нам топливо. Знание массы Солнца, температуры его поверхности (по излучению) и максимально возможных энергий химических реакций (горения) дали Кельвину возможность рассчитать такой возраст Солнца. А Земля, получив от Солнца первоначальный жар, с тех пор остывает. Скорость этого остывания, согласно решениям уравнений теплопроводности, давала оценку возраста Земли не более 40 миллионов лет. И это были достаточно точные расчеты.

Увы! Кельвин не мог предполагать, что кроме химической теплоты горения может существовать гораздо большая удельная энергия. Открытие радиоактивности в самом конце XIX века уже наталкивало на неведомые еще науке внутриатомные процессы. Но оценить энергию этих процессов можно было только после развития ядерной физики и создания теории относительности.

Яростно сопротивлялись кельвиновским оценкам возраста Земли геологи и биологи. Геологи считали доказанным, что даже осадочные породы в земной коре имеют гораздо больший возраст. Это вытекало из измерений скорости осадконакопления в озерах и морях. А у биологов были свои доводы за более длительный возраст Земли. Биологи-эволюционисты доказывали, что для эволюции живого мира от амебы к человеку потребовались не миллионы, а миллиарды лет. Чарльз Дарвин в конце жизни говорил, что физики разрушают дело всей его жизни. Правда биологи-креационисты из-за глобальных различий между, скажем, рыбами, улитками, змеями и человеком верили, что разнообразнейшие виды жизни на Земле не могли появляться сами по себе, а могли быть только созданы Творцом и ему вполне хватило для этого миллионов лет. Тем более, что физики подтверждают такой возраст Земли. Кельвин был глубоко верующим христианином – для шотландца это неудивительно, и глубокая вера в Творца его никогда не покидала.

Гораздо более известно второе заблуждение Кельвина. Джоуль, Кельвин, Клаузиус, Гельмгольц и Больцман построили грандиозное здание термодинамики, которое дало жизнь новым машинам (паровозы и тепловозы, пароходы и теплоходы, автомобили, самолеты и ракеты). А гений Фарадея и Максвелла привел к завершению не менее величественного здания электродинамики и созданию электротехники.

«Век пара» стал изменяться и превращаться в «век электричества». Появление радио, открытие электрона и рентгеновского излучения Кельвин считал закономерными следствиями электродинамики. И он не предполагал, что эти открытия могут серьезно повлиять на развитие цивилизации.

Влюбленный в физику и покоренный ее успехами, Кельвин был уверен, что термодинамика и электродинамика – это вершинные достижения человеческого понимания природы и что наука должна заниматься претворением этих достижений в технику на благо улучшения условий жизни. Но все-таки кое-что его смущало. Так, 27 апреля 1900 года на лекции в Королевском институте он повторил то, что уже опубликовал в статье, озаглавленной «Тучи 19-го века над динамической теорией». Вот его слова: «Красота и ясность динамической теории, согласно которой теплота и свет являются формами движения (энергии), в настоящее время омрачена двумя тучами. Первая из них – это вопрос о том, как может Земля двигаться сквозь упругую среду, какой по существу является светоносный эфир? Второе – это доктрина Максвелла–Больцмана о распределении энергии, которая не согласуется с надежными измерениями теплового излучения тел». И пессимистическое заключение: «Простейший путь просто в том, чтобы не обращать внимания на существование этих туч».

Ссылаясь на статьи и выступления Кельвина, ряд физиков в европейских университетах заявляли о конце физики как развивающейся науки. «Все главное уже сделано, осталось только делать все более точные измерения», – именно так сказал молодому Максу Планку один из профессоров Мюнхенского университета, с которым Планк консультировался по поводу выбора темы для диссертации. К счастью для науки, Планк не внял совету маститого профессора и занялся теоретической термодинамикой. Результат этого выбора известен.

Но ведь и Генрих Герц, первым получивший на опыте электромагнитное излучение, вскоре после этого открытия читая лекцию студентам, на вопрос, каким может быть применение этого излучения, ответил: «А никаким!» Но всего лишь через несколько лет появилось радио.

И еще пример. Альберт Эйнштейн после рождения в 1905 году формулы $E = mc^2$ написал в одной из статей: «Нет ни малейших признаков того, что атомная энергия когда-нибудь станет доступна людям. Это значило бы, что человек научился расщеплять атом».

Слова Кельвина о двух «тучах», омрачающих стройное здание физической науки, были основаны на блестящем знании физики, которую он развивал. И его гениальность проявилась в том, что именно из этих «туч» родилась современная физика, которая не только не завершена, но и конца-края не видно ее завершению. «Светоносный эфир», колебаниями которого считались электромагнитные волны, после опытов Майкельсона и создания теории относительности оказался ненужным и вскоре был забыт. Осталось только образное упоминание этого слова как синонима радиосвязи. Затруднение с теорией теплового излучения (вторая «туча») получило даже пугающее название «ультрафиолетовая катастрофа». Но уже в самом конце 1900 года блестящая работа Планка показала, что никакой катастрофы нет. Родились квантовые представления об излучении.

Кельвин не дожил до торжества квантовой теории и создания квантовой механики. Кто знает, не раскаялся бы он в своих словах и мыслях, которые так активно проповедовал в конце жизни. Об этой трагедии в научном пути Кельвина сказал один из его биографов Ч.Уотсон в 1969 году: «В первую половину его карьеры Томсон казался неспособным ошибиться, во вторую – неспособным на правоту». Кто-то сказал: «Есть два вида предсказателей. Одни не знают, о чем говорят. Другие не знают, что они не знают, о чем говорят». Кельвин явно принадлежал к предсказателям второй группы, он не успел узнать того, что опровергало его суждения.

И перефразируя Пушкина, можно сказать, что гениальные люди и ошибаются по–гениальному. Гениальные ошибки могут иметь следствиями и гениальные открытия.

Игра в нетранзитивные кости

Д.ФОМИН

Определение 5. Будем говорить, что набор $A = (a_1, \ldots, a_m)$ *гораздо сильнее* набора $B = (b_1, \ldots, b_n)$, если $p(A \succ B) \geq 3/4$. Иными словами, среди mn неравенств $a_i > b_j$ $(1 \leq i \leq m;\ 1 \leq j \leq n)$ не менее *трех четвертей* верны (это можно также описать так: случайное число из набора A выигрывает у случайного числа из набора B в *три раза* чаще, чем проигрывает); будем обозначать это соотношение $A \gg B$.

Теорема 2. *Не существует нетранзитивной цепочки наборов* $A_1, A_2, \ldots, A_N$ *такой, что*

$$A_1 \gg A_2 \gg \ldots \gg A_N \gg A_1. \qquad (**)$$

Доказательство. Начнем с несложной леммы.

Лемма 2.1. *Если набор* $A = (a_1 \leq \ldots \leq a_m)$ *гораздо сильнее набора* $B = (b_1 \leq \ldots \leq b_n)$, *то* $a_p > b_q$, *где* $p = [(m+1)/2]$, $q = [(n+1)/2]$. *Иными словами, медиана набора A должна превосходить медиану набора B.*[4]

Доказательство леммы. Допустим, что $a_p \leq b_q$. Тогда, если мы будем считать количество верных неравенств $a_i > b_j$, то каждый из первых p членов последовательности A даст вклад, не превышающий $q-1$, а каждый из оставшихся $m-p$ членов даст вклад не более n. Таким образом мы получим не более чем $p(q-1)+(m-p)n$ верных неравенств $a_i > b_j$. Теперь воспользуемся тем, что $p = m/2 + \varepsilon_1$, $q = n/2 + \varepsilon_2$, где оба числа ε_1 и ε_2 равны либо 0, либо 1/2. Тогда

$$p(q-1)+(m-p)n =$$

$$= \left(\frac{m}{2}+\varepsilon_1\right)\left(\frac{n}{2}+\varepsilon_2-1\right)+\left(\frac{m}{2}-\varepsilon_1\right)n =$$

$$= \frac{3}{4}mn - \left[\frac{n}{2}\varepsilon_1 + \frac{m}{2}(1-\varepsilon_2)+\varepsilon_1(1-\varepsilon_2)\right] < \frac{3}{4}mn,$$

что противоречит условию, ведь количество верных неравенств $a_i > b_j$ должно быть не меньше, чем $\frac{3}{4}mn$.

Возвращаясь к доказательству теоремы, заметим: из леммы 2.1 теперь следует, что если имеется нетранзитивная цепочка (**), состоящая из наборов $A_k = \left(a_1^{\langle k\rangle} \leq \ldots \leq a_{m_k}^{\langle k\rangle}\right)$ при $1 \leq k \leq n$, то верна цепочка неравенств

$$a_{p_1}^{\langle 1\rangle} > a_{p_2}^{\langle 2\rangle} > \ldots > a_{p_n}^{\langle n\rangle} > a_{p_1}^{\langle 1\rangle},$$

(где m_k – это размер набора A_k, а $p_k = [(m_k+1)/2]$), что, конечно, невозможно.

Итак, вероятность 3/4 оказалась чрезмерно высокой. Это означает, что не существует такого набора игральных костей, который бы гарантировал, что второй игрок в среднем будет выигрывать 50 копеек (или больше) при каждом броске выбранных костей.

Но где же именно находится эта граница? Насколько сильнее друг друга могут быть кости в нетранзитивной цепочке? Интуитивно ясно, что ответ должен зависеть от длины цепочки и от размера наборов.

Определение 6. Для данного числа α из промежутка $[0;1]$ и двух конечных наборов чисел $A = (a_1 \leq \ldots \leq a_n)$ и $B = (b_1 \leq \ldots \leq b_m)$ будем говорить, что набор A *α-сильнее*, чем набор B, если $p(A \succ B) \geq \alpha$; иными словами, среди mn неравенств $a_i > b_j$ $(1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m)$ доля верных составля-

Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.

[4] Медианой конечного набора S чисел называется элемент $s \in S$ такой, что количество чисел набора, меньших s, равно количеству чисел набора, больших (или не меньших, если количество элементов набора четно) s.

ет не менее α; будем обозначать это соотношение $A \overset{\alpha}{\gg} B$ (или $B \overset{\alpha}{\ll} A$).

Соответственно, будем говорить об α-нетранзитивной цепочке, если в ней каждый набор α-сильнее следующего.

В теореме 2 мы доказали, что не существует 3/4-нетранзитивных цепочек (причем произвольного размера и произвольной длины!). Пример 3 (кубики Эфрона) показывает, что для $\alpha = 2/3$ такая цепочка (длины 4) существует. А наш самый первый пример 1 демонстрирует, что для числа $\alpha = 7/12$ и, конечно же, для всех чисел меньше, чем 7/12, существуют α-нетранзитивные цепочки длины 3.

Примечание. Тот факт, что не существует трех кубиков A, B и C (с произвольным числом граней), для которых $A \overset{\alpha}{\gg} B \overset{\alpha}{\gg} C \overset{\alpha}{\gg} A$ при $\alpha = 2/3$, был предложен в качестве задачи на Санкт-Петербургской городской олимпиаде 2022 года.

Задача 4. *Придумайте пример α-нетранзитивной цепочки (какой угодно длины) для какого-то значения $\alpha > 2/3$. Наборы в цепочке не обязаны быть «кубиками», т.е. они могут содержать более шести чисел.*

Нетранзитивных цепочек длины 2 не бывает – это совсем очевидно. Следовательно, длина 3 – это следующий шаг в нашем исследовании, и он уже представляет собой нетривиальную задачу.

Для каких же значений $\alpha > 1/2$ существуют α-нетранзитивные цепочки длины 3? Иными словами, насколько выгодной для вас (в роли второго игрока) может быть игра в нетранзитивные кости, если игровой набор содержит три «кубика»? Ведь чем больше число α, тем больше ваш средний выигрыш.

Задача 5. *Найдите наименьшее число α^*, для которого не существует α^*-нетранзитивных цепочек длины 3.*

Нам уже известно, что $\alpha^* \geq \dfrac{7}{12} \approx 0,583$. Но может быть существуют примеры с большей нетранзитивностью?

Это действительно так. Рассмотрим совсем простой пример с нетранзитивностью, равной $3/5 = 0,6$. Пусть набор A состоит из 2 пятерок и 3 двоек, набор B – из 3 четверок и 2 единиц, набор C – из 5 троек. Тогда количество верных неравенств при сравнении наборов A и B равно $2 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 16$, т.е. вероятность победы A над B равна $16/25 \approx 0,64$, а при сравнении B и C (равно как и при сравнении C и A) это число равно $3 \cdot 5 = 15$ и вероятность победы равна $15/25 \approx 0,6$.

Если внимательно изучить этот пример, то станет ясно, что тут замешаны … числа Фибоначчи! И в самом деле, давайте предположим, что наши три набора устроены вот так:

$$A = (\underbrace{2,2,\ldots,2}_{m\text{ двоек}}, \underbrace{5,5,\ldots,5}_{n\text{ пятерок}}),$$

$$B = (\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n\text{ единиц}}, \underbrace{4,4,\ldots,4}_{m\text{ четверок}}),$$

$$C = (\underbrace{3,3,\ldots,3}_{m+n\text{ троек}}).$$

Легко видеть, что вероятности побед $p(A \succ B)$, $p(B \succ C)$ и $p(C \succ A)$ равны соответственно

$$\frac{n(m+n)+mn}{(m+n)^2}, \quad \frac{m(m+n)}{(m+n)^2} \text{ и } \frac{m(m+n)}{(m+n)^2}.$$

Если мы обозначим отношение $m/(n+m)$ через x, то сразу получим, что эти вероятности равны $1-x^2$, x и x. Значит, нам надо найти значение x такое, что минимальное из двух чисел $1-x^2$ и x имеет максимально возможное значение. Поскольку функция $f(x) = x$ монотонно возрастает на отрезке $[0; 1]$, а функция $g(x) = 1-x^2$ монотонно убывает, то ясно, что это значение достигается в точке пересечения графиков этих функций, т.е. при $x = 1-x^2$ (рис. 4). Решая это уравнение, получаем $x = \left(\sqrt{5}-1\right)/2 \approx 0,618034$. Это число обычно обозначается φ и называется «золотым сечением» (то же название часто используют и для числа $1/\varphi = \varphi + 1 \approx 1,618034$).

Поскольку φ иррационально, то достигнуть такой нетранзитивности (или превзойти ее) в примерах указанного выше типа нельзя. Однако для любого числа

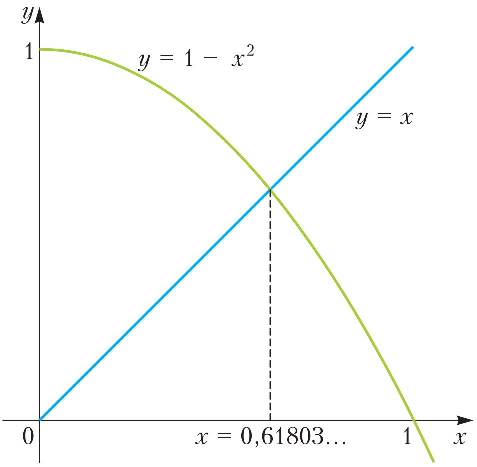


Рис. 4

$x < \varphi$ мы можем получить пример x-нетранзитивной тройки. Надо только выбрать числа m и n достаточно большими и такими, чтобы отношение $m/(n+m)$ было меньше числа φ, но при этом очень близко к нему, так, чтобы оба выражения превосходили число x. Это можно сделать, используя числа Фибоначчи с большими номерами. Например, если мы рассмотрим $m = \Phi_k$, $n = \Phi_{k-1}$, то получим вероятности побед

$$\frac{\Phi_{k-1}\Phi_{k+2}}{\Phi_{k+1}^2} \text{ и } \frac{\Phi_k}{\Phi_{k+1}}.$$

Воспользуемся тождеством $\Phi_{k-1}\Phi_{k+2} = \Phi_k\Phi_{k+1} + (-1)^k$ и получим, что первая вероятность равна

$$\frac{\Phi_{k-1}\Phi_{k+2}}{\Phi_{k+1}^2} = \frac{\Phi_k\Phi_{k+1} + (-1)^k}{\Phi_{k+1}^2} = \frac{\Phi_k}{\Phi_{k+1}} + \frac{(-1)^k}{\Phi_{k+1}^2}.$$

Стало быть, разница между этими двумя вероятностями чрезвычайно мала. Осталось только заметить, что по известному свойству чисел Фибоначчи отношение $\frac{\Phi_k}{\Phi_{k+1}}$ стремится к φ при $k \to \infty$.[5]

Теорема 3. *Не существует трех конечных наборов A, B и C, образующих φ-нетранзитивную цепочку.*

Другими словами, какие бы три игральные кости (со сколь угодно многими гранями) вы ни взяли для игры в нетранзитивные кубики, вы не сможете гарантировать себе средний выигрыш, превосходящий $2\varphi - 1$ рубля (примерно 24 копейки) за каждый бросок.

Докажем сначала более слабую оценку, а затем вернемся к доказательству теоремы 3.

Теорема 3′. *Не существует трех конечных наборов A, B и C, образующих 2/3-нетранзитивную цепочку.*

Доказательство. Допустим, что все же удалось найти такие наборы $A = (a_i)$, $B = (b_i)$ и $C = (c_i)$, что

$$A \overset{\alpha}{\gg} B \overset{\alpha}{\gg} C \overset{\alpha}{\gg} A$$

для $\alpha = 2/3$.

Будем считать, что числа в наборах упорядочены по возрастанию, т.е. $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ и $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$ (можно также ради удобства считать, что все три набора имеют одинаковую длину). Введем две монотонно неубывающие (и кусочно-постоянные) функции f, g: $[0;1] \to [0;1]$, определяемые следующим образом.

Пусть $g(0) = 0$. Далее для каждого $k = 1, \ldots, n$ положим значение функции g во всех точках интервала $\left]\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}\right]$ равным количеству чисел набора B, меньших числа a_k, поделенному на n. Укажем, кстати, на тот очевидный факт, что это количество равно наибольшему номеру l такому, что $a_k > b_l$.

Аналогично определим функцию $f(x)$, но для наборов B и C. Тем самым, $f(0) = 0$, а для любого k от 1 до n значение f на интервале $\left]\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}\right]$ равно количеству чисел набора C меньших числа b_k, поделенному на n.

Тогда нетрудно видеть, что отношения $A \overset{\alpha}{\gg} B$ и $B \overset{\alpha}{\gg} C$ означают в точности то, что площадь под графиком каждой из функций g и f не меньше $\alpha = 2/3$.

В то же время ясно, что доля верных неравенств $a_i > c_j$ не меньше, чем площадь

---

[5] Упомянутые выше свойства чисел Фибоначчи можно найти в книге [3].

под графиком композиции f и g – функции $f\left(g\left(x\right)\right)$. В самом деле, если мы рассмотрим любое значение $1 \le i \le n$, то сколько имеется чисел в наборе C, меньших a_i? Если обозначить $g\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{k}{n}$, то это означает, что $a_i > b_k$. Далее, пусть $f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{l}{n}$, т.е. $b_k > c_l$. Следовательно, $a_i > c_l$, т.е. заведомо имеется не менее l верных неравенств $a_i > c_j$ (их вполне может быть и больше, но нам про это на данный момент ничего не известно). Поскольку $\frac{l}{n} = f\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(g\left(\frac{i}{n}\right)\right)$, то мы получаем, что доля верных среди всех неравенств $a_i > c_j$ не меньше, чем интеграл (площадь под графиком) функции $f\left(g\left(x\right)\right)$.

Осталось только доказать следующую любопытную лемму из математического анализа, которая, вообще говоря, не имеет никакого отношения к нетранзитивным костям.

Лемма 3.1. *Даны две монотонно неубывающие кусочно-линейные функции*[6] f, g: $[0;1] \to [0;1]$ *такие, что*

$$\int_0^1 f\left(x\right)dx = \alpha,\ \int_0^1 g\left(x\right)dx = \beta.$$

Тогда выполняется неравенство

$$\int_0^1 f\left(g\left(x\right)\right)dx \ge \alpha + \beta - 1.$$

Доказательство. Рассмотрим куб $I^3 = [0;1]\times[0;1]\times[0;1]$ и два его подмножества F и G, определяемые следующим образом:

$$F = \left\{\left(x,y,z\right) : z \le f\left(y\right)\right\},$$

$$G = \left\{\left(x,y,z\right) : y \le g\left(x\right)\right\}.$$

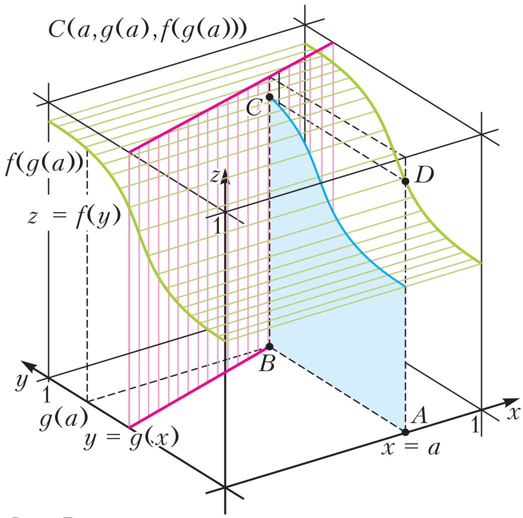


Рис. 5

Иначе говоря, F есть область под графиком функции $z = f\left(y\right)$ в плоскости yz, «умноженная» на отрезок $[0;1]$ в направлении x, а G – это область под графиком функции $y = g\left(x\right)$ в плоскости xy, «умноженная» на отрезок $[0;1]$ в направлении z (рис. 5). Ясно, что $\mathrm{V}\left(F\right) = \alpha$, $\mathrm{V}\left(G\right) = \beta$ (здесь V обозначает функцию объема).

Обозначим пересечение областей F и G через H, т.е. $H = F \cap G$. Сечение области H произвольной плоскостью $x = a$, как легко видеть, лежит внутри прямоугольника $ABCD$ размерами $f\left(g\left(a\right)\right)\times g\left(a\right)$ и потому по площади оно не превосходит $f\left(g\left(a\right)\right)\cdot g\left(a\right) \le f\left(g\left(a\right)\right)$ (см. рис. 5). Следовательно,

$$\mathrm{V}\left(H\right) \le \int_0^1 f\left(g\left(x\right)\right)dx.$$

С другой стороны, мы имеем

$$\mathrm{V}\left(H\right) = \mathrm{V}\left(F \cap G\right) =$$

$$= \mathrm{V}\left(F\right) + \mathrm{V}\left(G\right) - \mathrm{V}\left(F \cup G\right) \ge \alpha + \beta - 1,$$

так как $\mathrm{V}\left(F \cup G\right)$ не превосходит $\mathrm{V}\left(I^3\right) = 1$. Получаем

$$\int_0^1 f\left(g\left(x\right)\right)dx \ge \mathrm{V}\left(H\right) \ge \alpha + \beta - 1,$$

что нам и требовалось.

Теперь используем лемму 3.1 для доказательства теоремы 3′. Начнем с того, что

[6] Вообще говоря, годятся любые монотонно неубывающие функции f, g: $[0;1] \to [0;1]$, но для простоты восприятия и ради избежания ненужных и малоинтересных сложностей в доказательстве мы упрощаем условие. Имейте в виду, что кусочно-линейные функции не обязаны быть непрерывными.

для нашего случая в лемме имеет место строгое неравенство. Обратите внимание на то, что в доказательстве леммы 3.1 мы пользуемся неравенством $f(g(a))\cdot g(a)\le$ $\le f(g(a))$. Но хотя бы для одного значения a обязательно выполняется строгое неравенство $f(g(a))\cdot g(a)<f(g(a))$.

И в самом деле, если это не так, то для любого $a\in[0;1]$ либо $f(g(a))=0$, либо $g(a)=1$. Рассмотрим минимальное значение a, для которого $g(a)=1$, и обозначим его γ. Тогда из условий леммы следует, что $\gamma\ge 1-\beta$, $\alpha\le 1-\gamma$, откуда в нашем конкретном случае – когда $\alpha=\beta=2/3$ – следует, что $\gamma=1/3$. Значит, $f(x)=0$ при $x<1/3$. Также мы получаем, что площадь под графиком функции g равна 2/3 уже на интервале $[1/3;1]$, а следовательно, $g(x)=0$ при $x<1/3$. Следовательно, обе функции f и g одинаковы с точностью до своего значения в точке $\gamma=1/3$ и почти всюду (за исключением этой самой особой точки) определяются формулой

$$f(x)=g(x)=\begin{cases}0, & x<\dfrac{1}{3},\\ 1, & x>\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

Для таких функций мы получаем, что $f(g(x))=f(x)$ (всюду кроме, возможно, точки $x=1/3$), и тогда интеграл композиции равен $2/3>1/3$.

Итак, мы доказали, что доля верных неравенств $a_i>c_j$ заведомо строго больше, чем $2/3+2/3-1=1/3$, а потому доля верных неравенств $c_i>a_j$ должна быть строго меньше 2/3 – следовательно, соотношение $C\overset{\alpha}{\gg}A$ невозможно.

Таким образом, теорема 3′ доказана.

Теперь вернемся к случаю, когда $\alpha=\varphi$. Для него надо воспользоваться более точным вариантом леммы 3.1.

Лемма 3.2. *Даны две монотонно неубывающие (кусочно-линейные) функции f, g: $[0;1]\to[0;1]$ такие, что*

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\alpha,\quad \int_0^1 g(x)\,dx=\beta.$$

Тогда выполняется неравенство

$$\int_0^1 f(g(x))\,dx\ge\min\left(\alpha\beta,\frac{\alpha+\beta-1}{\max(\alpha,\beta)}\right).$$

Доказательство этой леммы (равно как и нахождение примеров, для которых это неравенство превращается в равенство) мы оставляем нашим бесстрашным читателям.

Теперь, если мы имеем тройку костей A, B и C такую, что

$$A\overset{\varphi}{\gg}B\overset{\varphi}{\gg}C,$$

то из леммы 3.2 следует, что $A\overset{\varphi^2}{\gg}C$ (отметим, что $\varphi^2=(2\varphi-1)/\varphi$). Но поскольку $\varphi^2+\varphi=1$, то мы получаем, что отношение $C\overset{\varphi}{\gg}A$ невозможно (напоминаем, что φ иррационально и потому доля верных неравенств не может в точности равняться этому числу).

