

ИЮЛЬ

ISSN 0130-2221

2021 · № 7

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ





# Пять кубов

В «Кванте» №12 за 2018 год рассказывалось о головоломке японского изобретателя Ичиро Коно (Ichiro Kohn), в которой из трех одинаковых деталей нужно было сложить три кубика. Каждая деталь склеена из двух брусочков  $2 \times 2 \times 1$ , как показано на фотографии. Точки в центрах брусочков — это магнитики, удерживающие детали вместе, когда головоломка будет решена.

Коно развил эту идею совместно с известным американским изобретателем головоломок Эриком Фуллером (Erik Fuller): они обнаружили, что из пяти таких же деталей можно сложить пять кубиков  $2 \times 2 \times 2$ . Причем авторы предлагают сделать это так, чтобы никакие два соседних кубика не перекрывались больше чем на половину — такое ограничение несколько усложняет задачу.

Желаем успехов!

*Е.Епифанов*



## В номере:

## УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук  
Математический институт  
им. В.А.Стеклова РАН  
Физический институт  
им. П.Н.Лебедева РАН

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,  
М.Н.Бондаров, А.А.Варламов,  
С.Д.Варламов, А.П.Веселов,  
А.Н.Виленкин, Н.П.Долбинин,  
С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,  
А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов,  
П.А.Кожевников (заместитель главного  
редактора), С.П.Коновалов, К.П.Кохась,  
А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, А.Б.Минеев,  
В.Ю.Протасов, А.М.Райгородский,  
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,  
А.В.Устинов, А.И.Черноуцан  
(заместитель главного редактора)

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,  
А.А.Боровой, В.В.Козлов,  
Н.Н.Константинов, С.П.Новиков,  
А.Л.Семенов, С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

1970 ГОДА

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,  
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,  
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,  
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,  
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,  
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

- 2 Чебышёв, Абель и эллиптические интегралы.  
*А.Веселов*
- 8 Термоэлектричество: от дуги Алессандро  
Вольта до феррожидкостных термоэлектри-  
ческих генераторов. *А.Варламов, С.Шарапов,  
Ю.Шикина*

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 19 Задачи M2658–M2661, Ф2665–Ф2668  
20 Решения задач M2646–M2649, Ф2653–Ф2656

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 30 Задачи  
31 Мешает ли птицам попутный ветер.  
*Н.Константинов*
- 36 Фантастика и реальность. *С.Дворянинов*

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Физические измерения

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 37 Об одной олимпиадной задаче по физике.  
*Г.Гайдуков, А.Румянцев*

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 42 Подобие с медианами. *Д.Швецов*

## ОЛИМПИАДЫ

- 48 Заключительный этап XLVII Всероссийской  
олимпиады школьников по математике
- 51 Всероссийская олимпиада по физике  
имени Дж.К.Максвелла
- 53 Заключительный этап LV Всероссийской  
олимпиады школьников по физике
- 59 Ответы, указания, решения

Внимание наших читателей (18, 28)

## НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «Мешает ли птицам  
попутный ветер»*
- II *Коллекция головоломок*
- III *Шахматная страничка*
- IV *Прогулки с физикой*



# Чебышёв, Абель и эллиптические интегралы

*А. ВЕСЕЛОВ*

XIX век заслуженно считается золотым веком математики, и замечательно, что Россия дала такого выдающегося ее представителя, как Пафнутий Львович Чебышёв. По широте математических интересов и глубине результатов Чебышёв и его, без преувеличения, великая школа безусловно находятся на уровне той грандиозной математической эпохи.

Я расскажу здесь о замечательных результатах Чебышёва [1], продолживших исследования, начатые гениальным норвежским математиком Нильсом Хенриком Абелем [2] и известных не так широко, как они этого заслуживают.

Чтобы понять основные результаты этих работ, от читателя потребуется только умение дифференцировать и знакомство с понятием интеграла.

Абель начинает свою работу [2] с дифференцирования функции

$$f(x) = \ln \frac{p(x) + q(x)\sqrt{R(x)}}{p(x) - q(x)\sqrt{R(x)}},$$

где  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $R(x)$  – некоторые многочлены. Применяя известные свойства производной и логарифма – в частности, формулу  $(\ln x)' = 1/x$  – имеем

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{p' + (q\sqrt{R})'}{p + q\sqrt{R}} - \frac{p' - (q\sqrt{R})'}{p - q\sqrt{R}} = \\ &= \frac{2p(q\sqrt{R})' - 2p'q\sqrt{R}}{p^2 - Rq^2} = \frac{pqR' + 2(pq' - qp')R}{(p^2 - Rq^2)\sqrt{R}}. \end{aligned}$$

(Для краткости мы будем иногда писать просто  $p$ ,  $q$ ,  $R$  вместо  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $R(x)$ .)

Таким образом, производная функции  $f(x)$  имеет вид

$$f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{R(x)}},$$



*Пафнутий Львович Чебышёв (1821 – 1894)*



*Нильс Хенрик Абель (1802 – 1829)*

где

$$g(x) = \frac{pqR' + 2(pq' - qp')R}{p^2 - Rq^2}$$

есть рациональная функция, т.е. функция, являющаяся отношением двух многочленов. Другими словами, для такой функции  $g$  неопределенный интеграл

$$\int \frac{g(x)dx}{\sqrt{R(x)}} = \ln \frac{p(x) + q(x)\sqrt{R(x)}}{p(x) - q(x)\sqrt{R(x)}}$$

выражается в алгебраических и логарифмических функциях. Будем называть подобные функции *элементарными*, добавив к ним все функции, известные из школы, включая тригонометрические функции и им обратные.

Абель задался следующим вопросом:

*Как описать все интегралы вида*

$$I = \int \frac{g(x)dx}{\sqrt{R(x)}},$$

*которые могут быть выражены в элементарных функциях, где  $g(x)$  рациональна, а  $R(x)$  — многочлен четной степени?*

Из стандартного университетского курса математического анализа известно, что для многочленов  $R(x)$  степени 2 годится любой многочлен  $g(x)$ , так что вопрос начинается со степени 4 и уже здесь оказывается очень нетривиальным.

Теперь надо объяснить, почему этот вопрос был для Абеля очень естественным и важным. Есть такая замечательная кривая — эллипс (рис. 1), которую можно задать уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b,$$

или как множество точек  $X$  таких, что сумма расстояний  $d_1$  и  $d_2$  до двух заданных

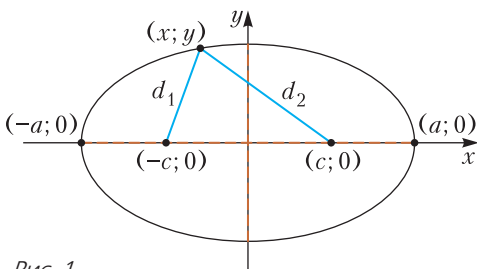


Рис. 1

на плоскости точек  $F_1$  и  $F_2$  (называемых фокусами) постоянна:

$$d_1 + d_2 = F_1X + F_2X = 2a.$$

В декартовой системе фокусы имеют координаты  $(\pm c, 0)$ , где  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ .

Рассмотрим дугу эллипса от точки  $A = (a, 0)$  до  $X = (x_0, y_0)$ . Ее длина находится по общей формуле как интеграл

$$L = \int_{x_0}^a \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

В нашем случае

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}},$$

так что

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + (y'(x))^2} &= \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2(a^2 - x^2)}} = \\ &= \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}} = \sqrt{\frac{a^4 - c^2 x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}. \end{aligned}$$

Определим *эксцентриситет* эллипса как отношение  $e = \frac{c}{a} < 1$ ; при  $e = 0$  эллипс превращается в окружность ( $a = b$ ).

Таким образом, длина дуги эллипса от  $A = (a, 0)$  до  $X = (x_0, y_0)$  задается интегралом

$$L = \int_{x_0}^a \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}} dx = \int_{x_0}^a \frac{(a^2 - e^2 x^2) dx}{\sqrt{(a^2 - e^2 x^2)(a^2 - x^2)}},$$

являющимся частным случаем интеграла  $I$  с  $g(x) = a^2 - e^2 x^2$ ,  $R(x) = (a^2 - e^2 x^2)(a^2 - x^2)$ .

По этой причине все интегралы вида  $I$  с многочленом  $R(x)$  четвертой степени и рациональной  $g(x)$  называются *эллиптическими*, а графики  $y = \sqrt{R(x)}$ , или, точнее, кривые, заданные уравнением  $y^2 = R(x)$ , называются *эллиптическими кривыми*. Отметим, что название не самое удачное, так как сам эллипс эллиптической кривой не является.

*Историческое замечание.* Термин «эллиптический» в этом контексте впервые,

по-видимому, использовался итальянским математиком XVIII века графом Фаньяно, который, помимо эллипса, интересовался длиной дуги *лемнискаты Бернулли*

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2,$$

задаваемой неопределенным интегралом

$$L = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Исследования Фаньяно были продолжены Эйлером, а затем Лежандром. Абель заинтересовался эллиптическими интегралами в связи с делением лемнискаты на равные части циркулем и линейкой (по аналогии с той же задачей для окружности, блистательно решенной Гауссом). Подробности можно найти в замечательной книге В.В.Прасолова и Ю.П.Соловьева [3].

Приведем пример. Эллипсу  $2x^2 + 4y^2 = 1$  соответствует эллиптическая кривая  $y^2 = (a^2 - e^2x^2)(a^2 - x^2)$ , где  $a^2 = e^2 = 1/2$  (рис. 2).

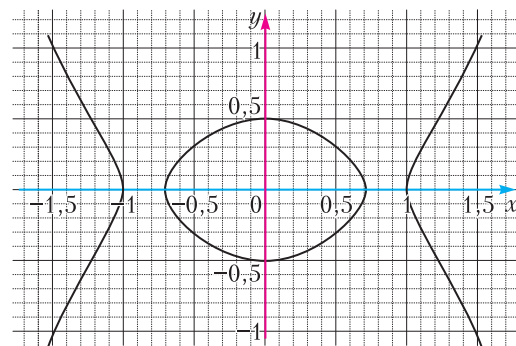
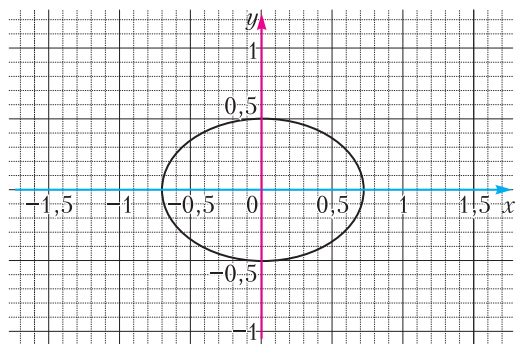


Рис. 2. Эллипс и соответствующая эллиптическая кривая

Заметим, что для окружности радиуса  $a$  многочлен  $R(x)$  имеет степень 2 и длина дуги дается стандартным интегралом

$$L = a \int_{x_0}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a \arccos \frac{x_0}{a}.$$

Действительно, угол  $\alpha = L/a$  в радианах равен отношению длины дуги к радиусу, а координата  $x_0$  равна  $a \cos \alpha$ .

Также элементарен «параболический» интеграл, дающий длину дуги параболы  $y = ax^2$  (проверьте!):

$$\int_0^{x_0} \sqrt{1 + 4a^2x^2} dx = \frac{1}{2} x_0 \sqrt{1 + 4a^2x_0^2} + \frac{1}{4a} \ln \left( 2ax_0 + \sqrt{1 + 4a^2x_0^2} \right).$$

Возвращаясь к эллипсам с разными полуосями, мы можем сформулировать вопрос Абеля в этом частном случае так: можно ли длину дуги такого эллипса выразить в элементарных функциях?

Здесь уместно напомнить, что Абель наиболее знаменит своей теоремой о неразрешимости в радикалах алгебраических уравнений степени выше пятой. Доказательство этой теоремы можно найти в книге В.Б.Алексеева [4], основанной на лекциях В.И. Арнольда в ФМШ 18 (теперь СУНЦ) при МГУ. Рассматриваемый в этой статье вопрос Абеля можно переформулировать в том же ключе: для каких  $g(x)$  и  $R(x)$  дифференциальное уравнение на функцию  $y(x)$

$$y'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{R(x)}}$$

имеет решение в элементарных функциях?

Разумеется, в аккуратной постановке задачи понятие элементарной функции нуждается в точном определении (впрочем, как и понятие решения уравнения в радикалах). Соответствующую теорию систематически начал развивать Лиувиль, мотивированный, в частности, работами Абеля. Он доказал, например, что знаменитый неопределенный интеграл  $\int e^{-x^2} dx$  не берется в элементарных функциях.

Любознательного читателя отсылаю к книге А.Г.Хованского [5] и статье В.В.Прасолова [6], где можно найти и точные определения.

Из результатов Лиувилля, в частности, следовало, что неопределенный эллиптический интеграл

$$I = \int \frac{g(x)dx}{\sqrt{R(x)}}$$

с многочленом  $R(x)$  четвертой степени без кратных корней и многочленом  $g(x)$  второй степени никогда не берется в элементарных функциях.

Следовательно, длина дуги эллипса, не являющегося окружностью, никогда не выражается в элементарных функциях. То же самое относится к случаю, когда  $g(x)$  – ненулевая константа, например к длине дуги лемнискаты Бернулли.

Естественно спросить, что происходит в случае, когда многочлен  $g(x)$  имеет первую степень. Именно этот вопрос и рассматривали Абель и Чебышёв. Этот случай намного богаче, что показывает следующий пример эллиптического интеграла, являющегося элементарной функцией:

$$\int \frac{(4x - 1)dx}{\sqrt{x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1}} = \ln \left( P(x) + Q(x) \sqrt{x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1} \right),$$

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x,$$

$$Q(x) = x^2 - 2x + 2$$

(проверьте непосредственно дифференцированием правой части).

