

ISSN 0130-2221

2022 · № 4

АПРЕЛЬ

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



КОЛОСЦО

из треугольников

(вариант с 20 треугольниками)

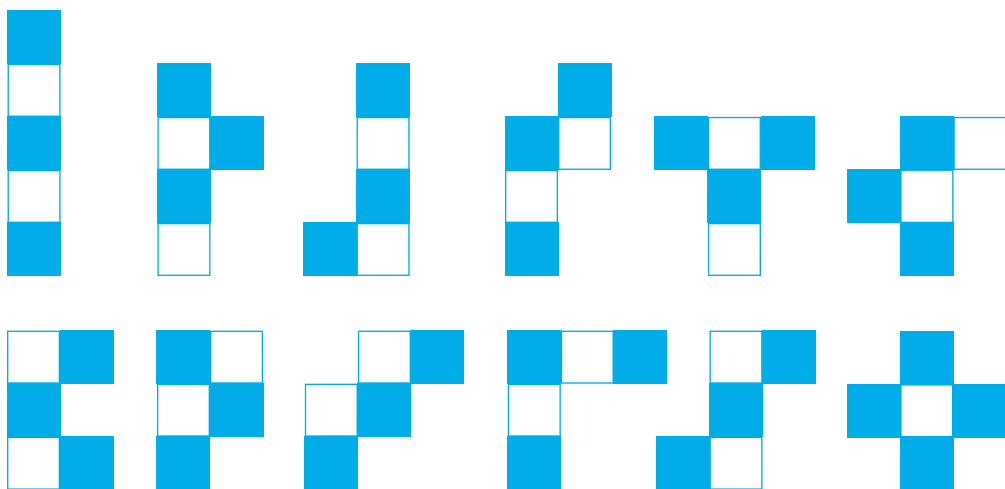
Вырежьте бумажную полосу размером 1×20 и расчертите ее на 20 прямоугольных треугольников с гипотенузой, равной 2. Раскрасьте треугольники с обеих сторон в два цвета и склейте полосу в кольцо (для этого стоит предусмотреть соединительный клапан). Перегните ленту по всем катетам прямоугольных треугольников, чтобы получилась боковая поверхность десятиугольной антипризмы. Головоломка готова.



Заданий сразу 12: оказывается, перегибая кольцо по катетам прямоугольных треугольников, можно сложить его в форме любой из фигурок пентамино (все они показаны на рисунке).

Желаем успеха!

Н.Авилов



В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук
Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН
Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,
М.Н.Бондаров, А.А.Варламов,
С.Д.Варламов, А.П.Веселов,
А.Н.Виленин, Н.П.Долбиллин,
С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,
А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов,
П.А.Кожевников (заместитель главного
редактора), С.П.Коновалов, К.П.Кохась,
А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, А.Б.Минеев,
В.Ю.Протасов, А.М.Райгородский,
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,
А.В.Устинов, А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджас, М.И.Башмаков, В.И.Берник,
А.А.Боровой, В.В.Козлов,
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДАГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
И.К.КикоинПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА
А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Смородинский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

- 2 Парадоксы теплообмена: «честно + честно+...
...+ честно = нечестно». *Е.Соколов*
11 Диафантовы уравнения и рациональные точки.
М.Башмаков

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 18 Задачи М2694–М2697, Ф2701–Ф2704
19 Решения задач М2682–М2685, Ф2689–Ф2692

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 29 Задачи

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 30 И речка подо льдом блестит... *А.Стасенко*
31 Лемма о трех биссектрисах. *Г.Филипповский*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 35 Лестница, статически неопределимая.
Л.Ашкинази

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 38 Задачи 29–32

ОЛИМПИАДЫ

- 38 LXXXV Московская математическая олимпиада
школьников
40 Ответы, указания, решения
Вниманию наших читателей (10,37)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «И речка подо льдом
блестит...»*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

Парадоксы теплообмена: «честно + честно + + честно = нечестно»

Е. СОКОЛОВ

Простая задача на разминку

Есть вещи настолько простые и обычные, что все мы искренне верим, что ничего интересного, а тем более парадоксального, с ними связано быть не может. Поэтому, когда учитель объявил тему нашего факультативного занятия, я был немного удивлен.

Ну скажите, что необычного может быть в теплообмене? Всем ясно, что если стакан с горячей водой привести в тепловой контакт с таким же стаканом, наполненным холодной водой, то тепло между ними распределится «по-честному», т. е. поровну, и температура в обоих стаканах станет равной среднему арифметическому (рис. 1). Проще простого! Так что, как

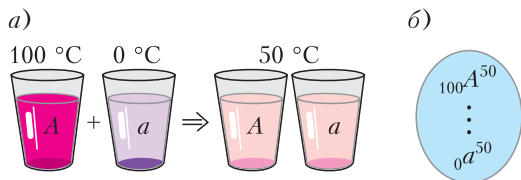


Рис. 1. Пример «честного» теплообмена (а) и его схематическое изображение (б): вертикальный пунктир символизирует процесс теплообмена, левые нижние индексы указывают начальные температуры воды в стаканах, правые верхние индексы – конечную температуру

только учитель прочитал условие первой задачи, я уже знал ответ.

Задача 1. Даны два стакана с горячей водой и два стакана с холодной водой (рис. 2,а). Массы воды во всех стаканах одинаковы. До какой максимальной тем-

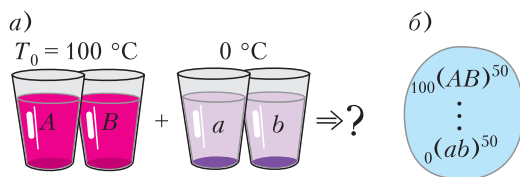


Рис. 2. По два стакана каждой температуры (а) и схема Петиного наивного решения (б)

пературы можно нагреть холодную воду? Считайте, что потеря тепла нет.

– Да хоть по одному стакану бери, хоть по два, – сразу сообразил я, – все равно, если все делить по-честному, ответ будет «50 градусов». Просто так меня не запутаешь!

Я решил немного подождать, чтобы дать и другим ребятам шанс догадаться до ответа. Однако все пошло не так, как я ожидал.

– У меня получился парадоксальный ответ, – вдруг объявила Маша. – Холодную воду можно сделать горячее, чем горячая!

– Такого быть не может! – закричали все.

– Нет, может! Смотрите, если первый стакан a с холодной водой привести в тепловой контакт с горячим стаканом A , то температуры поделаются поровну и будут равны 50°C , затем ... Впрочем, какие стаканы мы соединяем и как при этом изменяются температуры я изобразила на схеме (рис. 3,а). Главное, что в конце концов температуры воды в холодных стаканах будут равны $T_a = 75^\circ\text{C}$ и $T_b = 50^\circ\text{C}$, а в горячих – $T_A = 25^\circ\text{C}$ и $T_B = 50^\circ\text{C}$. Поэтому если слить холодную воду с один сосуд, то ее температура станет

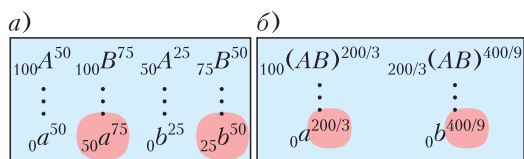


Рис. 3. а) Схема Машиного решения; б) схема Сашиного решения

равной

$$T_x = (T_a + T_b)/2 = 5T_0/8 = 62,5^\circ\text{C}$$

и, аналогично, у бывшей горячей воды температура станет равной

$$T_r = (T_A + T_B)/2 = 3T_0/8 = 37,5^\circ\text{C}.$$

Холодная вода стала горячее горячей!

Мы несколько раз перепроверили Машино решение, но ошибки не нашли. Все правильно.

– И у меня, тоже получилось, что холодную воду можно нагреть сильнее горячей, – сказал Саша. – Только я по-другому соединил стаканы. Я два горячих стакана *A* и *B* объединил в один и уже с этой парой соединял холодные стаканы *a* и *b* (рис. 3,б). Эффект у меня получился, правда, меньше, чем у Маши: $T_a = 2T_0/3$, $T_b = 4T_0/9$ и $T_{ab} = 5T_0/9 = 55,6^\circ\text{C}$. А для горячей воды вышло $T_{AB} = 4T_0/9 = 44,4^\circ\text{C}$.

Главный вопрос

– Ну, что же, – подвел итоги нашей дискуссии учитель. – Разминка прошла успешно. А вот главный вопрос нашего занятия: насколько «нечестными» могут оказаться сложные процессы обмена, состоящие из «абсолютно честных» элементарных обменов?

Этот вопрос интересен не только для теплотехники. В электростатике мы можем ставить вопрос об обменах электрическими зарядами между телами, а в химии и биологии – об обменах химическими веществами между молекулярными комплексами. И, конечно, понятно, что для нашего вопроса природа проводимого обмена совсем неважна. В таком случае разумно полностью абстрагироваться от частностей и рассматривать процессы обмена между стаканами на примере обмена некой

нейтральной воображаемой субстанцией. Я предлагаю считать, что в нашей задаче стаканы обмениваются *теплородом*.

– А что такое теплород?

– Теплород – это очень удобное мысленное понятие, с помощью которого можно наглядно представлять себе процессы теплообмена.

Тепло в теории теплорода представляется как некоторая невидимая, невесомая, всюду проникающая и неуничтожимая жидкость – теплород. Тела, участвующие в теплообмене, представляются как сосуды различной формы и размеров, температура – как уровень теплорода в каждом сосуде, а сам процесс теплообмена – как перетекание теплорода из одного сосуда в другой. Все очень наглядно. Когда тела приводятся в тепловой контакт, теплород, так же как это делает обычная вода, начинает перетекать от тела с высоким уровнем теплорода в тело с низким уровнем теплорода. А заканчивается процесс теплообмена тем, что уровни теплорода (температуры тел) выравниваются.

В качестве единицы количества теплорода мы возьмем такое количество, при получении которого температура стакана становится равной T_0 . Это позволит нам легко переходить от количества теплорода к температуре и обратно. А на схемах удобно указывать в индексах не температуры тел, а количества теплорода в них. Тогда для неизвестных конечных индексов работает простое правило – общее количество теплорода надо разделить поровну между всеми стаканами. На рисунке 4 показано, как выглядят в такой записи уже известные нам решения.

И еще одно немаловажное преимущество от введения теплорода – если в дальнейшем для решения задачи нам понадобится наделить его неким полезным каче-

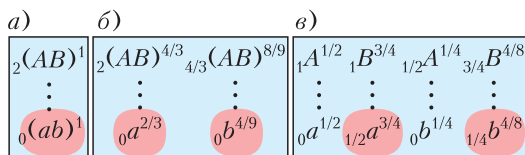


Рис. 4. а) Наивное решение; б) Сашино решение; в) Машино решение

ством, то никто не будет спорить с нами, что в реальности такого качества у теплорода нет.

– Какое полезное понятие! А почему мы его не знаем?

– Когда-то ученые думали, что теплород – это реально существующая жидкость. Но потом пришло понимание, что в реальности теплорода нет, а тепловые процессы – это процессы обмена внутренней энергией. От понятия теплорода решили отказаться и начали с ним бороться.¹ Борьба закончилась успехом – современные школьники не знают слова теплород. Парадоксальность ситуации заключается в том, что знаем мы или не знаем о теплороде, но, решая задачи на тепловой баланс, мы обычно мыслим понятиями классической теории теплорода.

И еще несколько полезных терминов.

Будем называть изначально горячие стаканы α -стаканами, а изначально холодные – β -стаканами. Так вот, эффект «обогащения» β -стаканов в процессе теплообмена в большинстве практических применений – это положительный, желаемый эффект, ради которого и конструируются различного рода обменники. Поэтому будем характеризовать этот эффект положительным термином «эффективность» и дадим этому термину следующее определение: эффективность процесса теплообмена η равна части начального количества теплорода, захваченной в результате теплообмена β -стаканами.

Итак, мы вооружились новыми полезными терминами и готовы приступить к решению обобщенной задачи о теплообмене.

Задача 2 (обобщенная). *Имеется n стаканов с горячей водой и столько же стаканов с холодной водой. До какой максимальной температуры можно нагреть воду в β -стаканах, используя: а) Сашин метод; б) Машин метод? Чему равно предельное значение эффективности каж-*

дого метода при $n \rightarrow \infty$? Начальные температуры воды в стаканах считать равными $T_0 = 100^\circ\text{C}$ и 0°C .

Конечно, мы себя немного ограничили такой формулировкой. Все-таки интересно было бы узнать максимально возможное значение эффективности, а не эффективности двух частных методов. Но у меня лично есть определенные надежды на Машин метод. Почему? Потому что, как можно доказать, в случае двух стаканов эффективность в принципе не может быть больше чем 62,5%, и Машин метод достигает этой эффективности. Будем надеяться, что он также хорошо работает и в общем случае.

Решение обобщенной задачи для Сашиного процесса

Я сам вызвался решать обобщенную Сашину задачу у доски. Я объединил все n α -стаканов в одну группу и решил выяснить, что получится, если мы соединим с

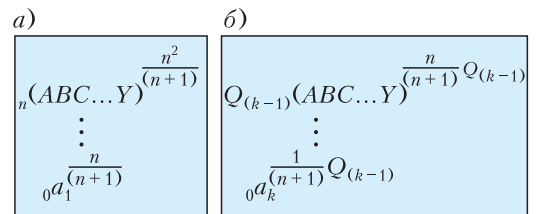


Рис. 5. Сашин метод и его схемы для: а) первого β -стакана; б) k -го β -стакана

этой группой первый β -стакан. Результат моих расчетов изображен на рисунке 5,а. Потом я подумал, что то же самое будет происходить и с другими β -стаканами. Поэтому я повторил свой рисунок для общего случая (рис. 5,б).

В общем получается, что после очередного теплообмена с k -м β -стаканом общее количество теплорода, оставшегося в α -стаканах, будет равно

$$Q_k = \frac{n}{(n+1)} Q_{(k-1)}.$$

Такие соотношения называются рекуррентными соотношениями. Они позволяют вычислять члены последовательности Q_k один за другим. В нашем случае это делается просто, поскольку наша последова-

¹ Понятию «электрическая жидкость» повезло больше: открытие электрона не дискредитировало его, а просто добавило новое свойство – «атомами» электрической жидкости являются заряженные элементарные частицы.

тельность является геометрической прогрессией с начальным членом $Q_0 = n$. Общая формула для k -го члена этой последовательности имеет вид

$$Q_k = \left(\frac{n}{n+1}\right)^k n, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Теперь мы готовы выписать ответ для эффективности Сашиного метода в общем случае. После того, как произойдут все n теплообменов, у α -стаканов останется

$Q_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n n$ единиц теплорода, т.е. β -стаканы заберут $(n - Q_n)$ единиц теплорода. С учетом того, что общее количество теплорода составляет n единиц, для эффективности Сашиного процесса получаем

$$\eta_n = 1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Случай	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=5$	$n=10$
η	1/2	5/9	37/64=0,578	0,598	0,614

Рис. 6. Несколько результатов для Сашиного метода

Это и есть окончательная формула моего решения. Я даже рассчитал по ней несколько значений (рис. 6). Два первых – чтобы проверить наш ответ по двум известным частным случаям $n = 1$ и $n = 2$ (все сошлось), а следующие – чтобы догадаться до того, что получается в пределе. К сожалению, до предельного значения я так и не догадался. Хотя из таблицы и видно, что с увеличением n эффективность растет, но не совсем понятно, чему будет равно ее предельное значение. У меня даже мелькнула мысль, что эффективность может дорасти до единицы!

– Спасибо, Петя, – поблагодарил меня учитель. – Нет, эффективность Сашиного метода до единицы не дотянет. Сейчас я расскажу, что дает твоя формула в пределе $n \rightarrow \infty$.

В Петиной формуле, ребята, мы встретились со вторым замечательным пределом

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

В этом пределе соревнуются две тенденции: уменьшение выражения внутри скобок с ростом n и увеличение самого значения за счет роста показателя степени. Что победит? Оказывается, все заканчивается миром – при увеличении n выражение стремится к иррациональному числу $e = 2,71281828\dots$, которое называется основанием натуральных логарифмов. Так что предельное значение эффективности Сашиного метода равно

$$\eta_\infty = 1 - \frac{1}{e} = 0,632 = 63,2\%.$$

Немного выше, чем у Машиного метода для двух стаканов, но не впечатляет. Переходим к исследованию Машиного метода.

Начало решения обобщенной задачи для Машиного процесса

– Исследование Машиного метода гораздо сложнее, чем Сашиного. В Сашином случае было только n теплообменов (каждый β -стакан соединялся лишь с одной группой α -стаканов). В Машином методе у нас будет n^2 теплообменов – каждый β -стакан взаимодействует с каждым α -стаканом. Поэтому принимаем меры предосторожности – заводим таблицу и аккуратно записываем в нее результаты теплообмена. Я думаю, таблицы для $n=7$ будет достаточно, чтобы мы смогли разглядеть в ней общие закономерности.

А теперь – самое главное. Придадим нашему воображаемому теплороду еще одно свойство – *цвет*. И будем считать, что в каждый α -стакан налит теплород определенного цвета: в первый синий, во второй – красный, в третий – зеленый и т.д. (рис. 7). Будем проводить теплообмен по Машинной схеме: сначала первый β -стакан по очереди соединяем с каждым α -стаканом, потом второй β -стакан соеди-

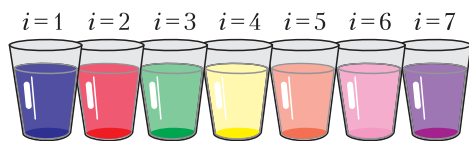


Рис. 7. Теперь в каждом α -стакане теплород своего цвета

нием с каждым α -стаканом, и так до последнего β -стакана с номером $k = n$.

А сейчас я попрошу выйти к доске Машу и занести в таблицу все, что происходит в теплообменах с теплородом синего цвета. А именно, записать в каждую ячейку число $Q_{i,k}$ – количество теплорода, которое осталось в i -м α -стакане после теплообмена с k -м β -стаканом.

Маша легко заполнила первые две строчки нашей таблицы (рис. 8).

– Во вспомогательной, закрашенной строчке без номера я просто записала, как был распределен синий теплород до начала обменов: в первом α -стакане ($i = 1$) была одна единица синего теплорода, а в остальных α -стаканах синего теплорода не было. Во второй строчке я записала, что остается в каждом α -стакане после контакта с первым β -стаканом ($k = 1$). Этот стакан получает от первого α -стакана $1/2$ единиц теплорода, а потом по-честному делится им с остальными α -стаканами. Кстати, захватывает первый β -стакан совсем немного синего теплорода – всего $1/2^7$. Мы записали это значение в специальную закрашенную колонку с правой стороны таблицы. Получается, что основной результат теплообмена на этом шаге заключается в том, что синий теплород просто размазывается по α -стаканам. Совсем плохая эффективность!

Строчку для $k = 2$ мы заполняли уже гораздо дольше. А начав заполнять строчку для $k = 3$, мы поняли, что если хотим дойти до конца, то должны рационализировать нашу работу.

Во-первых, нет необходимости держать последнюю строчку для того количества синего теплорода, который захватывает очередной β -стакан, – он уносит столько

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$	β
	1	0	0	0	0	0	0	
$k=1$	$1/2^1$	$1/2^2$	$1/2^3$	$1/2^4$	$1/2^5$	$1/2^6$	$1/2^7$	$1/2^7$
$k=2$	$1/2^2$	$2/2^3$	$3/2^4$	$4/2^5$	$5/2^6$	$6/2^7$	$7/2^8$	$7/2^8$
$k=3$	$1/2^3$	$3/2^4$						

Рис. 8. Первый опыт работы с синим теплородом

же, сколько остается в последнем α -стакане. Поэтому эти значения мы всегда будем видеть в колонке для $i = n$. Во-вторых, во всех значениях, которые стоят в таблице, просматриваются степени двойки. Поэтому давайте будем представлять величины $Q_{i,k}$ в виде

$$Q_{i,k} = \frac{d_{i,k}}{2^{i+k-1}}, \quad i, k = 1, \dots, n.$$

Теперь мы можем в ячейках писать только числители $d_{i,k}$, а знаменатели держать в уме (только не забывать их). И вообще, Маша, сформулируй, пожалуйста, четко правило, которым ты пользуешься при заполнении ячеек.

– Правило такое: «при теплообмене между i -м α -стаканом и k -м β -стаканом мы складываем те количества теплорода, которые в них содержатся к этому моменту, и делим пополам»:

$$Q_{i,k} = \frac{Q_{i-1,k} + Q_{i,k-1}}{2}, \quad i, k = 1, \dots, n.$$

Здесь мы учли, что количество теплорода $q_{i-1,k}$, оставшееся в k -м β -стакане, после теплообмена с $(i-1)$ -м α -стаканом равно $Q_{i-1,k}$. Граничными условиями для уравнений для $Q_{i,k}$ являются такие равенства:

$$Q_{1,0} = 1, \quad Q_{i,0} = Q_{0,k} = 0,$$

$$i = 2, \dots, n, \quad k = 1, \dots, n.$$

– Ребята, – обратился к нам наш учитель. – Сделайте последний шаг – превратите соотношения для $Q_{i,k}$ в соотношения для числителей $d_{i,k}$. Это очень ускорит заполнение таблицы.

Через некоторое время Маша записала на доске:

$$d_{i,k} = d_{i-1,k} + d_{i,k-1}, \quad i, k = 1, \dots, n.$$

Получается, чтобы найти значение числителя в ячейке (i,k) , надо сложить два числа: то, которое стоит слева, и то, которое стоит сверху. Последнее соотношение оказалось настолько удобным, что буквально через минуту у нас на доске появилась таблица, заполненная загадочными числами (рис. 9).

– Это не загадочные числа, а очень-очень даже известные числа. Это биномиальные коэффициенты. На рисунке $10, a$

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$
	1	0	0	0	0	0	0
$k=1$	1	1	1	1	1	1	1
$k=2$	1	2	3	4	5	6	7
$k=3$	1	3	6	10	15	21	28
$k=4$	1	4	10	20	35	56	84
$k=5$	1	5	15	35	70	126	210
$k=6$	1	6	21	56	126	252	462
$k=7$	1	7	28	84	210	462	924

Рис. 9. Таблица для синего теплорода (не забывайте о знаменателе)

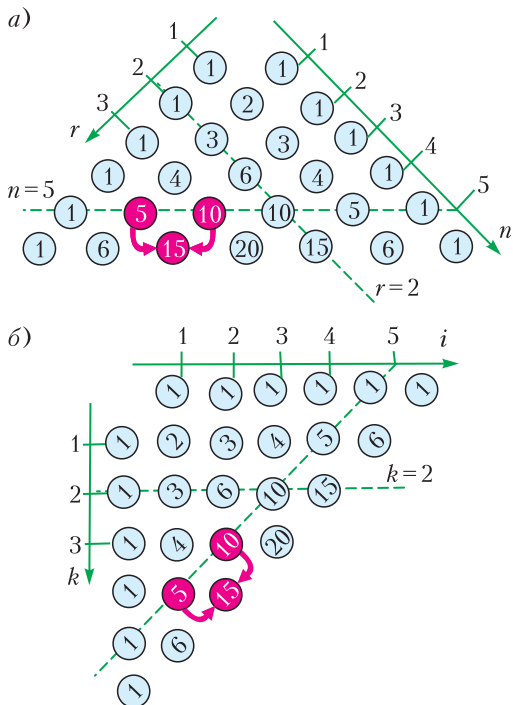


Рис. 10. Стандартный треугольник Паскаля (а) и треугольник Паскаля в нашей таблице (б)

представлен генератор биномиальных коэффициентов – треугольник Паскаля. Каждое число внутри этого треугольника, так же как числа нашей таблицы, являются суммой двух своих соседей. Легко проверить, что числа в треугольнике Паскаля подчиняются закону

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!},$$

где $\binom{n}{r}$ – стандартное обозначение бино-

минальных коэффициентов, а $n! = n(n-1)\dots 2 \cdot 1$ – факториал числа n .

В нашей таблице тоже есть треугольник Паскаля (рис. 10, б), только он повернут на угол 45 градусов. Поэтому структура формулы для числителей нашей таблицы ясна – это три факториала. Осталось только выяснить, какие комбинации i и k надо поставить вместо n и r . Попробуйте сами подобрать формулу по нескольким точкам.

Через некоторое время мы сумели сконструировать правильные выражения для числителей $d_{i,k}$ и, не забыв о двойках, записали на доске следующее окончательное выражение для чисел $Q_{i,k}$ нашей таблицы:

$$Q_{i,k} = \frac{(i+k-2)!}{(i-1)!(k-1)!} \frac{1}{2^{i+k-1}}, \quad i, k = 1, \dots, n.$$

– Ну, что же, – сказал учитель, – теперь мы полностью готовы, чтобы выписать ответ к нашей задаче.

Первое чудо

– Первый вопрос: какое общее количество синего теплорода захватили β -стаканы? Только давайте сделаем так: смотрим по нашей таблице 7×7 , какие ячейки надо суммировать, а ответ пишем для общего случая.