Примечание. Общее решение данной задачи для произвольного количества костей было найдено польским математиком Станиславом Трыбулой – оно приведено в статьях [4], [5], [6]. Оказывается, что максимальное возможное значение α, для которого существует α-нетранзитивная цепочка из m костей, равно ρ, где $\rho=p_{m-1}$ однозначно определяется из системы уравнений и неравенств

$$\begin{cases}p_1=p_2(1-p_1)=\ldots=p_{m-1}(1-p_{m-2})=1-p_{m-1},\\ \dfrac{1}{4}<p_i<\dfrac{3}{4}.\end{cases}$$

Возвращаясь к наборам произвольной длины, напомним, что в теореме 2 было доказано, что сколько бы у нас ни было игральных костей, невозможно достичь гарантированной вероятности выигрыша не меньшей чем 3/4 (или, что же самое, гарантированного среднего выигрыша, равного или превосходящего $3/4-1/4=1/2$).

Задача 6. *Докажите, что для любого числа $\alpha<3/4$ существует α-нетранзитивная цепочка некоторой конечной длины.*

Теперь давайте изучим другой естественный вопрос, который, вполне возможно, уже возник у читателя в самом начале статьи. Что если некоторые числа на гранях игральных костей равны между собой? Тогда при броске возможен ничейный исход, что, конечно же, влияет на среднюю величину выигрыша.

Определение 7. Для каждой пары натуральных чисел m, $n > 2$ определим число $\mathcal{W}(m,n)$ как максимально возможный гарантированный средний выигрыш в игре с m костями, каждая из которых имеет не более чем n граней (с допущением равенства некоторых чисел на разных костях, т.е. без ограничения (∗)).

Примечание. Например, можно считать, что задача 3 утверждает, что $\mathcal{W}(3,6) = 7/12 - 5/12 = 1/6$. Для костей с разными числами, как мы уже отметили выше, из теоремы 2 следует, что для любых m, n верно неравенство $\mathcal{W}(m,n) < 1/2$. Но верно ли это, если ограничение (∗) отменено?

Задача 7. *Докажите, что* $\mathcal{W}(3,3) = 1/9$. *Другими словами, докажите, что не существует набора из трех трехгранных костей такого, что для любой кости A в наборе найдется другая кость B такая, что средний выигрыш B у A превосходит* 1/9. *Набор из примера* 5 *показывает, что гарантированный средний выигрыш* 1/9 *возможен.*

Примечание. Задача по отысканию значения $\mathcal{W}(20,20)$ (но с ограничением (∗)) была предложена на Московской городской олимпиаде 2003 года (задача 11–6). Ответ равен 9/20 (как видите, он довольно близок к 1/2).

Следующий пример показывает, что достичь среднего выигрыша 1/9 можно и на наборе игральных костей, в котором есть числа, использованные более чем на одной кости. Здесь опять каждая кость сильнее следующей за ней, а последняя – сильнее первой, при этом средний выигрыш в каждой паре равен 1/9.

Пример 7

$$A = (1, 4, 4),$$
$$B = (3, 3, 4),$$
$$C = (2, 3, 5).$$

Так, например, в игре «A против B» кость A выигрывает в четырех случаях из девяти возможных, кость B выигрывает в трех случаях и в двух оставшихся вариантах мы имеем ничью. Поэтому $w(A \succ B) = 4/9 - 3/9 = 1/9$.

Стало быть, в поисках оптимального набора костей все-таки имеет смысл искать такие, где на разных костях могут встречаться одинаковые числа? Оказывается, что ответ на этот вопрос скорее отрицателен, так как такие варианты можно безболезненно отбросить.

Задача 8. *Докажите, что для любой пары натуральных чисел m, n > 2 существует набор из m костей, каждая из которых имеет не более n граней, в котором никакие два использованных числа не равны между собой и для которого достигается максимум среднего выигрыша* $\mathcal{W}(m,n)$.

Мы очень рекомендуем заинтересовавшимся читателям прочитать популярные статьи [6] и [7], в которых, в частности, разбирается полное решение обобщенной задачи 6 и теорема 3, а также статью [8], посвященную некоторым другим задачам о нетранзитивных костях.

Интересны также задачи о том, насколько часто случайный набор из нескольких костей является нетранзитивным. Обзор некоторых результатов на эту тему можно прочитать в статье [9].

Литература

1. *H.Steinhaus, S.Trybuła.* On a Paradox in Applied Probabilities. – Bull. Acad. Polon. Sci., 7 (1959), p. 67–69.
2. *М.Гарднер.* Крестики-нолики. – М.: Мир, 1988.
3. *Н.Н.Воробьев.* Числа Фибоначчи. – М.: Наука, 1978.
4. *S.Trybuła.* On The Paradox of Three Random Variables. – Applicationes Mathematicae, vol. 5, №4 (1961), p. 321–332.
5. *S.Trybuła.* On The Paradox of *n* Random Variables. – Applicationes Mathematicae, vol. 8, №2 (1965), p. 143–154.
6. *R.P.Savage.* The Paradox of Nontransitive Dice. – The American Mathematical Monthly, vol. 101, №5 (1994), p. 429–436.
7. *И.И.Богданов.* Нетранзитивные рулетки. – Математическое просвещение, 2010, выпуск 14, с. 240–255.
8. *А.Нестеренко.* Нетранзитивные кости. – «Квант», 2021, №10.
9. *B.Conrey et al.* Nontransitive Dice. – Mathematics, vol. 89, №2 (2016), p. 133–143.

Плохие стрелки

А.ЗАБОЛОТСКИЙ

Онлайн-энциклопедия целочисленных последовательностей – The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, OEIS – это ценный источник сведений для любителей математических задачек и ученых, работающих в области комбинаторики и теории чисел, а для некоторых – многолетнее увлечение и заметная часть жизни. Энциклопедия «живет» в интернете по адресу oeis.org. В ней уже больше 350 тысяч записей, и она продолжает непрерывно пополняться.

OEIS содержит примечательные последовательности целых чисел, такие как, например, последовательность кубов неотрицательных целых чисел: 0, 1, 8, 27, 64, 125… Каждая запись содержит описание последовательности и ее свойств, формулы и программы для ее вычисления, ссылки на литературу. Предтечей OEIS была картотека последовательностей, которую математик Нил Слоун стал собирать еще в 1960-х годах, а в онлайн эта энциклопедия вышла в середине 1990-х. Наполнением и редактурой энциклопедии занимаются волонтеры со всего мира, принять участие может любой желающий. Хотя OEIS не лишена недостатков: спартанский дизайн, ошибки в системе, наличие надуманных последовательностей, ее содержание интересно и полезно в исследованиях. К тому же в последнее время появились инструменты, которые позволяют извлекать из энциклопедии больше информации. Например, поразительная «Машина последовательностей» (Sequence Machine, sequencedb.net), которая автоматически генерирует гипотезы о связях между последовательностями.

Подробнее об устройстве, истории и перспективах OEIS можно прочитать в [1, 2], а в серии статей в «Кванте» мы поговорим о главном: о самих последовательностях из энциклопедии, которые нам кажутся особенно любопытными и красивыми. Надеемся, что эти статьи станут поводом погрузиться в чтение литературы и самостоятельные исследования заинтересовавших задач.

Первый сюжет, который мы разберем, касается небольшой задачки из теории вероятностей.

Два плохих стрелка

Двое стрелков стреляют в мишень; выигрывает тот, кто попадет первым. Вероятность попадания в мишень для любого из них крайне мала и равна p. Эти не очень меткие стрелки договариваются о честном порядке выстрелов: право сделать выстрел каждый раз предоставляется тому из них, у кого меньше (заранее вычисленная) вероятность выиграть к этому моменту.

Возьмем $p = 0{,}1$; обозначим также $q = 1 - p$. В начале вероятности победы не сделавших ни одного выстрела стрелков составляют $p_0^A = p_0^B = 0$. Начальный выстрел делает стрелок A, и вероятность его победы после этого равна $p_1^A = p = 0{,}1$. Теперь должен стрелять стрелок B, вероятность его победы после выстрела равна $p_2^B = qp = 0{,}09$; множитель q возникает оттого, что для победы B еще нужно, чтобы A не победил раньше него. Поскольку $p_2^B < p_2^A = p_1^A$, следующий выстрел также делает B, и $p_3^B = qp + q^2p = 0{,}171 > p_3^A$, а право выстрела переходит к A. И так далее, см. таблицу 1.

Таблица 1. Два плохих стрелка, $p = 0{,}1$

Сделано выстрелов n	Вероятность победы стрелка A p_n^A	Вероятность победы стрелка B p_n^B	Кто должен стрелять
0	0	0	A
1	0,1	0	B
2	0,1	0,09	B
3	0,1	0,171	A
4	0,1729	0,171	B
5	0,1729	0,23661	A

Если выписать последовательность выстрелов при p, стремящемся к 0, получится следующее:

ABBABAABBAABABBABAABABBAABBABAAB…

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20220702

Возможно, вы узнали знаменитую последовательность Туэ–Морса.

Последовательность Туэ–Морса

Последовательность Туэ–Морса содержится в OEIS под номером A010060. Энциклопедия использует более распространенный вариант последовательности, в котором вместо A и B фигурируют числа 0 и 1.

Последовательность Туэ–Морса получается последовательным приписыванием к уже имеющемуся фрагменту второго такого же, но в котором все элементы заменены на противоположные (0 на 1, 1 на 0). Стартуем с 0:

0
01
0110
01101001
0110100110010110
…

Эта последовательность *самоподобная*: она совпадает с собственной подпоследовательностью, состоящей из каждого второго члена (равно как и со второй подпоследовательностью 1001…, но уже с заменой элементов на противоположные):

0110100110010110…
0 1 1 0 1 0 0 1…

Это наблюдение подсказывает другой способ получить последовательность: начать со строки нулей и многократно произвести подстановку $0 \to 01$, $1 \to 10$.

Еще один способ получить ту же последовательность – подсчитать количество единиц в двоичной записи числа n и взять остаток от деления этого числа на 2. Так вы получите n-й член последовательности Туэ–Морса (подумайте, почему). Этот подход подсказывает и то, как построить аналог последовательности Туэ–Морса, состоящий уже из чисел 0, 1, 2. Нужно сложить цифры в троичной записи числа n и взять остаток от деления на 3 (получится 012120201… – последовательность A053838 в OEIS); аналогично для записи в системе счисления с любым другим основанием. Можно описать эти обобщенные последовательности Туэ–Морса и на языке подстановок (подумайте, как).

Одно из свойств последовательности Туэ–Морса – то, что никакой ее фрагмент не повторяется больше двух раз подряд, в то же время не подряд идущие повторения возможны. Это свойство привело к переоткрытию последовательности с неожиданной стороны. Будущий чемпион мира по шахматам и математик Макс Эйве указал, что если 0 и 1 в последовательности Туэ–Морса соответствуют каким-то различным последовательностям ходов, возвращающим позицию на доске к исходной, то эта последовательность позволит продолжать партию бесконечно долго. Напомним, что в начале XX века в шахматах действовало правило, согласно которому ничья объявлялась при троекратном повторении одной и той же *последовательности ходов* подряд. Чтобы конструкция Эйве перестала работать, современные правила требуют завершить партию при троекратном повторении любой *позиции*.

Еще одно приложение последовательности Туэ–Морса, с одной стороны, красивое, а с другой – интересное, возникает, если попытаться нарисовать ломаную, состоящую из звеньев одинаковой длины, по следующим правилам. Когда в последовательности Туэ–Морса встречается 0, рисуем звено и поворачиваем на 60° налево; когда встречается 1, остаемся на месте и меняем направление рисования следующего звена на 180°. Таким образом, после первого звена следует поворот налево на 60°, после второго – поворот направо на 120° (на 60° налево и еще на 180°) и т.д. Нарисуйте хотя бы полтора десятка звеньев. Что получается?

Заметим, что последовательность Туэ–Морса возникает также в спортивном программировании. Заинтересовавшийся читатель может найти и другие многочисленные приложения последовательности Туэ–Морса, обратившись на oeis.org. Мы же вернемся к стрелкам.

В статье [3] доказано, что честный порядок выстрелов действительно описывается последовательностью Туэ–Морса. Для этого сперва показано, что если сгруппировать члены последовательности по парам, то в каждой паре будет два разных значения (AB BA BA AB…), а затем доказано по индукции свойство самоподобия.

Таблица 2. Три плохих стрелка, $p = 0{,}1$

n	$p_n^{(0)}$	$p_n^{(1)}$	$p_n^{(2)}$	Стреляет
0	0	0	0	0
1	0,1	0	0	1
2	0,1	0,09	0	2
3	0,1	0,09	0,081	2
4	0,1	0,09	0,1539	1
5	0,1	0,15561	0,1539	0
6	0,159049	0,15561	0,1539	2
7	0,159049	0,15561	0,2070…	1
8	0,159049	0,2034…	0,2070…	0
9	0,2020…	0,2034…	0,2070…	0
10	0,2408…	0,2034…	0,2070…	1
11	0,2408…	0,2383…	0,2070…	2
12	0,2408…	0,2383…	0,2384…	1
13	0,2408…	0,2665…	0,2384…	2
14	0,2408…	0,2665…	0,2638…	0
15	0,2637…	0,2665…	0,2638…	0
16	0,2843…	0,2665…	0,2638…	2
17	0,2843…	0,2665…	0,2823…	1

Больше стрелков

Что будет, если соревнуются не два плохих стрелка, а три или больше? Получится ли тот самый аналог последовательности Туэ–Морса для более чем двух чисел, упомянутый выше?

Таблица 2 дает вероятности для $p = 0{,}1$ и трех стрелков, которые теперь обозначаются номерами 0, 1, 2. Последовательность A287150 дает честный порядок выстрелов при p, стремящемся к 0:

0, 1, 2, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 0, 1, 2,
1, 2, 0, 0, 2, 1, 0, 2, 1, 1, 2, 0,
2, 1, 0, 0, 1, 2, 1, 0, 2, 2, 0, 1…

Кое-какую структуру можно углядеть уже в представленном фрагменте. Однако, если рассчитать эту последовательность далее, оказывается, что ее поведение радикально отличается от случая двух стрелков: она довольно быстро становится *периодической*. Тем не менее, доказательства этого факта пока нет.

Открытая проблема. Доказать или опровергнуть, что честная последовательность выстрелов для трех (и более) плохих стрелков является периодической, за исключением начального фрагмента.

Если вам удалось решить эту задачу, дайте нам знать.

Литература

1. *А.Заболотский*. Зачем все эти цифры? – N+1, 2021.

2. *А.Заболотский*. Онлайн-энциклопедия целочисленных последовательностей в 2021 году. – Математическое просвещение, 2021, выпуск 28, с. 199–212.

3. *J.Cooper and A.Dutle*. Greedy Galois Games. – The American Mathematical Monthly, vol. 120, №5 (2013), p. 441–451.

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

***

Однажды Евклида спросили:

– Что бы ты предпочел: два целых яблока или же четыре половинки?

– Четыре половинки, – ответил Евклид.

– Но разве это не одно и то же?

– Конечно, нет. Ведь выбрав половинки, я сразу увижу, червивые яблоки или нет.

***

Знаменитый французский математик Пьер Ферма однажды получил письмо, в котором его спрашивали, является ли число 100895598169 простым. Ферма мгновенно ответил, что это двенадцатизначное число – произведение двух простых чисел 898423 и 112303.

***

Во время лекции кто-то из студентов спросил профессора:

– Пи – это четное число или нечетное?

Лектор, не задумываясь, ответил:

– Конечно, четное, пи – это же 180 градусов.

***

– Который час, не подскажете?

– Без пяти одиннадцать.

– Шесть, что ли?

***

Номер, который вы набрали, является мнимым. Пожалуйста, поверните ваш телефон на 90 градусов и попытайтесь снова.

***

– Назовите несколько простых чисел.

– Ну… Один, два, три, четыре…

– Что?! Четыре, по-вашему, – простое число?

– Да куда уж проще!

(Из книги «Математики тоже шутят»)

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи M2706 – M2709 предлагались на Кавказской математической олимпиаде.

Задачи M2706–M2709, Ф2713–Ф2716

M2706. Шестнадцать команд Национальной хоккейной лиги в первом раунде плей-офф разбиваются на 8 пар и играют друг с другом серии до четырех побед (таким образом, счет в серии может быть 4–0, 4–1, 4–2 или 4–3). После каждого раунда команды, победившие в своих парах, снова разбиваются на пары, а проигравшие команды больше не принимают участие в турнире. После четвертого финального раунда оказалось, что ровно у k команд суммарное количество побед во всех играх не меньше, чем количество поражений (например, под условие подходит команда, победившая в первом раунде со счетом 4–2 и проигравшая во втором со счетом 4–3: у нее $4+3=7$ побед и $2+4=6$ поражений). Найдите наименьшее возможное значение k.

П.Кожевников

M2707. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, представимых в виде $\frac{a-1}{b}+\frac{b-1}{c}+\frac{c-1}{a}$, где a, b, c – попарно различные натуральные числа, большие 1.

Л.Емельянов, И.Кухарчук

M2708. а) Можно ли отметить на плоскости 2021 точку с целыми координатами, чтобы попарные расстояния между точками оказались последовательными целыми числами?

б) Существуют ли 100 точек на плоскости такие, что попарные расстояния между ними – попарно различные последовательные целые числа, большие 2022?

В.Брагин, М.Сагафиян (Иран)

M2709*. В стране $n > 2022$ городов. Некоторые пары городов соединены прямыми авиалиниями. Назовем распределение авиалиний между двумя компаниями *правильным*, если в нем не найдется трех городов, любые два из которых соединены одной и той же компанией. Оказалось, что правильного распределения авиалиний не существует. Правительство хочет закрыть все города, кроме 2022-х. Всегда ли это можно сделать так, чтобы у авиалиний между оставшимися городами не было правильного распределения?

Д.Демин

Ф2713. Динамометр состоит из корпуса массой M, скрепленного с однородной пружиной массой m. На корпусе нанесены деления шкалы. Масса пружины распределена равномерно по ее виткам. К крючку на корпусе приложили силу $\vec{F}$, а к свободному концу пружины приложили силу $\vec{f}$, направленную противоположно силе $\vec{F}$. Силу какой величины показывает этот динамометр? Никаких других сил, которые действовали бы на него, нет.

С.Дмитриев

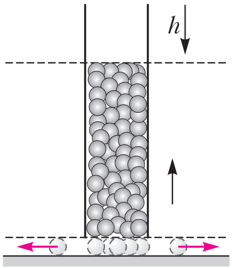


Рис. 1

Ф2714. На гладкой горизонтальной поверхности вертикально стоит стеклянная трубка (рис. 1). В этот прозрачный сосуд (без донышка) насыпают большое число очень маленьких идеальных по форме шариков. В некоторый момент времени трубку быстро приподнимают на высоту чуть больше диаметра шарика. Под действием гравитации эта «шариковая» жидкость начинает выливаться из трубки, растекаясь по горизонтальной плоскости. Определите время вытекания и радиальную плотность двумерной шариковой пленки к этому моменту времени. Считайте данными следующие величины: h – начальная высота шариковой жидкости в сосуде, g – ускорение свободного падения. Диаметр шариков d значительно меньше диаметра сосуда и начальной высоты h. Трение в системе отсутствует.

А.Власов

Ф2715. Тяжелый шарик пренебрежимо малых размеров может совершать движение над осесимметричной параболической чашей, ось которой направлена вертикально вверх, абсолютно упруго отражаясь от ее стенок. Предполагается, что в начальный момент времени шарик находился на оси чаши на расстоянии h от донышка и ему была придана начальная скорость, перпендикулярная этой оси. Оказалось, что начальная скорость была подобрана так, что, отразившись от стенки чаши, шарик по той же траектории начал движение назад, т.е. в силу симметрии чаши движение оказалось периодическим. Найдите период этого периодического движения, предполагая, что ускорение силы тяжести равно g, а чаша получена вращением параболы $z = \frac{x^2}{2p}$ вокруг вертикали, содержащей ее ось. Параметр параболы p имеет размерность длины.

А.Буров

Ф2716. В сосуде кубической формы объемом 1 л с жесткими, не проводящими тепло и не имеющими теплоемкости зеркальными (100%) стенками находился атомарный водород при температуре 1 К и под давлением 1 Па. В результате столкновений атомов часть атомов объединились и образовались пары, т.е. молекулярный водород. Какая температура установилась в этом сосуде, когда процесс образования пар закончился и наступило тепловое равновесие? На рисунке 2 показана зависимость от температуры части (от общего количества) диссоциировавших двухатомных молекул водорода. Можно считать, что при температурах меньше 3000 К эта часть равна нулю, при температурах больше 5000 К эта часть равна единице, т.е. диссоциировали все молекулы, а в промежутке от 3000 до 5000 К эта зависимость линейная. Энергия диссоциации одной молекулы водорода равна 4,477 эВ.

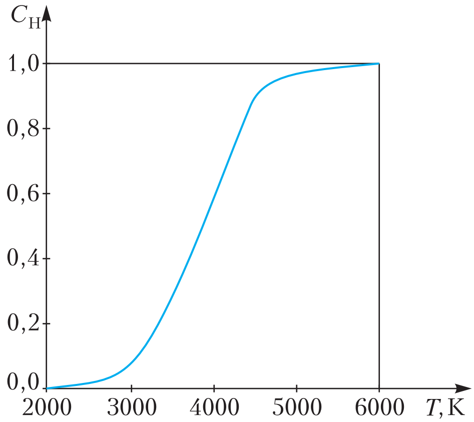


Рис. 2

С.Варламов

Решения задач М2694–М2696, Ф2701–Ф2704

М2694. *Назовем натуральное число n интересным, если любое натуральное число, не превосходящее n, может быть представлено в виде суммы нескольких (возможно, одного) попарно различных положительных делителей числа n. (Например, степень двойки является интересным числом.)*

а) Найдите наибольшее трехзначное интересное число.

б) Докажите, что существуют сколь угодно большие интересные числа, отличные от степеней двойки.

Ответ: а) 992; б) подойдут, например, числа вида $3 \cdot 2^m$.

б) Докажем более общее утверждение: интересными заведомо являются числа вида $t \cdot 2^m$, где $t \geq 3$ нечетно, а $2^{m+1} > t$. Рассмотрим число $1 \leq s < t \cdot 2^m$. Заключим s между числами, кратными t: $kt \leq s < (k+1)t$, так что $s = kt + r$, $0 \leq r < t$. Так как $k < 2^m$, представим k в виде суммы различных степеней двойки (все они – делители числа 2^m). После домножения слагаемых на t получаем нужное представление числа kt. Остается добавить к нему двоичное представление (т.е. представление в виде суммы различных степеней двойки) числа r (все присутствующие в нем степени не превышают 2^m). Проиллюстрируем приведенный алгоритм примером.

Пусть $n = 32 \cdot 31$ и пусть $s = 555$. Тогда

$$s = 555 = 31 \cdot 17 + 28 = \\ = 31 \cdot (1 + 16) + (4 + 8 + 16) = \\ = 31 + 31 \cdot 16 + 4 + 8 + 16$$

– искомое разложение.

а) Из доказанного выше мы знаем, что $992 = 32 \cdot 31$ является интересным. Докажем, что все числа 993, …, 999 не являются интересными. Для нечетных чисел это ясно – число 2 не представимо в виде суммы различных делителей. Для чисел 998 и 994 число 4 не представимо в виде суммы различных делителей. У числа $996 = 83 \cdot 12$ выпишем делители в порядке возрастания: 1, 2, 3, 4, 6, 12, 83, … Ясно, что, например, число 80 не представимо в виде суммы различных делителей.

В завершение отметим еще один известный факт об интересных числах: произведение двух интересных чисел также является интересным. Читатель может попробовать доказать это самостоятельно.

Н.Агаханов

М2695. *Пусть окружность S и прямая l пересекаются в двух различных точках A и B. Для различных и отличных от точек A и B точек $X \in l$, $T \in l$, $Y \in S$, $Z \in S$ докажите следующие утверждения.*

а) Точки X, Y, Z лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{BX}} = \pm \frac{AY}{BY} \cdot \frac{AZ}{BZ}.$$

б) Точки X, Y, Z, T лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{BX}} \cdot \frac{\overline{AT}}{\overline{BT}} = \pm \frac{AY}{BY} \cdot \frac{AZ}{BZ}.$$

(В обоих пунктах в правых частях равенств выбирается знак «+», если точки Y и Z лежат на одной дуге AB окружности S, и знак «−», если Y и Z лежат на разных дугах AB; через $\frac{\overline{AX}}{\overline{BX}}$ обозначено отношение длин отрезков AX и BX, взятое со знаком «+» или «−» в зависимости от того, сонаправлены или противоположно направлены векторы $\overrightarrow{AX}$ и $\overrightarrow{BX}$.)

Докажем утверждения сначала в одну сторону.

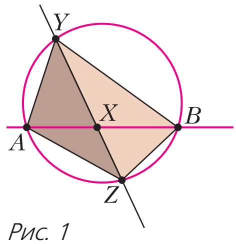


Рис. 1

а) Пусть X, Y, Z лежат на одной прямой (рис. 1). Знаки правой и левой частей доказываемого равенства совпадают, так как если X лежит на отрезке AB, то Y и Z лежат на разных дугах AB окружности S, а если X лежит вне отрезка AB, то Y и Z лежат на одной дуге AB.

Остается доказать, что $\frac{AX}{BX} = \frac{AY}{BY} \cdot \frac{AZ}{BZ}$. Покажем, что каждое из выражений в левой и правой частях равно отношению площадей S_{AYZ}/S_{BYZ}.

С одной стороны, S_{AYZ}/S_{BYZ} равно $\frac{AX}{BX}$ (это отношение равно отношению высот, проведенных к общей стороне YZ). С другой стороны, $2S_{AYZ} = AY \cdot AZ \cdot \sin\angle YAZ$, $2S_{BYZ} = BY \cdot BZ \cdot \sin\angle YBZ$. Поскольку A,

B, Y, Z лежат на одной окружности, $\angle YAZ = \angle YBZ$ или $\angle YAZ + \angle YBZ = 180°$. В любом случае $\sin\angle YAZ = \sin\angle YBZ$, поэтому $S_{AYZ}\big/S_{BYZ} = \frac{AY}{BY}\cdot\frac{AZ}{BZ}$.

б) Пусть прямая YZ пересекает прямую AB в точке C (рис. 2). Тогда, согласно пункту а), правая часть доказываемого равенства равна $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}$.