Предложенный подход к этой проблеме поистине замечателен и использует технику цепных дробей, перенесенную из арифметики в алгебру. Ключевая гениальная идея, восходящая к Абелю и развита Чебышёвым, заключается в том, что элементарность неопределенного интеграла

$$I = \int \frac{g(x)dx}{\sqrt{R(x)}}$$

с многочленами  $g(x)$  и  $R(x)$  степени  $n - 1$

и  $2n$  соответственно связана с периодичностью разложения в цепную дробь радикала  $\sqrt{R(x)}$ . Их подход был мотивирован классической теорией чисел, а более точно – теорией знаменитого диофантова уравнения

$$x^2 - Dy^2 = 1,$$

которое Эйлер по ошибке назвал уравнением Пелля по имени английского математика, не имеющего ничего общего с этим вопросом.

По-видимому, Эйлер имел в виду другого английского математика Брункера, одного из тех, кто нашел общий способ решения этого уравнения через цепные дроби. За подробностями решения этого замечательного уравнения и связи с разложением  $\sqrt{D}$  в периодическую цепную дробь я отсылаю к брошюре В.О.Бугаенко [7]. Приведу здесь только самое маленькое решение в частном случае уравнения Пелля

$$x^2 - 61y^2 = 1,$$

использованном Ферма для проверки математического уровня членов английского Королевского общества:<sup>1</sup>

$$x_0 = 1766319049, \quad y_0 = 226153980.$$

Рассмотрим теперь решение  $p(x), q(x)$  полиномиального аналога уравнения Пелля

$$p(x)^2 - R(x)q(x)^2 = 1,$$

где  $R(x)$  – заданный многочлен четной степени. Продифференцируем это уравнение:

$$2pp' - R'q^2 - 2Rqq' = 0.$$

Поскольку из уравнения вытекает, что  $p$  и  $q$  взаимно просты, из последнего соотношения следует, что  $q$  делит  $p'$ . Определим многочлен

$$g(x) = \frac{p'(x)}{q(x)}.$$

<sup>1</sup> В феврале 1657 года Пьер Ферма бросил вызов всем математикам (но в первую очередь, английским), предложив найти все решения уравнения Пелля. Один из первых математиков, достойно справившихся с этим вызовом, был первый президент английского Королевского общества Вильям Брункер (1620–1684).

**Упражнение 1.** Докажите, что для любого решения уравнения Пелля  $p(x)$ ,  $q(x)$  и такого  $g(x)$  имеет место равенство

$$I = \int \frac{g(x)dx}{\sqrt{R(x)}} = \ln(p(x) + q(x)\sqrt{R(x)}).$$

Альтернативно, можно использовать выкладку Абеля, с которой мы начинали, и определить по решению  $p(x)$ ,  $q(x)$

$$g(x) = pqR' + 2(pq' - qp')R,$$

так что соответствующий интеграл

$$\int \frac{g(x)dx}{\sqrt{R(x)}} = \ln \frac{p(x) + q(x)\sqrt{R(x)}}{p(x) - q(x)\sqrt{R(x)}}$$

элементарен.

Нетривиальность задачи состоит в нахождении решений полиномиального уравнения Пелля, поскольку в отличие от целых чисел для многочленов периодичность разложения в цепную дробь  $\sqrt{R(x)}$  совсем не гарантируется даже в том случае, когда все коэффициенты являются целыми (см., например, [9]).

В теории чисел Лагранж доказал, что квадратичная иррациональность всегда раскладывается в периодическую цепную дробь, так что надо просто иметь терпение (как, например, в случае Ферма для  $\sqrt{61}$ ).

Для многочленов же, говоря словами Чебышёва, «ряд операций, к которому ведет эта метода, может продолжаться до бесконечности, не доставляя какого-либо решительного вывода». Так что вопрос, когда надо остановиться в разложении  $\sqrt{R(x)}$  в цепную дробь, оставив надежды на периодичность, является очень нетривиальным. Именно здесь Чебышёв внес решающий вклад, предложив эффективную процедуру для многочленов  $R(x)$  степени 4 с рациональными коэффициентами (эти исследования были продолжены его блестящим учеником Егором Ивановичем Золотаревым).

Чебышёв также обнаружил глубокую связь этих вопросов с теорией ортогональных многочленов. В частности, как показал Чебышёв, для элементарного интеграла, задающего длину дуги единичной ок-

ружности

$$L = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x,$$

решения соответствующего уравнения Пелля

$$p_n^2(x) - (x^2 - 1)q_{n-1}^2(x) = 1$$

имеют вид  $p_n(x) = T_n(x)$ ,  $q_n(x) = U_{n-1}(x)$ , где  $T_n(x)$ ,  $U_n(x)$  — замечательные многочлены, носящие теперь имя Чебышёва:

$$T_0 = 1, T_1 = x, T_2 = 2x^2 - 1, T_3 = 4x^3 - 3x, \\ T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1, \dots$$

$$U_0 = 1, U_1 = 2x, U_2 = 4x^2 - 1,$$

$$U_3 = 8x^3 - 4x, U_4 = 16x^4 - 12x^2 + 1, \dots$$

Они определяются соотношениями

$$\cos n\varphi = T_n(\cos \varphi), \quad \sin n\varphi = \sin \varphi U_{n-1}(\cos \varphi)$$

и в случае  $T_n(x)$  известны также как многочлены со старшим коэффициентом  $2^{n-1}$ , наименее уклоняющиеся от нуля на отрезке  $[-1; 1]$ .

Сформулируем несколько важных свойств многочленов Чебышёва в виде упражнений для читателя.

### Упражнения

**2.** Докажите, что такие многочлены существуют для любого  $n$ , удовлетворяют одному и тому же рекуррентному соотношению

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),$$

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x),$$

но с разными начальными условиями:  $T_0 = 1$ ,  $T_1 = x$  и  $U_0 = 1$ ,  $U_1 = 2x$ .

**3.** Проверьте, что  $U_{n-1} = T'_n(x)/n$  и  $p_n(x) = T_n(x)$ ,  $q_n(x) = U_{n-1}(x)$  действительно удовлетворяют уравнению Пелля.

**4.** Докажите справедливость следующего разложения в цепную дробь

$$\sqrt{x^2 + 1} = x + \frac{1}{2x + \frac{1}{2x + \frac{1}{2x + \dots}}}$$

Угадайте и докажите связь числителей и знаменателей соответствующих подходящих дробей

$$x + \frac{1}{2x} = \frac{2x^2 + 1}{2x}, \quad x + \frac{1}{2x + \frac{1}{2x}} = \frac{4x^3 + 3x}{4x^2 + 1}, \dots$$



с многочленами Чебышёва. (Знакомые с гиперболическими функциями могут дать интерпретацию этих многочленов в терминах этих функций.)

5. Используя стандартную формулу для неопределенного интеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right),$$

выведите, что

$$T_n^*(x) + U_{n-1}^*(x)\sqrt{x^2 + 1} = \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right)^n,$$

где  $T_n^*(x)$ ,  $U_n^*(x)$  – гиперболические версии многочленов Чебышёва из предыдущего упражнения, и напишите соответствующую формулу для настоящих многочленов Чебышёва.

*Замечание.* Многочлены Чебышёва удовлетворяют также следующему замечательному свойству: они коммутируют относительно подстановки, т.е.

$$T_m(T_n(x)) = T_n(T_m(x)).$$

Оказывается, что, помимо чистых степеней  $P_n(x) = x^n$ , это по сути единственные многочлены с таким свойством, но доказательство этого результата, принадлежащее Жюлиа и Фату, очень нетривиально. Любопытный читатель может найти некоторые подробности в замечательной статье И.Н.Бернштейна [8] (написанной для «Кванта» под псевдонимом И.Янтаров).

Интересно, что (под влиянием Абеля) Чебышёв проводит параллель задачи об эллиптическом интеграле с геометрическими построениями циркулем и линейкой. В частности, он связывает неэлементарность интеграла

$$\int \frac{(x + C)dx}{\sqrt{x^4 - 2x^2 - 8x + 9}}$$

с невозможностью построения циркулем и линейкой правильного семиугольника. Действительно, деление окружности на 7 равных частей эквивалентно решению уравнения

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0,$$

которое подстановкой  $y = z + 1/z$  сводится к уравнению  $y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$ , к которому сводится и уравнение  $x^4 - 2x^2 - 8x + 9 = 0$ .

В заключение отметим, что, несмотря на значительные продвижения в работах Чебышёва и Золотарева, задача Абеля об эффективном описании всех возможных элементарных интегралов вида

$$I = \int \frac{g(x)dx}{\sqrt{R(x)}}$$

с многочленом  $R(x)$  четной степени выше 4 с рациональными коэффициентами остается в значительной степени открытой и связана с глубокими арифметическими и алгебро-геометрическими проблемами (см., например, прекрасную статью ван дер Поортена и Чана [9]).

### Литература

1. П.Л.Чебышёв. Об интегрировании дифференциалов, содержащих квадратный корень из многочлена третьей и четвертой степени. – Мемуары Императорской Академии наук, – Санкт-Петербург, 1857.
2. Об интегрировании иррациональных дифференциалов. Избранные труды, с.227–255. – М.: Изд-во АН СССР, 1955.
3. N.H.Abel. Über die Integration der Differential-Formel  $\frac{\rho dx}{\sqrt{R}}$  wenn R und  $\rho$  ganze Funktionen sind. – Journal für reine und angewandte Mathematik **1** (1826), 185–221.
4. В.В.Прасолов, Ю.П.Соловьев. Эллиптические функции и алгебраические уравнения. – М.: Факториал, 1997.
5. В.Б.Алексеев. Теорема Абеля в задачах и решениях. – М.: МЦНМО, 2010.
6. А.Г.Хованский. Топологическая теория Гаула. – М.: МЦНМО, 2008.
7. В.В.Прасолов. Неэлементарность некоторых интегралов элементарных функций. – Математическое просвещение, 2003, выпуск 7, 126–135.
8. В.О.Бугаенко. Уравнения Пелля. – М.: МЦНМО, 2010.
9. И.Янтаров. Коммутирующие многочлены. – «Квант», №4 (1979), 19–23.
10. А.А.Абрахамсон, Х.С.Тран. Quasi-elliptic integrals and periodic continued fractions. – Monatshefte für Mathematik **131** (2000), 155–169.

# Термоэлектричество: от дуги Алессандро Вольта до феррожидкостных термоэлектрических генераторов

**А.ВАРЛАМОВ, С.ШАРАПОВ, Ю.ШИКИНА**

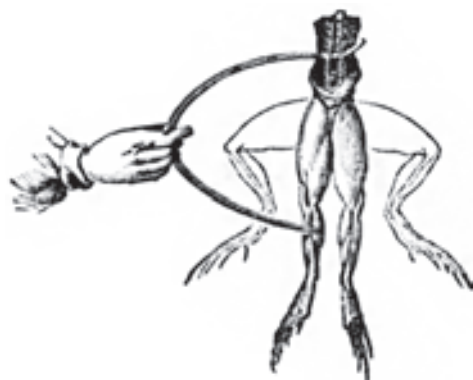
Современного человека трудно удивить вопросами, что такое электричество или как происходит передача тепла – каждый имеет по этим поводам свое мнение. Кто – теоретическое, основанное на изучении физики, а большинство – памятью незабываемые ощущения от удара током в процессе починки розетки при неотключенном напряжении на щитке или от случайного прикосновения к раскаленному утюгу. Но, конечно, гораздо меньшее число читателей знакомо с явлением термоэлектричества. В древнегреческой мифологии важное место занимают кентавры – дикие, смертные существа с головой и торсом человека на теле лошади, обитатели гор и лесных чащ. Явление термоэлектричества подобно кентавру – здесь электрическое напряжение между краями образца возникает в результате его неравномерного нагрева.

## **Диспут между Луиджи Гальвани и Алессандро Вольта**

История открытия и последующего изучения термоэлектричества насчитывает более двух веков и начинается с дискуссии между Луиджи Гальвани и Алессандро Вольта.

В середине XVIII века популярной темой в науке стало изучения электрических явлений, в том числе и животного электричества, например порождаемого электрическими скатами. Ввиду этого, профессор Болонского университета физиолог Луиджи Гальвани стал изучать, что происходит с препарированной лягушкой при пропускании через нее тока. В результате много-

численных экспериментов Гальвани убедился, что каждый раз, когда он, прикасаясь к нервам лягушки присоединенным к электрической машине проводником, извлекал из нее искру, лягушку охватывала судорожная дрожь. Далее Гальвани продолжил свои опыты и обнаружил такие же сокращения при соединении мышц и нервов только что препарированной лягушки металлической дугой (рис. 1). При этом особое внимание Гальвани привлекло то обстоятельство, что сокращение мышц лягушки оказывается значительно более сильным, если металлическая дуга составлена последовательно из двух различных металлов: например, железа и меди (или, что гораздо лучше, серебра). Эти эксперименты привели знаменитого итальянца к заключению, что электричество свойственно самому животному: от нервов к мышцам как бы протекает флюид и образуется цепь (как при разряде лейденской банки).



*Рис. 1. Луиджи Гальвани обнаружил сокращения мышц препарированной лягушки при их соединении металлической дугой*



Рис. 2. Эскизы инструментов, которыми пользовался Алессандро Вольта в экспериментах с лягушками. Мемуар о животном электричестве, 14 мая 1792 года (Архив А.Вольты, лист K13, Ломбардская академия наук и литературы)

Профессор Павийского университета физик и химик Алессандро Вольта относился с недоверием к так называемому животному электричеству. И тем не менее, по настоянию коллег, он повторяет описанные в работе Гальвани опыты (рис.2). В результате его скептицизм стал рассеиваться, и 3 апреля 1792 года он пишет Гальвани: «Итак, вот я наконец обращен. С тех пор как я стал сам очевидцем и наблюдал эти чудеса, я, пожалуй, перешел от недоверия к фанатизму». В публичной лекции 5 мая 1792 года Вольта рассказывает об опытах Гальвани, превозносит их, но вместе с тем высказывает мысль, что лягушка может представлять собою лишь измерительный прибор, электрометр, в десятки раз более чувствительный, чем уже давно существующий электрометр с золотыми листочками. Вольта настойчиво привлекает внимание к одной физической особенности опытов Гальвани: для того чтобы вызвать сокращение мышц, образующие дугу металлы должны быть различными. Он спрашивает: действительно ли металлические проводники служат лишь для того, чтобы, соприкасаясь друг другом, установить связь, предоставляющую электрическому флюиду путь, по которому тот естественно стремится перейти из одного места в другое? Действительно ли их роль чисто пассивна или же они являются активными агентами, приводящими в движение электрический заряд? В даль-

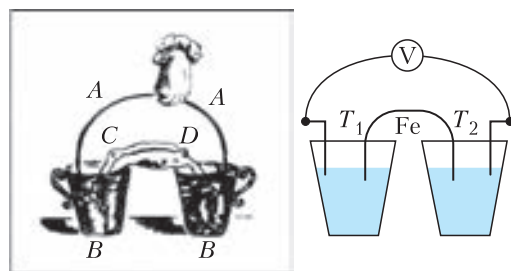


Рис. 3. Алессандро Вольта использует в качестве дуги проводник из одного металла, но помещает концы мышцы лягушки и концы проводника в сосуды с холодной и горячей водой. На правом рисунке вместо мышцы лягушки изображен вольтметр

нейших своих опытах Вольта показывает, что мышца, по существу, не участвует в создании самого явления, ее сокращение есть эффект протекания заряда, генерируемого контактом двух различных металлов. Таким образом, фактически он открывает явление, которое связано с контактной разностью потенциалов.