– Надо просуммировать ячейки последнего столбца, они показывают, сколько теплорода захватил каждый β -стакан. Поэтому получаем

$$q_n^{\text{син}} = \sum_{k=1}^n Q_{n,k} = \sum_{k=1}^n \frac{(n+k-2)!}{(n-1)!(k-1)!} \frac{1}{2^{n+k-1}}.$$

Формально ответ мы получили, но легче от этого, по-моему, не стало.

– Не растраивайся, Саша! В жизни иногда случаются и чудеса, особенно когда для этого есть веские причины. Выйди, пожалуйста, к доске и подсчитай, сколько синего теплорода осталось в α -стаканах.

– Надо подсчитать сумму элементов в нижней строчке нашей таблицы. Поэтому получаем

$$Q_n^{\text{син}} = \sum_{i=1}^n Q_{i,n} = \sum_{i=1}^n \frac{(i+n-2)!}{(i-1)!(n-1)!} \frac{1}{2^{i+n-1}}.$$

Получилась такая же сложная сумма, как и первая!

– Нет, не просто такая же сложная сумма, а та же самая сумма. Это первое чудо – обе суммы одинаковы! Напоминаю, что индекс, по которому производится суммирование, может быть обозначен любой буквой. И теперь, учитывая, что всего синего теплорода у нас была одна единица, получаем, что каждая из сумм $Q_n^{\text{син}}$ и $q_n^{\text{син}}$ равна $1/2$. Синий теплород распределился поровну между α - и β -стаканами. Понятно?

– Нет, ничего не понятно! Куда делся наш выигрыш? Мы точно знаем, что он должен быть!

Поиск выигрыша

– В том, что β -стаканы захватили только половину синего теплорода, ничего удивительного нет. Мы видели, как мало теплорода захватывали первые β -стаканы. Потом эффективность захвата увеличивается, но этого хватает только для честного распределения синего теплорода. Теперь объясним, как появляется выигрыш.

Рассмотрим движение по стаканам красного теплорода, который, по нашей договоренности, изначально заполнял второй α -стакан. Понятно, что при дальнейших теплообменах он будет перераспределяться лишь между α -стаканами, находящимися в таблице справа от него, а в первый α -стакан он никогда не попадет. Так что мы можем спокойно отодвинуть этот стакан в сторону и рассматривать оставшиеся шесть α -стаканов. Главное, что нам не надо заново рисовать таблицу для этих оставшихся шести α -стаканов – все, что с ними происходит, мы можем прочесть в части исходной таблицы размером 6×7 . На рисунке 11,а нужная нам часть окаймлена красной чертой. Просто надо считать, что номер $i = 1$ относится к бывшему второму α -стакану, номер $i = 2$ – к бывшему третьему α -стакану, ..., номер $i = 6$ – к бывшему седьмому.

Мы уже знаем, что когда отработают первые шесть β -стаканов, то они заберут ровно $1/2$ общего количества красного теп-

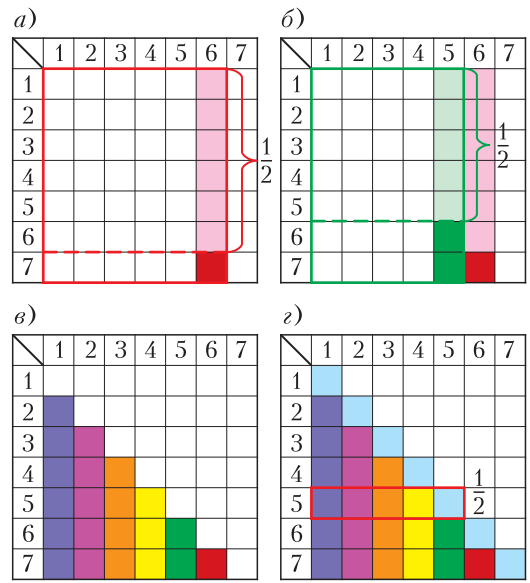


Рис. 11. Иллюстрация того, как появляется выигрыш

лорода. Но у нас остался еще седьмой β -стакан. Вот он и даст дополнительный выигрыш. Количество захваченного им красного теплорода записано в клетке с координатами $(i = 6, k = 7)$. На рисунке 11,а эта клетка закрашена красным цветом. Перераспределение зеленого теплорода, который по нашему договору изначально заполнял третий α -стакан, дает часть таблицы размером 5×7 , выделенную на рисунке 11,б зеленым контуром. Здесь уже два β -стакана дают добавку к стандартной $1/2$. Их вклад записан в двух клетках, выделенных на рисунке 11,б зеленым цветом. Продолжая так до самого последнего сорта теплорода, налитого в седьмой α -стакан, мы получим, что β -стаканы захватили количество теплорода

$$q_n^{\text{всего}} = n \cdot \frac{1}{2} + S_{\Delta},$$

где S_{Δ} – сумма всех значений $Q_{i,k}$, записанных в цветных клетках на рисунке 11,в.

Настал подходящий момент для второго чуда! Сведем двойное суммирование по закрашенным клеткам рисунка 11,в к обычному суммированию по голубым диагональным клеткам рисунка 11,г. Нам известно, что при равном количестве α - и β -стаканов каждый из них забирает ровно

половину теплорода соответствующего цвета. На геометрическом языке это означает, что если добавить к раскрашенным клеткам еще и диагональные клетки, то сумма всех значений, записанных в этих клетках, будет равна $n/2$ – в силу того, что по каждой горизонтали сумма значений цветных клеток равна $1/2$. Поэтому для S_Δ мы можем записать $S_\Delta = \frac{n}{2} - S_d$, а для общего количества теплорода в β -стаканах получим

$$Q_n^{\text{всего}} = n - S_d,$$

где S_d – сумма значений $Q_{i,k}$, стоящих в диагональных клетках.

Теперь можно записать ответ. Нам будет удобнее записать его для конечной средней температуры α -стаканов:

$$\frac{T_\alpha(n)}{T_0} = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n a_p.$$

Здесь под знаком суммы стоят диагональные элементы Машинной таблицы

$$a_p = Q_{pp} = \frac{(2p-2)!}{(p-1)!^2} \frac{1}{2^{2p-1}}.$$

Полученный ответ мы можем прочитать так: конечная температура α -стаканов равно среднему арифметическому значению элементов кортежа диагональных элементов длиной n .

Удивительно, но чудеса еще не закончились! Как можно показать (сделайте это самостоятельно), среднее значение n первых диагональных элементов Машинной таблицы оказывается равным удвоенному значению следующего диагонального элемента:

$$\frac{1}{n} \sum_{p=1}^n a_p = 2a_{n+1}.$$

Так что мы можем записать окончательный ответ к нашей задаче совсем просто. Нам хватит для этого всего четырех двоек, трех букв n и двух восклицательных знаков:

$$\frac{T_\alpha(n)}{T_0} = \frac{(2n)!}{n!^2} \frac{1}{2^{2n}}.$$

Обсуждение ответа

Для демонстрации ответа мы подсчитали несколько значений конечной темпера-

n	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=5$	$n=10$	$n=10^2$	$n=10^6$
$T_\alpha(n)/T_0$	1/2	3/8	0,313	0,246	0,176	0,056	0,0006

Рис. 12. Несколько результатов для Машинного метода

туры α -стаканов (рис. 12). Первые два значения мы вычислили для того, чтобы проверить нашу формулу по двум частным случаям $n=1$ и $n=2$ (все сошлось), а остальные – чтобы увидеть закономерность.

– А знаете, чем еще интересен наш ответ? Мы можем заполнять таблицу просто подбрасывая монеты! Дело в том, что наш ответ для n стаканов – это вероятность того, что, подкинув $2n$ монет, вы получите ничью – количество монет, упавших орлом вверх, окажется равным количеству монет, упавших орлом вниз (проверьте!). Давайте с вами проверим с помощью монет значение $n=5$ нашей таблицы.

Так мы и сделали, каждый подкинул 10 монет. Из 16 человек нашего класса (вместе с учителем) ничья вышла у четырех. Таким образом, для вероятности ничейного исхода получилось значение 0,25. Неплохое совпадение с табличным значением.

– Переход на язык теории вероятности позволяет нам не только весело заполнять таблицы, но и дает возможность увидеть поведение нашего ответа при больших n . В теории вероятности есть законы даже для хаоса. В частности, один из них говорит, что при случайном блуждании по целочисленной решетке облако броуновских частиц расплывается со временем по закону \sqrt{n} , где n – число шагов. Поэтому часть частиц, попадающих после совершения n шагов в исходную точку, уменьшается по закону $1/\sqrt{n}$. Случайные блуждания броуновских частиц и подбрасывание монетки – это два образных представления для описания случайных процессов, поэтому оценка $1/\sqrt{n}$ будет справедливой и для нашего ответа. А если привлечь на помощь еще и математику, то можно получить и коэффициент для нашей асимптотической оценки:

$$\frac{T_\alpha(n)}{T_0} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Эта формула доказывает, что предельное значение эффективности теплообмена, организованного по Машинному методу, равно единице.

Теперь мы готовы с полным основанием сделать окончательный вывод:

Большое количество «честных» процессов обмена может привести к «абсолютно нечестным» результатам. Увеличивая число стаканов, можно охладить бывшую горячую воду почти до нуля, а воду в изначально холодных стаканах нагреть практически до температуры T_0 .

– Молодец, Маша! – хороший метод придумала, пока некоторые смотрели в окно, – сказал наш учитель и почему-то посмотрел на меня. – Но и у отстающих пока остаются шансы. Конечно, в некотором смысле превзойти Машин метод не получится – он в пределе дает значение эффективности, равное единице. А понятно, что больше единицы эффективность быть не может. Но кто знает, а вдруг существует метод, который дает более быстрое, чем Машин $1/\sqrt{n}$, стремление к единице? Подумайте об этом.

Задачи для самостоятельного решения

1. Саша объединил в одну группу α -стаканы. А что, если объединить в группу не «богатых», а «бедных»? Какова эффективность процесса,

в котором группа из n β -стаканов по очереди соединяется с каждым α -стаканом?

2. Чему равна эффективность Сашиного метода для четырех α -стаканов и восьми β -стаканов?

3. Чему будут равны предельные значения температур α - и β -стаканов в Сашином процессе для очень большого количества α -стаканов? Количества «горячих» и «холодных» стаканов могут быть разными.

4. Найдите эффективность Машинного метода для случая, когда число α -стаканов равно четырем, а количество β -стаканов равно: а) двум; б) восьми.

5. В лаборатории есть несколько красных и синих стаканов (одинаковых размеров). Если в красные стаканы налить кипятка ($T_0 = 100^\circ\text{C}$), а в синие – ледяную воду (0°C) и провести теплообмен по Машинному правилу, то температура красных стаканов станет равной $T_1 = 4,8^\circ\text{C}$, а синих $T_2 = 47,6^\circ\text{C}$. А какими будут температуры стаканов, если поступить наоборот – в красные стаканы налить ледяную воду, а в синие кипятка?

6. В Машинном процессе большие группы β -стаканов ведут себя как самые настоящие ватаги разбойников. Их поведение подчиняется правилу: если нас больше – заберем все, если меньше – сколько можем унести. Обоснуйте это утверждение и найдите, чему равны предельные значения температур α - и β -стаканов в Машинном процессе при очень большом количестве β -стаканов.

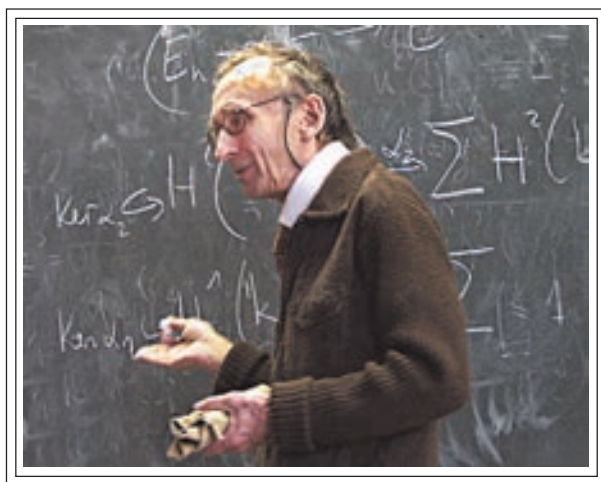
Вниманию наших читателей

Подписаться на журнал «Квант» можно с любого номера в любом почтовом отделении. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» – 90964.

Купить журнал «Квант» возможно в магазине «Математическая книга» издательства МЦНМО (адрес интернет-магазина: biblio.mcsme.ru), а также в московских книжных магазинах «Библио-глобус», «Молодая гвардия», «Московский дом книги» и в редакции журнала.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» имеется на сайте <http://kvant.ras.ru>

Марк Иванович Башмаков (1937–2022)



31 марта 2022 года ушел из жизни член редакционного совета журнала «Квант» Марк Иванович Башмаков — разносторонний ученый, математик, педагог, автор более 50 учебников по математике, альпинист и искусствовед-коллекционер.

Марк Иванович Башмаков родился 10 февраля 1937 года в Ленинграде. Во время Великой отечественной войны его отец ушел на фронт добровольцем, вернулся инвалидом. Пятилетний Марк с матерью и двумя братьями был эвакуирован из блокадного Ленинграда и возвратился туда после окончания войны.

Школу он закончил с золотой медалью и поступил на математико-механический факультет Ленинградского государственного университета. На матмехе учился отлично и успевал заниматься не только математикой — был секретарем комсомольской организации всего университета. В комсомольской работе, как и вообще в жизни, придерживался принципа — браться за трудные дела, доводить их до конца и никогда не впадать в формализм в убыток сущности дела.

Аспирантуру Башмаков завершил защитой диссертации «Когомология абелевых многообразий» на кафедре алгебры и теории чисел. В 60-е годы прошлого века началось активное научное сотрудничество СССР с другими

странами. Башмакова-аспиранта командировали в Гвинею — он преподавал там математику на французском языке, который быстро освоил перед поездкой. После окончания аспирантуры его как молодого ученого направили в Сорбонну — Парижский университет. Из Парижа Башмаков возвратился с новыми идеями по алгебраической геометрии, которые стали предметом его докторской диссертации и отдельным направлением, которое он поддерживал на кафедре алгебры и теории чисел матмеха ЛГУ. Под его руководством готовились кандидатские и докторские диссертации в этой области.

Большую часть жизни и души Марк Иванович вложил в организацию знаменитой физико-математической школы-интерната № 45 при университете и постановку в ней учебных курсов. За один 1962 год удалось добиться приказа министерства, выделения помещения, подбора преподавательского коллектива, разработки оригинальных учебных программ, набора в школу ребят из сельской местности Северо-Западного региона и, наконец, открытия в 1963 году математической школы-интерната. Решению организационных проблем немало способствовали тогдашний ректор Ленинградского университета Александр Данилович Александров — математик, физик, философ, альпинист, — и науч-

ный руководитель Башмакова Дмитрий Константинович Фаддеев — заведующий лабораторией алгебры (и при этом хороший пианист). На базе школы-интерната № 45 через несколько лет была создана Заочная математическая школа, знаменитая ЗМШ, которая по-прежнему увлекает математикой тысячи ребят из всех уголков большой страны (в том числе и одного из авторов этого текста). Вспоминается первая методическая книга Башмакова «Уравнения и неравенства», вышедшая в серии «Библиотечка физико-математической школы» в 1976 году. Эта небольшая книжка стала предтечей целой линии школьных учебников по математике, среди которых есть уникальные. Например, учебник для гуманитарного профиля не является упрощением школьного курса математики, а дает представление о математике с более философских позиций. В этом учебнике нашли отражение не только методические идеи Башмакова как педагога-математика, но и увлечения автора поэзией Серебряного века и изобразительным искусством.

С 1977 по 1991 год Башмаков заведовал кафедрой высшей математики №2 в Ленинградском электротехническом институте. Кафедра была создана специально для Башмакова — с целью организации в ЛЭТИ сильной математической школы. Башмаков собрал на кафедре сильный коллектив, соединив активно работающих в математике ученых (тополог В.М.Харламов, аналитик Е.М.Дынькин, специалист в дискретной математике С.В.Фомин, логик С.В.Соловьев, специалист по теории вероятностей В.А.Егоров и др.) со специалистами в методике преподавания математики. Традиции, заложенные Башмаковым, кафедра сохраняет и сейчас.

В 90-е годы Башмаков был избран депутатом Ленсовета, где возглавил Комиссию по образованию и участвовал в реформировании органов управления образованием. В это время по его плану создается Центр развития альтернативного образования, в рамках которого объединяются инициативные коллективы города по разным областям школьной деятельности. Эти коллективы стали пионерами во внедрении в образование города новых педагогических технологий. По инициативе Башмакова в России была запущена программа «Математика для всех», связующим звеном которой стал международный конкурс «Кенгуру», собираю-

щий до двух миллионов школьников России ежегодно. Марк Иванович организовал и аналогичные конкурсы по другим предметам, например, «Британский бульдог» по английскому языку, близкий ему по духу конкурс «Золотое руно» по истории мировой культуры и др.

В 30 лет, т.е. довольно поздно, Башмаков серьезно увлекся альпинизмом, а во всех своих увлечениях он добивался совершенства. Марк Иванович стал председателем секции альпинизма в университете. Студенты с замиранием сердца следили, как он карабкается на высокое кирпичное здание во дворе университета — здание Двенадцати коллегий, чтобы закрепить страховку для участников секции. Альпинизму Марк Иванович Башмаков посвятил более 50 лет, а по времени пребывания в горах — полжизни, как считал он сам. Последний раз он был в горах в 2021 году в день своего рождения — по традиции, он встречал этот день на горных вершинах. А так как день рождения у него в феврале, он стал одним из активных приверженцев зимних восхождений. За покорение пяти семитысячников награжден знаком «Снежный барс».

Еще одной стороной многогранной природы Марка Ивановича было увлечение книжной графикой. В его коллекции более 500 книг, настоящих произведений искусства. Эти книги изданы в небольшом числе экземпляров, причем художник и писатель являются соавторами. В них сливаются воедино мир литературы, мир графики и мир книгопечатания. В 2013 году в Эрмитаже состоялась первая выставка книг из коллекции Башмакова под названием «Книга художника». Позже такие выставки проходили каждый год, и Марк Иванович часто сам проводил экскурсии. В 2015 году в восточном крыле Главного штаба был открыт Кабинет книги художника, а Марк Иванович стал советником директора Эрмитажа. Сотрудники Эрмитажа считают Башмакова новым типом коллекционера — не столько собирателя книг, сколько их вдумчивого исследователя.

Во всех видах своей деятельности Марк Иванович Башмаков был необычайно талантлив. Светлую память о нем как о человеке большого масштаба и необыкновенных талантов навсегда сохранят все, кому повезло с ним общаться и работать.

С.Поздняков, С.Энтина

Диофантовы уравнения и рациональные точки

М. БАШМАКОВ

ОБЛАСТЬ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ, В КОТОРОЙ исследуются целочисленные решения уравнений вида $P(x, y, \dots) = 0$, где $P(x, y, \dots)$ – многочлен от нескольких переменных с целыми коэффициентами, называется *диофантовым анализом*, а сами эти уравнения – *диофантовыми*.

Названы они так по имени знаменитого греческого математика Диофанта, жившего в III веке и написавшего первый трактат о таких уравнениях.

Несмотря на то, что диофантовы уравнения составляют одну из самых старинных областей математики, общие методы их решения начали создаваться совсем недавно. В классических работах в основном рассматривались линейные и квадратные диофантовы уравнения. Решение более сложных уравнений сильно продвинулось в последние 20 – 25 лет благодаря широкому привлечению к теории чисел идей из других областей математики, прежде всего – из геометрии и топологии. Говоря словами Н. Бурбаки, «...классическая геометрия... превратилась в универсальный язык всей математики, обладающий исключительной гибкостью и удобством». Геометрия предлагает не только язык, но и свои построения, свою интуицию.

Посмотрите, как нагляден геометрический язык. Возьмем, например, уравнение Ферма $x^n + y^n = z^n$, поделим обе его части на z^n и обозначим x/z через u , y/z через v . Получим уравнение $u^n + v^n = 1$. Каждому решению $(x; y; z)$ уравнения Ферма в целых числах соответствует (при $z \neq 0$) решение уравнения $u^n + v^n = 1$ в рациональных числах.

Если мы рассмотрим теперь график этого уравнения на плоскости $(u; v)$, то получим кривую, причем целочисленным решениям уравнения Ферма отвечают точки этой кривой с рациональными координатами. Очевидно и обратное: каждая точка указанной кривой с рациональными координатами даст (после освобождения от знаменателя) целочисленное решение уравнения Ферма. Таким образом, вопрос о решении уравнения Ферма в переводе на геометрический язык превращается в вопрос о нахождении точек с рациональными координатами (мы их будем называть *рациональными*) на кривой $u^n + v^n = 1$.

(Заметим, что при делении уравнения Ферма на z^n мы «потеряли» его корни при $z = 0$, но их несложно исследовать отдельно.)

В этой статье мы познакомим вас с двумя геометрическими приемами отыскания рациональных точек на кривых.

Начнем для простоты с уравнения $x^2 + y^2 = z^2$, решения которого в натуральных числах называются *пифагоровыми тройками*. Кривая, соответствующая уравнению $x^2 + y^2 = z^2$, – это окружность $u^2 + v^2 = 1$. Пифагоровы тройки (3; 4; 5), (5; 12; 13) соответствуют рациональным точкам $(3/5; 4/5)$, $(5/13; 12/13)$ этой окружности (рис. 1).

Некоторые плоские кривые удобно задавать в так называемой *параметрической форме*; указать две функции f и g такие, что при всевозможных значениях параметра t точка

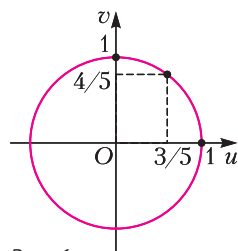


Рис. 1

$(f(t); g(t))$ принадлежит кривой и для каждой точки $(x_0; y_0)$ кривой найдется значение t_0 параметра t (возможно, не одно!), для которого $x_0 = f(t_0)$, $y_0 = g(t_0)$.

Например, если α – угол, соответствующий точке P окружности с координатами $(u; v)$, то $u = \cos\alpha$, $v = \sin\alpha$ – мы получили параметрическое задание окружности с помощью функций $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Можно параметризовать окружность и по-другому. Так, если произвести построение, приведенное на рисунке 2, то

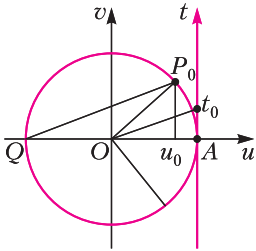


Рис. 2

из подобия треугольников OAt_0 и QP_0u_0 легко вывести, что

$$u = \frac{1-t^2}{1+t^2}, v = \frac{2t}{1+t^2}$$

(для читателей, знающих тригонометрию, заметим, что второе представление получается из первого заменой $\text{tg } \alpha/2$ на t).

Из формул, выражающих координаты u и v через t , видно, что рациональным значениям t сопоставляются рациональные точки окружности. Верно и обратное.

Задача 1. Докажите, что если $(u; v)$ – рациональная точка окружности [1]¹, то существует единственное значение параметра t , дающее u и v , причем это t тоже рационально.

Итак, рациональные точки окружности [2] мы поставили во взаимно однозначное соответствие с рациональными точками прямой t . Это соответствие алгебраически записывается указанными выше формулами, а геометрически изображено на рисунке 2. Тем самым задача отыскания рациональных точек на окружности нами решена.

Оказывается, есть много кривых, кроме окружности, которые можно параметризовать дробно-рациональными функциями. Эти кривые называются *рациональными*. К их числу относятся, например, все кривые, являющиеся графиками уравнений второй степени.

Задача 2. Найдите рациональные параметризации следующих кривых второго порядка:
а) $x^2 - y^2 = 1$ (гипербола);
б) $x^2 + xy + y^2 = 1$ (эллипс).

Рассмотрим теперь кривую, задаваемую уравнением третьей степени, которая тоже оказывается рациональной. Это кривая $y^2 = x^3 - x^2$. Она изображена на рисунке 3 и состоит из изолированной точки O и ветви, симметричной относительно оси x .

Задача 3. Обоснуйте рисунок 3.

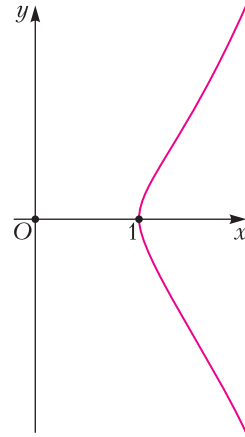


Рис. 3

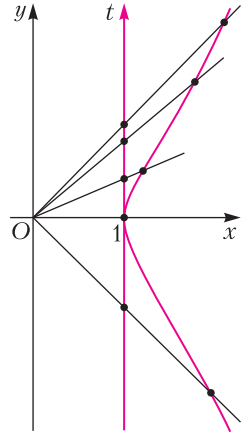


Рис. 4

Проведем через точку O всевозможные прямые $y = tx$. Значения углового коэффициента t можно откладывать на оси t , проведенной через точку $(1; 0)$ (рис. 4). Подставив $y = tx$ в уравнение кривой и сократив на x^2 (мы теряем при этом особую точку $O!$), получим параметризацию

$$\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = t(t^2 + 1), \end{cases}$$

при которой рациональным значениям t соответствуют рациональные точки кривой $y^2 = x^3 - x^2$.

