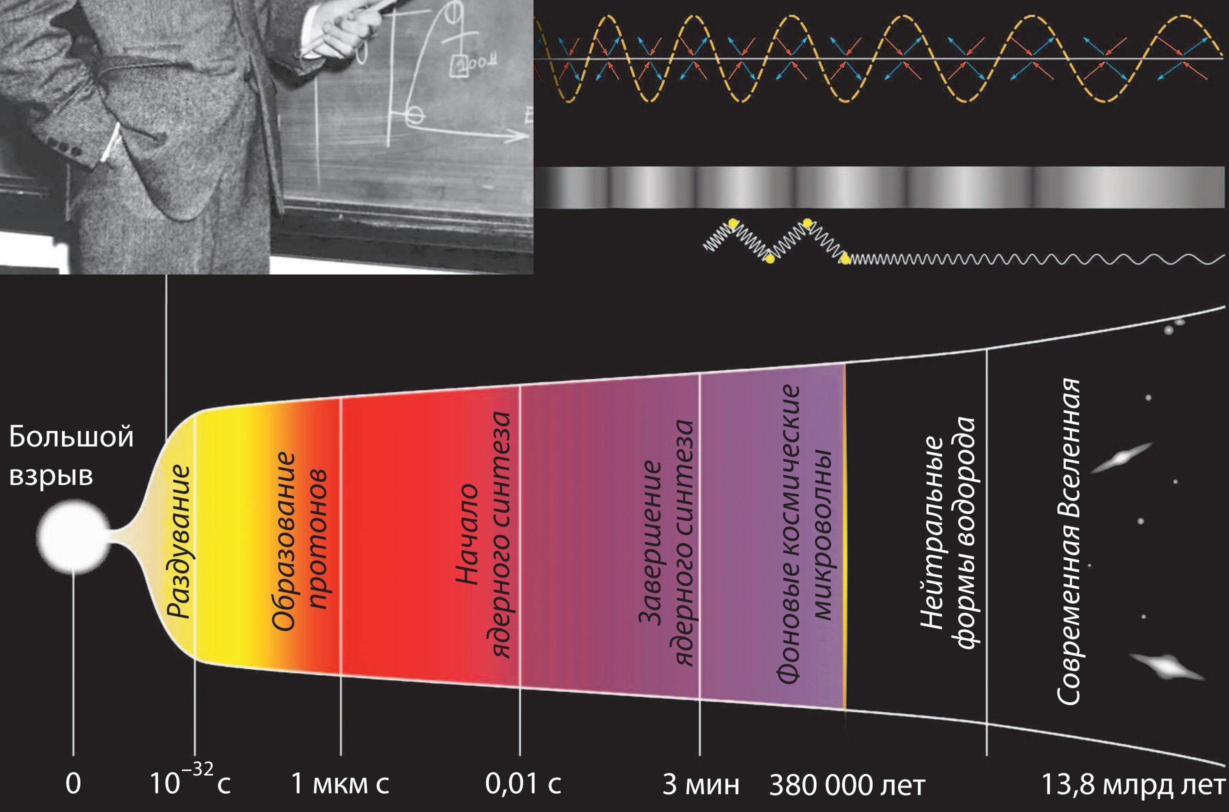
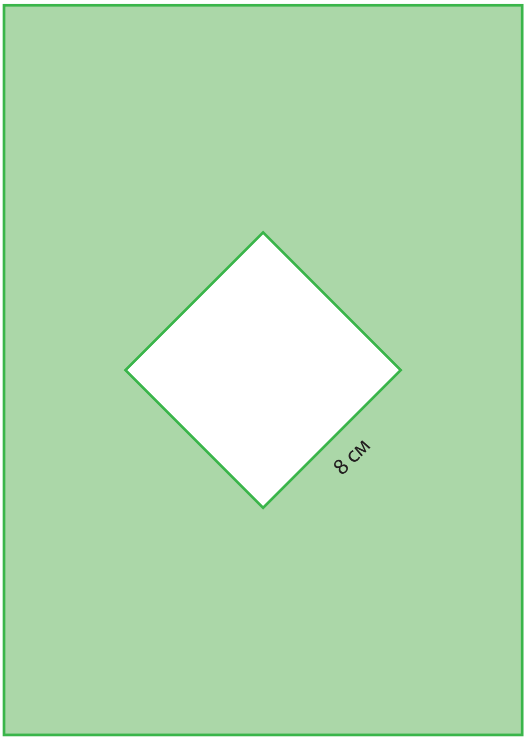
ISSN 0130-2221
МАЙ 2022 · № 5

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



# КРУГ и КВАДРАТ

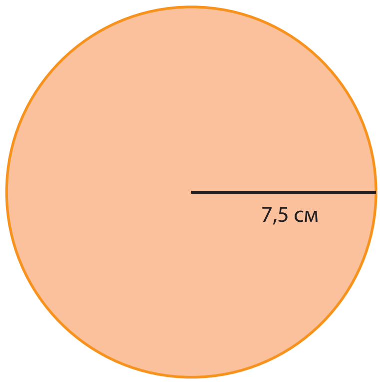



Возьмите лист плотной бумаги и вырежьте в нем отверстие в форме квадрата со стороной 8 сантиметров. Также вырежьте из картона круг радиусом 7,5 сантиметров (лучше брать не слишком толстый картон, толщина 2–3 мм – оптимальная). Головоломка готова: вам нужно просунуть картонный круг через квадратное отверстие.

Разумеется, круг нельзя гнуть и вообще никак деформировать. А вот лист с отверстием сгибать можно – в этом и кроется ключ к отгадке. Когда вы поймете, как добиться требуемого, то без труда ответите и на такой вопрос: круг какого максимального диаметра можно просунуть через данное отверстие?

Желаем успехов!

*Е.Епифанов*



# КВАНТ МАЙ 2022 №5

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

## В номере:

# Гамов: Георгий Антонович, Джордж, «Джо»

Л.АШКИНАЗИ

Рассказывая о Гамове, этом достаточно известном ученом-физике, нам хотелось бы не просто перечислить, что было в биографии персонажа, но и объяснить – почему, откуда, вследствие чего. Попытаемся провести анализ – найти причинно-следственные связи, выделить закономерное и случайное и отметить так называемые развилки.

Что говорили и писали о Гамове и о его работе коллеги-физики, которые прекрасно его знали?

Кристиан Мёллер (теория относительности, квантовая механика):

«Временами возникало ощущение, что на самом деле он использует все свое время и энергию на придумывание шуток и грубоватых острот и что он именно это считал, так сказать, своей главной задачей, а важные статьи, которые он писал тогда об альфа-распаде и свойствах атомных ядер, были лишь побочным продуктом его деятельности».

Вера Рубин (вращение галактик):

«Он не умел ни писать, ни считать. <Возможно, это его собственная шутка.> Он не сразу сказал бы вам, сколько будет семью восемь. Но его ум был способен понимать Вселенную».

Станислав Улам (результаты в разных областях математики):

«В его творчестве можно увидеть, наряду с другими выдающимися особенностями, может быть, последний пример любительства в научном творчестве. Стефан Банах говорил, что хорошие математики видят аналогии между теоремами, а лучшие – аналогии между аналогиями. Гамов обладал в исключительно высокой степени этой редчайшей способностью видеть глубинные связи между самыми разнообразными идеями в науке и даже искусстве. Он обожал физику до такой степени, которая доступна лишь немногим, и, более того, умел сообщать это чувство наслаждения и воодушевления своим книгам и лекциям, адресованным как ученым, так и всем, интересующимся наукой».

Эдвард Теллер («отец водородной бомбы»):

«Гамов обладал исключительно живым воображением. Это был приятнейший малый, и к тому же он был единственным из моих друзей, кто считал меня математиком... Пожалуй, как это ни печально, я должен сказать, что девяносто процентов гамовских теорий были неверны, и не стоило большого труда убедиться, что дело обстоит именно так. Но он не спорил. Он был не из тех, кто носится со своими идеями и молится на свои изобретения. У него всегда была наготове новая идея, а при неудаче он легко мог обратить все это в шутку. С ним было легко и приятно работать».

Иосиф Шкловский (модель Солнца, радиоизлучение галактик, проблема SETI):

«За этим могучим мастером значатся по самому крупному счету не какие-то изящные финты или передачи поперек поля, а три чистых «гола». Это альфа-распад, горячая Вселенная с реликтовым излучением и генетический код».

В предисловии Улама к автобиографии Гамова сказано: «Незадолго до смерти он рассказал жене, что во сне он оказался в компании таких великих людей, как Ньютон и Эйнштейн, и открыл, подобно им, крайнюю простоту конечных физических законов».

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20220501

*Георгий Гамов*

Биографии принято начинать с рассказа о предках. По отцовской линии Гамов происходил из древнего (есть документы XVII века) дворянского рода, по матери его предки принадлежали к южнорусскому духовенству. Один дед был полковником, командующим Кишиневским гарнизоном, другой – протоиереем Одесского собора. Существенно, что в обеих линиях среди его предков были математики, и уж наверняка важно, что отец был преподавателем русского языка и литературы, а мать – преподавателем истории и географии. Знания и их передача в семье ценились – мать учила ребенка французскому, преподаватель – немецкому, в доме была большая библиотека. В поздних анкетах Гамов пишет: «Читаю и перевожу со словарем – древнегреческий, читаю и могу объясняться – французский, владею свободно – немецкий, английский, датский». Кстати, насчет древнегреческого – это, наверное, одна из его шуток. А всерьез он пишет: «В возрасте семи лет я читал Жюль Верна и мечтал о путешествии на Луну». Большая библиотека, конечно, способствует успехам в науке, но, как показывает жизнь, сама по себе их не определяет.

А вот уже прямой и не случайный толчок: в 1910 году (Георгию шесть лет) он получает телескоп, в который наблюдает комету Галлея (до следующего ее появления в 1986 году он не дожил, а говорил, что хотел). В 13 лет ему дарят микроскоп, и он производит анализ так называемого «тела Христова», полученного в церкви и не съеденного на месте, а принесенного домой. Эксперимент он описал так: «Для сравнения я заранее приготовил маленькую хлебную крошку, вымоченную в красном вине. Смотря в микроскоп, я не мог увидеть разницы между двумя образцами. Микроструктура двух кусочков хлеба была совершенно одинаковой и совсем не походила на микроструктуру тонких кусочков моей кожи, которую я предварительно срезал с пальца острым ножом. Цвет образца был все еще красноватым, но мой микроскоп был недостаточно сильным, чтобы увидеть отдельные эритроциты. Поэтому это было только полу-доказательство, но я думаю, это был эксперимент, который сделал меня ученым».

В школе Гамов учится хорошо, особенно по математике, физике, языкам, в последних классах интересуется (случайность ли это?) теорией относительности. Далее – физико-математический факультет Одесского университета, занимается математикой и подрабатывает вычислителем в обсерватории. Но проучился он в университете лишь год. Услышав о бурном развитии физики в Петрограде, он собирается туда ехать, и, чтобы это стало возможным, отец продает остатки фамильного серебра. Это важнейший момент, это развилка.

В Петрограде Гамов учится в Петроградском университете и заканчивает его в декабре 1924 года, сдав почти все экзамены с высшей оценкой. Поступает в аспирантуру, изучает аномальную дисперсию света в парах калия, придумывает метод контроля качества оптического стекла; но теоретическая физика влечет его больше. Гамов хочет заниматься теорией относительности, которой интересовался еще в школе (значит, тот интерес был не случаен), его руководителем становится не кто иной, как Александр Фридман (математика, метеорология, космология). Но Фридман в 1925 году умирает.

Тем временем в Университете формируется кружок молодых физиков-единомышленников, названный его участниками «Джаз-бандой». Ими издавался самодеятельный журнал «Отбросы физики», устраивались конкурсы остроумия и проверки эрудиции. Сначала членами кружка были Гамов, Дмитрий Иваненко (ядерная физика, теория поля, гравитация), Андрей Ансельм (теория жидкостей, молекулярная физика), Владимир Кравцов (метрология атомных масс). Потом присоединились Виктор Амбарцумян (астрофизика), Лев Ландау (теорфизика), Матвей Бронштейн (теорфизика).

Все, кто пишут о Гамове, упоминают о шутках и розыгрышах, юморе и озорстве. Те, кто более проницательны, говорят, что центром его мира была физика. Наши герои – молодые, талантливые, лучше других знающие, как устроены атомы и вселенная, и вдобавок знающие, что они это знают лучше других. Они считают, что «пот не должен быть виден», что всем должно казаться, что работа, наука, физика – все это для них так, игра, почти развлечение. Отчасти это и было так, особенно для Гамова, хотя и работы это вовсе не исключало.

Гамов, Иваненко и Ландау опубликовали в 1928 году в «Журнале Русского физико-химического общества» статью «Мировые постоянные и предельный переход», в которой дали иерархию физических теорий на основе системы фундаментальных констант, включающей скорость света, гравитационную постоянную и постоянную Планка (так называемая cGh-система). Авторы считали эту работу шуткой и никогда на нее не ссылались, но она привлекла внимание исследователей своими идеями, касавшимися фундаментальных основ физики и принципов ее развития. Если говорить коротко: авторы построили классификацию физических теорий, исходя из того, какие величины считаются в них основными, базовыми.

Заметим, что стремление к простоте оснований, к фундаментальности результатов – это навсегда его: в статье, опубликованной в журнале «Nature» в 1948 году, Гамов разработал уравнения для массы и радиуса галактики, содержащей около ста миллиардов звезд типа Солнца, причем в его уравнения входят только фундаментальные константы (гравитационная постоянная, постоянная Планка, элементарный заряд и др.).

В 1926 году научные руководители рекомендовали его для стажировки в Германии – это закономерно. Однако разрешение и все необходимые документы были получены лишь весной 1928 года. Гамов прибывает в Геттинген – тогдашний центр развития квантовой механики. Он работает в группе Макса Борна (одного из создателей квантовой механики); собираясь заняться какой-либо нерешенной проблемой, выбирает теорию атомного ядра, в частности – проблему альфа-распада, одного из видов радиоактивности. Предполагает, что альфа-частицы туннелируют через потенциальный барьер, и делает соответствующий расчет. Это и было первым успешным объяснением поведения радиоактивных элементов на основе квантовой теории. Одновременно с Гамовым и независимо от него идею о роли туннельного эффекта в процессе альфа-распада высказали Рональд Гёрни (квантовая механика, ядерная физика, фотопроцесс) и Эдвард Кондон (квантовая механика, ядерная физика), однако только Гамову удалось получить количественные результаты. На основе своей теории Гамов оценил размер ядер и объяснил закон Гейгера – Неттолла, связывающий энергию вылетающей альфа-частицы с периодом полураспада ядер. Теория и ее автор были признаны научным миром. Веселый, остроумный и общительный, он становится популярной фигурой и среди отечественных, и среди европейских физиков.

По окончании четырехмесячной стажировки в Геттингене Гамов переезжает в Копенгаген, где датская Академия наук предоставила ему годичную стипендию для работы у Нильса Бора (квантовая механика) в Институте теоретической физики. Он посещает другие важнейшие научные центры того времени, так в 1929 году в Лейдене он обсуждает с Паулем Эренфестом (теорфизика) капельную модель ядра. Такое рассмотрение приводило к открытию возможности деления ядер; но это выяснилось 10 лет спустя благодаря работам Якова Френкеля (теорфизика), Нильса Бора и Джона Уилера (космология, ядерная физика). Вспоминая о капельной модели ядра в своем последнем интервью, данном историкам физики весной 1968 года, Гамов сказал: «Я и сам мог бы тогда предсказать деление ядер – если б был поумнее». Тогда же он объяснил, почему менял области физики и как их выбирал: «Я начал заниматься ядерной физикой, потому что в 1928 году все занимались атомами и молекулами; Ван-дер-Ваальс, дублеты, триплеты, спин и так далее – этого было слишком много. Я не хочу, чтобы все это перепутывалось, поэтому я решил выбрать себе уголок, где никто ничего не делал, и я выбрал ядерную физику. А когда ядерная физика стала большим делом, я перебрался в ядерную астрофизику и космологию. Мне нравятся новаторские вещи». В Кембридже он включается в обсуждение перспектив расщепления ядер ускоренными протонами, которые благодаря туннельному эффекту оказались эффективным «консервным ножом». Соответствующие эксперименты были сделаны Джоном Кокрофтом (ядерная физика) и Эрнестом Уолтоном (ядерная физика) и закончились Нобелевской премией. С Фрицем Хоутермансом (ядерная физика) и Робертом Аткинсоном (ядерная физика) Гамов обсуждает ядерные реакции в звездах.

Что написал позже об этой поездке Гамов? Слово главному герою, тем более, что из его рассказа мы узнаем кое-что о нем самом: «Геттинген – красивый маленький городок со старым знаменитым университетом. По уровню развития теоретической физики он мог бы поспорить в то время даже с Копенгагеном. Он гудел от возбуждения, вызванного волновой и матричной механиками, которые получили развитие только за два года до моего прибытия. И аудитории для семинаров, и кафе были заполнены физиками, старыми и молодыми, обсуждавшими следствия, к которым могло бы привести это новое развитие квантовой теории… Я всегда предпочитал работать в менее людных областях. Поэтому, в то время как все квантовые физики в мире вели наступление на атомы и молекулы, я решил посмотреть, что могла бы дать новая квантовая теория для случая атомного ядра… Как может случиться, что бомбардирующие частицы большой энергии не могут перейти барьер снаружи, в то время как внутренние частицы, которые имеют только половину такой энергии, ухитряются просочиться наружу? …Прежде, чем я закрыл журнал, я уже знал, что в действительности происходит в таком случае. Это было типичное явление, которое было бы невозможно в классической ньютоновской механике, но фактически ожидалось в новой волновой механике».

Иногда Гамова именуют «трижды нелауреат Нобелевской премии». Понимать это можно двояко – как то, что Нобелевские премии три раза были получены теми, кто использовал его идеи, и как то, что он сам получил три результата «нобелевского класса», но не получил соответствующей премии. Верно и то, и другое. Сам Гамов пишет: «По мере все убыстряющейся скорости научных исследований и быстро увеличивающегося числа людей, занимающихся этим, все чаще и чаще случается, что важные открытия делают одновременно и независимо друг от друга двое и более ученых, а то и несколько их коллективов. То же произошло и с моей теорией радиоактивного альфа-распада, которая была выдвинута одновременно Рональдом Гёрни совместно с Эдвардом Кондоном. В действительности их статья, которая была опубликована в «Nature», была получена издателями на несколько дней раньше, чем моя, которая была опубликована в «Zeitschrift für Physik».

Уехав в июне 1928 года за рубеж аспирантом, Гамов возвратился в Ленинград в мае 1929 года получившим известность ученым. Вернулся ненадолго: по представлению Эрнеста Резерфорда (основоположник ядерной физики, множество учеников), А.Н.Крылова (кораблестроитель, механик) и Ю.А.Круткова (теорфизика) ему была присуждена Рокфеллеровская стипендия для работы в течение года в Кавендишской лаборатории в Кембридже. В сентябре 1929 года он прибыл в Англию. Там он написал восемь статей и свою первую научную монографию «Строение атомного ядра и радиоактивность», она была издана на английском и немецком языках. Заметим, что одновременно со своими первыми оригинальными публикациями Гамов начал публиковать и обзорные статьи по физике, что, вообще говоря, не характерно для молодых ученых.

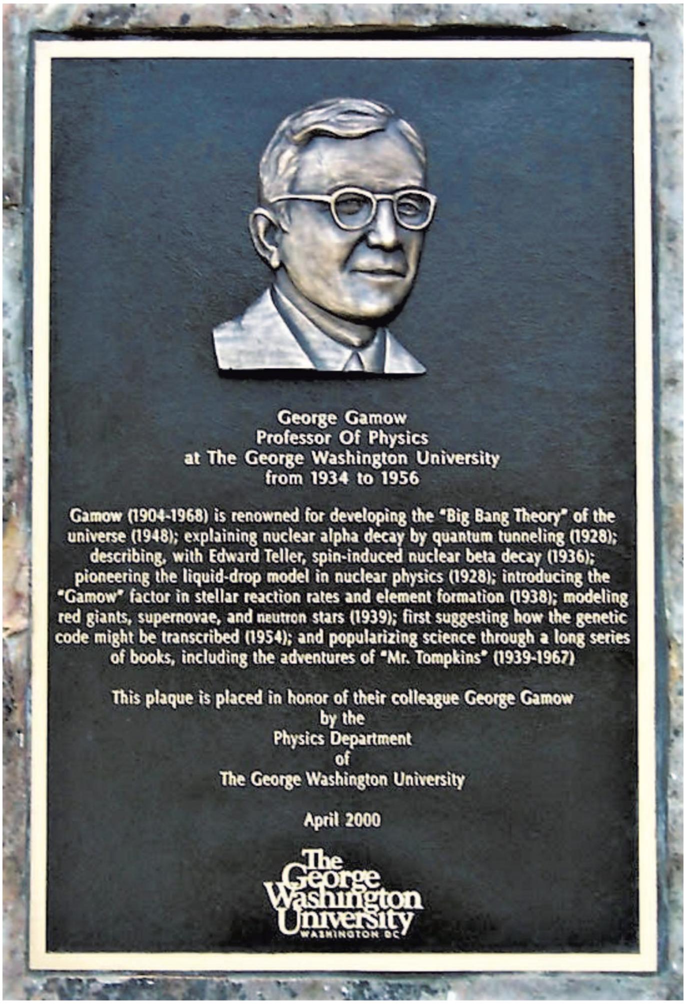
Весной 1931 года Гамов возвращается в Россию. В 1931 году Гамова – ему 28 лет – избирают членом-корреспондентом Академии наук СССР, за него подано 42 голоса из 43-х, и он один из самых молодых членкоров за всю историю. Физика развивается стремительно. Однако предложение молодых создать в Ленинграде центральный академический Институт теоретической физики во главе с Гамовым и Ландау принято не было – старшее поколение не собиралось уступать командные высоты. Это было, наверное, им обидно. Гамов работает в Радиевом институте, в Ленинградском физико-техническом институте, в Ленинградском университете. В 1932 году он и Лев Мысовский (ядерная физика) разрабатывают проект первого в Европе циклотрона, в 1937 году машина заработала.

Еще будучи за границей, Гамов получил от Гульельмо Маркони (один из создателей радио) приглашение принять участие в первом Международном конгрессе по атомному ядру (Рим, 1931) и представить статью по структуре ядра. Однако поездку ему не разрешили, доклад был зачитан Максом Дельбрюком (биофизика). Делегаты конгресса послали Гамову открытку с сожалениями о его отсутствии, подписанную в числе прочих Марией Кюри (радиоактивность), Вольфгангом Паули (физика элементарных частиц), Энрико Ферми (теоретическая и экспериментальная физика), Лизе Мейтнер (ядерная физика) и другими знаменитостями. В следующем году ему не разрешили поездку в США на летнюю школу в Мичигане. Гамов получает очередное приглашение из-за границы, на сей раз – на Международный Сольвеевский конгресс по ядерной физике, который должен был состояться в Брюсселе в октябре 1933 года. И едет на конгресс, причем вместе со своей женой – выпускницей физфака МГУ Любовью Вохминцевой. Это была развилка: если бы Гамову не разрешили взять с собой жену, он бы не поехал.

А что делать дальше – возвращаться в СССР или нет? Поль Ланжевен (теорфизика) поручился за него, подвести его Гамов не может, но о проблеме узнает Мария Кюри: она разговаривает с Ланжевеном, и тот соглашается не считать Гамова связанным его ходатайством. Это закономерность, и это – развилка. После Сольвеевского конгресса ученый читал лекции в Радиевом институте в Париже, в Кавендишской лаборатории в Кембридже у Резерфорда и в Копенгагене у Нильса Бора. В 1934 Гамов отплывает в США, где проходит его жизнь в течение последующих тридцати с лишним лет. В письме к Петру Капице (результаты в разных областях физики, организатор науки) Гамов писал: «Сейчас я хочу идти по Вашим стопам и, если возможно, перейти в так называемое «Kapitza-Zustand» [«состояние Капицы»], т.е. жить за границей с советским паспортом. Написал в Москву, прося в firm expressions [крепких выражениях] продления командировки на год». Целью Гамова была возможность подобно Капице работать за границей, посещать научные центры и мероприятия и при этом в любое время приезжать в СССР. Однако это желание не нашло понимания у властей, в октябре 1934 он был уволен из Радиевого института и Физико-математического института, в 1938 году – исключен из Академии.

Итак, 1934 год, Гамов и его жена – в США. Через два года Гамов получает американское гражданство. Вохминцева в заграничных поездках работала эпизодически, главным образом лаборанткой, а также в редакции журнала – писала рефераты советских статей по оптике и спектроскопии. В браке с Гамовым сначала родилась дочь, но она умерла вскоре после рождения, в 1934 году родился сын Рустем-Игорь. Брак Вохминцевой с Гамовым распался в 1956 году. Сын Гамова стал профессором биологии и альпинистом. А еще он изобрел «мешок Гамова» – устройство для насыщения крови человека кислородом при горной болезни, т.е. кислородном голодании. С помощью этого устройства спасено немало жизней.

Университету Джорджа Вашингтона порекомендовал взять Гамова на работу физик-экспериментатор Мерл Тьюв (ядерная физика, геофизика, радиоастрономия) из Института Карнеги. Он сказал президенту университета, что Гамов может поднять физику в Вашингтоне до мирового уровня. И оказался отчасти прав – в Вашингтоне Гамов закономерно становится организатором проведения ежегодной Международной конференции по теоретической физике – по типу конференций, проводимых Нильсом Бором. Другое его важное и удачное решение – приглашение в качестве ближайшего сотрудника своего знакомого еще по копенгагенским временам Эдварда Теллера, «чтобы было с кем поговорить о теоретической физике». Они познакомились у Бора в Копенгагене и на каникулах объездили пол-Дании на мотоцикле Гамова.




*Памятная доска в честь Джорджа Гамова в Университете Джорджа Вашингтона*

Гамов работает в Университете Джорджа Вашингтона с 1934 до 1956 года, когда он стал приглашенным профессором в Университете Калифорнии, в Беркли. В 1958 году Гамов женится на Барбаре Перкинс, редакторе одного из своих издателей и своем соавторе – для некоторых его популярных книг она писала стихи и рисовала картинки. В 1956 году Гамов переходит в Университет Колорадо в Боулдере, где и работает до 1968 года, до конца жизни: занимается ядерной физикой и космологией, публикует научные и популярные статьи, преподает, общается с друзьями. Барбара Гамова пережила его на восемь лет, и ей довелось увидеть растущее признание достижений человека, которого она любила. В соответствии с американской академической традицией она и Департамент физики Университета учредили так называемые «гамовские лекции» (George Gamow Memorial Lectures) – правильная женщина и правильные люди.

Тридцать четыре года, прожитые Гамовым в Америке, вместили в себя множество важных

*Джорж Гамов и его кот Спин. Наверное, это был ученый кот*

и интересных и для него, и для других людей событий, встреч, занятий, трудов; что касается физики, то перечень будет довольно длинным. Позже он говорил, что после 1934 года ничего интересного в его жизни не было. К этим словам надо относиться как к некоторой рисовке и игре, свойственной ему с юности.

Первая конференция, организованная Гамовым и Тьювом в Вашингтоне, состоялась в 1935 году. До начала второй мировой войны прошло пять конференций, на них приезжали Бор, Ферми, Бете (атомная физика), Чандрасекар (физика звезд), Дельбрюк; европейские физики знакомились с американской наукой, налаживали контакты с американскими коллегами. Это оказалось важным и для них, и для науки США, которая с тех пор является лидирующей.

На конференцию 1938 года Гамов, Теллер и Тьюв пригласили физиков и астрономов, темой была физика звезд. Еще в 1926 году Артур Эддингтон (астрофизика) предположил, что источник энергии звезд – ядерная реакция, синтез гелия из водорода. Для него важно туннелирование частиц сквозь потенциальный барьер, которое происходит и при альфа-распаде. Узнав об этом эффекте от Гамова в 1928 году, Хоутерманс и Аткинсон начали расчеты ядерных превращений в звездах, 10 лет спустя Гамов и Теллер их продолжили и создали теорию «красных гигантов» (типа Бетельгейзе), а «добил» проблему Ганс Бете после конференции и бесед с Гамовым и Теллером. Оказалось, что в некоторых звездах энергия вырабатывается в результате длинной цепочки превращений, в которой участвуют углерод и азот. Эти превращения называются теперь углеродно-азотным циклом или циклом Бете. Что касается звезд помельче, размером с Солнце или еще менее массивных, то в реакциях участвуют литий и бериллий, это протон-протонный цикл. Гамов говорил, что этот цикл он мог придумать сам, «если был бы поумнее». Фактически он начал соответствующие расчеты вместе со своим студентом Чарлзом Кричфилдом (атомная физика) раньше, чем Бете, но тот оказался упрямее и методичнее.

Еще в 1911 году Эйнар Герцшпрунг (астрономия) и Генри Рассел (астрофизика) заметили, что существует связь между видимым цветом звезд и излучаемой ими энергией. Расположение всех звезд на графике с осями цвет–светимость (оба зависят от температуры звезды) называется с тех пор диаграммой Герцшпрунга–Рассела. Звезды в ходе своей эволюции проходят из правого нижнего угла диаграммы к левому верхнему, меняя по ходу развития и светимость, и цвет. Такие звезды находятся, как говорят, на главной последовательности. Существуют и добавочные ветви, причем, по воспоминаниям астронома и астрофизика Вальтера Бааде, взаимосвязь одной из ветвей с главной последовательностью разгадал Гамов, сообщил об этом в письме и не стал публиковать. Несерьезный он был человек, да?

Теорией эволюции звезд Гамов занимался и позже. Ведь правда же, интересно, почему они светят? Однажды Фриц Хоутерманс гулял с девушкой, и, глядя на звезды (дело было ночью), девушка произнесла: «Посмотри, как они сверкают!» И надо же было так случиться, что произнесла она это в ночь того дня, когда ее ухажер первым кое-что об этом узнал. И он ответствовал: «Да, и с сегодняшнего дня я знаю, почему они сверкают».

Для следующей конференции в январе 1939 года Гамов, Теллер и Тьюв предложили в качестве основной темы физику низких температур. Но Бор привез из

Европы исключительную новость: Отто Ган (ядерная физика) и Фриц Штрассман (ядерная физика) открыли новый тип ядерных реакций. Облучая ядра урана нейтронами, они обнаружили, что ядро при захвате нейтрона превращается не в более тяжелый изотоп того же элемента, а раскалывается на два крупных осколка. Ключевое слово «деление» содержалось в статье Отто Фриша (ядерная физика) и Лизе Мейтнер, которые построили первую теорию явления. Начиналась новая глава науки и новая глава истории.

Американские физики проявили поначалу некоторую нерешительность; им было непривычно использование науки в военных целях, но европейцы лучше понимали, что такое нацизм, и повели себя активнее. Лео Сциллард (ядерная физика), Юджин Вигнер (элементарные частицы, ядро), Ферми и Теллер предприняли первые попытки получить правительственные ассигнования на исследования по военному использованию ядерной физики и предложили ограничить открытые публикации по этой тематике в США. Почему Гамов остался в стороне от атомной проблемы? Похоже, что и приятели Гамова, и начальство сочли его недостаточно серьезным, слишком легкомысленным для таких дел. У него была репутация человека веселого, разговорчивого, общительного, любителя дружеских застолий. Альберта Эйнштейна (теорфизика), Джона фон Неймана (математика) и Джорджа Гамова привлек с началом войны к оборонным исследовательским работам Военно-морской флот США. Тематика их работ была связана с физикой и технологией взрывчатых веществ – обычных, не ядерных. Эйнштейн не мог регулярно приезжать в Вашингтон по этим делам, и потому начальство решило, что кто-то должен ездить к нему за консультациями в Принстон. На эту роль назначили Гамова, так что раз в две недели он ездил в Принстон.