В своих сомнениях Вольта идет далее. В качестве дуги он пробует использовать проводник из одного металла, но помещает концы мышцы лягушки и концы дуги в сосуды с холодной и горячей водой (рис.3). Мышца сокращается и в этом эксперименте, что позволяет ученому объяснить протекание электрического флюида (заряда) неравномерным нагревом металлического проводника. Связь между электрическим током и разностью температур обнаружена!

В процессе экспериментов с металлической дугой Вольта осознал, что прохождение тока по мышце лягушки есть не что иное как его протекание в кислотной среде. В результате он создал свою знаменитую батарею, так называемый вольтов столб – последовательность чередующихся пластин из двух металлов (например, свинца и меди), разделенных пропитанной кислотой (уксусом) тканью. На этом же принципе работают батареи и сегодня.

### Йенская школа и открытие Иоганна Зеебека

Томас Иоганн Зеебек, немецко-эстонский физик, химик и врач, родился в 1770 году в ганзейском городке Ревель (ныне

Таллин). В возрасте 17 лет он едет в Германию, чтобы изучать медицину, и в 1792 году сдает на отлично выпускные экзамены по медицине. Однако под сильным влиянием харизматичного профессора физики Георга Кристофа Лихтенберга Зеебек решает посвятить себя физике. В марте 1802 года Зеебек получает докторскую степень и переезжает в Йену. Здесь он попадает в бурлящую интеллектуальную среду, центральной фигурой которой является Иоганн Вольфганг Гёте, великий поэт, страстный естествоиспытатель и исследователь. Будучи влиятельным администратором Веймарского двора, он помогает молодым талантам начать их академические карьеры.

Зеебек впервые встретился с Гёте на обеде в декабре 1803 года, где знакомится и со своим сверстником, будущим прославленным философом Гегелем, с которым они становятся друзьями. Гёте ищет ассистента, для помощи в его оптических исследованиях, и Зеебек становится для него прекрасным выбором. Их продолжительное сотрудничество привело к тому, что внесенный Зеебеком вклад стал важной частью «Теории цветов» – главного научного произведения Гёте. Тем не менее, близость к фигуре Гёте подавляет Зеебека, и он покидает Йену. В 1818 году, после ряда скитаний по университетским городам Германии, Зеебек за его работы по оптике избирается членом-корреспондентом Берлинской академии наук.

21 июля 1820 года датский ученый, физик Ханс Кристиан Эрстед публикует свое знаменитое эссе «Эксперименты о влиянии электрического тока на магнитную иглу», которое открывает дверь в новую область науки – электромагнетизм. Зеебек оставляет в стороне свои оптические эксперименты и углубляется в идеи Эрстеда. Очень скоро, после нескольких месяцев работы, Зеебек приходит к главному результату своей научной карьеры – открытию явления, названного им «термомагнетизмом», по аналогии с «электромагнетизмом» Эрстеда. Об этом он сообщает на заседании Берлинской академии

16 августа 1821 года. Впоследствии Эрстед посещает лабораторию Зеебека в Берлине с целью ознакомиться с его экспериментами и уже в марте 1823 года сообщает об открытии Зеебека на заседании Французской академии наук. При этом он дает физически правильную интерпретацию нового явления и вводит для него принятый сегодня термин «термоэлектричество». Эрстед высоко оценивает работу Зеебека, называя ее «самым прекрасным из открытий, выросших из его исследований».

Количественной характеристикой термоэлектрического эффекта служит *коэффициент Зеебека*. Он характеризует разность потенциалов между концами проводника  $\Delta U$ , возникающую при поддержании между ними разности температур  $\Delta T$ :

$$S = -\frac{\Delta U}{\Delta T} = \frac{E}{\Delta T / \Delta x},$$

где  $E = -\frac{\Delta U}{\Delta x}$  – напряженность возникающего в проводнике электрического поля, а  $\frac{\Delta T}{\Delta x}$  – градиент температуры. Соответственно, напряжение, вырабатываемое термопарой из двух различных металлов  $A$  и  $B$  с разностью температур  $T_1$  и  $T_2$  между их концами, равно

$$U = S_B (T_2 - T_1) - S_A (T_2 - T_1) = (S_B - S_A)(T_2 - T_1).$$

К сожалению, в обычных металлах коэффициент Зеебека оказывается весьма малым, причем для различных металлов он может быть разных знаков (см. таблицу 1). Например, при разности температур в 300 °С в термопаре, одним из электродов которой является занимающий в

Таблица 1. Коэффициент Зеебека в обычных металлах

Металл	Коэффициент Зеебека, мкВ/К (относительно платины)	Металл	Коэффициент Зеебека, мкВ/К (относительно платины)
Висмут	-73,0	Серебро	+7,1
Никель	-16,4	Медь	+7,4
Палладий	-5,6	Железо	+16,0
Калий	-9,0	Сурьма	+47,0



таблице лидирующее положение висмут ( $S_B = -73$  мкВ/К), а вторым сурьма ( $S_A = 47$  мкВ/К), создаваемое напряжение составит около 36 мВ. Таким образом, чтобы заменить две обычные пальчиковые батарейки, используемые в компьютерных мышках, пультах и многих других гаджетах, пришлось бы соединить 80 таких термопар и поддерживать между их электродами разность температур в  $300^\circ\text{C}$ . Это уж слишком!

### Дальнейшая судьба открытия Зеебека

Термоэлектричество довольно быстро нашло свое применение, во всяком случае в физических лабораториях. Так, известный всем закон Ома был открыт и описан Георгом Симоном Омом в двух статьях, 1826 и 1827 годов. После опубликования первой статьи Ому посоветовали отказаться от гальванической батареи, поскольку за время измерения электродвижущая сила такого источника существенно изменялась. Более точные результаты измерений для второй статьи уже были получены благодаря использованию как раз термоэлектрического источника тока (пара медь – висмут), способного поддерживать постоянное напряжение.

Далее исследования открытого Зеебеком явления продолжились в 1830-е годы в работах Жана Пельтье, где был обнаружен обратный термоэлектрический эффект: нагревание или охлаждение стыка двух проводников при протекании через него электрического тока. Его суть несколькими годами позже исследовал российский физик немецкого происхождения, один из основоположников электротехники Генрих Фридрих Эмиль Ленц. Он поместил каплю воды в углубление на стыке двух стержней из висмута и сурьмы (с сопротивлением  $R$ ) и обнаружил, что при протекании электрического тока ( $I$ ) в одном направлении капля превращалась в лед, при смене же направления на противоположное лед таял. Этот простой и впечатляющий эксперимент показал, что при протекании через контакт двух различных металлов тока, помимо известного джоулева тепла ( $I^2R$ ), выделяется или погло-

щается дополнительное тепло, пропорциональное первой степени тока. Последнее получило название *тепла Пельтье*.

Да, а что же термоэлектричество? Вплоть до середины 30-х годов XX века не существовало понимания на микроскопическом уровне устройства и металлов. Для создания соответствующей теории было необходимо как минимум вначале понять структуру составляющих их атомов, а необходимый для этого математический и понятийный аппарат – квантовая механика – был сформулирован только в конце 20-х годов. Тем не менее, на феноменологическом уровне понимание явления термоэлектричества продвигалось вперед. Во второй половине XIX века в работах Гиббса, Больцмана и других ученых развивается новая область физики – статистическая механика, изучающая системы большого числа частиц. Возможность описывать их свойства с помощью классической механики иллюзорна: не только решить, но и даже выписать уравнения классической механики для большого количества частиц не представляется возможным. Взамен ученые обнаруживают для таких системы совершенно новые, так называемые статистические закономерности. Они понимают, что для необходимого описания свойств здесь лишняя информация (координаты, скорости всех частиц) просто не нужна. Следует научиться задавать Природе новые вопросы и понять, как получить на них ответы.

В числе прочих новых понятий Джозайя Уиллард Гиббс в 1875 году вводит *химический потенциал*  $\mu$  – энергию, которую следует затратить для добавления в систему большого числа частиц еще одной частицы. В условиях равновесия эта величина остается постоянной по всему объему системы – иначе бы частицы перетекали с одного места на другое. Понятие химического потенциала легко обобщить и на случай пребывания системы во внешнем поле, под которым мы в дальнейшем будем подразумевать электрическое поле с потенциалом  $\phi$ . Для этого к химическому потенциалу  $\mu$  нужно просто добавить соответствующую потенциальную энергию частицы с

зарядом  $q$ , приобретаемую ею при попадании в систему. Теперь уже условием равновесия оказывается постоянство электрохимического потенциала  $\mu + q\phi$ .

Вернемся к опытам Алессандро Вольта 1794 года. Противоположные концы железного проводника он помещал в кипящую и ледяную воду, создавая тем самым в системе находящихся в металле свободных электронов градиент температуры. Эти электроны вместе с нагревателем и холодильником, строго говоря, равновесную систему не представляют: для поддержания разности температур к ней следует непрерывно подводить и отводить тепло. Однако если концы не соединены между собой в электрическую цепь (скажем, лягушачьей лапкой), то электроны перемещаются в первый момент так, чтобы их плотность соответствовала локальной температуре (как у любого газа при постоянном давлении: где холоднее, там плотность больше). Однако, ведь электроны являются заряженными частицами, поэтому внутри металла возникает отличное от нуля электрическое поле, а между концами проводника – разность потенциалов. Вот вам и объяснение термоэлектричества, достаточно лишь знать о существовании в металле свободных электронов (сам электрон был открыт лишь в 1897 году).

Как вышесказанное превратить в полезную формулу для коэффициента Зеебека? Понадобятся всего несколько строчек. Электрохимический потенциал в проводнике остается постоянным:

$$\mu + q\phi = \text{const.}$$

Следовательно, его производная по координате (проводник мы считаем одномерным) равна нулю:

$$\frac{d\mu}{dx} + q \frac{d\phi}{dx} = 0.$$

Последняя производная есть не что иное как взятая с противоположным знаком напряженность электрического поля:  $E = -d\phi/dx$ . Таким образом, мы приходим к уравнению

$$\frac{d\mu}{dx} = qE.$$

Химический потенциал теперь меняется от точки к точке и зависит от локального значения температуры. Поэтому его производную можно вычислить, вначале про дифференцировав по температуре, а уже затем про дифференцировав последнюю по координате:

$$\frac{d\mu}{dx} = \left( \frac{d\mu}{dT} \right) \left( \frac{dT}{dx} \right).$$

Таким образом, мы приходим к так называемой формуле Кельвина, связывающей коэффициент Зеебека с производной химического потенциала по температуре:

$$S = \frac{E}{\Delta T / \Delta x} = \frac{1}{q} \frac{d\mu}{dT}.$$

Скажем сразу, что она не описывает термоэлектрический эффект во всех случаях жизни, но, тем не менее, окажется чрезвычайно полезной для нашего дальнейшего рассказа.

### Как живет электрон в металле?

Прежде чем применить формулу Кельвина к вычислению коэффициента Зеебека для металла, давайте разберемся, как в металле живут электроны. Для этого мы начнем с одного из основополагающих соотношений квантовой механики.

В 1927 году немецкий физик Вернер Гейзенберг сформулировал принцип, называемый принципом неопределенности. Рассмотрим частицу массой  $m$ , которая движется по оси  $x$  со скоростью  $v_x$ . Если нам удастся измерить ее скорость с точностью  $\Delta v_x$ , то ее положение  $x$  оказывается невозможным определить с точностью  $\Delta x$  более высокой чем  $2\hbar/(m\Delta v_x)$ , где  $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – постоянная Планка. Это утверждение можно распространить и на движение частицы в трехмерном пространстве. Вместо того чтобы говорить о скорости частицы  $\vec{v}$ , обычно вводят ее импульс  $\vec{p} = m\vec{v}$ . В этом случае соотношение неопределенности записывают следующим образом:

$$\Delta p_x \Delta x \geq 2\hbar.$$

И аналогично для двух других составляющих вектора импульса и соответствующих координат.

Это неравенство удивительно. Законы Ньютона позволяют, исходя из начальных условий, очень точно определить положение и скорость объекта в любой момент времени. В физике Ньютона, так называемой классической механике, нет места для неопределенности. Но этот детерминизм, свойственный макроскопическому миру, перестает действовать в атомном масштабе.