Задача 4. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

Таким образом, между рациональными точками кривой $y^2 = x^3 - x^2$ (без точки $(0; 0)$) и прямой t удается установить взаимно однозначное соответствие. Геометрически оно представляет собой центральное проектирование, изображенное на рисунке 4.

¹ Комментарии [1]–[9] см. на с.28.

Аналогично можно найти рациональную параметризацию кривой $y^2 = x^3 + x^2$:

$$x = t^2 - 1, \quad y = t(t^2 - 1).$$

Задача 5. Постройте эту кривую и докажите, что если для значений параметра t_1, t_2 и t_3 выполняется соотношение

$$(t_1 - 1)(t_2 - 1)(t_3 - 1) = (t_1 + 1)(t_2 + 1)(t_3 + 1),$$

то три соответствующие точки лежат на одной прямой.

Итак, для каждой из рассмотренных нами рациональных кривых можно указать такое отображение прямой на кривую, при котором рациональные точки кривой отвечают рациональным точкам прямой. На самом деле это утверждение верно и для произвольной рациональной кривой, получаемой из диофантова уравнения.

Возникают вопросы – бывают ли нерациональные кривые? Как описать все рациональные кривые? Ответы на эти вопросы известны. Например, все кривые первой и второй степени рациональны. Бывают рациональные кривые любой степени, но все такие кривые степени больше двух имеют особенности – точки самопересечения, точки самокасания и т.п. (рис. 5).

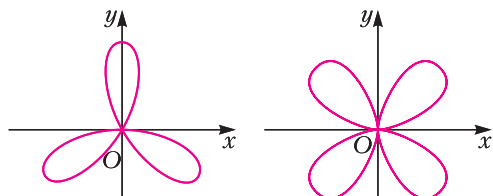


Рис. 5

При $n > 2$ кривая Ферма $u^n + v^n = 1$ не является рациональной. Можно доказать, что это эквивалентно утверждению о том, что уравнение Ферма $x^n + y^n = z^n$ не имеет решений среди многочленов $x(t), y(t), z(t)$ степени не меньше единицы. (Этот факт доказан в статье Б.Мартынова «Теорема Ферма для многочленов» в «Кванте» №8 за 1976 год.)

Второй прием мы снова покажем сначала на примере окружности. Возьмем две рациональные точки на окружности – например, $P_1(3/5; 4/5)$ и $P_2(5/13; 12/13)$. Пусть α_1 и α_2 – углы, соответствующее точкам P_1 и P_2 . Точка, соответствующая

углу $\alpha_1 + \alpha_2$, тоже будет рациональной, поскольку

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2,$$

$$\sin(\alpha_1 + \alpha_2) = \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2.$$

Таким образом, мы можем «складывать» рациональные точки на окружности по формуле

$$(u_1; v_1) \oplus (u_2; v_2) = (u_1 u_2 - v_1 v_2; u_1 v_2 + u_2 v_1)$$

и получать новые рациональные точки. Это свойство окружности лежит в основе многих красивых задач.

Задача 6. а) Пусть P_1 – рациональная точка окружности, соответствующая некоторому углу α . Докажите, что точки P_n , соответствующие углам $n\alpha$ ($n \in \mathbb{Z}$), тоже рациональны.

б) Докажите, что попарные расстояния между точками, построенными в пункте а), рациональны.

в) Постройте n точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой и попарные расстояния между которыми целые.

Оказывается, есть еще кривые с таким свойством: точки на них можно «складывать», причем «сумма» рациональных точек – рациональная точка. Для таких кривых иногда удается из двух рациональных точек «вытянуть» целую серию новых рациональных точек.

Рассмотрим в качестве примера кривую

$$y^2 + y = x^3 - x.$$

Задача 7. Докажите, что эта кривая не рациональна.

Возьмем две точки на этой кривой и проведем через них прямую. Эта прямая пересечет нашу кривую еще в одной точке (рис. 6). Действительно, если мы запишем уравнение проведенной нами прямой в виде $y = kx + b$ и подставим y в уравнение кривой, то получим уравнение третьей

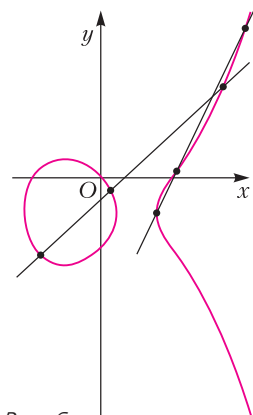


Рис. 6

степени относительно x . Три корня этого уравнения соответствуют абсциссам трех точек пересечения прямой и нашей кубической кривой. Пусть $P_1(x_1; y_1), P_2(x_2; y_2), P_3(x_3; y_3)$ – три точки пересечения прямой $y = kx + b$ и кривой $y^2 + y = x^3 - x$. Имеет место соотношение

$$x_1 + x_2 + x_3 = \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right)^2. \quad (*)$$

Для доказательства подставим $y = kx + b$ в уравнение кривой. Получим уравнение

$$x^3 - k^2x^2 - (2kb + k + 1)x - b^2 - b = 0.$$

Можно показать, что

$$x^3 - k^2x^2 - (2kb + k + 1)x - b^2 - b = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Следовательно,

$$x_1 + x_2 + x_3 = k^2.$$

Угловым коэффициентом k прямой, проходящей через точки $P_1(x_1; y_1)$ и $P_2(x_2; y_2)$, равен

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Тем самым мы получим (*).

Учитывая, что $y_3 = kx_3 + b, b = \frac{y_2x_1 - y_1x_2}{x_1 - x_2}$,

мы видим, что координаты третьей точки пересечения рациональны, если рациональны координаты первых двух точек. Это дает возможность получать новые решения уравнения $y^2 + y = x^3 - x$ в рациональных числах.

Замечание. Рассмотренное выше кубическое уравнение может иметь совпадающие корни. Это будет означать, что прямая и наша кривая касаются.

Мы построим сейчас бесконечную серию рациональных решений уравнения $y^2 + y = x^3 - x$ с помощью проведения секущих и касательных через известные рациональные точки. Заметим предварительно, что точки нашей кривой расположены парами – вместе с точкой $P(x_0; y_0)$ на кривой лежит точка $P'(x_0; -1 - y_0)$, симметричная ей относительно прямой $y = -\frac{1}{2}$. Это вытекает из тождества

$$y^2 + y = (-1 - y)^2 + (-1 - y).$$

Начнем с очевидной рациональной точки $P_1(0; 0)$. Симметричная к ней точка –

$P'_1(0; -1)$. Проведем через P_1 касательную (см. замечание). Уравнение этой касательной $y = -x$. Найдем точку ее пересечения с нашей кривой: $P_2(1; -1)$. Те, кто не умеют находить касательную, могут непосредственной подстановкой проверить, что рациональная точка P_2 лежит на нашей кривой. Из P_2 получаем точку $P'_2(1; 0)$.

Итак, на нашей кривой лежат четыре рациональные точки:

$$P_1(0; 0), P'_1(0; -1),$$

$$P_2(1; -1), P'_2(1; 0).$$

Теперь запускаем «конвейер». Проведем через P_1 и P'_2 прямую – это ось x . Она пересекает нашу кривую еще в одной очевидной точке $P_3(-1; 0)$. Вместе с симметричной точкой $P'_3(-1; -1)$ мы имеем шесть точек исходной кривой. Соединим точки P'_3 и P_1 . Получим прямую $y = x$. Третья точка пересечения находится легко: подставив $y = x$, получим кубическое уравнение $x^3 - x^2 - 2x = 0$, два корня которого нам известны. При помощи (*) получаем новую точку $P_4(2; 2)$ – неочевидное решение исходного уравнения. Продолжим этот процесс. Чтобы получить точку P_5 , проведем прямую через точки $P'_4(2; -3)$ и P_1 . Легко проверить, что получится точка $P_5(1/4; -3/8)$. По рисунку 7 проследить процесс построения новых точек просто. Вычисления по формуле (*) также несложны. В результате получаем серию

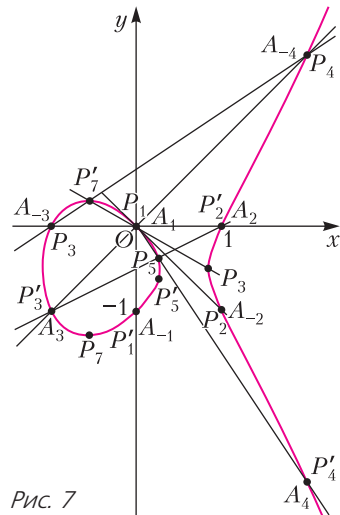


Рис. 7

точек, приведенную в таблице.

Бряд ли кто-то из читателей скажет, что все найденные нами решения очевидны.

В этом месте статьи у автора даже дух захватило – сколько содержательных вопросов можно поставить, глядя на безобидный рисунок 7. Вот несколько из них.

1. Получим ли мы проведением секущих и касательных бесконечную последовательность различных точек или наш процесс «заикнется»?

2. Все ли рациональные решения исходного уравнения встретятся в нашей последовательности?

3. Появятся ли еще целочисленные решения (как, например, выскочили точки (6; 14) и (6; -15)) или все последующие решения будут нецелыми? [3]

4. Случайно ли в знаменателях решений стоят квадраты и кубы целых чисел?

5. Из рисунка видно, что, например, точку P_5 можно получить иначе – проводя прямую через P_3' и P_2' . Случайно ли это?

6. Почти очевидно, что все точки с нечетными номерами расположены на одной ветви кривой, а с четными – на другой. Как это строго доказать?

Первые три вопроса очень трудны. Сообщу, что наша последовательность точек бесконечна и в ней встретятся все точки с рациональными координатами.

Вместо пояснений я приведу еще один пример. Рассмотрим очень похожую кривую $y^2 + y = x^3 - x^2$. Конфигурация, ана-

логичная построенной нами, обрывается на третьем шаге (рис. 8). Интересно, что эта кривая не имеет других рациональных точек, а уравнение $y^2 + y = x^3 - x^2$ не имеет решений в рациональных числах, кроме четырех тривиальных.

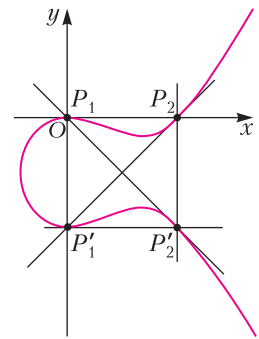


Рис. 8

Мы прикоснулись с вами к одному из самых сложных вопросов современной теории чисел

Известно, что на любой кубической кривой существует конечное число точек, начав с которых описанный процесс, можно получить все ее рациональные точки. Это было доказано около пятидесяти лет назад [4], однако до сих пор нет общего способа, позволяющего найти эти точки. [5]

Способ узнать, заикнется процесс проведения прямых или даст бесконечную конфигурацию, известен. Совсем недавно было доказано, что конечная конфигурация может иметь не более 11 точек и все случаи (кроме случая 10 точек) встречаются и хорошо изучены. [6]

На большинстве известных кривых число исходных точек для построения всех рациональных точек мало – одна-две. [7] Однако есть гипотеза, что для всякого n существуют кривые, требующие для построения всех решений n точек. Пока примеры построены для $n \leq 7$. [8]

И, наконец, последнее: если мы в нашем примере с кривой $y^2 + y = x^3 - x^2$ немножко изменим обозначения – напомним A_1 вместо P_1 , A_{-1} вместо P_1' , A_k вместо P_k' и A_{-k} вместо P_k (для $k \geq 2$), а «сложение» зададим несколько хитрей («суммой» \oplus двух точек назовем не третью точку пересечения прямой и кривой, а точку, симметричную ей относительно прямой $y = -\frac{1}{2}$), то получим формулу

$$A_m \oplus A_n = A_{m+n},$$

справедливую для всех целых m, n . [9]

	$P_1(0;0), P_1'(0;-1),$ $P_2(1;-1), P_2'(1;0)$
$P_3 = P_1 \oplus P_2'$	$P_3(-1;0), P_3'(-1;-1)$
$P_4 = P_1 \oplus P_3'$	$P_4(2;2), P_4'(2;-3)$
$P_5 = P_1 \oplus P_4'$	$P_5\left(\frac{1}{4}; -\frac{3}{8}\right), P_5'\left(\frac{1}{4}; -\frac{5}{8}\right)$
$P_6 = P_1 \oplus P_5'$	$P_6(6;-15), P_6'(6;14)$
$P_7 = P_1 \oplus P_6'$	$P_7\left(-\frac{5}{9}; -\frac{35}{27}\right), P_7'\left(-\frac{5}{9}; \frac{8}{27}\right)$
$P_8 = P_1 \oplus P_7'$	$P_8\left(\frac{21}{25}; -\frac{56}{125}\right), P_8'\left(\frac{21}{25}; -\frac{69}{125}\right)$

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: *math@kvant.ras.ru* и *phys@kvant.ras.ru* соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задача M2697 предлагалась на XXIV Кубке памяти А.Н.Колмогорова.

Задачи M2694–M2697, Ф2701–Ф2704

M2694. Назовем натуральное число n *интересным*, если любое натуральное число, не превосходящее n , может быть представлено в виде суммы нескольких (возможно, одного) попарно различных положительных делителей числа n . (Например, степень двойки является интересным числом).

- Найдите наибольшее трехзначное интересное число.
- Докажите, что существуют сколь угодно большие интересные числа, отличные от степеней двойки.

Н.Агаханов

M2695. Пусть окружность S и прямая l пересекаются в двух различных точках A и B . Для различных и отличных от точек A и B точек $X \in l$, $T \in l$, $Y \in S$, $Z \in S$ докажите следующие утверждения.

- Точки X , Y , Z лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{BX}} = \pm \frac{AY}{BY} \cdot \frac{AZ}{BZ}.$$

- Точки X , Y , Z , T лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{BX}} \cdot \frac{\overline{AT}}{\overline{BT}} = \pm \frac{AY}{BY} \cdot \frac{AZ}{BZ}.$$

(В обоих пунктах в правых частях равенств выбирается знак «+», если точки Y и Z лежат на одной дуге AB окружности S ,

и знак «-», если Y и Z лежат на разных дугах AB ; через $\frac{\overline{AX}}{\overline{BX}}$ обозначено отношение длин отрезков AX и BX , взятое со знаком «+» или «-» в зависимости от того, сонаправлены или противоположно направлены векторы \overline{AX} и \overline{BX} .)

М.Скопенков

M2896*. Существует ли последовательность натуральных чисел $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ такая, что число $a_i + a_j$ имеет четное количество различных простых делителей для любых двух различных натуральных индексов i, j ?

Фольклор

M2897*. На круговой автодороге стоят бензоколонки. Суммарного количества бензина в них хватает на два круга. Два водителя хотят заправиться на одной колонке и, стартовав от нее в разные стороны, объехать каждый весь круг; по пути можно заправляться на других колонках, не обязательно забирая весь бензин. Докажите, что водители всегда смогут это сделать.

И.Богданов

Ф2701. Скомканный до формы шарика диаметром $D = 3$ см лист бумаги формата А4 бросают вертикально вверх, придав ему начальную скорость $v_0 = 10$ м/с, с поверхности Земли и с поверхности Луны. Найдите отношение максимальных высот

подъема таких бумажных шариков. Ускорение свободного падения на поверхности Луны $g_{\text{л}} = 1,62 \text{ м/с}^2$, а на поверхности Земли $g_{\text{з}} = 9,81 \text{ м/с}^2$. С какой установившейся скоростью будет падать вблизи поверхности Земли такой комок бумаги, опущенный с большой высоты?

Подсказка. Сила сопротивления воздуха (вблизи поверхности Земли) пропорциональна квадрату скорости шарика, плотности воздуха ($1,2 \text{ кг/м}^3$) и поперечному сечению шарика. Безразмерный коэффициент в выражении для этой силы равен 0,24 (если все остальные величины выражены в единицах СИ). На пачке листов такой бумаги написано: 500 листов $210 \text{ мм} \times 297 \text{ мм}$, 80 г/м^2 .

С.Шариков

Ф2702. Для того чтобы штыковой лопатой (рис. 1) копать канаву, Вася (его масса

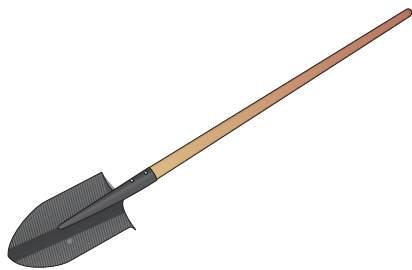


Рис. 1

80 кг) давит ногой на наступ (верхняя часть полотна лопаты, изогнутая под прямым углом), и к моменту остановки лопаты 50% его веса приходится на этот наступ. При этом полотно лопаты погружается (врезается) в грунт на полштыка – это примерно 15 см. Для отрыва срезанного грунта от поверхности лопаты требуется совершить еще примерно такую же работу, какая нужна, чтобы вогнать штык в грунт. Толщина отрезанного «ломтя» составляет в среднем 5 см. Оцените работу, которую нужно совершить, чтобы выкопать яму в форме куба с ребром $a = 1,5 \text{ м}$. Грунт имеет среднюю плотность $\rho = 1,5 \text{ г/см}^3$. Какая часть этой работы потребуется для разрушения цельности грунта, а какая на подъем «ломтя» на уровень краев ямы? Лопату будем считать невесомой.

В.Лопатин

Ф2703. Воздух в цилиндре длиной l можно изотермически сжимать с помощью легкой длинной пробки (рис. 2) до тех пор,

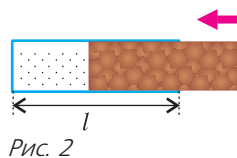


Рис. 2

пока длина столба воздуха в цилиндре не станет равной $l/3$ (при большем сжатии пробка выталкивается из цилиндра по прекращении действия силы). После такого максимального сжатия воздух в цилиндре медленно нагревают. До какой минимальной температуры нужно нагреть воздух, чтобы пробка полностью вышла из цилиндра? Начальная температура атмосферного воздуха $T_0 = 300 \text{ К}$. Считайте, что максимальная сила трения, действующая на пробку, прямо пропорциональна глубине ее погружения в сосуд. Силу тяжести можно не учитывать.

В.Манукян

Ф2704. Прямая пластиковая трубка с прозрачными стенками, открытая с двух концов, имеет круглое внутреннее поперечное сечение. Держа трубку вертикально, один из ее концов окунули в ведро с ртутью и в этом положении нижнее отверстие трубки заткнули пробкой. Ртуть стенки трубки смачивает. Затем трубку, сохраняя ее вертикальное положение, подняли, и в ней остался столбик ртути длиной $a = 20 \text{ см}$. Держа открытый конец трубки над ведром, трубку медленно перевернули на 180° , и теперь открытый ее конец оказался над поверхностью ртути. Столбик ртути так и остался вблизи конца трубки (теперь верхнего). Внешнее атмосферное давление 760 мм рт. ст., коэффициент поверхностного натяжения ртути $\sigma = 0,4 \text{ Дж/м}^2$ плотность ртути $\rho = 13600 \text{ кг/м}^3$. Какова длина трубки L и каким мог быть максимальный диаметр D внутреннего отверстия трубки?

В.Ртутный

Решения задач М2682–М2685, Ф2689–Ф2692

М2682. Даны шесть действительных чисел $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$. Для каждой тройки различных чисел из этих

шести Витя вычислил их сумму. Оказалось, что все 20 полученных сумм попарно различны; обозначим их через

$$s_1 < s_2 < s_3 < \dots < s_{19} < s_{20}.$$

При этом $x_2 + x_3 + x_4 = s_{11}$, $x_2 + x_3 + x_6 = s_{15}$ и $x_1 + x_2 + x_6 = s_m$. Найдите все возможные значения m .

Ответ: $m = 7$.

Наблюдение 1. Любая сумма, содержащая x_1 , меньше любой суммы, не содержащей x_1 .

Действительно, заметим, что $x_2 + x_3 + x_4$ — наименьшая среди всех 10 сумм, не содержащих x_1 . По условию она равна s_{11} , поэтому все остальные 9 сумм, не содержащих x_1 , должны быть равны $s_{12}, s_{13}, \dots, s_{20}$ в некотором порядке. Значит, все меньшие суммы, от s_1 до s_{10} , должны содержать x_1 .

Наблюдение 2. Рассмотрим суммы без x_1 . Среди них любая сумма, содержащая x_6 , больше любой суммы, не содержащей x_6 . Действительно, $x_2 + x_3 + x_4$ — наименьшая среди всех 6 сумм, не содержащих x_1 , но содержащих x_6 . По условию она равна s_{15} , поэтому все остальные 5 сумм, содержащих x_6 , но не x_1 , должны быть равны $s_{16}, s_{17}, \dots, s_{20}$ в некотором порядке. Тогда все суммы от s_{11} до s_{14} не содержат x_6 .

Наблюдение 3. Пары сумм, дополняющих друг друга до $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$, распределены симметрично: если одна сумма в паре — это s_i , то вторая — это s_{21-i} .

Завершим решение задачи. Рассмотрим сумму $x_3 + x_4 + x_5$. Согласно наблюдению 1, эта сумма больше любой из 10 сумм, содержащих x_1 . По наблюдению 2 эта сумма меньше любой из 6 сумм без x_1 , но с x_6 . А среди оставшихся 4 сумм (без x_1 и x_6) эта сумма явно наибольшая. Получается, что $x_3 + x_4 + x_5 = s_{14}$. Но тогда $x_1 + x_2 + x_6 = s_7$ по наблюдению 3. Таким образом, m может равняться только 7.

Замечание 1. Нетрудно подобрать набор чисел, удовлетворяющий условию. Например, подойдут числа $-32, 1, 2, 4, 8, 16$.

Замечание 2. Условие задачи позволяет упорядочить все суммы, кроме двух пар. Обозначив $X_{ijk} = x_i + x_j + x_k$, можно доказать, что

$$\begin{aligned} X_{123} < X_{124} < (X_{125}, X_{134}) < X_{135} < X_{145} < \\ < X_{126} < X_{136} < X_{146} < X_{156} < X_{234} < X_{235} < \\ < X_{245} < X_{345} < X_{236} < X_{246} < (X_{346}, X_{256}) < \\ < X_{356} < X_{456}. \end{aligned}$$

А. Юран

M2683. Есть сейф, который можно открыть, введя секретный код, состоящий из n цифр, каждая из которых — это 0 или 1. Изначально было введено n нулей, но сейф остался закрыт (т.е. все нули — это не секретный код).

За одну попытку можно ввести произвольную последовательность из n цифр, каждая из которых — это 0 или 1. Если введенная последовательность совпадает с секретным кодом, то сейф откроется. Если введенная последовательность совпадет с секретным кодом в большем количестве позиций, чем предыдущая введенная последовательность, то будет слышен щелчок. В иных случаях сейф останется закрытым и щелчка не будет. За какое наименьшее количество попыток гарантированно удастся открыть сейф?

Ответ: за n попыток.

Пример. Приведем алгоритм, гарантированно открывающий сейф за n попыток. Обозначим через $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ секретный код сейфа. Также положим

$$A_k = (a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 1, 0, 0, \dots, 0),$$

в частности, $A_0 = (0, 0, 0, \dots, 0)$.

Покажем индукцией по k для $k = 1, 2, \dots, n$, что на k -й попытке (если сейф не открылся ранее) мы сможем ввести последовательность A_k (для этого достаточно на k -м ходу научиться узнавать a_k). Это даст нужный алгоритм: действительно, если m — наибольший индекс, для которого $a_m = 1$, то $A = A_m$, и сейф открывается на m -й попытке.

База $k = 1$ очевидна: мы просто вводим в качестве первой попытки последовательность $A_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$.

Докажем индукционный переход $k \rightarrow k + 1$. Пусть мы последовательно ввели A_1, \dots, A_k и сейф еще не открыт после k попыток. Заметим, что последовательность A_k отли-

чается от последовательности A_{k-1} в k -й позиции и, возможно, еще в одной, $(k-1)$ -й, позиции — но в этой позиции A_k совпадает с A . Значит, если $a_k = 0$, то A_k не «ближе» (по количеству совпадений в позициях) к A , чем A_{k-1} . Если же $a_k = 1$, то A_k «ближе» к A , чем A_{k-1} . Таким образом, мы услышим щелчок после k -й попытки тогда и только тогда, когда $a_k = 1$. Тем самым после k -й попытки мы узнаем a_k . Значит, мы можем ввести последовательность A_{k+1} в качестве $(k+1)$ -й попытки

Оценка. Докажем, что $n-1$ попыток не хватит.