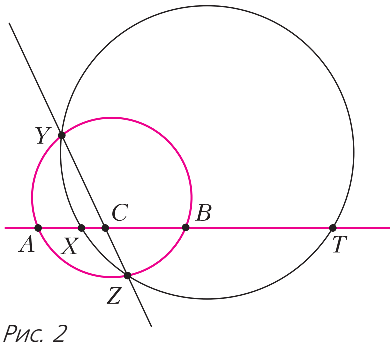


Рис. 2

Пользуясь линейностью скалярного произведения и тем фактом, что C лежит на радикальной оси окружностей (т.е. имеет равные степени относительно них: $\overrightarrow{CX}\cdot\overrightarrow{CT} = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$), имеем $\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{AT} = \left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CX}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CT}\right) = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CT} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CX}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CT}+\overrightarrow{CX} + \overrightarrow{BC}\right)$. Аналогично, $\overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{BT} = \overrightarrow{BC}\cdot\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CT}+\overrightarrow{CX}+\overrightarrow{BC}\right)$.

Поэтому левая часть доказываемого равенства преобразуется к виду $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}$, что и требовалось установить.

Обратное следствие как в пункте а), так и в пункте б) может быть выведено из прямого утверждения следующим образом. Определим Z' так: в пункте а) это вторая точка пересечения прямой XY с окружностью S, а в пункте б) – вторая точка пересечения окружности (XTY) с окружностью S. Тогда, пользуясь прямым утверждением и соотношением из условия, получаем, что $AZ/BZ = AZ'/BZ'$, причем правило знаков в условии задачи говорит о том, что Z и Z' лежат на одной и той же дуге AB окружности S. Множество точек U, для которых отношение AU/BU фиксировано, – это или серединный перпендикуляр к AB, или окружность (Аполлония), диаметр которой лежит на прямой AB, причем один из концов диаметра лежит на отрезке AB, а другой конец – вне его. В любом случае это множество имеет ровно одну точку пересечения с каждой из двух дуг AB окружности S. Отсюда $Z' = Z$, что и завершает решение задачи.

Отметим, что пункт а) можно считать предельным вариантом пункта б) (для бесконечно удаленной точки T). Заметим также, что пункт б) можно переформулировать, например, следующим образом.

Пусть фиксированы точки A, B, X, T, лежащие на одной прямой. Проводим всевозможные пары пересекающихся окружностей, одна из которых проходит через A и B, а другая – через X и T. Тогда выражение $\frac{AY}{BY}\cdot\frac{AZ}{BZ}$, где Y и Z – точки пересечения окружностей, не зависит от их выбора.

М.Скопенков, П.Кожевников

М2696*. *Существует ли последовательность натуральных чисел $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ такая, что число $a_i + a_j$ имеет четное количество различных простых делителей для любых двух различных натуральных индексов i, j?*

Ответ: существует.

Рассмотрим следующий граф: вершинами объявим все натуральные числа, дающие остаток 1 при делении на 3, т.е. числа 1, 4, 7, 11, …; между числами m и n проведем *красное ребро*, если число $m+n$ имеет четное количество различных простых делителей, и *синее ребро* в противном случае, т.е. когда $m+n$ имеет нечетное количество различных простых делителей.

Воспользуемся «бесконечной версией» теоремы Рамсея, которая утверждает, что в графе со счетным множеством вершин, в котором каждое ребро покрашено в один из двух цветов, найдется бесконечное множество вершин, все ребра между которыми одного и того же цвета (одноцветный полный подграф).

Если в нашем графе нашлось бесконечное множество вершин, все ребра между которыми красные, то натуральные числа, соответствующие этим вершинам (взятые в порядке возрастания), и образуют нужную последовательность.

Пусть нашлось бесконечное множество вершин, все ребра между которыми синие, и этим вершинам соответствуют натуральные числа $b_1 < b_2 < \ldots$ Тогда $b_i + b_j$ имеет нечетное количество различных простых делителей для любых двух различных $i, j \in \mathbb{N}$, причем среди этих простых делителей нет числа 3, поскольку b_i и b_j дают остаток 1 при делении на 3, и поэтому $b_i + b_j$ не делится на 3. Но тогда последовательность из чисел $a_i = 3b_i$ удовлетворяет условию: действительно, сумма $a_i + a_j = 3\left(b_i + b_j\right)$ имеет ровно на один простой делитель больше, чем сумма $b_i + b_j$, т.е. имеет четное число различных простых делителей.

П.Кожевников

Ф2701. *Скомканный до формы шарика диаметром $D = 3$ см лист бумаги формата А4 бросают вертикально вверх, придав ему начальную скорость $v_0 = 10$ м/с, с поверхности Земли и с поверхности Луны. Найдите отношение максимальных высот подъема таких бумажных шариков. Ускорение свободного падения на поверхности Луны $g_Л = 1{,}62$ м/с^2, а на поверхности Земли $g_З = 9{,}81$ м/с^2. С какой установившейся скоростью будет падать вблизи поверхности Земли такой комок бумаги, отпущенный с большой высоты? Подсказка. Сила сопротивления воздуха (вблизи поверхности Земли) пропорциональна квадрату скорости шарика, плотности воздуха (1,2 кг/м^3) и поперечному сечению шарика. Безразмерный коэффициент в выражении для этой силы равен 0,24 (если все остальные величины выражены в единицах СИ). На пачке листов такой бумаги написано:* 500 *листов*, 210 *мм* × 297 *мм*, 80 *г/м*^{2}.

В первую очередь следует вычислить массу комка бумаги m. Это очень простая операция – информация есть на упаковке пачки листов. Получается, что $m = 5$ г с очень высокой точностью.

Запишем уравнение движения (второй закон Ньютона) для комка бумаги, движущегося вверх в воздухе на Земле, в проекции на вертикальную ось с положительным направлением «вверх»:

$$\frac{dv}{dt} = -\left(g_З + Av^2\right),$$

$$\text{где } A = \frac{\left(\pi d^2/4\right)\rho}{m} = 0{,}0407 \text{ м}^{-1}.$$

При максимальной начальной скорости комка бумаги 10 м/с в уравнении к величине $g_З$ добавляется $4{,}07$ м/с^2, т.е. ускорение весьма заметно отличается от $g_З$. Это нужно учитывать.

Начнем с ответа на второй вопрос в условии задачи. При установившейся скорости падения сила сопротивления воздуха компенсирует силу тяжести. Отсюда находится величина этой установившейся скорости падения:

$$v_{уст} = \sqrt{\frac{g_З}{A}} = 15{,}525 \text{ м/с}.$$

Теперь приступим к ответу на первый вопрос. Вернемся у полученному уравнению, соответствующему движению вверх. Умножим правую и левую части равенства на скорость движения v и на постоянную величину A и получим

$$\frac{1}{2}\frac{d\left(Av^2\right)}{g_З + Av^2} = -A\,dx,$$

где dx – это изменение высоты x над уровнем, с которого был произведен бросок. Решение этого уравнения имеет вид

$$\ln\frac{g_З + Av^2}{g_З + Av_0^2} = -2Ax.$$

Максимальной высоте подъема h соответствует конечная скорости $v = 0$. Подставим в полученное решение начальную (10 м/с) и конечную (0 м/с) скорости и найдем

$$h = 4{,}20 \text{ м}.$$

Эта высота меньше высоты подъема $5{,}10 \text{ м} = v_0^2/(2g)$, которая вычисляется в пренебрежении сопротивлением воздуха.

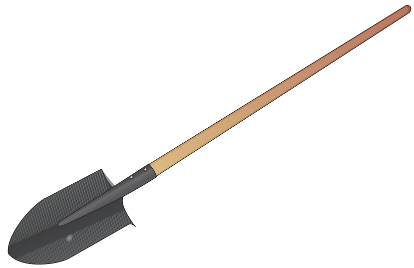
Для высоты подъема на Луне (вокруг которой нет атмосферы) можно (и нужно) использовать формулу $H = \frac{v_0^2}{2g_{\text{Л}}}$, откуда получим

$$H = 30{,}86 \text{ м}.$$

Таким образом, высоты подъема отличаются в 7,35 раза (на Луне выше, чем в воздухе на Земле).

С.Шариков

Ф2702. *Для того чтобы штыковой лопатой (см. рисунок) копать канаву, Вася (его масса 80 кг) давит ногой на наступ*



(верхняя часть полотна лопаты, изогнутая под прямым углом), и к моменту остановки лопаты 50% его веса приходится на этот наступ. При этом полотно лопаты погружается (врезается) в грунт на полштыка – это примерно 15 см. Для отрыва срезанного грунта от основного грунта требуется совершить еще примерно такую же работу, какая нужна, чтобы вогнать штык в грунт. Толщина отрезанного «ломтя» составляет в среднем 5 см. Оцените работу, которую нужно совершить, чтобы выкопать яму в форме куба с ребром $a = 1{,}5$ м. Грунт имеет среднюю плотность $\rho = 1{,}5$ г/см^3. Какая часть этой работы потребуется для разрушения цельности грунта, а какая на подъем грунта на уровень краев ямы? Лопату будем считать невесомой.

Будем считать, что Вася пользовался стандартной штыковой лопатой, у которой длина полотна 280 мм и ширина 220 мм. Если лопата невесома, то совершенная работа связана только с разрушением и подъемом грунта вверх. Общая масса грунта равна $M = \rho a^3 = 5062{,}5$ кг. Центр масс этого грунта поднялся минимум на $a/2$ в поле тяжести, поэтому минимальная работа по подъему грунта вверх равна

$$A_1 = \frac{\rho a^4 g}{2} \approx 38 \text{ кДж}.$$

Каждая порция грунта в цикле «копнул – оторвал – бросил – отдыхай пока летит» равна $m = 1{,}5 \text{ г/см}^3 \cdot 22 \text{ см} \cdot 14 \text{ см} \cdot 5 \text{ см} \approx 2{,}31$ кг, поэтому число циклов равно $N = M/m = 2191{,}5$. Округлим это число до величины 2200, поскольку иногда требуется зачистка – а это дополнительные затраты энергии. Работа, совершенная Васей за 1 цикл, равна

$$A_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 80 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot 0{,}14 \text{ м} = 56 \text{ Дж}.$$

Каждая порция грунта при броске приобретает скорость движения, равную по порядку величины $v \approx 1$ м/с. Суммарная кинетическая энергия этого грунта составляет

$$A_3 \approx 2{,}53 \text{ кДж}.$$

Общая работа равна

$$A = A_1 + NA_2 + A_3 \approx 38 \text{ кДж} + 123{,}2 \text{ кДж} + {}$$
$$+ 2{,}53 \text{ кДж} + \approx 163{,}7 \text{ кДж}.$$

Оказывается, более 75% работы приходится на разрушение грунта и только около 23% на подъем грунта в поле тяжести. А на разгон грунта до скорости 1 м/с расходуется всего-то 1,5% всей работы.

В.Лопатин

Ф2703. *Воздух в цилиндре длиной l можно изотермически сжимать с помощью легкой длинной пробки (рис. 1) до тех пор, пока длина столба воздуха в цилиндре не станет равной $l/3$ (при большем сжатии пробка выталкивается из цилиндра по прекращении действия силы). После такого максимального сжатия воздух в цилиндре медленно нагревают. До какой минимальной температуры нужно нагреть воздух, чтобы пробка полностью вышла из цилиндра? Начальная температура атмосферного воздуха*

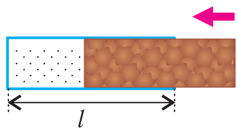


Рис. 1

$T_0 = 300$ К. Считайте, что максимальная сила трения, действующая на пробку, прямо пропорциональна глубине ее погружения в цилиндр. Силу тяжести можно не учитывать.

Обозначим через S площадь поперечного сечения цилиндра. При изотермическом сжатии воздуха до объема Sx, где x – длина столба воздуха в цилиндре, его давление, согласно закону Бойля–Мариотта, становится равным $p(x) = p_0 l/x$, где p_0 – атмосферное давление. Следовательно, разность сил давления воздуха на пробку будет равна (рис. 2)

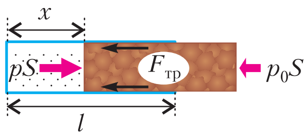


Рис. 2

$$f(x) = (p(x) - p_0)S = p_0 S(l/x - 1).$$

Так как максимальная сила трения покоя $F_{тр}$ прямо пропорциональна глубине проникновения пробки, можем написать

$$F_{тр} = k(l - x),$$

где k – коэффициент пропорциональности.

На рисунке 3 синяя прямая линия соответствует сумме сил $F_{тр}$ и $p_0 S$, препятствующей выталкиванию пробки из цилиндра. Фиолетовая линия – это изотерма при начальной (комнатной) температуре. Красная линия, касающаяся синей линии в одной точке, – это изотерма при повышенной температуре, при которой трение уже никак не сможет удерживать запертую в цилиндре порцию воздуха. Из рисунка видно, что пробка может задерживать воздух при $x \geq x' = l/3$. При $x = l/3$ из равенства $f = F_{тр}$ получаем $k = 3p_0 S/l$.

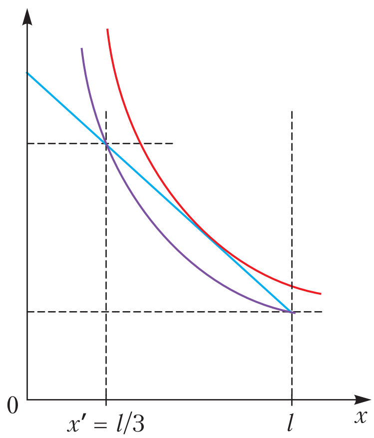


Рис. 3

Рассмотрим процесс нагрева воздуха. Согласно уравнению Клапейрона–Менделеева,

$$\frac{p_0 l}{T_0} = \frac{p(x)x}{T(x)}, \text{ или } T(x) = \frac{T_0 x p(x)}{p_0 l},$$

где $p(x)$ и $T(x)$ – соответственно давление и температура воздуха при длине столба воздуха x. Для выталкивания пробки сила давления воздуха в цилиндре на пробку должна превышать сумму сил внешнего давления и трения скольжения:

$$p(x)S \geq k(l - x) + p_0 S.$$

Минимальное значение $p^*(x)$, при котором это соотношение справедливо, соответствует случаю равенства. Учитывая значение коэффициента k, получаем

$$p^*(x) = \frac{p_0}{l}(4l - 3x),\ T^*(x) = \frac{T_0}{l^2}\left(4lx - 3x^2\right).$$

Так как

$$T^*(x) = \frac{3T_0}{l^2}\left(\frac{4}{9}l^2 - \left(x - \frac{2l}{3}\right)^2\right) \leq \frac{4T_0}{3},$$

минимальная температура нагрева равна $\frac{4T_0}{3} = 400$ К.

В.Манукян

Ф2704. *Прямая пластиковая трубка с прозрачными стенками, открытая с двух концов, имеет круглое внутреннее поперечное сечение. Держа трубку вертикально, один из ее концов окунули в ведро с ртутью и в этом положении нижнее отверстие трубки заткнули пробкой. Ртуть стенки трубки не смачивает. Затем трубку, сохраняя ее вертикальное положение, подняли, и в ней остался столбик ртути длиной $a = 20$ см. Держа открытый конец трубки над ведром, трубку медленно перевернули на 180°, и теперь открытый ее конец оказался над поверхностью ртути.*

Столбик ртути так и остался вблизи конца трубки (теперь верхнего). Внешнее атмосферное давление 760 мм рт.ст., коэффициент поверхностного натяжения ртути $\sigma = 0{,}4$ *Дж/м²*, *плотность ртути* $\rho = 13600$ *кг/м³*. *Какова длина трубки L и каким мог быть максимальный диаметр D внутреннего отверстия трубки?*

Найдем сначала ответ на вопрос про максимальный внутренний диаметр D или радиус $R = D/2$ отверстия в трубке. Понятно, что во время поворота трубки ее отверстие должно полностью перекрываться ртутью. Из величин, характеризующих ртуть, и значения ускорения свободного падения нужно получить величину, имеющую размерность радиуса трубки, т.е. метр. Метод размерностей дает такую формулу:

$$R \sim \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}.$$

Безразмерный коэффициент пропорциональности нам нужно найти.

Самое маленькое давление столбика ртути достигается при горизонтальном положении трубки. Если считать, что в этот момент давление ртути на верхние точки стенок отверстия равно нулю, то вблизи этих точек, но внутри ртути давление будет больше атмосферного на величину σ/R. В горизонтальном направлении участок ртути вблизи открытого конца трубки удерживается силой поверхностного натяжения, которая равна $2\pi R\sigma$. А с другой стороны, на ртуть действует сила давления, распределенная по поперечному сечению отверстия. Причем в самой верхней точке это давление как раз равно σ/R, а в самой нижней точке сечения отверстия к этой величине прибавляется гидростатическая добавка $2\rho gR$. Суммирование (интегрирование) по всей площади отверстия дает силу, которая компенсирует силу, связанную с поверхностным натяжением:

$$2\pi R\sigma = 2\int_0^{\pi}\left(\frac{\sigma}{R}\cdot R^2\sin^2\alpha + \rho g R^3\sin^2\alpha\cdot(1-\cos\alpha)\right)d\alpha.$$

Из этого уравнения находим значение радиуса внутреннего отверстия трубки:

$$R = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}.$$

Оказалось, что безразмерный коэффициент пропорциональности в данном случае равен единице! Ртуть из трубки при ее медленном перевороте не выльется, если внутренний диаметр трубки будет меньше величины

$$D_{\max} = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} = 3{,}43 \text{ мм}.$$

Кстати, эта величина в точности равна глубине большой по площади лужи из ртути, которая вылита на не смачиваемую ртутью горизонтальную поверхность.

Теперь сформулируем ответ на более простой первый вопрос задачи: длина трубки должна быть больше длины столбика ртути a, т.е. $L > 20$ см.

В.Ртутный

Задачи

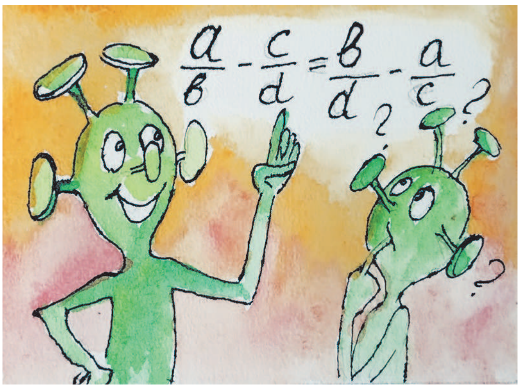
1. Клетчатый квадрат разбит по клеткам на несколько прямоугольников. Не все прямоугольники равны друг другу, но все имеют равный периметр.

Найдите наименьший возможный размер квадрата.

А.Блинков

2. Для натуральных чисел a, b, c и d, среди которых нет одинаковых, выполняется равенство $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{b}{d}-\frac{a}{c}$. Докажите, что произведение чисел a, b, c и d является квадратом целого числа.

В.Клепцын

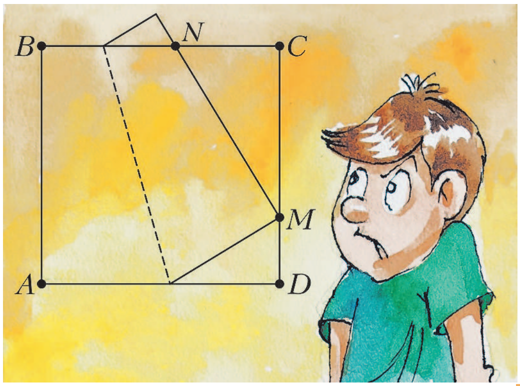


3. Имеется два набора полосок, в каждом из которых есть по одной полоске с размерами 1×1, 1×2, ..., 1×10. В первом наборе все полоски красные, а во втором синие. Требуется, используя некоторые из этих полосок, сложить квадрат размером 10×10 так, чтобы все красные полоски были горизонтальными, а все синие вертикальными. Сколькими способами это можно сделать?

А.Грибалко

4. Бумажный квадрат $ABCD$ перегнули по прямой так, что вершина A совпала с внутренней точкой M стороны CD, а сторона AB (в новом положении) пересекла сторону BC в точке N. Найдите угол MAN.

А.Блинков



Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предлагались на XIX Устной математической олимпиаде для 6–7 классов.

Движение упругого тела с отскоком

Б.МУКУШЕВ

Движение упругого тела в однородном гравитационном поле в случае отскока от какого-либо объекта является одним из интересных явлений в механике. Этими объектами могут быть, например, плоскость, выпуклая или вогнутая поверхности цилиндра и сферы.

Напомним, что в результате абсолютно упругого столкновения тела (например, мяча) с поверхностью модуль его скорости не изменяется, а угол отражения (отскока) тела равен углу падения (подлета). Углы падения и отражения – это углы между скоростью тела и перпендикуляром к поверхности непосредственно перед ударом и после удара соответственно.

Задача 1. *Мальчик бросает мячик в вертикальную стенку так, чтобы он после отскока упал точно к его ногам. Найдите начальную скорость мячика, если бросок производится с высоты $h = 1{,}5$ м под углом $\alpha = 45°$ к горизонту, а мальчик находится от стенки на расстоянии $l = 6$ м (рис. 1). Удар абсолютно упругий. Размером мячика и сопротивлением воздуха можно пренебречь.*

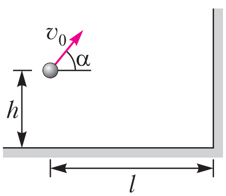


Рис. 1

Решение. Для того чтобы мячик, отскочив от стены, упал точно к ногам мальчика, траектория мячика должна иметь вид, изображенный на рисунке 2. При упругом ударе о неподвижную стенку угол между нормалью к стенке и скоростью мячика перед ударом равен по величине углу между нормалью к стенке и скоростью мячика после удара. Обозначим через t_0 время полета мячика. За это время он проходит по горизонтали путь $2l$. Горизонтальная составляющая скорости мяча равна $v_0 \cos\alpha$ и при полете не меняется по величине, следовательно,

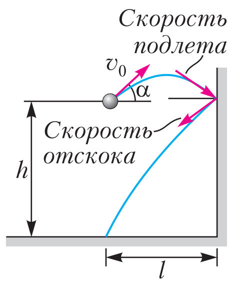


Рис. 2

$$v_0 \cos\alpha \cdot t_0 = 2l.$$

С другой стороны, в момент времени t_0 вертикальная координата мяча должна обратиться в ноль:

$$h + v_0 \sin\alpha \cdot t_0 - \frac{g t_0^2}{2} = 0.$$

Исключив из полученных соотношений t_0, находим

$$v_0 = \frac{l}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{2g}{h + 2l\,\mathrm{tg}\,\alpha}} \approx 10 \text{ м/с}.$$

Задача 2. *Какое расстояние по горизонтали пролетит мяч, брошенный со скоростью $v = 10$ м/с под углом $\alpha = 60°$ к горизонту, если он ударится о потолок (рис. 3)? Высота потолка $h = 3$ м, удар упругий. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.*

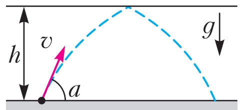


Рис. 3

Решение. Рассмотрим равноускоренное движение мяча по вертикали:

$$h = v\sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2},$$

$$t = \frac{v\sin\alpha}{g} - \sqrt{\left(\frac{v\sin\alpha}{g}\right)^2 - 2\frac{h}{g}}.$$

Знак «+» отброшен, так как он дает время полета по траектории, не имеющей излома. Расстояние, пройденное мячом по горизонтали за все время движения $2t$, равно

$$l = v\cos\alpha \cdot 2t =$$

$$= \frac{v^2}{g}\sin 2\alpha \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2gh}{(v\sin\alpha)^2}}\right) \approx 4{,}68 \text{ м}.$$

Задача 3. *Баллистический пистолет выстрелил упругий шарик со скоростью $v_0 = 10$ м/с под углом $\alpha = 45°$ к горизонту в сторону стены. Расстояние между пистолетом и стеной $l = 4$ м.*

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20220703

а) Сколько времени будет лететь шарик до стены и от стены до приземления?

б) На какой высоте от поверхности земли шарик ударится о стену?

в) На каком расстоянии от стены приземлится шарик после отскока от стены?

Решение. Сначала выясним, в каком месте траектории находился шарик, когда ударился о стену: был ли он на первой ее половине или же уже прошел точку максимального подъема. От этого зависит угол, под которым шарик подлетел к стене, а значит, и отскочил от нее. Поэтому сначала найдем середину траектории шарика, как если бы стены не было. Вертикальная составляющая начальной скорости шарика равна $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$, а горизонтальная составляющая равна $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$. Время полета шарика до верхней точки t найдем из условия равенства вертикальной составляющей скорости нулю:

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\alpha - gt = 0,\ t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Дальность полета шарика до верхней точки траектории равна

$$s_x = v_{0x}t = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} = 5 \text{ м}.$$

Итак, шарик не долетел до верхней точки траектории. Траектория его движения изображена на рисунке 4.

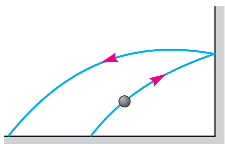


Рис. 4

а) Определяем время полета шарика t_1 до стены:

$$l = v_0 \cos\alpha \cdot t_1,\ t_1 = \frac{l}{v_0 \cos\alpha} \approx 0{,}56 \text{ с}.$$

Находим время полета шарика t_2 от стены до приземления:

$$t_2 = 2t - t_1 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} - t_1 \approx 0{,}85 \text{ с}.$$

б) Ордината точки, в которой шарик ударился о стену, равна

$$y = v_0 \sin\alpha \cdot t_1 - \frac{gt_1^2}{2} \approx 2{,}4 \text{ м}.$$

в) Поскольку, шарик не долетел до верхней точки траектории по горизонтали 1 м, то из соображений симметрии расстояние между точками выстрела и приземления шарика должно быть 2 м. Таким образом, шарик приземлится в точке, находящейся от стены на расстоянии 6 м.

Задача 4. *Мячику сообщена скорость v_0 в точке O под некоторым углом к горизонту (рис. 5). Движение мячика происходит в пространстве, ограниченном двумя параллельными досками (стенками), расстояние между которыми L. Под каким углом к горизонту нужно бросить мячик, чтобы*

а) он возвратился в точку O;

б) мячик оказался в точке L, где находится вторая доска?