В 1948 году Гамов включается в работы по проекту водородной бомбы. Когда он появился в Лос-Аламосе, его давний протеже Теллер был одним из главных действующих лиц проекта, а в 1949–1952 годах он же занимал должность заместителя директора Лос-Аламосской лаборатории. Теллер называл Гамова «ученым, начавшим в Соединенных Штатах теоретические работы, которые впоследствии привели к самому большому взрывному явлению, когда-либо осуществленному человеком». О термоядерных реакциях, называя их «гамовскими играми», Теллер говорил как о предмете особых научных достижений и заслуг Джорджа. Но чемпионом «гамовских игр» он считал Ганса Бете.

Мы ничего не знаем о гамовских идеях, которые были использованы для водородной бомбы. Однажды Гамова спросили, какие свои работы он считает самыми важными, и он сказал: «Не знаю... Потенциальный барьер и затем расширяющаяся Вселенная и термоядерные реакции, объяснение источников энергии Солнца, формулы, использованные для расчетов водородной бомбы». Но не сказал, естественно, какие. Гамов шутил, что его главный вклад в американскую водородную бомбу состоит в том, что он перетащил в Америку Теллера. Но не менее важным надо считать и организацию вашингтонских конференций. Дело ведь не в одном Теллере, такая большая задача – это всегда работа многих людей.

Гамов никогда не забывал космологию, науку своей юности. Всерьез он занялся ею в 1946 году и посвятил ей больше десяти лет. Он хотел «скрестить космологическую науку с ядерной физикой». Однажды нечто подобное ему удалось – скрестил ядерную физику и астрономию, продвинулся в вопросе о ядерных источниках энергии звезд. Теперь Гамов предположил, что первичное вещество мира было не только очень плотным, но и очень горячим. Сам он почему-то считал, что идея горячего начала мира принадлежит не ему, а Фридману, однако в космологических работах последнего нет ни слова о температуре ранней Вселенной. Идея Гамова состояла в том, что в горячем и плотном веществе ранней Вселенной происходили ядерные реакции, и в этом ядерном котле за несколько минут были синтезированы все химические элементы, из которых и состоит теперь все на свете. Сейчас этот процесс называется «первичный нуклеосинтез», при нем образуются элементы по литий включительно, остальные – позже. Но тогда это угадать было нельзя, не было необходимых экспериментальных данных.

Расчеты ядерных превращений в условиях расширяющейся космической среды требовали немалых усилий, и Гамов привлек к ним Ральфа Альфера (астрофизика) и Роберта Хермана (астрофизика). Первая публикация, подготовленная Гамовым и Альфером, появилась в печати в 1948 году под тремя именами: Альфер, Бете, Гамов. Это самая знаменитая шутка в истории физики: ради красивого названия Гамов вписал не спросясь имя Бете, так возникла работа, ставшая сразу же знаменитой под названием $\alpha\beta\gamma$-теория. Самым эффектным результатом этой теории стало предсказание космического фона излучения. Электромагнитное излучение должно было сосуществовать с горячим веществом в эпоху ранней Вселенной. Оно не исчезает при общем расширении мира и сохраняется, только сильно охлажденным, до сих пор. Гамов и его сотрудники попытались оценить, какова должна быть температура этого излучения сегодня. С учетом возможных неопределенностей, неизбежных при весьма ненадежных астрономических данных об общих параметрах Вселенной как целого, и скудных сведений о ядерных константах предсказанная температура должна была лежать в пределах от 1 до 10 К. В 1950 году в одной научно-популярной статье Гамов написал, что, скорее всего, температура космического излучения составляет примерно 3 К. Результат был получен изящным и смелым способом; и если можно говорить о «стиле» научной работы, то это был стиль последней трети века, а не его середины.

Через 15 лет Арно Пензиас (радиоастрономия) и Роберт Вильсон (радиоастрономия) случайно открыли это излучение. Это было самое крупное открытие в космологии со времен открытия Эдвином Хабблом (астрономия) в 1929 году расширения Вселенной, предсказанного Фридманом. Пензиас и Вильсон ничего не знали о теории Гамова. В их первой статье нет ни слова о космологии, но и некоторые физики не сразу поняли смысл открытия, и тем более далеко не все понимали, что открыто именно то, что предсказывали Гамов и его ученики. Гамову оставалось три года жизни, и он успел увидеть свой успех признанным – на симпозиуме 1967 года в Нью-Йорке Гамов принимал поздравления коллег и праздновал успех. Его Вселенная не подвела, она оказалась горячей! Через десять лет после смерти Гамова первооткрыватели Пензиас и Вильсон получили Нобелевскую премию; она присуждаются только при жизни.

Почему $\alpha\beta\gamma$-теория долго была незамеченной, а открытие Пензиаса и Вильсона стало случайным? Есть общий научный поток, мэйнстрим, а есть смелые поиски вбок или вовсе вверх. Концепция «горячей Вселенной» представлялась тогда маловероятной: конкуренцию ей составляли модель «холодной Вселенной» (Яков Зельдович, ядерная бомба и теорфизика) и теория стационарной Вселенной (Фред Хойл, астрофизика). Но в итоге работа Гамова и его учеников была признана. Стивен Вайнберг (теорфизика) писал: «Гамов, Альфер и Херман заслуживают колоссального уважения, помимо всего прочего, за то, что они серьезно захотели воспринять раннюю Вселенную и исследовали то, что должны сказать известные физические законы о первых трех минутах».

С открытием реликтового излучения в космологии начался расцвет. Интенсивная работа, в которой участвовали чуть ли не все ведущие физики и астрономы, а также и молодые активно работающие теоретики, быстро привела к созданию на основе идей Гамова и новых наблюдательных данных весьма полной и надежной космологической теории, которая называется сейчас теорией горячей Вселенной, или теорией Большого Взрыва. Что же касается космического излучения, то в СССР его стали называть реликтовым (по предложению И.С.Шкловского), а на Западе – микроволновым. Его средняя температура

*Гамов в Боулдере — читает лекции, общается со студентами и друзьями*

– 2,725 К – измерена с фантастической для космологии точностью. Ныне это излучение изучают очень тщательно, оно – основной источник данных о физическом состоянии Вселенной в первые секунды ее существования.

Как только кончилась война, Гамов и Тьюв возобновили вашингтонские конференции. Первая послевоенная встреча осенью 1946 года называлась «Смежные проблемы физики и биологии». С тех пор Гамов не выпускал события в биологии из поля зрения. Так паук сидит и ждет, чтоб появилась мушка; и тогда он выскакивает из засады. Это сравнение Гамов применил, когда у него спросили, чего он ждал, чтобы включиться в биологию, если интересовался ею с 1946 года. Как оказалось, чтобы включиться в биологию, ему нужно было дождаться 1953 года, приехать с кратким визитом в Калифорнийский университет в Беркли и случайно встретить там в коридоре Луиса Альвареса (атомная физика). В руках у него (этого очередного в гамовских дружеских встречах и научных приключениях Нобелевского лауреата) был свежий журнал «Nature» со статьей Джеймса Уотсона и Френсиса Крика о структуре дезоксирибонуклеиновой кислоты – ДНК. В жизни Гамова началась новая, биологическая полоса, и в этом новом жизненном и научном приключении было немало волнующего, драматического и, само собой разумеется, смешного и веселого.

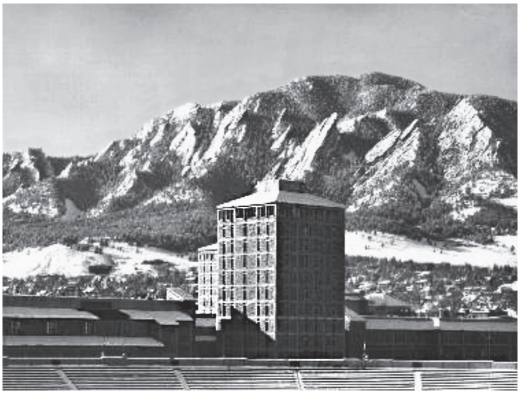
Гамов исходил из следующего. В основе всего живого лежат белки. Они служат строительным материалом для живых тканей, образуют гормоны, ферменты и т.д. В организме человека более миллиона различных белков. Белки строятся из 20 аминокислот; индивидуальные свойства белка определяются тем, из каких аминокислот и в какой последовательности он образован. Синтез белков управляется нуклеиновыми кислотами, в которых хранится и посредством которых передается полный набор сведений о строении белков. Уотсон и Крик показали, что запись этой информации осуществляется с помощью выстроенных друг за другом «слов», причем «буквами» для этих слов служат четыре нуклеотида. Для ДНК эти буквы суть аденин, гуанин, цитозин и тимин. В РНК вместо тимина присутствует урацил. Способ записи генетической информации с помощью четырехбуквенного алфавита нуклеотидов универсален, одинаков для всего живого на Земле – для животных, растений, бактерий и вирусов. Каждое слово в генетическом тексте – это название аминокислоты, каждое предложение определяет белок. Но как из букв строятся слова? Этим вопросом и задался Гамов в 1954 году.

Очевидно, что число слов должно быть не меньше 20. Если допустить, что каждое слово состоит из двух букв, то таких различных пар будет $4^2 = 16$. Это мало. Гамов сделал предположение, что в каждом слове должно быть три буквы. Таких трехбуквенных слов в четырехбуквенном алфавите было бы $4^3 = 64$. Это уже не меньше, но, наоборот, больше числа аминокислот. Может быть, считать, что слова не обязательно состоят каждое из трех букв? Или, возможно, среди 64 трехбуквенных слов есть синонимы? Гамов остановился на второй возможности как более простой: пусть будет 64 слова, но несколько из них означают одну и ту же аминокислоту. Выяснить соответствие между 64 словами языка жизни и 20 аминокислотами должен эксперимент. Новые исследования Крика, работы биохимиков Маршалла Ниренберга, Северо Очоа, Хар Корана и других вскоре показали, что идея Гамова об универсальном коде с трехбуквенными словами верна. Это был триумф генетики и личный успех Гамова. Он торжествовал победу, а радоваться удаче он умел, как рассказывают, очень хорошо. В интервью 1968 года на вопрос о работе, которая доставила ему больше всего удовольствия, Гамов ответил: «Пожалуй, биология; это было нечто совсем новое, и так занятно было разгадывать коды».

Гамов продолжает работать весело и с удовольствием. В те годы он придумал для своих студентов игру: они должны были представить себе цивилизацию высокого уровня, в которой не додумались только до одной вещи – до введения вращающихся элементов, в частности колес. В задаче спрашивалось, какие механизмы и машины будут изобретены такой цивилизацией, как там будут жить люди. Студенты увлеклись этой игрой – писались даже романы об особенностях жизни в таком обществе, но между делом было сделано немало вполне практичных изобретений.

Существование именно трехбуквенного кода ДНК, каждое такое «слово» было названо кодоном, было подтверждено экспериментально в начале 60-х годов. Нобелевской премии 1968 года были удостоены биохимики Маршалл Ниренберг, Хар Корана и Роберт Холли – имя Гамова опять-таки не всплывало. Не всегда всплывает оно даже и сейчас.

Все, кто пишут о Гамове, пишут о его шутках. Одесситы со свойственным им несгибаемым юмором считают, что причиной шуток и розыгрышей Гамова было его одесское происхождение. Редкая публикация о Гамове обходится без упоминания двух его приколов. В одной из своих научных статей он сослался на публикацию Ландау в несуществующем журнале «Червоный гудок», который начали разыскивать некоторые дотошные читатели. Про другую хохму, $\alpha\beta\gamma$, рассказано выше. Ходят слухи, что он попытался уговорить еще одного своего сотрудника поменять фамилию, чтобы получилось «альфа-бета-гамма-дельта», но тот оказался недостаточно одесситом. Третий прикол – исследуя роль нейтрино в процессе остывания звезд, Гамов назвал это явление URCA-процесс. Результаты были получены совместно с Марио Шёнбергом (физика звезд), с которым Гамов познакомился именно в «Казино-де-Урка» в Рио-де-Жанейро. На случай, если бы в «Physical Review» заинтересовались странным названием, Гамов заготовил объяснение – это-де сокращение от unrecordable cooling agent, недетектируемый охлаждающий агент. Западные физики сочли, что это намек на выкачивание денег из карманов посетителей игорного дома – аналогично выкачиванию энергии из звезды потоком нейтрино. Одесские физики расценили это как исчезновение денег с помощью одес-



*Вот он, Боулдер — классический городок глубинки Америки. Население меньше ста тысяч человек, 300 солнечных дней в году, крупнейший университет штата Колорадо, треть населения города — студенты. Самое высокое здание города — корпус физического факультета Колорадского университета, который называется «Джордж Гамов тауэр», а если посмотреть с другого бока — то горы, конечно, выше. Потому что это горы, природа, Вселенная...*

ских воров — «урок». В разных книгах и статьях упоминаются и другие его шуточки. А вот его расчеты с Шёнбергом были подтверждены не кем-нибудь, а лично взрывом сверхновой в Большом Магеллановом Облаке, ближайшей к нам галактике. Интенсивность потока нейтрино, долетевших до нас в 1987 году, подтверждает их теорию. Нейтринное цунами летело к Земле 170 тысяч лет и опоздало лишь на 0,01%: тот, кто его предсказал и кого друзья называли «Джо», умер в 1968 году.

Кроме нескольких научных, Гамов написал двадцать популярных книг, переведенных на многие языки; некоторые переведены и на русский. Но никто, кажется, не попытался понять, почему они популярны. Разобраться с должной полнотой в этом вопросе нам не под силу, но кое-что сказать можно. Первое: переплетение с жизнью — задача возникает из некоторой (часто — вполне реальной) жизненной ситуации. Надо уметь увидеть в природе ситуацию, которая может быть проанализирована на некоторую глубину при опоре на определенного объема багаж и аппарат. Иными словами, решаемую, как всегда частично, задачу. Второе: обычная задача при написании научно-популярных книг — как протянуть ниточку от «научного» до «популярного», уж больно далеко ушло одно от другого, да и школьной-то физики почти никто не знает. Некоторые авторы и издатели практикуют многослойность (обычно двухслойность, предлагалось и более) текста: например, мелкий шрифт, врезы, подверстки и т.п. В некоторых книгах Гамова этот прием проведен фундаментально — более серьезные «лекции», которые слушает персонаж, чередуются с переживанием персонажем (во сне) каких-либо событий, в которых иллюстрируется прослушанное. Третье и самое редкое: тот персонаж, который у Гамова представляет науку, способен произнести и, более того, время от времени произносит «нам не известно», «науке не известно». Гамову за его книги ЮНЕСКО была присуждена «Премия Калинги» — наиболее престижная награда за популяризацию науки.

Георгий Антонович (Джорж) Гамов оставил след в этом мире: «Джордж Гамов тауэр» в Боулдере, «сквер Гамова» в его родном городе Одессе и «кратер Гамова» на Луне, который смотрел бы на все это сверху, если бы не располагался на обратной стороне Луны. Поэтому кратер смотрит во Вселенную, которая так интересовала того, чьим именем он назван.

# Игра в 15

К.КОХАСЬ

Как-то раз, наткнувшись в сундуке на старую детскую игрушку, автор посмотрел по сторонам и с удивлением обнаружил, что подрастающее поколение не очень-то знает, что такое игра в 15, в то время как 50 лет назад о ней мало кто не знал. «И наши прошлые святыни для них пустые имена», как говорил классик. Предлагаемая статья призвана восполнить этот пробел.

**Классическая игра в 15.** Игра-головоломка «15», если попытаться описать ее совсем коротко, – это кубик Рубика XIX века, только не трехмерный $3\times3\times3$, а двумерный $4\times4$. Дана коробочка размером $4\times4$ клетки, на дне которой лежат 16 плиток $1\times1$. Плитки пронумерованы, одна из плиток (с числом 16) убрана, точнее говоря, вообще отсутствует в комплекте. В результате имеется одна пустая клетка, на которую можно передвинуть любую из соседних плиток (рис.1). На освободившееся место опять можно передвинуть одну из соседних плиток и т.д. Требуется, передвигая плитки, расположить их в каком-нибудь стандартном порядке.

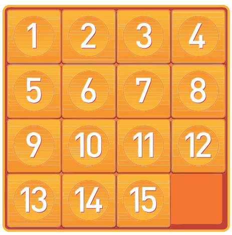



*Рис. 1. Игра в 15*

Игра была изобретена в США во второй половине XIX века и благодаря удачной рекламной компании приобрела огромную популярность. Прочесть об истории игры можно в книге [1]. В данной статье мы расскажем о замечательной теореме Уилсона, посвященной этой игре.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20220502

**Обобщенная игра в 15.** В XXI веке кажется уже несколько несолидным рассматривать такие простые штучки, поэтому сразу рассмотрим обобщение этой игры.

Пусть дан произвольный связный граф $G$ с $n$ вершинами. Две вершины, соединенные ребром, мы называем соседними. Возьмем фишки, пронумерованные числами от 1 до $n-1$, и поставим на каждую вершину одну фишку. Одна вершина окажется свободной, т.е. без фишки. После этого разрешается перемещать фишки: в свободную вершину можно переместить фишку из любой соседней вершины. В освободившуюся вершину можно передвинуть фишку из любой ее соседней вершины и т.д. Выберем одно из расположений фишек, которое будем считать «стандартным». Нас будет интересовать вопрос: *верно ли, что из любого начального положения фишек с помощью таких перемещений можно получить стандартное расположение*? Ну или наоборот: верно ли, что из стандартного расположения фишек можно получить любое другое? Если да – будем говорить, что игра-головоломка «15» на графе $G$ *собирается*, а если нет – то *не собирается*.

Исходной игре в 15 соответствует граф, показанный на рисунке 2.

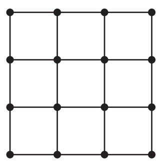


*Рис. 2. Граф игры в 15*

Давайте поиграем. Рассмотрим примеры различных графов (рис. 3–6). Предлагаем читателю попытаться разобраться само-

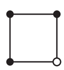


*Рис. 3. Граф $G_1$*

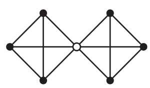


*Рис. 4. Граф $G_2$*

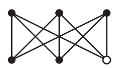


*Рис. 5. Граф $G_3$*

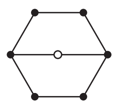


*Рис. 6. Граф $G_4$*

му, собирается ли головоломка «15» в этих примерах, прежде чем читать наши рассуждения. Условимся, что вершина, которая в стандартном расположении фишек должна остаться свободной, обозначается светлым кружочком.

Чтобы дать читателю возможность не подсматривать, мы отодвинем разбор этих примеров на следующую страницу, а пока займемся «теоретической подготовкой» на совершенно другую тему.

**Дробно-линейные функции.** Этим термином называют функции вида $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, где $a$, $b$, $c$, $d$ – фиксированные вещественные числа. Например, $f(x) = \dfrac{1-4x}{2x+3}$, $f(x) = \dfrac{x}{3x-1}$ и т.п. При этом должно выполняться единственное ограничение: требуется, чтобы функция была непостоянной, иными словами, дробь, задающая функцию, должна быть несократимой. Это эквивалентно условию

$$ad - bc \neq 0.$$

Других ограничений нет, так что функции $f(x) = x$, $f(x) = 2x+1$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$ тоже дробно-линейные.

График дробно-линейной функции (при $c \neq 0$) – это хорошо известная «школьная» гипербола (рис. 7). Разглядывая этот график, заметим, что функция определена

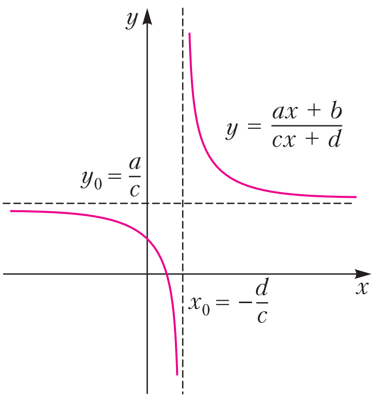



*Рис. 7. Гипербола* $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

при всех $x \in \mathbb{R}$, кроме точки $x_0 = -\dfrac{d}{c}$, в которой график имеет вертикальную асимптоту. Кроме того, функция принимает ровно один раз каждое вещественное значение, кроме значения $y_0 = \dfrac{a}{c}$, которое соответствует горизонтальной асимптоте.

Эти наблюдения позволяют проделать следующий фокус: будем считать, что к множеству вещественных чисел $\mathbb{R}$ (о котором можно думать, как о множестве точек координатной прямой) добавлена еще одна точка, которую мы будем обозначать значком $\infty$. Слишком сильно задумываться о природе этой точки мы не будем, но, говоря неформально, мы считаем ее «бесконечно удаленным элементом», интуитивно полагая, что если некоторая величина возрастает по модулю, то тем самым она приближается к точке $\infty$. Полученное множество обычно называют проективной прямой. Впрочем, нам его незачем как-то называть, давайте просто обозначим его $\overline{\mathbb{R}}$. Это множество нам мило тем, что оно является естественной областью определения и естественным множеством значений дробно-линейных функций. В самом деле, будем считать, что всякая дробно-линейная функция задана при $x \in \overline{\mathbb{R}}$ и принимает значения в множестве $\overline{\mathbb{R}}$. Для этого примем следующие соглашения.

Для функции $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (при $c \neq 0$) полагаем

$$f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty, \qquad (1)$$

$$f(\infty) = \frac{a}{c}. \qquad (2)$$

Для функции $f(x) = ax + b$ полагаем

$$f(\infty) = \infty. \qquad (3)$$

Отметим, что после всех этих модификаций дробно-линейные функции обладают свойствами, которые читатель легко проверит:

1) каждая дробно-линейная функция есть взаимно однозначное отображение из $\overline{\mathbb{R}}$ в $\overline{\mathbb{R}}$,

2) если $f(x)$ и $g(x)$ – две дробно-линейные функции, то их композиция $f(g(x))$ – тоже дробно-линейная функция.

Нам понадобится еще одно свойство дробно-линейных функций.

**Теорема 1.** *Для любых трех различных точек* $\alpha, \beta, \gamma \in \overline{\mathbb{R}}$ *и любых трех различных точек* $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma \in \overline{\mathbb{R}}$ *существует единственная*[1] *дробно-линейная функция* $f$, *для которой*

$$f(\alpha) = \mathrm{A}, \quad f(\beta) = \mathrm{B}, \quad f(\gamma) = \Gamma. \qquad (4)$$

Этот факт широко известен, но не вполне очевиден, мы не будем его здесь доказывать, вместо этого приведем формулу, по которой любой желающий может такую функцию найти:

$$\frac{x-\alpha}{x-\beta} : \frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta} = \frac{f-\mathrm{A}}{f-\mathrm{B}} : \frac{\Gamma-\mathrm{A}}{\Gamma-\mathrm{B}}. \qquad (5)$$

Выразив из этой формулы $f$ через $x$, получим искомое. Понять, что найденная функция удовлетворяет требованиям (4), несложно. Например, при $x = \alpha$ левая часть формулы (5) равна 0, а единственное значение $f$, для которого правая часть формулы (5) равна 0 – это $f = \mathrm{A}$. Аналогичные соображения применимы при $x = \beta$ и $x = \gamma$. Отметим, что формула (5) позволяет находить функцию $f$ и в тех случаях, когда среди значков $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, A, B, $\Gamma$ встречаются бесконечности. Например, при $\gamma = \infty$, $\mathrm{A} = \infty$ истолковываем дроби $\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}$ и $\frac{f-\mathrm{A}}{\Gamma-\mathrm{A}}$ в духе соотношения (2) как единицы и получаем совсем короткую формулу, из которой в этом случае можно найти $f$:

$$\frac{x-\alpha}{x-\beta} = \frac{\Gamma-\mathrm{B}}{f-\mathrm{B}}.$$

Вернемся к игре в 15.

**Игра на графах $G_1 - G_3$** (см.рис.3–5). На графе $G_1$ головоломка не собирается, поскольку при перемещении фишек не может измениться их циклический порядок: уж если идут фишки в порядке 1–2–3 (по часовой стрелке), то так же они будут упорядочены и дальше. Переставить их в порядок 1–3–2 не удастся. Так же обстоят дела в случае, когда граф $G_1$ – цикл длины $n$, $n \geq 4$.

На графе $G_2$ головоломка не собирается, потому что ни одна фишка из левой половинки графа не сможет перебраться в правую половинку и наоборот. Так же обстоят дела в случае, когда граф $G_2$ содержит вершину, при удалении которой граф распадается на две (или более) компоненты, – такая вершина называется *точкой сочленения*.

Для анализа игры на графе $G_3$ нам понадобятся стандартные соображения теории перестановок. Пусть дано натуральное число $n$. Выпишем числа от 1 до $n$ в некотором порядке. Полученное расположение чисел называется *перестановкой*. Будем называть *беспорядком* в перестановке (или *инверсией*) ситуацию, когда большее число встречается левее меньшего. Например, в перестановке

$$6,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 1$$

имеется 9 беспорядков: пять из них связаны с числом 6, которое стоит левее остальных (меньших) чисел, и еще четыре беспорядка образуют числа 2, 3, 4, 5, стоящие левее 1. Для каждой перестановки вычислим суммарное количество беспорядков в ней, остаток этого числа при делении на два называется *четностью* перестановки, а сама перестановка – *четной* (если остаток 0) или *нечетной* (если 1). Перестановка, рассмотренная выше, нечетная.

Четность перестановки обладает замечательным свойством: если в перестановке поменять местами два числа, четность изменится. В случае, когда переставляют соседние числа в перестановке, это очевидно. А когда не соседние – это небольшая загадка для читателя. Иллюстрацией служит рассмотренная нечетная перестановка: если в ней поменять местами 1 и 6, получится перестановка, в которой 0 беспорядков, т.е. четная.

Вернемся к графам. На графе $G_3$ головоломка «15» тоже не собирается. Граф $G_3$ относится к *двудольным графам* – его множество вершин разбито на две части или, как говорят, *доли*, причем концы каждого ребра принадлежат разным до-

---

[1] Отметим тонкость: одна и та же функция может быть задана разными дробями: например, $\frac{x+1}{x-1} = \frac{2x+2}{2x-2}$.

лям. Другое наглядное описание двудольного графа – граф является двудольным, если он не содержит нечетных циклов. Будем считать, что стандартным расположением фишек на графе $G_3$ является положение, показанное на рисунке 8. Здесь фишки с числами 1, 2, 3 стоят в вершинах первой доли, а фишки 4, 5, 6 – в вершинах второй.

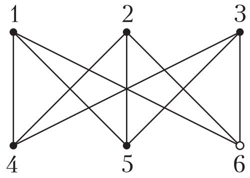


*Рис. 8. Стандартное положение фишек на графе $G_3$*

В этом разделе мы считаем, что в свободной вершине находится фишка с числом 6, в начале и в конце игры она занимает вершину, помеченную светлым кружочком, а во время игры фишка 6 перемещается по графу, меняясь местами с соседними фишками.

Проведем эксперимент – сделаем какой-нибудь ход, например передвинем фишку 1 на пустое место, т.е. в текущих обозначениях это значит – поменяем 1 и 6 местами (рис. 9). Расположение фишек можно записывать в виде перестановки: сначала выписываем фишки, стоящие в первой доле (слева направо), а потом стоящие во второй. После следующего хода (например, если поменять 6 и 4) перестановка снова станет четной. Мы «законспектировали» этот эксперимент на диаграмме (рис. 10). Посмотрите на нее внимательно и найдите закономерность.

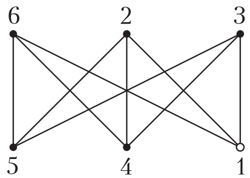


*Рис. 9. Сделаем один ход*

Ну как? Нашли? Закономерность такая: четность перестановки совпадает с четностью номера доли, где находится фишка 6!

Таким образом, из стандартного начального положения нельзя получить перестановку, четность которой не совпадает с номером той доли, где находится фишка 6. Пример такой перестановки показан на рисунке 11.

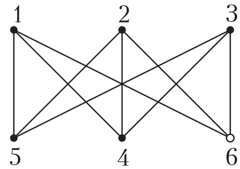


*Рис 11. Интересное расположение фишек на графе $G_3$*

Аналогичные рассуждения применимы к любому двудольному графу, в том числе (см. рис. 6), к графу классической игры в 15!

**Игра на графе $G_4$** (см. рис. 6). Докажем теперь, что и на графе $G_4$ головоломка «15» не собирается. Вообще-то граф $G_4$ довольно маленький, и любому, кто хоть немного поиграл на нем в игру в 15, это утверждение покажется «конструктивно ясным». Но мы предложим красивое математическое доказательство этой невозможности.

Начнем с того, что разметим фишки и будем считать стандартным положение, показанное на рисунке 12. Будем интересоваться только такими перестановками фишек, в которых свободная клетка размещается в центре. В отличие от предыдущего графа свободную вершину не будем помечать никаким значком и будем называть *свободной фишкой*. Ясно, что перемещение фишек однозначно задается траекторией свободной фишки.

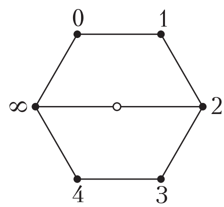


*Рис. 12. Стандартная расстановка на графе $G_4$*

Как может двигаться свободная фишка, если ее путь начинается и заканчивается в центральной вершине? Очевидно, она выходит из центра, делает целое или полуцелое число оборотов, возвращается в центр, потом снова выходит из центра, снова делает целое или полуцелое число оборотов, снова возвращается в центр и т.д. В случае, когда свободная фишка делает несколько оборотов, будем считать, что она после каждого оборота «на секундочку» воз-

| *Первая доля* | *Вторая доля* | | *Первая доля* | *Вторая доля* | | *Первая доля* | *Вторая доля* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 2 3 | 4 5 **6** | $\longrightarrow$ | **6** 2 3 | 4 5 1 | $\longrightarrow$ | 4 2 3 | **6** 5 1 |
| *четная перестановка* | | | *нечетная перестановка* | | | *четная перестановка* | |

*Рис. 10. Конспект эксперимента*

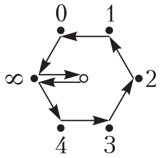


Рис. 13. Первый маршрут

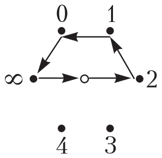


Рис. 14. Второй маршрут

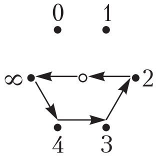
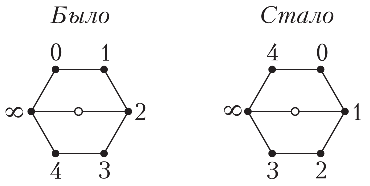


Рис. 15. Третий маршрут

вращается домой, т.е. в центр, после чего тут же возвращается обратно и продолжает движение. Тогда можно считать, что траектория движения свободной фишки состоит в том, что она последовательно проходит маршруты, показанные на рисунках 13–15 (каждый из маршрутов можно проходить в указанном направлении либо в противоположном).

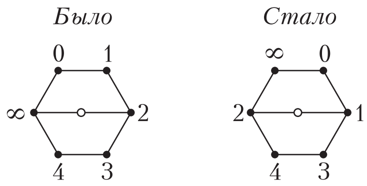
Читатель легко проверит, что при прохождении первого и второго маршрутов остальные фишки переставляются так, как показано на рисунках 16, 17. (На графе указано конечное расположение фишек после того, как, начав со стандартного положения, мы проведем свободную фишку по маршруту. Снизу подписано правило, задающее полученную перестановку.)

Как видим, в результате выполнения первого маршрута (см. рис. 16), фишки 0–4 переставляются циклически, а фишка $\infty$ остается на месте. Следовательно, движение по этому маршруту в обратном направлении эквивалентно четырехкратному повторению этого маршрута. Аналогично, движение по второму маршруту в обратном направлении эквивалентно его трехкратному повторению. Что же касается третьего маршрута, задаваемую им перестановку можно выполнить, если сначала применить первый маршрут, а после этого запустить второй маршрут в противоположном направлении.




$$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 0$$
$$\infty \to \infty$$

Рис. 16. Перестановка первого маршрута




$$2 \to \infty \to 0 \to 1 \to 2$$
$$3 \to 3, \quad 4 \to 4$$

Рис. 17. Перестановка второго маршрута

Итак, мы можем считать, что все возможные перестановки, получающиеся из стандартной, могут быть получены последовательным применением перестановок, указанных на рисунках 16, 17.