После каждой попытки будем считать количество *возможных* (т.е. не противоречащих исходам всех прошедших попыток, но и не испробованных) вариантов для секретного кода. Изначально возможных вариантов ровно $2^n - 1$ (все последовательности длины n из нулей и единиц, кроме последовательности из одних нулей). Предположим, что после k -й попытки осталось хотя бы $2^{n-k} - 1$ возможных вариантов; для $k=0$ это показано. Тогда докажем, что после $(k+1)$ -й попытки вне зависимости от введенной последовательности хотя бы в одном из исходов останется не менее $2^{n-k-1} - 1$ возможных вариантов.

Пусть на $(k+1)$ -й попытке введена некоторая последовательность B . Разобьем возможные (до этой попытки) варианты на 3 группы: совпадающие с B (таких или нет, или один); те, при которых должен раздаться щелчок; те, при которых щелчка не будет. (Каждый вариант попадет ровно в одну такую группу.) Возьмем из двух последних групп ту, в которой наибольшее количество вариантов, и тогда при соответствующем исходе у нас останется хотя бы $\frac{1}{2}((2^{n-k} - 1) - 1) = 2^{n-k-1} - 1$ возможных вариантов.

Таким образом, после $n-1$ попыток при некотором исходе останется хотя бы один возможный вариант, а значит, сейф все еще будет закрыт.

Задача решена.

Отметим, что оценку можно доказать и по-другому, сразу оценивая «количество информации» для алгоритма из $n-1$ ходов.

На каждом шаге либо имеет место «успех» (сейф открылся), либо алгоритм переходит в одну из двух ветвей, в зависимости от того, прозвучал или нет щелчок после выполнения шага. Таким образом, во всех ветвях алгоритма из $n-1$ шагов вводится не более $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-2} = 2^{n-1} - 1$ различных последовательностей. Но так как каждая из $2^n - 1$ последовательностей (кроме нулевой) может оказаться секретным кодом, то найдется случай, в котором такой алгоритм не справится с сейфом.

Д.Афризонов, П.Кожевников

M2684. Даны неотрицательные действительные числа a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 2$), сумма которых равна $\frac{n}{2}$. Для каждого $i = 1, \dots, n$ обозначим

$$b_i = a_i + a_i a_{i+1} + a_i a_{i+1} a_{i+2} + \dots$$

$$\dots + a_i a_{i+1} \dots a_{i+n-2} + 2a_i a_{i+1} \dots a_{i+n-1},$$

где $a_{j+n} = a_j$ для всех j . Докажите, что $b_i \geq 1$ хотя бы для одного индекса i .

Все индексы в решении будут рассматриваться по модулю n .

Предположим, что $b_i < 1$ для всех i . Тогда и $a_i \leq b_i < 1$ для всех i . Обозначим $A = a_1 a_2 \dots a_n$. Имеем

$$b_{i-1} = a_{i-1} + a_{i-1} b_i + A - 2A a_{i-1}.$$

Складывая такие равенства для всех $i = 1, 2, \dots, n$ и подставляя условие $a_1 + a_1 + \dots$

$$\dots + a_n = \frac{n}{2}, \text{ получаем}$$

$$\sum_{i=1}^n b_i = \frac{n}{2} + \sum_{i=1}^n b_i a_{i-1} + nA - nA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2} = \sum_{i=1}^n b_i (1 - a_{i-1}) < \sum_{i=1}^n (1 - a_{i-1}) = \frac{n}{2},$$

противоречие. Задача решена.

Другое решение можно получить, доказав следующую лемму: найдется индекс i такой, что

$$a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+j-1} \geq \frac{j}{2}$$

для каждого $j = 1, 2, \dots, n$. Далее можно установить, что найденный индекс i — искомый.

Д.Джукич, Ф.Петров

М2685*. Внутри тетраэдра $ABCD$ выбрана точка M таким образом, что $\angle MAD = \angle MBC$ и $\angle MDB = \angle MCA$. Докажите, что

$$MA \cdot MB + MC \cdot MD < \max(AD \cdot BC, AC \cdot BD).$$

Лемма. Для произвольной точки N внутри тетраэдра $ABCD$ имеет место неравенство

$$\angle ANC + \angle BND + \angle AND + \angle BNC > 2\pi.$$

Доказательство леммы. Действительно, пусть прямая DN пересекает плоскость ABC в точке E , а прямая BE пересекает отрезок AC в точке F (рис. 1). Тогда имеем

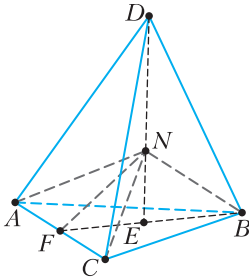


Рис. 1

$$\begin{aligned} \angle ANC + \angle BNC &= \angle ANF + (\angle CNF + \angle BNC) > \\ &> \angle ANF + \angle BNF = (\angle ANF + \angle FNE) + \\ &+ \angle BNE > \angle ANE + \angle BNE = (\pi - \angle AND) + \\ &+ (\pi - \angle BND), \end{aligned}$$

следовательно, $\angle ANC + \angle BNC + \angle AND + \angle BND > 2\pi$. Лемма доказана.

Согласно лемме, $(\angle AMC + \angle BMD) + (\angle AMD + \angle BMC) > 2\pi$, тогда

$\angle AMC + \angle BMD > \pi$ или $\angle AMD + \angle BMC > \pi$. Без ограничения общности будем считать, что имеет место первый случай.

Построим треугольник OUV с $\angle OUV = \pi - \angle AMC$ и $\angle OVU = \pi - \angle BMD$. На прямой UV найдутся такие точки T и S , что $\triangle T U O \sim \triangle C M A$ и $\triangle S V O \sim \triangle D M B$; при этом расположение точек будет таким, как показано на рисунке 2. Из равенства углов: $\angle U T O = \angle M C A = \angle M D B = \angle V S O$ получаем, что треугольник $T O S$ равнобедренный. Заметим, что

$$OT^2 = OU^2 + TU \cdot US \text{ и } OT^2 = OV^2 + TV \cdot VS.$$

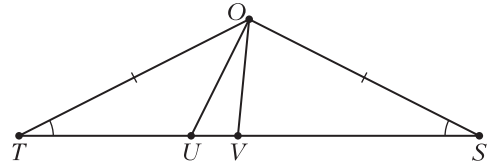


Рис. 2

Первое из этих равенств следует, например, из того, что $TU \cdot US$ – это степень точки U относительно окружности с центром O и радиусом $OT = OS$. По-другому его можно доказать так: пусть K – середина отрезка TS , тогда

$$\begin{aligned} TU \cdot US &= (KT + KU) \cdot (KT - KU) = \\ &= KT^2 - KU^2 = (KT^2 + KO^2) - \\ &- (KU^2 + KO^2) = OT^2 - OU^2. \end{aligned}$$

Второе равенство доказывается аналогично.

Без ограничения общности считаем $OV \leq OU$; тогда

$$OT \cdot OS = OT^2 = OU^2 + TU \cdot US > OU \cdot OV + TV \cdot VS,$$

что, согласно подобию, эквивалентно равенству $AC \cdot BD > MA \cdot MB + MC \cdot MD$.

Н. Седракян

Ф2689. Пыльную доску, наклоненную под углом θ к горизонту, привели во вращение вокруг вертикальной оси. Какая область останется заполненной пылью? Считается, что пыль находится поверх доски и держится на ней благодаря сухому трению с коэффициентом трения $\mu = \operatorname{tg} \alpha$, где $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ – угол трения. Предполагается, что $\alpha + \theta = \pi/2$. Ускорение силы тяжести g , угловая скорость вращения ω .

Во вращающейся вместе с доской – плоскостью Π на рисунке 1 – системе отсчета пылинка массой m будет находиться в равновесии под действием силы тяжести $m\vec{g}$, центробежной силы инерции $\vec{F}_{ц} = m\vec{g}_{ц}$, а также реакции связи, состоящей из нормальной компоненты \vec{N} и силы трения \vec{T} . Пусть \vec{n} – направленный вверх вектор единичной нормали к плоскости. Тогда условие равновесия пылинки запишется в виде

$$m\vec{g} + \vec{F}_{ц} + \vec{N} + \vec{T} = 0,$$

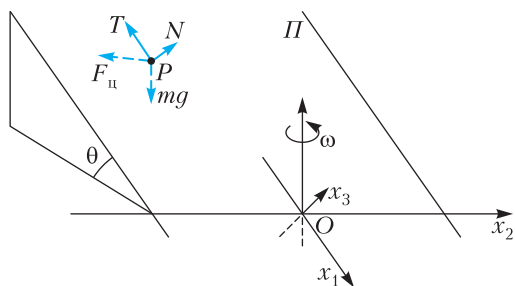


Рис. 1

или, обозначив сумму сил $m\vec{g}$ и \vec{F}_u через \vec{f} ,

$$\vec{f} + \vec{N} + \vec{T} = 0, \quad (1)$$

где $\vec{N} = N\vec{n}$. Согласно закону Кулона–Амонта, величины силы нормальной реакции и силы трения связаны неравенством

$$T \leq \mu N, \text{ или } T - \mu N \leq 0.$$

Домножая левую и правую части последнего неравенства на положительную величину $T + \mu N$, получим

$$T^2 - \mu^2 N^2 \leq 0, \text{ или } (\vec{T}, \vec{T}) - \mu^2 (\vec{N}, \vec{N}) \leq 0.$$

Здесь и далее круглые скобки применяются для обозначения скалярного произведения. Принимая во внимания ортогональность векторов \vec{T} и \vec{N} , последнее неравенство запишем в виде

$$(\vec{T} + \vec{N}, \vec{T} + \vec{N}) - (1 + \mu^2)(\vec{N}, \vec{N}) \leq 0. \quad (2)$$

Из скалярного умножения левой и правой частей равенства (1) на \vec{n} находим

$$(\vec{n}, \vec{f}) + (\vec{n}, \vec{N}) = (\vec{n}, \vec{f}) + N = 0, \text{ или } N = -(\vec{n}, \vec{f}).$$

Из того же равенства (1),

$$\vec{N} + \vec{T} = -\vec{f},$$

а неравенство (2) можно представить в виде

$$(\vec{f}, \vec{f}) - (1 + \mu^2)(\vec{n}, \vec{f})^2 \leq 0. \quad (3)$$

Неравенство (3) и неравенство

$$(\vec{n}, \vec{f}) < 0, \quad (4)$$

выражающее условие непроваливания пылинки под плоскость, составят предмет нашего дальнейшего исследования.

Пусть $x_1x_2x_3$ – подвижная система отсчета, начало которой, т.е. точка O , находится на пересечении плоскости Π и оси вращения,

координатная плоскость x_1x_2 совпадает с самой плоскостью Π , а ось x_3 направлена по нормали к этой плоскости (см. рис. 1). Тогда $x_3 = 0$ – уравнение плоскости Π , \vec{n} – единичная нормаль к этой плоскости, $\vec{\omega} = \omega(-\sin \theta, 0, \cos \theta)$ – вектор угловой скорости, $\vec{g} = g(\sin \theta, 0, -\cos \theta)$ – вектор ускорения свободного падения. Действующая на пылинку P , положение которой задается радиус-вектором $\vec{OP} = \vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, центробежная сила инерции определяется соотношением

$$\vec{g}_u = \vec{\omega} \times (\vec{x} \times \vec{\omega}) = \omega^2 \begin{pmatrix} \cos \theta (x_3 \sin \theta + x_1 \cos \theta) \\ x_2 \\ \sin \theta (x_3 \sin \theta + x_1 \cos \theta) \end{pmatrix}.$$

В случае, когда точка P принадлежит плоскости Π , т.е. $x_3 = 0$, это соотношение записывается как

$$\vec{g}_u = \omega^2 (x_1 \cos^2 \theta, x_2, x_1 \sin \theta \cos \theta).$$

В итоге получается

$$\frac{\vec{f}}{m} = \vec{g}_u + \vec{g} = \begin{pmatrix} \omega^2 x_1 \cos^2 \theta + g \sin \theta \\ \omega^2 x_2 \\ \omega^2 x_1 \sin \theta \cos \theta - g \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$\left(\frac{\vec{f}}{m}, \frac{\vec{f}}{m} \right) = g^2 + \omega^4 (x_1^2 \cos^2 \theta + x_2^2),$$

$$\left(\frac{\vec{f}}{m}, \vec{n} \right) = (\omega^2 x_1 \sin \theta - g) \cos \theta.$$

Тогда, принимая во внимание заданную в условии связь между углом наклона плоскости и углом трения, можно представить неравенство (3) в виде

$$\omega^4 x_2^2 + 2g\omega^2 \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} x_1 + \frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{\cos^2 \alpha} g^2 \leq 0,$$

или

$$x_1 \leq -\frac{1}{2} \left(\frac{\omega^2 \cos \alpha}{g \sin^2 \alpha} x_2^2 + \frac{g(2 \cos^2 \alpha - 1)}{\omega^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha} \right).$$

Это означает, что при $\omega \neq 0$ область Σ допустимых значений x_1, x_2 на плоскости Π ограничена параболой, ветви которой направлены вверх по скату. Вершина па-

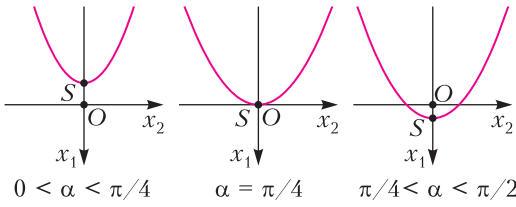


Рис. 2

работы $S(s_*, 0, 0)$, где

$$s_* = \frac{g(1 - 2 \cos^2 \alpha)}{2\omega^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha},$$

при $0 < \alpha < \pi/4$ располагается выше по скату, чем точка O , при $\alpha = \pi/4$ совпадает с этой точкой и находится ниже нее при $\pi/4 < \alpha < \pi/2$ (рис. 2). Неравенство (4), принимающее вид

$$(\omega^2 x_1 \cos \alpha - g) \sin \alpha < 0,$$

выделяет из области Σ физически осмысленные решения, в которых нормальная реакция доски направлена вверх. Решение этого неравенства записывается так:

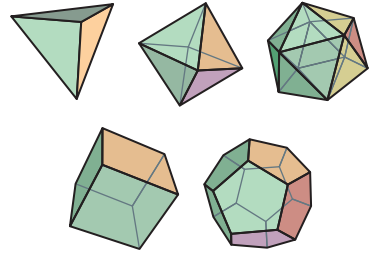
$$x_1 < x_* = \frac{g}{\omega^2 \cos \alpha}. \tag{5}$$

Поскольку, как можно проверить непосредственно, $x_* > s_*$, то вершина параболы S , а вместе с ней и вся область Σ располагаются выше прямой (5) и потому эта область заполнена физически осмысленными относительными равновесиями.

А.Буров, В.Никонов

Ф2690. *Правильный многогранник висит, будучи прикрепленным одной из своих вершин к шарниру без трения. Период малых колебаний возле положения равновесия равен T_1 . Каким будет период T_2 малых колебаний этого же многогранника, если точкой крепления шарнира выбрать центр одной из его граней? Масса многогранника равномерно распределена по его объему. Расстояния от центра многогранника до точек крепления равны L_1 и L_2 соответственно.*

Подсказка. Для правильных многогранников, коих, как известно, всего пять (см. рисунок), момент инерции относительно любой оси, проходящей через центр масс, имеет одно и то же значение.



Согласно теореме Гюйгенса–Штейнера, момент инерции многогранника массой M по отношению к оси вращения, проходящей через шарнир и перпендикулярной отрезку, соединяющему шарнир и центр масс многогранника в положении равновесия (длина этого отрезка L), равен $J = J_0 + ML^2$. Здесь J_0 – это момент инерции многогранника по отношению к оси, проходящей через его центр масс. Расстояния L для указанных в условии задачи точек крепления шарнира к поверхности многогранника удовлетворяют условию $L_1 > L_2$.

Уравнение малых колебаний получим энергетическим методом. По отношению к положению равновесия у многогранника при отклонении отрезка «центр масс–шарнир» от вертикали на угол α потенциальная энергия в поле тяжести увеличилась на величину

$$\Delta E_{\text{пот}} = MgL(1 - \cos \alpha).$$

При этом его кинетическая энергия стала равной

$$E_{\text{кин}} = \frac{J}{2} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2.$$

Сумма этих двух составляющих механической энергии сохраняется во времени. Если эту сумму продифференцировать, то получим уравнение малых колебаний (при учете соотношения $\alpha \ll 1$):

$$J \left(\frac{d\alpha}{dt} \right) \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2} + MgL \sin \alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt} = 0,$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{MgL}{J} \sin \alpha = 0, \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{MgL}{J} \alpha = 0.$$

Период таких малых колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{MgL}}.$$

Отсюда следует

$$J = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 MgL = J_0 + ML^2, \text{ или}$$

$$\frac{J}{M} = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 gL = \frac{J_0}{M} + L^2.$$

Поскольку в условии даны величины T_1 , L_1 и L_2 , то можно через них выразить величину периода T_2 :

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2 gL_1 - L_1^2 + L_2^2}{gL_2}}.$$

С. Многогранный

Ф2691. Два одинаковых сосуда шарообразной формы с жесткими и не проводящими тепло стенками, у которых еще и нулевая теплоемкость, используются в некотором эксперименте. Емкость каждого сосуда $V = 1 \text{ м}^3$. В одном из сосудов вакуум, а в другом газ аргон ($M = 40 \text{ г/моль}$) при комнатной температуре $T_0 = 300 \text{ К}$ и под давлением $p_0 = 1 \text{ атм}$. Сосуды соединены короткой трубкой, первоначально перекрытой задвижкой. Сечение трубки от стенки сосуда с большим давлением сначала плавно уменьшается до минимального в виде круга площадью $S = 1 \text{ см}^2$, и в этом месте установлена задвижка. Затем поперечное сечение трубки остается неизменным вплоть до стенки сосуда с низким давлением. Оба сосуда снабжены манометрами. Задвижку быстро открывают, дожидаясь момента, когда показания манометров станут одинаковыми, и снова быстро закрывают. Какими будут температуры (разные) и давления (одинаковые) в этих сосудах? Какая доля от общей массы газа окажется в итоге в первоначально пустом сосуде? Оцените также время, в течение которого шло перетекание газа из одного сосуда в другой.

Очевидно, что перетекание газа происходит адиабатически. В этом случае изменение энергии газа в первом сосуде (в некоторый промежуточный момент процесса) можно записать в виде

$$dU = -pdV + \alpha \frac{dm}{M}.$$

Напомним, что в общем случае изменение энергии термодинамической системы может быть осуществлено тремя способами: теплопередачей, работой и изменением количества вещества. В нашем случае адиабатного процесса теплопередачи нет, но есть изменение количества газа. Параметр α в формуле для dU равен удельному изменению энергии при изменении числа молей газа (в условиях постоянства остальных параметров). «Раскрываем» уравнение для изменения энергии, используя известные формулы:

$$pV = \frac{M-m}{M} RT, \quad U = \frac{3}{2} \frac{M-m}{M} RT,$$

$$\frac{3}{2} \frac{M-m}{M} R dT - \frac{3}{2} RT \frac{dm}{M} =$$

$$= -\frac{M-m}{M} RT dV - \frac{3}{2} RT \frac{dm}{M}.$$

Величину увеличения объема газа в первом сосуде определим так (рис. 1):

$$dV = \frac{dm}{(M-m)/V}.$$

После преобразования получаем простое дифференциальное уравнение

$$\frac{dT}{T} = -\frac{2}{3} \frac{dm}{M-m}.$$

Интегрирование (с учетом начальных условий) дает уравнение температуры в первом сосуде:

$$T_1 = T_0 \left(1 - \frac{m}{M}\right)^{2/3}.$$

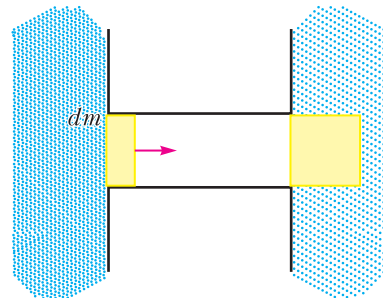


Рис. 1

Для получения аналогичного уравнения температуры во втором сосуде воспользуемся законом сохранения энергии

$$T_0 M = T_1 (M - m) + T_2 m$$

и получим

$$T_2 = T_0 \frac{M}{m} \left(1 - \left(1 - \frac{m}{M} \right)^{5/3} \right).$$

Относительную массу газа во втором сосуде определим из условия равенства давлений в момент закрытия заслонки:

$$T_1 (M - m) = T_2 m.$$

Используя это соотношение и предыдущие результаты, получаем

$$\frac{m}{M} = 1 - \frac{1}{2^{3/5}} \approx 0,34, \quad \frac{T_1}{T_0} = \frac{1}{2^{2/5}} \approx 0,758,$$

$$\frac{T_2}{T_0} = \frac{1}{2 \left(1 - \frac{1}{2^{3/5}} \right)} \approx 1,47.$$

Эти значения относительных величин определяют давление в сосудах после перетекания газа. Из уравнения состояния идеального газа получим

$$p = \frac{p_0}{2}.$$

Такой же результат следует из закона сохранения энергии:

$$\frac{3}{2} p_0 V = \frac{3}{2} p \cdot 2V, \text{ и } p = \frac{p_0}{2}.$$

Теперь более сложный вопрос задачи – время перетекания газа (время открытой заслонки). Здесь мы будем использовать готовую формулу для скорости адиабатного истечения газа через короткую трубку между сосудами с разными давлениями P и p (без учета вязкости) для одноатомного газа:

$$v^2 = 5 \frac{P}{\rho} \left(1 - \left(\frac{p}{P} \right)^{2/5} \right).$$

(Эту формулу можно получить самостоятельно: адиабатный разгон газа от нулевой скорости.) Используя уравнение состояния газа и формулы для T_1 и T_2 , преобразовываем выражение для v^2 :

$$v^2 = 5 \frac{RT}{M} \left(1 - \frac{\left(1 - \left(1 - \frac{m}{M} \right)^{5/3} \right)^{2/5}}{\left(1 - \frac{m}{M} \right)^{5/3}} \right) =$$

$$= 5 \frac{RT_0}{M} \left(\left(1 - \frac{m}{M} \right)^{2/3} - \left(1 - \left(1 - \frac{m}{M} \right)^{5/3} \right)^{2/5} \right)$$

и получаем

$$v = \sqrt{5 \frac{RT_0}{M} \left(\left(1 - \frac{m}{M} \right)^{2/3} - \left(1 - \left(1 - \frac{m}{M} \right)^{5/3} \right)^{2/5} \right)}.$$

Теперь можно записать дифференциальное уравнение перетекания:

$$dm = \rho v S dt = \frac{M \left(1 - \frac{m}{M} \right)}{V} S \times$$

$$\times \sqrt{5 \frac{RT_0}{M} \left(\left(1 - \frac{m}{M} \right)^{2/3} - \left(1 - \left(1 - \frac{m}{M} \right)^{5/3} \right)^{2/5} \right)} dt.$$

Отсюда находим

$$t = \frac{V}{S} \sqrt{\frac{M}{5RT_0}} \times \int_0^{1 - \frac{1}{2^{3/5}}} \frac{dx}{(1-x) \sqrt{\left(1 - x \right)^{2/3} - \left(1 - \left(1 - x \right)^{5/3} \right)^{2/5}}},$$

где $x = m/M$. Этот безразмерный интеграл является константой, право на его вычисление предоставим компьютеру:

$$t = \frac{V}{S} \sqrt{\frac{M}{5RT_0}} \cdot 1,191.$$

Подставляя в эту формулу данные задачи, вычисляем время релаксации (время от-

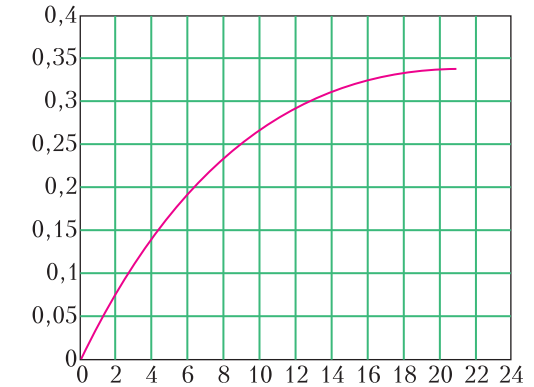


Рис. 2

крытого клапана):

$$t = \frac{1}{10^{-4}} \sqrt{\frac{40 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 8,314 \cdot 300}} \cdot 1,191 \text{ с} \approx 21,3 \text{ с}.$$

Наглядно динамику перетекания иллюстрирует график зависимости относительной массы газа во втором сосуде от времени (рис. 2). Приблизительно этот график можно описать «опрокинутой» экспонентой.