Вторым важнейшим правилом сосуществования множества электронов вместе является так называемый принцип запрета Паули. Согласно ему, никакие два электрона не могут находиться в одном и том же квантовом состоянии. Состояние свободного электрона определяется его импульсом  $\vec{p} = \{p_x p_y p_z\}$  и проекцией собственного магнитного момента – спина. Как мы уже знаем, проекция импульса электрона, например, на ось  $x$  определена с точностью до  $\Delta p_x$ , а соответствующая координата – с точностью до  $\Delta x$ , причем произведение этих величин связано соотношением неопределенности. Таким образом, на одно состояние электрона с определенной проекцией спина должен приходиться «кубик» шестимерного пространства, объединяющего импульсы и координаты:  $\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z \Delta x \Delta y \Delta z \geq (2\pi\hbar)^3$ . В него же можно поместить и второй электрон, с противоположной проекцией спина, но не больше. Возьмем кубик со сторонами  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1$  см. Тогда мы увидим, что в оставшейся трехмерной импульсной части нашего изначально шестимерного пространства первые два внесенных электрона займут расположенный в центре координат, вокруг точки  $\vec{p} = 0$ , кубик объемом  $(2\pi\hbar)^3 / \text{см}^3$ . Следующие электроны уже будут вынуждены занимать состояния с ненулевыми импульсами. Постепенно, с увеличением числа электронов, которые мы приглашаем в кубик, объем занимаемых ими состояний будет возрастать, принимая форму сферы (величина импульса частицы определяет ее кинетическую энергию); полная же кинетическая энергия системы частиц будет стремиться к минимуму. Получающаяся в результате сфера

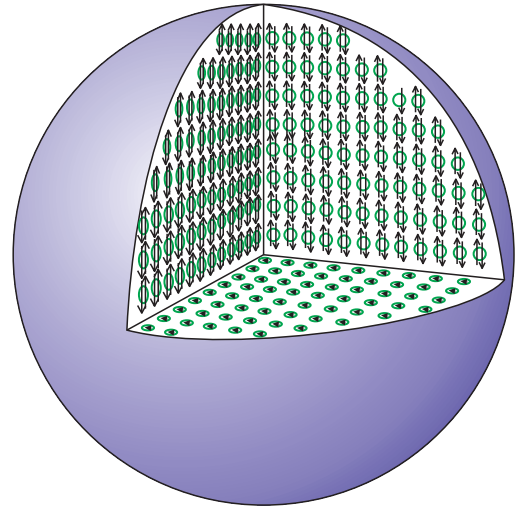


Рис.4 Сфера Ферми

называется сферой Ферми (рис.4), ее радиус  $p_F$  определяется максимальной величиной импульса, до которого мы добрались в нашем построении. Определим его.

Объем сферы составляет  $\frac{4}{3}\pi p_F^3$ . На одно состояние приходится объем  $(2\pi\hbar)^3$ . Тогда число таких элементарных кубиков под сферой Ферми составляет  $\frac{4\pi p_F^3}{3(2\pi\hbar)^3}$ , да еще, чтобы определить, сколько электронов под ней вмещается, нужно найденное число умножить на 2 («спиновая» двойка отличающихся проекциями спина состояний). Таким образом, импульс Ферми определяется концентрацией электронов:

$$n = \frac{N}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{p_F^3}{3\pi^2 \hbar^3},$$

откуда

$$p_F^3 = 3\pi^2 \hbar^3 n.$$

Соответственно, можно найти и предельную энергию электронов, импульсы которых лежат на поверхности сферы:

$$\varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{3^{2/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{2m} n^{2/3}.$$

В одном кубическом сантиметре металла содержится порядка  $10^{23}$  атомов, которые при комнатных температурах образуют так называемый вырожденный электронный газ. Если каждый из них отдаст хотя бы по одному электрону в общее пользова-

ние, то энергия Ферми будет порядка  $5 \cdot 10^{-19}$  Дж, т.е. около 3 эВ, что соответствует температуре в 5 раз выше температуры поверхности Солнца! Скорости электронов, находящихся в импульсном пространстве у поверхности Ферми, огромны: они составляют проценты от скорости света.

### Химический потенциал и коэффициент Зеебека металла

Вернемся к термоэлектричеству. Как мы уже показали, зная химический потенциал, точнее его температурную зависимость, может быть найден коэффициент Зеебека. Сам химический потенциал вырожденного электронного газа после проделанных выше вычислений находится легко: при абсолютном нуле температур он просто совпадает с энергией Ферми. Действительно, если мы хотим в обсужденный выше электронный газ, заключенный в кубик, добавить еще один электрон, то пристраивать его придется на поверхность Ферми, все остальные места внутри нее были заняты еще при построении. Таким образом,

$$\mu(T=0) = \epsilon_F = \frac{3^{2/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{2m} n^{2/3}.$$

Однако нам этого знания не достаточно: для нахождения коэффициента Зеебека химический потенциал следует продифференцировать по температуре, поэтому нужно узнать, как он с ростом температуры изменяется. Пусть абсолютная температура электронного газа равна  $T$  и ей соответствует энергия  $kT \ll \epsilon_F$ , где  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана. Газ электронов теперь находится при отличной от нуля температуре, это означает, что электроны, прежде занимавшие состояние в пределах тонкого сферического слоя  $\delta p$  такого, что  $\frac{p_F^2}{2m} - \frac{(p_F - \delta p)^2}{2m} \approx \frac{p_F \delta p}{m} \approx kT$  (шкурка дыни на рисунке 5), перемещаются во внешний слой той же ширины за пределы Ферми-поверхности (обертка дыни на рисунке). Легко убедиться, что объем первого слоя составляет  $3p_F^2 \delta p - 3p_F (\delta p)^2$ , второго  $3p_F^2 \delta p + 3p_F (\delta p)^2$ , а их разность равна



Рис. 5. Дыня – аналог области в пространстве квазиимпульсов, соответствующей заполненным электронным состояниям

$\delta V = 6p_F (\delta p)^2$ . Число частиц при этом измениться не должно:

$$\delta N = \delta(nV) = \delta n V + n \delta V = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\delta n}{n} &= -\frac{\delta V}{V} = -\frac{18p_F (\delta p)^2}{4\pi p_F^3} = \\ &= -\frac{9m^2 (kT)^2}{2\pi p_F^4} = -\frac{9(kT)^2}{8\pi \epsilon_F^2}. \end{aligned}$$

Напомним, что существует связь между химическим потенциалом и плотностью электронов и, соответственно, малое уменьшение плотности приведет к малому же изменению химического потенциала:

$$\mu(T) = \epsilon_F \left( 1 - \frac{9(kT)^2}{8\pi \epsilon_F^2} \right)^{2/3} \approx \epsilon_F - \alpha \frac{(kT)^2}{\epsilon_F}.$$

Наш очень упрощенный расчет не позволил найти правильный коэффициент  $\alpha = \pi^2/6$ . И тем не менее, с помощью последнего выражения мы получаем, что для вырожденного электронного газа

$$S = -\frac{\pi^2 k^2 T}{3e \epsilon_F}. \quad (*)$$

Отсюда сразу же становится понятно, почему эффект Зеебека столь слаб в хороших металлах, где величина энергии Ферми очень велика ( $\epsilon_F \approx 3$  эВ). Так, для комнатных температур наша оценка приводит к величине для коэффициента Зеебека порядка нескольких микровольт на кельвин, что делает их малопригодными для использования в качестве термоэлектрических генераторов напряжения.

### Эффект Зеебека в полупроводниках

Существуют оценки показывающие, что стоимость электроэнергии, вырабатываемой



мой в начале XX века непосредственным сжиганием топлива в паровом котле и преобразованием давления пара в механическую работу, была почти в 40 раз ниже стоимости электроэнергии, вырабатываемой доступными в то время термоэлектрическими источниками. И только в 1929 году, основываясь на экспериментальном обнаружении высоких значений (в сотни микровольт на кельвин) коэффициента Зеебека в полупроводниках, Абрам Федорович Иоффе выдвинул идею, что для повышения КПД термоэлементов следует заменить металлы полупроводниками. Понять, почему именно полупроводники являются более перспективными материалами для термоэлектрических источников энергии, можно следующим образом.

При оценке коэффициента Зеебека в металлах мы использовали тот факт, что число электронов не меняется. В полупроводниках это не так – концентрация носителей заряда очень сильно (экспоненциально) зависит от температуры, приводя к гораздо более сильной зависимости химического потенциала от нее. Это и обуславливает большие значения коэффициента Зеебека в полупроводниках.

Они особенно велики в так называемых легированных полупроводниках, которые похожи на рассмотренные выше металлы. В них для изменения электрических свойств специально добавляются примеси, которые, встраиваясь в кристаллическую решетку, сбрасывают с себя (или отнимают) лишние электроны. В результате в таком полупроводнике, подобно тому как мы уже видели на примере металла, образуется газ свободных электронов. Поскольку концентрация примесей по сравнению с концентрацией атомов самого полупроводника всегда мала, то малой оказывается и соответствующая энергия Ферми. При достаточно низких температурах (а ими вполне могут быть и комнатные температуры) этот газ оказывается вырожденным, и для соответствующего коэффициента Зеебека полупроводника можно воспользоваться полученной нами формулой (\*), только энергия Ферми в ней будет составлять не электронвольты, а всего

Таблица 2. Коэффициент Зеебека в полупроводниках

Вещество	Электрические свойства	Коэффициент Зеебека, мкВ/К
Висмут	Металл	-73
Константан	Металл	-35
Никель	Металл	-15
Платина	Металл	0
Алюминий	Металл	3,5
Германий	Полупроводник	300
Кремний	Полупроводник	440
Теллур	Полупроводник	500
Селен	Полупроводник	900

лишь десятки или сотни миллиэлектронвольт. Соответственно, и коэффициент Зеебека возрастет в десятки или сотни раз по сравнению с его значениями в металлах (см. таблицу 2).

### Коэффициент полезного действия термоэлектрического генератора и методы его повышения

Коэффициент полезного действия  $\eta$  термоэлектрического устройства определяется отношением джоулевой энергии, передаваемой нагрузке за время  $\Delta t$ , к полной тепловой энергии, поглощенной контактом за это же время. Первая энергия, очевидно, составляет  $U^2 \Delta t / R$ , где  $U$  – термоэлектрическое напряжение, а сопротивление провода с удельным сопротивлением  $\rho$ , длиной  $\Delta l$  и сечением  $A$  равно  $R = \rho \Delta l / A$ . Вторая энергия равна произведению теплового потока  $q = \kappa \Delta T / \Delta l$ , где  $\kappa$  – теплопроводность, площади сечения  $A$  контакта и времени  $\Delta t$ . Таким образом,

$$\eta = \frac{U^2 \Delta t / R}{q A \Delta t} = \frac{S^2 (\Delta T)^2 \Delta t}{\frac{\rho \Delta l}{A} \cdot \kappa \frac{\Delta T}{\Delta l} A \Delta t} = \frac{\sigma S^2}{\kappa} \Delta T = ZT \left( \frac{\Delta T}{T} \right),$$

где  $\sigma = 1/\rho$  – электропроводность контакта. Безразмерный показатель качества  $ZT = \sigma S^2 / \kappa$  характеризует эффективность термоэлектрического устройства, а само число  $Z$  называется *термоэлектрической добротностью* материала, или *числом*

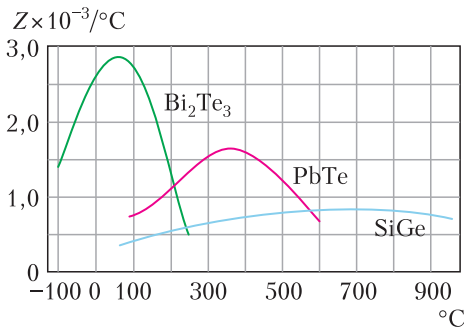


Рис. 6. Термоэлектрическая добротность трех различных термоэлектрических материалов в зависимости от температуры

*Иоффе.* К сожалению, для металлов показатель качества оказывается весьма мал: при характерных рабочих температурах термоэлектрических устройств он порядка  $10^{-3} - 10^{-4}$  (рис.6).

Понятно, что для повышения эффективности термоэлектрического устройства следует уменьшать теплопроводность используемого материала при одновременном увеличении его проводимости и коэффициента Зеебека. Как мы уже видели, последний в металлах весьма мал из-за огромной концентрации электронов и, соответственно, большой энергии Ферми. Зато электроны же обеспечивают металлу и высокую проводимость. Правда, как знает каждый, кто хоть раз размешивал сахар в чае серебряной ложечкой и обжегся, металл обладает также высокой теплопроводностью. Проводимость металла жестко связана с электронным вкладом в теплопроводность  $\kappa_e$  законом Видемана–Франца:

$$\frac{\sigma}{\kappa_e} = \frac{3e^2}{\pi^2 T}.$$

Однако помимо электронов тепло в металле передается также и решеткой. Ее вклад  $\kappa_p$  при комнатных температурах может оказаться весьма значительным, поэтому эффективность включает в себя сумму обеих теплопроводностей:

$$ZT = \frac{3e^2}{\pi^2} S^2 \frac{\kappa_e}{\kappa_e + \kappa_p}.$$

Таким образом, повышение эффективности термоэлектрического устройства на практике сводится к:

- увеличению коэффициента Зеебека материала;
- увеличению его проводимости;
- подавлению его решеточной теплопроводности.

Для того чтобы термоэлектрические устройства стали конкурентоспособными по сравнению с другими технологиями возобновляемых источников энергии (например, солнечной и геотермальной), необходимо достичь значений их эффективности  $ZT \geq 4$ . Для достижения этой цели потребовалось огромное количество исследовательских усилий. Ниже мы познакомим вас с несколькими примерами таких работ.

### Новые материалы для термоэлектричества

**Термоэлектрические материалы с наноскопической структурой дефектов.** Снижение теплопроводности во многом связано с продуманными изменениями структуры материала. Решетка передает тепло посредством распространяющихся по ней упругих волн. Эти волны нужно рассеивать, подобно тому как волноломы отражают штормовые волны у берегов морей и океанов. Проблема с теплопроводностью заключается в том, что рассеивать нужно колебания решетки во всех масштабах – от атомных до микронных. Этого можно добиться, наноструктурируя объемные термоэлектрики нового поколения, вводя в них разномасштабные рассеиватели колебаний решетки. Такое наноскопическое использование микроструктурных дефектов усиливает рассеяние упругих волн, не подавляя при этом электронную проводимость, что позволяет создавать термоэлектрические материалы с высокими характеристиками. В наноструктурированных термоэлектрических материалах переносящие тепло волны с малыми длинами могут рассеиваться встроенными в решетку внедрениями с характерными размерами в нанометры, в то время как волны больших длин рассеиваются на дефектах микронного диапазона с точно выверенной архитектурой. Стратегии улучшения термоэлектрических материалов направлены как на современные объемные материалы,

Таблица 3. Термоэлектрическая добротность наиболее перспективных термоэлектрических материалов

Материалы	$ZT$	Комментарии
Оксиды со слоистой структурой $(\text{SrTiO}_3)_n(\text{SrO})_m$	$\sim 0,34$ при 1000 К	Весьма перспективные для применения при высоких температурах
Халькогениды висмута $(\text{Bi}_2\text{Te}_3, \text{Bi}_2\text{Se}_3)$	$\sim 0,8-1,0$ при комн. темп.	Не зависящее от температуры $ZT$
Наноструктурированные халькогениды висмута (трехслойные $\text{Bi}_2\text{Te}_3, \text{Bi}_2\text{Se}_3$ )	$\sim 2,4$ при комн. темп.	Обладают высокой электропроводностью
Кремний-германиевые сплавы	$\sim 0,7$ при комн. темп.	Наилучшие термоэлектрические материалы при температурах $-1000$ К

так и на использование низкоразмерных систем.