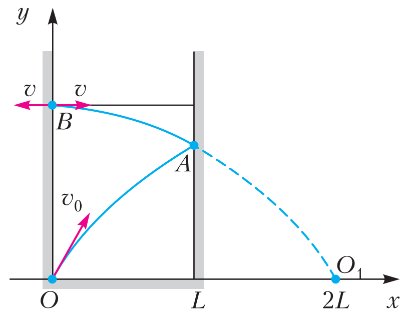


Рис. 5

Решение. а) Рассмотрим случай, когда мячик испытывает 3 упругих соударения (см. рис. 5). Сначала мячик ударяется о правую стенку в точке A. После этого он начинает двигаться по зеркально симметричной траектории O_1AB и в точке B испытывает абсолютно упругое соударение с левой стенкой. Если в точке B вектор скорости мячика перпендикулярен стенке, то мячик отскакивает от стенки с такой же скоростью и может возвратиться назад в точку O по траектории BAO. Значит, точка B должна быть вершиной параболы O_1AB. Половина величины дальности полета в этих условиях равна $(n+1)L/2$. В нашем случае $n = 3$. Когда $n = 1$, мячик, перпендикулярно ударяясь о вторую стенку, сразу возвращается в исходную точку O. Нетрудно догадаться, что мячик, соударяясь со второй стенкой 1, 3, 5, 7, 9, … раз, всегда возвратится в точку O. Используя формулу для дальности полета, напишем

$$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = (n+1)L, \text{ или } \sin 2\alpha = \frac{gL}{v_0^2}(n+1),$$

где $n = 1, 3, 5, 7 \ldots$ – арифметическая прогрессия. Решение этого тригонометрического уравнения дает два ответа:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\arcsin\frac{gL(n+1)}{v_0^2},$$

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{gL(n+1)}{v_0^2}.$$

б) Сделаем «развертку» пространства, ограниченного двумя параллельными стенками (рис. 6). Сначала рассмотрим случай,

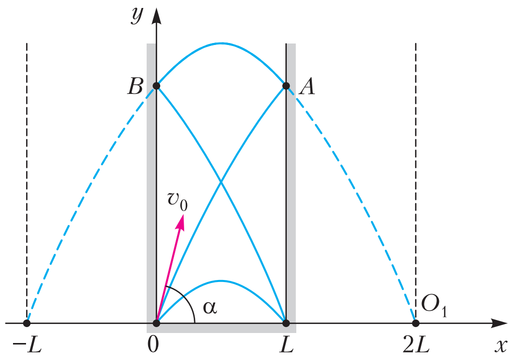


Рис. 6

когда не произошло столкновение мячика со стенками ($n = 0$) и он достиг точки пересечения второй стенки с горизонтальной плоскостью. Используя, формулу дальности полета мячика, напишем $\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = L$. Когда число столкновений $n = 2$, это равносильно тому, что мячик бросили из точки $-L$ со скоростью v_0 и под углом α, поэтому напишем $\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 3L$. Для следующего случая, когда $n = 4$, напишем $\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 5L$. Обобщая, запишем общую формулу:

$$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = (n+1)L,\ n = 0, 2, 4, 6, \ldots$$

Отсюда находим

$$\sin 2\alpha = \frac{gL}{v_0^2}(n+1)$$

при условии $v_0^2 \ge gL(n+1)$.

Задача 5. *Небольшое тело скользит со скоростью $v_0 = 10$ м/с по горизонтальной плоскости, приближаясь к щели (рис. 7). Щель образована двумя отвесными параллельными стенками, находящимися на расстоянии $d = 0{,}05$ м друг от друга. Глубина щели $H = 1$ м. Определите, сколько раз ударится тело о стенки, прежде чем упадет на дно. Удары о стенки абсолютно упругие.*

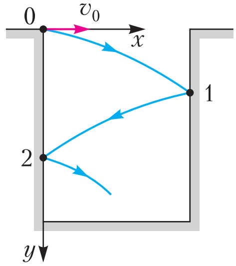


Рис. 7

Решение. При упругих ударах о стенки щели угол отражения равен углу падения, а время полета тела между стенками постоянно и равно $t = \frac{d}{v_0}$. Первый удар произойдет на глубине $h_1 = v_1 t + \frac{gt^2}{2}$, второй – на глубине $h_2 = v_2 t + \frac{gt^2}{2}$ от точки первого удара, третий – на глубине $h_3 = v_3 t + \frac{gt^2}{2}$ от точки второго удара и т.д., где $v_1 = 0$, $v_2 = gt$, $v_3 = 2gt$, …, $v_n = (n-1)gt$ – вертикальные составляющие скорости тела, n – номер удара. Очевидно, что $h_1 + h_2 + \ldots + h_n = H$, или

$$(v_1 + v_2 + \ldots + v_n)t + n\frac{gt^2}{2} = H.$$

Далее последовательно имеем

$$\left(gt + 2gt + 3gt + \ldots + (n-1)gt\right)t + n\frac{gt^2}{2} = H,$$

$$gt^2\left(1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)\right) + n\frac{gt^2}{2} = H, \ldots$$

$$\ldots, \frac{gt^2}{2}n(n-1) + n\frac{gt^2}{2} = H.$$

Отсюда получаем

$$n = \sqrt{\frac{2H}{gt^2}} = \frac{v_0}{d}\sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 89{,}4.$$

Так как n – натуральное число, то тело ударится о стенки щели 89 раз.

Задача 6. *В сферической лунке прыгает шарик, упруго ударяясь о ее стенки в двух точках, расположенных на одной горизонтали (рис. 8). Промежуток времени между отскоками при движении шарика слева направо равен T_1, справа налево – T_2. Определите радиус R лунки.*

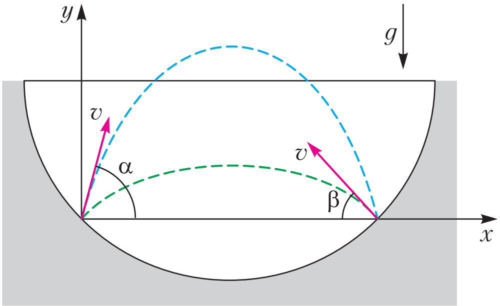


Рис. 8

Решение. Пусть шарик отскакивает под углом α к горизонту, а дальность полета l. Из закона сохранения энергии следует, что скорости шарика v при отскоке (слева и справа) одинаковы. Из уравнений

$$y = v\sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2},\ x = v\cos\alpha \cdot t$$

следует, что время полета $t = \dfrac{2v\sin\alpha}{g}$. Тогда

$$l = \frac{2v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{v^2\sin 2\beta}{g},$$

$$2\beta = 180° - 2\alpha,\ \beta = 90° - \alpha,$$

$$T_1 = \frac{2v\sin\alpha}{g},\ T_2 = \frac{2v\sin\beta}{g}.$$

При упругом отскоке угол падения равен углу отражения (рис. 9):

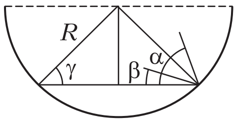


Рис. 9

$$\gamma = \beta + \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{90°}{2} = 45°.$$

Поэтому

$$R = \frac{l}{2\cos\gamma} = \frac{v^2\sin 2\alpha}{2g\cos 45°} = \frac{gT_1T_2}{2\sqrt{2}}.$$

Задача 7. *Упругий шарик был брошен под углом к горизонту в направлении полуцилиндра (рис. 10). От точки бросания до точки приземления шарик нарисует в пространстве симметричную траекторию относительно оси y. Максимальное расстояние шарика от верхней точки цилиндра равно $h = 1$ м. Радиус основания цилиндра $AO = 4$ м. При этом $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE}$, где B и D – точки отскока шарика. Нужно найти:*

а) скорость отскока шарика от цилиндра;

б) начальную скорость и угол бросания шарика к горизонту;

в) координату приземления шарика.

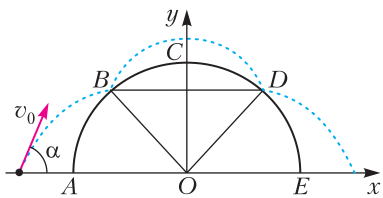


Рис. 10

Решение. Из соображений симметрии рассмотрим тот момент, когда шарик находится в верхней точке траектории (рис. 11), и

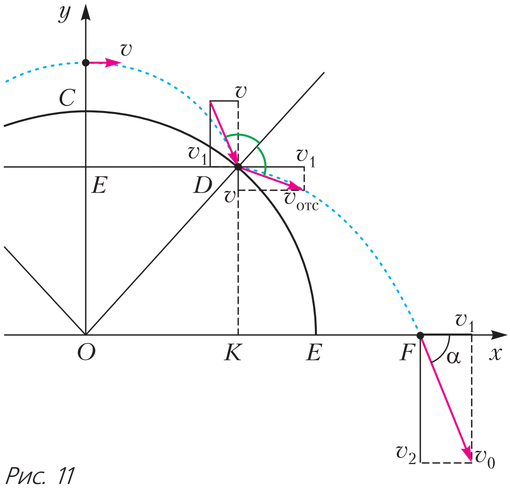


Рис. 11

найдем скорость шарика v в этой точке. Обозначим через t_1 время движения шарика от верхней точки траектории до точки D. Напишем следующие уравнения и найдем

$$vt_1 = ED = \frac{R}{\sqrt{2}},\ h + CE = \frac{gt_1^2}{2},$$

$$CE = R\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 1{,}16 \text{ м},$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2\left(h + R\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)}{g}} \approx 0{,}65 \text{ с},$$

$$v = \frac{R}{\sqrt{2}t_1} \approx 4{,}3 \text{ м/с}.$$

Когда шарик приближается к точке D, вертикальная составляющая его скорости равна $v_1 = gt_1 = 6{,}5$ м/с. После упругого отскока вертикальная составляющая скорости становится равной v, а горизонтальная составляющая – равной v_1.

а) Скорость отскока шарика от цилиндра $v_{\text{отс}} = \sqrt{v^2 + v_1^2} \approx 7{,}8$ м/с.

б) Из закона сохранения энергии имеем

$$\frac{mv_{\text{отс}}^2}{2} + \frac{R}{\sqrt{2}}mg = \frac{mv_0^2}{2},$$

$$v_0 = \sqrt{v_{\text{отс}}^2 + \sqrt{2}gR} \approx 10{,}8 \text{ м/с},$$

$$\cos\alpha = \frac{v_1}{v_0} \approx 0{,}6,\ \alpha \approx 53°.$$

в) Нам нужно найти длину отрезка OF: $OF = OE + EF$, $EF = KF - KE$, $KE = CE = 1{,}16$ м, $KF = v_1t_2$, где t_2 – время перемещения шарика от точки D в точку F. С другой стороны, $t_2 = \frac{v_2 - v}{g}$, где v_2 – вертикальная составляющая начальной скорости v_0. Поскольку $v_2 = \sqrt{v_0^2 - v_1^2} \approx 8{,}6$ м/с, то $t_2 = 0{,}43$ с, $KF = v_1t_2 = 2{,}8$ м, $EF = 1{,}6$ м, $OF = OE + EF = 5{,}6$ м.

Задача 8. *Мяч свободно падает с высоты $h = 0{,}1$ м на наклонную доску, составляющую угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Мяч, подпрыгивая, начинает спускаться по доске (рис. 12). Найдите расстояние между точками девятого и десятого ударов мяча о доску. Соударения мяча с доской рассматривайте как абсолютно упругие.*

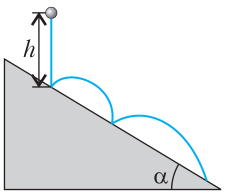


Рис. 12

Решение. Нам нужно найти расстояния между точками первого и второго (L_{12}), второго и третьего (L_{23}), третьего и четвертого (L_{34}) и так далее ударов. Для удобства решения задачи оси координат направим вдоль доски и перпендикулярно к ней (рис. 13). В этом случае проекции ускорения мяча на оси x и y соответственно равны $a_x = g_x = g\sin\alpha$, $a_y = g_y = -g\cos\alpha$. Скорость мяча в момент первого соударения с доской равна $v_0 = \sqrt{2gh}$. Начальная скорость мяча после первого соударения равна v_0 и образует с осью y угол α, а проекции скорости мяча равны $v_{0x} = v_0\sin\alpha$ и $v_{0y} = v_0\cos\alpha$. Расстояние между точками первого и второго соударений мяча с доской равно

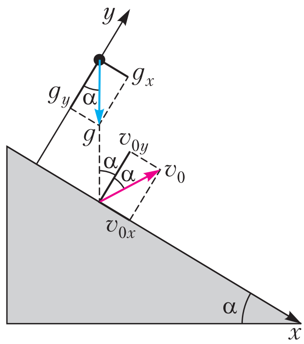


Рис. 13

$$L_{12} = v_0\sin\alpha\cdot t_1 + \frac{g\sin\alpha\cdot t_1^2}{2},$$

где t_1 – время полета мяча. Это время определяется уравнением

$$v_0\cos\alpha\cdot t_1 - \frac{g\cos\alpha\cdot t_1^2}{2} = 0.$$

Отсюда $t_1 = 2v_0/g$ и $L_{12} = 8h\sin\alpha$. Скорость мяча к моменту второго соударения определяется равенствами

$$v_{1x} = v_{0x} + a_xt_1 = v_0\sin\alpha + g\sin\alpha\cdot t_1 = 3v_0\sin\alpha,$$

$$v_{1y} = v_{0y} + a_yt_1 = v_0\cos\alpha - g\cos\alpha\cdot t_1 = -v_0\cos\alpha.$$

После второго соударения эти скорости равны

$$v_{2x} = v_{1x},\ v_{2y} = -v_{1y} = v_0\cos\alpha = v_{0y}.$$

Расстояние между точками второго и третьего соударений равно

$$L_{23} = 3v_0\sin\alpha\cdot t_2 + \frac{g\sin\alpha\cdot t_2^2}{2},$$

где t_2 – время полета. Так как начальная скорость вдоль оси y та же, что и при первом соударении, то $t_2 = t_1$. Поэтому $L_{23} = 16h\sin\alpha$. Аналогично можно показать, что $L_{34} = 24h\sin\alpha$. Опираясь на метод индукции, напишем

$$L_{n\,n+1} = 8nh\sin\alpha.$$

Следовательно, $L_{910} = 8\cdot 9\cdot 0{,}1\text{ м}\cdot\sin 30° = 3{,}6$ м.

Задача 9. *С вершины гладкой неподвижной полусферы радиусом R начинает соскальзывать без трения небольшое упругое тело (рис. 14). Оторвавшись от сферы и находясь в состоянии свободного падения,*

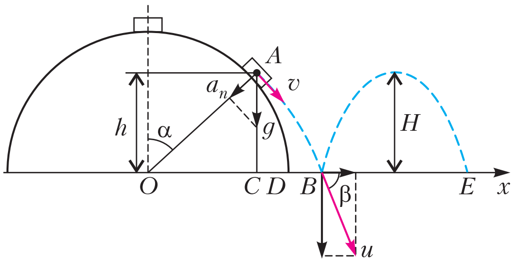


Рис. 14

тело достигнет горизонтальной поверхности. Упруго отскакивая от этой поверхности, тело будет двигаться в пространстве по параболическим траекториям.

а) Найдите удаленности первого и второго отскоков тела от края полусферы.

б) На какую максимальную высоту поднимается тело после первого отскока?

Решение. а) Первый отскок тела происходит в точке B. Расстояние этой точки от края полусферы $DB = OC + CB - OD$, где $OC = \sqrt{R^2 - h^2}$, $h = R\cos\alpha$, $OD = R$, $CB = v\cos\alpha \cdot t$, v – скорость тела в точке отрыва, t – время его падения. В момент отрыва тела реакция сферы становится равной нулю, и оно начинает двигаться только под действием силы тяжести по параболической траектории. В точке отрыва A центростремительное ускорение a_n создается нормальной составляющей силы тяжести, значит,

$$\frac{v^2}{R} = g\cos\alpha.$$

Из закона сохранения энергии следует

$$v^2 = 2gR(1 - \cos\alpha).$$

Из этих соотношении получаем

$$\cos\alpha = \frac{2}{3},\ h = \frac{2}{3}R,$$

$$v = \sqrt{2gR(1-\cos\alpha)} = \sqrt{\frac{2}{3}gR}.$$

Очевидно, что $u\sin\beta - v\sin\alpha = gt$, где u – скорость приземления тела, которую можно найти из закона сохранения энергии: $u = \sqrt{v^2 + 2gh} = \sqrt{2gR}$. Ясно также, что $v\cos\alpha = u\cos\beta$, $\cos\beta = \frac{2v}{3u} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{\frac{23}{27}}$, вертикальная составляющая начальной скорости $v\sin\alpha = \sqrt{\frac{10}{27}gR}$, а конечной скорости $u\sin\beta = \sqrt{\frac{46}{27}gR}$. Таким образом,

$$t = \frac{u\sin\beta - v\sin\alpha}{g} = \sqrt{\frac{R}{27g}}\left(\sqrt{46} - \sqrt{10}\right).$$

Итак,

$$CB = v\cos\alpha \cdot t = \frac{2R\sqrt{2}}{27}\left(\sqrt{46} - \sqrt{10}\right),$$

$$DB = \frac{\sqrt{5}}{3}R + \frac{2R\sqrt{2}}{27}\left(\sqrt{46} - \sqrt{10}\right) - R \approx 0{,}125R,$$

$$BE = \frac{u^2\sin 2\beta}{g} = \frac{2gR \cdot 2\sin\beta\cos\beta}{g} = \frac{8\sqrt{23}}{27} \approx 1{,}420R,$$

$$DE = DB + BE \approx 1{,}545R.$$

б) $H = \dfrac{u^2\sin^2\beta}{2g} = \dfrac{23}{27}R \approx 0{,}852R.$

Задача 10. *Упругий шарик движется с постоянной скоростью по горизонтальной поверхности и в точке A попадает в вертикальный цилиндрический колодец глубиной $H = 2$ м и радиусом $r = 1$ м. Скорость шарика v составляет угол $\alpha = 30°$ с диаметром колодца, проведенным в точку A (рис. 15; вид сверху). Шарик три раза сталкивается со стенкой и дном и «выбирается» из колодца. При какой скорости шарика происходит это явление? Потерями на трение можно пренебречь.*

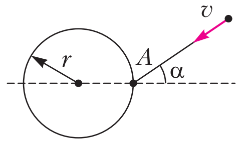


Рис. 15

Решение. На рисунке 16 изображен вид сверху на траекторию движения шарика. Поскольку соударения шарика со стенкой и дном колодца упругие, модуль горизонтальной составляющей скорости шарика остается неизменным и равным v. Расстояния по горизонтали между точками, в которых происходят два последовательных соударения, равны $AA_1 = A_1A_2 = A_2A = 2r\cos\alpha$. Время между двумя последовательными соударениями шарика со стенкой колодца равно $t_1 = \dfrac{2r\cos\alpha}{v}$. Вертикальная составляющая скорости шарика при соударении со стенкой

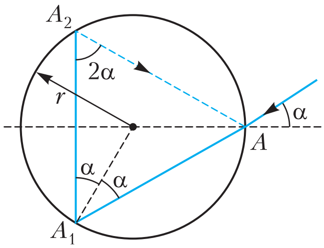


Рис. 16

не изменяется, а при соударении с дном меняет знак на противоположный. Модуль вертикальной составляющей скорости при первом ударе о дно равен $\sqrt{2gH}$, время движения от верха колодца до дна равно $t_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$.

На рисунке 17 представлена плоская вертикальная развертка правильной призмы

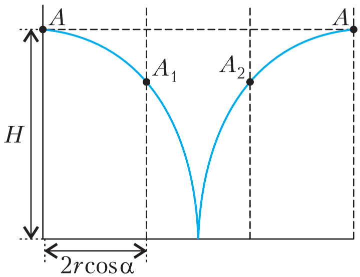


Рис. 17

AA_1A_2A. Участки траектории движения шарика внутри колодца на такой развертке представляют собой параболические кривые. Шарик сможет «выбраться» из колодца, если момент максимального подъема по параболе совпадает с моментом соударения со стенкой (т.е. в момент максимального подъема шарик окажется в точке A края колодца). При этом времена t_1 и t_2 будут связаны соотношением $t_1 = 2t_2$. Подставляя значения t_1 и t_2, получаем

$$\frac{3\cdot 2r\cos\alpha}{v} = 2\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

и находим скорость шарика, при которой он «выберется» из колодца:

$$v = \frac{3}{2}r\sqrt{\frac{3g}{2H}} \approx 2{,}37 \text{ м/с}.$$

Задача 11. *Лестница состоит из трех одинаковых гладких ступенек ширины $a = 30$ см и такой же высоты. На верхней ступеньке расположена невесомая пружина жесткостью $k = 30$ Н/м, правым концом прикрепленная к неподвижной стенке, а левым упирающаяся в лежащий на ступеньке маленький шарик массой $m = 100$ г (рис. 18). Шарик сдвигают вправо, сжимая пружину, после чего отпускают без начальной скорости. До какой максимальной величины можно сжать пружину, чтобы отпущенный шарик по одному разу коснулся средней и нижней ступенек? Удар шарика о ступеньку считать абсолютно упругим, трение и сопротивление воздуха можно не учитывать.*

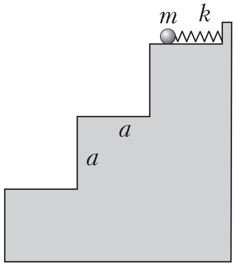


Рис. 18

Решение. Сжатая пружина сообщает шарику начальную скорость v_0, которую можно найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{k(\Delta l)^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2},\quad v_0 = \Delta l\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Видно, что начальная скорость шарика пропорциональна сжатию пружины Δl. Покинув с такой скоростью верхнюю ступеньку, шарик летит по параболическим траекториям до соударений с другими ступеньками. При упругом ударе о каждую из них горизонтальная составляющая скорости шарика не изменяется, а вертикальная составляющая меняет направление на противоположное, сохраняя свою величину. В результате угол между нормалью к ступеньке и скоростью шарика перед соударением оказывается равным углу между нормалью к ступеньке и скоростью шарика после соударения, модуль скорости шарика после соударений не изменяется. По условию задачи максимальная начальная скорость шарика отвечает случаю, когда шарик отскакивает от средней ступеньки и попадает на самый край нижней ступеньки. Соответствующая траектория шарика изображена на рисунке 19. Заметим, что если начальная скорость шарика превысит необходимое значение, он пролетит над нижней ступенькой, не коснувшись ее. Дальнейшее увеличение начальной ско-

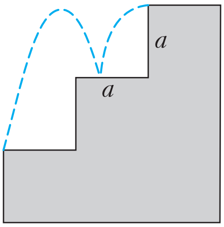


Рис. 19

рости шарика может привести к тому, что он не попадет и на среднюю ступеньку. Время падения шарика, не имеющего вертикальной скорости, с высоты a равно $t_1 = \sqrt{\frac{2a}{g}}$. Такое же время шарик будет подниматься до уровня верхней ступеньки после соударения со средней ступенькой. Наконец, падать с высоты верхней ступеньки до удара о нижнюю ступеньку шарик будет в течение времени $t_2 = \sqrt{\frac{4a}{g}}$. Таким образом, полное время движения шарика от момента, когда он покидает верхнюю ступеньку, до соударения с нижней ступенькой равно

$$t_0 = 2t_1 + t_2 = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\sqrt{2}+1\right).$$

За это время шарик со скоростью v_0 смещается по горизонтали на расстояние $2a$. Следовательно,

$$2a = 2v_0\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Объединяя последнее равенство с найденным соотношением между начальной скоростью шарика и сжатием пружины, получаем

$$\Delta l_{\max} = \sqrt{\frac{mga}{k}}\frac{1}{\sqrt{2}+1} \approx 4{,}14 \text{ см}.$$

Упражнения

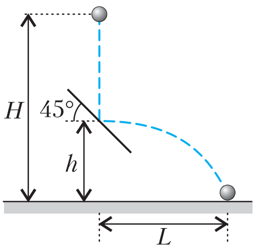


Рис. 20

1. Маленький шарик падает с высоты $H = 2$ м без начальной скорости. На высоте $h = 0{,}5$ м над землей шарик испытывает абсолютно упругий удар о гладкую закрепленную площадку, наклоненную под углом 45° к горизонту (рис. 20). Найдите дальность полета шарика L.

2. Шарик бросают с башни высотой $h = 4{,}9$ м под углом к горизонту $\alpha = 30°$ со скоростью $v_0 = 7$ м/с (рис. 21). При падении на землю

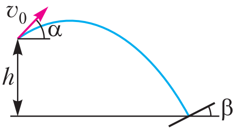


Рис. 21

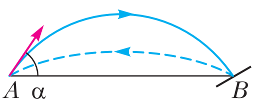


Рис. 22

шарик упруго ударяется о наклонную плоскость и возвращается в точку бросания по той же траектории. Какой угол β составляет наклонная плоскость с горизонтом?

3. Теннисный мяч, брошенный из точки A под углом α к горизонту, в точке B, лежащей на одной горизонтали с точкой A, ударяется о ракетку, наклоненную к горизонту (рис. 22). После упругого удара шарик возвращается в исходную точку A, затратив на полет в $k = \sqrt{3}$ раз меньшее время. Найдите угол α, под которым тело было брошено из точки A.

4. Маленький упругий шарик падает с нулевой начальной скоростью с некоторой высоты H на наклонную плоскость и после упругого удара попадает на вторую плоскость (рис. 23).

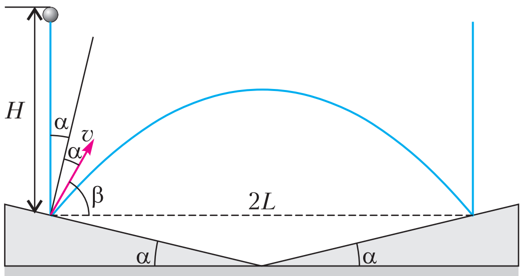


Рис. 23

Точка первого удара находится на расстоянии L от линии соприкосновения плоскостей. С какой высоты упал шарик, если после двух упругих ударов он снова поднялся на ту же высоту? Угол наклона плоскостей к горизонту равен α, причем $\alpha < \pi/4$.

5. Упругое тело падает с высоты h на наклонную плоскость. Определите, через какое время T после отскока от поверхности тело снова упадет на наклонную плоскость. Как время T зависит от угла α наклонной плоскости?

6. Спортзал представляет собой куб с ребром $a = 10$ м. В центре зала футболист сообщил мячу скорость под углом $\alpha = 60°$ к горизонту перпендикулярно одной из стенок. При этом мяч после первого соударения со стенкой достиг центра потолка спортзала. а) Найдите скорость мяча, при которой он вернется к центру спортзала. б) При какой скорости мяча его столкновение с потолком не происходит?