А.Власов

Ф2692. Космический аппарат двигался точно по орбите Земли. В тот момент, когда Земля полностью спряталась от аппарата за Солнце (это было летом, в июле), по корпусу аппарата ударил микроскопический камешек и отколол от его зеркальной обшивки маленький плоский кусочек. Относительная скорость зеркального кусочка и аппарата была невелика, но этот кусочек уже никогда с аппаратом не встретился. Больше того, под воздействием солнечного света и гравитации Солнца он стал двигаться с постоянной скоростью и через некоторое время покинул Солнечную систему навсегда. Какова толщина этого кусочка, если плотность материала, из которого он состоит, примерно $1,5 \text{ г/см}^3$? Можно считать, что плоская зеркальная поверхность отколовшегося кусочка всегда ориентирована перпендикулярно солнечным лучам и что зеркало отражает 100% падающего на него света. На каком расстоянии от Земли и через какое минимальное время после начала его самостоятельного полета оказался этот зеркальный осколок, если в этот момент с Земли удалось увидеть в телескоп отраженный им солнечный свет? (Необходимые для вычислений величины ищите в справочниках самостоятельно.)

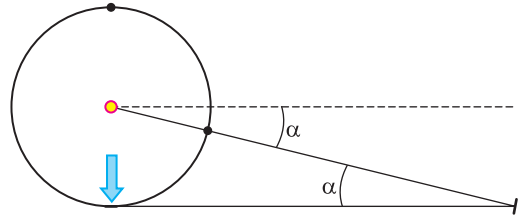
При заданной в условии плотности материала толщина зеркального кусочка находится из условия, что сумма сил, действующих на этот кусочек, стала равной нулю. Известно, что Земля движется по почти круговой орбите радиусом $R = 150$ млн км со скоростью, равной примерно $v = 30$ км/с. Поток света от Солнца характеризуется так называемой солнечной постоянной,

которая на расстоянии R от Земли до Солнца равна $E = 1370 \text{ Вт/м}^2$. Пусть S – это площадь зеркала, а h – его толщина.

Тогда $\frac{Sh\rho v^2}{R} = \frac{2SE}{c}$, где c – это скорость света. Отсюда находится толщина зеркала:

$$h = \frac{2ER}{\rho c v^2} \approx 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

Пока кусочек находился за Солнцем, нельзя было увидеть отраженный им солнечный свет. Но когда Солнце, Земля и кусочек зеркала окажутся на одной прямой линии и Земля будет находиться между Солнцем и зеркалом, на фоне ночного темного неба увидеть отраженный солнечный свет теоретически возможно. На рисунке показано начальное расположение объектов: в цент-



ре окружности – Солнце, сверху кружочек – Земля, стрелка указывает, где находился космический аппарат в момент удара. И показано также положение Земли и зеркала в момент, когда Земля находится между Солнцем и зеркалом на одной прямой линии с ними. Если считать, что орбита Земли представляет собой точно окружность, то условие возможности увидеть отраженный зеркалом солнечный свет дается соотношением

$$\frac{1}{(3/2)\pi - \alpha} = \text{tg } \alpha.$$

Подбор численного значения угла α не представляет труда: $\alpha \approx 0,21898$ рад. С момента начала самостоятельного полета кусочка зеркала прошло время

$$t = 1 \text{ год} \cdot \frac{(3/2)\pi - \alpha}{2\pi} = 261,2 \text{ сут}.$$

А расстояние между ним и Землей стало

$$l = R \left(\frac{1}{\sin \alpha} - 1 \right) \approx 540,5 \text{ млн км}.$$

Это расстояние больше, чем от Солнца до Марса, но меньше, чем от Солнца до Юпитера.

Почему же в условии было сказано: «...Земля полностью спряталась от аппарата за Солнце (это было летом, в июле)...»? Дело в том, что орбита Земли не окружность, а эллипс с небольшим эксцентриситетом. Поэтому зимой расстояние между Солнцем и Землей меньше, чем летом. Минимальное расстояние отмечается в январе (перигелий, 147 млн км), а максимальное – в июле (афелий, 152 млн км). Этим разным расстояниям соответствуют и разные скорости движения Земли в

системе отсчета Коперника. Разница скоростей равна примерно 1 км/с. Время, в течение которого Земля «прячется», составляет приблизительно 3,5 часа. Если учесть, что скорость зеркала примерно на 0,5 км/с больше, чем средняя скорость движения Земли по орбите (≈ 30 км/с), то проведенные вычисления следует уточнить. Но эту операцию мы предлагаем проделать заинтересовавшимся читателям самостоятельно.

В.Зеркальный

КОММЕНТАРИИ К СТАТЬЕ М.БАШМАКОВА

1. Отличная от Q .
2. Кроме Q .
3. Теорема Зигеля утверждает, что для любой нерациональной кубической кривой существует лишь конечное число точек с целыми координатами.
4. Соответствующее утверждение называется теоремой Морделла–Вейля.

5. Нерациональные кубические кривые, которые после подходящей замены координат можно задать уравнением вида $y^2 = x^3 + ax + b$, называются *эллиптическими* (проверьте, что рассмотренные выше нерациональные кубические кривые являются такими).

Точки, для которых процесс, описанный на странице 16, заикливается, называются *точками конечного порядка*. Оказывается, что их всегда конечное число. Теорема Нагеля–Лютца описывает явно все точки конечного порядка для заданной эллиптической кривой, что позволяет находить их алгоритмически.

Ранг эллиптической кривой – это минимальное число точек, с помощью которых можно построить все точки, если использовать также все точки конечного порядка. Было построено несколько алгоритмов нахождения для заданной эллиптической кривой ее ранга и минимально возможного множества точек, с помощью которых можно получить все остальные точки (Дж.Тейт, Ю.И.Манин), однако корректность работы всех известных алгоритмов зависит от выполнения открытых гипотез (гипотеза о конечности группы Шафаревича–Тейта, гипотеза Берча и Свиннертон-Дайера).

6. Это утверждение было доказано Б.Мазуром. Позже Л.Мерель далеко обобщил этот факт на случай, когда рациональные числа заменяются на большее множество чисел, например, состоящее из всех комплексных чисел вида $a + bi$, где a, b – рациональные (в общем случае это называется числовым полем).

7. На самом деле есть гипотеза, что при рассмотрении все большего числа эллиптических

кривых для почти половины из них ранг будет равен 0 (т.е. все точки на них будут образовывать конечную конфигурацию), для почти половины из них ранг будет равен 1 и для предельно малой доли ранг будет больше 1. В частности, в среднем ранг должен быть равен $1/2$. М.Бхаргава и А.Шанкар доказали, что средний ранг не превосходит $3/2$, а также вывели из обобщенной гипотезы Римана и гипотезы Берча и Свиннертон-Дайера, что средний ранг не превосходит $7/6$.

8. На данный момент наибольший известный ранг эллиптической кривой равен 28, этот пример построил Н.Элкис.

9. Одна из наиболее значимых открытых гипотез, относящихся к эллиптическим кривым, да и вообще одна из самых знаменитых гипотез в современной математике – это гипотеза Берча и Свиннертон-Дайера. Опишем приблизительно, о чем она. Пусть эллиптическая кривая задана уравнением $y^2 = x^3 + ax + b$, и пусть для простоты числа a и b целые. Для каждого простого числа p обозначим через N_p число решений данного уравнения в остатках от деления на p . Тогда гипотетически функция $\prod_{p < x} \frac{N_p}{p}$ от вещественной

переменной x при достаточно больших значениях x близка к функции $C \log(x)^r$, где C – некоторая подходящая константа, а r – ранг исходной эллиптической кривой. Гипотеза Берча и Свиннертон-Дайера является некоторым более сильным и более точным гипотетическим утверждением, формулируемым в терминах аналитических свойств одной функции комплексного переменного, построенной по набору чисел N_p и называемой L -функцией эллиптической кривой.

Дополнительно про эллиптические кривые можно узнать, например, из брошюры В.В.Острика и М.А.Цфасмана «Алгебраическая геометрия и теория чисел: рациональные и эллиптические кривые» или из курса лекций Д.В.Осипова.

С.Горчинский

Задачи

1. Тане и Ване дали одинаковые многоугольники из бумаги. Таня отрезала от своего листа кусок, и остался квадрат.



Ваня отрезал точно такой же (и по форме, и по размеру) кусок по-другому, и у него остался треугольник. Нарисуйте пример, как это могло быть.

Т.Казицына

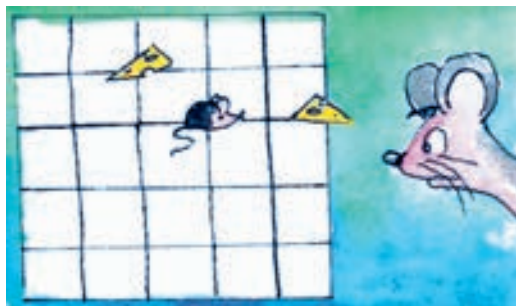
2. Найдите шестизначное число, у которого первая цифра в 6 раз меньше



суммы всех цифр справа от нее и вторая цифра в 6 раз меньше суммы всех цифр справа от нее.

А.Шаповалов

3. Лабиринт для мышей представляет собой квадрат 5×5 метров, мыши могут бегать только по дорожкам. На двух перекрестках положили по одинаковому куску сыра. На другом перекрестке сидит мышка. Она чует, где



сыр, но до обоих кусочков ей нужно пробежать одинаковое расстояние. Поэтому она не знает, какой кусочек выбрать, и задумчиво сидит на месте.

а) Отметьте еще пять перекрестков, где могла бы задумчиво сидеть мышка (откуда до обоих кусочков сыра ей нужно пробежать одинаковое расстояние).

б) Придумайте, на каких двух перекрестках можно положить по куску сыра так, чтобы подходящих для задумчивой мышки перекрестков оказалось как можно больше.

Т.Казицына

4. Шеренга солдат-новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «налево» некоторые повернулись налево, остальные – направо. Оказалось, что в затылок соседу смотрит в шесть раз больше солдат, чем в лицо. Затем по команде «кругом» все развернулись в противоположную сторону. Теперь в затылок соседу стали смотреть в семь раз больше солдат, чем в лицо. Сколько солдат в шеренге?

А.Шаповалов



Эти задачи предлагались на Математическом празднике.

И речка подо льдом блестит...

А. СТАСЕНКО

*На берегу пруда Маша доила корову,
а в воде отражалось все наоборот.*

Из школьного сочинения

А ПОЧЕМУ, СОБСТВЕННО, РЕЧКА должна блестеть подо льдом? – подумал опытный ЕГЭшник, – может это лед блестит над речкой? Ведь любая поверхность, чтобы «блестеть», т.е. зеркально отражать падающие лучи, должна быть гладкой (рис. 1 слева), а не наоборот (рис. 1 справа). Впрочем и падающий на лед свет содержит не только прямые лучи солнца, но

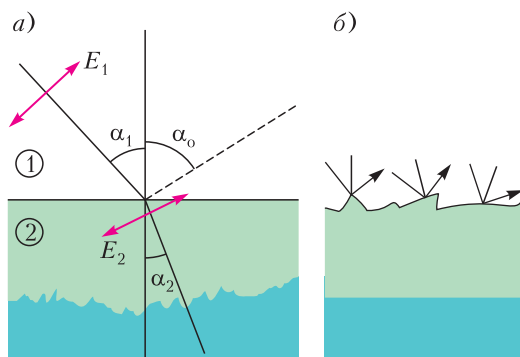


Рис. 1. Электрический вектор волны расположен в плоскости падения: индекс 1 характеризует падающий луч, 2 – преломленный, о – отраженный

и рассеянные атмосферой. Конечно, от таких лучей ни «речка подо льдом», ни «лед над речкой» блестеть не будут.

Что же происходит на гладкой поверхности льда или воды? Еще в древности были попытки понять явления отражения и преломления света – об этом писали и Тит Лукреций Кар (99–45 до н.э.), и Клавдий Птолемей (около 100–около 170), а в средние века Виллеброрд Снеллиус (1580–1626), Рене Декарт (1596–1650), Христиан Гюйгенс (1629–1695)...

Вот образец поэтического описания физического явления:

... Ибо у весел та часть, что из волн
выдается соленых,
Прямо идет, и пряма у рулей их
надводная доля;
Все же, что в воду ушло,
представляется нам преломленным,
Загнутым будто назад и как будто
изогнутым кверху,
Так что на самой почти поверхности
плавает водной.

(Лукреций Кар, «О природе вещей»)

Исторически закон преломления связан с именем Снеллиуса:

$$\sin \alpha_1 = n \sin \alpha_2,$$

где n – коэффициент преломления луча, при переходе из среды 1 в среду 2. А всем известный закон отражения совсем прост:

$$\alpha_0 = \alpha_1.$$

Но физика этих явлений гораздо интересней. В падающем луче света происходят колебания электрического вектора \vec{E}_1 перпендикулярно направлению луча. Попадая в диэлектрическую (например, вода или лед) или проводящую среду, вектор \vec{E}_2 вызывает поляризацию ее элементов или движение свободных зарядов. Эти элементы превращаются в своеобразные антенны – диполи Генриха Герца (1857–1894), которые сами становятся излучателями электромагнитной волны, имеющей ту же частоту, что и падающая. При этом пространственно-угловая зависимость плотности потока излучения (индикатриса) имеет вид бублика с «нулевой дыркой», срез которого качественно изображен на рисунке 2.

Важно отметить, что антенна ничего не излучает в направлении колебаний вектора \vec{E} . И тут сразу виден один интересный случай: если направление колебаний электрического вектора \vec{E}_2 во второй среде совпадет с направлением отраженного света, то ... отраженный луч исчезнет! – никакого «блеска» не будет. Легко записать условие такого «случая»:

$$\frac{\pi}{2} - \alpha_0 = \alpha_2.$$

Подставляя это соотношение в законы геометрической оптики, получим

$$\sin \alpha_1^* = n \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_0 \right) = n \cos \alpha_1^*,$$

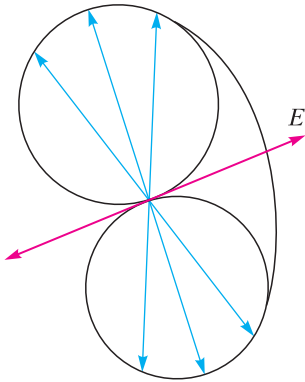


Рис. 2. Половина индикатрисы излучения диполя Герца

или окончательно

$$\operatorname{tg} \alpha_1^* = n.$$

Это изумительно простой способ измерения коэффициента преломления диэлектрика.

Лемма о трех биссектрисах

Г. ФИЛИППОВСКИЙ

МЫ ПОВЕДЕМ РАЗГОВОР О ЗАМЕЧАТЕЛЬНОМ факте геометрии треугольника, который назовем *леммой о трех биссектрисах*.



Нужно просто изменять угол падения и поймать то значение, при котором исчезнет отраженный луч. Этот угол α_1^* называется углом Дейвида Брюстера (1781–1868).

В московском Физтехе среди подборки высказываний лекторов «Однажды на лекции» есть прямо относящееся к делу: чтобы отличить от нормального человека вампира, нужно поставить его перед зеркалом под углом Брюстера.

Конечно, в солнечном свете, помимо рассмотренного направления колебаний электрического вектора в плоскости падения \vec{E}_{\parallel} , есть и колебания в перпендикулярном направлении, при котором вектор \vec{E}_{\perp} параллелен горизонтальной поверхности льда или воды. Так что при угле α_1^* «блеск» останется, правда его свет окажется вдвое туснее и полностью поляризованным.

Лемма о трех биссектрисах. В любом треугольнике две внешние биссектрисы и одна внутренняя, проведенные из разных вершин, пересекаются в одной точке.

Доказательство.

Пусть внешние биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке Q (рис. 1). Докажем, что и внутренняя биссектриса угла A проходит (при продолжении) через точку Q . Проведем $QK \perp AC$, $QF \perp BC$ и $QN \perp AB$. При этом $QK = QF$ – из равенства $\triangle QKC$ и $\triangle QFC$ (по гипотенузе и острому углу), а $QF = QN$ – из равенства $\triangle QFB$ и $\triangle QNB$ (по той же причине). Тогда $QK = QN$. Соединим A и Q . Треугольники AQK и AQN равны – по катету и гипотенузе, откуда следует, что $\angle 1 = \angle 2$, т.е. AQ – внутренняя биссектриса угла BAC . Лемма доказана.

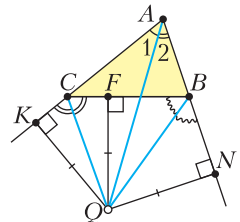


Рис. 1

Замечание. Точка Q , о которой идет речь в лемме, является центром вневписанной окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC . Но свойства точки Q (которые важны сами по себе!) заслуживают отдельного разговора, находящегося за рамками данной статьи.

Мы же сейчас покажем эффектное и эффективное применение данной леммы – леммы о трех биссектрисах – при решении целого ряда задач, в том числе задач повышенной сложности и олимпиадных.

Задача 1. Точка I – инцентр (точка пересечения биссектрис) треугольника ABC . Луч AI пересекает внешнюю биссектрису угла B в точке Q . Найдите величину угла BQC , если известно, что $\angle BAC = \alpha$.

Решение. Соединим C и Q (рис. 2). Согласно лемме о трех биссектрисах, CQ – внешняя биссектриса угла C треугольника ABC . Значит,

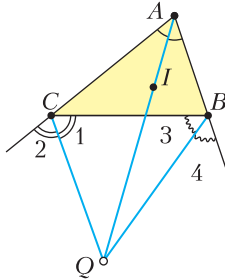


Рис. 2

$$\angle 1 = \angle 2 = \frac{180^\circ - \angle C}{2} = 90^\circ - \frac{\angle C}{2}.$$

Аналогично, $\angle 3 = \angle 4 = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}$. Тогда $\angle BQC = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 3)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \angle BQC &= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\angle C}{2} + 90^\circ - \frac{\angle B}{2}\right) = \\ &= \frac{\angle B + \angle C}{2} = 90^\circ - \frac{\angle A}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Задача 2 (А.Карлюченко). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектрисы углов A и D пересекаются в точке N , а биссектрисы углов B и C – в точке T , F – точка пересечения продолжений AB и DC

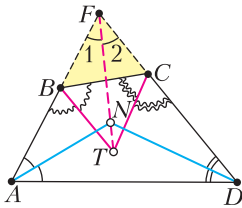


Рис. 3

(рис. 3). Докажите, что точки F, N, T лежат на одной прямой.

Доказательство. В треугольнике AFD точка N – инцентр, поэтому FN – третья биссектриса в этом треугольнике. Значит, $\angle 1 = \angle 2$. Для треугольника BFC лучи BT и CT совпадают с внешними биссектрисами углов B и C . Тогда FT – внутренняя биссектриса в $\triangle BFC$ – по лемме о трех биссектри-

сах. В таком случае точки F, N, T принадлежат одной прямой.

Задача 3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектрисы углов B и C пересекаются в точке N – середине AD . Докажите, что углы при вершинах A и D равны.

Доказательство. Продолжим AB и DC до пересечения в точке F (рис. 4). Так как BN и CN – внешние биссектрисы в треугольнике BCF , то по лемме о трех биссектрисах FN совпадает с внутренней биссектрисой угла BFC . Но FN – также и медиана в $\triangle AFD$. Следовательно, $\triangle AFD$ – равнобедренный и $\angle FAD = \angle FDA$, что и требовалось доказать.

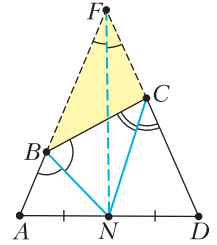


Рис. 4

Задача 4. Пусть CL – биссектриса в треугольнике ABC . На стороне BC взята точка N такая, что угол NAB равен сумме углов при вершинах B и C треугольника ABC , т.е. $\angle NAB = \angle B + \angle C$. Докажите, что NL – биссектриса угла ANB .

Доказательство. Проведем через точку A луч AK (рис. 5) и заметим, что $\angle BAK = 180^\circ - \angle A = \angle B + \angle C$. Тогда AB – внешняя

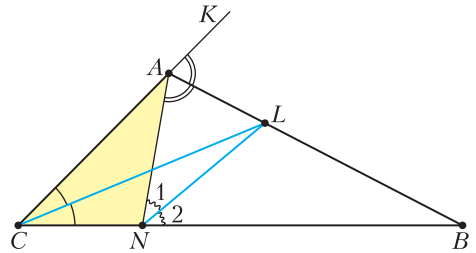


Рис. 5

биссектриса в $\triangle CAN$. Поскольку CL совпадает с внутренней биссектрисой $\triangle CAN$, то NL – вторая внешняя биссектриса этого треугольника (согласно лемме). Значит, $\angle 1 = \angle 2$ и NL – биссектриса угла ANB .

Задача 5. Пусть AH и CL – высота и биссектриса в треугольнике ABC соответственно, причем $\angle CLA = 45^\circ$. Определите величину угла LHB .

Решение. Для $\triangle BLC$ угол CLA является внешним. Он равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним (рис. 6), поэтому $\angle B + \frac{\angle C}{2} = 45^\circ$. Значит, $2\angle B + \angle C = 90^\circ$,

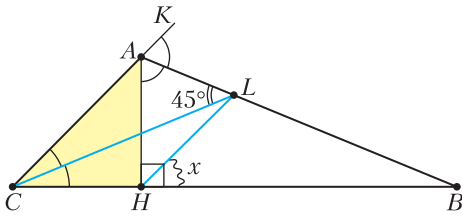


Рис. 6

или $90^\circ - \angle B = \angle B + \angle C$. Но $\angle HAB = 90^\circ - \angle B$ (из $\triangle AHB$). Следовательно, $\angle HAB = \angle B + \angle C$. Проведем через точку A луч CK . Тогда $\angle KAB = 180^\circ - \angle A = \angle B + \angle C$ и AB – внешняя биссектриса в $\triangle AHC$; CL – внутренняя биссектриса в этом треугольнике. С учетом леммы о трех биссектрисах HL – вторая внешняя биссектриса в $\triangle AHC$. Значит, $\angle LHB = \angle LHA = 45^\circ$.

Задача 6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle ABD = \angle DBC = 60^\circ$, $\angle ADB = 40^\circ$ и $\angle BDC = 70^\circ$. Найдите величину угла φ между диагоналями AC и BD (рис. 7).

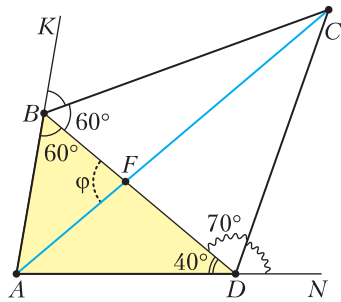


Рис. 7

Решение. Очевидно, $\angle BAD = 80^\circ$ (из $\triangle ABD$). Проведем из точки A лучи AK через точку B и AN через точку D . Тогда $\angle KBC = 60^\circ$ и $\angle CDN = 70^\circ$. Значит, BC и DC – внешние биссектрисы в $\triangle ABD$. Согласно лемме, AC – внутренняя биссектриса в этом треугольнике, т.е. $\angle BAC = \angle DAC = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$. Следовательно, $\varphi = 40^\circ + 40^\circ = 80^\circ$ – внешний угол для $\triangle AFD$.

Задача 7. Точки F и N на сторонах AD и CD квадрата соответственно такие, что $\angle ABF = 15^\circ$, $\angle DFN = 30^\circ$ (рис. 8). Найдите x – величину угла FBN .

Решение. Очевидно, $\angle AFB = 75^\circ$ (из $\triangle ABF$). Тогда $\angle BFN = 180^\circ - 75^\circ - 30^\circ = 75^\circ$. Проведем диагональ BD . В треугольнике DFN луч DB совпадает с внутренней биссектрисой угла D , луч FB – с внешней биссек-

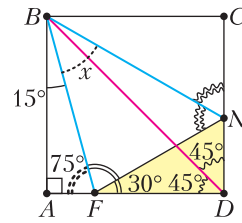


Рис. 8

трисой угла F . Значит, NB – вторая внешняя биссектриса в $\triangle DFN$ (согласно лемме). Поскольку $\angle FND = 60^\circ$ (из $\triangle FND$), то $\angle FNC = 120^\circ$ и тогда $\angle BNF = \angle BNC = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$. Следовательно, в $\triangle FBN$ $x = 180^\circ - 75^\circ - 60^\circ = 45^\circ$.

Задача 8 (И. Шарьгин). В треугольнике ABC с углом при вершине A , равным 120° , проведены биссектрисы AL , BN и CP . Найдите величину угла NLP .