Теперь зададим перестановки формулами.

**Проективная прямая над полем $\mathbb{F}_5$.** Положим $\mathbb{F}_5 = \{0,1,2,3,4\}$ – множество остатков по модулю 5. Зададим в этом множестве операции сложения и умножения остатков по модулю 5. Замечательным обстоятельством является то, что в этом множестве можно не только находить суммы, разности и произведения остатков, но также (!) частные. Например, найдем, чему равно $\frac{3}{2}$:

$$\frac{3}{2} \underset{(*)}{=} \frac{3\cdot 3}{2\cdot 3} \underset{(**)}{=} \frac{4}{1} = 4.$$

Здесь равенство (*) получено с помощью домножения числителя и знаменателя дроби на 3. Далее мы провели вычисления: $3\cdot 3 = 9 \equiv 4 \pmod 5$, $2\cdot 3 = 6 \equiv 1 \pmod 5$ и получили в результате равенство (**).

Раз у нас имеется полноценное деление, мы можем рассматривать на множестве $\mathbb{F}_5$ дробно-линейные функции со значениями в $\mathbb{F}_5$. Это функции, которые задаются формулами

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

$$\text{где } a,b,c,d \in \mathbb{F}_5 \text{ и } ad - bc \neq 0. \quad (6)$$

Но… такие функции имеют тот же недостаток, что и вещественные дробно-линейные функции: невозможность деления на 0. Рассмотрим тогда «расширенное» множество остатков по модулю 5, а именно, положим

$$\overline{\mathbb{F}}_5 = \mathbb{F}_5 \cup \{\infty\},$$

зададим правила работы со значком $\infty$ формулами (1)–(3) и, начиная с этого момента, будем считать, что функции вида (6) заданы на множестве $\overline{\mathbb{F}}_5$ и принимают значения тоже в $\overline{\mathbb{F}}_5$.

Возьмем на вооружение принятые обозначения. Как видим на рисунке 12, вершины графа $G_4$ пронумерованы в точности всеми элементами множества $\overline{\mathbb{F}}_5$. Посмотрим тогда еще раз на перестановку на рисунке 16. Нельзя ли задать ее с помощью какой-нибудь функции?

Ответ очевиден, формула «бросается в глаза» – это функция

$$g(x) = x + 1. \tag{7}$$

Перестановка на рисунке 17 представляет собой более крепкий орешек. Она задается формулой

$$f(x) = \frac{3}{x+3}. \tag{8}$$

Действительно, проверим это:

$$f(0) = \frac{3}{3} = 1,$$

$$f(1) = \frac{3}{4} = \frac{3}{-1} = -3 = 2,$$

$$f(2) = \frac{3}{0} = \infty \text{ по } (1),$$

$$f(3) = \frac{3}{3+3} = \frac{3}{1} = 3,$$

$$f(4) = \frac{3}{4+3} = \frac{3}{2} = 4 \text{ – это мы уже}$$

вычисляли,

$$f(\infty) = 0 \text{ по } (2).$$

Читатель может поупражняться и вывести формулу для перестановки, задаваемой третьим маршрутом (см. рис. 15).

Заметим, что при последовательном выполнении перестановок, задаваемых дробно-линейными функциями $h_1(x)$ и $h_2(x)$, получается перестановка, которая задается функцией $h_2(h_1(x))$, – а эта функция тоже дробно-линейная. Таким образом, все перестановки, которые можно получить в игре в 15 на графе $G_4$, задаются дробно-линейными функциями! Мы не будем проверять, можно ли с помощью функций $f$, $g$ и операции композиции построить все возможные дробно-линейные функции (ответ: можно). Вместо этого докажем, что *даже если мы будем использовать все возможные дробно-линейные функции, то мы не сможем получить все возможные перестановки*.

Это совсем просто. Для дробно-линейных функций, заданных на $\overline{\mathbb{F}}_5$, остается в силе теорема, сформулированная нами для вещественного случая, а именно: с помощью дробно-линейных функций можно любые три различные точки отобразить в любые другие три различные точки, и функция, осуществляющая такое отображение, единственна.

Значит, если мы выбрали произвольную расстановку и хотим получить ее из стандартной расстановки, мы точно знаем, куда следует отобразить 0, куда 1 и куда 2. Но на этом наши возможности заканчиваются: дробно-линейная функция, осуществляющая такое отображение, единственна, и куда она отображает оставшиеся элементы, мы контролировать не можем. Поэтому нам не удастся получить произвольную перестановку, в которой уже фиксированы места фишек 1, 2 и 3, – из шести возможных вариантов перестановки остальных трех фишек осуществится только один. Кстати, это значит, что на графе $G_4$ существует как минимум шесть попарно неэквивалентных перестановок, т.е. перестановок, которые не могут быть получены друг из друга в головоломке «15».

Итак, игра в 15 на графе $G_4$ тоже не собирается.

**Теорема Уилсона.** Мы разобрались с анализом игры в 15 на небольших конкретных графах – графах $G_1$–$G_4$. Оказывается, нам встретились в этих примерах все возможные препятствия, которые могли бы помешать головоломке «15» собраться. Имеет место следующая замечательная теорема. Ее доказал американский математик Ричард Уилсон приблизительно 50 лет назад [3].

**Теорема 2.** *Пусть G – граф, который*
*1) не является циклом из четырех или более вершин,*
*2) не содержит точек сочленения,*
*3) не является двудольным,*
*4) не совпадает с графом $G_4$.*
*Тогда на графе G головоломка «15» собирается.*

Доказательство этой теоремы не является столь же изысканным и элементарным, как ее формулировка. Но общий ход доказательства вполне предсказуем: поскольку граф не имеет точек сочленения (напомним: это значит, что при удалении одной вершины он не может распасться на отдельные компоненты) и не является циклом, то он «достаточно сложный»: например, в нем можно найти две вершины $A$ и $B$, соединенные тремя путями, не имеющими общих вершин (как вершины «2» и «$\infty$» в графе $G_4$ на рисунке 12), будем называть такую конфигурацию 3-*путь*. Дальнейшее – дело техники: если граф не настолько маленький, как граф $G_4$ (и некоторые другие примеры, на которых головоломка все же собирается), и если отсутствуют препятствия, связанные с четностями перестановок, то можно проверить, что преобразования вроде тех, что мы рассматривали на рисунках 13–15, порождают множество всех возможных перестановок фишек на графе.

Итак, если граф $G$ не двудольный и содержит хотя бы один 3-путь, то головоломка собирается: из стандартной перестановки можно получить все возможные перестановки. Справедливости ради добавим, что на цикле длины 3, а также на графе, состоящем из одного ребра, головоломка тоже собирается. Для остальных графов можно уточнить, как именно не собирается головоломка «15». Если граф $G$ двудольный, не совпадает с $G_4$ и содержит хотя бы один 3-путь, то из стандартной перестановки можно получить лишь четные перестановки, т.е. ровно половину всех возможных перестановок. На графе $G_4$ можно получить 120 перестановок (они описываются дробно-линейными функциями) из 720 возможных.

Наконец, в случае графа-цикла с $n$ вершинами ($n > 3$) можно получить лишь циклические перестановки стандартного расположения, т.е. $n-1$ перестановку из $(n-1)!$ возможных (напомним, что место для свободной фишки зафиксировано).

Некоторые примеры того, как может выглядеть процесс сборки головоломки на графах, похожих на граф $G_4$, можно прочесть в статье [2].

Ну и напоследок, проверим внимание и наблюдательность читателя. Рассмотрим кубик Рубика.

**Задача.** *Допустим, что, собирая кубик, мы решили ограничиться поворотами только его верхней грани ABCD и правой грани CDEF (рис. 18). Верно ли, что, пользуясь только поворотами этих граней, мы сумеем добиться любой перестановки угловых кубиков, изначально расположенных в углах A, B, C, D, E, F? (Как будут повернуты при этом кубики, неважно – лишь бы стояли на указанных местах.)*

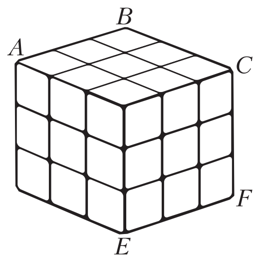


Рис. 18. Кубик Рубика

## Литература


1. *М.Гарднер*. Математические досуги. – М.: Мир, 1972.
2. *Д.Вакарелов*. Путешествия по графам. – «Квант», 1986, № 7.
3. *R.M.Wilson.* Graph puzzles, homotopy, and the alternating group. – J. Combin. Theory, Ser. B, 16 (1974), 86–96.

# Задачи по математике и физике

***Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.***

***Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».***

***Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.***

***Задачи М2698 – М2701 предлагалась на XLIII Турнире городов.***

***Задачи Ф2705 – Ф2708 предлагались на заключительном этапе LV Всероссийской олимпиады школьников по физике.***

### Задачи М2698–М2701, Ф2705–Ф2708

**М2698.** Докажите, что из любого выпуклого четырехугольника можно вырезать три его копии вдвое меньшего размера.

*А.Юран*

**М2699.** По доске $n \times n$ прошла ладья, побывав в каждой клетке один раз, причем каждый ее ход был на соседнюю по стороне клетку. Клетки занумерованы целыми числами от 1 до $n^2$ в порядке прохождения ладьи. Пусть $M$ – наибольшая разность между номерами соседних по стороне клеток. Каково наименьшее возможное значение $M$?

*Б.Френкин*

**М2700.** Дан приведенный многочлен степени 2022 с целыми коэффициентами. Какое наибольшее число корней он может иметь на интервале $(0; 1)$?

*А.Канель-Белов*

**М2701.** Султан собрал 300 придворных мудрецов и предложил им испытание. Он сообщил им список из 25 цветов и сказал, что на испытании каждому мудрецу наденут на голову колпак одного из этих цветов, причем если для каждого цвета написать количество надетых колпаков этого цвета, то все числа будут различны. Каждый мудрец увидит, какой колпак на ком надет, но свой колпак не увидит. Затем одновременно (по сигналу) каждый должен будет назвать предполагаемый цвет своего колпака. Могут ли мудрецы заранее договориться действовать так, чтобы гарантированно хотя бы 150 из них назвали цвет верно?

*А.Грибалко*

**Ф2705.** Три черепахи, движущиеся с постоянными по модулю скоростями и все время поддерживающие курс одна на другую, в момент запуска секундомера находились в вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника $ABC$ с катетами длиной $l$ (рис. 1). Скорость первой черепахи $v_1 = v$, где $v$ – известная величина, а скорости второй и третьей черепах $v_2$ и $v_3$ таковы, что в процессе их движения углы в треугольнике, образованном черепахами, не изменяются. Найдите:

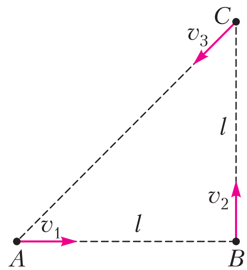


Рис. 1

1) время $t$, через которое черепахи встретятся;

2) модули скоростей $v_2$ и $v_3$ второй и третьей черепах;

3) ускорения черепах в начальный момент времени;

4) на каком расстоянии $s$ от места старта первой черепахи произойдет их встреча.

*А.Уймин*

**Ф2706.** В атмосфере с давлением $p_0 = 10^5$ Па расположен вертикальный цилиндрический сосуд сечением $S = 0{,}01$ м$^2$ и высотой $2H$ ($H = 1$ м). Вдоль стенок сосуда может перемещаться без трения герметичный поршень (рис. 2). Стенки сосуда и поршень не проводят тепло. Изначально поршень покоится на небольших опорах, расположенных на высоте $H$ над дном сосуда. Из-под поршня выкачивают весь воздух и помещают туда некоторое количество жидкости. После установления термодинамического равновесия температура содержимого сосуда оказалась равной $T_0 = 350$ К. Затем включают нагреватель, и через дно сосуда содержимое под поршнем медленно нагревается. В процессе нагрева измеряют температуру и давление под поршнем. Когда низ поршня достигает отметки $2H$, нагрев прекращают. График полученной зависимости от начала нагрева и до его окончания представлен на рисунке 3. Удельная теплота парообразования жидкости при температуре $1{,}1\,T_0$ равна $L = 2{,}2$ МДж/кг. Молярная масса жидкости $\mathrm{M} = 18$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К), ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с$^2$. Пар жидкости можно считать идеальным многоатомным газом. Объем жидкости много меньше $SH$. Определите:

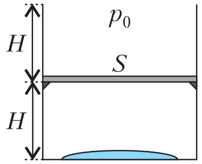



*Рис. 2*

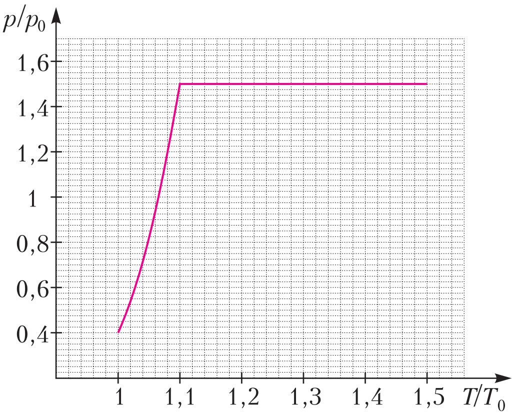



*Рис. 3*

1) массу $M$ поршня;
2) массу $m_0$ содержимого под поршнем (суммарно во всех агрегатных состояниях);
3) количество теплоты $Q$, подведенное к сосуду начиная с момента отрыва поршня от опор и до момента окончания нагрева.

*А.Уймин*

**Ф2707.** Бесконечно длинный незаряженный металлический цилиндр радиусом $R$ расположен в однородном электрическом поле $\vec{E}_0$. Ось цилиндра и вектор напряженности поля горизонтальны и взаимно перпендикулярны (рис. 4). Напряженность поля направлена вправо. На поверхности цилиндра установилось некоторое распределение индуцированных зарядов.

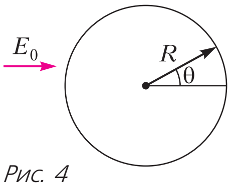



*Рис. 4*

Далее рассмотрим бесконечно длинный тонкостенный непроводящий цилиндр такого же радиуса $R$ вне поля $\vec{E}_0$ вдали от первого (проводящего) цилиндра. Поместим на его поверхность заряды так, чтобы зависимость плотности заряда от угла θ к горизонту совпадала для обоих цилиндров. Непроводящий цилиндр расположен горизонтально в поле тяжести. Ускорение свободного падения равно $g$. Поместим внутрь непроводящего цилиндра гладкий точечный положительный заряд $q$ массой $m$.

1) Определите изменение суммарной потенциальной энергии точечного заряда (энергии в поле тяжести и в электрическом поле) при перемещении его из крайнего левого положения в крайнее правое.

2) Точечный заряд помещают в самое нижнее положение и сообщают ему начальную скорость $v_0$, направленную влево перпендикулярно оси цилиндра (рис. 5). Найдите максимальную скорость заряда $v_{max}$ в процессе дальнейшего движения.

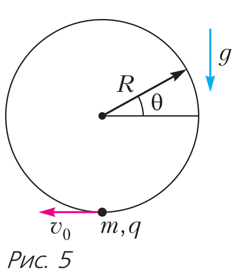



*Рис. 5*

3) При каких значениях $v_0$ точечный заряд совершит полный оборот?

*М.Карманов*

**Ф2708.** Полубесконечный соленоид с радиусом витков $r$ и плотностью намотки $n$ (число витков на единицу длины) расположен соосно круговому сверхпроводящему витку радиусом $R$ так, что его основание находится в плоскости витка (рис. 6). Известно, что $r \ll R$. Изначально ток в витке отсутствовал. Индуктивность витка равна $L$. Силу тока в соленоиде медленно увеличивают от нуля до $I$ и далее поддерживают постоянной. Провода, подводящие ток к соленоиду, расположены таким образом, что их магнитным полем и взаимодействием с другими элементами можно пренебречь. Направим ось $x$ так, как показано на рисунке.

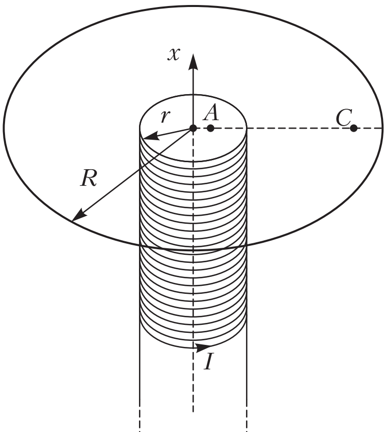



Рис. 6

1) Точки $A$ и $C$ расположены в плоскости витка на расстояниях $r/3$ и $3r$ соответственно от оси симметрии системы. Найдите проекции индукции $B_{Ax}$ и $B_{Cx}$ магнитного поля, создаваемого соленоидом в точках $A$ и $C$ соответственно.

2) Найдите силу тока $I_в$ в витке. Укажите, как он направлен.

3) Найдите величину и направление силы магнитного взаимодействия, действующей на соленоид со стороны витка.

*Примечание*. Для бесконечного соленоида поле внутри соленоида однородное, вектор магнитной индукции направлен параллельно оси и его величина определяется формулой $B_0 = \mu_0 nI$. Снаружи бесконечного соленоида $\vec{B} = 0$.

*А.Уймин*

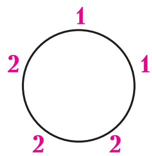
## Решения задач М2686–М2689, Ф2693–Ф2696

**М2686.** *99 команд сыграли двухкруговой турнир по волейболу: каждая сыграла с каждой матч дома и матч в гостях. Каждая команда выиграла ровно половину своих домашних матчей и ровно половину гостевых. Докажите, что какая-то из команд дважды обыграла какую-то другую.*

Предположим противное. Тогда в каждой паре команд либо обе победили соперника у себя дома, либо обе победили соперника в гостях. Соединим ребром те пары, где обе команды победили друг друга дома. Получим граф на 99 вершинах, и из каждой вершины выходит ровно 49 ребер. Но это невозможно, так как в противном случае общее количество ребер было бы равно нецелому числу $99 \cdot 49/2$.

*М.Антипов*

**М2687.** *Дан правильный $n$-угольник, $n \ge 4$. Рассматриваются расстановки в его вершинах $n$ чисел, каждое из которых равно 1 или 2 (всего $2^n$ расстановок). Для каждой такой расстановки $K$ находим количество нечетных сумм среди всех сумм чисел в нескольких подряд идущих вершинах. Это количество обозначим $a(K)$ (например, для расстановки $K$, показанной на рисунке, $n = 5$ и $a(K) = 8$). а) Найдите наибольшее возможное значение $a(K)$. б) Найдите количество расстановок, для которых $a(K)$ принимает это наибольшее возможное значение.*




**Ответ:** а) $\left[\dfrac{n^2}{2}\right]$; б) $C_{n-1}^{n/2}$ для четного $n$, $C_{n-1}^{(n-1)/2} + C_{n-1}^{(n+1)/2}$ для нечетного $n$.

Заметим, что количество подмножеств из нескольких подряд идущих вершин равно $n(n-1)+1$ (для каждого $k = 1, 2, \ldots, n-1$ имеется $n$ наборов, а кроме того, набор из всех $n$ чисел). Занумеруем вершины по кругу: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и обозначим через $a_i$ число, стоящее в вершине $A_i$.

Положим $S_0 = 0$, $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, … …, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.
Если исключить из рассмотрения множество всех вершин $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, остальные подмножества подряд идущих вершин разбиваются на *пары*, дополняющие друг друга до всего множества $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ (скажем, в паре с подмножеством $\{A_2, A_3\}$ будет подмножество $\{A_4, A_5, \ldots, A_n, A_1\}$ и т.д.). Сумма чисел в каждой такой паре подмножеств равна $S_n$.
Если для какой-то расстановки $K$ сумма $S_n$ нечетна, то суммы чисел в каждой такой паре подмножеств имеют разную четность, и тогда $a(K) = \dfrac{n(n-1)}{2} + 1$, что при $n \geq 4$ меньше значения $\left[\dfrac{n^2}{2}\right]$, указанного в ответе.

Если же для расстановки $K$ сумма $S_n$ четна, то суммы чисел в каждой нашей паре подмножеств имеют одинаковую четность. Покрасим в каждой нашей паре то подмножество, которое не содержит $A_n$.
Тогда $a(K)$ будет равно удвоенному количеству покрашенных подмножеств с нечетной суммой чисел. Любая сумма в покрашенном подмножестве (т.е. сумма нескольких подряд идущих чисел, не содержащих числа $a_n$) представляется (причем единственным образом) в виде $S_i - S_j$, где $0 \leq j < i \leq n-1$. Видим, что она нечетна тогда и только тогда, когда $S_i$ и $S_j$ имеют разную четность. Значит, количество покрашенных подмножеств с нечетной суммой равно $m(n-m)$, где $m$ и $n-m$ – соответственно количества нечетных и четных чисел среди чисел $S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}$. Тем самым, $a(K) = 2m(n-m) = \dfrac{1}{2}\left(n^2 - (n-2m)^2\right)$, что не превышает $\dfrac{n^2}{2}$ при четном $n$ и не превышает $\dfrac{n^2-1}{2}$ при нечетном $n$, т.е. не превышает значения, указанного в ответе. При этом равенство достигается в случае четного $n$ тогда и только тогда, когда $m = \dfrac{n}{2}$, а в случае нечетного $n$ тогда и только тогда, когда $m = \dfrac{n \pm 1}{2}$. Заметим, что если известны четности чисел $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ (вспомним также, что мы находимся в случае четного $S_n$), то числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ восстанавливаются, причем однозначно, исходя из условий $a_i = S_i - S_{i-1}$. Таким образом, имеется ровно $C_{n-1}^m$ расстановок чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, для которых среди чисел $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ ровно $m$ нечетны. Отсюда вытекает, что в случае четного $n$ количество $a(K)$ равно $\dfrac{n^2}{2}$ ровно для $C_{n-1}^{n/2}$ расстановок, в случае же нечетного $n$ количество $a(K)$ равно $\left[\dfrac{n^2}{2}\right]$ ровно для $C_{n-1}^{(n-1)/2} + C_{n-1}^{(n+1)/2}$ расстановок.

*П. Кожевников*

**М2688.** *Пусть $T_a$, $T_b$, $T_c$ – точки касания вписанной окружности $\omega$ треугольника $ABC$ со сторонами $BC$, $CA$, $AB$ соответственно (рис.1). Пусть $X$, $Y$, $Z$ – такие*

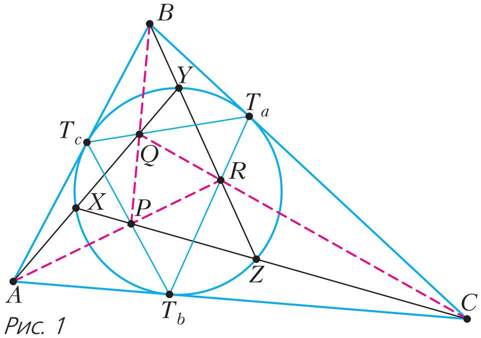


*Рис. 1*

*точки на окружности $\omega$, что $A$ лежит на луче $YX$, $B$ лежит на луче $ZY$, а $C$ лежит на луче $XZ$. Пусть $P$ – точка пересечения отрезков $ZX$ и $T_bT_c$, и аналогично $Q = XY \cap T_cT_a$, $R = YZ \cap T_aT_b$. Докажите, что точки $A$, $B$, $C$ лежат соответственно на прямых $RP$, $PQ$, $QR$.*

В решении будем использовать известные факты проективной геометрии: свойства поляр (см., например, статью Д.Швецова «Поляра» в «Кванте» №5 за 2017 г.) и теорему Паскаля.
Введем новые точки (рис.2) $S = T_aT_c \cap XZ$, $B_0$ – точка пересечения касательных к $\omega$ в

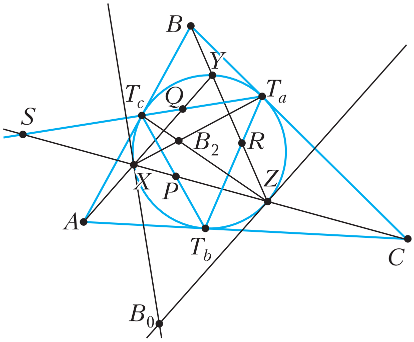



*Рис. 2*

точках $X$ и $Z$, $B_2 = T_cZ \cap T_aX$, прямую $BB_0$ назовем $l_b$.

Заметим, что $l_b$ – поляра точки $S$, поскольку $S$ лежит на полярах точек $B$ и $B_0$. Отсюда вытекает, что $B_2 \in l_b$.

По теореме Паскаля для шестиугольника (с кратной вершиной) $XYZT_cT_aT_a$ имеем: точка $B$ пересечения касательной к ω в точке $T_a$ и $ZY$, а также $Q = T_aT_c \cap XY$ и $B_2 = ZT_c \cap XT_a$ лежат на одной прямой, таким образом, $Q \in l_b$.

Так как $C$ лежит на прямой $XZ$ – поляре точки $B_0$, то $B_0$ лежит на прямой $T_aT_b$ – поляре $C$.

По теореме Паскаля для шестиугольника (с кратной вершиной) $T_aT_bT_cZZX$ имеем: точка $B_0$ пересечения касательной к ω в точке $Z$ и $T_aT_b$, а также $P = T_bT_c \cap ZX$ и $B_2 = ZT_c \cap XT_a$ лежат на одной прямой.

Итак, доказано, что на одной прямой $l_b$ лежат точки $B$, $P$, $Q$ (и, кроме того, $B_0$ и $B_2$).

Аналогичные рассуждения проводятся для точек $A$ и $C$.

*Л. Шатунов*

**М2689.** *В английском городе* 1000 *джентльменов, зарегистрированных в Реестре под номерами от* 1 *до* 1000. *Любые* 720 *из них образуют клуб. Мэр хочет обложить каждый клуб налогом, который выплачивается всеми участниками клуба в равных долях (налог – произвольное неотрицательное вещественное число). При этом суммарный налог, выплачиваемый джентльменом, не должен превосходить его номера в реестре. Какой наибольший налог может собрать мэр?*

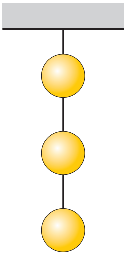
**Ответ:** $403920 = 561 \cdot 720$.

*Пример.* Разобьем джентльменов с номерами 1–560 на пары вида $(k,\ 561-k)$. Выделим 561 множество из 720 человек и с каждого множества соберем налог 720. В множестве номер $i$ будут все джентльмены с номерами, большими 560 (их 440), а из каждой пары $(k,\ 560-k)$ будет ровно один джентльмен: с меньшим номером, если этот номер не больше $i$, и с бóльшим иначе. Докажем, что предъявленный способ сбора налогов подходит. Джентльмен с номером $k \le 280$ является наименьшим номером в какой-то паре, поэтому он будет участвовать ровно в $k$ множествах. Джентльмен с номером $281 \le k \le 560$ был бóльшим в какой-то паре и участвует в $561 - (561-k) = k$ множествах. Джентльмены с номерами, большими 561, были в 561-м множестве, налог 561 они заплатить могли.

*Оценка.* Предположим, удалось собрать $S > 561 \cdot 720$ налога. Рассмотрим людей с номерами от 1 до 560. Назовем их бедными. Обозначим собранный с них налог через $T$. Поскольку в каждом наборе из 720 людей бедных хотя бы 280, то они заплатили хотя бы $\frac{280}{720}$ от собранного у любого множества налога, значит, они заплатили хотя бы $\frac{280}{720}$ от всего собранного налога, т.е. $T \ge \frac{280}{720}S$. Но они могли заплатить не больше суммы своих номеров, т.е. $T \le \frac{560 \cdot 561}{2}$. Получаем, что $561 \cdot 280 \ge T \ge \frac{280}{720}S$. Таким образом, $561 \cdot 720 \ge S$.

*И.Богданов*

**Ф2693.** *Три одинаковых по форме шарика соединены невесомыми упругими (т.е. растяжимыми) нитями и подвешены к потолку на длинной нити, как показано на рисунке. Верхний – это теннисный шарик со стандартными параметрами: диаметр* $D = 40$ *мм, масса оболочки* $m = 2{,}7$ *г. Средний и нижний – это сплошные шарики из алюминия плотностью* $\rho_а = 2{,}7$ *г/см*$^3$. *Шарики все вместе погружены в бочку с водой так, что они не*



*касаются стенок и дна бочки. Расстояния от верхнего шарика до поверхности воды и от нижнего до дна бочки, а также от всех шариков до стенок бочки значительно больше диаметров шариков. И расстояние между соседними шариками тоже во много раз больше размеров шариков. С какими ускорениями будут двигаться шарики сразу после перерезания одной из нитей? (Не забудьте про присоединенную массу воды, которая для шарика равна половине массы воды, вытесненной шариком.) Вязкостью воды можно пренебречь, ускорение свободного падения* $g = 9{,}81$ *м/с*$^2$.

Во-первых, заметим, что возможных вариантов перерезания «одной из нитей» три. Может быть перерезана верхняя (В), нижняя (Н) или средняя (С) нить. Поэтому ответ к задаче может выглядеть как таблица с девятью клеточками, соответствующими разным шарикам и разным вариантам перерезания.

Обозначим объем одного шарика через $V$. Плотности алюминия $\rho_а = 2{,}7$ г/см$^3$ и воды $\rho_в = 1{,}0$ г/см$^3$ известны. Плотность воздуха равна примерно $\rho_{возд} = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ г/см$^3$. Средняя плотность теннисного шарика с воздухом внутри равна $\rho_ш = 6m/(\pi D^3) + \rho_{возд} = 0{,}082$ г/см$^3$. Сначала система шариков находится в состоянии равновесия. При этом верхняя нить натянута с силой

$$F_В = V(2\rho_а - 3\rho_в + \rho_ш)g.$$

Средняя нить, соединяющая теннисный шарик и алюминиевый шарик, растянута с силой

$$F_С = 2V(\rho_а - \rho_в)g.$$

Сила натяжения нижней нити равна

$$F_Н = V(\rho_а - \rho_в)g.$$

Пока нити были целыми, суммы сил, действующих на каждый из шариков, были равны нулю. После разрезания нити соответствующая сила натяжения сразу становится равной нулю. При этом натяжения оставшихся целыми нитей изменятся только после того, как шарик (или шарики), на который (на которые) действовала нить до перерезания, сдвинется (сдвинутся) с места. А поскольку нити по условию задачи упругие, то это произойдет не сразу после перерезания. Будем рассматривать проекции всех сил на направление «вниз» и обсудим три возможных перерезания нитей.

*Вариант* В. Сумма всех сил, действующих вначале на теннисный шарик, равна нулю:

$$0 = mg - F_В + F_С - g\rho_в.$$

После того, как нить В перерезали и прошло совсем немного времени, все остальные силы не изменились. Это означает, что ускорения шариков из алюминия равны нулю, а теннисный шарик будет двигаться с ускорением, направленным вниз. Под действием суммы всех сил теннисный шарик и находящаяся рядом с ним вода пришли в движение с ускорением, направленным вниз:

$$(m + \rho_в V/2)a_{верх(В)} = mg + F_С - gV\rho_в = \\ = V(2\rho_а - 3\rho_в + \rho_ш)g,$$

где $\rho_в V/2$ – это так называемая присоединенная масса воды. Отсюда находим ускорение теннисного шарика:

$$a_{верх(В)} = g(2\rho_а - 3\rho_в + \rho_ш)/(\rho_ш + \rho_в/2) = \\ = g \cdot 4{,}276 \approx 41{,}9 \text{ м/с}^2.$$

*Вариант* С. Сразу после разрезания средней нити теннисный шарик будет двигаться с ускорением, направленным вверх, а верхний из двух алюминиевых шариков будет двигаться с ускорением, направленным вниз. Нижний шарик из алюминия будет иметь нулевое ускорение. Ускорение теннисного шарика находим из соотношения

$$V(\rho_ш + \rho_в/2)a_{верх(С)} = mg - F_В - gV\rho_в = \\ = Vg\rho_ш - gV(2\rho_а - 2\rho_в + \rho_ш),$$

откуда

$$a_{верх(С)} = -g(2\rho_а - 2\rho_в)/(\rho_ш + \rho_в/2) = \\ = -57{,}3 \text{ м/с}^2.$$

Знак «минус» означает, что ускорение направлено вверх. Ускорение верхнего из алюминиевых шариков находим из соотношения

$$V\left(\rho_а+\rho_в/2\right)a_{сред(С)}=gV\rho_а+$$
$$+gV\left(\rho_а-\rho_в\right)-gV\rho_в=2gV\left(\rho_а-\rho_в\right),$$

откуда

$$a_{сред(С)}=2g\left(\rho_а-\rho_в\right)/\left(\rho_а+\rho_в/2\right)\approx 10{,}4\ м/с^2.$$

*Вариант* Н. Сразу после разрезания нижней нити с ускорениями будут двигаться оба алюминиевых шарика. Для среднего шарика запишем

$$a_{средн(Н)}V\left(\rho_а+\rho_в/2\right)=$$
$$=gV\rho_а-gV\rho_в-2V\left(\rho_а-\rho_в\right)g$$

и получим

$$a_{средн(Н)}=-g\left(\rho_а-\rho_в\right)/\left(\rho_а+\rho_в/2\right)=$$
$$=-5{,}2\ м/с^2,$$

причем ускорение направлено вверх.