Динамические аналогии и вибрационное перемещение

С.ГЕРАСИМОВ

С динамическими аналогиями мы сталкиваемся очень часто. Закон всемирного тяготения (гравитационного притяжения) чем-то нам напоминает закон Кулона. Однако едва ли уместно говорить об их физической аналогии: в отличие от зарядов массивные тела могут только притягиваться. Экспериментируя с заряженными телами, мы никогда не сможем выяснить особенности гравитационного притяжения, зато, манипулируя с механическим аналогом цикла Карно, есть возможность наглядно продемонстрировать второе начало термодинамики. Уравнения динамики вращательного движения аналогичны уравнениям, описывающим движение материальной точки. Сила Кориолиса очень похожа на силу Ампера, с которой магнитное поле действует на электрический ток: там и там есть векторное произведение, пропорциональное силе.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20220704

Аналогии полезны при анализе в исследуемых областях. При помощи аналогий неизвестную и непонятную систему можно сравнить с ранее изученной системой. Очень важное значение аналогии приобретают при попытках экспериментального изучения той или иной системы.

Наиболее распространенной колебательной системой, в которой легко прослеживаются почти все аналоги механических процессов, является электрическая цепь с последовательным соединением индуктивности, емкости и сопротивления. Покажем это.

Механические колебания маятника описываются известным выражением

$$m\frac{dv}{dt}+\frac{mg}{l}x+\lambda v=F_0\cos\omega t,$$

если на небольшое тело, подвешенное на нити длиной l, кроме силы тяжести mg действуют периодическая внешняя сила $F_0\cos\omega t$ и сила сопротивления среды $-\lambda v$, пропорциональная скорости и направленная противоположно скорости (рис. 1,*а*). Рассматривая вынужденные электрические колебания, возникающие при последователь-

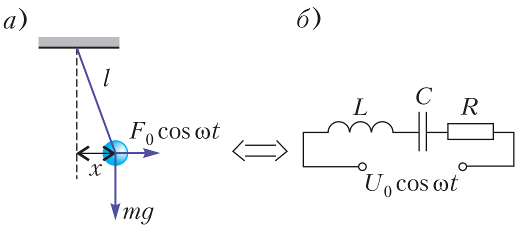
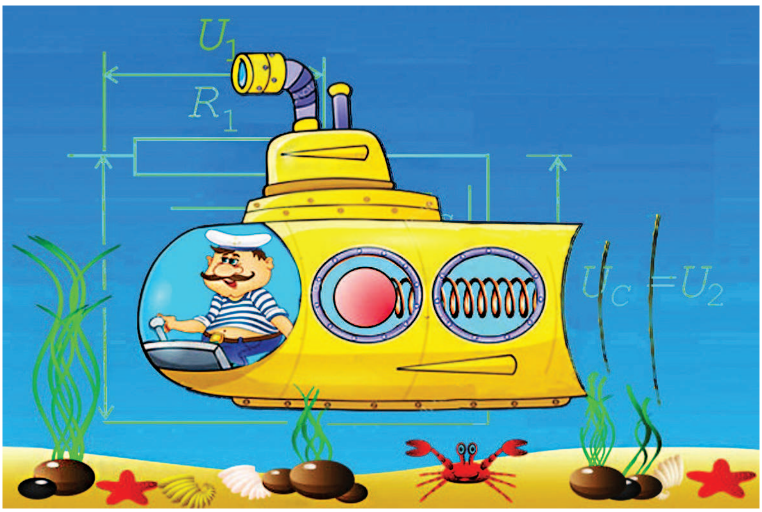


Рис. 1



ном соединении катушки индуктивностью L, конденсатора емкостью C и обычного резистора сопротивлением R (рис. 1,*б*), получается очень похожее уравнение

$$L\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}q+IR=U_0\cos\omega t.$$

Если учесть известную связь между координатой и скоростью: $v = dx/dt$ и то, как связаны ток I, текущий через конденсатор, и заряд q конденсатора: $I = dq/dt$, то второе уравнение из первого получается простой заменой

$$v\to I,\ \ m\to L,\ \ \frac{mg}{l}\to\frac{1}{C},\ \ \lambda\to R.$$

Предположим, что мы собрались создать сложную механическую систему с большим числом колесиков, пружинок, шестеренок или другую систему, состоящую из шлангов, клапанов и кранов, в которых вообще непонятно, что может твориться. Есть два способа решить экспериментальную проблему. Первый – преодолев физические, моральные и финансовые потери, все-таки собрать систему и убедиться, что параметры далеки от ожидаемых. Второй – попробовать собрать электрическую цепь, которая будет описываться теми же уравнениями, что и механическое устройство. Каждая задача – механическая, гидродинамическая или электрическая – ровно настолько же трудна или легка для теоретического анализа, как и другая, раз они в точности эквивалентны. Все дело лишь в том, что всегда легче собрать электрическую цепь и с ней экспериментировать, изменяя параметры.

Исследователь, собирающийся изучить новое явление, хотел бы заранее проверить планируемый эксперимент, узнать, что от него можно ждать, правильно ли рассчитаны и подобраны параметры. Прямой эксперимент не всегда возможен и оправдан. Даже если непосредственная проверка удалась, это еще не решает проблему; при других параметрах установки или прибора результат может быть другим. Все зависит от проблемы. Если задача электрическая, имеет смысл начать с ее механического или акустического аналога. Если задача относится к области механики или гидродинамики, то лучше привлечь на свою сторону электричество. Если в механической задаче что-то колеблется, то в электрическом варианте проблемы должен участвовать переменный ток.

Рассмотрим пример, позволяющий без особых проблем разобраться с параметрами далеко не простого способа перемещения в жидкой (или газообразной) среде или по поверхности твердого тела. Это – так называемое вибрационное перемещение, которое, образно говоря, «происходит через стенку». Некрасовский дед Мазай, потерявший весла, может в принципе добраться до берега, если у его лодки есть корма и есть нос. При движении в одном направлении коэффициент сопротивления λ существенно меньше, чем в обратном направлении. Вот и остается дедушке только одно: перемещаться с кормы на нос и обратно. Так, по крайней мере, должно происходить. Хорошо бы еще знать, как быстро это надо делать, когда и что с собой прихватывать при таком движении «туда-сюда».

Уравнения движения такой лодки, или «виброхода», выглядят на первый взгляд несколько необычно. В инерциальной системе отсчета на колеблющееся в лодке тело массой m действует только сила F_{Mm}, с которой лодка массой M действует на тело (рис. 2,*а*). Сумма сил тяжести и реакции

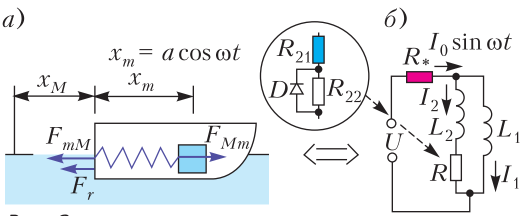


Рис. 2

опоры, конечно же, равна нулю. Поэтому уравнение движения тела имеет вид

$$m\frac{d\left(v_M+v_m\right)}{dt}=F_{Mm}.$$

На лодку действуют тело массой m силой F_{mM} и вода силой сопротивления $F_{\text{c}} = -\lambda v_M$. Поэтому ее уравнение движения выглядит так:

$$M\frac{dv_M}{dt}=F_{mM}+F_{\text{c}}.$$

Если предположить, что тело в лодке совершает гармонические колебания $x_m = a\cos\omega t$ с амплитудой колебаний a и частотой ω, то получающийся после суммирования двух уравнений движения результат

$$(M+m)\frac{dv_M}{dt}+\lambda v_M=ma\omega^2\cos\omega t$$

ничем не отличается от уравнения движения системы материальных точек, движущихся под действием силы сопротивления среды.

Обратимся к электрической аналогии. Масс в задаче две, значит, должны быть и две индуктивности; вместо скорости надо записать силу тока; вместо коэффициента сопротивления среды – сопротивление резистора. Ток, умноженный на сопротивление, это падение напряжения, значит, в правой части искомого уравнения должно стоять напряжение, которое лучше переписать через поступающий от генератора ток с амплитудным значением I_0. В итоге получаем уравнение

$$\left(L_1 + L_2\right)\frac{dI_2}{dt} + RI_2 = I_0\omega L_1 \cos\omega t.$$

Но записать формулу мало, если речь идет о постановке эксперимента пусть даже в таком аналоговом варианте. Нужна реальная проверяемая схема. Ток I_2 должен течь и через резистор, и через катушку индуктивностью L_2, значит, они должны быть соединены последовательно. Вместо массы m записана индуктивность L_1, поэтому участок цепи с L_1 не может быть соединен последовательно с L_2 и R. Действительно, при отсутствии лодки массой M мы имеем простые гармонические колебания тела массой m. Единственная электрическая схема, удовлетворяющая этим условиям, показана на рисунке 2,*б*. Разумеется, она должна быть проверена.

Поскольку $I = I_1 + I_2$, то мгновенное значение падения напряжения на индуктивности L_1 есть не что иное как

$$U_{L_1} = -L_1\frac{dI_2}{dt} + L_1\frac{dI}{dt},$$

оно же равно падению напряжения на последовательном соединении L_2 и R:

$$U_{L_1} = L_2\frac{dI_2}{dt} + I_2 R.$$

Левые части равны, значит, должны быть равны и правые. Отсюда при заданном общем токе $I = I_0 \sin\omega t$ сразу же получается проверяемое уравнение.

Дальше надо обеспечить аналог разных коэффициентов сопротивления при движении лодки в разных направлениях. Здесь возможны варианты. Наиболее простой и разумный способ – разделить резистор R на два: R_{21} и R_{22}, а один из них, например R_{22}, зашунтировать диодом D. Роль резистора R_* только в одном: если его значение мало, т.е. много меньше ωL_1, ωL_2 и R, то, измеряя на нем падение напряжения U_{R_*}, можно узнать общий ток. Аналогичным образом сравнительно точно можно определить значение тока I_2 – для этого достаточно измерить напряжение $U_{R_{21}}$ на резисторе R_{21}.

Конечно, полученное дифференциальное уравнение движения можно решить численно, а «вибродвижущуюся» лодку можно даже рассмотреть аналитически. Но это сложно и не очень интересно. Куда интереснее поставить такой «электрический» эксперимент и поинтересоваться, как быстро будет двигаться, к примеру, несимметричная кювета, в которой совершает почти гармонические колебания несбалансированный груз обыкновенного метронома. Согласитесь, такой необычный способ передвижения интересен не только для начинающих и продвинутых кораблестроителей, инженеров и конструкторов. Всякий, кто интересуется альтернативными способами передвижения в жидкости, по твердой поверхности или в воздухе, готов задать вопросы, но не всегда способен получить ответы. Как быстро будет двигаться «вибролодка», изображенная на рисунке 2? Что нужно, чтобы она тратила поменьше энергии? Как сделать, чтобы она меньше вибрировала?

Чтобы попытаться ответить на эти вопросы (и не только на них), нужны генератор низкой частоты, несколько резисторов, пара катушек индуктивности, полупроводниковый диод и осциллограф. Обеспечить двукратное изменение коэффициентов сопротивления при движении «вибролодки» в разных направлениях можно без труда. Для «остроносой» ракеты такое изменение, к примеру, может превышать 10. Если $\omega_в$ – частота колебаний тела массой m, ω – частота переменного электрического тока в электрическом аналоге «вибролодки», то должно, очевидно, выполняться соотношение $\lambda/m\omega_в = R/L_1\omega$. Двойное изменение коэффициента сопротивления среды ведет к двойному изменению сопротивления резистора R, значит, $R_{21} = R_{22}$. Если масса лодки равна массе несбалансированного груза, т.е. $M = m$, то $L_1 = L_2$. Пусть $L_1 = 3{,}1$ мГн, что отвечает вполне разумным и естественным значениям λ при $R_{21} = 1$ кОм. Экран электронного ос-

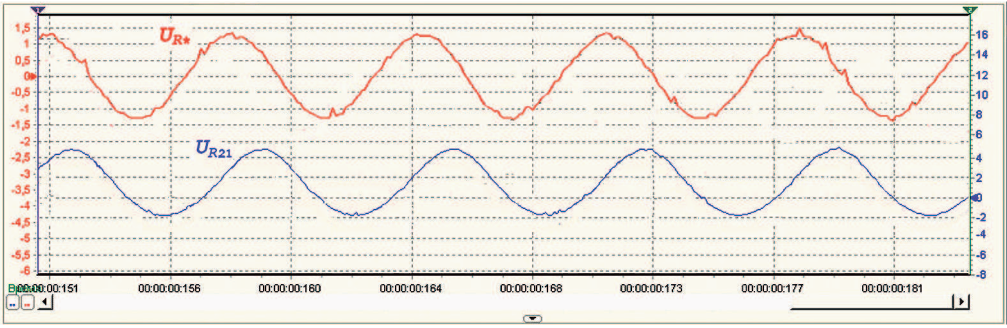


Рис. 3

циллографа показывает, что при частоте входного переменного тока 20 кГц с амплитудой $I_0 = 10$ мА среднее значение тока $I_{2\text{ср}}$, текущего через резистор R_{21}, не равно нулю и составляет около 0,9 мА (рис. 3). В свою очередь, это означает, что средняя скорость «вибролодки» должна быть $v_{\text{ср}} = a\omega_{\text{в}} I_{2\text{ср}}/I_0$, а в данном конкретном случае при амплитуде 5 см и частоте 1 Гц это будет 28 мм/с. Другими словами, за одно колебание несбалансированного груза лодка перемещается больше, чем на половину амплитуды колебаний. Это, разумеется, произошло при сравнительно большом среднем значении коэффициента сопротивления среды $\lambda_{\text{ср}} \approx 1{,}7$ кг/с. При таком коэффициенте сопротивления лодка, двигаясь с начальной скоростью 1 м/с, останавливается, пройдя расстояние всего лишь 5,8 см.

Как средняя скорость изменится при других значениях коэффициента сопротивления? А что изменится, если колебания несбалансированного тела не гармонические? И вообще, возможно ли такое вибрационное перемещение «через стенку», если среда есть, колебания не гармонические, а коэффициенты сопротивления при движении лодки туда и обратно одни и те же? Вопросов много. Один из способов ответить на эти вопросы и не только на эти – не спешить с изготовлением и испытанием «виброходов», «вибролодок», «вибролетов» и других непонятных устройств, а обратиться за помощью к динамическим аналогиям.

ОЛИМПИАДЫ

Заключительный этап XLVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике

Олимпиада проходила 17–25 апреля 2022 года в городе Саранске.

Условия задач

9 класс

1. Назовем *главными делителями* составного числа n два наибольших его натуральных делителя, отличных от n. Составные натуральные числа a и b таковы, что главные делители числа a совпадают с главными делителями числа b. Докажите, что $a = b$.

А.Голованов

2. См. задачу М2702 «Задачника «Кванта».

3. В строку выписаны 200 натуральных чисел. Среди любых двух соседних чисел строки правое либо в 9 раз больше левого, либо в 2 раза меньше левого. Может ли сумма всех этих 200 чисел равняться 24^{2022}?

О.Подлипский, И.Богданов

4. В классе 18 детей. Родители решили подарить детям из этого класса торт. Для этого они сначала узнали у каждого ребенка площадь куска, который он хочет получить. После этого они заказали торт квадратной формы, площадь которого в точности равна сумме 18 названных чисел. Однако, увидев торт, дети захотели, чтобы их куски тоже были квадратными. Родители могут резать торт разрезами, параллельными сторонам торта (разрезы не обязаны начинаться или оканчиваться на стороне торта). Для какого наибольшего k родители гарантированно могут вырезать из заказанного торта k квадратных кусков, которые можно выдать k детям, чтобы каждый из них получил желаемое?

А.Ибрагимов, И.Богданов

5. См. задачу М2703 «Задачника «Кванта».

6. Для какого наименьшего натурального числа a существуют целые числа b и с такие, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два различных положительных корня, не превосходящих $\frac{1}{1000}$?

А.Храбров

7. В стране 998 городов. Некоторые пары городов соединены двусторонними авиарейсами. Согласно закону, между любой парой городов должно быть не больше одного рейса. Другой закон требует, чтобы для любой группы городов было не больше $5k + 10$ рейсов, соединяющих два города этой группы, где k – количество городов в группе. В настоящий момент законы соблюдены. Докажите, что министерство развития может ввести несколько новых рейсов так, чтобы законы по-прежнему соблюдались, а общее количество рейсов в стране стало равным 5000.

И.Богданов

8. В треугольник ABC вписана окружность ω, касающаяся стороны BC в точке K. Окружность ω′ симметрична окружности ω относительно точки A. Точка A_0 выбрана так, что отрезки BA_0 и CA_0 касаются ω′. Пусть M – середина стороны BC. Докажите, что прямая AM делит отрезок KA_0 пополам.

А.Шевцов

10 класс

1. См. задачу 1 для 9 класса.

2. На стороне BC остроугольного треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $BD = CE$. На дуге DE описанной окружности треугольника ADE, не содержащей точку A, нашлись такие точки P и Q, что $AB = PC$ и $AC = BQ$. Докажите, что $AP = AQ$.

А.Кузнецов

3. См. задачу М2704 «Задачника «Кванта».

4. См. задачу М2705 «Задачника «Кванта».

5. На доске написаны 11 целых чисел (не обязательно различных). Может ли оказаться, что произведение любых пяти из них больше, чем произведение остальных шести?

И.Богданов

6. Дано натуральное число $n > 5$. На кольцевой полоске бумаги написана последовательность из нулей и единиц. Для каждой последовательности w из n нулей и единиц посчитали количество способов вырезать из полоски фрагмент, на котором написана w. Оказалось, что наибольшее количество M достигается на последовательности $11\underbrace{00\ldots0}_{n-2}$, а наименьшее (возможно, нулевое) – на последовательности $\underbrace{00\ldots0}_{n-2}11$. Докажите, что есть и другая последовательность из n нулей и единиц, встречающаяся ровно M раз.

И.Богданов

7. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E, а на стороне AD – точка F так, что описанная окружность треугольника ABE касается отрезка CF. Докажите, что описанная окружность треугольника CDF касается прямой AE.

А.Кузнецов, П.Кожевников

8. Для натурального числа N рассмотрим все различные точные квадраты, которые можно получить из N вычеркиванием одной цифры в его десятичной записи. Докажите, что количество этих квадратов не превосходит некоторой величины, не зависящей от N.

С.Берлов, Ф.Петров, Д.Крачун

11 класс

1. См. задачу 1 для 9 класса.

2. На плоскости нарисованы графики функций $y = \sin x$ и $y = \operatorname{tg} x$, а также оси координат. Как циркулем и линейкой построить какую-нибудь прямую, которая касается графика синуса как выше оси абсцисс (Ox), так и ниже (и, возможно, имеет еще несколько точек пересечения)?

А.Кузнецов

3. На плоскости фиксирован остроугольный треугольник ABC с наибольшей стороной BC. Пусть PQ – произвольный диаметр его описанной окружности, причем точка P лежит на меньшей дуге AB, а точка Q – на меньшей дуге AC. Точки X, Y и Z – основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямую AB, из точки Q на прямую AC и из точки A на прямую PQ. Докажите, что центр описанной окружности треугольника XYZ лежит на фиксированной окружности (не зависящей от выбора точек P и Q).

И.Кухарчук, М.Дидин

4. См. задачу М2705 «Задачника «Кванта».

5. См. задачу 5 для 10 класса.

6. Дано натуральное число n. Саша утверждает, что для любых n лучей в пространстве, никакие два из которых не имеют общих точек, он сможет отметить на этих лучах k точек, лежащих на одной сфере. При каком наибольшем k его утверждение верно?

А.Кузнецов

7. См. задачу 8 для 10 класса.

8. Из каждой вершины треугольника ABC провели внутрь него два луча, красный и синий, симметричные относительно биссектрисы соответствующего угла. Около треугольников, образованных при пересечении лучей одного цвета, описали окружности. Докажите, что если описанная окружность треугольника ABC касается одной из этих окружностей, то она касается и другой.

А.Кузнецов, И.Фролов

Победители олимпиады

9 класс

Сапрунов Егор – Санкт-Петербург,
Югов Михаил – Санкт-Петербург,
Парамонов Дмитрий – Санкт-Петербург,
Часовских Иван – Химки Московской области,
Дмитриев Лев – Санкт-Петербург,
Иванов Максим – Пензенская область,
Никитин Федор – Санкт-Петербург,
Уткин Евгений – Саратов,
Ленская Наталия – Москва,
Садыков Артем – Челябинск;

10 класс

Гнусов Александр – Киров,
Прозоров Павел – Санкт-Петербург,
Мишуков Николай – Санкт-Петербург,
Хисамутдинов Эльдар – Санкт-Петербург,
Аккая Тимур – Санкт-Петербург,
Гонтарь Дмитрий – Санкт-Петербург,
Копосов Тимофей – Санкт-Петербург,
Лахтин Антон – Свердловская область,
Факанова Виктория – Москва,
Климчук Александр – Москва,
Латариа Мириан – Москва;

11 класс

Туревский Максим – Санкт-Петербург,
Коротченко Таисия – Санкт-Петербург,
Бахарев Иван – Санкт-Петербург,
Мустафин Денис – Москва,
Почепцов Игорь – Москва,
Кузнецов Роман – Санкт-Петербург,
Романов Владимир – Удмуртская Республика,
Шарафетдинова Галия – Казань,
Юсупова Ралина – Казань,
Курин Виталий – Москва,
Пескин Максим – Москва,
Федоров Александр – Москва,
Доценко Владислав – Москва.

Публикацию подготовили Н.Агаханов, М.Антипов, А.Антропов, С.Берлов, И.Богданов, Д.Бродский, А.Голованов, М.Дидин, К.Кноп, П.Кожевников, П.Козлов, Д.Крачун, С.Кудря, А.Кузнецов, Ю.Кузьменко, Е.Молчанов, Ф.Петров, О.Подлипский, К.Сухов, Д.Терёшин, И.Фролов, А.Храбров, Д.Храмцов, Г.Челноков, О.Южаков

Национальный исследовательский университет «МИЭТ»

Национальный исследовательский университет «МИЭТ» на протяжении многих лет проводит для старшеклассников олимпиады по математике, физике и информатике, которые пользуются большой популярностью среди школьников страны. С 2015 года в заочной (дистанционной) форме проводится олимпиада школьников «РИТМ МИЭТ». Ежегодно в 9 секциях олимпиады принимают участие более 2000 человек. В 2018 году университет организовал очную Физико-математическую олимпиаду МИЭТ, которая проходит в нескольких десятках городов России и стран СНГ.

Ниже приводятся задачи по физике, предлагавшиеся в этом году на олимпиаде «РИТМ МИЭТ» и на Физико-математической олимпиаде МИЭТ.

ИНТЕРНЕТ-ОЛИМПИАДА «РИТМ МИЭТ»

Заключительный этап

1. Две шайбы движутся с одинаковыми скоростями по гладкой горизонтальной плоскости и упруго сталкиваются с вертикальным бортиком (рис.1; вид сверху). Определите минимальное расстояние между шайбами при их движении, если до столкновений с бортиком расстояние между шайбами было $l = 1$ м и прямая, проходящая через шайбы, составляла с бортиком угол $\alpha = 30°$.

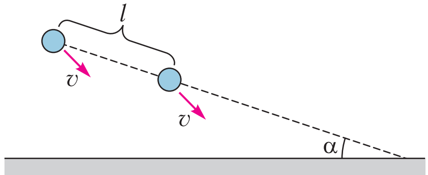


Рис. 1

2. Шайба, закрепленная на легкой пружине, движется по горизонтальной поверхности (рис. 2). Определите длину пружины в момент времени, когда шайба движется замедленно с ускорением $a = 6$ м/с^2, сжимая пружину. Масса шайбы $m = 100$ г, длина недеформированной пружины $l_0 = 10$ см, ее жесткость $k = 10$ Н/м, коэффициент трения $\mu = 0{,}5$, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.


Рис. 2

3. На горизонтальном столе расположены две одинаковые детали, соединенные тремя легкими нерастяжимыми нитями (рис. 3).

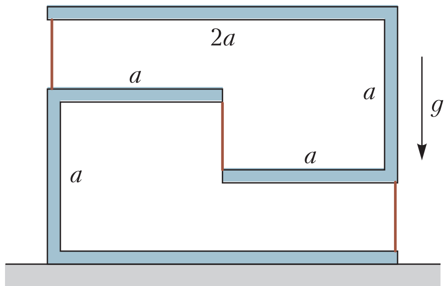


Рис. 3

Система находится в равновесии. Определите минимально возможную силу натяжения средней нити, если масса каждой детали m, длины горизонтальных участков $2a$ и a, длины вертикальных участков a. Детали сделаны из двух одинаковых жестких брусков, изогнутых в двух местах под прямым углом.

4. Первое тело нагрели в термостате, температура которого неизвестна. Затем это тело извлекли из термостата и приложили ко второму телу на время, необходимое для установления теплового равновесия. При этом температура второго тела изменилась от $T_1 = 300$ К до $T_2 = 350$ К. Потом первое тело снова нагрели в термостате и приложили ко второму телу, при этом температура второго тела изменилась от T_2 до $T_3 = 380$ К. Определите максимальную температуру, до которой можно нагреть второе тело при многократном повторении этой операции.

5. Один моль идеального одноатомного газа находится в горизонтальном теплоизолированном цилиндре с теплонепроницаемым поршнем массой $M = 1$ кг. Трение между поршнем и цилиндром отсутствует. Поршень, который первоначально покоился, резким ударом приводят в движение со скоростью v_0. Спустя некоторое время поршень останавливается в новом положении равновесия, а температура газа в цилиндре повышается на $\Delta T = 1{,}5$ К. Найдите начальную скорость поршня v_0, считая, что внешнее атмосферное давление постоянно. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(К · моль).

6. К изначально незаряженному проводнику подносят заряженный металлический шар с зарядом q_0 и касаются проводника в некоторой точке. Проводник приобретает заряд q_1. Шар отводят от проводника, подзаряжают до заряда q_0 и вновь касаются проводника в той же точке. Определите установившийся заряд q проводника после многократного повторения этих действий.

7. Раньше перегоревший электрический утюг можно было починить. При ремонте удаляли перегоревший кусок спирали, а полученные в месте разрушения концы плотно скручивали (паять оловом нельзя, поскольку температура высокая). Определите сопротивление такого скрученного контакта, если известно, что в результате ремонта спираль стала короче на 10%, а мощность утюга выросла с $P_1 = 500$ Вт до $P_2 = 520$ Вт. Утюг работает при напряжении $U = 220$ В. Считайте, что это напряжение постоянное.

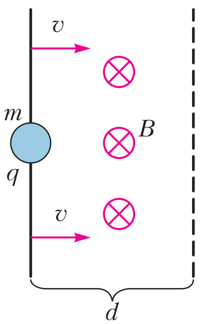


Рис. 4

8. По длинному гладкому непроводящему стержню может скользить бусинка массой m и зарядом q. В начальный момент стержень и бусинка покоятся в однородном магнитном поле, вектор $\vec{B}$ индукции которого перпендикулярен стержню. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы переместить стержень на расстояние d, двигая его поступательно в направлении, перпендикулярном стержню и вектору индукции (рис. 4)?