Решение. Продолжим BA и CA за точку A . Тогда $\angle DAC = \angle EAB = 60^\circ$ (рис. 9). Для

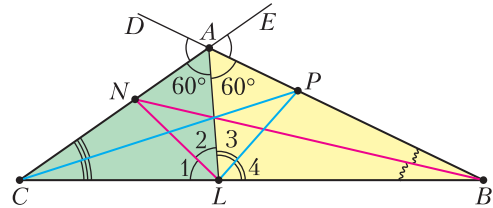


Рис. 9

ABL луч BN совпадает с внутренней биссектрисой угла B , AC – с внешней биссектрисой угла A . Значит, LN – вторая внешняя биссектриса (при вершине L), следовательно, $\angle 1 = \angle 2$. В $\triangle ACL$ луч CP совпадает с внутренней биссектрисой, AP – с внешней. Тогда LP – еще одна внешняя биссектриса в $\triangle ACL$, т.е. $\angle 3 = \angle 4$. Поскольку угол между биссектрисами смежных углов прямой, то $\angle NLP = 90^\circ$.

Задача 9. Пусть CP – биссектриса в треугольнике ABC . Точка K на стороне BC такая, что $\angle AKB = \angle A - \angle B$. Постройте треугольник ABC по вершине A , а также точкам K и P .

Решение. Анализ показывает, что так как $\angle AKB = \angle A - \angle B$, то в треугольнике AKB можно найти $\angle KAB$. Он равен $180^\circ - (\angle A - \angle B) - \angle B = 180^\circ - \angle A$. Продолжим CA за вершину A . Тогда $\angle DAB = 180^\circ - \angle A$ (рис. 10). Для $\triangle ACK$ отрезок CP – внутренняя биссектриса, AB – внешняя. Значит, по

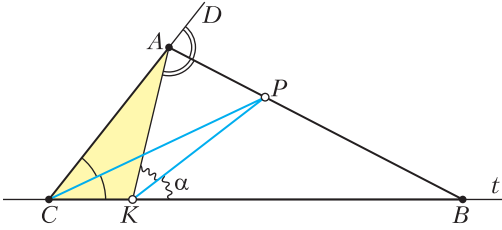


Рис. 10

лемме о трех биссектрисах KP – вторая внешняя биссектриса. Отсюда построение: соединяем точки A, K, P . Пусть $\angle AKP = \alpha$. Через точку K под углом α к KP проводим прямую t , которая пересекает луч AP в вершине B . У нас есть $\angle KAB = 180^\circ - \angle A$. Тогда есть и угол A . Через вершину A под углом, равным $\angle A$, к стороне AB проводим луч. Он пересекает прямую t в недостающей вершине C .

Задача 10 (Л.Кэрролл). На сторонах AC и AB треугольника ABC постройте точки F и N такие, чтобы отрезок FN был параллелен стороне BC и при этом выполнялось равенство $BN + CF = BC$.

Решение. Пусть такие точки F и N построены и пусть также $FN \parallel BC$, $x + y = a$ (рис. 11). Анализ показывает, что если най-

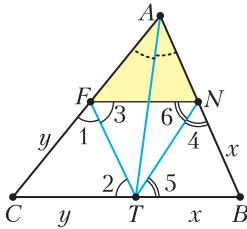


Рис. 11

ти на BC такую точку T , что $CT = y$, то $BT = x$. Поскольку $\triangle CFT$ равнобедренный ($CF = CT = y$), то $\angle 1 = \angle 2$. Но $\angle 2 = \angle 3$ (внутренние накрест лежащие при параллельных прямых FN и BC). Аналогично, $\angle 4 = \angle 5$ ($BN = BT = x$) и $\angle 5 = \angle 6$ ($FN \parallel BC$). Тогда FT и NT – две внешние биссектрисы в $\triangle AFN$. Согласно лемме, AT совпадает с внутренней биссектрисой угла A в треугольнике AFN . Переходим к построению. Проводим биссектрису AT в $\triangle ABC$. На стороне CA откладываем отрезок $CF = CT$, а на стороне BA – отрезок $BN = BT$. Соединяем F и N . Отрезок FN – искомый.

Задача 11. В треугольнике ABC величины углов при вершинах A и B соответ-

ственно равны $112,5^\circ$ и $22,5^\circ$. Докажите, что в этом треугольнике высота AH , медиана BM и биссектриса CP пересекаются в одной точке.

Доказательство. Пусть высота AH и биссектриса CP пересекаются в точке Q (рис. 12). Покажем, что и медиана BM

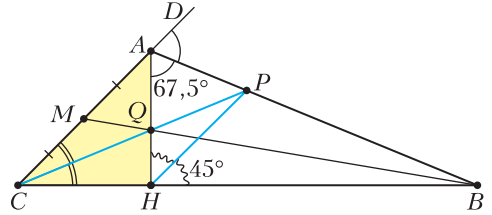


Рис. 12

проходит через Q . Из $\triangle AHB$ имеем $\angle HAB = 90^\circ - 22,5^\circ = 67,5^\circ$. Продолжим CA за точку A . Тогда $\angle DAB = 180^\circ - 112,5^\circ = 67,5^\circ$. В $\triangle AHC$ отрезок CP совпадает с внутренней биссектрисой, AB – с внешней. Значит, по лемме о трех биссектрисах, HP – вторая внешняя биссектриса и $\angle AHP = \angle BHP = 45^\circ$. Но и $\angle ACB = 45^\circ$ ($180^\circ - 112,5^\circ - 22,5^\circ$). Следовательно, $APHС$ – трапеция. По так называемой лемме о трапеции (точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований любой трапеции лежат на одной прямой) луч BQ проходит через середину AC – точку M . А это и означает, что высота AH , медиана BM и биссектриса CP пересекаются в одной точке – точке Q .

Задача 12 (Д.Швецов). Биссектрисы AL и BK прямоугольного треугольника ABC ($C = 90^\circ$) пересекаются в точке I , Q – центр описанной окружности треугольника SKL . Докажите, что $QI \perp AB$.

Доказательство. Так как $\triangle KCL$ – прямоугольный, то точка Q – середина KL . Проведем $KN \perp AB$ и $LT \perp AB$ (рис. 13). Очевидно, $CK = KN$ и $CL = LT$ (любая точка биссектрисы равноудалена от сторон). Тогда

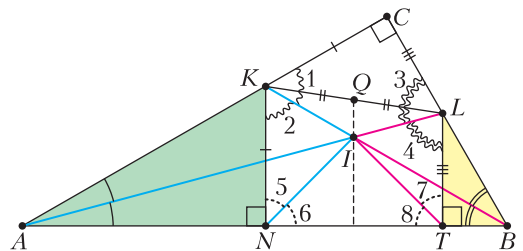


Рис. 13

$\Delta CKB = \Delta NKB$ (по катету и гипотенузе) и $\angle 1 = \angle 2$. Аналогично, $\Delta ACL = \Delta ATL$ и $\angle 3 = \angle 4$. Для ΔAKN отрезки AI и KB – внутренняя и внешняя биссектрисы соответственно. Значит, NI – вторая внешняя биссектриса и $\angle 5 = \angle 6 = 45^\circ$. Для ΔBLT отрезки BI и LA – также внутренняя и внешняя биссектрисы соответственно. Тогда TI – вторая внешняя биссектриса (по лемме) и $\angle 7 = \angle 8 = 45^\circ$. Следовательно, серединный перпендикуляр к NT проходит через точку I . По теореме Фалеса этот серединный перпендикуляр проходит и через середину KL – точку Q . Значит, $QI \perp AB$.

Несколько задач, в которых успешно применяется лемма о трех биссектрисах, предлагаем решить самостоятельно.

1 (Евклид). Постройте биссектрису угла, вершина которого недоступна.

2. В треугольнике ABC внутренняя биссектриса угла A пересекает внешнюю биссектрису угла B в точке T , а внутреннюю биссектрису угла C – в точке I . Докажите, что около четырехугольника $BICT$ можно описать окружность.

3 (Г.Филипповский). На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC взяты соответственно точки N и F такие, что $\angle FNT = \angle BNT$, где T – середина BC . Найдите расстояние от точки T до FN , если высота CK в треугольнике ABC равна h .

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH , BN и CK . Докажите, что вершина A – точка пересечения двух внешних и одной внутренней биссектрис треугольника NKH .

5. Пусть CP – биссектриса в равнобедренном ΔABC , в котором $\angle B = \angle C = 36^\circ$. На стороне BC взята точка D такая, что $AD = n$ и треугольники ADC и ABD равнобедренные. Найдите длину отрезка DP .

6. На продолжениях сторон AC и AB треугольника ABC постройте точки F и N соответственно такие, что $FN \parallel BC$ и $FN = CF + BN$.

7. Биссектрисы углов трапеции $ABCD$ образуют четырехугольник $KNTQ$ с перпендикулярными диагоналями. Докажите, что $ABCD$ – равнобокая трапеция.

8. Дан треугольник ABC с указанным инцентром I . Пользуясь только линейкой, постройте точку пересечения внешних биссектрис углов A и B и внутренней биссектрисы угла C .

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Лестница, статически неопределимая

Л.АШКИНАЗИ

Вот задача, которую (насколько я помню) решали школьники еще в Древнем Египте. К стене прислонена лестница, надо найти действующие на нее силы. Поскольку вы сейчас не в школе, а читаете журнал «Квант», вам ничего не «дано» – сообразите сами, что вам нужно. Если у вас есть нормальный для школьника опыт решения сотни-другой задач по механике, вы мгновенно скажете – нужны масса, ускорение свободного падения, длина, угол, коэффициенты трения. Если у вас этого опыта нет, но вы усвоили

школьный учебник, вы скажете то же самое, но не так быстро. Однако вы, возможно, сделали несколько ошибок. Вы не сказали, что стена, пол, короче – весь дом не имеет ускорения. Действительно, если он имеет ускорение, равное g и направленное вниз, то все силы равны нулю, а если нет – то нет? Далее, длину вы упомянули зря, она в ответ не войдет, хотя бы потому, что размерность ее – метр, а ответ должен быть в ньютонах. А значит, он может зависеть только от mg и от безразмерных величин. У нас в этой задаче безразмерные коэффициенты трения и – внимание – отношения длин, например длины лестницы, расстояния ее низа от стены и расстояния ее верха от пола. Эти отношения войдут в ответ, скорее всего, как тригонометрические функции угла (любого из двух). Ну а, если вы очень осторожны и предусмотрительны, то вы еще упомяните про положение центра тяжести.

Все эти соображения должны промелькнуть у вас в голове до того, как вы начнете писать уравнения. Такой предварительный взгляд на задачу всегда полезен, даже если

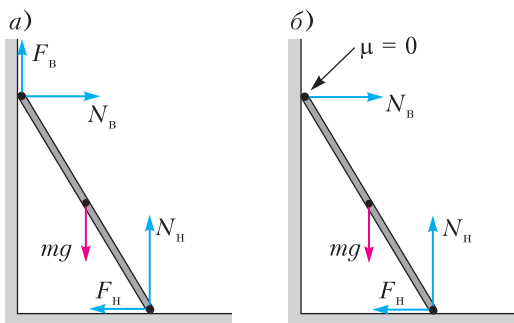


Рис. 1

он приближителен и не точен. Теперь вы, как хороший послушный школьник, рисуете все силы (рис. 1, а), пишете уравнения: «сумма сил по горизонтали», «сумма сил по вертикали» и «сумма моментов относительно центра тяжести» равны нулю. И – о ужас – у вас есть три уравнения и четыре неизвестных. У составителей задач есть способ бороться с этой ситуацией – «придушить» одно неизвестное, в данном случае объявить, что трение в верхней точке контакта отсутствует: коэффициент трения $\mu = 0$ (рис. 1, б). Естественно, это отключает одну из сил, но где вы видели стену без трения? Кстати, очевидно, что если объявлять $\mu = 0$ в нижней точке, то это может быть опасно для жизни.

Эта задача – одна из многих «статически неопределимых задач». Так называют задачи статики, в которых количество неизвестных больше количества уравнений. В школе обычно рассматривают плоские задачи статики – всего лишь потому, что картинки к ним легко рисовать на плоской поверхности: на бумаге, доске или экране. В таких задачах уравнений три – два про сумму сил вдоль осей координат и одно про сумму моментов. На досуге подумайте, сколько уравнений будет для трехмерной задачи статики.

Понятно, что в реальной жизни что бы с телами ни делали, как бы их ни располагали, все силы в итоге приобретают какие-то значения. «Нерешаемость» этих задач возникает потому, что мы чем-то пренебрегли, а для решения нужно это «что-то» учесть. Но имейте в виду – если мы это «что-то» учтем и задача получит свое решение, то это будет означать, что мы решили данную задачу лишь в данном приближении. В нашем случае «что-то» – это деформации элементов системы. При рассмотрении какой-либо другой задачи или даже при увеличении требо-

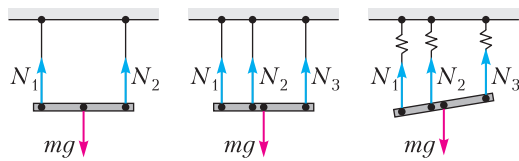


Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

ваний к точности решения может понадобиться учесть что-то еще.

Рассмотрим простой пример, а потом вернемся к нашей лестнице. Пусть балка висит на двух тросах и нужно найти их натяжения (рис. 2). Задача тривиальна: горизонтальных сил нет, так что уравнений два и неизвестных тоже два. Придельываем третий трос (рис. 3) и... наступает караул. Попробуем учесть деформации – но чьи? Деформации тросов в школе подчиняются закону Гука, а деформацию балки в школе не посчитать. Поэтому ограничимся тросами, их деформация показана на рисунке 4 условно в виде пружинок. У нас прибавится шесть известных величин: начальные длины и коэффициенты в законе Гука, три неизвестных: итоговые длины и три уравнения: зависимость длин веревок от натяжений, т.е. уравнения закона Гука, но не в виде $F = kx$, а в виде $L = L_0 + N/k$, где L_0 – начальная длина, N – сила натяжения, k – коэффициент жесткости.

Однако нам как не хватало одного уравнения, так не хватает и сейчас. Не видите ли вы на рисунке еще одно уравнение? Уравнения этого типа называют уравнениями совместности деформаций. Действительно, деформации элементов конструкции как-то связаны, размеры элементов конструкции не могут быть произвольными. Например, если точки закрепления тросов на балке лежали на одной прямой, то они и будут лежать на одной прямой, а если деформации невелики, то тросы параллельны и итоговые длины связаны тривиальным уравнением. Это и будет седьмое уравнение, которого нам не хватало.

Задачу можно решить и при больших деформациях, просто решение будет длиннее. Можно рассмотреть и широкий диапазон начальных длин и коэффициентов жесткости, причем в этом случае можно написать программу, которая будет подвешивать балку на тросах прямо на экране и показывать нам поведение при варьировании исходных величин.

Вернемся к лестнице, но с ней ситуация будет сложнее – тросов, к которым естественно применить закон Гука, нет. Первое, о чем можно задуматься, это откуда берется сила трения покоя, каков ее механизм. Ответ лежит внутри школьного курса, нужно только его применить. Третий закон Ньютона говорит нам, что если сила трения действует на какое-то тело, то такая же по модулю сила действует и на второе тело, вызывающее эту силу, а закон Гука (при жизни эти двое враждовали, а их результаты теперь трудятся совместно) сообщает, что в этом случае должны быть деформации. И действительно, поверхностные слои тел деформируются, причем и того, которое собирается скользить, и того, на котором оно лежит. Тут есть одна тонкость – закон Гука в школе формулируется для деформации растяжения и сжатия, когда слои вещества перемещаются примерно так, как при распространении продольной волны. А при трении вещество перемещается хитрее, комбинируя и деформации растяжения-сжатия, и деформации сдвига, при которых слои перемещаются так, как при распространении поперечной волны.

А теперь – вот наша лестница, сначала просто «приложенная» к стене и полу, а потом мы включили тяготение, она потерлась о стену и пол и слегка переместилась (рис. 5). Будем считать лестницу жесткой, т.е. ее деформацией и изменением длины пренебрежем. Тогда получаем соотношения $F_n = k_n y_n$ и $F_v = k_v y_v$, где k – коэффициенты жесткости по отношению к сдвигу, y – смещения, «н» и «в» – индексы, означающие «нижний» и «верхний». Поскольку длина лестницы постоянна, то сумма квадратов расстояний от угла до мест касания стены и пола должна быть одинакова для двух положений лестницы. Записываем это условие и, пренебрегая членами с y^2 , получаем наше четвертое уравнение:

$$\frac{F_n}{F_v} = \frac{y_n}{y_v} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Каким может быть дальнейшее развитие и уточнение этой моде-

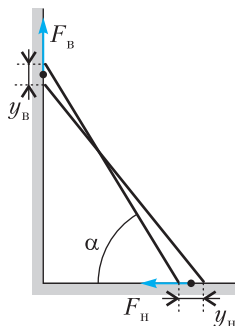


Рис. 5

ли? Первое, самое простое и очевидное – учесть деформацию лестницы. Для этого надо сообразить, какая продольная сила ее сжимает, ввести коэффициент жесткости лестницы и переделать последнее уравнение, учтя изменение ее длины. Второй, более сложный ход – учесть не только деформации сдвига, но и деформации сжатия, введя четыре коэффициента жесткости, два для сдвига и два для сжатия, и связав их с силами в соответствии с законом Гука. Уравнения пишутся легко, и – ах, какую красивую программу можно будет составить. Вводим цифры, и прямо на экране лестница прислоняется, проминает пол и стену, скользит по ним и останавливается. Или удивленно падает.

А если говорить серьезно, то, решив физическую задачу, нужно поразмыслить, чем и почему мы пренебрегли и как бы что-то из этого учесть. Чтобы нам было чем заняться и через час, и завтра, и всегда.



БИБЛИО-ГЛОБУС
ВАШ ГЛАВНЫЙ КНИЖНЫЙ

МЫ ПРЕДЛАГАЕМ
БОЛЬШОЙ ВЫБОР ТОВАРОВ И УСЛУГ

<p>УСЛУГИ</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Интернет-магазин www.bgshop.ru ■ Кафе ■ Клубные (дисконтные) карты и акции ■ Подарочные карты ■ Предварительные заказы на книги ■ Встречи с авторами ■ Читательские клубы по интересам ■ Индивидуальное обслуживание ■ Подарочная упаковка ■ Доставка книг из-за рубежа ■ Выставки-продажи 	<p>АССОРТИМЕНТ</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Книги ■ Аудиокниги ■ Антиквариат и предметы коллекционирования ■ Фильмы, музыка, игры, софт ■ Канцелярские и офисные товары ■ Цветы ■ Сувениры
--	--

г. Москва,
м. Лубянка,
м. Китай-город
ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1
8 (495) 781-19-00
www.biblio-globus.ru
пн – пт 9:00 - 22:00
сб – вс 10:00 - 21:00
без перерыва на обед

КОНКУРС ИМЕНИ А. П. САВИНА

Мы завершаем конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на участников не младше 8–9 класса, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт kvantik.com).

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest Желаем успеха!

29. Покрасьте некоторые клетки белого квадрата 5×5 в синий цвет так, чтобы во всех 16 квадратах 2×2 раскраски были различны (не совмещались бы сдвигом).

Ф. Нилов

30. Через точку внутри равностороннего треугольника провели прямые, параллельные сторонам, и измерили площади полученных шести частей треугольника. Могло ли оказаться, что они принимают ровно три различных значения?

А. Перепечко

31. Последовательность задана следующими условиями:

$$c_1 = a, c_2 = b,$$

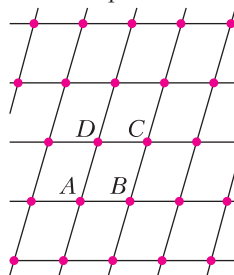
$$c_{2n+1} = c_n + c_{n+1} \text{ при } n \geq 1,$$

$$c_{2n+2} = c_n + c_{n+2} \text{ при } n \geq 1.$$

Выразите c_{2022} через a и b .

В. Расторгуев

32. Рассмотрим разбиение плоскости прямыми на параллелограммы, равные некоторому параллелограмму $ABCD$. Множество точек пересечения таких прямых назовем



ABC -решеткой. На рисунке отмеченные точки представляют собой фрагмент ABC -решетки.

Даны два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Какие-то три точки $A_1B_1C_1$ -решетки образуют вершины треугольника, подобного $A_2B_2C_2$. Можно ли утверждать, что какие-то три точки $A_2B_2C_2$ -решетки образуют вершины треугольника, подобного $A_1B_1C_1$?

Е. Бакаев

О Л И М П И А Д Ы

LXXXV МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

20 марта 2022 года прошла очередная Московская математическая олимпиада. В ней приняла участие более 5 тысяч школьников. Приводим некоторые задачи олимпиады (в скобках после номера задачи указан класс, в котором она предлагалась). Все условия и решения можно найти на сайте olympiads.mccme.ru/mmo.

Избранные задачи

1. (8) Незнайка не знает о существовании операций умножения и возведения в степень. Однако он хорошо освоил сложение, вычитание, деление и извлечение квадратного корня, а также умеет пользоваться скоб-

ками. Упражняясь, Незнайка выбрал три числа 20, 2 и 2 и составил выражение $\sqrt{(2+20)} : 2$. А может ли он, используя точно те же три числа 20, 2 и 2, составить выражение, значение которого больше 30?

Н. Стрелкова

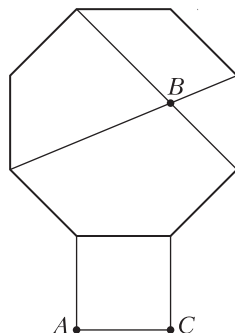


Рис. 1

2. (8) На стороне правильного восьмиугольника во внешнюю сторону построен квадрат. В восьмиугольнике проведены две диагонали, пересекающиеся в точке B (рис. 1). Найдите величину угла ABC . (Многоугольник называется правильным,

если все его стороны равны и все его углы равны.)

К.Кноп

3. (8) Верно ли, что из любого выпуклого четырехугольника можно вырезать три уменьшенные вдвое копии этого четырехугольника?

А.Юран

4. (9) У каждого из девяти натуральных чисел $n, 2n, 3n, \dots, 9n$ выписали первую слева цифру. Может ли при некотором натуральном n среди девяти выписанных цифр быть не более четырех различных?

А.Толтыго

5. (9) Коллекция Саши состоит из монет и наклеек, причем монет меньше, чем наклеек, но хотя бы одна есть. Саша выбрал некоторое положительное число $t > 1$ (не обязательно целое). Если он увеличит количество монет в t раз, не меняя количества наклеек, то в его коллекции будет 100 предметов. Если вместо этого он увеличит количество наклеек в t раз, не меняя количества монет, то у него будет 101 предмет. Сколько наклеек могло быть у Саши? Найдите все возможные ответы и докажете, что других нет.

А.Галочкин

6. (9) Некоторые клетки доски 100×100 покрашены в черный цвет. Во всех строках и столбцах, где есть черные клетки, их количество нечетно. В каждой строке, где есть черные клетки, поставим красную фишку в среднюю по счету черную клетку. В каждом столбце, где есть черные клетки, поставим синюю фишку в среднюю по счету черную клетку. Оказалось, что все красные фишки стоят в разных столбцах, а синие фишки — в разных строках. Докажите, что найдется клетка, в которой стоят и синяя, и красная фишки.

Б.Френкин

7. (10) Среди любых пяти узлов обычной клетчатой бумаги обязательно найдутся два, середина отрезка между которыми — тоже узел клетчатой бумаги. А какое минимальное количество узлов сетки из правильных шестиугольников (рис. 3) необходимо взять, чтобы

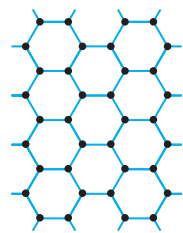


Рис. 3

среди них обязательно нашлось два, середина отрезка между которыми — тоже узел этой сетки?

А.Кулыгин

8. (10) Дан многочлен степени 2022 с целыми коэффициентами и со старшим коэффициентом 1. Какое наибольшее число корней он может иметь на интервале $(0; 1)$?

А.Канель-Белов

9. (11) В декартовой системе координат (с одинаковым масштабом по осям x и y) нарисовали график показательной функции $y = 3^x$. Затем ось y и все отметки на оси x стерли. Остались лишь график функции и ось x без масштаба и отметки 0. Каким образом с помощью циркуля и линейки можно восстановить ось y ?

М.Евдокимов

10. (11) Звездолет находится в полупространстве на расстоянии a от его границы. Экипаж знает об этом, но не представляет, в каком направлении двигаться, чтобы достигнуть граничной плоскости. Звездолет может лететь в пространстве по любой траектории, измеряя длину пройденного пути, и имеет датчик, подающий сигнал, когда граница достигнута. Может ли звездолет гарантированно достигнуть границы, преодолев путь длиной не более $14a$?

М.Евдокимов

11. (11) В выпуклом 12-угольнике все углы равны. Известно, что длины каких-то десяти его сторон равны 1, а длина еще одной равна 2. Чему может быть равна площадь этого 12-угольника?

М.Евдокимов

12. (11) В равнобедренной трапеции проведена диагональ. По контуру каждого из получившихся двух треугольников ползет свой жук. Скорости движения жуков постоянны и одинаковы. Жуки не меняют направления обхода своих контуров, и по диагонали трапеции они ползут в разных направлениях. Докажите, что при любых начальных положениях жуков они когда-нибудь встретятся.