Для нижнего шарика запишем

$$a_{нижн(Н)}V\left(\rho_а+\rho_в/2\right)=gV\rho_а-gV\rho_в,$$

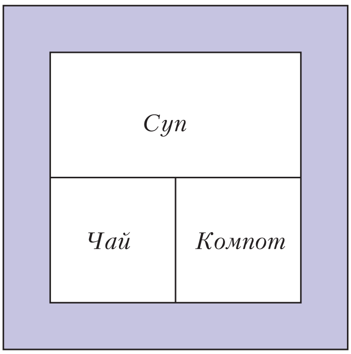
откуда

$$a_{нижн(Н)}=g\left(\rho_а-\rho_в\right)/\left(\rho_а+\rho_в/2\right)=+5{,}2\ м/с^2.$$

Это ускорение направлено вниз.

*С.Шариков*

**Ф2694.** *Хорошо теплоизолированный сосуд в форме куба стоит на горизонтальном столе. Сосуд разделен тонкими вертикальными перегородками на три секции (см. рисунок; вид сверху). Все перегородки сделаны из одинакового материала и имеют одинаковую толщину. Секции сосуда доверху заполнили чаем (Ч), супом (С) и компотом (К). После чего сосуд закрыли не проводящей тепло крышкой. В начальный момент температуры жидкостей в сосуде были такими: $T_Ч=92\,°C$, $T_С=60\,°C$, $T_К=40\,°C$. Через минуту температура чая стала равной 91°С. Тут объявили учебную тревогу и про жидкости забыли. Через какое время компот прогрелся до первоначальной температуры супа?*




Все налитые в сосуд жидкости – это вода с небольшим количеством примесей. Вода совсем невязкая жидкость, поэтому в каждой секции температуру по всему ее объему секции в любой момент времени можно считать одинаковой. Теплоемкостью тонких перегородок и стенок сосуда можно пренебречь. Поскольку теплоизоляция сосуда хорошая, то суммарный запас количества теплоты в сосуде сохраняется. Это означает, что выполняется равенство

$$T_Ч+T_С+T_К=252\,°C=\text{const}.$$

Мощность процесса теплопередачи через перегородку пропорциональна ее площади, обратно пропорциональна толщине и пропорциональна разнице температур по разные стороны перегородки. Обозначим коэффициент, учитывающий теплопроводность перегородок и теплоемкости жидкостей, через $\alpha$ и запишем соответствующие дифференциальные уравнения:

$$T_Ч'=-\alpha\left(2T_Ч-T_С-T_К\right),$$
$$T_К'=-\alpha\left(2T_К-T_С-T_Ч\right),$$
$$T_С'=-\alpha\left(2T_С-T_Ч-T_К\right)/2.$$

Если считать, что 1 минута – это малое время в сравнении с характерными временами установления теплового равновесия, то величина $\alpha$ примерно равна $1/84\ мин^{-1}$ (на самом деле она чуть больше). В процессе решения можно будет уточнить значение этой величины. Введем такие обозначения: $X=T_Ч+T_К$, $Y=T_Ч-T_К$. Тогда

$$X+2T_С=252\,°C,$$
$$X'=-2\alpha\left(X-126\,°C\right),$$
$$Y'=-3\alpha\left(Y\right).$$

Начальные значения равны $X_0=132\,°C$, $Y_0=52\,°C$, поэтому текущие значения (в градусах Цельсия) будут

$$X_t = 126° + 6° \cdot e^{-t \cdot 2\alpha},$$
$$Y_t = 52° \cdot e^{-t \cdot 3\alpha}.$$

Через 1 минуту будет

$$\frac{X_1 + Y_1}{2} = 63° + 3° \cdot e^{-1\,\text{мин} \cdot 2\alpha} + 26° \cdot e^{-1\,\text{мин} \cdot 3\alpha} = 91°.$$

Обозначим величину $e^{-1\,\text{мин}\cdot\alpha}$ символом $Z$. Тогда уравнение для нахождения величины $\alpha$ будет таким:

$$28 = 26 \cdot Z^3 + 3 \cdot Z^2.$$

Численное решение этого уравнения дает $Z = 0{,}9879559$, что соответствует значению $\alpha$, равному $1/82{,}5272$ мин$^{-1}$. Действительно, получилась величина немного большая, чем грубая предварительная оценка $1/84$ мин$^{-1}$.

По условию задачи нужно найти время, за которое компот нагреется до температуры 60 °C, т.е. нужно решить уравнение

$$\frac{X - Y}{2} = 63° + 3° \cdot e^{-t \cdot 2\alpha} - 26° \cdot e^{-t \cdot 3\alpha} = 60°.$$

Получается

$$t = 52{,}63 \text{ мин}.$$

*А.Зильберман*

**Ф2695.** *Тепловые свойства разных веществ в конденсированном состоянии имеют одинаковые характеристики. Например, для большинства простых веществ при средних температурах выполняется соотношение, которое называют законом Дюлонга и Пти. Согласно этому закону молярная теплоемкость твердых веществ весьма близка к величине $3R \approx 25$ Дж/(моль · К). При низких температурах наблюдается отступление от этого закона. Та температура, при которой для данного вещества его молярная теплоемкость становится примерно на 10% меньше величины $3R$, называется температурой Дебая $T_Д$. При температурах, значительно меньших температуры Дебая, молярные теплоемкости простых веществ в твердом состоянии зависят от температуры одинаковым образом: $C_{мол} = A(T/T_Д)^3$, где $A$ – одинакова для всех простых веществ величина.*

*В пенопластовую емкость с нулевой теплопроводностью и нулевой теплоемкостью стенок поместили 635 г меди при температуре 3 К и 627 г висмута при температуре 10 К. Какая температура установится со временем в этой емкости? Температура Дебая для меди $T_{Дм} = 315$ К, для висмута $T_{Дв} = 120$ К. Молярная масса меди $M_м = 63{,}5$ г/моль, висмута $M_в = 209$ г/моль.*

При абсолютных температурах, которые во много раз меньше температуры Дебая для соответствующего вещества: $T \ll T_Д$, молярные теплоемкости этого конкретного вещества, измеренные и при постоянном объеме, и при постоянном давлении, отличаются друг от друга очень мало и зависят от температуры по одинаковому закону:

$$C_p \approx C_V = C_{мол} = A\left(T/T_Д\right)^3.$$

А внутренняя энергия одного моля вещества, соответствующая предположению, что при 0К она равна нулю, равна

$$U = TA\left(T/T_Д\right)^3/4.$$

Обозначим параметры, соответствующие разным веществам (меди и висмуту) в момент помещения их в теплоизолированную емкость, индексами «1» и «2». Уравнение теплового баланса будет выглядеть так:

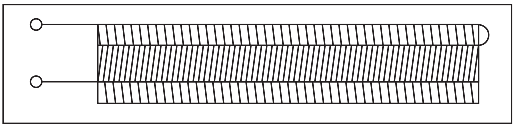
$$T_1\left(m_1/M_1\right)A\left(T_1/T_{Д1}\right)^3/4 + T_2\left(m_1/M_1\right)A\left(T_2/T_{Д2}\right)^3/4 = AT\left(\left(m_1/M_1\right)\left(T/T_{Д1}\right)^3 + \left(m_2/M_2\right)\left(T/T_{Д2}\right)^3\right)/4,$$

откуда находим установившуюся температуру $T$:

$$T \approx 9{,}59 \text{ К}.$$

*В.Дебаев*

**Ф2696.** *На два непроводящих и немагнитных цилиндра одинаковой длины $l$, имеющих разные диаметры $D_1$ и $D_2$, много меньшие длины $l$, намотаны виток к вит-*



*ку в один слой по N витков тонкой сверхпроводящей проволоки с очень тонким слоем изоляции снаружи. Меньшую из получившихся двух катушек соосно вставили внутрь катушки с бóльшим диаметром. Катушки соединены так, как показано на рисунке. При таком соединении по виткам двух катушек течет одинаковый ток и магнитное поле внутри катушки меньшего диаметра равно нулю. К выводам системы катушек подключили заряженный конденсатор. Емкость конденсатора C, а на его обкладках находились электрические заряды +Q и −Q. Какой максимальный по величине ток будет протекать по виткам* катушек?

В тот момент времени, когда значение тока в витках катушек принимает максимальное значение, вся энергия, запасенная до подключения к катушкам в конденсаторе и равная $Q^2/(2C)$, превратилась в энергию магнитного поля в пространстве возле катушек, равную $LI^2/2$, где $L$ – индуктивность системы катушек. Поэтому максимальное значение силы тока будет таким:

$$I_{\max} = Q/(LC)^{0,5}.$$

Магнитное поле в пространстве между цилиндрами при протекании тока $I$ по виткам катушек характеризуется величиной вектора индукции магнитного поля, которую можно найти с помощью теоремы о циркуляции. Индукция равна

$$B = \mu_0 IN/l,$$

где $\mu_0$ – магнитная постоянная. Будем считать, что $D_1 > D_2$. Суммарный магнитный поток, пересекающий все витки двух катушек, равен (с учетом того, что поле внутри катушки меньшего диаметра равно нулю):

$$\Phi = BN\pi\left(D_1^2 - D_2^2\right)/4 =$$

$$= (\mu_0 IN/l)N\pi\left(D_1^2 - D_2^2\right)/4 = IL.$$

Следовательно,

$$L = \left(\mu_0 N^2\pi\left(D_1^2 - D_2^2\right)\right)/(4l).$$

Отсюда находим максимальное значение силы тока:

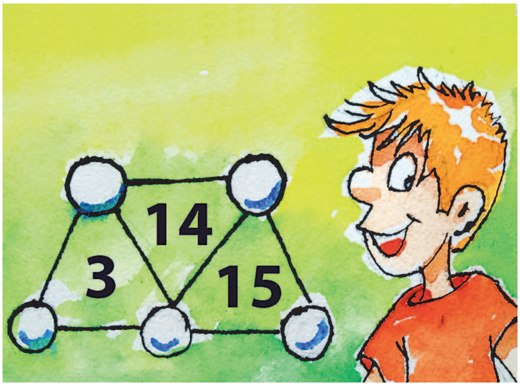
$$I_{\max} = Q/(LC)^{0,5} =$$

$$= 2Ql/\left(C\mu_0 N^2\pi\left(D_1^2 - D_2^2\right)\right)^{0,5}.$$

*С.Дмитриев*

# Задачи

**1.** Ваня расставил в кружках различные цифры, а внутри каждого треугольника записал либо сумму, либо произведение цифр в его вершинах.

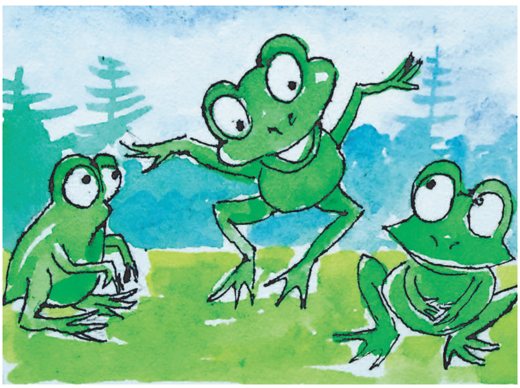



Потом он стер цифры в кружочках. Впишите в кружочки различные цифры так, чтобы условие выполнялось.

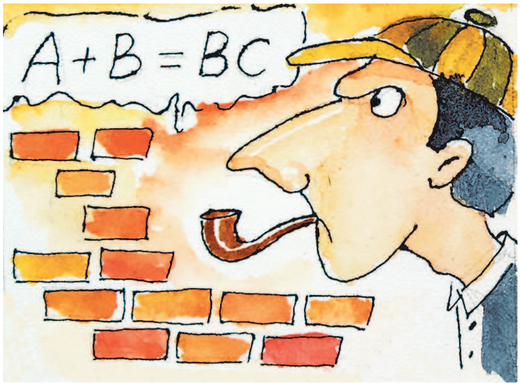
*В.Клепцын*

**2.** Три лягушки на болоте прыгнули по очереди. Каждая приземлилась точно в середину отрезка между двумя другими. Длина прыжка второй лягушки 60 см. Найдите длину прыжка третьей лягушки.

*А.Шаповалов*



**3.** Цифры от 0 до 9 зашифрованы буквами A, B, C, D, E, F, G, H, I, J в каком-то порядке. За один вопрос можно узнать зашифрованную запись суммы




нескольких различных букв. Например, если спросить «A + B = ?», то в случае, когда A = 9, B = 1, C = 0, ответом будет «A + B = BC». Как можно за пять таких вопросов определить, какие буквы каким цифрам соответствуют?

*А.Заславский*

**4.** В четырехугольнике $ABCD$ известно, что $AB = BC = CD$, $\angle A = 70°$ и $\angle B = 100°$. Чему могут быть равны углы $C$ и $D$?

*М.Волчкевич*

*Иллюстрации Д.Гришуковой*

---

Эти задачи предлагались на Математическом празднике.

# Осторожно, проценты!

С.ДВОРЯНИНОВ

Дело было в 8 классе. На уроке математики. Наш учитель Иван Петрович дал нам такую задачу:

*В сосуд, содержащий 5 литров 27-процентного водного раствора вещества, добавили 4 литра воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?*

А потом добавил: «Эта задача на оценку. Кто решит, получит пятерку в журнал. Напишите на листочке свою фамилию и ответ. Листочки сдайте. Урок у нас последний, и потому сразу можете идти домой. Только не спешите!»

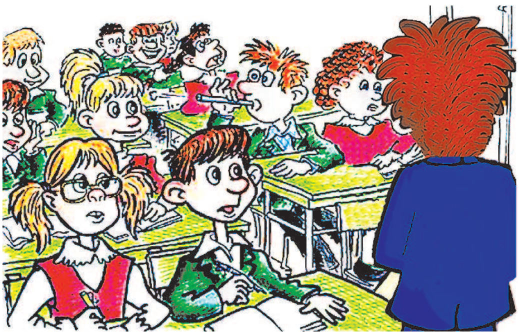
Конечно, получить пятерку в журнал заманчиво, тем более похожие задачи мы решали. Так что довольно быстро на столе у Ивана Петровича выросла кипа листочков. Все отправились по домам, только Толик Втулкин остался в классе…

А на следующий день случилось самое интересное. «Вас в классе 19 человек, ответов я получил только18, – начал Иван Петрович. Как и обещал, ставлю пятерки… Но только одному – Толе Втулкину».

Как так? Класс загудел. Задача-то легкая, по сути в одно действие:

$$\frac{0,27\cdot 5}{5+4}=\frac{1,35}{9}=0,15,$$

и потому ответ: 15%.



– Что ж, в таком случае дадим слово Толику, – сказал Иван Петрович.

И вот что мы услышали.

– В нашем учебнике химии для 8 класса на странице 125 написано:

*Отношение массы растворенного вещества к общей массе раствора называют массовой долей растворенного вещества.*

Там же даны два примера, и в обоих говорится именно о массе. Далее на странице 126 читаем про объемную долю:

*Аналогично массовой доле определяется и объемная доля газообразного вещества в газовой смеси.*

Единицы объема (литры и кубические метры) использованы в учебнике в двух примерах при описании *газовых* смесей. У нас же в задаче речь идет о 27-процентном *водном* растворе, например соли или сахара. Количество соли и сахара в точных расчетах никогда не указывают в объемных единицах. Это только в поваренных книгах читаем: *возьмите ложку соли*. А математика – наука точная!

Как можно получить такой раствор – известно. Берем 27 г соли и 73 г воды, или 27 кг соли и 73 кг воды. А можно взять 2,7 кг соли и 7,3 кг воды. По условию задачи такого раствора имеется 5 литров. Поскольку мы не знаем плотность раствора, то не знаем его массу и не можем узнать массу растворенной в нем соли.

А какой смысл имеет используемое в приведенном решении равенство 5 + 4 = 9? Да никакого! Объем смеси не равен сумме объемов смешиваемых растворов. Это все равно, что складывать 5 яблок и 4 груши.

Следовательно, задача сформулирована некорректно, решить ее невозможно, да и решать не стоит, – заключил Толик.

– Вот именно за такое понимание я и поставил пятерку Толику, – торжественно произнес Иван Петрович. – Да и по химии ему надо пять поставить. В рассказе А.П.Чехова есть строчка: «Кто писал не знаю, а я дурак читаю». Так что, ребята, будьте бдительны. Не решайте дефектные задачи!

*... пусты и полны заблуждений те науки, которые не порождены опытом – отцом всякой достоверности...*

Леонардо да Винчи

*Природа дала нам глаза, чтобы мы узнали ее творения. Но она наделила нас также мозгом, способным понять эти творения.*

Галилео Галилей

*... в противность ряду опытов не следует измышлять на авось каких-нибудь бреден.*

Исаак Ньютон

*Время от времени следует производить самые дикие эксперименты. Из них почти никогда ничего не выходит, но если они удаются, то результат бывает потрясающим.*

Эразм Дарвин

*Чем проще материалы иллюстративного опыта и чем более они привычны учащемуся, тем глубже он поймет идею, которую должен иллюстрировать этот опыт.*

Джеймс Клерк Максвелл

*Если последовательно опускать даже нетренированную руку в два сосуда с водой, то, как мы нашли на опыте, можно обнаружить разность температур меньше одной четверти градуса Цельсия.*

Уильям Томсон (лорд Кельвин)

*... опыт – единственный источник истины, только опыт может научить нас чему-либо новому...*

Анри Пуанкаре

*Без экспериментаторов теоретики скисают.*

Лев Ландау

# А так ли хорошо знакомы вам ОПЫТЫ и НАБЛЮДЕНИЯ?

Впереди лето. Конечно, каникулы – прекрасная возможность и отдохнуть, и развлечься на даче или в лагере, дома или на природе. Но там же вполне реально на практике, «вживую», убедиться в действии и всемогуществе физических законов – ведь они проросли из опытов и наблюдений. И необязательно для этого располагать сложным оборудованием, зачастую хватает лишь внимательного взгляда, простейших подручных средств, смекалки и элементарных расчетов.

Надеемся, вы не проведете ближайшие месяцы в праздности, а дадите волю любознательности и сообразительности, поработаете и руками, и головой, найдете ответы на накопившиеся вопросы и озадачитесь новыми в преддверии будущих учебных лет. И наш журнал – вам в помощь. Предлагаем «для разминки» горстку летних упражнений.

### Вопросы и задачи

**1.** При движении Земли по эллиптической орбите скорость ее все время меняется. Смогли бы вы обнаружить соответствующее ускорение, располагая, например, уровнем с жидкостью?

**2.** Разложите на столе носовой платок и поставьте на него горлышком вниз пустую стеклянную бутылку. Как вытянуть платок из-под бутылки, не прикасаясь к ней?

**3.** Вы встретили вечером двух ребят, которые катаются с одинаковой скоростью на велосипедах с разными по диаметру колесами. У кого из них ярче горит фонарик, работающий от генератора на ободе колеса?

**4.** Как бросить на пол с высоты, например, 1 метр картонную (плоскую) спичку, чтобы она упала на ребро?

**5.** Удастся ли вам поставить не разбитое яйцо вертикально на ровной поверхности (т.е. решить задачу о колумбовом яйце)?

**6.** Переверните полную бутылку горлышком вниз. Почему вода выливается с бульканьем?

**7.** Разложите зажженные спички по металлической, каменной и деревянной поверхностям. Какая из спичек будет гореть дольше, а какая быстрее потухнет?

**8.** Жарко, а ваш арбуз – теплый. Оказывается, если его опустить в нитяной сетке в очень горячую воду (но не больше, чем на полминуты!), то, разрезав его через 5–10 минут, вы обнаружите чуть ли не замороженную сердцевину. Как это объяснить?

**9.** Почему роса вечером бывает теплее, чем утром?

**10.** Как вы думаете, действовал бы имеющийся у вас термометр, если бы жидкость в нем имела тот же коэффициент теплового расширения, что и стекло?

**11.** Обратите внимание на то, что летом полная Луна видна на небе меньше времени, чем зимой. Отчего так?

**12.** Как меняются мощность и яркость лампы накаливания со временем?

**13.** По нити лампы и по подводящим проводам идет один и тот же ток. Почему же нить раскаляется, а провода на ощупь остаются холодными?

**14.** Если у вас рассыпались по полу мелкие гвозди, то как проще всего собрать их вместе и всыпать (именно всыпать!) в коробку?

### Любопытно, что...

... в основе закона Архимеда лежал опытный факт: при погружении тела в воду оно становится легче. Поэтому наблюдения ученого в ванне порой называют первым в истории физическим экспериментом, а его закон – первым физическим законом.

... проведя опыты с маятниками равной длины, Галилей пришел к замечательному выводу о равенстве скоростей свободного падения тел независимо от вида вещества.

... более чем три века спустя участник экспедиции «Аполлон-15» астронавт Дейв Скотт, находясь на поверхности Луны, выпустил из рук молоток и перышко, и те прилунились одновременно – в полном согласии с законом Галилея.

...научный соперник Ньютона, неутомимый Роберт Гук создал множество приборов для проведения экспериментов в Лондонском Королевском обществе. Сконструировав хронометр со спиральной пружиной и исследуя возникающие в ней деформации, Гук установил закон упругости для твердых тел.

... фактически первое экспериментальное свидетельство вращения Земли вокруг своей оси получил в 1851 году французский ученый Леон Фуко. Небольшой тяжелый шар, подвешенный на длинной проволоке, во время колебаний медленно поворачивался относительно земного наблюдателя. Поскольку плоскость колебаний маятника сохраняет свое положение в инерциальном пространстве, это доказывает, что поворачивается Земля.

... опыт 1927 года американских физиков Дэвиссона и Джермера по бомбардировке электронами кристалла никеля блестяще подтвердил гипотезу де Бройля о связи между волнами и частицами – корпускулярно-волновом дуализме.

... молодой немецкий экспериментатор Рудольф Мёссбауэр, исследуя поглощение и рассеяние гамма-квантов с помощью патефона с заводной ручкой (!), открыл в 1958 году эффект, удостоенный Нобелевской премии.

... получить графен – двумерный материал, состоящий из углерода одноатомной толщины, – будущим нобелевским лауреатам, выпускникам Физтеха Андрею Гейму и Константину Новоселову удалось буквально «на коленке», используя простейшую технологию с обычной липкой лентой.

### Что читать в «Кванте» об опытах и наблюдениях
*(публикации последних лет)*

1. «Наполеон-водолаз и Фейнман-экспериментатор» – 2017, №4, с. 42;

2. «Наблюдая за струей воды...» – 2017, №8, с. 30;

3. «Опыт по Галилею» – 2019, №4, с. 26;

4. «Наблюдения над туманом» – 2020, №1, с. 62;

5. «Загадка плоского стекла» – 2021, №9, с. 43;

6. «Три истории про воду» – 2022, №2, с. 40;

7. «Наблюдение двупреломления в кристалле кальцита» – 2022, №3, с. 33.

*Материал подготовил А. Леонович*

# Как переформулировать задачу?

Ю.БЛИНКОВ

*Консерватория. Два студента разговаривают:*

*– Завтра сдавать курсовую по композиции, а у меня ничего не готово.*

*– А ты сыграй сочинение своего преподавателя, только наоборот, задом наперед.*

*– Да пробовал уже, Моцарт получается...*

В СТАТЬЕ БУДЕТ РАССМОТРЕНА конструкция, связанная с ортоцентром треугольника. Используя классические факты, можно заметить эквивалентность двух вроде бы изначально не похожих друг на друга задач, переформулировать уже известную олимпиадную задачу или попытаться придумать свою. Об этом и пойдет речь.

Итак, вспомним следующий факт.

**Факт 1.** *Высоты треугольника являются биссектрисами его ортотреугольника.*

Напомним, что ортотреугольник – это треугольник с вершинами в основаниях высот данного треугольника.

Ортоцентр остроугольного треугольника является центром вписанной окружности ортотреугольника, а вершины треугольника – центрами его вневписанных окружностей.

**Упражнение 1.** Докажите факт 1.

*Указание* (рис. 1). Можно использовать, например, то, что точки $A$, $A_1$, $B$ и $B_1$ (и аналогичные четверки точек) лежат на одной окружности. Из этого следует, что угол $B_1A_1C$ равен углу $BAC$ (и аналогичные равенства углов).

Как же можно использовать эти факты?

Пусть в какой-то задаче речь идет о высотах треугольника. Тогда задачу можно переформулировать, заменив треугольник на ортотреугольник, а высоты – на биссектрисы. И наоборот, если в задаче рассматриваются, например, биссектрисы внутренних или внешних углов и точки их пересечения (центры вписанных или вневписанных окружностей), то можно заменить, например, центры вневписанных окружностей на вершины треугольника, его биссектрисы – на высоты полученного треугольника и, соответственно, инцентр исходного – на ортоцентр полученного.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20220503

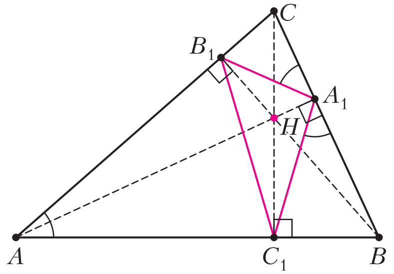


*Рис. 1*

Чем может быть привлекательна такая переформулировка?

Во-первых, это приводит к другим способам доказательств известных утверждений. Рассмотрим классические примеры.

**Пример 1.** Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

**Доказательство** (см. рис. 1). Для любого треугольника рассмотрим треугольник, образованный основаниями его высот (ортотреугольник). Тогда высоты будут являться биссектрисами ортотреугольника, которые, как известно, пересекаются в одной точке.

Может возникнуть вопрос: а как быть с тупоугольным треугольником? На самом деле, проблем никаких нет: прямые, содержащие две высоты, станут биссектрисами внешних углов ортотреугольника, и пересечением будет являться центр вневписанной окружности ортотреугольника (вершина исходного треугольника).

**Пример 2** (окружность девяти точек). Середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих вершину с ортоцентром, лежат на одной окружности.

**Доказательство** (рис. 2). Пусть $A_1B_1C_1$ – ортотреугольник треугольника $ABC$, $M$ – середина $AB$, $K$ – середина $CH$, где $H$ – ортоцентр. Достаточно показать, что точки $M$ и $K$ лежат на окружности, описанной

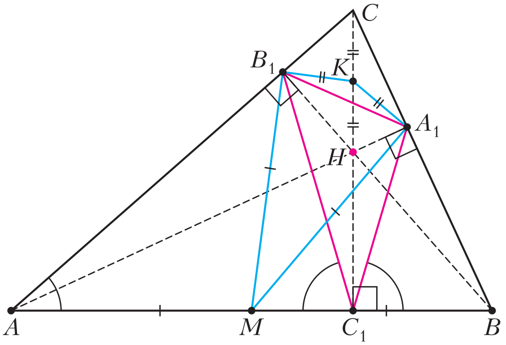



*Рис. 2*

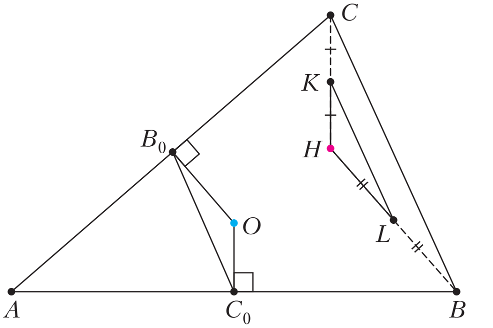



*Рис. 4*

около треугольника $A_1B_1C_1$. Заметим, что обе эти точки равноудалены от $A_1$ и $B_1$ и лежат на внешней и, соответственно, внутренней биссектрисах угла $A_1C_1B_1$. Осталось заметить, что серединный перпендикуляр к стороне треугольника и биссектриса противолежащего угла (внутреннего или внешнего) пересекаются на описанной окружности треугольника.

Во-вторых, мы можем переформулировать уже известные задачи и получать «новые» и, наоборот, решения незнакомых задач сводить к уже известным.

Для этого потребуется вспомнить еще некоторые факты, связанные с ортоцентром треугольника.

**Факт 2.** *Пусть $AA_1$ и $BB_1$ – высоты остроугольного треугольника $ABC$, $O$ – центр описанной окружности. Тогда прямые $CO$ и $A_1B_1$ перпендикулярны.*

**Упражнение 2.** Докажите факт 2.

*Указание* (рис. 3). Воспользуйтесь тем, что угол $B_1A_1C$ равен углу $BAC$ и тем, что угол $BCO$ дополняет угол $BAC$ до $90°$.

**Факт 3.** *Расстояние от вершины треугольника до его ортоцентра в два раза больше, чем от центра описанной окружности до противолежащей стороны.*

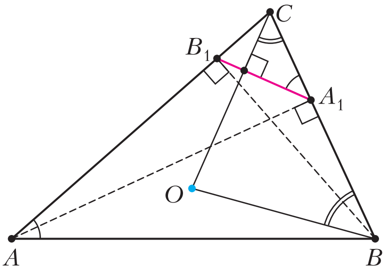



*Рис. 3*

**Упражнение 3.** Докажите факт 3.

*Указание* (рис. 4). Пусть $O$ – центр описанной окружности, $H$ – ортоцентр, $C_0$, $B_0$, $K$ и $L$ – середины $AB$, $AC$, $CH$ и $BH$ соответственно. Докажите равенство треугольников $C_0OB_0$ и $KHL$. Возможны и другие способы доказательства.

**Факт 4.** *Пусть высоты треугольника $ABC$ пересекаются в точке $H$. Тогда радиусы окружностей, описанных около треугольников $ABH$, $BCH$, $ACH$ и $ABC$, равны.*

**Упражнение 4.** Докажите факт 4.

*Указание.* Используйте симметрию относительно прямой $AC$ или следствие из теоремы синусов.

Отметим, что центры окружностей, описанных около треугольников $ABC$ и $ACH$, симметричны относительно прямой $AC$.

Теперь рассмотрим несколько задач. Для начала – классическая задача.

**Задача 1.** *Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров $I_A$, $I_B$, $I_C$ вневписанных окружностей треугольника $ABC$ на его стороны, пересекаются в одной точке* (*рис.* 5,*а*).

Отметим, что задача допускает различные способы реше-

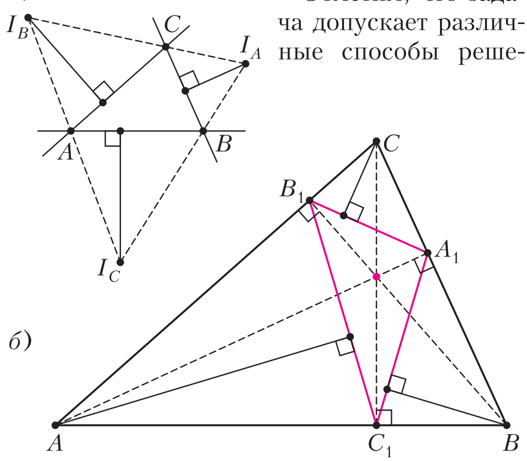



*Рис. 5*

ния, в том числе, использование теоремы Карно. Но проще всего свести ее к уже известной.