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА МИЭТ

10 класс

Вариант 1

1. Тело брошено с башни горизонтально. С какой начальной скоростью брошено тело, если его кинетическая энергия через время $t = 1$ с после броска и кинетическая энергия через время $2t$ отличаются в 2 раза? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

2. Шар массой $m = 3$ кг и радиусом $R/3$ удерживается на неподвижной полусфере радиусом R с помощью невесомой нерастяжимой нити. Нить закреплена в верхней точке A полусферы и горизонтальна (рис. 5). Трение отсутствует. Чему равна сила натяжения нити? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

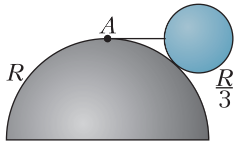


Рис. 5

3. Цирковой гимнаст падает с высоты $h = 4$ м на горизонтальную упругую натянутую сетку, при этом максимальный прогиб сетки составляет $\Delta l = 0{,}5$ м. Найдите величину ускорения a гимнаста в нижней точке траектории. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Считайте, что упругая сила, возникающая при деформации сетки, прямо пропорциональна величине ее прогиба.

4. Гелий и аргон находятся в сосуде объемом V_1. Массы газов одинаковые, молярные массы гелия и аргона равны $\mathrm{M}_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль и $\mathrm{M}_2 = 40 \cdot 10^{-3}$ кг/моль соответственно. Этот сосуд с газами соединяют с пустым сосудом объемом V_2 через полупроницаемую перегородку, которая пропускает только молекулы гелия. После установления равновесия давление в первом сосуде уменьшилось в два раза. Найдите отношение объемов V_2/V_1. Температура газов не изменилась.

5. Каково максимально возможное сопротивление между точками A и B электрической цепи, состоящей из двух параллельных проволок и двух перемычек со скользящими контактами (рис. 6)? Сопротивление каждой проволоки $R_1 = 2$ Ом, каждой перемычки $R_2 = 4$ Ом.

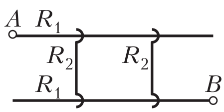


Рис. 6

Вариант 2

1. Тело, брошенное вертикально вверх с поверхности земли, через некоторое время упало на балкон со скоростью в 5 раз меньшей, чем начальная. На какой высоте h над землей находится балкон, если через время $\tau = 0{,}3$ с после броска скорость летящего вверх тела уменьшилась на 20%? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

2. К концу тонкой еловой палочки постоянного сечения привязали легкую веревку, другой конец которой прикрепили ко дну сосуда с водой. Плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м^3, плотность ели $\rho = 640$ кг/м^3. Определите отношение силы натяжения нити к силе тяжести палочки для случаев: а) палочка полностью погружена в воду (рис. 7); б) палочка частично погружена в воду и занимает наклонное положение (рис. 8).

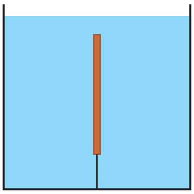


Рис. 7

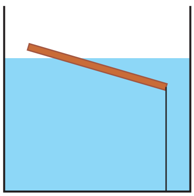


Рис. 8

3. Брусок массой $m = 1$ кг покоится на горизонтальной доске. В некоторый момент доску начинают двигать в горизонтальном направлении с ускорением a (рис. 9). Коэффициент трения между бруском и доской $\mu = 0{,}4$. Определите приращение $\Delta E_к$ кинетической энергии бруска при перемещении доски на расстояние $s = 0{,}5$ м, если ускорение доски $a = 5$ м/с^2. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

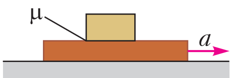


Рис. 9

4. В баллоне находится идеальный газ. Баллон соединяют с пустым сосудом, имеющим в $n = 5$ раз меньший объем. При этом давление в сосуде становится равным $p = 2 \cdot 10^5$ Па. Найдите разность Δp начального и конечного давлений в баллоне. Процесс считайте изотермическим.

5. В схеме на рисунке 10 напряжение на резисторе R_2 не изменяется при замыкании или размыкании ключа K. Определите отношение сопротивлений R_1/R_2.

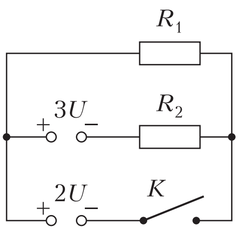


Рис. 10

11 класс

Вариант 1

1. Из одной точки горизонтальной поверхности одновременно с одинаковыми по величине скоростями $v_0 = 10$ м/с бросают два груза. Первый груз бросают вертикально, а второй под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Определите максимальное расстояние между грузами во время их полета. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

2. Две тележки, связанные легкой веревкой, находятся на горизонтальной поверхности (рис. 11). Тележка массой m_1 покоится, а тележка массой m_2 приближается к ней со скоростью $v_0 = 3$ м/с. После абсолютно упругого столкновения тележек расстояние между ними увеличивается, веревка натягивается и далее тележки движутся вместе с единой скоростью $v_0/3$. Определите: а) отношение масс тележек m_1/m_2; б) максимальную скорость более массивной тележки.

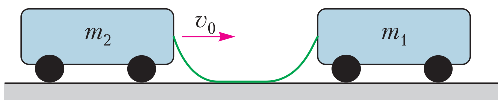


Рис. 11

3. КПД цикла Карно *1–2–3–4* (рис. 12) равен $\eta_1 = 0{,}6$. Изотермическое сжатие *3′–4′* стали проводить при более высокой температуре. При этом отданное холодильнику за цикл количество теплоты увеличилось на $\delta = 20\%$, а процесс изотермического расширения газа остался неизменным. Определите КПД η_2 цикла *1–2–3′–4′*.

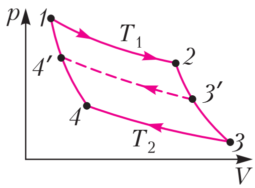


Рис. 12

4. Точечные заряды $q_1 = 8$ нКл, q_2 и q_3 расположены на оси x в точках с координатами $x_1 = 0$, $x_2 = a$, $x_3 = 2a$. Известно, что электрическая сила, действующая на каждый заряд, равна нулю. Определите: а) заряды q_2 и q_3; б) энергию электрического взаимодействия трех зарядов.

5. Из двух кусков медной проволоки сделали рамку, состоящую из двух замкнутых контуров. В местах контактов проволока зачищена и скручена (рис. 13). Сопротивление каждого контакта $R = 0{,}1$ Ом значительно превышает сопротивление проволок. Полученную рамку поместили в переменное

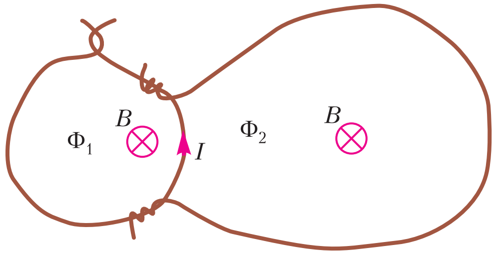


Рис. 13

магнитное поле. Магнитный поток через контуры линейно увеличивается со временем: $\Phi_1 = 2\varepsilon t$, $\Phi_2 = 3\varepsilon t$, где $\varepsilon = 0{,}004$ В. Определите ток I в проволоке на общей границе контуров.

Вариант 2

1. Из одной точки горизонтальной поверхности одновременно с одинаковыми по величине скоростями $v_0 = 15$ м/с бросают два груза. Первый груз бросают вертикально, а второй под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Сколько времени первый груз будет двигаться прямолинейно, если он привязан ко второму легкой нитью длиной $l = 3$ м? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Груз, подвешенный на легкой пружине, сместили из положения равновесия по вертикали и без толчка отпустили. Он начал опускаться с ускорением $a = g/4$ и через время $T = 2$ с вернулся в исходную точку. Определите путь, пройденный грузом за это время. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3. Одноатомный идеальный газ совершает циклический процесс 1–2–3–4 (рис. 14), состоящий из двух изобар и двух адиабат. При изобарическом расширении газа его внутренняя энергия увеличивается на ΔU, а при изобарическом сжатии над газом совершается работа A. Определите КПД цикла.

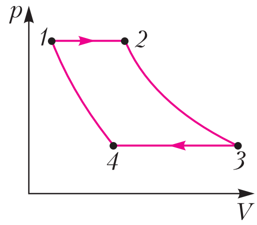


Рис. 14

4. Точечные заряды $3q$, q и Q расположены на одной прямой вдали от других заряженных тел так, что электрическая сила, действующая на каждый заряд, равна нулю. Определите отношение Q/q.

5. Проводники электрической схемы (рис. 15) лежат в одной плоскости. Вектор индукции магнитного поля перпендикулярен этой плоскости, а модуль вектора индукции B увеличивается со временем t по закону $B = \beta t$, где $\beta = 15$ Тл/с. Площадь каждого из двух смежных контуров $S = 10$ см^2. Определите напряжение на резисторе R, если: а) ключ K разомкнут; б) ключ K замкнут.

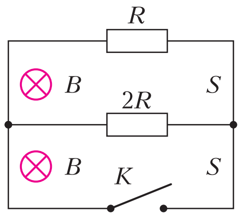


Рис. 15

Публикацию подготовили Г. Гайдуков, И. Горбатый, И. Федоренко

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Профильный экзамен по физике

В 2022 году в связи с продолжающимся распространением коронавирусной инфекции профильный экзамен (дополнительное вступительное испытание) по физике в МГУ и его Севастопольском филиале проводился в дистанционном формате на портале https://exam.distant.msu.ru/

Для участия в экзамене предъявлялись следующие технические требования к рабочему месту испытуемого. 1) Наличие ноутбука (желательно), персонального компьютера, смартфона или планшета со стабильным интернет-соединением (без прерываний на протяжении испытания и минимальной скоростью от 5 Мбит/с). 2) При подключении к видеоконференции с помощью смартфона или планшета любого типа для получения задания обязательно использование второго устройства, например компьютера, иного смартфона/планшета. 3) Необходимо также наличие браузера Google Chrome или Mozilla Firefox последних версий и сканирующего или фотографирующего устройства для сканирования или фотографирования экзаменационной работы с последующей загрузкой на портал экзамена.

Руководство МГУ приняло решение сократить как объем заданий для профильного экзамена (ДВИ), так и время их выполнения. В итоге типовое задание по физике в этом году охватывало три основных раздела программы для поступающих в МГУ: 1) механику, 2) молекулярную физику и термодинамику, 3) электродинамику. По каждому разделу программы абитуриенту предлагались краткий вопрос по теории и дополняющая его задача. На выполнение всего задания отводилось три астрономических часа.

Ниже приводятся задания профильного экзамена 2022 года.

Механика

1. Чему равны сила трения покоя и сила трения скольжения? Дайте определение коэффициента трения.

Задача. На гладком горизонтальном столе лежит доска, на одном из краев которой находится небольшой брусок, а на другом – небольшой блок (рис. 1). К бруску прикреплена невесомая нерастяжимая гладкая нить, перекинутая через блок. Нить начинают тянуть вертикально вверх с силой $F = 50$ Н. Чему равна длина доски L, если брусок доезжает до блока за время $t = 0{,}5$ с? Масса доски $M = 10$ кг, бруска $m = 5$ кг, коэффициент трения между бруском и доской $\mu = 0{,}6$. Модуль ускорения свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с^2.

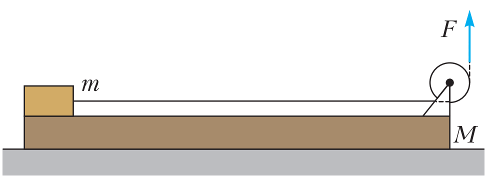


Рис. 1

2. Дайте определение импульса системы материальных точек. Сформулируйте закон сохранения импульса.

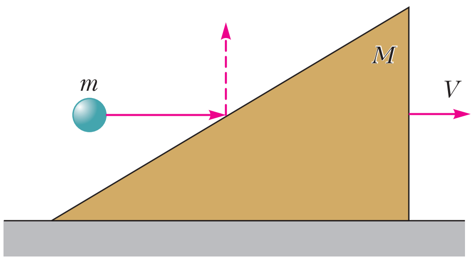


Рис. 2

Задача. Гладкий клин массой $M = 1$ кг покоится на горизонтальном столе (рис. 2). В наклонную поверхность клина попадает маленький шарик массой $m = 100$ г, летящий горизонтально, и после абсолютно упругого удара о поверхность клина отскакивает вертикально вверх. На какую высоту h поднимется шарик относительно точки удара, если после удара клин приобретает скорость $V = 1$ м/с? Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.

Молекулярная физика и термодинамика

1. Запишите уравнение Менделеева–Клапейрона (уравнение состояния идеального газа). Какие уравнения описывают изотермический, изохорный и изобарный процессы?

Задача. Сосуд с газом, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда с длиной $l = 1$ м, двигают горизонтально с ускорением $a = 10$ м/с^2, направленным вдоль длинной стороны. Найдите разность плотностей газа $\Delta\rho$ вблизи задней и передней стенок сосуда. Плотность газа в неподвижном сосуде $\rho_0 = 1{,}3$ кг/м^3, его молярная масса $\mathrm{M} = 0{,}029$ кг/моль, температура $T = 273$ К. Универсальную газовую постоянную примите равной $R = 8{,}3$ Дж/(моль · К). Силой тяжести, действующей на молекулы газа, можно пренебречь.

2. Сформулируйте первый закон термодинамики. Поясните смысл входящих в него величин.

Задача. Невесомый поршень соединен с дном цилиндрического сосуда пружиной жесткостью $k = 100$ Н/м (рис. 3). В сосуде под поршнем находится идеальный одноатомный газ, а над поршнем – вакуум. В начальном состоянии расстояние между поршнем и дном сосуда составляет $h = 0{,}2$ м. Най-

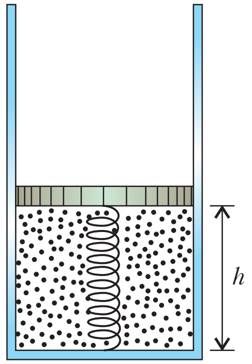


Рис. 3

дите количество теплоты ΔQ, которое нужно сообщить газу, чтобы расстояние между поршнем и дном сосуда удвоилось. Считайте, что пружина не деформирована при $h = 0$.

Электродинамика

1. Дайте определение потенциала электрического поля. Запишите формулу, связывающую разность потенциалов с напряженностью электростатического поля.

Задача. Отрицательно заряженная частица массой $m = 9\cdot10^{-30}$ кг движется по круговой орбите радиусом $r = 5\cdot10^{-11}$ м вокруг неподвижной положительно заряженной частицы, несущей такой же по модулю заряд. Найдите период обращения частицы T, если известно, что полная механическая энергия частицы $E = -2\cdot10^{-18}$ Дж.

2. Дайте определение магнитного потока. Сформулируйте закон электромагнитной индукции.

Задача. Квадратная проволочная рамка со стороной $l = 30$ см помещена в однородное магнитное поле, линии индукции которого направлены перпендикулярно плоскости рамки. Модуль вектора магнитной индукции равен $B = 1$ Тл, поле имеет резко очерченную границу, параллельную стороне рамки (рис. 4). Каково сопротивление рамки R,

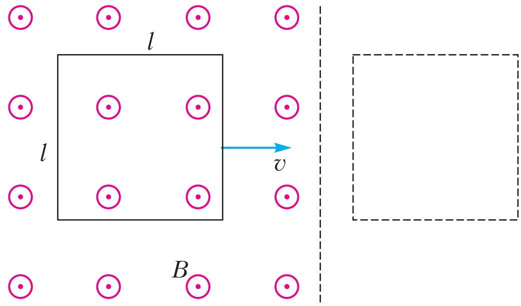


Рис. 4

если при ее выдвигании с постоянной скоростью $v = 5$ м/с из области с магнитным полем в ней выделяется количество теплоты $Q = 90$ мДж?

Публикацию подготовил С.Чесноков

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №6)

1. 100.

Заметим, что после хода Пети в каждом столбце добавляется одна занятая клетка, а после хода Васи в каждой строке добавляется одна занятая клетка. Поэтому Петя сумеет сделать 100 ходов, а Вася – 99. Первым ходом будет записано 100 единиц, вторым и третьим ходами – по 99 противоположных чисел, четвертым и пятым – по 98 противоположных чисел и так далее. Таким образом, сумма чисел в таблице равна сумме чисел, записанных Петей первым ходом, т.е. равна 100.

2. 60°.

Пусть в треугольнике ABC проведен серединный перпендикуляр к стороне AB, который пересекает высоту BH в точке P, и $BP : PH = 2 : 1$ (рис. 1). Проведем отрезок PA, тогда $PA = PB$, так как

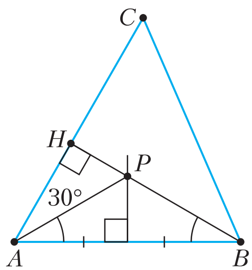


Рис. 1

точка P лежит на серединном перпендикуляре к AB. Значит, $PH = 0{,}5PA$, поэтому в прямоугольном треугольнике APH угол PAH равен 30°. Тогда $\angle APH = 60°$ и этот угол является внешним для равнобедренного треугольника APB. Следовательно, $\angle PAB = \angle PBA = 30°$. Таким образом, $\angle CAB = \angle PAH + \angle PAB = 60°$.

3. Всегда.

Пусть записаны числа $n-1$, n, $n+1$, $n+2$ ($n \geq 2$ – натуральное число). Тогда можно расставить знаки так:

$$1)\ n-1+n(n+1)+(n+2)=n-1+n^2+n+n+2= \\ =n^2+3n+1;$$

$$2)\ n-1-n+(n+1)(n+2)= \\ =n-1-n+n^2+n+2n+2=n^2+3n+1.$$

Отметим, что если в каждом из этих способов сложение заменить вычитанием, а вычитание заменить сложением, то также получатся одинаковые результаты, а именно, $-n^2-n-3$.

4. Сможет.

Если на одну чашу весов положить четыре украшения, с массами 36, 37, 38 и 39 граммов, а на другую – пять украшений: 28, 29, 30, 31 и 32 грамма, то весы будут в равновесии. Так как это единственный способ уравновесить группы из четырех и из пяти украшений, то ювелир убедит царя в распределении украшений на три группы: 28–32, 33–35 и 36–39. Далее можно действовать по-разному.

Первый способ. Второе взвешивание: $39+31+32$ и $33+34+35$, что опять даст равенство. Так как на одной чаше весов – вторая группа целиком, то царь знает суммарную массу украшений на этой чаше (102 г). При этом уравновесить вторую группу двумя украшениями из первой группы и одним украшением из третьей группы можно только одним способом (во всех остальных случаях чаша, на которой лежит группа 33–35, перевесит). Тем самым ювелир сможет доказать, что выбранное им украшение из третьей группы действительно имеет массу 39 г.

Второй способ. Вторым взвешиванием ювелир кладет на левую чашу $36+37$, а на правую – $35+39$. Правая чаша перевесит, но на левой чаше наименьшая возможная суммарная масса для такого набора (два украшения из третьей группы), а на правой – наибольший возможный для своего набора (по одному украшению из второй и третьей групп). Значит, правая чаша могла перевесить только для указанных масс. Заметим, что при таком взвешивании ювелир также убедит царя, что украшения в 35 г и 38 г действительно имеют такую массу.

Игра в нетранзитивные кости

Задача 4. Такой пример можно довольно легко придумать, обобщая уже упомянутую выше идею с наборами (костями), каждый из которых использует только два разных числа. Давайте, например, «изготовим» α-нетранзитивную цепочку из шести костей для $\alpha = 7/10$. Количество граней на наших костях (число n) должно быть достаточно большим числом (скоро вы увидите, почему это так), возьмем для надежности $n = 100$. Начнем с кости

$$A = (\underbrace{10,10,\ldots,10}_{30\ \text{десяток}},\ \underbrace{5,5,\ldots,5}_{70\ \text{пятерок}}).$$

Ясно, что для кости

$$B = (\underbrace{6,6,\ldots,6}_{100\ \text{шестерок}})$$

вероятность победы $p(B \succ A)$ равна в точности 7/10. Теперь осталось только вставить между A и B четыре кости, чтобы получилась нужная цепочка. Для удобства обозначений будем считать, что $A = A^{(1)}$, $B = A^{(6)}$, а вставляем мы кости $A^{(k)}$, $k = 2, \ldots, 5$ так, чтобы все пять вероятностей

$$p\left(A^{(1)} \succ A^{(2)}\right),\ p\left(A^{(2)} \succ A^{(3)}\right),\ p\left(A^{(3)} \succ A^{(4)}\right), \\ p\left(A^{(4)} \succ A^{(5)}\right),\ p\left(A^{(5)} \succ A^{(6)}\right)$$

были не меньше чем 7/10.

Для этого определяем каждую следующую кость в соответствии с правилом

$$A^{(k)} = (\underbrace{11-k,11-k,\ldots,11-k}_{a_k\ \text{чисел}\ 11-k},\underbrace{6-k,6-k,\ldots,6-k}_{100-a_k\ \text{чисел}\ 6-k}).$$

Кстати, обратите внимание, что обе кости $A^{(1)}$ и $A^{(6)}$ уже определены по этой схеме – просто надо положить $a_1 = 30$ и $a_6 = 100$ соответственно.

Теперь подберем значение числа a_2 так, чтобы $p\left(A^{(1)} \succ A^{(2)}\right) \geq 7/10$. Для этого нужно, чтобы выполнялось неравенство

$$a_1 \cdot 100 + (100-a_1)(100-a_2) \geq \frac{7}{10} \cdot 10000 = 7000,$$

что равносильно

$$a_2(100-a_1) \leq 3000.$$

Поскольку $a_1 = 30$, то наибольшее пригодное нам значение a_2 – это 42, так как 42 равно целой части числа $3000/(100-a_1) \approx 42{,}85$. Имеем $42 \cdot (100-30) = 2940 \leq 3000$.

Аналогично, для кости $A^{(3)}$ выбираем $a_3 = \left[3000/(100-42)\right] = 51$ (квадратные скобки здесь, как и положено, обозначают функцию целой части вещественного числа) и получаем $a_3(100-a_2) = 51 \cdot 58 = 2958 \leq 3000$. Далее выбираем $a_4 = \left[3000/(100-51)\right] = 61$ и соответственно получаем $a_4(100-a_3) = 61 \cdot 49 = 2989$. Наконец, $a_5 = \left[3000/(100-61)\right] = 76$, и мы имеем $a_5(100-a_4) = 76 \cdot 39 = 2964$.

Все! Как только в нашей последовательности встретилось число, большее либо равное αn (в нашем случае это $0,7 \cdot 100 = 70$), то в качестве следующей кости годится $A^{(6)}$ и наша цепочка завершена. И в самом деле,

$$p\left(A^{(5)} \succ A^{(6)}\right) = \frac{76 \cdot 100}{10000} = 0,76.$$

Конечно, $n = 100$ – это чересчур. Можно было бы взять $n = 10$ и тогда последовательность (a_k) у нас получилась бы такая: 3, 4, 5, 6, 7 – опять удается замкнуть нетранзитивную цепочку. А вот если бы мы взяли, например, $n = 9$, то получили бы 3, 4, 4, 4, 4 и до нужной нам семерки (т.е. до числа αn) никогда бы не добрались. С меньшими значениями n вышло бы еще хуже.

Нетрудно убедиться, что общая формула для вычисления нашей рекуррентной последовательности (a_k) такова:

$$a_1 = n - [\alpha n],\ a_{k+1} = \left[\frac{n^2(1-\alpha)}{n - a_k}\right]. \qquad (1)$$

Задача 5. Решение этой задачи дает теорема 3. Остается лишь доказать оставленную в качестве упражнения лемму 3.2.

Задача 6. Как следует из приведенного выше решения задачи 4, нам достаточно доказать, что для любого $1/2 < \alpha < 3/4$ существует достаточно большое число n такое, что целочисленная последовательность a_k, определяемая формулами (1), монотонно растет, а значит, рано или поздно достигнет значения, не меньшего, чем αn.

Для этого достаточно будет найти такое n, что для любого целого неотрицательного a, не превосходящего n, верно

$$\frac{n^2(1-\alpha)}{n-a} \geq a + 1, \qquad (2)$$

так как из этого неравенства тогда последует, что

$$\left[\frac{n^2(1-\alpha)}{n - a_k}\right] \geq a_k + 1.$$

Поскольку $\alpha < 3/4$, то число $\varepsilon = 3/4 - \alpha$ положительно. Неравенство (2) превращается в

$$n^2\left(\frac{1}{4} + \varepsilon\right) \geq (n-a)a + n - a,$$

а значит, если мы выберем $n > 1/\varepsilon$, то оно будет верным. И в самом деле, тогда будет достаточно сложить два верных неравенства – одно несложное (и хорошо известное) и одно очевидное:

$$\frac{n^2}{4} \geq (n-a)a,\ n^2\varepsilon > n \geq n - a.$$

Задача 7. Для упрощения перебора воспользуемся результатом задачи 8 (можно обойтись без нее, но тогда решение становится и длиннее и зануднее). Из нее в частности следует, что если имеется набор из трех трехгранных костей, в котором все средние выигрыши превосходят 1/9, то мы можем считать, что никакое число не написано на более чем одной кости. Это означает, что вероятность выигрыша в каждой паре костей[1] должна быть строго больше чем 5/9.

Тогда обозначим наши кости $A = (a_1 \leq a_2 \leq a_3)$, $B = (b_1 \leq b_2 \leq b_3)$ и $C = (c_1 \leq c_2 \leq c_3)$, причем $A \succ B \succ C \succ A$.

Нетрудно видеть, что $a_2 > b_2$. В самом деле, если это не так, то существует не более пяти пар (a_i, b_j), в которых $a_i > b_j$, и тогда $p(A \succ B) \leq 5/9$. Применяя этот факт трижды, получаем, что $a_2 > b_2 > c_2 > a_2$, что невозможно.

Задача 8. С одной стороны, интуитивно этот факт кажется почти очевидным. С другой стороны, строгое доказательство не так уж и просто. Оно занимает несколько страниц довольно убористого текста, и здесь для него попросту нет места.