Наноструктурирование термоэлектрических материалов на основе полупроводников, снижающее теплопроводность решетки при увеличении коэффициента Зеебека, привело к заметным улучшениям в преобразовании тепловой энергии в электрическую. Однако даже самые перспективные материалы пока не смогли преодолеть минимальное требование  $ZT = 4$  (см. таблицу 3). Кроме того, созданные на сегодняшний день наноструктурированные материалы имеют ряд технологических, экологических и экономических недостатков, таких как ограниченные размеры, немалые затраты на производство и содержание редких и токсичных материалов.

**Термоэлектричество в электролитах и ферромагнитных жидкостях.** Ученые продолжают искать экологически чистые и экономичные новые типы термоэлектрических материалов, таких как полимеры, ионные проводники и др. Одним из таких объектов недавно стали жидкие электролиты. Оказывается, что значения коэффициента Зеебека у них обычно на порядок больше ( $S \approx 0,5$  мВ/К), чем у полупроводниковых, даже наноструктурированных материалов. Кроме того, они состоят из доступных и нетоксичных элементов. К сожалению, электрическая проводимость таких жидкостей на несколько порядков меньше, чем у легированных полупроводников, поэтому жидкие электролиты счи-

тались неэффективными для использования рассеиваемого тепла.

Совсем недавно новый импульс поискам пригодных для практических применений термоэлектрических материалов придали исследования ионных жидкостей. Последние представляют собой расплавленные соли, жидкие как при комнатной температу-

ре, так и при температурах намного выше  $100^\circ\text{C}$  (некоторые могут превышать и  $300^\circ\text{C}$ ). В отличие от жидких электролитов, наряду с большими коэффициентами Зеебека ионные жидкости обладают высокой электропроводностью, что обеспечивает их высокую эффективность ( $ZT \approx 2$ ). Таким образом, ионные жидкости являются перспективными кандидатами для утилизации тепловых потерь (рис.7). Например, для преобразования тепла выхлопной трубы автомобиля в электроэнергию, которой будет достаточно для работы кондиционера, охлаждающего его салон.

Коэффициент Зеебека жидких электролитов может быть также увеличен посредством введения в их объем магнитных наночастиц (феррожидкость). Их медленный дрейф под воздействием разности температур и взаимодействие с электрода-

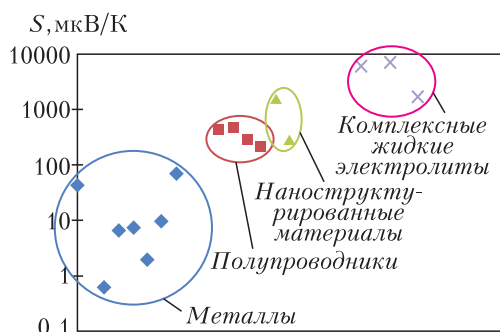


Рис. 7. Значения коэффициента Зеебека для различных классов термоэлектрических материалов

ми улучшают термоэлектрические свойства жидкости. Имеющееся понимание термоэлектрохимической природы сложных жидкостей еще далеко от полноты. Однако в этой захватывающей области ведутся активные экспериментальные и теоретические исследования, обещающие долгожданные применения в утилизации тепловых потерь, наносящих вред не только экономический, но и экологии окружающей нас среды. Упомянутые выше феррожидкости являются рабочим телом для термоэлектрических генераторов нового поколения, разрабатываемых в настоящее время учеными консорциума MAGENTA нескольких европейских лабораторий.

### Несколько слов о применениях

Термоэлектрические устройства имеют широчайшую область применений, начиная от выработки электроэнергии и заканчивая термоэлектрическими приемниками излучения. Надежность и простота термоэлектрических устройств позволяет использовать их даже тогда, когда традиционные источники энергии более эффективны. Помимо термодвигателей достаточно широко используются устройства, работающие на принципе эффекта Пельтье: охладители для различных продуктов, начиная от оптоэлектроники, небольшие холодильники, системы охлаждения/обогрева сидений в автомобилях. В качестве рабочего материала в таких устройствах, как правило, используется полупроводниковая пара  $\text{Bi}_2\text{Te}_3\text{-Sb}_2\text{Te}_3$ .

Жюль Верн в своем романе «Двадцать тысяч лье под водой», который вышел в 1870 году, обсуждал возможность того, что источником энергии для «Наутилуса»

могла бы быть термоэлектрическая батарея, работающая за счет разности температур воды на разных глубинах. Современные атомные подводные лодки, как мы знаем, используют более традиционные паровые турбины. Но вот на космических аппаратах, которые направляются в глубины космоса, действительно стоят термоэлектрические источники энергии. Дело в том, что за пределами планеты Марс солнечный свет слишком слаб для питания космического корабля солнечными батареями. Поэтому необходимая для функционирования бортовых систем электроэнергия обеспечивается путем преобразования тепла, выделяющегося при радиоактивном распаде  $\text{Pu}^{238}$ , в электричество с использованием термоэлектрических пар. Такие радиоизотопные термоэлектрические генераторы использовались НАСА в различных миссиях, таких как «Аполлон», «Пионер», «Викинг», «Вояджер», «Галилео» и «Кассини». Источники питания для «Вояджера» без движущихся частей все еще работают, что позволяет космическому кораблю продолжать научные исследования после более чем 35 лет эксплуатации. Радиоизотопный термоэлектрический источник электроэнергии массой 45 кг, дающий мощность в 110 Вт, стоит и на недавно начавшем изучать Марс марсоходе «Perseverance».

Авторы благодарят за поддержку программу исследований и инноваций Европейского союза Horizon 2020, грантовое соглашение №731976 (MAGENTA), а также выражают признательность Ломбардской академии наук и литературы (Милан) за любезное предоставление факсимиле из архива трудов Алессандро Вольты.

### Вниманию наших читателей

Подписаться на журнал «Квант» можно с любого номера в любом почтовом отделении. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» – 90964.

Купить журнал «Квант» возможно в магазине «Математическая книга» издательства МЦНМО (адрес интернет-магазина: [biblio.mcsme.ru](http://biblio.mcsme.ru)), а также в московских книжных магазинах «Библио-глобус», «Молодая гвардия», «Московский дом книги» и в редакции журнала.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» имеется на сайте <http://kvant.ras.ru>



# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru) и [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru) соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи M2658–M2661 предлагались на VI Кавказской математической олимпиаде.

## Задачи M2658–M2661, Ф2665–Ф2668

**M2658.** Даны  $n > 2$  целых чисел, не равных 0. Известно, что каждое из этих чисел делится на сумму остальных  $n - 1$  чисел. Докажите, что сумма всех данных чисел равна 0.

*М. Сагафьян (Иран)*

**M2659.** В ряд выложены 2021 шариков. Паша и Вова играют в игру, делая ходы по очереди. За каждый ход разрешается покрасить один из еще не покрашенных шариков в один из трех цветов: красный, желтый, зеленый (в начале игры все шарики не покрашены). После того, как все шарики покрашены, победа присуждается Паше, если в ряду найдутся три подряд идущих шарика трех разных цветов; иначе победа присуждается Вове. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

*С. Лучинин*

**M2660.** На плоскости лежат 4 фишки. Если в данный момент фишки находятся в вершинах выпуклого четырехугольника  $P$ , то разрешается выполнить такую операцию: выбрать одну из фишек и сдвинуть ее перпендикулярно диагонали четырехугольника  $P$ , соединяющей две другие фишки; при этом запрещается, чтобы в процессе движения фишка оказалась на одной прямой с двумя другими фишками. Пусть изначально фишки находились в вершинах прямоугольника  $\Pi$ , а после выполнения нескольких операций они находились

в вершинах прямоугольника  $\Pi'$ , подобного  $\Pi$ , но не равного ему. Докажите, что прямоугольник  $\Pi$  является квадратом.

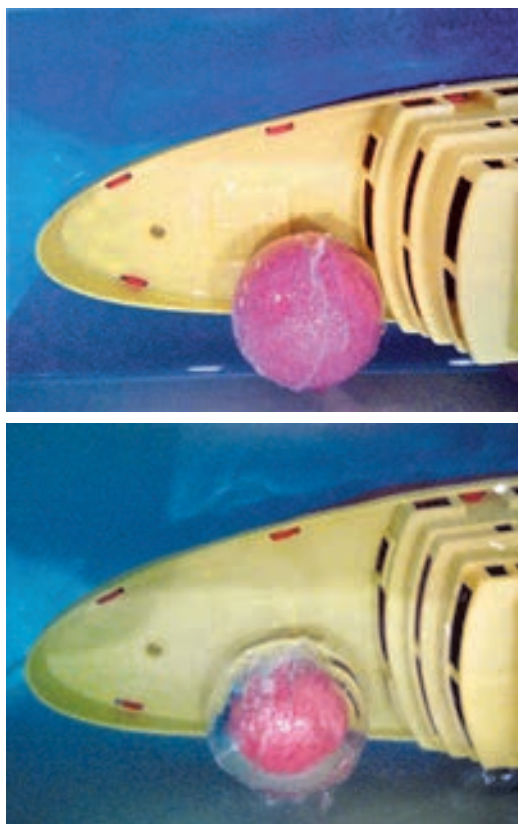
*Е. Бакаев*

**M2661.** Дана бесконечная таблица, строки и столбцы которой занумерованы натуральными числами. Для последовательности функций  $f_1(x), f_2(x), \dots$  в ячейку  $(i, j)$  таблицы запишем число  $f_i(j)$  (для всех  $i, j \in \mathbb{N}$ ). Последовательность функций  $f_1(x), f_2(x), \dots$  назовем красивой, если все числа в таблице – натуральные и при этом каждое натуральное число встречается в таблице ровно один раз. Существует ли красивая последовательность функций  $f_1(x), f_2(x), \dots$ , в которой каждая функция  $f_i(x)$  является многочленом степени 101 с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом, равным 1?

*П. Кожевников*

**Ф2665.** Спутник летает на высоте примерно 300 км над поверхностью Земли с выключенными двигателями по такой круговой орбите, что пролетает точно над географическими полюсами Земли. Какой угол (выраженный в градусах с точностью до  $0,1^\circ$ ) составляет скорость спутника с плоскостью экватора в те моменты, когда спутник пролетает над экватором, в системе отсчета Птолемея (Земля в этой СО неподвижна)?

*З. Птолемеев*



**Ф2666.** В электрическом чайнике мощностью 2,3 кВт вскипятили 1 кг воды, и она продолжает кипеть, так как чайник не выключился. Пузырьки пара всплывают от дна чайника к поверхности воды за время 0,1 с. Кубик из льда при температуре немного ниже 0 °С, покрытый очень тонкой теплоизолирующей пленкой, бросили в чайник. Ребро кубика значительно меньше расстояния от дна чайника до поверхности воды. Всплывет лед или утонет? Нужные сведения найдите самостоятельно.

*В.Кипящая*

**Ф2667.** Четыре одинаковых амперметра включены во все четыре провода (в три фазных и один земляной) силовой трехфазной сети. Фазы одинаковых по величине напряжений отличаются друг от друга на 120°. Имеются три одинаковые лампочки, которые могут быть включены по одной в три разные фазы. Если включена только одна лампочка, то сумма показаний

всех амперметров равна 1 А. Если включены только две лампочки, то сумма показаний всех амперметров равна 1,5 А. Какой будет сумма показаний всех амперметров, если будут включены все три лампочки?

*Э.Амтерян*

**Ф2668.** Тонкая и прозрачная оболочка шарика из спрессованного и подкрашенного розовым цветом стирального порошка сделана из полиэтилена. Шарик находится на палубе игрушечного кораблика. На двух фотографиях отображены две ситуации: сначала этот шарик был в воздухе, а затем оказался погруженным в воду. Почему шарик из порошка так сильно «сжался», а его оболочка сохранила свой размер?

*С.Варламов*

#### Решения задач М2646–М2649, Ф2653–Ф2656

**М2646.** Кощей Бессмертный открыл счет в банке «Спербанк». Изначально на счете было 0 рублей. В первый день Кощей кладет на счет  $k$  ( $k > 0$ ) рублей, а каждый следующий день добавляет туда на один рубль больше, чем накануне (на второй день он добавляет  $k + 1$  рублей, на третий  $k + 2$  рубля и т.д.). Каждый раз сразу после того, как Кощей вносит деньги на счет, общая величина счета уменьшается банком в два раза. Найдите все такие  $k$ , при которых сумма на счете всегда будет выражаться целым числом рублей.

**Ответ:** 2.

Покажем по индукции, что если Кощей в первый день внес 2 рубля, то на  $n$ -й день у него на счету будет  $n$  рублей.

*База  $n = 1$ :* на первый день два внесенных Кошеем рубля стараниями Спербанка тут же превратились в 1 рубль. Пусть на  $n$ -й день на счету у Кощея оказалось  $n$  рублей. Добавив на  $(n + 1)$ -й день  $n + 2$  рубля, Кощей получит на счету  $(n + n + 2)/2 = n + 1$  рублей, что и требовалось доказать.