В качестве треугольника, указанного в задаче, рассмотрим ортотреугольник треугольника $ABC$. Тогда вершины треугольника $ABC$ – центры вневписанных окружностей и задача будет выглядеть так (рис. 5,*б*):

*Пусть $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ – высоты остроугольного треугольника $ABC$. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из $B$ на $A_1C_1$, из $A$ на $B_1C_1$ и из $C$ на $A_1B_1$, пересекаются в одной точке.*

**Доказательство.** Согласно факту 2, указанные перпендикуляры пересекаются в центре описанной окружности треугольника $ABC$.

Теперь – несколько олимпиадных задач.

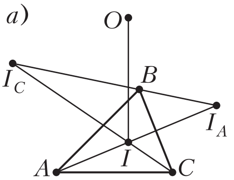
**Задача 2** (Московская устная олимпиада по геометрии, 2012). *В треугольнике $ABC$ точка $I$ – центр вписанной окружности, точки $I_A$, $I_C$ – центры вневписанных окружностей, касающихся сторон $BC$ и $AB$ соответственно. Точка $O$ – центр описанной окружности треугольника $II_AI_C$. Докажите, что $OI \perp AC$ (рис. 6,а).*

**Доказательство.** В качестве треугольника, указанного в задаче, рассмотрим ортотреугольник треугольника $ABC$. Тогда задача переформулируется следующим образом:

*Высоты $AA_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $H$, $O_1$ – центр описанной окружности треугольника $AHC$. Докажите, что $O_1H \perp A_1C_1$.*

Этот факт нам уже знаком и является классической задачей (рис. 6,*б*). Действительно, если $O$ – центр окружности, описанной около треугольника $ABC$, то $O$ и $O_1$ симметричны относительно $AC$ (см. факт 4). Учитывая факт 3, получим, что $BOO_1H$ – параллелограмм, откуда, используя факт 2, и можно получить утверждение задачи.

а)




б)

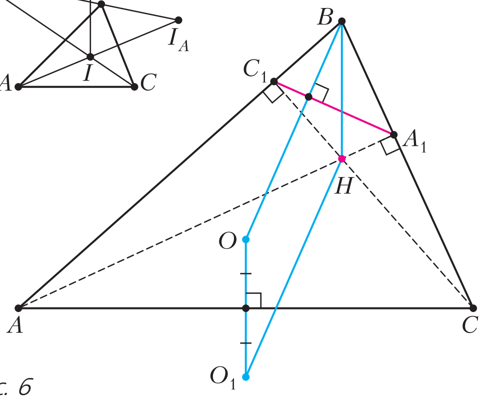



Рис. 6

**Упражнение 5.** Попробуйте решить эту задачу в первоначальной формулировке.

Теперь чуть более сложная задача.

**Задача 3** (Московская устная олимпиада по геометрии, 2016). *Точки $I_A$, $I_B$, $I_C$ – центры вневписанных окружностей треугольника $ABC$, касающихся сторон $BC$, $AC$ и $AB$ соответственно. Перпендикуляр, опущенный из $I_A$ на $AC$, пересекает перпендикуляр, опущенный из $I_B$ на $BC$, в точке $X_C$. Аналогично определяются точки $X_A$ и $X_B$. Докажите, что прямые $I_AX_A$, $I_BX_B$ и $I_CX_C$ пересекаются в одной точке.*

**Доказательство.** Рассмотрим треугольник $I_AI_BI_C$ (рис. 7,*а*). Заметим, что перпендику-

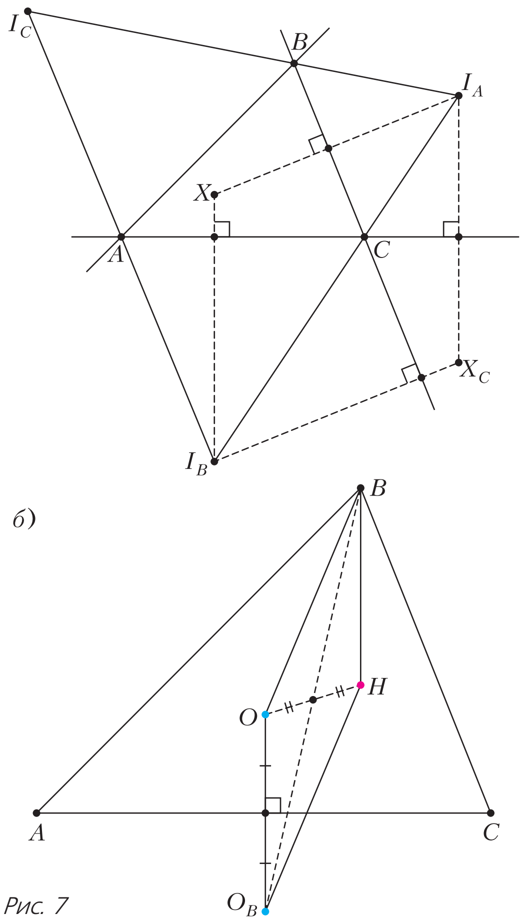



Рис. 7

ляры, опущенные из $I_A$ на $BC$, из $I_B$ на $AC$ и из $I_C$ на $AB$ пересекаются в одной точке $X$, равноудаленной от вершин треугольника $I_AI_BI_C$ (см. задачу 1). Кроме того, в силу параллельности перпендикуляров, $I_AXI_BX_C$ – параллелограмм. Следовательно, он является ромбом и точки $X$ и $X_C$ симметричны относительно $I_AI_B$. Переформулировав, получим следующую задачу:

*Пусть $O_B$ – точка, симметричная центру $O$ описанной окружности треугольника $ABC$ относительно прямой $AC$. Аналогично определяются точки $O_A$ и $O_C$. Докажите, что прямые $AO_A$, $BO_B$ и $CO_C$ пересекаются в одной точке.*

Заметим, что это утверждение мы фактически доказали при решении задачи 2. Действительно, если $H$ – ортоцентр треугольника, то точка $O_B$ – центр окружности, описанной около треугольника $ACH$, и $BOO_BH$ – параллелограмм (рис. 7,*б*). Тогда его диагональ $BO_B$ проходит через середину отрезка $OH$. Рассуждая аналогично, получим, что прямые $AO_A$ и $CO_C$ также проходят через эту точку.

Отметим, что эта точка является центром окружности девяти точек.

Разумеется, идея подобных переформулировок не нова. Например, в задачнике [1] можно встретить такую пару задач-близнецов.

**Задача 4.** *а) В треугольнике $ABC$ проведены высоты $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$. Прямые $AB$ и $A_1B_1$, $BC$ и $B_1C_1$, $CA$ и $C_1A_1$ пересекаются в точках $C_0$, $A_0$ и $B_0$. Докажите, что точки $C_0$, $A_0$ и $B_0$ лежат на радикальной оси окружности девяти точек и описанной окружности.*

*б) Биссектрисы внешних углов треугольника $ABC$ пересекают продолжения противоположных сторон в точках $C_0$, $A_0$ и $B_0$. Докажите, что точки $C_0$, $A_0$ и $B_0$ лежат на одной прямой, причем эта прямая перпендикулярна прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей треугольника $ABC$.*

### Упражнения

**6.** Попробуйте свести пункт б) к пункту а).

**7.** Докажите пункт а).

*Указание.* Используйте то, что точки $A$, $A_1$, $B$ и $B_1$ лежат на одной окружности. Рассмотрите степень точки $C_0$ относительно этой окружности, окружности девяти точек и описанной окружности треугольника.

Рассмотрим еще один пример задач-близнецов. Первая взята из задач Всероссийской олимпиады по математике 2002 года. Вторая же предлагалась на олимпиадных сборах и известна, судя по всему, очень давно.

**Задача 5.** *а) Пусть $A'$ – точка касания вневписанной окружности треугольника $ABC$ со стороной $BC$. Прямая $a$ проходит через точку $A'$ и параллельна биссектрисе внутреннего угла $A$. Аналогично строятся прямые $b$ и $c$. Докажите, что прямые $a$, $b$ и $c$ пересекаются в одной точке.*

*б) Пусть $A_1B_1C_1$ – ортотреугольник треугольника $ABC$, $A_2$, $B_2$, $C_2$ – проекции вершин $A$, $B$, $C$ на прямые $B_1C_1$, $C_1A_1$, $A_1B_1$ соответственно. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек $A_2$, $B_2$ и $C_2$ на прямые $BC$, $CA$ и $AB$ соответственно, пересекаются в одной точке.*

### Упражнения

**8.** Попробуйте свести пункт б) к пункту а).

**9.** Докажите пункт а).

*Указание.* Используйте то, что точки касания вписанной и вневписанной окружностей симметричны относительно середины стороны и гомотетию исходного и срединного треугольников.

Теперь, когда мы потренировались переформулировать задачи, можно решить что-то сложное.

**Задача 6** (Всероссийская олимпиада по математике, 2005, региональный этап). *В треугольнике $ABC$ ($AB < BC$) точка $I$ – центр вписанной окружности, $M$ – середина стороны $AC$, $N$ – середина дуги $ABC$ описанной окружности. Докажите, что $\angle IMA = \angle INB$ (рис. 8,а).*

Классическое решение этой задачи использует степень точки и лемму о трезубце, но додуматься до него не так-то просто.

**Упражнение 10.** Попробуйте решить эту задачу, используя факты, указанные выше.

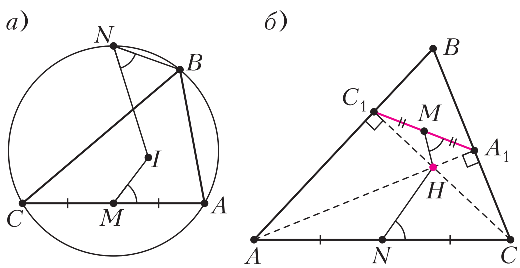



Рис. 8

Мы же попробуем ее переформулировать (аналогичные рассуждения приводятся в статье [2]).

В качестве треугольника, указанного в задаче, возьмем ортотреугольник $A_1B_1C_1$ треугольника $ABC$, а в качестве $I$ – ортоцентр треугольника $ABC$. Тогда $M$ – середина стороны $A_1C_1$ ортотреугольника. А чем же является точка $N$? Вспомним, что описанная окружность ортотреугольника является окружностью девяти точек треугольника $ABC$. Середина стороны $AC$ на ней лежит и является пересечением серединного перпендикуляра к $A_1C_1$ и биссектрисы внешнего угла $B_1$ (см. доказательство примера 2). Следовательно, в качестве точки $N$ можно рассмотреть середину $AC$. Учитывая, что точка $B_1$ также лежит на $AC$, задача переформулируется следующим образом:

*Высоты $AA_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $H$. Пусть $N$ и $M$ – середины $AC$ и $A_1C_1$ соответственно. Докажите, что $\angle HMA_1 = \angle HNC$.*

Но эта задача нам знакома, ее решение следует из подобия треугольников $HMA_1$ и $HNC$, которое, в свою очередь, легко получить из подобия треугольников $C_1HA_1$ и $AHC$.

**Упражнение 11.** Докажите это подобие.

Попробуем теперь придумать задачу сами. Возьмем, например, такой факт.

**Факт 5.** *Пусть $B_1$ и $A_1$ – точки касания вневписанных окружностей треугольника $ABC$ со сторонами $AC$ и $BC$ соответственно. Тогда $BA_1 = AB_1$.*

**Упражнение 12.** Докажите факт 5.

*Указание* (рис. 9,*а*). Используйте равенство отрезков касательных.

Попробуем переформулировать?

Обозначим треугольник, указанный в условии, через $A_1B_1C_1$, и пусть он является ортотреугольником треугольника $ABC$. Тогда указанные точки касания – основания перпендикуляров, опущенных из вершин $A$ и $B$ на соответствующие стороны ортотреугольника. Обозначив точки касания через $A_2$ и $B_2$, получим $A_1B_2 = B_1A_2$ (рис. 9,*б*).

Задача не кажется совсем известной, но узнать можно... Попробуем еще чуть-чуть переформулировать. Из задачи 1 нам известно, что перпендикуляры из вершин треугольника к соответствующим сторонам ортотреугольника пересекаются в одной точке (центре $O$ описанной окружности треугольника).

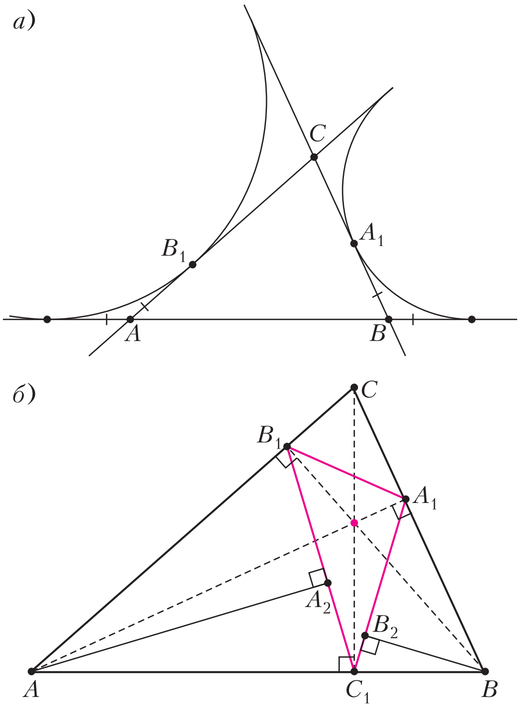


Рис. 9

Используя эти соображения, получим следующую «новую» задачу:

**Задача 7.** *В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AA'$ и $BB'$. Точка $O$ – центр окружности, описанной около треугольника $ABC$. Докажите, что расстояние от точки $A'$ до прямой $BO$ равно расстоянию от точки $B'$ до прямой $AO$.*

В действительности эта задача не нова: она предлагалась на Московской математической олимпиаде в 2019 году. Ну что ж, мы немного опоздали.

Попробуем еще?

### Упражнения для самостоятельного решения

Переформулируйте следующие утверждения:

а) Факт 4.

б) Биссектрисы двух внутренних и одного внешнего угла неравнобедренного треугольника пересекают прямые, содержащие противоположные стороны, в трех точках, лежащих на одной прямой.

в) Описанная окружность треугольника делит пополам отрезок, соединяющий центры вписанной и вневписанной окружностей этого треугольника.

г) Описанная окружность треугольника $ABC$ является окружностью девяти точек для треугольника, образованного центрами вневписанных окружностей треугольника $ABC$.

д) В треугольнике $ABC$ проведены высоты $BB_1$ и $CC_1$. Докажите, что если $\angle A = 45°$, то $B_1C_1$ – диаметр окружности девяти точек треугольника $ABC$.

е) С помощью циркуля и линейки восстановите остроугольный треугольник по основаниям двух его высот и прямой, содержащей третью высоту.

ж) В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $BD$ и $CE$. Из вершин $B$ и $C$ на прямую $ED$ опущены перпендикуляры $BF$ и $CG$. Докажите, что $EF = DG$.

з) (Всероссийская олимпиада по геометрии, 2009, заочный тур). В остроугольном треугольнике $ABC$ точка $H$ – ортоцентр, $O$ – центр описанной окружности, $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ – высоты. Точка $C_2$ симметрична $C$ относительно $A_1B_1$. Докажите, что $H$, $O$, $C_1$ и $C_2$ лежат на одной окружности.

### Литература

1. *В.В.Прасолов*. Задачи по планиметрии. – М: МЦНМО, 2007.

2. *Д.Швецов.* Подобие с медианами. – «Квант», 2021, №7.

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

# Как по рельсам скользя

*А.ВЛАСОВ*

Данная статья посвящена большой группе задач электромеханики, в которых основными элементами системы являются рельсы (пара параллельных проводников), проводящая перемычка (прямой массивный провод произвольного сечения) и магнитное поле. На этой основной системе можно построить физическую задачу на любой вкус: простенькую и сложную, статическую и динамическую. Варианты задач «множатся» различием линейных элементов ($R$, $C$, $L$), которые могут закорачивать рельсовую систему, различием функций изменения магнитного поля во времени и пространстве, вариантами начальных условий и, наконец, отсутствием или наличием трения в системе.

Это огромное многообразие иллюстрируют конкретные примеры задач. Каждая задача будет иметь свой «шифр», который поможет ориентироваться в большом многообразии условий. Способ шифровки будет понятен в ходе представления конкретных задач. Степень сложности задач будет отмечаться «звездочкой».

Теперь об алгоритме решения задач. Так как основная физическая система для всех задач будет оставаться постоянной (магнитное поле, контур, подвижная перемычка), то и алгоритм решения в основном будет единым. Основные этапы решения будут приводить нас к дифференциальному уравнению движения перемычки. И вот с этого момента могут возникнуть сложности с математикой решения этих уравнений. Но у нас будет всесильный помощник – компьютер. Он сможет показать нам общую картинку (график) движения, которая будет хорошим ориентиром для поиска аналитического решения (пусть даже приближенного). Картинки (графики) движений, которые будут встречаться в решениях задач, получены в системе Mathcad и мощность компьютера позволяла использовать простой алгоритм Эйлера (иногда с усреднением ускорения).

Можно надеяться, что статья будет полезной для школьника, увлеченного математикой и программированием (компьютерным моделированием). В математике решений будем использовать производную и интеграл. Однако всегда можно будет адаптировать наше продвинутое решение к более простому варианту, используя математику малых интервалов и простого суммирования.

При построении вариантов можно варьировать два основных элемента физической системы: изменять шунтирующий элемент (резистор, конденсатор, катушка индуктивности) и изменять характер магнитного поля

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20220504

(постоянное однородное, постоянное градиентное, однородное линейно возрастающее во времени, однородное синусоидальное). Эти два параметра позволяют смоделировать различные варианты задач. Дополнительно можно варьировать начальные условия.

**Задача 1 ($\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{v_0}$, $\boldsymbol{R}$)*.** *Два параллельных рельса расположены в горизонтальной плоскости и замкнуты на резистор (прямой провод) (рис. 1). На рельсах, перпендикулярно им, лежит перемычка. Система находится в вертикальном однородном магнитном поле. В начальный момент времени перемычке сообщается горизонтальная скорость $v_0$. Определите характер и параметры движения перемычки в процессе ее дальнейшего движения. Дополнительные данные: $B$ – индукция магнитного поля, $m$ – масса перемычки, $l$ – расстояние между рельсами, $R$ – сопротивление резистора. Сопротивление перемычки и рельсов равно нулю. Трения в системе нет.*

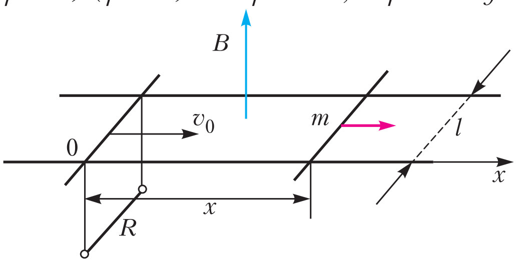


Рис. 1

**Решение.** Этот вариант задачи очень простой (встречается в школьных задачниках) и не требует помощи компьютера.

Школьный вариант решения задачи выглядит так. При ортогональном движении перемычки в магнитном поле в ней возникает ЭДС индукции

$$\varepsilon = -lBv.$$

В замкнутом контуре, который образован перемычкой, рельсами и проволокой резистора, возникает ток $i = \frac{lB}{R}v$. Наличие тока приводит к появлению силы Ампера $F_A = \frac{(lB)^2}{R}v$, которая определяет динамику движения перемычки. Записываем второй закон Ньютона для небольшого интервала времени (при этом учитываем направление силы Ампера):

$$m\Delta v = -\frac{(lB)^2}{R}v\Delta t = -\frac{(lB)^2}{R}\Delta s.$$

Это выражение можно просуммировать от начала движения перемычки до ее остановки и определить величину тормозного пути:

$$m(0 - v_0) = -\frac{(lB)^2}{R}s, \text{ откуда } s = \frac{mv_0R}{(lB)^2}.$$

Этим можно ограничить школьный вариант решения задачи. Но математика производной и интеграла позволяет получить более информативное решение. Магнитный поток контура равен

$$\Phi = xlB.$$

ЭДС, возникающая в подвижной перемычке, определяется производной от магнитного потока:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -lBx'.$$

Сила тока в контуре равна

$$i = \frac{lB}{R}x'.$$

Записываем динамическое уравнение (на перемычку действует тормозящая сила Ампера):

$$mx'' = -\frac{(lB)^2}{R}x', \quad x'' = -\frac{(lB)^2}{mR}x', \quad x'' = -\beta x',$$

$$\text{где } \beta = \frac{(lB)^2}{mR}.$$

Полученное динамическое уравнение совпадает с уравнением торможения тела в вязкой среде (сила сопротивления пропорциональна скорости). Уравнение легко интегрируется. Первый интеграл дает временно́е уравнение скорости:

$$\frac{dv}{dt} = -\beta v, \quad \frac{dv}{v} = -\beta dt, \quad v = v_0e^{-\beta t}.$$

Вторичное интегрирование определяет координатное уравнение движения (экспоненциальное затухание):

$$x = \frac{v_0}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right).$$

Координата остановки перемычки определена ее начальным импульсом:

$$x_{\max} = \frac{v_0}{\beta} = \frac{mv_0}{(lB)^2/R}.$$

Теперь посмотрим, как изменяется динамика системы при замене резистора на конденсатор.

**Задача 2 ($B$, $v_0$, $C$)*.** *Два параллельных проводящих рельса расположены в горизонтальной плоскости и замкнуты на конденсатор (рис. 2). На рельсах, ортогонально им, лежит перемычка. В области пространства $x > 0$ существует однородное магнитное поле, ортогональное плоскости системы. В начальный момент времени перемычке, которая находится в начале системы координат (вблизи границы магнитного поля), сообщается горизонтальная скорость $v_0$. Определите характер движения перемычки в магнитном поле. Дополнительные данные: $B$ – индукция магнитного поля, $m$ – масса перемычки, $l$ – расстояние между рельсами, $C$ – емкость конденсатора. Сопротивление перемычки и рельсов равно нулю. Трения в системе нет.*

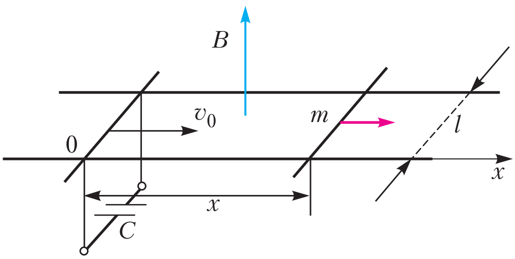


Рис. 2

**Решение.** Магнитный поток контура равен

$$\Phi = xlB.$$

ЭДС, возникающая в подвижной перемычке, равна

$$\varepsilon = -lBx'.$$

Уравнение контура имеет вид

$$-lBx' + \frac{q}{C} = 0.$$

В контуре возникает ток (дифференцируем по времени уравнение контура):

$$-lBx'' + \frac{i}{C} = 0,\ i = lBCx''.$$

Записываем динамическое уравнение:

$$mx'' = -(lB)^2Cx'',\ \left(m + (lB)^2C\right)x'' = 0,\ x'' = 0.$$

Очевидно, что перемычка (после переходного процесса) в магнитном поле будет двигаться с постоянной скоростью. Определим изменение скорости перемычки при входе в область магнитного поля. Уравнение динамики для переходного процесса можно записать в виде

$$m\Delta v = -i\Delta tBl = -\Delta qBl.$$

Интегрируем (суммируем) до равновесия:

$$m(v_0 - v) = qBl.$$

Находим накопленный заряд (из уравнения контура):

$$vBl = \frac{q}{C},\ q = vBlC.$$

Из последних двух равенств получаем

$$v = v_0\frac{1}{1 + C(Bl)^2},\ q = \frac{v_0BlC}{1 + C(Bl)^2}.$$

После такого несложного решения следует сделать важное замечание по условию задачи. В данном варианте перемычка перед «стартом» не находилась в магнитном поле, она была на его границе. При входе в магнитное поле перемычка мгновенно изменяет скорость. Эта «мгновенность» объясняется отсутствием сопротивления контура. Если же сообщать скорость перемычке в присутствии магнитного поля, то при дальнейшем движении скорость уже не меняется и решение задачи существенно упрощается.

В следующем варианте задачи «замыкающим» элементом является катушка индуктивности.

**Задача 3 ($B$, $v_0$, $L$).** *Параллельные проводящие неподвижные рельсы расположены в горизонтальной плоскости на расстоянии $l$ друг от друга (рис. 3). Однородное магнитное поле с индукцией $B$ направлено вертикально. К шинам подсоединена катушка индуктивностью $L$. По рельсам (шинам) может скользить без трения, оставаясь перпендикулярной рельсам и не*

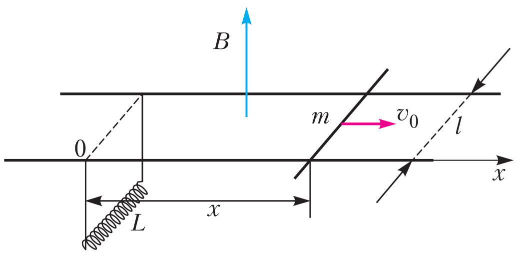


Рис. 3

*теряя с ними электрического контакта, проводящая перемычка массой $m$. В некоторый момент перемычке сообщают скорость $v_0$ вдоль шин. Опишите движение перемычки, найдите характерное время ее движения. На какое максимальное расстояние может удалиться перемычка от первоначального положения? Омическим сопротивлением катушки, шин и перемычки пренебречь.*

**Решение.** Магнитный поток контура равен

$$\Phi = xlB.$$

ЭДС, возникающая в перемычке, равна

$$\varepsilon = -lBx'.$$

Из уравнения контура определяем соотношение между током и координатой:

$$-lBx' + L\frac{di}{dt} = 0,\; i = \frac{lB}{L}x.$$

Динамическое уравнение

$$mx'' = -\frac{(lB)^2}{L}x, \text{ или } x'' = -\omega^2 x,$$

$$\text{где } \omega^2 = \frac{(lB)^2}{mL},$$

является уравнением гармонических колебаний. Период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\frac{\sqrt{mL}}{lB}.$$

Интересно отметить, что индукция магнитного поля и индуктивность катушки определяют коэффициент упругости колебательной системы: $k = (lB)^2/L$. И, наконец, амплитуда колебаний (максимальное смещение перемычки от нулевой точки) равна

$$x_0 = \frac{v_0}{\omega} = v_0\frac{\sqrt{mL}}{lB}.$$

**Задача 4 ($\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{v_0}$, $\boldsymbol{2R}$)*.** *Определите «физическую судьбу» системы, состоящей из двух сверхпроводящих рельсов и двух одинаковых перемычек (плоскость системы горизонтальна; рис. 4). Система находится в вертикальном однородном магнитном поле. Правой перемычке сообщается горизонтальная скорость $v_0$. Дополнительные данные: $m$ – масса перемычки, $l$ – расстояние между рельсами, $R$ – сопротивление перемычки (между ее контактами с рельсами), $x_0$ – начальное расстояние между перемычками. Трения в системе нет. В определение «судьбы» входит: определение стационарного состояния и его параметров (движение и конфигурация системы), количество теплоты, выделившееся в системе при выходе на стационарное состояние.*

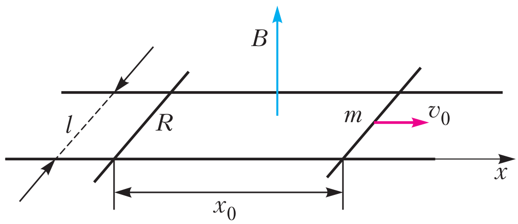


Рис. 4

**Решение.** Очень просто решается тепловой вопрос. При движении перемычек в них возникают ЭДС и, соответственно, в контуре течет ток. Общая сила, действующая со стороны магнитного поля на контур, равна нулю, так как силы Ампера, действующие на перемычки, равны и противоположны по направлению. Первая перемычка тормозится, а вторая разгоняется. Энергия такой замкнутой системы (две перемычки), разделяется на две части: энергия движения центра масс, которая остается постоянной, и энергия движения относительно центра масс (внутренняя энергия). Кинетическая энергия относительно центра масс для двух тел определена известной формулой

$$E_к = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\frac{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2}{2}.$$

В нашем случае в стационарном режиме перемычки будут двигаться с постоянной скоростью центра масс, равной $v_0/2$, а первоначальная кинетическая энергия системы относительно центра масс будет постепенно расходоваться на тепло. Общее количество теплоты, выделившееся в перемычках при выходе на стационарный режим, будет равно

$$Q = \frac{m \cdot m}{m + m}\frac{v_0^2}{2} = \frac{m}{4}v_0^2.$$

Теперь определим увеличение расстояния между перемычками. Магнитный поток контура, образованного рельсами и перемычками ($x$, $y$ – координаты перемычек), равен

$$\Phi = Bl(x - y).$$

ЭДС, возникающая в контуре (в перемычках), равна

$$\varepsilon = -Bl\left(x' - y'\right).$$

Сила тока контура, определяющая силы Ампера, равна

$$i = -\frac{Bl}{2R}\left(x' - y'\right).$$

Динамическое уравнение для стартующей перемычки имеет вид

$$mx'' = -\frac{(Bl)^2}{2R}\left(x' - y'\right),$$

$$\text{или } \Delta v = -\beta\left(x' - y'\right)\Delta t = -\beta\Delta\left(x - y\right),$$

$$\text{где } \beta = \frac{(Bl)^2}{2Rm}.$$

Отсюда легко получаем величину увеличения расстояния между перемычками (суммируем):

$$\frac{v_0}{2} - v_0 = -\beta\Delta\left(x - y\right),$$

$$\Delta\left(x - y\right) = \frac{v_0}{2\beta} = \frac{mv_0}{(Bl)^2}R.$$

Это увеличение расстояния пропорционально первоначальному импульсу системы.

Следующие задачи усложняются введением градиента индукции магнитного поля. При этом начальное положение перемычки выбирается в точке «нуля». Посмотрим, как это отражается на динамике движения.

**Задача 5 ($\boldsymbol{\alpha x}$, $\boldsymbol{v_0}$, $\boldsymbol{R}$)*.** *Два параллельных сверхпроводящих рельса расположены в горизонтальной плоскости и замкнуты на резистор (прямой провод) сопротивлением $R$ (рис. 5). На рельсах, ортогонально им, лежит перемычка. Система (рельсы – перемычка) находится в вертикальном неоднородном магнитном поле. Индукция магнитного поля линейно возрастает в положительном направлении оси $x$: $B = \alpha x$. В начальный момент времени перемычке, которая находится в начале системы координат, сообщается горизонтальная скорость $v_0$. Определите максимальное смещение перемычки в процессе ее дальнейшего движения по рельсам и количество теплоты, выделившееся в замыкающем резисторе. Дополнительные данные: $m$ – масса перемычки, $l$ – расстояние между рельсами, сопротивление перемычки равно нулю. Трения в системе нет.*

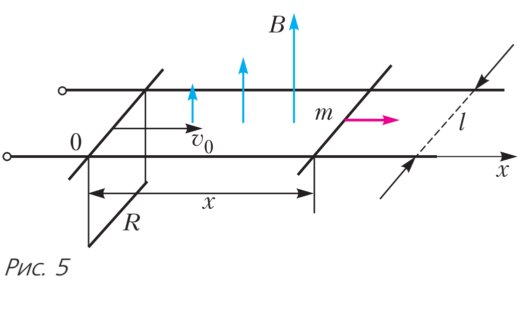



*Рис. 5*

**Решение.** Магнитный поток контура равен

$$\Phi = xl\frac{\alpha x}{2} = \alpha l\frac{x^2}{2}.$$

ЭДС, возникающая в подвижной перемычке, равна

$$\varepsilon = -\alpha l x x'.$$

Сила тока в контуре равна

$$i = -\frac{\alpha l}{R}xx'.$$

Динамическое уравнение имеет вид

$$mx'' = -\frac{(\alpha l)^2}{R}x^2x', \quad x'' = -\frac{(\alpha l)^2}{mR}x^2x',$$

$$\text{или } x'' = -\beta x^2 x', \text{ где } \beta = \frac{(\alpha l)^2}{mR}.$$

Динамическое уравнение непростое, поэтому попросим компьютер показать картинку движения (рис. 6). Видим монотонное торможение, но отличное от экспоненциального, которое наблюдалось в первой задаче. И все же первый интеграл движения (уравнение скорости) мы сможем достаточно просто получить аналитически. Для этого динамическое уравнение преобразуем к виду

$$\frac{dx'}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dx}\cdot x' = -\beta x^2 x', \text{ или } \frac{dv}{dx} = -\beta x^2.$$

Теперь это уравнение легко интегрируется (в начальный момент времени координата

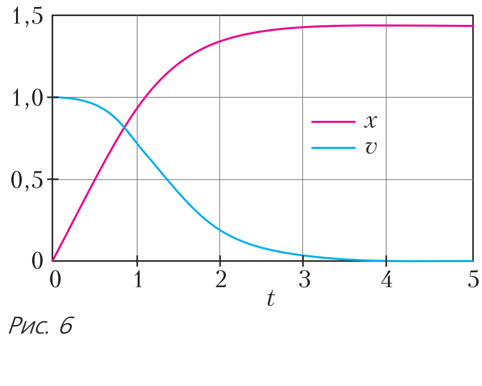



*Рис. 6*

перемычки равна нулю):

$$v = v_0 - \beta\frac{x^3}{3}.$$

Отсюда получаем величину «пробега» перемычки:

$$x_{\max} = \left(\frac{3v_0}{\beta}\right)^{1/3} = \left(\frac{3mv_0R}{(\alpha l)^2}\right)^{1/3}.$$

Этот результат интересно сравнить с результатом первой задачи (при однородном магнитном поле) $x_{\max} = \dfrac{mv_0R}{(lB)^2}$.