П.Бордин

Публикацию подготовил Н.Панюнин

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

(с.м. «Квант» №3)

1. 23:50:22.

Самое позднее время, которое могут показывать электронные часы, 23:59:59. Если посмотреть на время как на шестизначное число, то два момента времени сравниваются так же, как и обычные числа: время тем больше, чем больше первая цифра; если первые цифры совпадают, сравнивают вторую и т.д. Поэтому постараемся сохранить от 23:59:59 как можно больше цифр в начале. Максимум можно оставить три первых цифры, так как иначе останется больше двух цифр, отличных от 2 и 0. Пробуем найти время, начинающееся на 23:5*:**. Цифры 3 и 5 должны обязательно погаснуть, значит, оставшиеся должны быть 2, 0, 2, 2 именно в таком порядке, т.е. часы должны показывать 23:50:22.

2. На рисунке 1 приведено необходимое разреза-ние для каждого из пунктов.

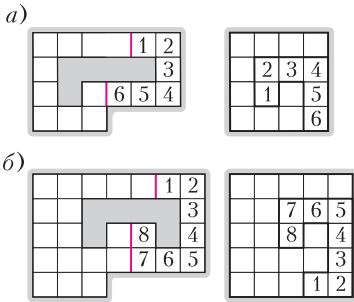


Рис. 1

3. На рисунке 2 показаны 4 возможных варианта (деления на схеме отвечают расстояниям 1 км; корова левее червячка).

Куда бы ни доставили орлы Айболита, ему нужно посетить два крайних домика. Значит, любой его маршрут не меньше, чем расстояние между ними, а маршрут с началом в одном из крайних домиков как раз равен расстоянию между крайними домиками.

Таким образом, это расстояние является наименьшим и должно быть одинаковым для двух животных. Следовательно, оно равно 6 км, и корова и червячок живут в крайних домиках, а волчица и жучок – где-то между ними. Остается

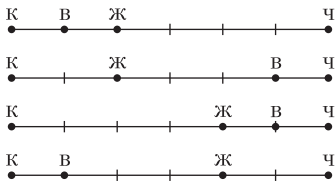


Рис. 2

заметить, что поскольку маршрут Айболита с началом в домике волчицы занимает 7 км, волчица живет в 1 км от любого из крайних домиков, а жучок, аналогично, в 2 км.

4. Тоже в одиннадцатый.

В первый день прошло 10 встреч, и, значит, было выдано 10 маек. Одиннадцатая майка была выдана лишь в одиннадцатый день турнира, т.е. у Пети и еще девяти участников в первые десять дней турнира не было ни одной победы. Это возможно только в том случае, когда эти участники (назовем их невезучими) в эти дни не играли друг с другом, т.е. каждый из них сыграл с десятью остальными участниками (теми, кому в первый день досталась майка) и всем им проиграл. Но тогда в оставшиеся дни невезучие будут играть между собой. В частности, в одиннадцатый день они разобьются на пять пар, и победители этих пар получат майки с номерами с 11 по 15.

Конкурс имени А.П.Савина

(с.м. «Квант» №2)

21. Пусть строк всего m , столбцов n и, скажем, $n > m$. В каждом столбце может быть от 0 до m белых клеток – всего $m+1$ вариантов, поэтому $n \leq m+1$. Но $n > m$, откуда $n = m+1$. Тогда в столбцах встречаются по разу все варианты количеств белых клеток (от 0 до m), и, соответственно, все количества синих клеток (от m до 0), а значит, и тех и других поровну (по $1+2+\dots+(m+1)$).

22. Вырежем общую часть квадрата и прямоугольника и сдвинем друг к другу оставшиеся обрезки каждой из фигур – получится два прямоугольника (рис. 3).

Прямоугольник, получившийся из квадрата 6×6 , будет иметь длину 6 и ширину R , равную сумме красных отрезков, а прямоугольник, получившийся из прямоугольника 3×12 , будет иметь ширину 3 и длину G , равную сумме зеленых отрезков. Но площади исходных фигур одинаковы ($6 \times 6 = 3 \times 12 = 36$) и вырезана одна и та же площадь, поэтому сложенные из остатков прямоугольники тоже равны по площади. Тогда $6R = 3G$ и $G = 2R$, что и требовалось.

23. Да, верно. Представим число N как $10a + b$, где b – нечетная цифра. Тогда $N^{10} = (10a + b)^{10}$. Раскроем скобки в этом выражении по биному Ньютона. Так как нас интересует третья справа цифра, то

заметить, что поскольку маршрут Айболита с началом в домике волчицы занимает 7 км, волчица живет в 1 км от любого из крайних домиков, а жучок, аналогично, в 2 км.

это выражение нас будет интересовать только по модулю 1000, поэтому мы можем сразу отбросить все слагаемые, где хотя бы в трех из десяти скобок $(10a + b)$ выбиралось $10a$:

$$\begin{aligned} (10a + b)^{10} &\equiv \binom{10}{0} (10a)^0 b^{10} + \binom{10}{1} (10a)^1 b^9 + \binom{10}{2} (10a)^2 b^8 + \dots \\ &\equiv 100 a^2 b^8 + 10 \cdot 10 a b^9 + b^{10} = \\ &= 100(45a^2b^8 + ab^9) + b^{10}. \end{aligned}$$

Покажем, что целая часть от деления этого числа на 100 будет нечетным числом. Так как b нечетно, то $45a^2b^8 + ab^9$ будет иметь ту же четность, что $a^2 + a$, — это четное число. Осталось показать, что эту четность не «испортит» прибавление числа b^{10} . Для этого проверим все пять вариантов и убедимся, что третья с конца цифра числа b^{10} четна:

$$\begin{aligned} 1^{10} &= 1 = 001, & 3^{10} &= 59049, & 5^{10} &= 9765625, \\ 7^{10} &= 282475249, & 9^{10} &= 3486784401. \end{aligned}$$

24. 14.

Параллелепипеды $1 \times 2 \times 4$ будем называть *кирпичиками*.

Из 10 кирпичей легко сделать параллелепипед $5 \times 4 \times 4$. Нетрудно проверить, что в оставшийся «угол» влезают еще 4 кирпичика. Таким образом можно разместить 14 кирпичей.

Объем 16 кирпичей больше объема коробки: $16 \cdot 8 = 128 > 125$. Предположим, удалось расположить 15 кирпичей. Тогда свободно $125 - 15 \cdot 8 = 5$ клеток.

Рассмотрим произвольный слой $1 \times 5 \times 5$. Кирпичи пересекают его по четному числу клеток — 2, 4 или 8, значит, в этом слое хотя бы одна из 25 клеток свободна. Рассмотрим 5 не пересекающихся по клеткам слоев — тогда если в каком-то из них свободно хотя бы 2 клетки, то всего свободно больше 5 клеток. Противоречие. Значит, в каждом слое свободна ровно одна клетка. Пронумеруем грани от 1 до 6. Каждый кирпич упирается своим концом 1×2 ровно в одну из граней, так как его длина 4 на единицу меньше ребра куба. Будем говорить, что это кирпич типа a , если он упирается в грань с номером a .

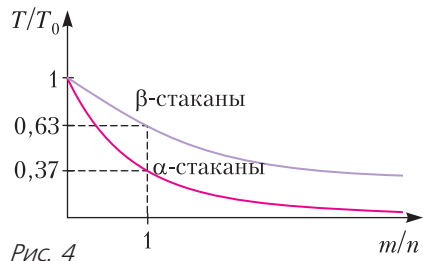
Рассмотрим грань 1. В ней одна клетка пустая (так как в каждом слое ровно одна пустая клетка), $2k$ клеток заняты k кирпичиками типа 1, а оставшиеся $24 - 2k$ клеток заняты кирпичиками других типов. Но они могут занимать только по 4 или 8 клеток грани, что кратно 4. Таким образом, $24 - 2k$ делится на 4, и k четно. Значит, количество кирпичей типа 1 четно. Аналогично для каждой другой грани, а значит, количество кирпичей каждого типа четно и их в сумме четное количество. Но их 15. Противоречие.

Парадоксы теплообмена: «честно + честно + ... + честно = нечестно»

1. Эффективность Сашиного метода при объединении в одну группу «бедных» точно такая же, как эффективность при объединении в одну группу «богатых». Действительно, рекуррентное соотношение для общего количества теплорода в β -стаканах имеет вид $q_{i+1} = \lambda(q_i + 1)$, где $q_0 = 0$ и $\lambda = \frac{n}{n+1}$. Оно дает $q_i = \frac{\lambda}{1-\lambda}(1-\lambda^i)$, $\eta_m = \frac{q_m}{n} = 1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^m$ и $\eta_\infty = 1 - 1/e$. Это является следствием второго вида симметрии между α - и β -стаканами. Мы можем считать, что все стаканы имеют фоновое наполнение — содержат по единице обычного теплорода, но, кроме этого, β -стаканы содержат по единице «отрицательного» теплорода. Тогда именно они, по сути, являются наполненными α -стаканами.

2. Из рекуррентной формулы, полученной Петей на уроке, находим $\eta_{n,m} = 1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^m$. Для нашего случая она дает $\eta_{4,8} = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^8 = 0,83$.

3. Для разных количеств стаканов второй замечательный предел превращается в равенство $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{m/n} \approx e^{m/n}$, здесь и ниже $n \gg 1$ — количество α -стаканов, m — количество β -стаканов. Поэтому количество теплорода, оставшегося в α -стаканах, равно $Q = ne^{-m/n}$, а их температура равна $T_\alpha = e^{-m/n}T_0$. Количество теплорода, захваченного β -стаканами, будет $q = n(1 - e^{-m/n})$ и, так как оно делится уже между m стаканами, температура β -стаканов будет $T_\beta = \frac{n}{m}(1 - e^{-m/n})T_0$ (рис. 4).



4. Для того чтобы найти количество теплорода, захваченного β -стаканами, нам надо подсчитать сумму элементов Машинной таблицы, лежащих в прямоугольных областях. Для случая $m = 2$ — это прямоугольник, изображенный на рисун-

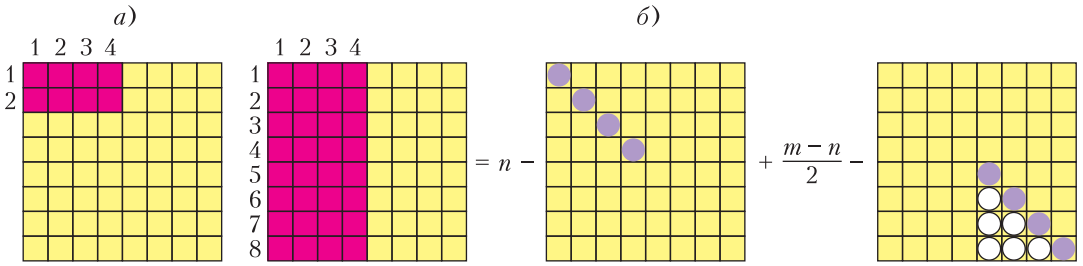


Рис. 5

ке 5,а, а для случая $m=8$ – прямоугольник, изображенный на рисунке 5,б (восьмую строчку надо дописать самостоятельно).

В первом случае количество слагаемых невелико, и суммирование можно провести «в лоб» (не забывая о знаменателях). Получаем, что общее количество теплорода, забранного β -стаканами, равно $7/4$ (из четырех начальных единиц). Поэтому эффективность теплообмена в этом случае равна $\eta = 7/16 = 44\%$.

Для случая $m = 8$ область суммирования достаточно велика (32 ячейки), поэтому рационализируем свой труд. Во-первых, сумма чисел верхнего квадрата нам уже известна: $S_1 = n - S_{\Delta 1}$, где $S_{\Delta 1}$ – сумма диагональных элементов этого квадрата. Для подсчета суммы по нижнему квадрату снова воспользуемся тем фактом, что сумма элементов в каждой строчке от первого до диагонального (включительно) равна $1/2$. Поэтому для суммы по элементам нижнего квадрата получаем $S_2 = (m - n)/2 - S_{\Delta 2} - S_{\Delta}$, где $S_{\Delta 2}$ – сумма диагональных элементов, лежащих на продолжении диагонали верхнего квадрата, S_{Δ} – сумма элементов образовавшегося вниз треугольника. Теперь для количества теплорода, оставшегося в α -стаканах, получаем более простую формулу суммирования: $Q^{\text{всего}} = 2mQ_{m+1,m+1} + S_{\Delta} - (m - n)/2 = 49/256$. Таким образом, β -стаканы забирают $975/256$ единиц теплорода из четырех начальных, и эффективность Машиного процесса получается равной $\eta = \frac{975}{1024} = 95\%$.

Отметим, что с увеличением количества «холодных» стаканов эффективность теплообмена увеличивается, но вот парадоксальность ситуации уменьшается: то, что очень большое количество холодной воды может отобрать практически все тепло у капли горячей воды, нам привычно и неудивительно. Для нас парадокс заключается в том, что всю холодную воду можно нагреть практически до начальной температуры. А этот эффект при увеличении количества холодной воды исчезает – ее становится слишком много и, даже отобрав все тепло у горячей, она сама горячей не станет.

5. Воспользуемся симметричностью Машинной матрицы и сформулируем в вольном стиле «правило перестановки»: у 12345 α -стаканов 6789 β -стаканов заберут столько же теплорода, сколько у 6789 α -стаканов заберут 12345 β -стаканов. Для нашей задачи из этого правила следует, что количество теплорода, которое холодные стаканы забирают у горячих, в обоих случаях одинаково. Обозначим это количество теплорода q_0 . Если n – количество красных стаканов, а m – количество синих, то для температур в первом и втором случаях получим

$$T_1 = (1 - q_0/n)T_0, \quad T_{\text{син}} = (1 - q_0/m)T_0, \\ T_2 = (q_0/m)T_0, \quad T_{\text{кр}} = (q_0/n)T_0,$$

откуда $T_{\text{кр}} = T_0 - T_1 = 95,2^\circ\text{C}$, $T_{\text{син}} = T_0 - T_2 = 52,4^\circ\text{C}$.

6. Мы уже знаем, что когда количества стаканов равные и очень большие, то β -стаканы отбирают у α -стаканов почти все тепло и предельные значения температур становятся равными $T_{\alpha} = 0$ и $T_{\beta} = T_0$. Если число β -стаканов m больше, чем число α -стаканов n , то уже первые n β -стаканов заберут практически все n единиц теплорода из α -стаканов (остальные β -стаканы лишь подберут оставшиеся крохи). А вот делить n единиц теплорода придется на все β -стаканов. Итак, температуры в этом случае будут $T_{\alpha} = 0$ и $T_{\beta} = \frac{n}{m}T_0$ (обоснуйте сами, что эти утверждения остаются справедливыми и для небольших n , если m велико). Если количество β -стаканов m меньше, чем количество α -стаканов n , то (по правилу перестановки) они заберут столько же тепла, сколько n β -стаканов заберут у m α -стаканов, т.е. m

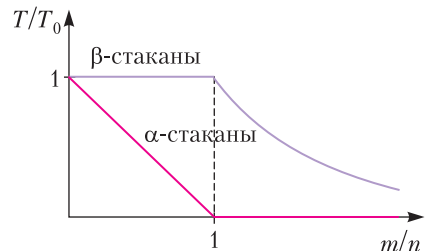


Рис. 6

единиц теплорода. Температура β -стаканов в этом случае будет $T_\beta = T_0$. В α -стаканах останется $(n - m)$ единиц тепла, и их температура будет $T_\alpha = \left(1 - \frac{m}{n}\right)T_0$.

Все сказанное изображено на рисунке 6. Поведение β -стаканов действительно соответствует «правилу ватаги разбойников». Однако, немного «честности» и здесь остается. Во-первых, предел того, сколько каждый β -стакан может «унести», устанавливается «честно» – по начальному состоянию β -стаканов. Во-вторых, разбойники не портят и не уничтожают того, чего не могут унести, а благородно разрешают ограбленным разделить его «по-честному».

LXXXV Московская математическая олимпиада школьников

1. Например,

$$\frac{20}{2 - \sqrt{2}} = \frac{20(2 + \sqrt{2})}{2} = 20 + 10\sqrt{2} > 20 + 10.$$

2. $22,5^\circ$.

Заметим, во-первых, что угол правильного восьмиугольника равен $6 \cdot 180^\circ / 8 = 135^\circ$. Обозначим вершины восьмиугольника так, как на рисунке 7. Заметим, что $KLDE$ – равнобокая трапеция, поэтому $\angle BED = 45^\circ$, а $\angle FEB = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$. Далее, HD – ось симметрии восьмиугольника, поэтому $\angle HDE = 135^\circ / 2 = 67,5^\circ$. Отсюда получается, что в треугольнике BDE углы B и D равны, а значит, $EB = ED = EF = FC$. Треугольники BEF и FCA равны по двум катетам, значит, $BF = FA$. Далее, угол F равнобедренного прямоугольного треугольника BEF равен 45° , поэтому угол GFB прямой. Угол AFB равен сумме углов AFG и GFB , т.е. 135° . Теперь заметим, что сумма равных углов FBA и FAB равна 45° , значит, угол ABC равен $45^\circ / 2 = 22,5^\circ$.

3. Верно.

Докажем, что можно выбрать такой угол четырехугольника, что сумма его с каждым из соседних углов не превосходит развернутого угла. Дей-

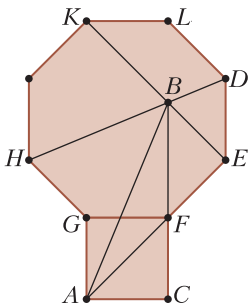


Рис. 7

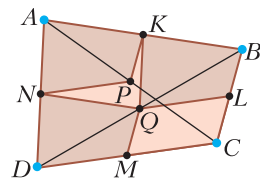


Рис. 8

ствительно, сумма каких-то двух соседних углов не превосходит 180° . Пусть это углы A и D (рис. 8). Тогда, если $\angle A + \angle B \leq 180^\circ$, то мы получили нужное, а если $\angle A + \angle B > 180^\circ$, то $\angle C + \angle D < 180^\circ$, и нам подходят углы A, D, C . В итоге можно так назвать вершины четырехугольника A, B, C, D , что $\angle A + \angle B \leq 180^\circ$, $\angle A + \angle D \leq 180^\circ$. Пусть K, L, M, N – середины отрезков AB, BC, CD, DA соответственно, P, Q – середины диагоналей AC и BD соответственно. Четырехугольники $AKPN, KBLQ, NQMD$ – искомые копии. Докажем, что они не перекрываются. Действительно, $\angle AKP + \angle QKB = \angle A + \angle B \leq 180^\circ$, $\angle DNQ + \angle ANP \leq 180^\circ$.

4. Да, может.

Например, подходит $n = 25$. Для этого значения n получим числа

- 25, 50, 75, 100, 125, 150, 175, 200, 225.

Каждое из них начинается на одну из четырех цифр 1, 2, 5, 7.

Комментарий. Можно доказать, что меньше четырех различных цифр получиться не могло. Ровно четыре различные цифры получаются для натуральных чисел из интервалов вида

$$\left[\underbrace{250\dots0}_{k-1}; \underbrace{29\dots9}_k \right] \text{ и } \left[\underbrace{33\dots34}_{k-1}; \underbrace{39\dots9}_k \right], \text{ где } k - \text{ произвольное натуральное число.}$$

5. 34 или 66.

Обозначим через m количество монет, а через n – количество наклеек. Тогда условие можно переписать в виде системы уравнений

$$\begin{cases} mt + n = 100, \\ m + nt = 101. \end{cases}$$

Вычтем первое уравнение из второго:

$$1 = 101 - 100 = (m + nt) - (mt + n) = (n - m)(t - 1).$$

Следовательно, $t = 1 + \frac{1}{n - m}$. Теперь сложим два изначальных уравнения:

$$201 = 101 + 100 = (mt + n) + (m + nt) = (m + n)(t + 1).$$

Следовательно, $t = \frac{201}{m + n} - 1$. Введем обозначения $a = n - m, b = n + m$. Отметим, что $a > 0$, поскольку $n > m$. Приравняем два выражения для t :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{n - m} &= \frac{201}{m + n} - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{a} = \frac{201}{b} - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2a + 1}{a} = \frac{201}{b}. \end{aligned}$$

Заметим, что числа $2a + 1$ и a взаимно просты, поэтому дробь $\frac{2a + 1}{a}$ несократима. Значит, 201 делится на $2a + 1$. У числа $201 = 3 \cdot 67$ всего четыре делителя: 1, 3, 67 и 201. Так как $2a + 1 > 1$,

нужно разобрать три случая.

Первый случай: $2a + 1 = 3$. Тогда $a = 1$ и $\frac{201}{b} = \frac{3}{1}$. Значит, $b = 67$, откуда

$$m = \frac{1}{2}(b - a) = 33, n = \frac{1}{2}(a + b) = 34.$$

Также $t = 2$. Несложно проверить, что этот случай подходит.

Второй случай: $2a + 1 = 67$. Тогда $a = 33$ и $\frac{201}{b} = \frac{67}{33}$. Значит, $b = 99$, откуда

$$m = \frac{1}{2}(b - a) = 33, n = \frac{1}{2}(a + b) = 66.$$

Также $t = \frac{34}{33}$. Несложно проверить, что этот случай подходит.

Третий случай: $2a + 1 = 201$. Тогда $a = 100$ и $\frac{201}{b} = \frac{201}{100}$. Значит, $b = 100$, откуда

$$m = \frac{1}{2}(b - a) = 0, n = \frac{1}{2}(a + b) = 100.$$

Этот случай не подходит, так как должна быть хотя бы одна монета.

6. Удалим из доски все строки и столбцы, в которых нет черных клеток. Заметим, что после этого условие задачи продолжит выполняться. Теперь все черные клетки лежат внутри некоторого прямоугольника $m \times n$, в каждой строке и в каждом столбце которого есть хотя бы одна черная клетка.

По условию в каждой из n строк стоит ровно одна красная фишка. Тогда всего красных фишек n . Но эти n красных фишек должны находиться в разных столбцах, а значит, $m \geq n$. Аналогично, рассматривая синие фишки, приходим к выводу, что $n \geq m$. Таким образом, $n = m$. Раз красных фишек и столбцов поровну и красные фишки находятся в разных столбцах, то в каждом столбце есть ровно одна красная фишка. Аналогично, в каждой строке есть ровно одна синяя фишка.

Рассмотрим верхнюю строку, в ней есть синяя фишка. Рассмотрим столбец с этой синей фишкой. В этом столбце синяя фишка стоит в самой верхней клетке. Получается, что самая верхняя клетка этого столбца оказалась средней по счету черной клеткой в этом столбце. Такое возможно лишь в случае, когда в столбце только одна черная клетка.

Ранее доказано, что в любом столбце должна быть ровно одна красная фишка. Рассматривая найденный столбец с единственной черной клеткой, приходим к выводу, что красная фишка должна быть в этой клетке. Но в этой клетке

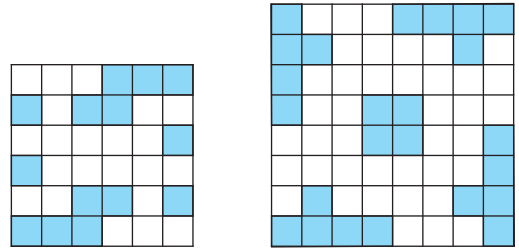


Рис. 9

уже есть синяя фишка. Таким образом, искомая клетка найдена.

Комментарий. Описанные в задаче конструкции существуют, причем не обязательно в каждой строке и в каждом столбце находится ровно одна черная клетка. Возможные примеры изображены на рисунке 9.

7. 9.

Лемма. Среди любых пяти узлов сетки из правильных треугольников найдутся два, середина отрезка между которыми — тоже узел сетки.

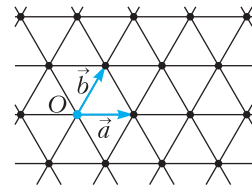


Рис. 10

Доказательство. Введем начало отсчета в одном из узлов сетки и обозначим через \vec{a} и \vec{b} радиус-векторы к двум ближайшим узлам (рис.10). Тогда узлы сетки суть точки вида

$m\vec{a} + n\vec{b}$ для целых m и n . По принципу Дирихле из пяти точек найдутся две точки $m_1\vec{a} + n_1\vec{b}$ и $m_2\vec{a} + n_2\vec{b}$, у которых одновременно совпадает четность m_1 и m_2 и четность n_1 и n_2 . Середина отрезка, соединяющего эти две точки, есть точка

$$\frac{m_1 + m_2}{2} \vec{a} + \frac{n_1 + n_2}{2} \vec{b}.$$

Она является узлом сетки в силу одинаковой четности m_1 и m_2 , n_1 и n_2 . Лемма доказана.