Допустим теперь, что в первый день Кощей внес  $2 + k$  рублей, где  $k > 0$ . Покажем, что в этом случае у Кощея в  $n$ -й день на счету будет

$$n + \left( \frac{k}{2} + \frac{k}{4} + \dots + \frac{k}{2^n} \right)$$

рублей. Из этого будет следовать единственность ответа 2, так как при  $n = m + 1$ , где  $m$  – степень, с которой двойка входит в разложение числа  $k$  на простые множители, сумма в скобках окажется дробной. База  $n = 1$  индукции очевидна. Пусть на  $n$ -й день на счету у Кошея оказалось

$$n + \left( \frac{k}{2} + \frac{k}{4} + \dots + \frac{k}{2^n} \right)$$

рублей. Добавив на  $(n + 1)$ -й день  $n + 2 + k$  рублей, Кошей получит на счету

$$\begin{aligned} \left( 2n + 2 + k + \frac{k}{2} + \frac{k}{4} + \dots + \frac{k}{2^n} \right) / 2 = \\ = n + 1 + \frac{k}{2} + \frac{k}{4} + \dots + \frac{k}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

рублей, что и требовалось доказать.

С.Берлов

**M2647.** При каких натуральных  $n$  можно так отметить несколько клеток доски  $n \times n$ , чтобы во всех строках и столбцах было четное число отмеченных клеток, а на всех диагоналях, длина которых больше одной клетки, – нечетное?

**Ответ:** при всех нечетных  $n$ .

Пример для нечетного  $n$ : отметим все клетки верхней и нижней горизонталей, кроме левых угловых (рис. 1). Легко видеть, что все условия выполнены.

При четном  $n$  будем рассуждать от противного.

Раскрасим все клетки в четыре цвета так, чтобы цвета совмещались при сдвиге на 2 по горизонтали или вертикали (рис. 2), и обозначим через  $K, Ж, З, С$  соответственно количество отмеченных клеток каждого из цветов: красного, желтого, зеленого, сине-

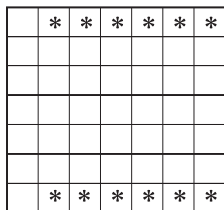


Рис. 1

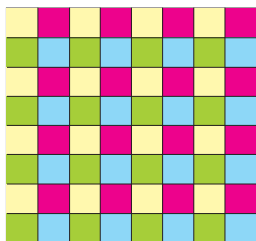
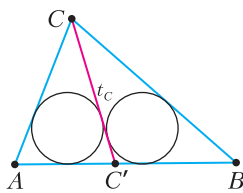


Рис. 2

го. Заметим, что  $K+З$  должно быть нечетным, поскольку красные и зеленые клетки образуют вместе  $n - 1$  диагоналей, больших 1 по длине. С другой стороны, если просуммировать количество отмеченных клеток по всем нечетным вертикалям, получим, что  $Ж+З$  четно. Аналогично, из рассмотрения горизонталей получим, что  $Ж+К$  четно. Отсюда  $K+З = (Ж+З) + (Ж+К) - 2Ж$  – четное число. Противоречие.

С.Берлов, П.Кожевников

**M2648.** Дан треугольник  $ABC$ . Пусть точка  $C'$  на стороне  $AB$  такова, что отрезок  $CC'$  делит треугольник на два треугольника с равными радиусами вписанных окружностей (см. рисунок). Обозначим через  $t_c$  длину отрезка  $CC'$ . Аналогично определим  $t_a$  и  $t_b$ . Выразите площадь треугольника  $ABC$  через  $t_a, t_b, t_c$ .



**Ответ:**  $S = \frac{t_a t_b t_c}{\sqrt{t_a^2 + t_b^2 + t_c^2}}$ .

Используем обычные обозначения  $a, b, c, p, r, S, h_a, h_b, h_c$  для длин сторон треугольника, полупериметра, радиуса вписанной окружности, площади и высот треугольника. Ниже докажем, что

$$t_c^2 = p(p - c). (*)$$

Этого будет достаточно, поскольку, используя аналогичные формулы для  $t_a, t_b$ , получаем

$$\begin{aligned} t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 &= 3p^2 - p(a + b + c) = \\ &= 3p^2 - 2p^2 = p^2, \end{aligned}$$

т.е. красивую формулу

$$p = \sqrt{t_a^2 + t_b^2 + t_c^2}.$$

И далее быстро получаем заявленный результат для  $S$ , поскольку

$$t_a t_b t_c = \sqrt{p^2 \cdot p(p - a)(p - b)(p - c)} = pS.$$

Итак, остается установить равенство (\*). Пусть  $r_c$  – радиус вписанной окружности

треугольника  $ACC'$  (или  $BCC'$ ). Имеем

$$\begin{aligned} S &= S_{ACC'} + S_{BCC'} = \\ &= (b + AC' + t_c)r_c/2 + (a + BC' + t_c)r_c/2 = \\ &= t_c r_c + (b + AC' + BC' + a)r_c/2 = t_c r_c + pr_c, \end{aligned}$$

откуда

$$r_c = \frac{S}{t_c + p} = \frac{pr}{t_c + p}. \quad (1)$$

Имеется и другое соотношение на  $r_c$ :

$$\left(1 - \frac{2r_c}{h_c}\right)^2 = 1 - \frac{2r}{h_c}. \quad (2)$$

Интересно, что оно является частным случаем леммы 2 в решении задачи М2635 (см. «Квант» №4). Поэтому мы не приводим здесь доказательства равенства (2), предлагая читателю доказать его самостоятельно или обратиться к решению задачи М2635.

Далее, (2) преобразуется к виду

$$\frac{1}{h_c} = \frac{1}{r_c} \left(1 - \frac{r}{2r_c}\right),$$

откуда, с учетом (1),

$$\begin{aligned} \frac{c}{2S} = \frac{1}{h_c} &= \frac{t_c + p}{S} \left(1 - \frac{r(t_c + p)}{2rp}\right) = \\ &= \frac{t_c + p}{S} \cdot \frac{p - t_c}{2p} = \frac{p^2 - t_c^2}{2pS}. \end{aligned}$$

После сокращения на  $2S$  получаем равенство

$$c = \frac{p^2 - t_c^2}{p},$$

которое легко преобразуется к виду (\*). Задача решена.

Имеются и другие подходы к решению, в которых возникают другие выражения для  $t_c$ , где  $\gamma = \angle ACB$ :

$$t_c = \sqrt{ab} \cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{S} \cdot \sqrt{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}}.$$

К. Мосевич, А. Заславский,  
П. Кожевников

**М2649.** Изначально точечные частицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  находятся соответственно в точках

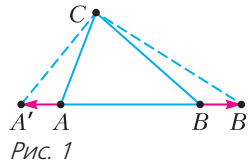


Рис. 1

$(0;0)$ ,  $(1;0)$ ,  $(0;1)$  координатной плоскости. Каждую минуту какие-то две частицы отталкиваются друг от друга

вдоль прямой, соединяющей их текущие положения, проходя одинаковое (положительное) расстояние (рис.1). Может ли частица  $A$  оказаться в точке  $a$ )  $(3;3)$ ; б)  $(2;3)$ ?

в) Могут ли  $B$  и  $C$  оказаться одновременно соответственно в точках  $(0;100)$  и  $(100;0)$ ?

**Ответ:** нет (на все три вопроса).

Решим вначале пункт в).

Заметим, что в процессе выполнения наших операций, т.е. отталкивания частиц, не меняются сумма абсцисс и сумма ординат точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (иначе говоря, неизменным остается центр масс треугольника  $ABC$ ). Тогда если предположить, что частицы  $B$  и  $C$  оказались в точках  $B'(0;100)$  и  $C'(100;0)$ , то частица  $A$  обязана оказаться в точке  $A'(-99;-99)$ .

Кроме того, заметим, что при выполнении операций не меняется ориентация треугольника  $ABC$ , т.е. изначально контур треугольника  $ABC$  в направлении  $A \rightarrow B \rightarrow C$  обходится против часовой стрелки, и это свойство сохраняется при выполнении операций. Но контур треугольника  $A'B'C'$  обходится в направлении  $A' \rightarrow B' \rightarrow C'$  по часовой стрелке, т.е. ориентация треугольника  $A'B'C'$  отлична от ориентации исходного треугольника  $ABC$ . Противоречие.

а), б) Пусть наша цель – поместить частицу  $A$  в точку  $S$  с координатами  $(x_s; y_s)$ , т.е. в такую точку, что

$$\overline{AS} = x_s \overline{AB} + y_s \overline{AC}. \quad (1)$$

Переформулируем задачу следующим образом. В процессе операций у нас меняется треугольник  $ABC$ , а точка  $S$  остается неизменной, в результате чего меняются  $(x_s; y_s)$  в разложении (1). (Можно сказать, в процессе операций меняется система координат с началом координат в точке  $A$  и базисными векторами  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$ .) Мы же

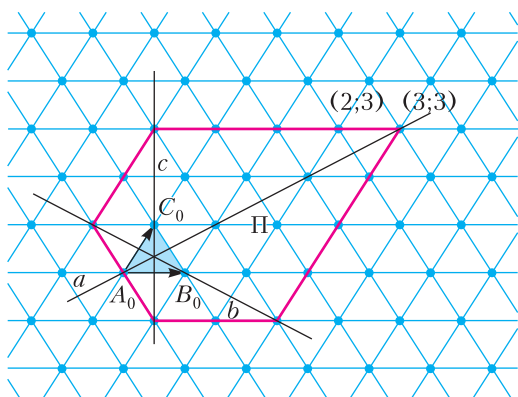


Рис. 2

зафиксируем новый треугольник  $A_0B_0C_0$  (рис.2), свяжем с ним начало координат  $A_0$  и базисные векторы  $\overline{A_0B_0}$  и  $\overline{A_0C_0}$  и будем следить за точкой  $S_0$ , задаваемой равенством

$$\overline{A_0S_0} = x_s \overline{A_0B_0} + y_s \overline{A_0C_0}. \quad (2)$$

В новой постановке задачи наша цель – добиться равенства  $x_s = y_s = 0$ , т.е. совместить точку  $S_0$  с началом координат. Для удобства далее считаем, что треугольник  $A_0B_0C_0$  правильный.

Нетрудно видеть, что одной операцией отталкивания частиц в исходной постановке задачи соответствует следующая операция в новой постановке задачи: точка  $S_0$  подвергается сжатию (с некоторым коэффициентом, большим 1) к одной из трех осей симметрии  $a, b, c$  треугольника  $A_0B_0C_0$ . Треугольник  $A_0B_0C_0$  определяет треугольную сетку. По линиям этой сетки нарисуем красным цветом пятиугольник П, как показано на рисунке 2. Заметим, что при сжатии к любой из прямых  $a, b, c$  пятиугольник П переходит в некоторый пятиугольник П' такой, что П'  $\subset$  П. Значит, если изначально точка  $S_0$  находилась внутри или на границе П, то это свойство будет сохраняться всегда. В начальном положении  $(x_s, y_s) = (3;3)$  (пункт а)) или  $(x_s, y_s) = (2;3)$  (пункт б)) это условие выполнено:  $S_0$  находится на границе П.

Предположим, что точка  $S_0$  на каком-то шаге попала в точку А. Это не могло произойти после сжатия к прямой  $a$ . Если же это произошло после сжатия к прямой  $b$  или  $c$ ,

то до этого последнего шага  $S_0$  должна была находиться вне П. Получаем противоречие, которое завершает доказательство.

Я.Богданов, К.Кривошеев

**Ф2653.** Отношение количества кислорода к количеству азота в некотором объеме «неправильного воздуха» равно 1 : 5. На рисунке изображены графики зависимости давления насыщенных паров азота (красная линия) и кислорода (синяя линия) от температуры. Температура неправильного воздуха в начальный момент равна  $t_0 = -120^\circ\text{C}$ . В процессе охлаждения в некоторый момент времени кислород и азот одновременно начинают конденсироваться. Используя график, определите как можно точнее, каким было начальное давление неправильного воздуха, если охлаждение производилось изобарически. А если изохорически?

Одновременная конденсация азота и кислорода происходит при такой температуре  $T_k$ , что отношение давления насыщенного





пара азота при температуре  $T_k$  к давлению пара кислорода при той же самой температуре равно отношению количества азота к количеству кислорода, иначе говоря, равно 5 : 1. Основная сложность состоит в том, чтобы аккуратно найти значение  $T_k$ , используя график.

Вычислим отношение давлений насыщенных паров азота и кислорода для произвольных удобных точек, например для температур 67,4 К и 75 К. Получатся значения 6,5 и 4,75 соответственно. Рассмотрим другие температуры, можно убедиться в том, что значение отношения давлений уменьшается с ростом температуры. Напомним, что при искомой температуре отношение давлений азота и кислорода должно быть равно 5. Исходя из этих соображений, можно (как минимум с точностью до 0,8 К) получить для температуры конденсации приближенное значение  $T_k \approx 73$  К.

При изобарном охлаждении смеси давления компонентов не меняются, поэтому в данном случае начальное давление составляет  $\frac{6}{5}$  от давления насыщения азота при температуре  $T_k$ :

$$p_1 \approx \frac{6}{5} \cdot 60 \text{ кПа} = 72 \text{ кПа}.$$

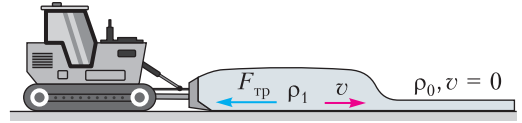
Отметим, что использование графика для давления насыщения азота предпочтительнее – погрешность получается меньше.

При изохорном охлаждении давления меняются пропорционально температурам, так что в этом случае начальное давление составляет  $\frac{6}{5} \cdot \frac{T_0}{T_k}$  от давления насыщения азота при  $T_k$ :

$$p_2 \approx \frac{6}{5} \cdot \frac{153}{73} \cdot 60 \text{ кПа} = 151 \text{ кПа}.$$

А.Бычков, П.Крюков

**Ф2654.** Некоторые особенности процесса сгребания снега бульдозером можно описать на основе следующей простейшей модели. Вдали от бульдозера слой снега имеет линейную плотность  $\rho_0$  и покоится (см. рисунок). Бульдозер и часть



снега, прилегающая к его щите, движутся с постоянной скоростью  $v$ . На движущуюся часть действует сила трения, удовлетворяющая закону Кулона–Амонта  $F_{тр} = \mu N$ ; коэффициент трения  $\mu$  считается известным. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

1) Пусть весь снег, вовлекаемый бульдозером в движение, распределяется в движущейся части со средней постоянной линейной плотностью  $\rho_1$ . Бульдозер в состоянии развить мощность не более чем  $W_0$ . Найдите время  $t$ , в течение которого возможно движение бульдозера с постоянной скоростью  $v$ .