Количество теплоты, выделившееся в резисторе до момента остановки, легко определяется из энергетического уравнения:

$$Q = m\frac{v_0^2}{2}.$$

**Задача 6 ($\alpha x$, $v_0$, $C$)**.** *Два параллельных рельса расположены в горизонтальной плоскости и замкнуты на конденсатор (рис. 7). На рельсах, ортогонально им, лежит перемычка. Система (рельсы – перемычка) находится в вертикальном неоднородном магнитном поле. Индукция магнитного поля линейно возрастает в положительном направлении оси x: $B = \alpha x$. В начальный момент времени перемычке, которая находится в начале системы координат, сообщается горизонтальная скорость $v_0$. Определите характер дальнейшего движения перемычки. Дополнительные данные: m – масса перемычки, l – расстояние между рельсами, C – емкость конденсатора. Сопротивление перемычки и рельсов равно нулю. Трения в системе нет.*

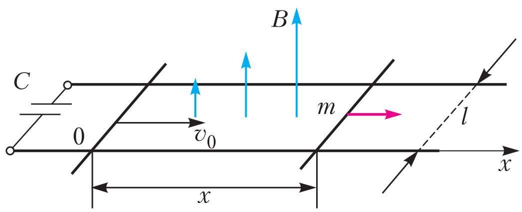


Рис. 7

**Решение.** Магнитный поток контура равен

$$\Phi = lx\frac{\alpha x}{2} = \alpha l\frac{x^2}{2}.$$

ЭДС, возникающая в перемычке, равна

$$\varepsilon = -\alpha l x x'.$$

Уравнение контура (ЭДС, возникающая в перемычке, уравновешивается напряжением конденсатора) имеет вид

$$-\alpha l x x' + \frac{q}{C} = 0.$$

Дифференцируя это уравнение по времени, получаем величину тока в контуре:

$$-\alpha l\left(x'^2 + xx''\right) + \frac{i}{C} = 0,\ i = \alpha l C\left(x'^2 + xx''\right).$$

Записываем динамическое уравнение:

$$mx'' = -(\alpha l)^2 C\left(x'^2 + xx''\right)x,\ x'' = -\frac{\beta^2 x'^2 x}{1+\beta^2 x^2},$$

$$\text{где } \beta^2 = \frac{(\alpha l)^2 C}{m}.$$

Уравнение преобразуем к виду

$$x'' = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(v^2\right) = -\frac{\beta^2 v^2 x}{1+\beta^2 x^2}.$$

Первый интеграл этого уравнения легко вычисляется:

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{1+\beta^2 x^2}}.$$

Вторичное интегрирование приводит к достаточно простому известному интегралу (находим его в справочнике):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{\sqrt{1+\beta^2 x^2}},$$

$$t = \frac{1}{v_0}\int_0^x \sqrt{1+\beta^2 x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2v_0}\left(x\sqrt{1+\beta^2 x^2} + \frac{1}{\beta}\ln\left(\beta x + \sqrt{1+\beta^2 x^2}\right)\right).$$

Получили очень «мудрое» соотношение между временем и координатой движущейся перемычки. Теперь можно посмотреть на графики такого движения (рис. 8). Видим монотонное бесконечное торможение. Движение перемычки замедляется, но остановки

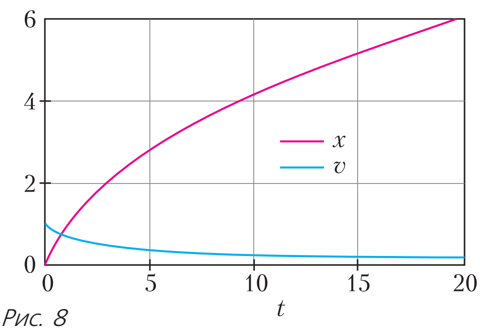


Рис. 8

нет. При однородном магнитном поле движение было равномерным.

**Задача 7 ($\alpha x, v_0, L$)**.** *Два параллельных рельса расположены в горизонтальной плоскости и замкнуты на катушку индуктивности (рис. 9). На рельсах, ортогонально*

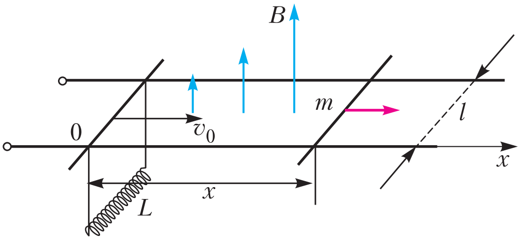



Рис. 9

*им, лежит перемычка. Система (рельсы – перемычка) находится в вертикальном неоднородном магнитном поле. Индукция магнитного поля линейно возрастает в положительном направлении оси x: $B = \alpha x$. В начальный момент времени перемычке, которая находится в начале системы координат, сообщается горизонтальная скорость $v_0$. Определите характер и параметры движения перемычки после старта. Дополнительные данные: m – масса перемычки, l – расстояние между рельсами, L – индуктивность катушки. Активные сопротивления перемычки, рельсов и катушки индуктивности считать равными нулю. Трения в системе нет.*

**Решение.** Сначала сделаем одно замечание о характере движения перемычки. В задаче 3 было показано, что в постоянном магнитном поле перемычка совершает гармоничные (линейные) колебания. Очевидно, что наличие градиента поля должно приводить к нелинейности колебаний. Далее следуем уже стандартному алгоритму решения.

Магнитный поток контура равен

$$\Phi = lx\frac{\alpha x}{2} = \alpha l\frac{x^2}{2}.$$

ЭДС, возникающая в перемычке, равна

$$\varepsilon = -\alpha l x x'.$$

Сила тока определяется из уравнения контура (ЭДС перемычки уравновешена напряжением индуктивности):

$$-\alpha l x x' + L\frac{di}{dt} = 0,\ i = \frac{\alpha l}{L}\frac{x^2}{2}.$$

Динамическое уравнение имеет вид

$$mx'' = -\frac{(\alpha l)^2}{2L}x^3,\ x'' = -\frac{(\alpha l)^2}{2mL}x^3, \text{ или } x'' = -\beta x^3,$$

$$\text{где } \beta = \frac{(\alpha l)^2}{2mL}.$$

Получили ожидаемое уравнение нелинейных колебаний. Для решения этого уравнения преобразуем его к виду

$$x'' = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(v^2\right) = -\beta x^3.$$

Первый интеграл этого уравнения дает

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{\beta}{2}x^4}.$$

Из этого соотношения определяем максимальное смещение перемычки ($v = 0$):

$$x_{\max} = \left(\frac{2v_0^2}{\beta}\right)^{1/4}.$$

Второе интегрирование приводит к непростому интегралу, который позволяет вычислить период колебаний:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{v_0^2 - \frac{\beta}{2}x^4},\ t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - \frac{\beta}{2}x^4}},$$

$$\frac{T}{4} = \int_0^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - \frac{\beta}{2}x^4}}.$$

Преобразуем интеграл к безразмерному виду:

$$\frac{T}{4} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - \frac{\beta}{2}x^4}} = \left(\frac{2}{\beta v_0^2}\right)^{1/4}\cdot\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^4}},$$

$$\text{где } z = \frac{x}{x_{\max}}.$$

Безразмерный определенный интеграл является константой, вычисление которой предоставим компьютеру. В результате получим

$$\frac{T}{4} = \left(\frac{2}{\beta v_0^2}\right)^{1/4}\cdot 1{,}311,\ T = 5{,}244\cdot\left(\frac{2}{\beta v_0^2}\right)^{1/4}.$$

Используя полученное ранее выражение для максимального смещения перемычкм, формулу периода можно представить в виде, при котором четко видна нелинейность колебаний:

$$T = \frac{B}{x_{\max}},\ \text{где } B = 5{,}244\sqrt{\frac{2}{\beta}} = 10{,}5\frac{\sqrt{mL}}{\alpha l}.$$

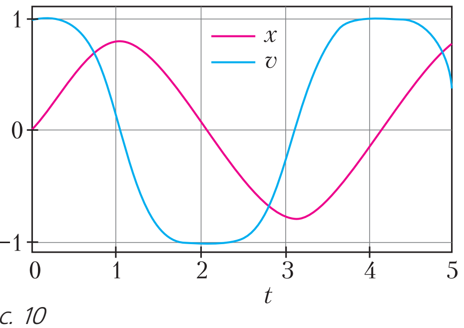



Рис. 10

Подобная обратная зависимость периода колебаний от амплитуды наблюдается у поперечного пружинного маятника.

Получить явное уравнение движения непросто. Поэтому ограничимся картинками движения (временны́е графики координаты и скорости), которые легко получает компьютер. Графики на рисунке 10 иллюстрируют степень нелинейности колебаний (при $\beta = 5$).

Следующие варианты задач определены изменением индукции магнитного поля во времени. Задачу с резистором пропускаем, она под силу только компьютеру, а вот с конденсатором математика решения получается интересной и не очень сложной.

**Задача 8 ($\alpha t$, $v_0$, $C$)*.** *Два параллельных сверхпроводящих рельса расположены в горизонтальной плоскости и замкнуты на конденсатор (рис. 11). По рельсам, ортогонально им, движется перемычка со скоростью $v_0$. В некоторый момент перпендикулярно плоскости системы возникает магнитное поле, индукция которого изменяется со временем в соответствии с формулой $B = \alpha t$. В начальный момент времени перемычка находится в начале системы координат. Определите характер дальнейшего движения перемычки. Дополнительные данные: $m$ – масса перемычки, $l$ – расстояние между рельсами, $C$ – емкость конденсатора. Сопротивление перемычки и рельсов равно нулю. Трения в системе нет.*

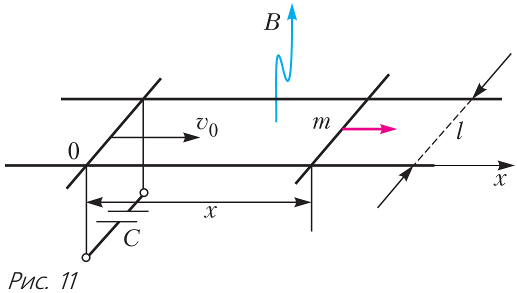



Рис. 11

**Решение.** Магнитный поток контура равен

$$\Phi = lx\alpha t = \alpha l(xt).$$

ЭДС, возникающая в перемычке, равна

$$\varepsilon = -\alpha l(x't + x).$$

Сила тока определяется из уравнения контура (ЭДС перемычки уравновешена напряжением конденсатора):

$$-\alpha l(x't + x) + \frac{q}{C} = 0,\ i = \alpha lC(x''t + 2x').$$

Динамическое уравнение имеет вид

$$mx'' = -(\alpha l)^2 C(x''t + 2x')t,\ \frac{dv}{dt} = -\frac{2\beta^2 vt}{1 + \beta^2 t^2},$$

$$\text{где } \beta^2 = \frac{(\alpha l)^2 C}{m}.$$

Первый интеграл этого уравнения (временно́е уравнение скорости) легко вычисляется:

$$v = \frac{v_0}{1 + \beta^2 t^2}.$$

Вторичное интегрирование приводит к достаточно простому (табличному) интегралу:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{1 + \beta^2 t^2},\ x = v_0 \int_0^t \frac{dt}{1 + \beta^2 t^2}.$$

После интегрирования получаем координатное уравнение движения (монотонное торможение с конечной точкой):

$$x = \frac{v_0}{\beta} \operatorname{arctg} \beta t.$$

Находим точку остановки перемычки (тормозной путь):

$$x_{\max} = \frac{\pi}{2} \frac{v_0}{\beta}.$$

Временны́е графики (координаты и скорости в относительных единицах при $\beta = 1$, $v_0 = 1$) представлены на рисунке 12.

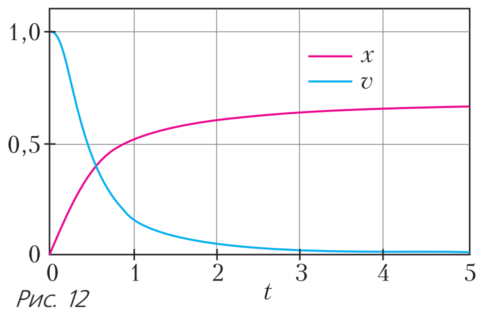



Рис. 12

Теперь самая интересная и красивая своей математикой задача (но – для любителей сложных проблем).

**Задача 9 ($\boldsymbol{B_0(1+\alpha t), v_0, L}$)***.** *Определите «физическую судьбу» (характер и параметры движения) системы (рис. 13),*

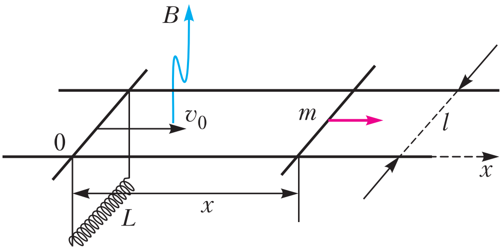



Рис. 13

*состоящей из сверхпроводящих перемычки и двух рельсов, замкнутых на идеальную катушку индуктивностью $L$, если ортогонально плоскости рельсов возникает линейно возрастающее магнитное поле $B = B_0(1+\alpha t)$. Дополнительные данные: $m$ – масса перемычки, $l$ – расстояние между рельсами. В начальный момент времени координата и скорость перемычки равны 0 и $v_0$ соответственно. Трения в системе нет. Катушка индуктивности подключена к рельсам таким образом, что перемычка беспрепятственно может пересекать нулевую точку. Скорость изменения индукции магнитного поля $\alpha B_0$ считайте малой величиной.*

**Решение.** При постоянной величине индукции магнитного поля система является электромеханическим гармоническим осциллятором (см. задачу 3) с периодом колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{l^2B^2/L}}.$$

Здесь величину $l^2B^2/L = k$ можно считать коэффициентом упругости колебательной системы. В данной задаче индукция магнитного поля медленно возрастает со временем и, соответственно, медленно увеличивается параметр (коэффициент упругости) осциллятора. В соответствии с этим, здесь уместно будет принять на веру (без доказательства) следующее. Для маятника, совершающего колебания в режиме медленно меняющегося параметра, сохраняется величина отношения энергии к частоте колебаний:

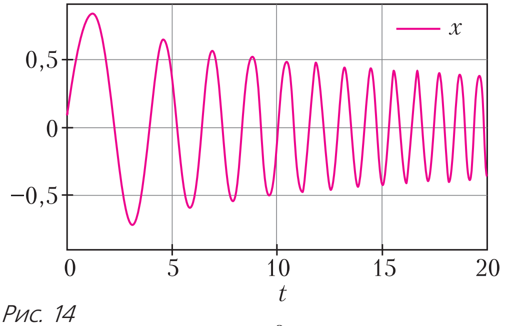



Рис. 14

$$I = \frac{E}{\omega} = \frac{mv_0^2}{2\omega} \sim x_0^2\omega.$$

Эту величину называют адиабатическим инвариантом, и у нас есть возможность использовать этот необычный и красивый закон сохранения при решении данной задачи.

Но сначала попросим помощи у компьютера. График решения (рис. 14) получен в системе Mathcad с помощью простого алгоритма Эйлера при $\alpha/\omega_0 = 0{,}3$ (не очень малый параметр). Эта картинка полностью согласуется с нашим замечанием о существовании адиабатического инварианта. Мы видим, что частота колебаний со временем растет, а амплитуда уменьшается.

Как уже повелось, математика аналитического решения начинается с потока индукции магнитного поля:

$$\Phi = lxB_0(1+\alpha t).$$

Возникающая в контуре ЭДС равна

$$\varepsilon = -lB_0\frac{d}{dt}\left(x(1+\alpha t)\right).$$

Уравнение связи тока и координаты получим из уравнения контура:

$$\varepsilon + L\frac{di}{dt} = 0,\ -lB_0\frac{d}{dt}\left(x(1+\alpha t)\right) + L\frac{di}{dt} = 0,$$

$$i = \frac{lB_0}{L}x(1+\alpha t).$$

Уравнение динамики (здесь будьте внимательны со знаком силы) имеет вид

$$mx'' = -\frac{(lB_0)^2}{L}(1+\alpha t)^2 x,$$

$$x'' = -\omega_0^2(1+\alpha t)^2 x,$$

$$\text{где } \omega_0^2 = \frac{(lB_0)^2}{mL}.$$

Это уравнение можно считать уравнением колебаний с изменяющейся во времени частотой

$$\omega(t) \sim \omega_0 (1 + \alpha t).$$

Очевидно, что приближенное решение уравнения динамики можно искать в виде

$$x(t) = x_0(t) \sin \omega(t) t,$$

где и амплитуда, и частота колебаний являются функциями времени. При «построении» этого приближенного решения будем использовать адиабатический инвариант.

При медленном изменении магнитного поля можно считать, что в любой момент времени колебания будут близки к гармоническим. В этом случае справедливо такое соотношение между амплитудами и частотой:

$$v_0(t) = x_0(t)\omega(t) = x_0(t)\omega_0(1 + \alpha t).$$

Это соотношение подгоним под формулу инварианта (возводим в квадрат и преобразовываем):

$$\frac{v_0^2}{\omega_0(1 + \alpha t)} = x_0^2 \omega_0 (1 + \alpha t).$$

Чтобы левая часть уравнения была инвариантом, амплитуда координаты должна определяться функцией

$x_0(t) = \dfrac{c}{\sqrt{1 + \alpha t}}$, где $c$ – некоторая константа.

Этот результат можно получить и без использования адиабатического инварианта. Представим наше приближенное решение в виде

$$x(t) = x_0(t) \sin(\omega_0 (1 + k\alpha t) t).$$

Здесь мы ввели подгоночный параметр $k$, который определим позже. После подстановки этого решения в уравнение динамики получим равенство, части которого будут содержать временны́е синусы и косинусы. Но если наше решение правильное, то равенство должно быть нулевым тождеством для любого момента времени. Поэтому мы должны отдельно приравнять нулю сумму коэффициентов при синусах и косинусах. В итоге мы получим систему двух дифференциальных уравнений для амплитуд (опускаем несложные, но «утомительные» вычисления):

$$x_0'' - x_0\omega_0^2 (1 + 2k\alpha t)^2 = -\omega_0^2 (1 + \alpha t)^2 x_0,$$

$$x_0' (1 + 2k\alpha t) + x_0 k\alpha = 0.$$

Амплитуда колебаний легко определяется из второго уравнения:

$$\frac{dx_0}{x_0} = -\frac{k\alpha}{1 + 2k\alpha t} dt, \; x_0 = \frac{c}{\sqrt{1 + 2k\alpha t}}.$$

Очевидно, что это решение совпадает с нашим предварительным результатом (при $k = 1/2$). Далее видим, что если мы примем $k = 1/2$, то первое дифференциальное уравнение значительно обнуляется, но не полностью – в правой его части остается вторая производная. Однако при медленном изменении амплитуды вторая производная заведомо очень мала (близка к нулю), и можно считать, что наше решение удовлетворяет и первому дифференциальному уравнению. В итоге колебания должны описываться уравнением

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0 \sqrt{1 + \alpha t}} \sin\left(\omega_0 \left(1 + \frac{\alpha}{2} t\right) t\right).$$

Проверка нашего «адиабатного» решения представлена на рисунке 15, на котором

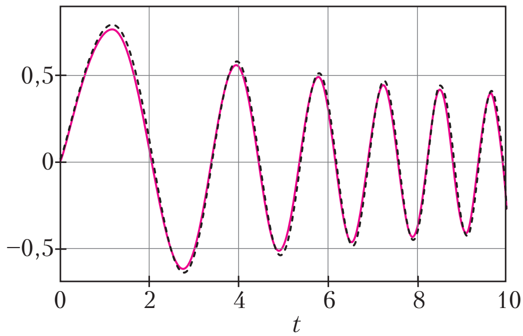



*Рис. 15*

видим прекрасную согласованность с точной компьютерной реализацией. Пунктирная кривая – это график, построенный по уравнению колебаний при $\alpha/\omega_0 = 0{,}3$. А при $\alpha/\omega_0 = 0{,}1$ графики практически совпадают.

# XLIII Турнир городов

## Задачи весеннего тура

### Базовый вариант

*8–9 классы*

**1** (3)[1]. Два человека шли по прямой дорожке навстречу друг другу с постоянными скоростями, но один – медленно, другой – быстро. Одновременно каждый отпустил вперед от себя собаку (собаки бежали с одной и той же постоянной скоростью). Каждая собака добежала до другого хозяина и возвратилась к своему. Чья собака вернулась раньше – быстрого хозяина или медленного?

*А.Рубин*

**2** (4). Петя взял произвольное натуральное число, умножил его на 5, результат снова умножил на 5, потом еще на 5 и так далее. Верно ли, что с какого-то момента все получающиеся у Пети числа будут содержать 5 в своей десятичной записи?

*С.Дориченко*

**3** (5). На Поле Чудес выросло 11 золотых монет, но стало известно, что ровно четыре из них фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые тоже, но они легче настоящих. Лиса Алиса и Буратино собрали монеты и стали их делить. Алиса собирается отдать Буратино четыре монеты, но он хочет сначала проверить, все ли они настоящие. Сможет ли он сделать это за два взвешивания на чашечных весах без гирь?

*А.Грибалко*

**4** (5). На диагонали $AC$ квадрата $ABCD$ взята точка $P$. Пусть $H$ – точка пересечения высот треугольника $APD$, $M$ – середина $AD$ и $N$ – середина $CD$. Докажите, что прямые $PN$ и $MH$ взаимно перпендикулярны.

*И.Кухарчук*

**5** (6). Прямоугольник $1 \times 3$ будем называть *триминошкой*. Петя и Вася независимо друг от друга разбивают доску $20 \times 21$ на триминошки. Затем они сравнивают полученные разбиения, и Петя платит Васе столько рублей, сколько триминошек в этих двух разбиениях совпали (оказались на одинаковых позициях). Какую наибольшую сумму выигрыша может гарантировать себе Вася независимо от действий Пети?

*А.Глебов*

[1] В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за ее полное решение. Итог подводился по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты (баллы за пункты одной задачи суммируются).

*10–11 классы*

**1** (4). Натуральное число умножили на 5, результат снова умножили на 5 и так далее, всего сделали $k$ умножений. Оказалось, что в десятичной записи исходного числа и полученных $k$ чисел нет цифры 7. Докажите, что существует натуральное число, которое можно $k$ раз умножить на 2, и снова ни в одном числе не будет цифры 7 в его десятичной записи.

*А.Грибалко*

**2** (4). На Поле Чудес выросло 8 золотых монет, но стало известно, что ровно три из них фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые тоже, но они легче настоящих. Лиса Алиса и Буратино собрали монеты и стали их делить. Алиса собирается отдать Буратино три монеты, но он хочет сначала проверить, все ли они настоящие. Сможет ли он сделать это за два взвешивания на чашечных весах без гирь?

*А.Грибалко*

**3** (5). Пусть $n$ – натуральное число. Назовем последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *интересной*, если для каждого $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ верно одно из равенств $a_i = i$ или $a_i = i + 1$. Назовем интересную последовательность *четной*, если сумма ее членов четна, и *нечетной* – если иначе. Для каждой нечетной интересной последовательности нашли произведение ее чисел и записали его на первый листок. Для каждой четной – сделали то же самое и записали на второй листок. На каком листке сумма чисел больше и на сколько? (Дайте ответ в зависимости от $n$.)

*А.Глебов*

**4** (5). См. задачу 5 для 8–9 классов.

**5** (6). Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность $\omega$ с центром в точке $O$. Описанная окружность треугольника $AOC$ пересекает вторично прямые $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$ в точках $M$, $N$, $K$ и $L$ соответственно. Докажите, что прямые $MN$, $KL$ и касательные, проведенные к $\omega$ в точках $A$ и $C$, касаются одной окружности.

*А.Марданов*

## Сложный вариант

*8–9 классы*

**1** (4). Найдите наибольшее натуральное число $n$ со свойством: для каждого простого числа $p$, большего 2 и меньшего $n$, разность $n-p$ также является простым числом.

*И.Акулич*

**2** (7). См. задачу М2698 «Задачника «Кванта».

**3** (7). Для каждого из девяти натуральных чисел $n$, $2n$, $3n$, …, $9n$ выписали на доску первую слева цифру в его десятичной записи. При этом $n$ выбрали так, чтобы среди девяти выписанных цифр количество различных цифр было как можно меньше. Чему равно это количество?

*А.Толпыго*

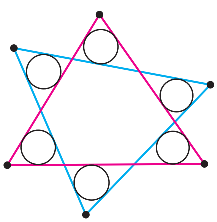
**4.** В белом клетчатом квадрате $100\times100$ закрашено черным несколько клеток (не обязательно соседних). В каждой горизонтали или вертикали, где есть черные клетки, их количество нечетно, так что одна из клеток – *средняя* по счету. Все черные клетки, средние по горизонтали, стоят в разных вертикалях. Все черные клетки, средние по вертикали, стоят в разных горизонталях.

а) (5) Докажите, что найдется клетка, средняя и по горизонтали, и по вертикали.

б) (5) Обязательно ли каждая клетка, средняя по горизонтали, средняя и по вертикали?

*Б.Френкин*

**5** (10). Два треугольника пересекаются по шестиугольнику, который отсекает от них шесть маленьких треугольников (см. рисунок). Радиусы вписанных окружностей этих шести треугольников равны. Докажите, что радиусы вписанных окружностей двух исходных треугольников также равны.



*А.Кушнир*

**6** (10). Для турнира изготовили 7 золотых, 7 серебряных и 7 бронзовых медалей. Все медали из одного металла должны быть одинаковой массы, а из разных должны иметь различные массы. Но одна из всех медалей оказалась нестандартной – имела неправильную массу. При этом нестандартная золотая медаль может быть только легче стандартной золотой, бронзовая – только тяжелее стандартной бронзовой, а серебряная может отличаться по массе от стандартной серебряной в любую сторону. Можно ли за три взвешивания на чашечных весах без гирь найти нестандартную медаль?

*А.Грибалко*

**7** (12). На плоскости нарисован выпуклый многоугольник $M$, и дано простое число $p$. Оказалось, что существует ровно $p$ разбиений многоугольника $M$ на равносторонние треугольники со стороной 1 и квадраты со стороной 1. Докажите, что длина одной из сторон многоугольника $M$ равна $p-1$.

*Н.Белухов*

*10–11 классы*

**1** (5). См. задачу 3 для 8–9 классов.

**2.** В прямоугольной системе координат (с одинаковым масштабом по осям $x$ и $y$) нарисовали график функции $y=f(x)$. Затем ось ординат и все отметки на оси абсцисс стерли. Предложите способ, как с помощью карандаша, циркуля и линейки восстановить ось ординат, если

а) (4) $f(x)=3^x$;

б) (4) $f(x)=\log_a x$, где $a>1$ – неизвестное число.

*М.Евдокимов*

**3** (8). См. задачу 5 для 8–9 классов.

**4** (8). См. задачу М2699 «Задачника «Кванта».

**5** (8). См. задачу М2700 «Задачника «Кванта».

**6** (8). См. задачу М2701 «Задачника «Кванта».

**7.** Звездолет находится в полупространстве на расстоянии $a$ от его границы. Экипаж знает об этом, но не представляет, в каком направлении двигаться, чтобы достигнуть граничной плоскости. Звездолет может лететь в пространстве по любой траектории, измеряя длину пройденного пути, и имеет датчик, подающий сигнал, когда граница достигнута. Может ли звездолет гарантированно достигнуть границы, преодолев путь длиной

а) (6) не более $14a$;

б) (6) не более $13a$?

*М.Евдокимов*

### Устный тур для 11 класса

**1.** Многочлен третьей степени имеет три различных корня строго между 0 и 1. Учитель сообщил ученикам два из этих корней. Еще он сообщил все четыре коэффициента многочлена, но не указал, в каком порядке эти коэффициенты идут. Обязательно ли можно восстановить третий корень?

*Б.Френкин*

**2.** Назовем расположенный в пространстве треугольник $ABC$ удобным, если для любой точки $P$ вне его плоскости из отрезков $PA$, $PB$ и $PC$ можно сложить треугольник. Какие углы может иметь удобный треугольник?

*Д.Бродский*

**3.** Дан клетчатый квадрат $n \times n$, где $n > 1$. *Кроссвордом* будем называть любое непустое множество его клеток, а *словом* – любую горизонтальную и любую вертикальную полоску (клетчатый прямоугольник шириной в одну клетку), целиком состоящую из клеток кроссворда и не содержащуюся ни в какой большей полоске из клеток кроссворда (ни горизонтальной, ни вертикальной). Пусть $x$ – количество слов в кроссворде, $y$ – наименьшее количество слов, которыми можно покрыть кроссворд. Найдите максимум отношения $x/y$ при данном $n$.

*Б.Френкин*

**4.** На доске написана функция $\sin x + \cos x$. Разрешается написать на доске производную любой написанной ранее функции, а также сумму и произведение любых двух написанных ранее функций, так можно делать много раз. В какой-то момент на доске оказалась функция, равная для всех действительных $x$ некоторой константе $c$. Чему может равняться $c$?

*М.Евдокимов*

**5.** Дан неравнобедренный треугольник $ABC$. Выберем произвольную окружность $\omega$, касающуюся описанной окружности треугольника $ABC$ внутренним образом в точке $B$ и не пересекающую прямую $AC$. Отметим на $\omega$ точки $P$ и $Q$ так, чтобы прямые $AP$ и $CQ$ касались $\omega$, а отрезки $AP$ и $CQ$ пересекались внутри треугольника $ABC$. Докажите, что все полученные таким образом прямые $PQ$ проходят через одну фиксированную точку, не зависящую от выбора окружности $\omega$.

*А.Марданов*

**6.** На доске написана буква *А*. Разрешается в любом порядке и количестве

а) приписывать *А* слева;

б) приписывать *Б* справа;

в) одновременно приписывать *Б* слева и *А* справа.

Например, *БААБ* так получить можно (*А* → *БАА* → *БААБ*), а *АББА* – нельзя. Докажите, что при любом натуральном $n$ половину слов длины $n$ получить можно, а другую половину – нельзя.