Движение упругого тела с отскоком

1. Рассмотрим соударение шарика с закрепленной подставкой. При абсолютно упругом ударе кинетическая энергия шарика сохраняется, откуда следует, что модуль скорости шарика после удара v_1 равен модулю его скорости перед ударом v_0. Следовательно, угол подлета шарика и угол отскока равны, а значит, скорость шарика непосредственно после удара направлена горизонтально. По закону сохранения энергии при падении шарика с высоты $H - h$ величина его скорости равна $v_0 = \sqrt{2g(H-h)}$. Падение шарика с высоты h после соударения с площадкой происходит с начальной горизонтальной скоростью, равной v_0, в течение времени $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Дальность полета шарика равна

$$L = v_0\tau = 2\sqrt{h(H-h)} \approx 1,7 \text{ м}.$$

2. Для того чтобы после упругого удара о наклонную плоскость шарик вернулся в точку бросания по той же траектории, что и при падении, плоскость должна быть расположена перпендикулярно его скорости непосредственно перед ударом. Поэтому угол β между наклонной плоскостью и горизонталью равен углу между скоростью шарика в момент падения $\vec{v}$ и вертикалью. Обозначив через v_x величину горизонтальной составляющей скорости шарика, имеем $\sin\beta = v_x/v$, причем $v_x = v_0 \cos\alpha$. Согласно зако-

[1] Речь, конечно, идет о вероятности выигрыша более сильной кости у более слабой.

ну сохранения энергии,

$$\frac{mv^2}{2} = mgh + \frac{mv_0^2}{2},$$

откуда $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$. Объединяя записанные выражения, получим

$$\beta = \arcsin\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 + 2gh/v_0^2}} = \arcsin 0{,}5 = 30°.$$

3. Дальность полета тела, брошенного под углом α к горизонту со скоростью v_0, равна $L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$, а время полета $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. Поскольку модуль скорости шарика при упругом ударе не изменяется, а дальность полета шарика в обе стороны одинакова, справедливо равенство

$$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\beta}{g},$$

где β – угол, который скорость шарика после удара составляет с горизонтом. Отсюда следует, что $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$ при $\alpha < \pi/2$, $\beta < \pi/2$. Этому уравнению удовлетворяют два корня: $\beta = \alpha$ и $\beta = \pi/2 - \alpha$, причем условию задачи соответствует второй корень. Следовательно, $\sin\beta = \cos\alpha$. Поскольку отношение времен полета равно $k = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, ответ имеет вид

$$\alpha = \operatorname{arctg} k = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = 60°.$$

4. Для того чтобы шарик достиг той же высоты, он должен двигаться после второго отскока строго вертикально. Поскольку к моменту первого удара скорость шарика равна $v = \sqrt{2gH}$ и после абсолютно упругого удара о закрепленную плоскость шарик отскакивает с той же по величине скоростью под углом, равным углу падения, то вектор скорости шарика после первого удара будет направлен под углом $\beta = \pi/2 - 2\alpha$ к горизонту. Между первым и вторым ударами шарик пролетит по горизонтали расстояние

$$2L = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{v^2 \sin(\pi - 4\alpha)}{g} = 2H \sin 4\alpha.$$

Следовательно, $H = \frac{L}{\sin 4\alpha}$.

5. Сделав соответствующий рисунок, легко найти, что $T = \frac{2v_0}{g} = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}$, при этом время T от угла α не зависит.

6. а) Нарисуем траекторию мяча (рис. 2) и ее зеркальное отражение (рис. 3). Очевидно, что

$$v \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = a \text{ и } v\cos\alpha \cdot t = a,$$

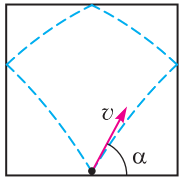


Рис. 2

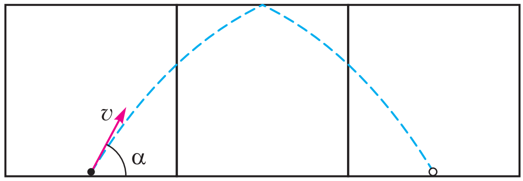


Рис. 3

откуда получаем

$$v = \sqrt{\frac{ga}{2\cos\alpha(\sin\alpha - \cos\alpha)}} \approx 16{,}6 \text{ м/с}.$$

б) Столкновение мяча с потолком не произойдет при условии $\frac{v^2 \sin^2\alpha}{2g} \le a$. Отсюда

$$v \le \sqrt{\frac{2ga}{\sin^2\alpha}} \approx 16{,}3 \text{ м/с}.$$

Заключительный этап XLVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике

9 класс

1. Пусть $n > k$ – главные делители числа a; тогда a/n и a/k – два наименьших делителя числа a, больших единицы. Пусть p – наименьший простой делитель числа a, а q – наименьший простой делитель a, кроме p (если такой существует). Тогда $a/n = p$. Далее, a/k – либо простое число (тогда это q), либо составное. Во втором случае единственным простым делителем числа a/k является p, и потому $a/k = p^2$; этот случай реализуется ровно тогда, когда а делится на p^2, причем $p^2 < q$ или q не существует.

Итак, главные делители числа a – это либо a/p и a/q, либо a/p и a/p^2. Покажем теперь, что по двум главным делителям $n > k$ составное число a восстанавливается однозначно (откуда и следует требуемое). Если n кратно k, то выполнен второй случай, и тогда $a = n^2/k$. Иначе выполнен первый случай, и тогда $a = \text{НОК}(n, k)$.

3. Не может.

Пусть строка состоит из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{200}$ в этом порядке. Если число $a_i = 2k$ четно, то следующим за ним может быть число k или число $18k$; эти числа дают одинаковые остатки при делении на 17. Если же a_i нечетно, то $a_{i+1} = 9a_i$.

В любом случае получаем, что $a_i \equiv 2a_{i+1} \pmod{17}$. Таким образом, полагая $a = a_{200}$, получаем, что с точки зрения остатков при делении на 17 строка устроена так же, как и строка $2^{199}a, 2^{198}a, \ldots, 2a, a$. Сумма всех членов этой новой строки равна $\left(2^{200}-1\right)a$. В частности, она делится на $2^8 - 1 = 15 \cdot 17$, т.е. делится на 17. Поэтому и сумма чисел в исходной строке делится на 17, и она не может равняться 24^{2022}.

4. $k = 12$.

Мы всегда считаем, что площадь торта равна 1. Покажем, что при некоторых запросах детей родители не смогут вырезать более 12 требуемых кусков. Выберем число $1/15 > x > 1/16$. Предположим, что 15 *главных* детей заказали по куску торта площади x (а остальные трое сделали произвольные заказы так, чтобы суммарная площадь заказанных кусков была равна 1). Мысленно разобьем торт на 16 равных квадратов и отметим на торте все 9 вершин этих квадратов, не лежащих на границе торта (рис. 4). Тогда строго внутри любого квадратного куска площади x будет лежать одна из отмеченных точек, т.е. можно вырезать не больше девяти таких кусков. Значит, хотя бы шестерым детям желаемых кусков не достанется.

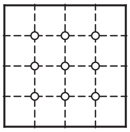


Рис. 4

Осталось доказать, что 12 детей всегда смогут получить желаемое. Пусть $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{18}$ – длины сторон кусков, которые хотят получить дети, т.е.

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{18}^2 = 1.$$

Покажем, что из квадрата можно вырезать куски со сторонами $a_7, a_8, \ldots, a_{18}$.

Для этого нам потребуются неравенства

$$a_7 + a_{10} + a_{13} + a_6 \leq 1 \text{ и } a_7 + a_8 + a_9 \leq 1. \qquad (*)$$

Для доказательства первого неравенства заметим, что

$$1 \geq a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_{16}^2 \geq 4a_4^2 + 4a_8^2 + 4a_{12}^2 + 4a_{16}^2 \geq$$
$$\geq 4\left(a_7^2 + a_{10}^2 + a_{13}^2 + a_{16}^2\right) \geq \left(a_7 + a_{10} + a_{13} + a_{16}\right)^2;$$

в последнем переходе мы воспользовались неравенством между средним квадратичным и средним арифметическим. Второе неравенство доказывается аналогично:

$$1 \geq a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_9^2 \geq 3a_3^2 + 3a_6^2 + 3a_9^2 \geq$$
$$\geq 3\left(a_7^2 + a_8^2 + a_9^2\right) \geq \left(a_7 + a_8 + a_9\right)^2.$$

Из неравенств $(*)$ следует, что можно разрезать торт на горизонтальные полосы высот, не меньших a_7, a_{10}, a_{13} и a_{16} соответственно, и в i-ю полосу уложить квадраты со сторонами a_{3i+4}, a_{3i+5} и a_{3i+6}, как показано на рисунке 5.

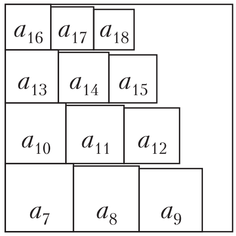


Рис. 5

6. $a = 1001000$.

Докажем, что $a \geq 1001000$. Заметим, что если y – корень трехчлена $ax^2 + bx + c$, то $1/y$ – корень трехчлена $cx^2 + bx + a$. Поэтому в задаче нужно найти наименьшее натуральное a, для которого корни x_1 и x_2 некоторого трехчлена $cx^2 + bx + a$ (с целыми b и c) больше 1000. Поскольку x_1 и x_2 положительны и $x_1x_2 = a/c$ (по теореме Виета), имеем $c > 0$.

Если $c = 1$, то $|x_1 - x_2| = \sqrt{b^2 - 4a} \geq 1$. Поскольку меньший корень не меньше 1000, то больший корень не меньше 1001, а тогда $a = x_1x_2 \geq \geq 1001 \cdot 1000$. Если же $c \geq 2$, то $a = cx_1x_2 \geq 2x_1x_2 > > 2000000$. В обоих случаях требуемая оценка доказана.

Осталось заметить, что трехчлен $x^2 - (1000 + + 1001)x + 1001 \cdot 1000$ имеет корни 1000 и 1001, поэтому $a = 1001000$ подходит.

7. Назовем набор городов *критическим*, если есть ровно $5k + 10$ рейсов, соединяющих два города этой группы, где k – количество городов в группе (тогда $k > 11$, ибо иначе между городами группы есть не более $k(k-1)/2 \leq 5k < 5k + 10$ рейсов). Если группа из всех 998 городов критическая, то в стране уже $5 \cdot 998 + 10 = 5000$ рейсов.

В дальнейшем мы всегда предполагаем, что законы в любой момент соблюдены. Обозначим через $f(X)$ количество рейсов, соединяющих два города группы X.

Докажем, что если группа из всех городов не критическая, то министерство может добавить один рейс с соблюдением законов. Повторяя такие операции, министерство добьется требуемого. Заметим, что если между городами x и y нет рейса, то добавить его министерство не может лишь в случае, когда оба города x и y входят в какую-то критическую группу.

Лемма. *Пусть A и B – критические группы. Тогда группа $A \cup B$ также критическая.*

Доказательство. Положим $C = A \cap B$, $D = A \cup B$. Пусть $|A| = a$, $|B| = b$, $|C| = c$; тогда $|D| = a + b - c$. По условию имеем $f(A) = 5a + 10$, $f(B) = 5b + 10$

и $f(C) \le 5c+10$. Заметим, что все рейсы, посчитанные в $f(A)$ и $f(B)$, учитываются также и в $f(D)$; более того, если какой-то рейс учтен и в $f(A)$, и в $f(B)$, то оба его конца лежат в C, т.е. количество дважды учтенных рейсов равно $f(C)$. Поэтому

$$f(D) \ge f(A)+f(B)-f(C) \ge$$
$$\ge (5a+10)+(5b+10)-(5c+10) =$$
$$= 5(a+b-c)+10 = 5d+10.$$

Учитывая, что законы соблюдены, получаем $f(D)=5d+10$, что и требовалось.

Вернемся к решению. Если в настоящий момент нет ни одной критической группы, можно добавить рейс между любой парой городов, между которыми его еще нет (такая пара найдется!). Иначе, применяя лемму, получаем, что объединение всех критических групп – тоже критическая группа A; по предположению, в ней $a<998$ городов. Пусть x – город вне A; тогда x не входит ни в какую критическую группу.

Пусть из x идет k рейсов в города из A. Поскольку группа $A' = A \cup \{x\}$ не критическая, имеем

$$5(a+1)+10 > f(A') = f(A)+k = 5a+10+k,$$

откуда $k<5$. С другой стороны, $a \ge 12$, поэтому в A есть город y, не соединенный рейсом с x, и города x и y не входят в одну критическую группу. Значит, министерство может ввести рейс между x и y.

8. Пусть точки B', C' и K' симметричны относительно A точкам B, C и K соответственно (рис. 6). Тогда окружность ω' вписана в треугольник $AB'C'$ и касается $B'C'$ в точке K'. Медиана AM является средней линией в треугольниках BCC' и $B'BC$, так что $AM \parallel BC' \parallel B'C$. Поскольку A – середина KK', утверждение задачи равносильно тому, что прямая AM содержит среднюю линию треугольника $KK'A_0$ (параллельную A_0K), т.е. утверждение равносильно параллельности $B'C \parallel A_0K'$.

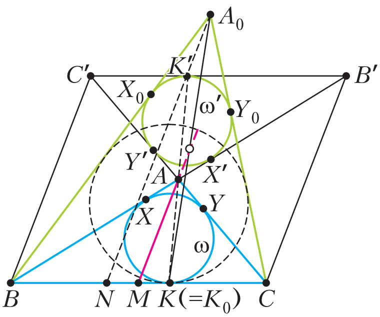


Рис. 6

Пусть ω касается AB и AC в точках X и Y соответственно, а ω' касается отрезков AB', AC', A_0B и A_0C в точках X', Y', X_0 и Y_0 соответственно. Заметим, что $AB-AC=(AX+XB)-(AY+YC)=XB-YC=KB-KC$. Аналогично, если вписанная окружность треугольника A_0BC касается BC в точке K_0, то $A_0B-A_0C=K_0B-K_0C$. Однако

$$A_0B-A_0C=(A_0X_0+X_0B)-(A_0Y_0+Y_0C)=$$
$$=X_0B-Y_0C=X'B-Y'C=$$
$$=(XA+AB)-(YA+AC)=AB-AC,$$

так что $KB-KC=K_0B-K_0C$, и потому $K=K_0$. Из доказанного следует, что вневписанные окружности треугольников ABC и A_0BC также касаются отрезка BC в одной и той же точке N, симметричной K относительно M (поскольку $BN=CK$). Гомотетия с центром A_0, переводящая прямую BC в прямую $B'C'$, переводит вневписанную окружность треугольника A_0BC в окружность ω', т.е. точку N – в K'. Значит, N лежит на прямой A_0K; но, поскольку $BN=CK=C'K'$, имеем $K'N \parallel B'C$, т.е. $A_0K' \parallel B'C$, что и требовалось.

10 класс

2. Без ограничения общности будем считать, что точка D лежит на отрезке BE и $AD \le AE$. Пусть O – центр окружности (ADE). Пусть точка A' симметрична A относительно серединного перпендикуляра к отрезку DE (рис. 7). Из симметрии $A'B=AC=BQ$. Окружность с центром B и радиусом BA' пересекает окружность (ADE) в точках, симметричных относительно прямой BO, т.е. точки A' и Q симметричны относительно BO. Аналогично, точки A' и P симметричны относительно прямой CO.

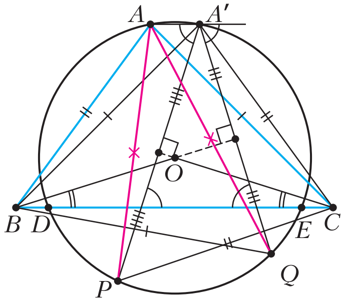


Рис. 7

Прямые OB и OC симметричны относительно серединного перпендикуляра к отрезку DE, поэтому они образуют равные углы с прямой DE. Поскольку $A'P \perp CO$, $A'Q \perp BO$ и $AA' \parallel DE$, то прямые $A'Q$ и $A'P$ образуют равные углы с прямой AA'. Значит, меньшие дуги окружности (ADE), стягиваемые хордами AP и AQ, равны, а тогда $AP = AQ$, что и требовалось.

5. Может.

Пусть одно из чисел равно 10, а каждое из остальных равно -1. Тогда произведение любых пяти из них больше, чем произведение остальных шести. Действительно, если число 10 входит в произведение пяти чисел, то это произведение равно 10, а произведение оставшихся шести чисел равно 1, и $10 > 1$. Если же число 10 не входит в произведение пяти чисел, то это произведение равно -1, а произведение оставшихся шести чисел равно -10, и $-1 > -10$.

6. Обозначим через N количество способов вырезать из полоски последовательность $1\underbrace{00\ldots0}_{\geq n-2}1$ (т.е. количество последовательностей из хотя бы $n-2$ нулей, перед которыми и после которых стоят единицы). Перед каждой из них может стоять или 1, или 0; обозначим количество тех, перед которыми стоят 1, через N_{1x}, перед которыми стоят 0 – через N_{0x}. После каждой из N последовательностей может стоять или 0, или 1; аналогично предыдущему предложению, введем количества N_{x0} и N_{x1}. Тогда

$$N_{0x} + N_{1x} = N = N_{x0} + N_{x1}. \qquad (*)$$

Заметим, что N_{x1} – это количество способов вырезать последовательность $11\underbrace{00\ldots0}_{\geq n-2}1$. Каждый такой способ соответствует способу вырезать последовательность $11\underbrace{00\ldots0}_{n-2}$; и наоборот, каждый способ вырезать последовательность $11\underbrace{00\ldots0}_{n-2}$ можно единственным образом дополнить до способа вырезать последовательность $11\underbrace{00\ldots0}_{\geq n-2}1$. Значит, количества таких способов одинаковые, и $N_{1x} = M$. Аналогично, N_{0x}, N_{x0} и N_{x1} равняются количествам способов вырезать последовательности $01\underbrace{00\ldots0}_{n-2}$, $\underbrace{00\ldots0}_{n-2}10$ и $\underbrace{00\ldots0}_{n-2}11$ соответственно. По условию, последовательность $\underbrace{00\ldots0}_{n-2}11$ встречается наименьшее число раз, откуда $N_{0x} \geq N_{x1}$. Тогда, с учетом $(*)$, получаем $N_{x0} \geq N_{1x} = M$, что возможно только при $N_{x0} = M$. Значит, последовательность $\underbrace{00\ldots0}_{n-2}10$ также встречается ровно M раз.

7. Обозначим точку касания окружности (ABE) с отрезком CF через P. Пусть прямая, проходящая через C и параллельная AP, пересекает отрезок AE в точке Q (рис. 8). Тогда $\angle QCP = \angle APF = \angle AEP$ (из упомянутых выше касания и параллельности). Значит, четырехугольник $CEQP$ вписанный. Имеем $\angle QPC = 180^\circ - \angle QEC = \angle QAF$. Следовательно, четырехугольник $QPFA$ вписанный. Тогда $\angle AQF = \angle APF = \angle QCP$, откуда $QF \parallel EP$. Значит, прямые CQ, EP, PA и QF ограничивают параллелограмм, откуда $\angle CQF = \angle APE$. Так как $\angle APE = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \angle CDF$, то точка Q лежит на окружности (CDF). Раз $\angle AQF = \angle QCP$, то окружность (CDF) касается отрезка AE в точке Q, что и требовалось.

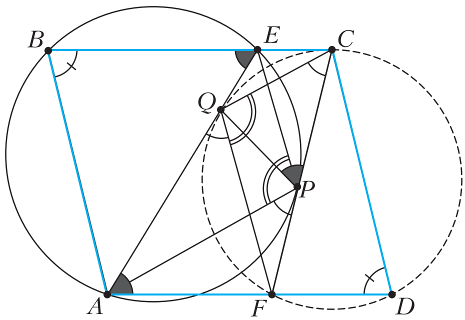


Рис. 8

8. Пусть число N состоит из $k+1$ цифры. Считаем далее, что $k > 100$: меньшие числа не влияют на искомую ограниченность.

Для $i = 1, \ldots, k$ обозначим через n_i число, получающееся удалением из N i-ой с конца цифры. Обозначим через $f(N)$ количество точных квадратов в множестве $\{n_1, \ldots, n_k\}$. Наша цель – доказать, что $f(N)$ ограничено сверху.

Пусть $N = 10^t N_1$, где N_1 не кратно 10. Если t нечетно, то число n_i может быть точным квадратом только при $i \leq t+1$, так что в этом случае $f(N) \leq 2$. Если t четно, то заключительные t нулей не влияют на дело, поэтому $f(N) = f(N_1)$. Поэтому далее считаем, что N не кратно 10.

Выделим множество $A \subset \{1, \ldots, k\}$ из $f(N)$ номеров i, для которых $n_i = m_i^2$ – точный квадрат, причем натуральные числа m_i, $i \in A$, попарно различны.

Отметим следующее:

1) $n_i \geq 10^{k-1}$, следовательно $m_i \geq 10^{(k-1)/2}$ при всех $i \in A$;

2) $|n_i - n_j| < 10^{\max(i,j)}$;

3) $N - n_i$ кратно 10^{i-1}.

Из свойства 1) следует, что для различных номеров $i \neq j$ из A имеет место оценка

$$|n_i - n_j| = |m_i^2 - m_j^2| \geq m_i + m_j \geq 2 \cdot 10^{(k-1)/2}.$$

Сопоставляя это со свойством 2), получаем, что $\max(i,j) > (k-1)/2$. Таким образом, все элементы A, кроме, быть может, одного, больше, чем $(k-1)/2$. Обозначим $A_1 := A \setminus \{\min(A)\}$ (удалили из A наименьший элемент), тогда $|A_1| = f(N) - 1$ и $\min(A_1) \geq k/2$.

Пусть $j > i$ – два элемента множества A_1. Тогда по свойствам 1), 2) имеем

$$10^j > |n_i - n_j| = |m_i^2 - m_j^2| \geq 2 \cdot 10^{(k-1)/2} \cdot |m_i - m_j|. \quad (*)$$

С другой стороны, по свойству 3) число $n_i - n_j = (m_i - m_j)(m_i + m_j)$ кратно 10^{i-1}.

Положим $r = \lceil (i-1)/2 \rceil$ (где $\lceil \cdot \rceil$ обозначает верхнюю целую часть – округление до ближайшего целого в большую сторону). Хотя бы одно из чисел $m_i - m_j$, $m_i + m_j$ кратно 2^r, и хотя бы одно кратно 5^r. Кроме того, если N нечетно, то нечетны числа m_i, m_j, поэтому одно из чисел $m_i - m_j$, $m_i + m_j$ не кратно 4, а другое, соответственно, кратно 2^{i-2}. Иначе N не кратно 5, и аналогичным образом получаем, что одно из чисел $m_i - m_j$, $m_i + m_j$ кратно 5^{i-1}.

Рассмотрим пятиэлементное подмножество $\tilde{A} \subset A_1$, наименьший элемент $\tilde{A}$ обозначим u, а наибольший v. Обозначим $r = \lceil (u-1)/2 \rceil$. Если N нечетно, положим $\alpha = u - 2$, $\beta = r$; иначе положим $\alpha = r$, $\beta = u - 1$. Из доказанного следует, что элементы множества $\{m_s : s \in \tilde{A}\}$ дают не более двух различных остатков по модулю 2^α и не более двух различных остатков по модулю 5^β. Значит, в $\tilde{A}$ найдутся два различных элемента $i < j$ такие, что $m_j - m_i$ кратно $2^\alpha 5^\beta$. Тогда по $(*)$ получаем

$$10^v \geq 10^j \geq 2 \cdot 10^{(k-1)/2} 2^\alpha 5^\beta \geq$$

$$\geq 10^{(k-1)/2 + (u-1)/2} 2^{(u-1)/2} > 10^{u-1} 2^{u/2},$$

откуда следует, что $v/u > 1{,}01$. Таким образом, если разбить отрезок $[k/2; k]$ на группы подряд идущих чисел, в каждой из которых отношение любых двух элементов меньше чем 1,01 (количество таких групп меньше, например, миллиона), то любая из этих групп содержит не более 4 элементов множества A_1. Отсюда вытекает ограниченность числа $|A_1| = f(N) - 1$.

11 класс

2. Будем искать касательную, проходящую через начало координат. Касательная к графику синуса в точке $(x_0; \sin x_0)$ имеет уравнение $y = (x - x_0)\cos x_0 + \sin x_0$. Эта прямая проходит через начало координат тогда и только тогда, когда $0 = -x_0 \cos x_0 + \sin x_0$, что равносильно $\operatorname{tg} x_0 = x_0$.

Осталось построить точку $(x_0; \sin x_0)$. Для этого (с помощью циркуля и линейки) построим биссектрису координатного угла, т.е. прямую $y = x$. Выберем ее точку пересечения с графиком тангенса: $(x_0; \operatorname{tg} x_0)$, $x_0 \neq 0$. Далее, опуская из этой точки перпендикуляр на ось абсцисс и пересекая этот перпендикуляр с графиком синуса, получаем точку $(x_0; \sin x_0)$. Прямая, проходящая через начало координат и точку $(x_0; \sin x_0)$, будет касаться графика синуса в точке $(x_0; \sin x_0)$ по выбору точки x_0, а также в точке $(-x_0; -\sin x_0)$ из симметрии относительно начала координат. Эти точки лежат по разные стороны от оси абсцисс, что и требовалось.

3. Заметим, что $\angle PAQ = 90°$, так как PQ – диаметр окружности (ABC). Пусть M и N – середины отрезков AP и AQ соответственно (рис. 9). Так как $\angle AZP = 90° = \angle AXP$, то четырехугольник $AZXP$ вписан в окружность с центром в точке M, откуда $\angle PZX = \angle PAB = 90° - \angle BAQ = 90° - \angle BPZ$.

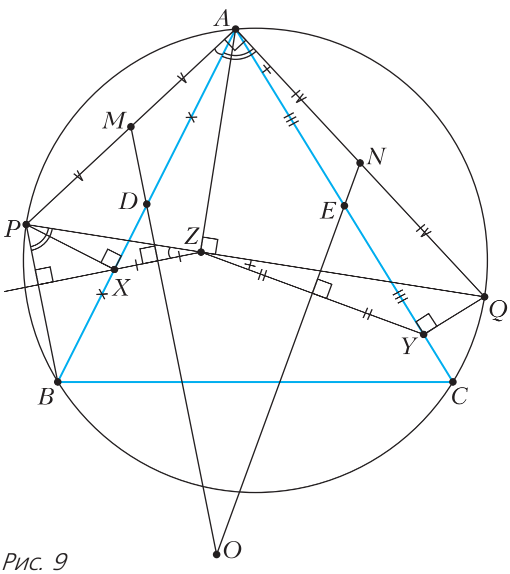


Рис. 9

Следовательно, $XZ \perp BP$. Тогда, в силу сказанного выше, серединный перпендикуляр к отрезку XZ проходит через точку M и параллелен прямой BP, а потому на нем лежит и середина отрезка AB, обозначим ее через D. Аналогично, если E – середина отрезка AC, то NE – серединный перпендикуляр к отрезку YZ. Таким образом, прямые MD и NE пересекаются в центре окружности (XYZ), обозначим его через O. Тогда $\angle DOE = 180° - \angle XZY = \angle PZX + \angle QZY = \angle PAB + \angle QAC = 90° - \angle BAC$. Следовательно, точка O лежит на фиксированной окружности, проходящей через точки D и E, что и требовалось.