2) Пусть после того, как масса снега в движущейся части достигает некоторого значения  $M_0$ , она перестает увеличиваться. При вовлечении в движение порции снега такая же порция покидает движущуюся часть, скатываясь вбок относительно направления движения. Какую мощность  $W_1$  должен развивать бульдозер при движении с постоянной скоростью  $v$  в этом случае?

1) Скорость снега в движущейся части равна скорости бульдозера  $v$ , но граница раздела между неподвижным снегом и движущейся частью движется с другой, пока неизвестной скоростью  $u$ . Масса снега, вовлекаемого в движение за время  $dt$ , равна

$$dm = \rho_0 u dt.$$

С другой стороны, изменение массы движущейся части за то же время равно

$$dM = \rho_1 (u - v) dt.$$

Приравнивая эти массы, получаем скорость границы раздела:

$$u = \frac{\rho_1 v}{\rho_1 - \rho_0}.$$

На систему тел, состоящую из движущейся части массой  $M(t)$  и порции снега массой  $dm$ , вовлекаемой в движение за

время  $dt$ , действуют в горизонтальном направлении две силы: сила трения, равная  $\mu M(t)g$ , и сила давления со стороны ковша бульдозера  $F$ . Под действием этих двух сил изменяется суммарный импульс описанной системы тел. Из второго закона Ньютона (в импульсной форме)

$$(F - \mu M(t)g) \cdot dt = dm \cdot v$$

следует соотношение для определения силы давления:

$$F = \mu M(t)g + \frac{dm}{dt}v = \mu M(t)g + \frac{\rho_1 \rho_0}{\rho_1 - \rho_0} v^2.$$

Будем считать, что в предельном случае в момент времени  $t$ , когда масса движущейся части становится наибольшей, мощность силы давления  $F$  становится равной максимальной мощности  $W_0$ , развиваемой бульдозером:

$$W_0 = Fv = \mu M(t)gv + \frac{\rho_1 \rho_0}{\rho_1 - \rho_0} v^3.$$

Напомним, что изменение массы движущейся части  $dM$  за малое время  $dt$  равно  $dM = \rho_1(u - v)dt$ , поэтому масса движущейся части пропорциональна времени. Используя найденное ранее выражение для скорости  $u$ , найдем массу движущейся части в момент времени  $t$ :

$$M(t) = \rho_1(u - v)t = \frac{\rho_1 \rho_0}{\rho_1 - \rho_0} vt.$$

Подставляя это выражение в формулу для  $W_0$ , получим

$$t = \frac{W_0}{\mu g v^2} \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 \rho_0} - \frac{v}{\mu g}.$$

2) В этом случае, очевидно, несколько изменится уравнение, описывающее динамику процесса. Поскольку масса снега в движущейся части со временем не меняется, граница раздела движется с той же скоростью  $v$ , что и бульдозер. Рассматривая систему тел, состоящую из движущейся части массой  $M_0$ , порции снега  $dm$ , вовлекаемой в движение за время  $dt$ , и порции снега той же массы  $dm$ , покидающей движущуюся часть, на основе второго закона Ньютона получим формулу для силы давления:

$$F = \mu M_0 g + \rho_0 v^2.$$

Легко видеть, что искомая мощность есть произведение этой силы на скорость движущейся части. Таким образом,

$$W_1 = \mu M_0 g v + \rho_0 v^3.$$

**Ф2655.** Сетка в форме квадрата состоит из очень большого количества ячеек (рис.1). В узел с координатами  $(0,0)$ , совпадающий с центром квадрата, втекает ток  $I = 4$  А. Сопротивление любого

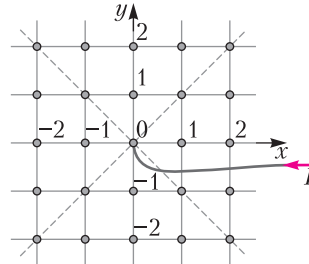


Рис. 1

проводника, соединяющего соседние узлы сетки, равно 1 Ом.

1) Пусть узлы сетки на стороне большого квадрата подключены к специальному источнику напряжения так, что потенциалы узлов, лежащих на диагоналях (пунктирные линии), равны нулю везде, кроме центра квадрата, где потенциал равен 1 В. Определите потенциалы  $\varphi_{1k}$  в узлах с координатами  $(k + 1, k)$  и потенциалы  $\varphi_{2k}$  в узлах с координатами  $(k + 2, k)$  при  $k \geq 0$ .

2) Источник напряжения заменили на другой – еще более специальный. Теперь потенциалы узлов и на диагоналях, и в центре равны нулю. Чему равны потенциалы  $\varphi_{1k}$  и  $\varphi_{2k}$  в этом случае?

Задача решается просто, если найти эффективный подход. Рассмотрим элемент сетки, изображенный на рисунке 2. Сумма токов, втекающих в узел 0, должна быть равна нулю:

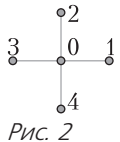


Рис. 2

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{R} + \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{R} + \frac{\varphi_3 - \varphi_0}{R} + \frac{\varphi_4 - \varphi_0}{R} = 0,$$

поэтому для потенциалов узлов справедливо соотношение

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 4\varphi_0.$$

Далее везде (кроме ответов) обозначаем  $\varphi_{xy}$  потенциал узла с координатами  $(x, y)$ , тогда предыдущую формулу можно переписать в виде

$$\varphi_{(x-1)y} + \varphi_{(x+1)y} + \varphi_{x(y-1)} + \varphi_{x(y+1)} = 4\varphi_{xy}. (*)$$

Используя эту формулу, а также соображения симметрии, можно легко ответить на вопросы задачи. Отметим, что в узлах, расположенных симметрично относительно диагоналей, потенциалы должны быть одинаковыми, поэтому справедливы равенства

$$\varphi_{xy} = \varphi_{yx} = \varphi_{(-x)(-y)} = \varphi_{(-y)(-x)}.$$

Задачу удобно решать графически, составляя значения потенциалов на предварительно нарисованной сетке. В силу симметрии не обязательно изображать всю координатную плоскость, достаточно нарисовать лишь ее часть, примерно так, как это сделано на рисунках ниже

1) Предварительно определим потенциал  $\varphi_{10}$ . В силу симметрии, по проводнику, соединяющему начало координат и узел с координатами  $(1, 0)$ , потечет ток, равный 1 А, поэтому  $\varphi_{10} = 0$ . Далее, применив формулу (\*) для  $x = 1$  и  $y = 0$ , легко устанавливаем, что потенциал узла с координатами  $(2, 0)$  равен  $\varphi_{20} = -1$  В. Рассуждения иллюстрирует рисунок 3.

Пусть потенциал узла с координатами  $(2, 1)$  равен  $u$ , тогда из симметрии и формулы для потенциала следует, что потенциал узла с координатами  $(3, 2)$  равен  $-u$ . Далее по индукции легко доказать, что в узлах с

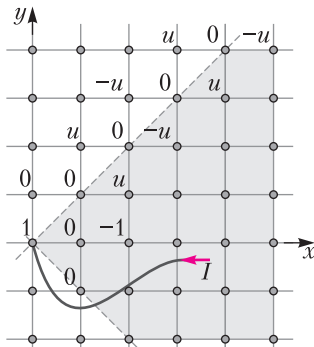


Рис. 3

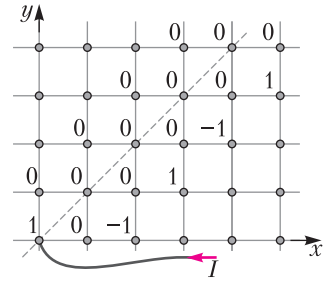


Рис. 4

координатами  $(k + 1, k)$  будут чередоваться значения  $\pm u$ . Применяя формулу (\*) для  $x = y = 1$ , легко покажем, что  $u = 0$ . Аналогично, записывая формулу (\*) для  $x = 2$  и  $y = 1$  и далее по индукции, определяем потенциалы узлов с координатами  $(k, k + 2)$ . На рисунке 4 показано итоговое распределение потенциала.

2) В этом случае, рассуждая аналогично первой части, сначала имеем распределение потенциала, показанное на рисунке 5. Легко видеть, что в данном случае  $u = 1$  В, а вот зависимость для потенциалов узлов с координатами  $(k + 2, k)$  будет несколько более сложная, чем в первой части. Записывая формулу (\*) для  $x = 2$  и  $y = 1$ , получим потенциал узла с координатами  $(3, 1)$ :  $\varphi_{31} = 8$  В. Далее записываем форму-

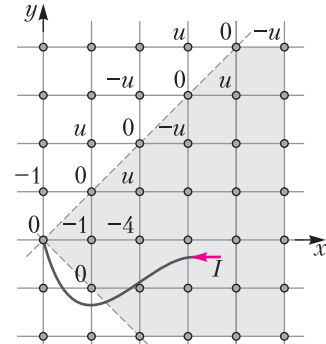


Рис. 5

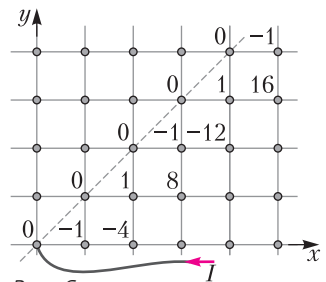


Рис. 6

ду для  $x = 3$  и  $y = 2$ , получаем  $\Phi_{42} = -12$  В. Таким образом можно «нащупать» закономерность, доказать которую по индукции весьма несложно. Итоговое распределение потенциала показано на рисунке 6.

Как можно заметить, потенциалы, которые требовалось найти в первой части, получаются, если сдвинуть картину распределения потенциала во второй части на  $-1$  по горизонтали.

П.Крюков

**Ф2656.** На горизонтальной поверхности располагается диск радиусом  $R$  и толщиной  $h$ , сделанный из стекла с показателем преломления  $n = 1,5$  (рис.1,а). Нижняя матовая сторона диска отражает свет диффузно (иначе говоря, равномерно в любых направлениях). Верхняя и боко-

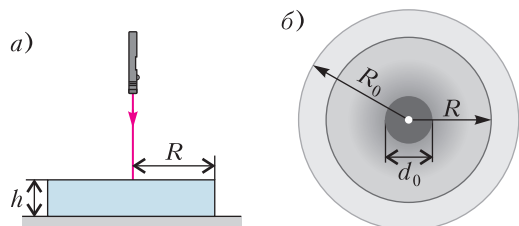


Рис. 1

вая поверхности диска тщательно отшлифованы. Луч мощной лазерной указки, освещающей диск, направлен вдоль его оси. При рассматривании диска сверху (рис.1,б) наблюдаются: ярко выраженный темный круг диаметром  $d_0$  с нечеткой границей и светлый ореол с резкой границей в виде концентрической с диском окружности радиусом  $R_0$ . На рисунке 2 приведена фотография, полученная при проведении опыта, похожего на описанный выше. Мощной лазерной указкой

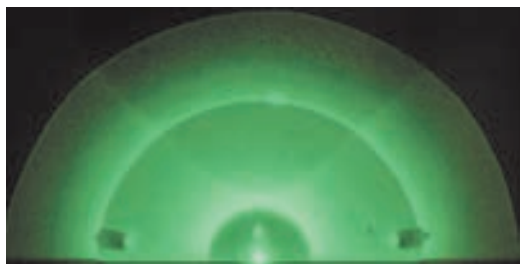


Рис. 2

освещалась нижняя точка середины половинки стеклянного диска. Можно различить темный полукруг с размытой границей и светлый ореол с резкой границей.

1) Известно, что толщина диска равна  $h = 14$  мм, а отношение радиусов  $\frac{R_0}{R} \approx 1,65$  (это значение получается при измерениях по фотографиям опытов). Найдите радиус диска  $R$ .

2) Чем может быть обусловлено возникновение темного круга? Оцените его радиус  $r_0$ , считая показатель преломления и толщину диска известными.

*Примечание.* Можно считать, что в условиях данной задачи для лучей, выходящих из стекла в воздух, от границы раздела отражается не более 10% энергии падающего излучения, если величина угла падения меньше  $37^\circ$ .

Для того чтобы объяснить возникновение ореола и темного круга, рассмотрим схематичный рисунок 3. Лазерный луч попадает на нижнюю матовую поверхность диска в точке  $S_0$ . Поскольку нижняя поверхность отражает диффузно, в этой точке возникает мощный источник, излучающий изотропно. Лучи, идущие от этого источника, частично (или полностью) отражаются от верхней поверхности пластины и опять попадают на нижнюю матовую поверхность, формируя на ней вторичные источники света (такие, как  $S_r$  на рисунке 3). Понятно, что интенсивность этих вторичных источников зависит от доли энергии света в отраженных верхней поверхностью лучах. Для углов падения лучей на верхнюю поверхность меньше  $37^\circ$  (углы традиционно отсчитываются от нормали) доля отраженного света составляет не более 10%, как следует из условия. Затем эта

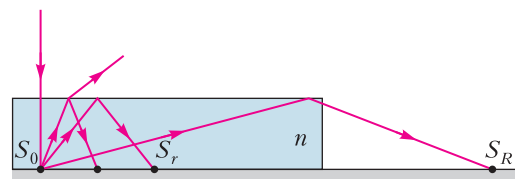


Рис. 3

доля быстро растет и становится равной 100%, когда угол падения оказывается равным углу полного внутреннего отражения ( $\approx 42^\circ$  для  $n = 1,5$ ). При дальнейшем увеличении угла падения весь падающий на верхнюю поверхность свет испытывает полное отражение. Вторичные источники малой интенсивности формируются лучами, которым соответствуют небольшие углы падения на верхнюю поверхность, поэтому вокруг яркой точки в центре наблюдается темный круг. Его размытая граница формируется лучами, которым (оценочно) соответствуют углы падения от  $37^\circ$  до  $42^\circ$ .