*Фольклор, предложил А.Шень*

*Материал подготовили: Е.Бакаев, Н.Белухов, И.Богданов, Д.Бродский, А.Глебов, А.Грибалко, С.Дориченко, М.Евдокимов, А.Заславский, П.Кожевников, Э.Лю, М.Малкин, А.Марданов, Л.Медников, В.Ретинский, М.Святловский, А.Тертерян, А.Толпыго, Б.Френкин, И.Фролов, А.Шень*

# Всероссийская олимпиада по физике имени Дж.К.Максвелла

Maxwell PhO

## Заключительный этап

### Теоретический тур

*7 класс*

**Задача 1. Связанные препятствия**

Между источником сигнала $S$ и приемником $P$ перпендикулярно прямой, соединяющей их, движутся навстречу друг другу с постоянными скоростями две пары связанных тонкой нитью пластин (рис. 1). Если

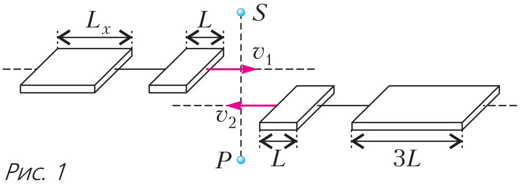



*Рис. 1*

сигнал по пути от источника к приемнику проходит через одну из пластин, приемник зажигает на дисплее желтую лампочку, если через обе – красную. В момент прохождения пластин мимо источника сначала на $t_1 = 1$ с на дисплее зажглась красная лампочка, затем $t_2 = 2$ с горела желтая, а потом в течение $t_3 = 6$ с – опять красная. Ни до, ни после этого лампочки не загорались. Известно, что первые пластины и справа и слева имеют длину $L = 30$ см, вторая пластина справа имеет длину $3L$. Считайте, что сигнал от источника к приемнику передается мгновенно.

1) Определите длину $L_x$ второй пластины слева, а также длины соединяющих пластины нитей ($l_1$ – левой и $l_2$ – правой). Длины нитей отличны от нуля.

2) Найдите скорости движения левых ($v_1$) и правых ($v_2$) пластин.

*А.Евсеев*

**Задача 2. Секретный продукт**

При производстве суперсекретного продукта в заводских условиях в тару непрерывно заливают три различных ингредиента: сначала «красный», затем «зеленый» и, наконец, «синий» (настоящие названия засекречены). Все ингредиенты заливаются с одинаковым постоянным объемным расходом. Сотрудники предприятия построили график зависимости массы продукта от времени в процессе производства. Но в целях соблюдения секретности график был стерт сотрудниками службы безопасности вместе с единицами измерений по осям. В то же время на нем (рис. 2) все еще можно увидеть 4

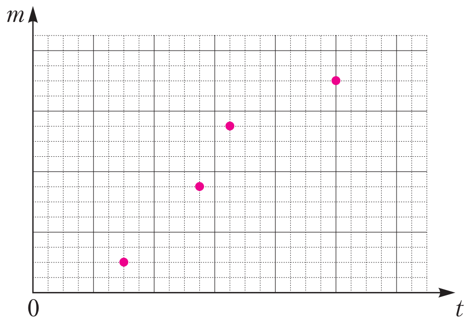



*Рис. 2*

точки, одна из которых соответствует первому моменту полной готовности продукта. Из сведений, полученных по различным каналам, также известно, что плотности каких-то двух ингредиентов равны $\rho$ и $2\rho$.

1) Определите плотности «красного», «зеленого» и «синего» ингредиентов.

2) Восстановите утраченный график.

3) Найдите плотность готового продукта.

4) Какую долю от общего объема составляют объемы каждого из ингредиентов?

*Примечание.* Объемным расходом называется величина $\mu = \frac{\Delta V}{\Delta t}$, где $\Delta V$ – объем ингредиента, заливаемого в тару за время $\Delta t$. Объем готового продукта равен сумме объемов ингредиентов.

*А.Евсеев*

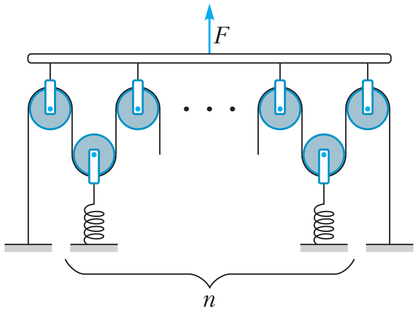



*Рис. 3*

**Задача 3. Неодинаковые пружины**

Длинную легкую пружину жесткостью $k$ разрезали на $n$ частей (не обязательно одинаковых). Из получившихся пружин, легких нерастяжимых нитей, легких гладких блоков и легкой планки собрали конструкцию, изображенную на рисунке 3.

1) Найдите силу натяжения нити $F_н$, перекинутой через блоки, если к планке приложена сила $F$.

2) Определите, в каком диапазоне может меняться значение эффективной жесткости $k_{эф}$ полученной конструкции на растяжение при заданном $n$.

При движении планка не вращается.

*Примечание.* Эффективной жесткостью называется величина $k_{эф} = \dfrac{F}{\Delta x}$, где $F$ – сила, приложенная к планке, $\Delta x$ – смещение планки относительного начального положения.

*А.Евсеев*

**Задача 4. Пневматическая заглушка**

Отверстие площадью $S$ в дне стакана плотно закрыто цилиндрической шайбой (рис. 4). Площадь шайбы $5S/4$, толщина $h$, плотность $\rho_ш$. В месте соприкосновения шайбы с дном воздух под нее не проникает. Сверху к шайбе прикреплен тонкостенный легкий шланг площадью сечения $S/2$, соединенный с вакуумным насосом. Атмосферное давление $p_0$.

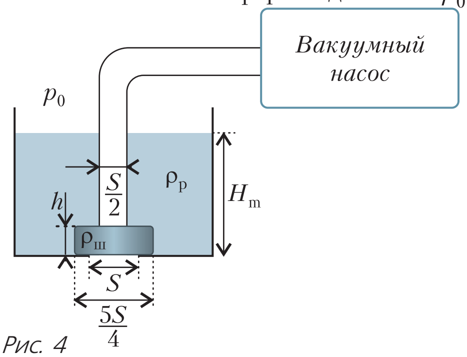



*Рис. 4*

1) При какой максимальной толщине шайбы она сможет оторваться от дна стакана при полном удалении воздуха из шланга?

В стакан с закрытым отверстием наливают ртуть плотностью $\rho_р$. Обозначим $H_m$ максимальный уровень ртути, при котором ее еще можно слить из сосуда, полностью откачав воздух из шланга.

2) Нарисуйте качественный график зависимости $H_m$ от $h$, обозначив на нем характерные значения физических величин.

*С.Кармазин*

*8 класс*

**Задача 1. От частного к среднему**

Дорога из пункта $A$ в пункт $B$ состоит из двух участков с разным качеством покрытия. Поэтому автомобиль, выехавший из $A$ в $B$, на первом участке поддерживал одну постоянную скорость, а на втором – другую. Известно, что на первом участке автомобиль находился не менее 1/8 всего проведенного в пути времени, а по второму проехал не менее 1/8 всего пути. При этом средняя скорость автомобиля на первой половине всего пути составила $2v$, а средняя скорость за вторую половину всего времени – $v$.

1) Какую максимально возможную скорость мог иметь автомобиль во время движения?

2) Какую минимально возможную скорость мог иметь автомобиль во время движения?

3) Какой могла быть средняя скорость автомобиля на всем пути от $A$ до $B$?

*А.Евсеев*

**Задача 2. Неодинаковые пружины**

См. задачу 3 для 7 класса.

**Задача 3. Симметрия есть или нет?**

Определите эквивалентное сопротивление $R_{ED}$ между узлами $E$ и $D$ и сопротивление $R_{BD}$ между узлами $B$ и $D$ электрической цепи, сопротивления отдельных ветвей которой, выраженные в омах, указаны на рисунке 5.

*В.Слободянин*

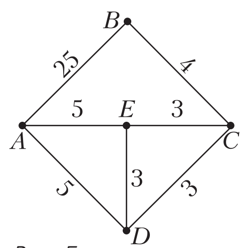



*Рис. 5*

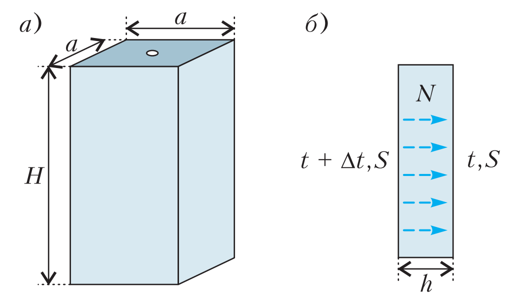



Рис. 6

**Задача 4. Сублимация**

При определенных условиях может наблюдаться интересное явление: твердое вещество, минуя фазу плавления, испаряется. Данный процесс называется *сублимацией*. Диоксид углерода или «сухой лед» – это вещество, сублимация которого при атмосферном давлении происходит при температуре $t_c = -78$ °C. В лаборатории на весах стоит стакан, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда (рис. 6,*а*) с длиной ребра $a = 6$ см, толщиной стенок и дна $h = 1$ мм и высотой $H = 10$ см, заполненный сухим льдом. Стакан закрыт не проводящей тепло крышкой (на рисунке закрашена темнее) с небольшим отверстием, через которое вытекает весь испарившийся диоксид. В установившемся режиме показания весов падают на 0,1 г в секунду, а температура внешней поверхности сосуда $t_{внеш} = 22$ °C. Материал стенок и дна сосуда одинаковый.

1) Определите удельную теплоту $L_c$ сублимации «сухого льда», если коэффициент теплопроводности стенок сосуда $\chi = 2{,}1 \cdot 10^{-2}$ Вт/(м · °C).

2) В некоторый момент времени отверстие в крышке стакана закрывают и обматывают стакан со всех сторон теплоизолирующим материалом, теплоемкостью которого можно пренебречь. Какова масса $\Delta m$ испарившегося «сухого льда» после теплоизоляции стакана? Удельная теплоемкость материала стенок $c = 2100$ Дж/(кг · °C), а плотность $\rho = 1000$ кг/м$^3$. Теплоемкостью крышки тоже можно пренебречь.

*Примечание*. Тепловая мощность, передаваемая через плоскую пластину площадью $S$ и толщиной $h$ при разности температур $\Delta t$ между ее сторонами (рис. 6,*б*), равна $N = \chi \frac{S \Delta t}{h}$.

*А.Уймин*

*Публикацию подготовил В.Слободянин*

# Заключительный этап LV Всероссийской олимпиады школьников по физике

## Теоретический тур

*9 класс*

**Задача 1. Автобус**

Настя стоит в поле на расстоянии $s$ от прямой дороги, по которой от остановки с постоянным ускорением $a$ в ее сторону начинает движение автобус (рис. 1). Расстояние от остановки до девочки равно $l$. Через какое минимальное время $\tau$ Настя сможет оказаться рядом с автобусом, если она умеет бегать со скоростью $v$? Временем разгона девочки можно пренебречь.

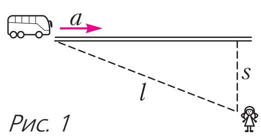



Рис. 1

*М.Замятнин*

**Задача 2. Черепахи**

См. задачу Ф2705 «Задачника «Кванта».

**Задача 3. О стену**

На гладкой горизонтальной поверхности на расстоянии $s$ от стены покоится шайба массой $m$. На нее налетает вторая такая же шайба, движущаяся перпендикулярно стене со скоростью $u$ (рис. 2; вид сверху). Извест-

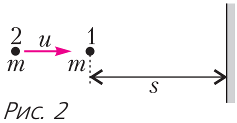



Рис. 2

но, что удары шайб о стену упругие, а при центральном столкновении самих шайб рассеивается доля $\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ их суммарной кинетической энергии в системе отсчета их центра масс. Постройте качественный график зависимости расстояния $l$ между первой шайбой и стеной от времени $t$, отсчитываемого от момента первого столкновения шайб. Отметьте на нем характерные точки.

*Е.Весенин*

**Задача 4. Ледяная картина**

После добавления в сосуд с водой некоторого количества льда в нем устанавливается тепловое равновесие. На рисунке 3 приведе-

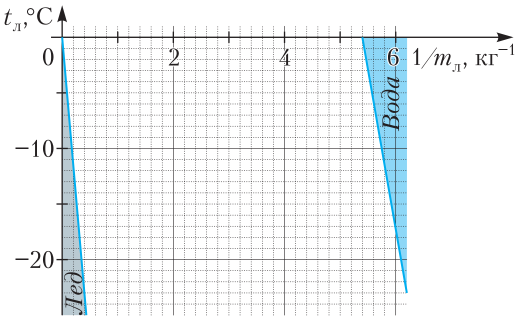



Рис. 3

на диаграмма, на которой выделены области с указанием конечного состояния содержимого сосуда в зависимости от температуры $t_л$ и массы $m_л$ добавленного льда.

1) Какая температура установится в сосуде, если в него добавить 0,5 кг льда при температуре −10 °С?

2) Определите начальную температуру $t$ и массу $m$ воды в сосуде.

Тепловыми потерями и теплоемкостью сосуда можно пренебречь. Содержимое из сосуда не выливается. Удельная теплота плавления льда $\lambda$ = 330 кДж/кг, удельная теплоемкость льда $c_л$ = 2100 Дж/(кг · °С), удельная теплоемкость воды $c$ = 4200 Дж/(кг · °С).

*М.Замятнин*

**Задача 5. Электроцикл**

Фрагмент электрической цепи состоит из соединенных параллельно диодов, резисторов, ключей и идеального вольтметра (рис. 4).

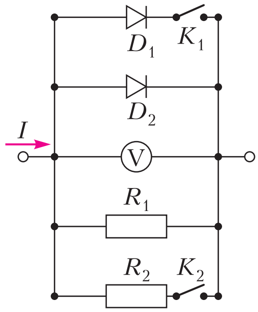



Рис. 4

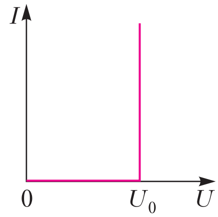



Рис. 5

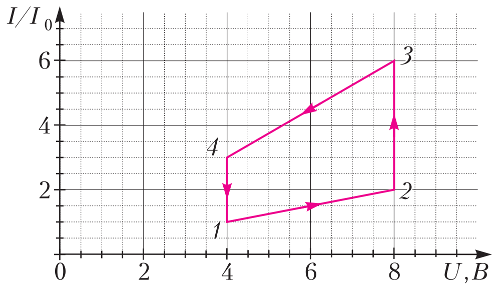



Рис. 6

Диоды $D_1$ и $D_2$ открываются при разных напряжениях $(U_{01} < U_{02})$. Их вольт-амперная характеристика приведена на рисунке 5. На диаграмме (рис. 6) изображен циклический процесс *1–2–3–4–1*, отражающий связь силы тока $I$, входящего в фрагмент, и показаний вольтметра $U$. Масштаб по оси ординат утерян, но известно, что в течение цикла сила тока $I$ изменялась с постоянной по модулю скоростью $k$ = 1 мА/с, а количество теплоты, выделившееся на резисторах в процессе *2–3*, равно $Q_{23}$ = 6,4 Дж. Опишите возможную последовательность действий с ключами, которая приведет к такому виду циклического процесса. Определите:

1) напряжения открытия диодов $U_{01}$ и $U_{02}$;

2) сопротивления резисторов $R_1$ и $R_2$;

3) время $\tau$, которое длился цикл;

4) количество теплоты $Q_{41}$, выделившееся на резисторах на участке *4–1*.

*Д.Рубцов*

*10 класс*

**Задача 1. Три тигра**

Три тигра одновременно начинают движение по горизонтальной поверхности с постоянными по модулю скоростями. Скорость первого тигра в любой момент времени направлена на второго, скорость второго – на

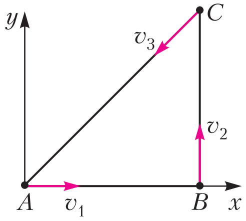


Рис. 7

третьего, а скорость третьего – на первого. В начальный момент времени тигры образуют прямоугольный треугольник с катетами, равными $L$ (рис. 7). Считайте размеры тигров много меньшими $L$. Модуль скорости первого тигра $v_1 = v$, где $v$ – известная величина, а скорости второго и третьего тигров $v_2$ и $v_3$ таковы, что в процессе движения углы в треугольнике $ABC$, образованном тиграми, остаются постоянными. Введем систему координат так, как показано на рисунке. Начало координат совпадает с положением первого тигра в момент старта (точка $A$). При ответе на первые три вопроса считайте, что тигры не проскальзывают по поверхности и могут развивать любое усилие. Найдите:

1) время $t$, через которое тигры встретятся;

2) модули скоростей второго и третьего тигров $v_2$ и $v_3$;

3) координаты $(x, y)$ точки, в которой тигры встретятся.

В действительности движение тигров ограничивается коэффициентами трения их лап о поверхность. Для каждого тигра он одинаков и равен $\mu$. Ускорение свободного падения $g$.

4) В течение какого времени $\tau$ с момента старта тигры могут поддерживать такое движение?

*А.Уймин*

**Задача 2. Поле цилиндра**

См. задачу Ф2707 «Задачника «Кванта».

**Задача 3. Электрическая тележка**

Электрическая тележка для перемещения грузов состоит из двух цилиндрических колес и корпуса (рис. 8). Расстояние между осями колес $2l$. Центр масс тележки $O$ выше пола на $h$ и на $x$ $(x > 0)$ правее средней точки между осями. Электродвигатели сообщают колесам быстрое встречное вращение, как показано на рисунке 8. Коэффициент трения колес о пол $\mu$ $(\mu < l/h)$. Массой колес можно пренебречь. Ускорение свободного падения $g$. Определите:

1) ускорение тележки в начальный момент времени, если ее колеса не отрываются от пола;

2) при каком(их) значении(ях) возможно движение без отрыва колес.

*И.Воробьев*

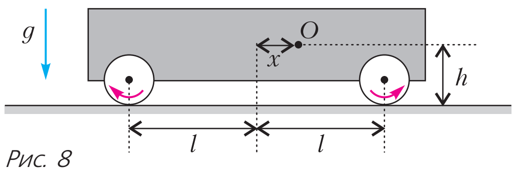


Рис. 8

**Задача 4. Неизвестная жидкость под поршнем**

См. задачу Ф2706 «Задачника «Кванта».

**Задача 5. Термоисточник**

Источник состоит из соединенных последовательно идеального источника постоянного напряжения $\mathcal{E}$ и терморезистора, сопротивление которого зависит от температуры по закону $R = R_0\left(1 + \alpha\left(t - t_0\right)\right)$, где $R_0$ – сопротивление резистора при температуре $t_0 = 0$ °C, $t$ – установившаяся температура резистора, $\alpha$ – постоянный коэффициент (рис. 9). На графике (рис. 10) приведена нагрузочная кривая источника, т.е. зависимость установившегося напряжения $U$ между его клеммами от силы протекающего через него тока $I$. При протекании тока $I_1 = 0{,}55$ А цепь разрывается, так как резистор плавится. Температура плавления известна и равна $t_{пл} = 306$ °C. Мощность тепловых потерь в окружающую среду от нагретого до темпе-

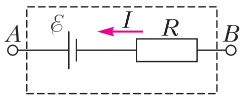


Рис. 9

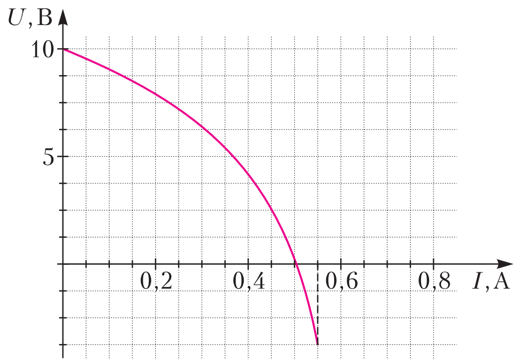


Рис. 10

ратуры $t$ резистора равна $N = \beta\left(t - t_{\text{среды}}\right)$, где $\beta$ – постоянный неизвестный коэффициент. Считайте, что температура окружающей среды $t_{\text{среды}} = t_0$. Определите:

1) напряжение $\mathscr{E}$ идеального источника;

2) сопротивление $R_0$;

3) напряжение $U_{AB}$ между клеммами $A$ и $B$, если к ним подключить резистор сопротивлением 10 Ом;

4) величину $\alpha$;

5) какую силу тока гарантированно не сможет пропускать аналогичный резистор, имеющий те же значения параметров $R_0$ и $\alpha$, но очень высокую температуру плавления.

*Д.Рубцов*

*11 класс*

**Задача 1. Две резинки**

На горизонтальной поверхности в точке $O$ удерживают шайбу массой $m$, связанную с двумя невесомыми резинками, продетыми через зафиксированные на этой поверхности гладкие колечки $B$ и $C$ (рис. 11). Другие

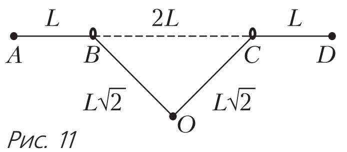



*Рис. 11*

концы резинок закреплены в точках $A$ и $D$, при этом $AB = CD = L$, $BC = 2L$, $BO = CO = L\sqrt{2}$. Длины обеих резинок в свободном состоянии равны $L$, а коэффициенты жесткости $k_{OBA} = k$, $k_{OCD} = 3k$, где $k$ – известная величина. Коэффициент трения шайбы о поверхность $\mu$, а резинки не касаются поверхности. Ускорение свободного падения $g$. Шайбу отпускают.

1) Найдите максимальную скорость $v_{\max}$ шайбы в процессе дальнейшего движения.

2) Определите время $\tau$ от момента старта до момента, когда максимальная скорость достигается.

*А.Уймин*

**Задача 2. Цилиндр и клапан**

В торце теплоизолированного цилиндра с поршнем установлен клапан (рис. 12), перекрывающий небольшое отверстие, который открывается и начинает пропускать воздух снаружи в цилиндр при перепаде давлений $\Delta p = p_0/3$ ($p_0$ – атмосферное давление). Воздух из цилиндра наружу клапан не пропускает. В начальный момент времени поршень

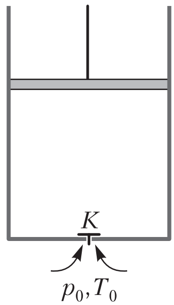



*Рис. 12*

прижат к торцу цилиндра, воздуха внутри нет. В первом случае цилиндр заполняют воздухом до объема $V_0$, медленно перемещая поршень, после чего останавливают, а затем освобождают поршень.

1) Определите температуру воздуха в цилиндре $T_1$ в момент остановки поршня при объеме $V_0$, а также температуру $T_2$ после освобождения поршня и прекращения его движения.

Во втором случае поршень резко перемещают в положение, при котором объем под поршнем равен $V_0$, так что воздух не успевает проникнуть через клапан в цилиндр. В этом положении поршень фиксируют, дожидаются заполнения цилиндра воздухом и так же, как в первом случае, освобождают поршень.

2) Определите и для этого случая температуру воздуха в цилиндре $T_1'$ после остановки поршня и заполнения цилиндра воздухом и температуру $T_2'$ после освобождения поршня и прекращения его движения. Считайте, что процесс заполнения цилиндра воздухом происходит квазистатически, клапан закрывается мгновенно после того, как разность давлений оказывается меньше пороговой.

Снаружи цилиндра воздух находится при атмосферном давлении и температуре $T_0$. Трением поршня о стенки, массой поршня, а также теплообменом воздуха с поршнем и стенками цилиндра можно пренебречь. Воздух можно считать двухатомным идеальным газом. После отпускания поршня клапан все время остается закрытым.

*А.Аполонский*

**Задача 3. Колебания заряда**

Длинная диэлектрическая тонкостенная труба радиусом $R$, равномерно заряженная с поверхностной плотностью заряда $\sigma$, закреплена горизонтально в поле тяжести $g$ (рис. 13). К верхней точке трубы одним

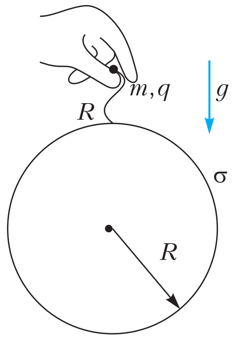


Рис. 13

концом прикреплена невесомая нерастяжимая непроводящая нить длиной $R$, на другом конце нити закреплен маленький заряженный шарик массой $m$. Знаки зарядов шарика и трубы совпадают. Шарик сначала удерживают так, что нить не натянута, а затем отпускают. Через некоторое время движение прекращается, причем нить принимает форму прямого отрезка, перпендикулярного оси цилиндра.

1) Какие значения может принимать величина заряда шарика $q$?

2) Определите величину силы натяжения нити при значениях заряда, полученных в первом пункте, и постройте график этой зависимости $F_н(q)$ с указанием характерных точек и участков.

3) Пусть модуль заряда шарика $q$, причем $q > 2\varepsilon_0 mg/\sigma$. Определите период малых гармонических колебаний шарика, происходящих в плоскости рисунка.

*А.Аполонский*

**Задача №4. Соленоид и виток**

См. задачу Ф2708 «Задачника «Кванта».

**Задача 5. Нелинейный элемент и конденсатор**

Рассмотрим нелинейный элемент (рис. 14) такой, что при протекании через него тока в направлении от $A$ к $B$ зависимость напряжения $U_{AB}$ от силы тока $I$ описывается формулой $U_{AB} = U_1 + \dfrac{A}{I}$, где $U_1 > 0$ и $A > 0$. Если сила тока, текущего через элемент, равна нулю, то напряжение на нем может принимать любые значения. В противоположном направлении электрический ток протекать не может. На рисунке 15 качественно представлена вольт-амперная характеристика

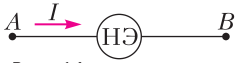


Рис. 14

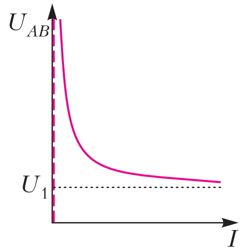


Рис. 15

нелинейного элемента. В данной задаче рассматриваются две электрические цепи, содержащие данный нелинейный элемент.

**Часть 1.** Электрическая цепь, схема которой приведена на рисунке 16, состоит из источника постоянного напряжения с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, резистора сопротивлением $R$ и нелинейного элемента с известными параметрами $U_1$ и $A$.

1) При каких значениях напряжения источника $U_0$ в цепи может протекать постоянный электрический ток?

**Часть 2.** Электрическая цепь, схема которой приведена на рисунке 17, состоит из источника постоянного напряжения $U_0$ с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, резистора сопротивлением $R$, конденсатора емкостью $C = 10$ мФ и нелинейного элемента, для которого $U_1 = 2$ В. Изначально конденсатор не заряжен. Затем в результате кратковременного внешнего воздействия в цепи начинает протекать электрический ток. На рисунке 18 представлен гра-

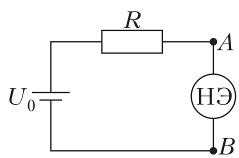


Рис. 16

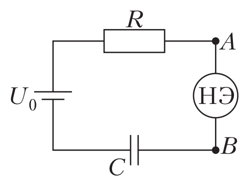


Рис. 17

Рис. 18

фик зависимости напряжения на конденсаторе $U_C$ от силы тока в цепи $I$. Точка *1* соответствует моменту времени начала протекания тока, точка *2* – достижению максимального напряжения на конденсаторе, а пунктирная линия *23* – прекращению протекания в цепи электрического тока.

2) Найдите $U_0$, $R$ и $A$.

3) Найдите количество теплоты $Q_R$, выделившееся на резисторе за все время протекания тока в цепи.

4) Определите время $\tau$, в течение которого в цепи протекал ток.

*А.Уймин*

**Победители олимпиады**

*9 класс*

*Гаранов Илья* – Москва,
*Кобозев Артем* – Москва,
*Прохоров Павел* – Москва,
*Чайка Максим* – Москва,
*Винокурова Елизавета* – Тюменская область,
*Муравьев Михаил* – Кировская область,
*Иванов Максим* – Пензенская область,
*Битлев Роберт* – Санкт-Петербург (8 класс),
*Чувилин Владислав* – Москва,

*Аверьянов Александр* – Москва;

*10 класс*

*Душанин Алексей* – Московская область,
*Ершов Александр* – Московская область,
*Буторин Глеб* – Москва,
*Стеценко Георгий* – Санкт-Петербург,
*Бобков Вячеслав* – Москва (9 класс),
*Паюсов Никита* – Кировская область,
*Мякутин Иван* – Москва,
*Важенин Юрий* – Москва,
*Кировичев Сергей* – Санкт-Петербург,
*Гаврилов Даниил* – Московская область (9 класс),
*Куимов Данила* – Кировская область;

*11 класс*

*Калашников Олег* – Московская область,
*Ерин Вадим* – Московская область,
*Гладышев Илья* – Москва,
*Гуляев Артем* – Москва,
*Яковлев Алексей* – Москва,
*Пермяков Максим* – Республика Мордовия,
*Терехова Ольга* – Московская область,
*Кравацкий Алексей* – Москва,
*Виноградов Иван* – Санкт-Петербург.

*Публикацию подготовил В.Слободянин*

## «Квант» для младших школьников

*(см. «Квант» №4)*

**1.** Один из возможных примеров приведен на рисунке 1.

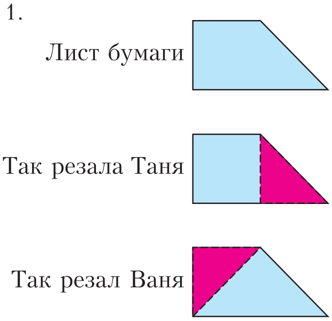



*Рис. 1*

**2.** 769999.

*Первое решение.* Сумма пяти последних цифр числа по условию делится нацело на 6 (частное равно первой цифре). Сумма четырех последних цифр числа также делится нацело на 6 (частное равно второй цифре). Поэтому вторая цифра, как разность двух чисел, делящихся на 6, также делится на 6. Значит, вторая цифра 0 или 6. Если она равна 0, то и сумма последних четырех цифр также равна 0, а значит, и первая цифра равна 0, но шестизначное число с нуля начинаться не может. Итак, этот вариант не подходит, и вторая цифра равняется 6. Тогда сумма последних четырех цифр равняется $6 \cdot 6 = 36$, а значит, все они равны 9. Наконец, сумма последних пяти цифр равняется 42, и, следовательно, первая цифра равняется $42 : 6 = 7$. Тем самым искомое число – это 769999.

*Второе решение.* Сумма последних 4 цифр в 6 раз больше, чем вторая цифра, значит, сумма последних 5 цифр равна 7 вторым и равна 6 первым цифрам. Следовательно, 7 вторых цифр равны 6 первым, значит, первая цифра равна 7, а вторая равна 6; тогда сумма последних четырех равна 36, а это достижимо, только если все 4 последние цифры – девятки.

*Комментарий.* Можно решить задачу, перебрав все возможные варианты (от 0 до 9) значения второй цифры числа. Например, если эта цифра равна 9, то сумма цифр правее нее в 6 раз больше, т.е. $9 \cdot 6 = 54$, но тогда сумма всех цифр правее первой равна $9 + 54 = 63$. Так как число 63 не делится на 6, вариант, что вторая цифра 9, не подходит и т.д.

**3.** а) Ответ показан на рисунке 2.

б) Максимальное число мест для задумчивых мышек равно 26 (рис.3).

*Комментарии.* 1. В любом примере для пункта б) один из концов каждого из следующих 10

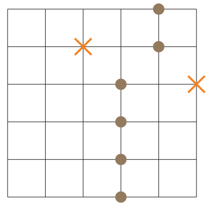


*Рис. 2*

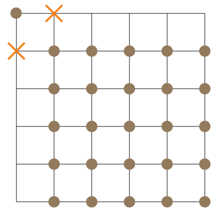


*Рис. 3*

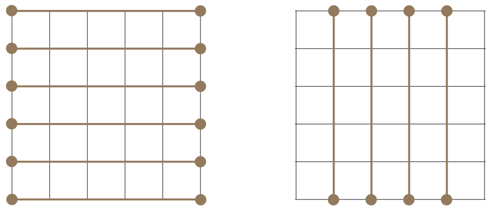


*Рис. 4*

отрезков должен быть свободен (если отмечены оба конца, то куски сыра должны располагаться на прямой, перпендикулярной этому отрезку, а значит, подходящих мест будет ровно 6; рис. 4). Отсюда можно вывести и то, что больше 26 задумчивых мышек быть не может: если один из концов свободен, то у нас есть минимум 10 неотмеченных перекрестков.