6. $k = n$ при четном n, $k = n + 1$ при нечетном n, т.е. $2\left\lceil \dfrac{n}{2} \right\rceil$ (где $\lceil \cdot \rceil$ обозначает округление до ближайшего целого в большую сторону).

Пример. При четном $n = 2m$ рассмотрим m параллельных прямых и на каждой выделим пару непересекающихся лучей. Заметим, что в каждой паре лучей пересечений со сферой не больше двух, так как прямая имеет со сферой не более двух общих точек, поэтому $k \le 2m$. Пример для нечетного $n = 2m - 1$ получается удалением из примера для $n = 2m$ одного луча.

Оценка. Рассмотрим некоторую прямую l, которая не перпендикулярна ни одному из наших лучей. Рассмотрим проекции наших лучей на l, среди них не менее $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left[\frac{n+1}{2} \right]$ (здесь $[\cdot]$ – обычная целая часть, т.е. округление до ближайшего меньшего целого) направлены в одну сторону (будем говорить, что вправо), забудем про остальные лучи. Пусть точка X на прямой принадлежит всем выбранным проекциям, выберем произвольную точку $Y \in l$ правее. Пусть α_X и α_Y – плоскости, перпендикулярные прямой l, проходящие через X и Y соответственно. Каждый из выбранных нами лучей пересекает обе эти плоскости. Выберем достаточно большое R такое, чтобы окружность $\omega \subset \alpha_Y$ с центром Y и радиуса R содержала внутри все точки пересечения плоскости α_Y с выбранными лучами. Рассмотрим сферу Ω, которая касается плоскости α_X в точке X и содержит окружность ω. Рассмотрим любой из наших лучей. Он проходит через точку внутри сферы Ω, а его начало лежит в другом полупространстве относительно плоскости α_X, нежели Ω, поэтому он пересекает Ω в двух точках. Таким образом, мы получили $k = 2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ точек пересечения.

8. Обозначим треугольник, образованный синими лучами, через $A_1B_1C_1$ (рис. 10), и пусть его описанная окружность касается окружности (ABC). Пусть окружность (A_1BC) вторично пересекает окружность (AB_1C) в точке P (которая, очевидно, лежит внутри треугольника $A_1B_1C_1$). Тогда $\angle APC = \angle AB_1C$ и $\angle BPC = \angle BA_1C$. Поскольку также $\angle APB + \angle BPC + \angle APC = 360° = \angle AB_1C + \angle AC_1B + \angle BA_1C$ (второе равенство – сумма внешних углов треугольника $A_1B_1C_1$), то $\angle APB = \angle AC_1B$. Таким образом, точка P лежит и на окружности (AC_1B).

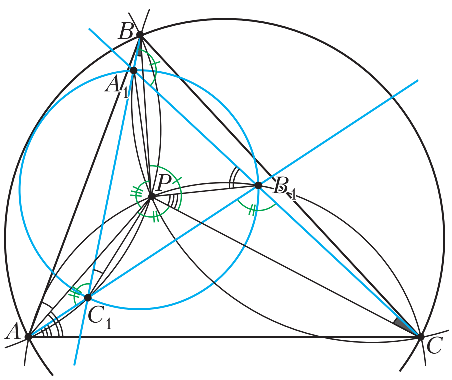


Рис. 10

Сделаем инверсию с центром в точке P (и с произвольным радиусом), образы точек будем обозначать теми же буквами со штрихами. Напомним, что для любых точек X и Y треугольники XPY и $Y'PX'$ подобны (по углу и отношению заключающих сторон), поэтому $\angle X'Y'P = \angle PXY$.

Докажем, что треугольник $A_1'B_1'C_1'$ подобен треугольнику ABC. Действительно, $\angle B_1'A_1'C_1' = \angle B_1'A_1'P + \angle PA_1'C_1' = \angle PB_1A_1 + \angle A_1C_1P = \angle PAC + \angle BAP = \angle BAC$, аналогично для остальных углов.

Окружность (CPA_1B) при инверсии перейдет в прямую $C'B'$, проходящую через вершину A_1' треугольника $A_1'B_1'C_1'$. Найдем угол между этой прямой и стороной $A_1'B_1'$: $\angle B'A_1'B_1' = \angle PA_1'B_1' - \angle PA_1'B' = \angle A_1B_1P - \angle A_1BP = \angle A_1B_1P - \angle A_1CP = \angle CPB_1 = \angle CAB_1$. Вместе с двумя аналогичными равенствами отсюда следует, что в подобных треугольниках ABC и $A_1'B_1'C_1'$ красные лучи в первом и лучи $A_1'B'$, $B_1'C'$, $C_1'A'$ во втором – соответствующие элементы. Окружности $(A_1'B_1'C_1')$ и $(A'B'C')$ касаются (поскольку они получены инверсией из касающихся окружностей), а тогда и окружность (ABC) касается описанной окружности треугольника, ограниченного красными лучами, что и требовалось.

Национальный исследовательский университет «МИЭТ»

Интернет-олимпиада «РИТМ МИЭТ»

1. $l_{\min} = l\cos\alpha \approx 0{,}87$ м.

2. $l = l_0 + \dfrac{m}{k}(\mu g - a) = 9$ см.

3. Верхняя деталь висит на средней нити, а крайние нити не дают ей вращаться. Обозначим T_1, T_2 и T силы натяжения левой, правой и средней нитей соответственно. Сумма сил, действующих на верхнюю деталь, равна нулю:

$$mg + T_1 + T_2 - T = 0.$$

Также равен нулю действующий на верхнюю деталь момент сил относительно оси, проходящей через любую точку средней нити перпендикулярно плоскости рисунка в условии:

$$T_1a + \frac{mg}{4}\frac{a}{2} - T_2a - \frac{2mg}{4}\frac{a}{2} - \frac{mg}{4}a = 0.$$

Из этих уравнений найдем

$$T = \frac{11}{8}mg + 2T_2.$$

Минимальное значение силы натяжения средней нити $T_{\min} = 11mg/8$ достигается при $T_2 = 0$. При этом, как нетрудно убедиться, нижняя деталь остается в покое.

4. $T_{\max} = \dfrac{T_2^2 - T_1 T_3}{2T_2 - T_1 - T_3} = 425$ К.

5. Запишем первое начало термодинамики для газа, находящегося в теплоизолированном сосуде:

$$\Delta U = A_{\text{внеш}},$$

где $\Delta U = (3/2) R\Delta T$ – приращение внутренней энергии газа, $A_{\text{внеш}}$ – работа силы, действующией на газ со стороны поршня. По третьему закону Ньютона на поршень со стороны газа действует такая же, но противоположно направленная сила. Она совершает над поршнем работу $-A_{\text{внеш}}$. На поршень действует также сила, обусловленная внешним атмосферным давлением. Суммарная работа этих сил равна приращению кинетической энергии поршня:

$$-A_{\text{внеш}} + p_0 (V_0 - V) = -\frac{Mv_0^2}{2},$$

где p_0 – атмосферное давление, V_0 – объем газа в начальном состоянии, V – объем газа в конечном состоянии, M – масса поршня. Из уравнения состояния идеального газа найдем

$$p_0 (V - V_0) = R\Delta T.$$

Заметим, что объем газа в сосуде после остановки поршня увеличивается. Окончательно получим

$$\upsilon_0 = \sqrt{\frac{5R\Delta T}{M}} \approx 7{,}9 \text{ м/с}.$$

6. После первого соприкосновения заряд проводника q_1, а заряд шарика $q_0 - q_1$. После многократных соприкосновений заряд проводника достигает максимального значения q, а заряд шарика уже не изменяется при соприкосновениях и остается равным q_0. Известно, что отношение зарядов любых двух проводников, находящихся в электрическом контакте, не зависит от их суммарного заряда (только в этом случае напряженность поля внутри проводников остается равной нулю). Приравнивая отношение зарядов в начале и в конце процесса: $\dfrac{q_0 - q_1}{q_1} = \dfrac{q_0}{q}$, получим

$$q = \frac{q_0 q_1}{q_0 - q_1}.$$

7. $R = \dfrac{U^2 (P_1 - 0{,}9P_2)}{P_1 P_2} \approx 6$ Ом.

8. Приращение кинетической энергии системы равно работе внешней силы. Следовательно,

$$A_{\text{внеш}} = \frac{m(u^2 + v^2)}{2} + \frac{Mv^2}{2},$$

где v – скорость стержня, u – скорость бусинки относительно стержня в момент времени, когда стержень сместился на расстояние d, M – масса стержня, m – масса бусинки. Работа минимальна, когда $v = 0$, т.е. когда стержень сместился на расстояние d и остановился в этом положении:

$$A_{\min} = \frac{mu^2}{2}.$$

Запишем закон движения бусинки относительно стержня: $m\dfrac{\Delta u}{\Delta t} = qvB$, или $m\Delta u = qBv\Delta t = qB\Delta x$. Суммируя приращения скорости за все время движения стержня, получим

$$mu = qBd.$$

Следовательно,

$$A_{\min} = \frac{mu^2}{2} = \frac{(qBd)^2}{2m}.$$

Физико-математическая олимпиада МИЭТ

10 класс

Вариант 1

1. $v_0 = \sqrt{2}gt \approx 14{,}1$ м/с.

2. $F_{\text{н}} = \dfrac{mg\sqrt{7}}{3} \approx 26{,}5$ Н.

3. $a = g\left(\dfrac{2h}{\Delta l} + 1\right) = 170$ м/с^2.

4. Проникновение молекул гелия через полупроницаемую перегородку прекратится, когда парциальное давление гелия в первом сосуде станет равным давлению гелия во втором сосуде. Запишем уравнение состояния идеального газа для смеси газов в первом сосуде в начальном состоянии и после установления равновесия, а также для гелия в первом и втором сосудах после установления равновесия и получим

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\text{M}_1 + \text{M}_2}{\text{M}_2 - \text{M}_1} = \frac{11}{9}.$$

5. $R = R_1 + \dfrac{R_2}{2} = 4$ Ом.

Вариант 2

1. $h = 12g\tau^2 = 10{,}8$ м.

2. а) $\dfrac{F_{\text{н}}}{mg} = \dfrac{\rho_0}{\rho} - 1 = 0{,}56$; б) $\dfrac{F_{\text{н}}}{mg} = \sqrt{\dfrac{\rho_0}{\rho}} - 1 = 0{,}25$.

3. $\Delta E_{\text{к}} = m(\mu g)^2 \dfrac{s}{a} = 1{,}6$ Дж.

4. $\Delta p = \dfrac{p}{n} = 4 \cdot 10^4$ Па.

5. $\dfrac{R_1}{R_2} = 2$.

11 класс

Вариант 1

1. Запишем закон движения грузов в векторном виде:

$$\vec r_1 = \vec v_1 t + \frac{\vec g t^2}{2},\ \vec r_2 = \vec v_2 t + \frac{\vec g t^2}{2},$$

где $\vec v_1$ и $\vec v_2$ – векторы начальных скоростей. Вектор, проведенный в момент времени t от первого груза ко второму, равен $\vec r_2 - \vec r_1 = (\vec v_2 - \vec v_1)t$. Модуль этого вектора $l = |\vec r_2 - \vec r_1| = |\vec v_2 - \vec v_1| t$ равен расстоянию между грузами. Это расстояние линейно увеличивается со временем и максимально в момент падения второго груза, т.е. при $t = 2v_0 \sin\alpha / g$. Модуль вектора относительной скорости грузов можно вычислить через его проекции на координатные оси или геометрически с помощью теоремы косинусов:

$$|\vec v_2 - \vec v_1| = \sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0 \sin\alpha - v_0)^2}.$$

После простых преобразований получим

$$l_{\max} = \frac{2v_0^2\sqrt{2(1-\sin\alpha)}\sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} = 10\ \text{м}.$$

2. а) $\dfrac{m_1}{m_2} = 2$; б) $v_1 = \dfrac{2m_2 v_0}{m_1 + m_2} = \dfrac{2v_0}{3} = 2$ м/с.

3. $\eta_2 = \eta_1 - \dfrac{\delta}{100\%}(1-\eta_1) = 0{,}52$.

4. а) $q_2 = -\dfrac14 q_1 = -2$ нКл, $q_3 = q_1 = 8$ нКл; б) $W = 0$.

5. Нарисуем эквивалентную схему (рис. 11). Направления индукционных токов в каждом конту-

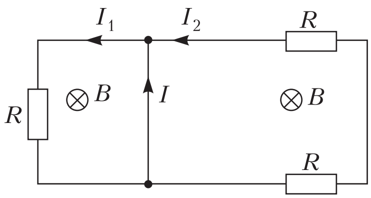


Рис. 11

ре определим по правилу Ленца, а величины этих токов найдем по закону Ома:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{R},\ I_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{2R},$$

где

$$\mathcal{E}_1 = \left|-\Phi_1'\right| = 2\varepsilon,\ \mathcal{E}_2 = \left|-\Phi_2'\right| = 3\varepsilon.$$

Ток I вычислим, используя первое правило Кирхгофа:

$$I = I_1 - I_2 = \frac{\varepsilon}{2R} = 0{,}02\ \text{А}.$$

Вариант 2

1. $t = \dfrac{l}{v_0\sqrt{2(1-\sin\alpha)}} = 0{,}2$ с.

2. $s = g\left(\dfrac{T}{2\pi}\right)^2 \approx 1{,}01$ м.

3. $\eta = 1 - \dfrac{3A}{2\Delta U}$.

4. $\dfrac{Q}{q} = -\dfrac{3}{\left(1+\sqrt3\right)^2} = -\dfrac32\left(2-\sqrt3\right) \approx -0{,}4$.

5. а) $U = \dfrac{\beta S}{3} = 5$ мВ; б) $U = 2\beta S = 30$ мВ.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Профильный экзамен по физике

Механика

1. Так как нить гладкая и невесомая, сила натяжения нити одинакова во всех ее точках и равна по модулю силе F. В проекции на горизонтальное направление второй закон Ньютона для бруска и доски имеет вид $ma_1 = T - \mu mg$ и $Ma_2 = T - \mu mg$, где a_1 и a_2 – ускорения бруска и доски относительно инерциальной системы отсчета, связанной со столом. Ускорение бруска относительно доски равно $a = a_1 - a_2$, поэтому

$$L = \frac{at^2}{2} = \frac{(M+m)(F-\mu mg)t^2}{2Mm} = 0{,}85\ \text{м}.$$

2. По закону сохранения импульса в проекции на горизонтальное направление имеем $mv = MV$, где v – модуль скорости шарика перед ударом. Из закона сохранения механической энергии следует равенство $\dfrac{mv^2}{2} = mgh + \dfrac{MV^2}{2}$. Решая записанную систему уравнений, находим

$$h = \frac{MV^2}{2mg}\left(\frac{M}{m} - 1\right) = 4{,}5\ \text{м}.$$

Молекулярная физика и термодинамика

1. Обозначим силу, действующую на газ со стороны задней стенки, через F_1, а со стороны передней стенки – через F_2. По второму закону Ньютона $ma = F_1 - F_2$, где m – масса всего газа. С другой стороны, $F_1 = p_1 S$, $F_2 = p_2 S$, где $p_{1,2}$ – давления газа у задней и передней стенок сосуда, S – площадь поперечного сечения сосуда. Выражая плотность газа через давление из уравнения Менделеева–Клапейрона и учитывая, что $S = \dfrac{V}{l}$, а $V = \dfrac{m}{\rho_0}$, получаем

$$\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2 = \frac{\mathrm{M}}{RT}\rho_0 a l \approx 1{,}7\cdot10^{-4}\ \text{кг/м}^3.$$

2. В соответствии с первым законом термодинамики, $\Delta Q = \Delta U + A$, где $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T - T_0)$ – изменение внутренней энергии газа, $A = \frac{k}{2}(4h^2 - h^2)$ – работа газа, равная изменению потенциальной энергии упругой деформации пружины. С помощью уравнения Менделеева–Клапейрона находим $\Delta U = \frac{9}{2}kh^2$. Окончательно получаем

$$\Delta Q = 6kh^2 = 24 \text{ Дж}.$$

Электродинамика

1. Уравнение движения частицы по круговой орбите имеет вид $\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}$, где v – скорость частицы, q – ее заряд, ε_0 – электрическая постоянная. Кинетическая энергия частицы $E_к = \frac{mv^2}{2}$, а ее потенциальная энергия $E_п = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r}$. Используя уравнение движения частицы, можно записать $E_п = -mv^2$, $E = E_к + E_п = -\frac{mv^2}{2}$. Поскольку период обращения частицы $T = \frac{2\pi r}{v}$, то $E = -\frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2$ и

$$T = 2\pi r\sqrt{-\frac{m}{2E}} \approx 4{,}7\cdot 10^{-16} \text{ с}.$$

2. При выдвигании рамки из области магнитного поля модуль изменения потока вектора индукции через поверхность, ограниченную рамкой, за время Δt равен $\Delta\Phi = Blv\Delta t$. Соответственно, в рамке возникает ЭДС электромагнитной индукции, по модулю равная $\mathcal{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = Blv$. Данная ЭДС будет действовать, пока рамка проходит границу области с магнитным полем, т.е. в течение времени $\tau = \frac{l}{v}$. Количество теплоты, выделяемое проводником с током, равно $Q = \frac{\mathcal{E}^2\tau}{R}$. Комбинируя три последних равенства, получим

$$R = \frac{B^2l^3v}{Q} = 1{,}5 \text{ Ом}.$$

Калейдоскоп «Кванта»

(см. «Квант» №6)

Вопросы и задачи

1. 80 минут = 1 час 20 минут.
2. Ничего, поскольку если сумма двух меньших сторон равна третьей, то это не треугольник, а отрезок, площадь которого равна нулю.
3. Ни одного – на березе яблоки не растут!
4. Может, когда речь идет о времени: через 2 часа после 23 часов будет 1 час ночи.
5. На Луне, лишенной атмосферы, птица летать не может.
6. Без комментариев.
7. Нулю, так как $x - x = 0$.
8. «Плюсовая» и «минусовая».
9. Изохорического расширения не бывает!
10. Нулю, так как $\sin\pi = 0$.
11. Это не что иное, как основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.
12. Да, можно, если сбросить с крыши один из секундомеров, а с помощью второго измерить время его падения на землю и по времени рассчитать высоту.

Микроопыт

Нужно просунуть газетный лист под дверью и встать на него с товарищем по разные от двери стороны.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
М.Н.Грицук

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во ПИ №ФС77–54256
Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №
Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: +7 916 168-64-74
E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

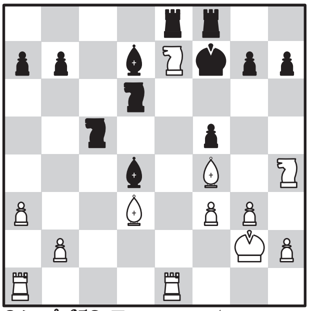
Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8
Тел.: (831) 218-40-40

ВтораЯ ПОПЫТКА

В международный день шахмат, 20 июля 2022 года, действующий чемпион мира Магнус Карлсен объявил об отказе защищать свой титул. Возможно, международная шахматная организация найдет способ убедить норвежца изменить свое решение, однако в любом случае одним из соискателей короны станет Ян Непомнящий, во второй раз подряд уверенно выигравший турнир претендентов. Решающей в нем стала партия Яна против Фабиано Каруаны, в которой американец вновь не смог реализовать дебютное преимущество. После этой ничьей Непомнящий оторвался от преследователей, решив свою задачу за тур до финиша, а Каруана, напротив, окончательно потерял нити игры, не попав в итоге даже в тройку.

Ф. Каруана – Я. Непомнящий
Мадрид, 2022, 9 тур

1. e4 e5 2. ♘f3 ♞f6 3. ♘e5 d6 4. ♘f3 ♞e4 5. d4 d5 6. ♗d3 ♝ d6 7. 0-0 0-0 8. c4 c6 9. ♖e1 ♝f5 10. ♕b3 ♛d7 11. ♘h4 ♝e6 12. ♕c2 ♞a6 13. a3 f5 14. cd cd 15. ♘c3 ♜ac8 16. f3 ♝e7 17. g3 ♞d6. Stockfish рекомендует 17…♝f6!? 18. fe fe 19. ♗a6 ♝d4 20. ♗e3 ♝e3 21. ♘e3 с активной игрой, однако решиться на такую жертву можно только в результате предварительного анализа. **18. ♕a4! ♝f6?!** Неточность, однако и в случае лучшего 18…♜c6 19. ♗a6 ♝h4 20. gh ♜a6 21. ♕d7 ♝d7 22. ♗f4 черным предстояла длительная оборона в неприятном эндшпиле. **19. ♕d7 ♝d7 20. ♘d5 ♝d4+ 21. ♔g2 ♜ce8 22. ♗f4.** Белые форсированно выигрывали пешку после 22. ♘e7+! ♚f7 23. ♗f4 ♜e7 24. ♗d6 ♜e1 25. ♖e1 ♜e8 26. ♗c4 ♝e6 27. ♘f5. **22…♞c5.** Еще не поздно было сыграть ♞c8!, защищаясь от шаха на e7. **23. ♘e7+! ♚f7.**

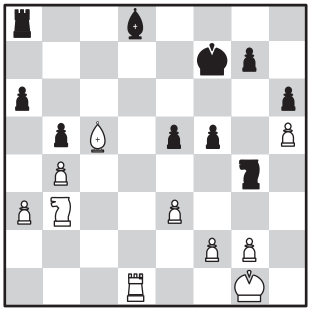


24. ♗f5? Белые соблазнились неверным вариантом. Значительное преимущество сохраняло 24. ♗f1! ♞c8 25. ♘f5 ♝b2 26. ♖ad1 с полной доминацией по центральным линиям. **24…♞f5 25. ♘hf5 ♝f5 26. ♘f5 ♜e1 27. ♖e1 ♞d3!** В этом все дело! Похоже, белые издалека зевнули эту вилку, ведущую к полному уравниванию. **28. ♖e4 ♝b2 29. ♗e3 ♝a3 30. ♗a7 ♜a8 31. ♗d4 ♝f8 32. ♖e2 g6 33. ♘e3 ♜d8 34. ♗b6 ♜d6 35. ♘c4 ♜c6 36. ♖e4 ♝g7 37. f4 ♜e6 38. ♔f3 ♞e1+ 39. ♔e3 ♞c2+ 40. ♔f3 ♞e1+, ничья.**

Судьба второго места, которое при отказе действующего чемпиона дает право принять участие в матче за шахматную корону, решалась в последнем туре в партии Дин Лижэня и Хикару Накамуры, в которой черных устраивала и ничья, а белых – только победа. Китайский гроссмейстер (№2 в рейтинг-листе ФИДЕ) неудачно начал турнир, но смог собраться на финише и вырвать второе место.

Дин Лижэнь – Х.Накамура
Мадрид, 2022, 14 тур

1.d4 ♞f6 2. c4 e6 3. ♘f3 d5 4. ♘c3 c5 5. e3 ♞c6 6. a3 dc 7. ♗c4 a6 8. ♗d3 b5 9. dc ♝c5 10. b4 ♝e7 11. 0-0 ♝b7 12. ♗b2 0-0 13. ♘e4 ♞e4 14. ♗e4 f5 15. ♗b1 ♛d1 16. ♖d1 ♜fd8 17. ♗a2 ♚f7 18. h4 h6 19. ♖dc1 ♝d6. Черных устраивает ничья, и наиболее надежный путь к ней – размен чернопольных слонов после 19…♝f6. **20. ♖c2 ♞e7?!** Накамура выбирает размен белопольных слонов, после которого белые получат преимущество за счет слабости поля c6. **21. ♘d4 ♝d5 22. ♗d5 ♞d5 23. ♖ac1 ♜d7 24. ♘b3! ♝e7 25. h5?** Излишняя активность, надежнее прочное 25. g3. **25…♝f6 26. ♗d4.** Если бы пешка осталась на h4, то было бы возможно 26. ♗f6 ♞f6 27. ♖c7 с серьезным давлением. **26…e5! 27. ♗c5 ♝d8 28. ♖d2 ♞f6 29. ♖d7+ ♞d7 30. ♖d1 ♞f6 31. ♗d6 ♞g4 32. ♗c5.**



Ключевой момент партии – белые, скорее всего, были не против повторения ходов, но Накамура по неизвестной причине уклонился от него. **32…♝h4 33. ♖d7+ ♚g8 34. g3 ♝g5** (аккуратнее 34…♜d8 с разменом ладей) **35. ♔f1 ♝d8?** А здесь 35…♜d8 уже необходимо, так как следующим ходом белые могут уклониться от размена. **36. ♖b7!** За счет разницы в активности ладей позиция белых технически выиграна. **36…f4 37. gf ef 38. e4?!** Точнее 38. ef! ♞f6 39. ♘d4! ♞h5 40. ♘e6 ♝f6 41. f5. **38…♝f6?** Значительно усложняло задачу белых 38…f3! 39. ♘d4 ♞e5 с последующим ♜c8. **39. ♘d4 ♜e8 40. ♔g2! ♞e5** (40…♜e4 41. ♔f3!) **41. ♘f5 f3+ 42. ♔g3 ♞c4 43. ♗e7! ♝b2 44. ♔f3 ♝a3 45. ♔g3 ♞e5 46. ♗c5 ♞f7 47. f3 ♝c1 48. ♖a7 ♝d2 49. ♖a6 ♝e1+ 50. ♔g2 ♝c3 51. ♖a7 ♞g5 52. ♘e7+ ♚h8 53. ♘g6+ ♚g8 54. ♘e7+ ♚h8 55. ♘d5 ♝b2 56. ♖a2 ♝c1 57. ♖c2 ♝a3 58. ♗e3, черные сдались.**

А.Русанов

Индекс 90964

Прогулки с физикой

Как добраться до берега деду Мазаю, если он уронил весла в воду?

ВИБРАЦИОННОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ

(Подробнее – на с. 42 внутри журнала)

ISSN 0130-2221 22007
9 770130 222221