На рисунке 11,а можно увидеть пример расположения 8 узлов сетки, среди которых нет двух, середина отрезка между которыми — узел сетки. Докажем, что девяти узлов достаточно. Заметим, что шестиугольная сетка разбивается в объединение двух треугольных (рис.11,б). По принципу Дирихле среди любых девяти узлов по крайней мере пять окажутся в одной из этих

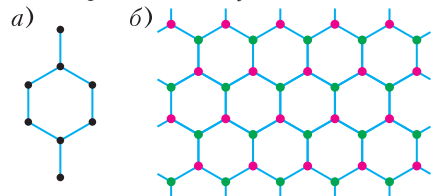


Рис. 11

двух треугольных сеток. По лемме среди этих пяти узлов найдутся два искомым.

8. 2021.

Если на интервале $(0;1)$ лежат все 2022 корня многочлена, то по теореме Виета свободный член многочлена должен быть равен их произведению, следовательно, он тоже будет лежать на интервале $(0;1)$ и не будет целым. Докажем, что в качестве примера подойдет многочлен

$$P(x) = x^{2022} + (1 - 4042x)(3 - 4042x) \dots (4041 - 4042x).$$

Заметим, что при всех $k = 0, 1, \dots, 2021$ число

$$P\left(\frac{2k}{4042}\right) = \left(\frac{2k}{4042}\right)^n + (-1)^k (2k-1)!(4041-2k)!!$$

является положительным при четном k и является отрицательным при нечетном k . Таким образом, на интервале $(0;1)$ многочлен $P(x)$ меняет знак по крайней мере 2021 раз и, следовательно, имеет хотя бы 2021 корень.

9. Отметим на графике произвольную точку A и стандартным образом построим перпендикуляр AB к оси x (рис. 12). На продолжении отрезка BA за точку A отметим такую точку C , что $AC = 2AB$. Далее построим прямую, проходящую через точку C параллельно оси x , и обозначим через D точку ее пересечения с графиком. Тогда длина отрезка CD равна 1. Действительно, если A имеет координаты $(x_0; 3^{x_0})$, то ордината точки D равна $3 \cdot 3^{x_0} = 3^{x_0+1}$, поэтому ее абсцисса равна $x_0 + 1$.

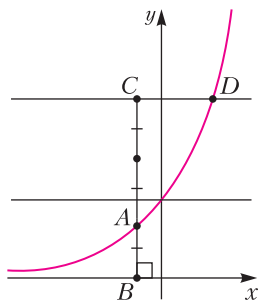


Рис. 12

Отметим теперь на луче BA точку на расстоянии $CD = 1$ от точки B и проведем через нее прямую, параллельную оси x . Она пересечет график в точке $(0;1)$, т.е. в той же точке, что и ось y . Для завершения построения остается провести через эту точку прямую, перпендикулярную оси x , — это и будет искомая ось y .

10. Да, может.

Пусть корабль находится в некоторой точке O . Рассмотрим правильный октаэдр $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, описанный возле шара радиуса a с центром в точке O (рис. 13). Докажем, что путь

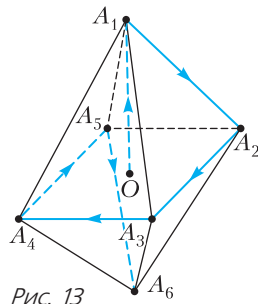


Рис. 13

$$O \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_5 \rightarrow A_6$$

заведомо позволит достигнуть граничной плоскости. Предположим противное. Но тогда вершины октаэдра, а значит, и сам октаэдр (выпуклая оболочка его вершин) лежат строго внутри полупространства. Поэтому вписанный шар октаэдра, радиус которого равен a , тоже лежит строго внутри полупространства. Получаем противоречие, так как по условию расстояние до граничной плоскости полупространства равно a . Покажем теперь, что длина пути

$$O \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_5 \rightarrow A_6$$

меньше $14a$. Пусть $OA_1 = OA_2 = OA_3 = x$. Запишем объем пирамиды $OA_1A_2A_3$ двумя способами:

$$V = \frac{1}{6}x^3 = \frac{1}{3} \cdot OH \cdot S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{3}a \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{(x\sqrt{2})^2}{4}.$$

Отсюда $x = a\sqrt{3}$, а длина ребра октаэдра равна $a\sqrt{6}$. Поэтому длина пути $(\sqrt{3} + 5\sqrt{6})a < 14a$, так как $\sqrt{2} < \frac{43}{30}$.

11. $8 + 4\sqrt{3}$.

Рассмотрим 12-угольник $A_1A_2 \dots A_{12}$, удовлетворяющий условию задачи. У него десять сторон длины 1 и одна сторона длины 2. Обозначим через x длину оставшейся стороны. Рассмотрим векторы $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{12}A_1}$, а также коллинеарные им единичные векторы $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_{12}}$. Тогда для некоторых i и j имеет место равенство

$$\overline{e_1} + \dots + 2\overline{e_i} + \dots + x\overline{e_j} + \dots + \overline{e_{12}} = \vec{0}. \quad (1)$$

Помимо того,

$$\overline{e_1} + \overline{e_7} = \overline{e_2} + \overline{e_8} = \dots = \overline{e_6} + \overline{e_{12}} = \vec{0},$$

поэтому

$$\overline{e_1} + \overline{e_2} + \dots + \overline{e_{12}} = \vec{0}. \quad (2)$$

Вычитая (2) из (1), получаем $\overline{e_i} + (x-1)\overline{e_j} = \vec{0}$. Это возможно лишь в случае, если $\overline{e_i} = -\overline{e_j}$ и $x = 2$. Значит, в исходном 12-угольнике есть пара параллельных сторон длины 2.

В силу равенства всех углов и соответствующих сторон этот 12-угольник имеет ось симметрии (рис. 14). Чтобы найти площадь, разобьем его

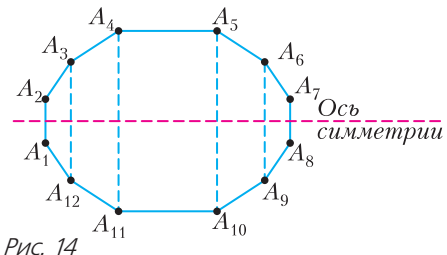


Рис. 14

на 4 трапеции и прямоугольник. Находим

$$A_3A_{12} = A_6A_9 = 1 + \sqrt{3}, \quad A_4A_{11} = A_5A_{10} = 2 + \sqrt{3},$$

поэтому искомая площадь равна

$$S = 2 \cdot (2 + \sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}(2 + \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3})}{2} + \frac{1 + \sqrt{3} + 1}{2} = 8 + 4\sqrt{3}.$$

12. Пусть в равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями $AB > CD$ проведена диагональ AC (рис. 15) так, что первый жук ползает по циклу

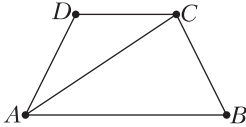


Рис. 15

$A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$, второй – по циклу $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$. Рассмотрим моменты времени, в которые первый жук оказывается в точке A . За время обхода первым жуком полного цикла из A снова в A второй жук сдвигается по своему циклу на $AB > CD$ в одну и ту же сторону. Поскольку

$$AB - CD < BC + AC - CD =$$

$$= AD + AC - CD < AC + CD + AC - CD = 2AC,$$

при таких сдвигах в один из рассматриваемых моментов времени второй жук окажется на расстоянии меньше $2AC$ до точки A по ходу своего движения, а значит, встретится с первым жуком на диагонали AC .

Олимпиада «Ломоносов»

(см. «Квант» № 3)

Физика

Заключительный этап

7–9 классы

1. Совместим начало отсчета с точкой запуска шарика, координатную ось x направим вдоль доски вверх. Кинематическое уравнение движения шарика в выбранной системе дает $l = v_0 t_1 - \frac{at_1^2}{2}$ и $l = v_0 t_2 - \frac{at_2^2}{2}$. Отсюда

$$v_0 = l \frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2} = 0,9 \text{ м/с}.$$

2. Пусть m – максимальная масса куска льда, при которой он еще плавает. Тогда объем этого куска $V = \frac{m}{\rho_{\text{л}}}$. Пренебрегая объемом дробинки по сравнению с V , запишем условие плавания льда с

дробинкой в предельном случае: $(m + m_{\text{д}})g = \rho_{\text{в}} V g$. Чтобы кусок льда с дробинкой начал тонуть, нужно растопить лед массой $\Delta m = m_0 - m$, затратив количество теплоты

$$Q = \lambda \Delta m = \lambda \left(m_0 - \frac{m_{\text{д}} \rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}} \right) = 18,7 \text{ кДж}.$$

3. Обозначим через I_1, I_2 и I_3 токи, текущие через резисторы R_1, R_2 и R_3 соответственно. Из соотношений $I_1 = I_2 + I_3, I_2 R_2 = I_3 R_3, N_1 = I_1^2 R_1, N_2 = I_2^2 R_2$ находим

$$N_2 = N_1 \frac{R_2 R_3^2}{R_1 (R_2 + R_3)^2} = 18 \text{ Вт}.$$

4. Вертикальный размер зеркала ограничен световыми лучами, исходящими из точек, лежащих на нижнем и верхнем ребрах комнаты, и попадающими в глаз человека (рис. 16, где h – расстоя-

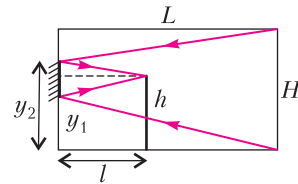


Рис. 16

ние от пола до уровня глаз человека). Из геометрии получаем

$$s = y_2 - y_1 = \frac{Hh}{L+l} = \frac{6}{7} \text{ м} \approx 0,86 \text{ м}.$$

10–11 классы

1. На рисунке 17 изображено положение автомобилей в момент времени, когда расстояние между ними минимально и равно s (точки 1 и 2), а также в момент, когда расстояние между ними равно $2s$ (точки 1' и 2'). По закону сложения скоростей относительная скорость автомобилей $\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, а ее модуль $v_{\text{отн}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$. В момент, когда расстояние между автомобилями минимально, вектор их относительной скорости перпендикулярен отрезку прямой, соединяющей ав-

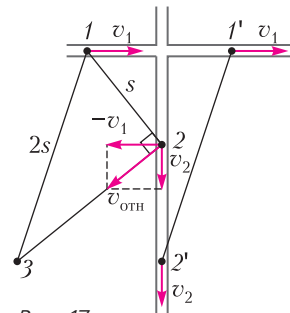


Рис. 17

томобили (отрезку 1–2). Модуль относительно-го перемещения автомобилей за время τ (длина отрезка 2–3) равен $v_{\text{отн}}\tau = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}\tau$. По теоре-

ме Пифагора $(2s)^2 = s^2 + (v_1^2 + v_2^2)\tau^2$. Отсюда

$$v_1 = \sqrt{\frac{3s^2}{\tau^2} - v_2^2} \approx 14,1 \text{ м/с} \approx 50,9 \text{ км/ч.}$$

2. Будем решать задачу в системе отсчета, связанной со льдом. Пусть к интересующему моменту автомобиль разогнался до скорости v , а доска приобрела скорость V . Согласно закону сохранения импульса, $mv - MV = 0$, где $m = M/n$ – масса автомобиля. При этом доска сместилась на расстояние L , а автомобиль проехал расстояние $l = nL$ в противоположную сторону. При проскальзывании колес мощность двигателя затрачивалась на разгон автомобиля и доски под действием сил трения скольжения между колесами и доской и на увеличение внутренней энергии взаимодействующих тел. Проскальзывание колес прекратилось в тот момент, когда модули скоростей автомобиля и доски стали удовлетворять соотношению $(v + V)\mu mg = N$. В дальнейшем модули скоростей увеличивались, а силы трения перестали быть силами трения скольжения и уменьшились по модулю. За время проскальзывания колес кинетическая энергия автомобиля стала $\frac{mv^2}{2} = \mu mgl$, а доски $\frac{MV^2}{2} = \mu mgL$. Из составленных уравнений получаем

$$x = L + l = \frac{N^2 n^3}{2\mu^3 g^3 M^2 (1+n)} = 0,5 \text{ м.}$$

3. Уравнение реакции горения водорода в кислороде имеет вид $2\text{H}_2 + \text{O}_2 = 2\text{H}_2\text{O}$. Отсюда следует, что количество молей сгоревшего водорода равно количеству молей образовавшегося водяного пара и вдвое превышает количество молей требующегося для горения кислорода. Поскольку $0,23v_2 > \frac{v_1}{2}$, имеющегося в сосуде воздуха с избытком хватит для полного сгорания водорода. Следовательно, в воздухе образуется v_1 молей водяного пара. Используя уравнение Менделеева–Клапейрона, находим парциальное давление водяного пара: $p = \frac{v_1 RT}{V}$ и относительную влажность воздуха:

$$f = \frac{p}{p_{\text{н}}} = \frac{v_1 RT}{p_{\text{н}} V} \approx 0,52 = 52\%.$$

4. Когда цилиндр расположен горизонтально, давление воздуха равно давлению насыщенного водяного пара $p_{\text{н}}$, которое при $t = 100^\circ\text{C}$ равно нормальному атмосферному давлению p_0 . Запи-

сывая уравнение состояния воздуха: $p_0 V = \nu_{\text{в}} RT$, находим количество молей воздуха: $\nu_{\text{в}} = \frac{p_0 V}{RT}$.

Когда цилиндр поставили вертикально, давление водяного пара осталось прежним, а давление воздуха, как это следует из уравнения равновесия поршня, стало равным $p_0 - mg/S$. При перемещении поршня на расстояние x объем воздуха увеличился на xS и уравнение состояния воздуха приняло вид $\left(p_0 - \frac{mg}{S}\right)(V + xS) = \nu_{\text{в}} RT = p_0 V$. Отсюда легко найти

$$x = \frac{mgV}{S(p_0 S - mg)} \approx 5,3 \text{ мм.}$$

5. В положении равновесия шарика пружина растянута на величину $\Delta l = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2 k}$. Совместим начало координат с положением шарика в состоянии равновесия и направим координатную ось x вправо. По второму закону Ньютона, $m\ddot{x} = -k(x + \Delta l) + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(L-x)^2}$, где x – смещение шарика от положения равновесия. Учитывая, что $x \ll L$, преобразуем последнее слагаемое к виду $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{-2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2} \left(1 + \frac{2x}{L}\right)$. В итоге уравнение движения шарика принимает вид $x'' + \left(\frac{k}{m} - \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 mL^3}\right)x = 0$. Следовательно, шарик совершает гармонические колебания с круговой частотой $\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 mL^3}}$, откуда получаем

$$k = (2\pi f)^2 m + \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 L^3} \approx 1 \text{ Н/м.}$$

6. Незаряженная пластинка покоится на шероховатой части наклонной плоскости при условии $0 = mg \sin \alpha_{\text{нр}} - \mu mg \cos \alpha_{\text{нр}}$. При соскальзывании из нового положения сила трения скольжения между пластинкой и плитой изменяется по линейному закону от нуля до значения μN , поэтому работа силы трения $A_{\text{тр}} = -\frac{1}{2}\mu N b$. Скорость движения пластинки можно найти из закона изменения механической энергии $mgb \sin \alpha + A_{\text{тр}} = \frac{mv_{1,2}^2}{2}$. В отсутствие электрического заряда нормальная составляющая силы реакции опоры равна $N_1 = mg \cos \alpha_{\text{нр}}$. Напряженность электрического поля, созданного заряженной плитой, равна $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, поэтому нормальная составляющая силы

уменьшается до значения $N_2 = mg \cos \alpha_{\text{пр}} - qE$ (в случае одинаковых знаков зарядов). Решая систему приведенных уравнений, находим

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1 + \frac{q\sigma \operatorname{tg} \alpha_{\text{пр}}}{2\epsilon_0 mg \sin \alpha_{\text{пр}}}} \approx 1,26.$$

7. Ход одного из лучей, ограничивающих размер светового пятна на экране, изображен на рисунке 18 при двух положениях источника. Когда источник помещен в фокус линзы, диаметр свет-

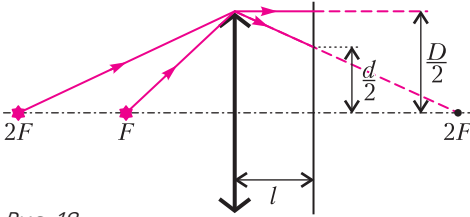


Рис. 18

лого пятна на экране совпадает с диаметром линзы. Если источник расположен на расстоянии $a > F$ от линзы, то расстояние от линзы до его действительного изображения определяется по формуле тонкой линзы и равно $b = \frac{aF}{a-F}$. В частности, при $a = 2F$ имеем $b = 2F$. Из подобия треугольников на рисунке следует $\frac{d}{D} = \frac{2F-l}{2F}$. Отсюда находим

$$F = \frac{Dl}{2(D-d)} = 10 \text{ см.}$$

8. Ход одного из лучей изображен на рисунке 19 для случая, когда $l > F$. Сплошные линии соответствуют исходному положению линзы, штриховые – смещенному. Из подобия треугольников AFF_1 и ABB_1 следует $F = \frac{l\delta}{\Delta}$. Аналогично рассматривается случай, когда $l < F$. Наконец, если перемещение линзы выходит из плоскости рисунка, то лучи, преломленные линзой в исходном и смещенном ее положениях, по-прежнему

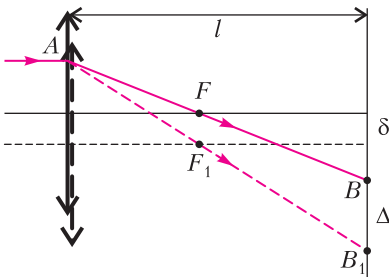


Рис. 19

будут лежать в одной плоскости, в которой можно рассмотреть такие же подобные треугольники. Следовательно, связь между смещениями линзы и светового пятна на экране во всех случаях имеет один и тот же вид. Поэтому

$$F = \frac{l\delta}{\Delta} = 10.$$

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

М.Н.Грицук

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

**Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.**

Рег. св-во ПИ №ФС77-54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»**

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

**в соответствии с предоставленными
материалами**

**в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8**

Тел.: (831) 218-40-40

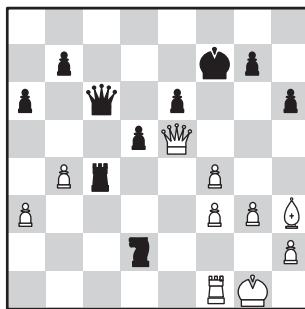
На пути В МАДРИД

Рихард Раппорт и Хикару Накамура завоевали две оставшиеся путевки в турнир претендентов, который пройдет этим летом в Мадриде. Венгерский гроссмейстер выиграл этап Гранпри в Белграде, одолев в финальной партии Дмитрия Андрейкина. Американскому шахматисту было достаточно выйти из группы на этапе в Берлине, однако он даже «перевыполнил норму», заняв в этом турнире второе место. К сожалению, с большой вероятностью, список участников турнира претендентов претерпит изменения, поскольку Сергей Карякин дисквалифицирован ФИДЕ по «внеспортивным» причинам и его, скорее всего, заменит Дин Лижень.

**Р.Раппорт – Д.Андрейкин
Белград, 2022**

1. d4 d5 2. c4 e6 3. ♘c3 a6 4. cd ed 5. a3 h6 6. ♙f4 ♙f6 7. e3 c5!? Принципиальный ход – черные готовы играть с изолированной пешкой, но активными фигурами. 8. ♗e5!? Создавая перманентную угрозу взятия на f6 с последующим выигрышем пешки d5. 8...♗c6 9. ♗ge2 ♗c6 10. ♙f4 cd 11. ♗d4 ♗d4 12. ♗d4 ♗d6 13. g3 ♗c8 14. ♗d1 ♗a5 15. ♗c1 0-0?! Потеря темпа. В случае 15...♗c6 16. ♗e6 fe 17. ♗h3 ♗f7 ладья попадала на c8 без промежуточной остановки на f8. 16. ♗e6 fe 17. ♗h3 ♗f7 18. 0-0 ♗c4 19. ♗d3 ♗e5 20. ♗e2 ♗fc8 21. ♗c4 ♗c4 22. b4 ♗a4 23. ♙f4 ♙f4! Иначе поля g6 и e6 не защитить. 24. ef ♗c6 25. ♗e3 ♗e4 26. f3 ♗c3 27. ♗d4 ♗c4 28. ♗e3 ♗c3 29. ♗d4 ♗c4. В этот момент у белых на часах оставалось 2 минуты, а у черных 8, и с учетом статуса партии многие комментаторы ожидали, что белые за-

фиксируют повторение, однако венгерский гроссмейстер предпочел рискнуть. 30. ♗e5! ♗d2. Белые не могут сохранить качество, так как в случае 31. ♗f2 ♗c1+ 32. ♗g2 ♗c4 33. ♗d4 ♗d1 34. ♗a7 d4 черные выигрывают после 35...♗e3+.

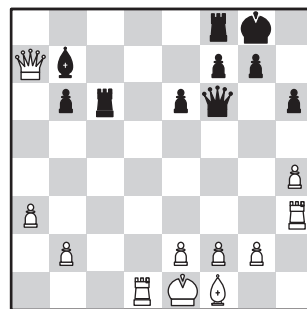


31. f5! ♗f1 32. fe+ ♗e8? Удивительно, но черные спасались в случае с виду нелогичного отступления под шах – 32...♗e7! 33. ♗g7+ ♗d6 34. ♗f8+ ♗c7 35. e7 ♗b6+ 36. ♗f1 ♗c1+ с вечным шахом. 33. ♗g7 ♗b6+? Решающая ошибка. Больше шансов на ничью оставляло 33...♗c7 34. ♗g6+ ♗e7 35. ♗f1 ♗b6+ 36. ♗g2 ♗e6+ 37. ♗e6 ♗e6 38. ♗c4 dc, и защищенная проходная на c4 может компенсировать нехватку одной пешки. 34. ♗f1 ♗c1+ 35. ♗e2 ♗e1+? 36. ♗e1 ♗e3+. Черные пожертвовали ладью, однако угроза вечного шаха легко парируется белыми ввиду удачного положения ферзя на большой диагонали. 37. ♗d1 ♗d3+ 38. ♗c1 ♗e3+ 39. ♗b1 ♗d3+ 40. ♗c1 ♗e3+ 41. ♗b2 ♗d2+ 42. ♗a1 ♗c1+ 43. ♗a2 ♗c4+ 44. ♗b2 ♗e2+ 45. ♗a1 ♗f1+ 46. ♗f1, черные сдались.

**Х.Накамура – Г.Опарин
Берлин, 2022**

1. d4 ♗f6 2. c4 e6 3. ♗c3 ♗b4 4. ♗c2 d5 5. a3 ♗c3+ 6. ♗c3 0-0 7. ♗f3 dc 8. ♗c4 b6 9. h4!? В стиле Гарри Каспарова и AlphaZero! 9...♗a6 10. ♗c2 c5 11. dc ♗bd7 12. c6 ♗c8 13. ♗g5 ♗b7 14. ♗d4 ♗e5 15. ♗d1 ♗e7

16. ♗h3 ♗c6 17. ♗c6 ♗c6 18. ♗a4 h6 19. ♗f6 ♗f6 20. ♗a7. Глядя на позицию, сложно сразу определить, играют ли любители или игроки экстра-класса. Таковы современные шахматы! У белых лишняя пешка, но слабый король и отставание в развитии.



20...♗a8 21. ♗b3 ♗d8 22. ♗bd3 ♗dc8 23. ♗d4 e5 24. ♗d2 ♗h4 25. g3 ♗h1?! (сильнее ♗e4, затрудняя белым размены) 26. ♗e7 ♗f6 27. ♗d8+ ♗d8 28. ♗d8+ ♗h7 29. f3 ♗e4 30. ♗d6 ♗d6 31. ♗d6 ♗g1! 32. ♗e5. Слона брать нельзя – 32. fe ♗g3+ 33. ♗d1 ♗g1 с повторением ходов. 32...♗g6 33. g4 f6 34. ♗f4 ♗c5 35. ♗d2 f5 36. gf ♗f5 37. e3 ♗e5 38. f4 ♗e7 39. ♗g2 h5 40. ♗d4 ♗h4+ 41. ♗f1 ♗g4 42. ♗d2 h4 43. ♗e2 g5? Черным следовало сохранить ферзей, поскольку при открытой позиции белым сложнее реализовать лишнюю пешку из-за угрозы вечного шаха. 44. ♗g4 ♗g4 45. ♗c6 ♗g6 46. b4 gf 47. ef ♗f6? Решающая ошибка. Позволяло бороться этюдное 47...♗c8 48. ♗f2 ♗h5 с идеей ♗g4-f5, однако найти такой маневр за доской практически невозможно. 48. a4 ♗e7 49. ♗e4 ♗d6 50. f5 ♗d1 51. a5 ba 52. ba. На доске возникли «штаны» – черный король не в состоянии одновременно притормозить пешки на разных флангах. 52...♗c5 53. f6 ♗b3 54. ♗d3 ♗d6 55. a6 ♗d5 56. a7 ♗c7 57. a8♞, черные сдались.

А.Русанов

Индекс 90964

Уроки физики

И СНОВА ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ СВЕТА



ISSN 0130-2221 22004



(Подробнее – на с. 30 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)