2. Сюжет задачи отсылает к известному мысленному эксперименту, наиболее ярко описанному немецким математиком и философом рубежа XVII–XVIII веков Готфридом Вильгельмом Лейбницем: «Голодный осел, оказавшийся на одинаковом расстоянии от двух совершенно одинаковых охапок сена, умрет с голоду, так и не выбрав, какую съесть». Этот эксперимент придуман не Лейбницем, он встречается и у других философов, рассуждавших о свободе выбора – у нидерландского философа XVII века Бенедикта Спинозы и даже у древнегреческого ученого Аристотеля в его трактате «О небе», где он иронически приведен в споре с софистами в качестве примера абсурдного умозаключения. А самого осла обычно называют буридановым в честь французского философа XIV века Жана Буридана. Выражение «буриданов осел» вошло в язык как обозначение нерешительного, сомневающегося, колеблющегося человека.

**4.** 98.

Будем считать, что сержант построил шеренгу солдат между двумя столбами. После первой команды каждый новобранец смотрит либо в затылок соседу, либо в лицо, кроме двух солдат с краю, которые могут смотреть на столбы.

Если солдат смотрит в затылок соседу, то после разворота этот сосед будет смотреть в затылок ему. Поэтому число смотрящих в затылок не поменяется.

Крайний солдат, смотревший на столб, после разворота не будет этого делать; напротив, если он не смотрел на столб, то после разворота будет. Таким образом, количество смотрящих на столб либо не изменится (был 1 и останется 1), либо увеличится на 2 (было 0, станет 2), либо уменьшится на 2 (было 2, станет 0).

Так как общее число солдат постоянно, число смотрящих в лицо также либо не изменится, либо увеличится или уменьшится на 2.

По условию, число солдат, смотрящих в лицо, сначала составляло шестую часть числа смотрящих в затылок, а потом седьмую часть. Значит, их количество уменьшилось (и, стало быть, уменьшилось на 2). С другой стороны, оно изменилось на $1/6 - 1/7 = 1/42$ от неизменного числа смотревших в затылок. Выходит, смотревших в затылок было $2 \cdot 42 = 84$ человека, а смотревших в лицо друг другу до разворота было $84 : 6 = 14$. Смотрящих на столбы при этом не было. Таким образом, общее число новобранцев $84 + 14 = 98$.

## Конкурс имени А.П.Савина

*(см. «Квант» №3)*

**25.** Не могло.

В первый год было сыграно $N(N-1)/2$ матчей, а значит, и побед было столько же, поэтому каждый выиграл по $(N-1)/2$ раз. Так как это целое число, $N$ нечетно. Аналогично, в следующем году было сыграно матчей и одержано побед $(N+1)N/2$, а значит, каждый выиграл $N/2$ раз, т.е. $N$ четно – противоречие.

**26.** 30°.

Проведем отрезок $CE$ (рис. 5). Треугольники $BCE$ и $ADE$ равны, так как в каждом есть по две равные синие стороны с углом $90° + 60° = 150°$ между ними. Тогда $CE = ED = EF$. Далее можно продолжить решение двумя способами.

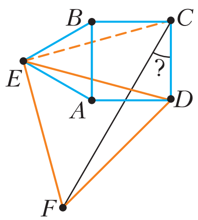



*Рис. 5*

*Первый* способ. При этом $\angle BEC = \angle AED = (180° - 150°)/2 = 15°$, значит, $\angle CED = 60° - 15° - 15° = 30°$, и $\angle CEF = 30° + 60° = 90°$. Итак, $CEF$ – прямоугольный равнобедренный треугольник, откуда $\angle ECF = 45°$ и $\angle DCF = 90° - \angle BCE - \angle ECF = 90° - 15° - 45° = 30°$.

*Второй способ*. Так как точка $E$ равноудалена от $C$, $D$ и $F$, то $E$ – центр описанной окружности треугольника $CDF$. Значит, угол $DEF$ в 2 раза больше угла $DCF$. Поэтому $\angle DCF = 60°/2 = 30°$.

**27.** а) 5049994950; б) 205.

а) Обозначим прогрессию $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$, ее разность – $d$. Так как $a_{100} - a_1 = 99d$, то первый и последний члены должны иметь одинаковые остатки при делении на 99.

Выберем $a_1$ и $a_{100}$ так, что $a_1 < a_{100}$ и они дают одинаковые остатки при делении на 99. Тогда $d$, а значит, и вся прогрессия, восстанавливаются однозначно. Сначала выберем остаток одним из 99 способов, затем выберем два числа из $\frac{999999}{99} = 10101$ чисел с таким остатком. Получим ответ $99 \cdot C_{10101}^2 = 99 \cdot \frac{10101 \cdot 10100}{2} = 5049994950$.

б) Обозначим прогрессию $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$. Прогрессия состоит из натуральных чисел, значит, ее знаменатель – рациональное (не обязательно натуральное!) число, пусть это $\frac{p}{q}$, где $p$ и $q$ взаимно просты и $p > q$. Тогда $a_{10} = a_1 \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^9$. Так как это целое число, то $a_1 p^9$ делится на $q^9$, а значит, и $a_1$ делится на $q^9$. Поэтому обозначим $a_1 = cq^9$, где $c$ – натуральное.

Итак, прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ представляет собой $cq^2, cpq^8, cp^2q^7, \ldots, cp^8q, cp^9$.

Для выбора такой прогрессии достаточно взять натуральные $c$, $p$, $q$ так, что $p > q$ и $cp^9 \le 99999$. Разберем три случая, каким может быть $p$.

- Если $p = 2$, то $q = 1$; $c \le \frac{99999}{2^9}$, что дает $\left[\frac{99999}{2^9}\right] = 195$ вариантов для $c$.
- Если $p = 3$, то для $q$ два варианта – 1 или 2; $c \le \frac{99999}{3^9}$, что дает $\left[\frac{99999}{3^9}\right] = 5$ вариантов для $c$, а значит, всего $2 \cdot 5 = 10$ вариантов.
- Если $p \ge 4$, то $cp^9 \ge 4^9 = 262144 > 99999$ – противоречие.

Получаем в сумме $195 + 10 = 205$ вариантов.

**28.** В обоих пунктах ответ 56.

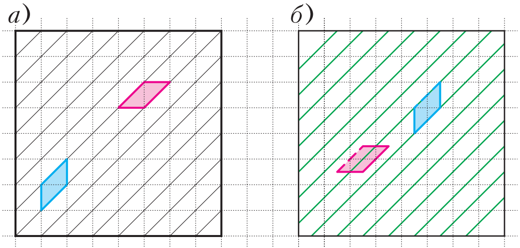



Рис. 6

а) Проведем в каждой клетке диагональ из левого нижнего угла в правый верхний (рис.6,*а*). Тем самым весь квадрат $8 \times 8$ окажется разрезан на 16 полосок: 14 трапеций и 2 треугольника. Тогда каждая фигурка занимает два треугольничка (по полклетки) в какой-то трапеции. Но каждая трапеция состоит из нечетного количества таких треугольничков, а значит, в каждой из 16 полосок хотя бы по полклетки будет не занято фигурками. Следовательно, незанятая площадь не менее $16/2 = 8$, поэтому занято не более $64 - 8 = 56$ клеток, а поэтому и фигурок не более 56.

Пример привести нетрудно: оставим в каждой полоске пустыми те треугольнички, которые примыкают к верхней и нижней границам квадрата. Оставшиеся части полосок можно заполнить фигурками, ориентированными так же, как синяя.

б) (Это решение предложила участница конкурса Александра Нестеренко.) В этом пункте тот же ответ, а следовательно, и пример подходит тот же.

Докажем оценку. В каждой из рассмотренных ранее трапеций проведем среднюю линию – получим зеленые линии, как на рисунке 6,*б*. Расстояние между зелеными линиями такое же, как ширина фигурки, поэтому каждую фигурку пересекает ровно одна линия. Отдельный случай составляют фигурки, которые граничат с двумя зелеными линиями (зажаты между линиями – как синяя фигурка на рисунке). Чтобы избавиться от этого исключения, будем рассматривать все фигурки без левой верхней границы (она изображена пунктиром), но с правой нижней. Тогда действительно каждая фигурка пересекает ровно одну зеленую линию, причем по отрезку длины $\sqrt{2}$.

Длины 14 зеленых линий составляют $\frac{3}{2}\sqrt{2}$, $\frac{5}{2}\sqrt{2}$, $\frac{7}{2}\sqrt{2}$, …, $\frac{15}{2}\sqrt{2}$ – по две линии каждой длины. При этом на каждой линии будет занято несколько раз по $\sqrt{2}$, а значит, будет занято не более чем $2(1+2+\ldots+7) = 7 \cdot 8 = 56$ отрезков по $\sqrt{2}$. Следовательно, и фигурок не более 56.

## Калейдоскоп «Кванта»

### Вопросы и задачи

**1.** Увы, этот опыт не удастся. Поле тяготения Солнца сообщает одинаковое ускорение всем частям используемого прибора.

**2.** Резко выдернуть платок из-под бутылки, скорее всего, не получится – ее положение слишком неустойчиво. Однако, равномерно и несильно постукивая кулаком одной руки по столу недалеко от бутылки, другой рукой платок можно аккуратно вытянуть. Дело в том, что при вибрациях сила трения уменьшается, главное – подобрать интенсивность и частоту ударов.

**3.** Колесики, приводящие в движение генераторы, вращаются из-за трения об обод одинаково, так как велосипеды едут с равными скоростями. Значит, и фонарики будут светить одинаково.

**4.** Для этого спичку достаточно согнуть посередине.

**5.** Оказывается, это возможно. Видимо, дело в том, что поверхность яйца не гладкая, на ней имеется множество мелких выступов, которые не дадут ему упасть. Правда, нужно большое терпение и время (подробности – в «Кванте» №2 за 2011 г.).

**6.** Когда бутылка переворачивается, поначалу давление водяного столба и воздуха в ней больше наружного давления, поэтому вода выливается, пока давления не сравняются. Но затем над оставшейся водой возникает разрежение, а значит, давление снизу, со стороны открытого горлышка, становится больше внутреннего давления воздуха, воздушный пузырь прорывает слой воды и лопается над нею – этот звук мы и слышим.

**7.** Быстрее потухнет спичка, лежащая на металле, дольше будет гореть та, что лежит на дереве (хотя сама поверхность не загорится), поскольку металл намного лучше камня и дерева отводит получаемое тепло.

**8.** При нагревании арбуза его кожура расширяется, за этим должно последовать и расширение сердцевины. На это необходима энергия, а так как снаружи она уже не поступает, то берется из «внутренних резервов» – и арбуз охлаждается.

**9.** Утром происходит испарение росы, а вечером – ее конденсация из насыщенного водяными парами воздуха. Первый процесс идет с поглощением тепла, а второй – с его выделением.

**10.** Нет, термометр не менял бы своих показаний.

**11.** Полная Луна наблюдается только в то время, когда Солнце ушло за горизонт. Летом оно пребывает там очень недолго, столько же видна и полная Луна. Зимой же происходит обратное явление.

**12.** Так как со временем нить накала лампы утончается, то ее сопротивление растет, сила тока через нее уменьшается, а мощность и яркость падают.

**13.** Если подводящие провода достаточно толстые, то их сопротивление мало и, в соответствии с законом Джоуля–Ленца, потери в них на тепловыделение также будут малы.

**14.** Для быстрого сбора гвоздей, очевидно, нужен магнит. Однако, «фишка» в условии – как *всыпать* гвозди в коробку? Для этого нужно перед сбором обернуть магнит бумагой, вместе с ней внести в коробку, а затем вытащить магнит из бумажной обертки – все гвозди сами посыпятся на дно.

## Всероссийская олимпиада по физике имени Дж.К.Максвелла

*7 класс*

**1.** 1) $L_x = 7L = 210$ см, $l_1 = L = 30$ см, $l_2 = 0{,}5L = 15$ см; 2) $v_1 = 30$ см/с, $v_2 = 15$ см/с.

**2.** 1) $\rho_к = 2\rho$, $\rho_с = \rho$, $\rho_з = 12\rho$; 2) см. рис. 7;

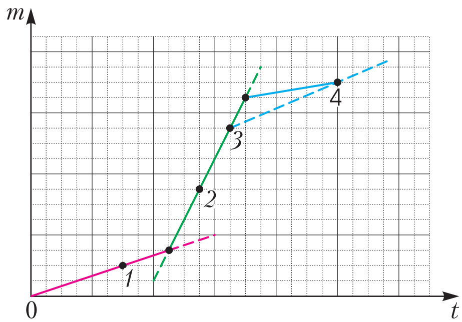



*Рис. 7*

3) $\rho_{гп} = 4{,}2\rho$; 4) $\dfrac{V_к}{V} = \dfrac{9}{20}$, $\dfrac{V_с}{V} = \dfrac{3}{10}$, $\dfrac{V_з}{V} = \dfrac{1}{4}$.

**3.** 1) $F_н = \dfrac{F}{2(n+1)}$; 2) $k_{эф} = (n+1)^2 k$ (результат не зависит от длин конкретных пружин).

**4.** 1) $h_{max} = \dfrac{p_0}{5\rho_ш g}$; 2) см. рис. 8, где $\rho_{ш1} > \dfrac{3}{5}\rho_р$,

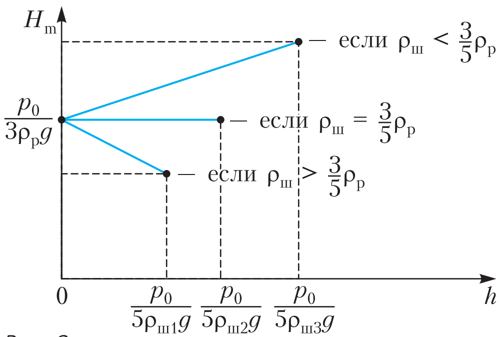



*Рис. 8*

$\rho_{ш2} = \dfrac{3}{5}\rho_р$, $\rho_{ш3} < \dfrac{3}{5}\rho_р$.

*8 класс*

**1.** 1) $v_{max} = \dfrac{11}{3}v$; 2) $v_{min} = \dfrac{6}{11}v$; 3) $\dfrac{4}{3}v \le v_{ср} \le \dfrac{3}{2}v$.

**3.** $R_{ED} = \dfrac{5}{3}$ Ом $= 1{,}7$ Ом, $R_{BD} = 5$ Ом.

**4.** 1) $L_с = \dfrac{(4aH + a^2)\chi(t_{внеш} - t_с)}{\mu h} \approx 580$ кДж/кг, где $\mu = 0{,}1$ г/с – скорость, с которой уменьшается масса «сухого льда»;

2) $\Delta m = \dfrac{c\rho h^2 \mu}{2\chi} = 5$ г.

## Заключительный этап LV Всероссийской олимпиады школьников по физике

*9 класс*

**1.** $\tau = \sqrt{2\dfrac{v^2 + la - \sqrt{v^4 + 2v^2 la - a^2 s^2}}{a^2}}$ (задачу можно решать в системе отсчета дороги или автобуса, а также можно воспользоваться методом аналогий: равноускоренное движение девочки в системе отсчета автобуса эквивалентно движению тела, брошенного со скоростью $v$ в однородном гравитационном поле с ускорением свободного падения $a$).

**3.** См. рис. 9 (на первом этапе первая шайба движется к стене со скоростью $(1+\beta)u/2$, где

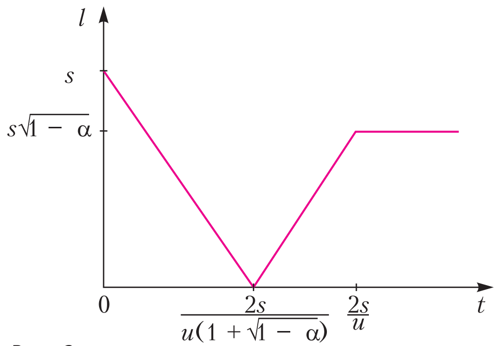



*Рис. 9*

$\beta = \sqrt{1-\alpha}$, на втором этапе шайба движется от стены со скоростью $(1+\beta)u/2$, на третьем этапе она покоится на расстоянии $s\sqrt{1-\alpha}$).

**4.** 1) $t_{уст} = 0$ °C; 2) $t = 88$ °C, $m = 165$ г.

**5.** 1) $U_{01} = 4$ В, $U_{02} = 8$ В; 2) $R_1 = 400$ Ом, $R_2 = 200$ Ом; 3) $\tau = 100$ с; 4) $Q_{41} = 0{,}8$ Дж.

*10 класс*

**1.** 1) $t = \dfrac{L}{v}$; 2) $v_2 = \dfrac{v}{2}$, $v_3 = \dfrac{v}{\sqrt{2}}$; 3) $x = \dfrac{4L}{5}$, $y = \dfrac{2L}{5}$; 4) $\tau = \dfrac{L}{v} - \dfrac{v}{2\mu g}$ при $\mu > \dfrac{v^2}{2gL}$, в противном случае $\tau = 0$.

**3.** 1) Ускорение направлено влево и равно $a = \dfrac{\mu g x}{l - \mu h}$; 2) $x < l - \mu h$.

**5.** 1) $\mathcal{E} = 10$ В; 2) $R_0 = 10$ Ом; 3) $U_{AB} = 4$ В; 4) $\alpha = 5{,}1 \cdot 10^{-3}$ град$^{-1}$; 5) $I > 0{,}71$ А.

*11 класс*

**1.** 1) $v_{\max} = L\sqrt{\dfrac{5k}{m}} - \dfrac{\mu g}{2}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$; 2) $\tau = \dfrac{T}{4}$, где $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{4k}}$ – период гармонических колебаний шайбы, как если бы она находилась под воздействием пружины жесткостью $4k$.

**2.** 1) $T_1 = T_0$, $T_2 = \dfrac{8}{7}T_0$; 2) $T_1' = \dfrac{7}{5}T_0$, $T_2' = \dfrac{8}{5}T_0$.

**3.** 1) $q \ge \dfrac{2\varepsilon_0 mg}{\sigma}$; 2) $F_{\text{н}} = mg$ при $q_1 < q < 2q_1$, где $q_1 = \dfrac{2\varepsilon_0 mg}{\sigma}$, и $F_{\text{н}} = \dfrac{q\sigma}{2\varepsilon_0} - mg$ при $q > 2q_1$, см. рис. 10; 3) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{4mR\varepsilon_0}{q\sigma - 4mg\varepsilon_0}}$ при $q > \dfrac{4\varepsilon_0 mg}{\sigma}$

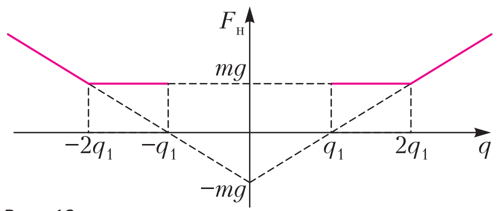



*Рис. 10*

и $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2mR\varepsilon_0}{4mg\varepsilon_0 - q\sigma}}$ при $\dfrac{2\varepsilon_0 mg}{\sigma} \le q < \dfrac{4\varepsilon_0 mg}{\sigma}$.

**5.** 1) $U_0 \ge U_1 + 2\sqrt{AR}$;

2) $U_0 = U_1 + U_{\max} + \dfrac{2I_1I_2U_{\max}}{(I_1 - I_2)^2} \approx 11{,}99$ В, где $U_{\max} \approx 6$ В, $I_1 \approx 9{,}6$ *А* (сила тока в цепи в точке *1*), $I_2 \approx 2$ А (сила тока в точке *2*), $R = \dfrac{I_1U_{\max}}{(I_1 - I_2)^2} \approx 997$ Ом, $A = \dfrac{I_1I_2^2U_{\max}}{(I_1 - I_2)^2} \approx 3{,}99$ мВт;

3) $Q_R = RCS \approx (370 - 383)$ мДж, где $S \approx (37{,}1 - 38{,}3)$ мВт;

4) $\tau = \dfrac{C}{A}\left((U_0 - U_1)U_{\max} - RS - \dfrac{U_{\max}^2}{2}\right) \approx (10{,}9 \pm 1{,}6)$ с.


# КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

М.Н.Грицук

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: +7 916 168-64-74
E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

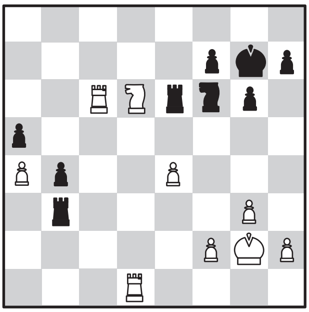
Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8
Тел.: (831) 218-40-40

# РедкаЯ КЛАССИКА

В 2022 году постепенно начинают сбываться пессимистичные прогнозы экспертов об «ускорении» шахмат и, как следствие, падении качества игры. Многие организаторы соревнований отказываются от классических шахмат в пользу рапида и блица. Так, в престижной серии Grand Chess Tour в этому году лишь два турнира из пяти проводятся с классическим контролем. Победителем первого из них стал французский гроссмейстер Максим Вашье-Лаграв.

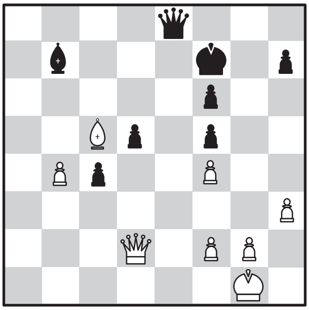
**А.Фирузджа – М.Вашье-Лаграв**
**Бухарест, 2022**

**1. d4 ♞f6 2. c4 g6 3. ♘f3 ♝g7 4. g3 c6 5. ♗g2 d5 6. 0-0 0-0 7. ♘e5 dc 8. ♘c4 ♝e6 9. b3 ♝d5 10. ♗b2 ♞bd7!? 11. ♘c3 ♝g2 12. ♔g2 b5 13. ♘d2 e5 14. de ♞e5 15. ♘de4 ♞eg4 16. ♘f6+ ♞f6** (к более сложной игре вело 16…♛f6 17. e4 ♛e6 18. ♕c2 ♜ad8) **17. ♕c2 ♛e7 18. ♖fe1 ♛c5 19. ♖ac1 ♜fe8 20. ♘d1 ♛c2 21. ♖c2 ♜e6 22. ♘e3 ♜d8 23. ♘f1 ♞d5** (с угрозой ♞b4) **24. ♗g7 ♚g7 25. a3 a5 26. ♘d2 b4 27. a4 ♜e3 28. ♖c6** (интереснее выглядело 28. ♖b2!? ♜e7 29. ♘c4) **♜c3 29. ♘c4 ♜b3 30. e4 ♜e8 31. ♘d6 ♜e6 32. ♖d1 ♞f6.**



**33. e5?** Динамическое равновесие сохранялось после 33. ♖d4, ходом в партии белые решили забрать пешку h7, недооценив опасность пешки b. **33… ♞g4** (но не 33…♜e5 34. ♖c7 ♞d5 35. ♖f7+ ♚g8 36. ♖d7, и у белых лучше) **34. ♖c7 ♞e5 35. f4 ♜d3 36. ♖d3 ♞d3 37. ♖f7+ ♚g8 38. ♖d7 b3!** (с постоянной угрозой b2) **39. ♖d8+ ♚g7 40. ♖d7+ ♚f8 41. ♘c4 b2 42. ♘b2 ♞b2 43. ♖a7 ♞a4 44. ♖a5 ♞b6 45. g4 ♞d7** (точнее 45…♜d6 46. f5 gf 47. ♖f5+ ♚g7) **46. ♔g3 ♜e3+ 47. ♔h4 ♞f6 48. ♖a8+ ♚f7 49. ♖a7+ ♜e7 50. ♖a5 ♞e4 51. f5 ♜d7 52. fg+?** (стоило попробовать 52. ♖a4 ♜e7 53. fg+ hg 54. ♔h3) **hg 53. ♖a4 ♜e7 54. ♖a5 ♚f6 55. g5+ ♚f7 56. ♔g4 ♞d6 57. ♖a4 ♞f5 58. h4?** (лучше 58. ♔f3) **♞g7 59. ♔f3 ♞h5** (с угрозой ♜e5) **60. ♖b4 ♜d7 61. ♔g4 ♜d6 62. ♖e4 ♜d1 63. ♖a4 ♚e6 64. ♖a6+ ♜d6 65. ♖a4 ♚e5 66. ♖a3 ♜d4+ 67. ♔h3 ♚f5 68. ♖a5+ ♚e4 69. ♔g4 ♚e3+ 70. ♔h3 ♜e4 71. ♖a1 ♚f2 72. ♖a2+ ♚f3 73. ♖a3+ ♜e3 74. ♖a4 ♞f4+**, и **белые сдались.**

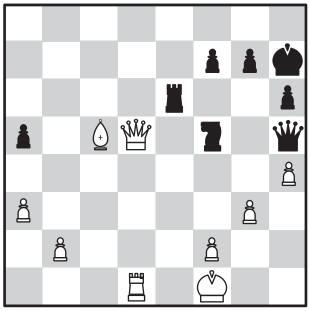
**У.Со – Ш.Мамедьяров**
**Бухарест, 2022**



**35. ♗d4 ♝c6 36. f3 h5 37. ♕f2 ♛f8 38. ♕b2 ♛b8 39. ♕d2 ♚g6** (активнее ♛e8! с контригрой по линии е) **40. ♕e3 ♚f7 41. ♗c3 ♝d7 42. ♔h2 ♛d6 43. ♔g3 ♚g6 44. ♔h4 ♝b5 45. ♕d4 ♝d7 46. ♕d2 ♝c6 47. ♗d4 ♝d7 48. g3 ♝e8 49. ♕b2 ♛c6** (стоило заблокировать пешку слоном 49…♝b5) **50. ♕a3 ♛a4 51. ♕e3** (с угрозой поставить мат после ♛e6) **♛d7** (лучше 51…♚f7) **52. b5!+ ♛b5?**, и, не дожидаясь 53. ♕e6, **черные сдались**. Победа в позиционном стиле – визитная карточка классических шахмат!

Решающая партия игралась на тай-брейке в рапид и показала огромную разницу в качестве игры на разных контролях.

**М.Вашье-Лаграв – У.Со**
**Бухарест 2022, рапид**

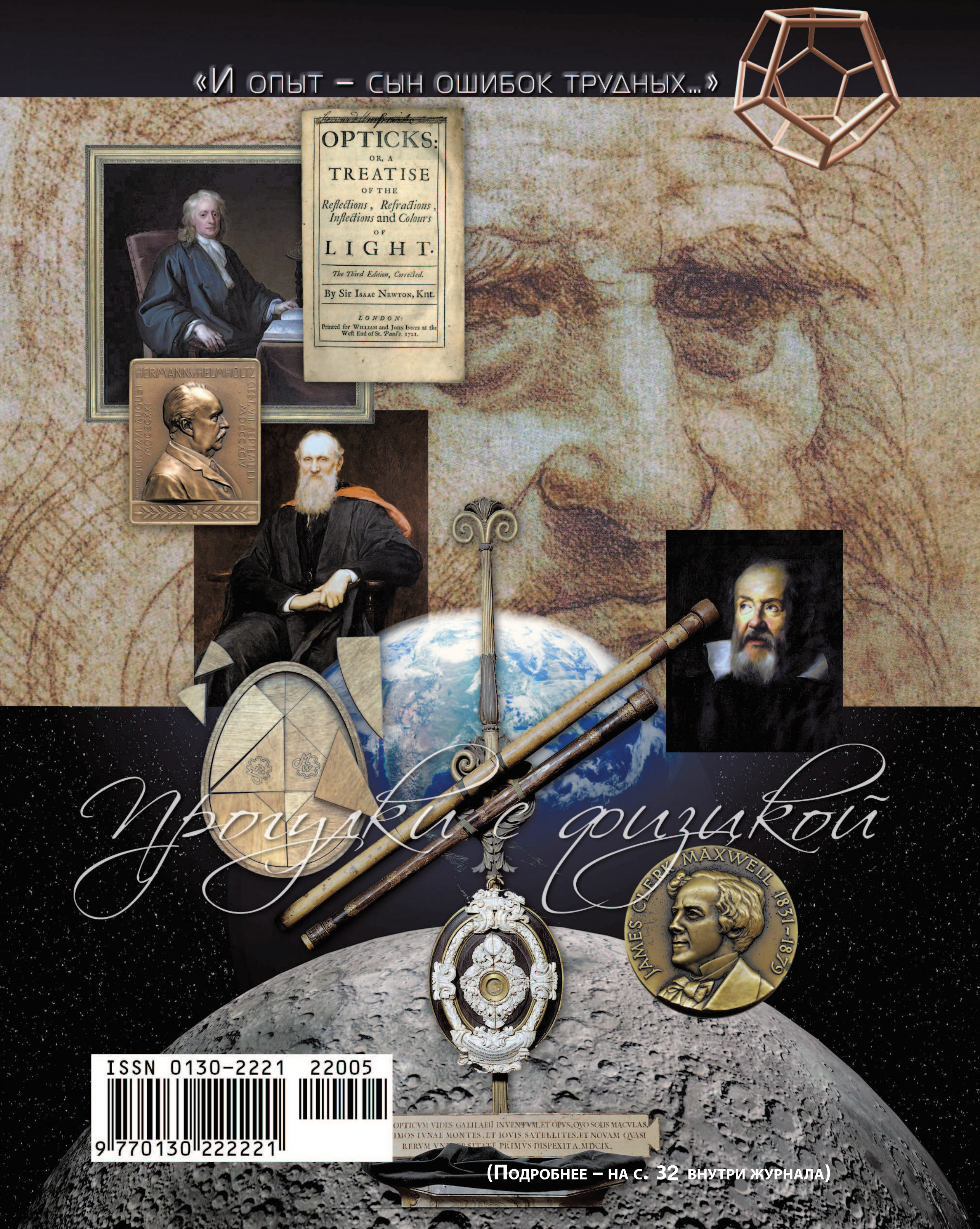


**32… ♛g4?** (черные не находят простое 32… ♛e2+! 33. ♔g2 ♜e5 с выигрышем фигуры) **33. b4 ab 34. ab ♜f6 35. ♔e1! ♜e6+ 36. ♔d2! ♛g6?** (точнее 36…♜e2+ 37. ♔c1 h5, запирая короля на первой горизонтали) **37. ♖e1+ ♜a6 38. ♖e5 ♞d6 39. h5 ♛f6** (с угрозой … ♛e5!) **40. f4 ♞f5 41. g4 ♞h4 42. ♕e4+ g6 43. b5 ♜a5 44. b6 ♛d8+ 45. ♔c3 ♛d1 46. ♕c2 ♛a1+ 47. ♔b4??** (правильно 47. ♔c4! ♜a2 48. hg+ ♞g6 49. ♕f5, сохраняя возможность убежать в лагерь черных) **♞f3??** (47…♜a2! 48. ♕a2 ♛a2 с выигрышем ферзя) **48. ♕b3??** (белые отдают свою ладью, вместо того чтобы выиграть чужую после 48. hg+ fg 49. ♗f8!+ ♚f8 50. ♖a5) **♞e5 49. fe ♛e1+ 50. ♔c4 ♛e2+?** Черные сами подталкивают короля к пешке, к выигрышу вело 50… ♛c1+! 51. ♔d3 ♛f1+ 52. ♔d4 ♛f2+ 53. ♕e3 ♛e3+ 54. ♔e3 ♜c5, и ладья останавливает пешку b. **51. ♔d5 ♛g4?** Две ошибки подряд – приговор для черных. Сохраняло равенство 51…gh 52. b7 ♜b5. **52. ♔d6 ♛c8**, и **черные сдались**, не дожидаясь 53. ♕f7 с потерей всех пешек на королевском фланге.

*А.Русанов*

Индекс 90964

## «И опыт – сын ошибок трудных...»




## Прогулки с физикой

ISSN 0130-2221 22005

(Подробнее – на с. 32 внутри журнала)