Граница светлого ореола формируется лучами, идущими от источника  $S_0$  практически в угол пластины, где они отражаются полностью от верхней поверхности и после преломления на боковой попадают на горизонтальную поверхность в точку  $S_R$ . Радиус границы ореола равен расстоянию  $S_0 S_R$ , а радиус темного круга оценивает расстояние  $S_0 S_f$  при условии, что  $S_f$  соответствует углам падения от  $37^\circ$  до  $42^\circ$ . Сделаем расчет.

1) Легко видеть, что для луча, преломляющегося на боковой поверхности диска и формирующего границу ореола, углы падения и преломления  $\alpha_n$  и  $\alpha_1$  удовлетворяют соотношениям

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{h}{R}, \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{h}{R_0 - R}.$$

С другой стороны, для этих углов справедлив закон преломления  $n \sin \alpha_n = \sin \alpha_1$ . Выражая синусы через тангенсы, затем подставляя их в закон преломления, после преобразований получаем уравнение

$$h^2 (n^2 - 1) = R^2 - n^2 (R_0 - R)^2,$$

из которого следует

$$R = h \sqrt{\frac{n^2 - 1}{1 - (0,65n)^2}} \approx 70 \text{ мм}.$$

2) Оценить радиус границы темного круга можно по формуле

$$r_0 = 2h \operatorname{tg} \beta,$$

где угол падения  $\beta$  может принимать значения (примерно) от  $37^\circ$  до  $41,8^\circ$  (более точное значение угла полного внутреннего отражения). Можно рассчитать значение радиуса для обоих углов и в качестве оценки взять среднее арифметическое. Получится  $r_0 \approx 23 \text{ мм}$ .

*П.Крюков, А.Бычков*

**БИБЛИО-ГЛОБУС**  
ВАШ ГЛАВНЫЙ КНИЖНЫЙ

МЫ ПРЕДЛАГАЕМ  
БОЛЬШОЙ ВЫБОР ТОВАРОВ И УСЛУГ

УСЛУГИ	АССОРТИМЕНТ
■ Интернет-магазин <a href="http://www.bgshop.ru">www.bgshop.ru</a>	■ Книги
■ Кафе	■ Аудиокниги
■ Клубные (дисконтные) карты и акции	■ Антиквариат и предметы коллекционирования
■ Подарочные карты	■ Фильмы, музыка, игры, софт
■ Предварительные заказы на книги	■ Канцелярские и офисные товары
■ Встречи с авторами	■ Цветы
■ Читательские клубы по интересам	■ Сувениры
■ Индивидуальное обслуживание	
■ Подарочная упаковка	
■ Доставка книг из-за рубежа	
■ Выставки-продажи	

г. Москва,  
м. Лубянка,  
м. Китай-город  
ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1  
8 (495) 781-19-00  
[www.biblio-globus.ru](http://www.biblio-globus.ru)  
пн – пт 9:00 - 22:00  
сб – вс 10:00 - 21:00  
без перерыва на обед

[www.biblio-globus.ru](http://www.biblio-globus.ru)



# НИКОЛАЙ НИКОЛАЕВИЧ КОНСТАНТИНОВ



(02.01.1932 – 03.07.2021)

Ушел из жизни Николай Николаевич Константинов. Математик, физик, учитель, выдающийся организатор, сделавший невероятно много для математического образования. Это он с соратниками начинал в Москве матклассы и ввел систему обучения по листочкам. Он придумал многопредметный Турнир имени М.В. Ломоносова, Международный математический Турнир городов и его Летнюю конференцию, Независимый московский университет. Ездил со студентами и школьниками в трудовые лагеря, где работа сочеталась с занятиями наукой. И все это лишь часть длинного списка идей и проектов Н.Н. Константинова, изменивших наш мир. Он очень любил и ценил общение, его интереснейшие рассказы на самые разные темы (математика, биология, музыка, жизнь...) собирали множество слушателей. Сейчас остались книги, статьи, интервью...

Николай Николаевич больше 50 лет проработал в школе, сам был автором ярких задач по математике и физике. Он писал:

«Я не знаю большей радости, чем ясные математические рассуждения. Они бывают безумно красивыми, но только в том случае, если в них нет ошибок. Мне жалко людей, которые не знают этой красоты. И я пытаюсь открыть глаза тем, кто ее не видит, поэтому занимаюсь преподаванием. В основе лежит доброта – слова из басни Крылова: “Кто добр, тому избытки в тягость, коль он их с ближним не делит”. Но не все могут понять эту красоту, и тех, кто не может, мне жалко. Хотя, конечно, им в некоторых случаях доступна другая красота – в музыке, в картинах и т.п. Эта другая красота сравнима с математической, и так же, как в математике, она противоречит вышендрежу, оригинальности, нарушению внутренней естественности. Всякое такое нарушение подобно ошибке в решении задачи».

Николай Николаевич помог огромному количеству людей найти себя. Многие единомышленники и ученики Н.Н. Константинова продолжают сейчас его дела.

Светлая память!

## Задачи

1. Поезд плавно тормозил перед остановкой. Как раз в тот момент, когда



он окончательно остановился, пассажиры ощутили небольшой толчок. Куда их качнуло: по направлению движения поезда или против?

2. В гости пришли 10 гостей и каждый оставил в коридоре пару калош. Все пары калош имеют разные размеры. Гости начали расходиться по одному, надевая любую пару калош, в которые они могли влезть (т.е. каждый гость мог надеть пару калош, не меньшую, чем его собственные). В какой-то момент обнаружилось, что ни один из оставшихся гостей не может найти себе пару калош, чтобы уйти. Какое максимальное число гостей могло остаться?



3. Пешеход шел 3,5 часа, причем за каждый промежуток времени в один час он проходил ровно 5 км. Следует ли из этого, что его средняя скорость за все время равна 5 км/ч?



4. В Колиной коллекции есть четыре царские золотые пятирублевые монеты. Коле сказали, что какие-то две из них фальшивые. Коля хочет прове-



рить (доказать или опровергнуть), что среди монет есть ровно две фальшивые. Удастся ли ему это сделать с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь? (Фальшивые монеты одинаковы по весу, настоящие тоже одинаковы по весу, но фальшивые легче настоящих.)

Автор этих задач —  
Н.Константинов

# Мешает ли птицам попутный ветер

**Н. КОНСТАНТИНОВ**

Когда я уже научился читать, мне попалась книжка о путешественниках – какая именно книжка, я забыл, а запомнил из нее только один эпизод. Путешественники разбили лагерь в лесу рядом с озером, на которое села для отдыха во время перелета стая диких гусей. Наступил вечер, и охотиться было уже невозможно.

– Завтра будет славная охота, – сказал один.

– А ты не думаешь, что на рассвете птицы улетят? – сказал другой.

– Не улетят, ведь ветер северный, для гусей попутный. Птицы не летают с попутным ветром, так как он задувает им под маховые перья крыльев.

Этот разговор показался мне странным. Я бы на месте птиц радовался попутному ветру – на нем можно лететь быстро, быстрее ветра. Но я был маленький, и все, что написано в книгах, было для меня истиной. Так что я запомнил только, что я чего-то не понял.

Прошло двадцать пять лет. Я учился в аспирантуре, моим руководителем был Алексей Андреевич Ляпунов – известный математик, который в это время глубоко интересовался кибернетикой и математическими подходами к биологии. Он был связан научными интересами и личной дружбой с нашим крупным биофизиком, одним из основателей науки биофизики – Николаем Владимировичем Тимофеевым-Ресовским. По совету Алексея Андреевича я посетил семинар по биофизике, проводившийся Николаем Владимировичем на биостанции Миассово на Урале. История, рассказанная Николаем Владимировичем, заставила меня вспомнить прочитанную в

детстве книжку. Оказывается, было время (и я как раз его застал), когда из статьи в статью, из книги в книгу повторялась одна и та же мысль – что попутный ветер задувает птицам под крылья. И группа биологов, в их числе Тимофеев-Ресовский, в нескольких публикациях разъяснили биологам ошибочность этой мысли и рассказали о принципе относительности Галилея.

Еще один эпизод напомнил мне, что некоторые старшеклассники в наше время еще не доросли до понимания картины мира, возникшей после открытий Галилея.

Стройотряд из студентов и школьников работал летом на Беломорской биостанции МГУ (я был уже учителем). Мы возвращались с одной морской экскурсии на теплоходе «Научный». Группа ребят попросила у капитана разрешения сидеть не на теплоходе, а в шлюпке, которая тянулась за теплоходом на буксире (там было куда приятнее). А за шлюпкой, на расстоянии примерно трех метров от нее, тянулся еще маленький ялик, в котором никто не сидел.

И вот самый молодой из нас, Леша Кувшинов, который тогда перешел в десятый класс, захотел пересесть в ялик. А сделать это на ходу было, по-моему, невозможно. По крайней мере, очень трудно: даже если подтянуть ялик к шлюпке, то пересесть на него и не перевернуться было немислимо. Но Леша придумал другой способ: «Я высоко подпрыгну, а пока буду опускаться, ялик окажется уже подо мной». И тут все старшеклассники (а это были все матшкольники, и с ними шутки плохи) стали наперебой объяснять Леше принцип относительности Галилея. Землю, говорили они, можно считать инерциальной системой отсчета. Это означает, что если на тело не действуют внешние силы (или, точнее, если все силы, действующие на тело, компенсируют друг друга), то оно сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения относительно Земли. Конечно, бывают такие ситуации, в которых систему отсчета, связанную с Землей, нельзя считать инерциальной. Наглядный пример тому – маятник

*Не делайте неправды в суде, в мере, в весе и в измерении...*

Библия

*Измеряй все доступное измерению и делай недоступное измерению доступным.*

Галилео Галилей

*... естественные солнечные сутки, принимаемые при обыденном измерении времени за равные, на самом деле между собой не равны.*

Исаак Ньютон

*Каждая величина известна лишь в той мере, в которой ее можно измерить.*

Уильям Томсон

*В природе мера и вес суть главные орудия познания. Наука начинается тогда, когда начинают измерять.*

Дмитрий Менделеев

*В этом процессе перехода от качественных соотношений к количественным заключается важнейший этап научной мысли. На нем основано как понятие об измерении, так и сам процесс измерения физических величин.*

Леонид Мандельштам

*Многие физики думают, что единственным определением любого понятия является способ его измерения.*

Ричард Фейнман

*Встала на весы...спешат!*

Фольклор

## А так ли хорошо знакомы вам физические измерения?

Насколько же первостепенное значение придавали измерениям выдающиеся ученые! И действительно, измерения – неотъемлемый атрибут физики. С первых же шагов ее изучения в школе нас приобщают к таким терминам, как единица измерения, цена деления, погрешность, поясняют различие между процедурами прямых и косвенных измерений, учат оформлять результаты лабораторных работ. Правда, кое-кому лабораторные работы кажутся занятием излишним и скучным, но многим, склонным трудиться не только головой, но и руками, их в школе явно не хватает.

Попытаемся, хоть отчасти, восполнить этот недостаток и провести несколько измерений, пользуясь иногда, что называется, подручными средствами. Возможно, при всей внешней простоте, эти практические действия побудят вас продвинуться дальше в освоении понятия «измерение». Тогда – ждем вас в следующем выпуске «Калейдоскопа».

### Задачи-измерения

**1.** Измерьте сначала с помощью линейки свой рост, отметив его на косяке двери, затем – расстояние между концами пальцев распростертых рук, воспользовавшись стеной. Сравните результаты ваших измерений. Что вы заметите?

**2.** Выдвиньте прямую руку перед собой и, раздвинув указательный и средний пальцы, изобразите букву V. Таким образом астрономы-любители могут измерять интересные их углы. Почему?

**3.** На прямоугольном столе лежит закрытый спичечный коробок. Удастся ли вам с помощью линейки и карандаша измерить расстояние между двумя самыми удаленными его точками?

**4.** Как определить длину окружности (а значит, и диаметр) футбольного мяча, располагая деревянной линейкой?

**5.** Можно ли найти объем одной конкретной из кучки фасолины, если у вас имеется только мензурка?

**6.** Закрытая тонкостенная бутылка прямоугольной формы с плоским дном частично заполнена водой. Как, не открывая бутылку и имея лишь линейку, определить ее вместимость?

**7.** Попробуйте найти внутренний объем сосуда неправильной формы, пользуясь весами и набором гирь.

**8.** Сможете ли вы (следуя Архимеду) взвесить слона?

**9.** Как определить с помощью динамометра массу кубика, вес которого больше предела измерений динамометра, но не более чем вдвое?



**10.** Известно, что вес тела на Луне в 6 раз меньше, чем на Земле. Какие измерительные приборы надо взять с собой на Луну, чтобы проверить этот факт экспериментально?

**11.** Два одинаковых бытовых термометра различаются лишь формой емкостей: у одного она шарообразная, у другого цилиндрическая. Какой из этих термометров быстрее «откликается» на изменение температуры и почему?

**12.** Как измерить сопротивление данного амперметра, если имеется другой амперметр, сопротивление которого известно?

**13.** Как измерить сопротивление данного вольтметра, если имеется другой вольтметр, сопротивление которого известно?

**14.** Как в солнечный день определить с помощью линейки высоту здания или дерева, не влезая на них?

#### **Любопытно, что...**

... за точностью и достоверностью измерений следили с древнейших времен. Так, в грамоте князя Всеволода (XII век) были упомянуты наказания для нарушителей единства измерений вплоть до смертельной казни.

... жители Древнего Египта располагали разбитыми на части мерными веревками, которые использовали в качестве линеек и циркулей. С их помощью египтяне могли приблизительно измерять длину любого отрезка или величину любого угла.

... разнообразные, пусть и ориентировочные, измерения можно выполнять буквально голыми руками, если знать собственные размеры: ширину ногтя какого-нибудь пальца, длину среднего сустава указательного, расстояние между концами большого пальца и мизинца растопыренной пятерни, «свой» метр – от конца вытянутой в сторону руки да края плеча другой и так далее.

... точные измерения температуры, проведенные Дж. Джоулем в многократных экспериментах, позволили установить неочевидную долгое время связь между механической работой, теплотой и изменением энергии. Все эти физические величины сегодня имеют общую единицу измерения – джоуль.

... термометры и барометры, изначально основанные на одних и тех же физических принципах – на уравнении состояния газа, – были практически неотличимы друг от друга. Впервые, кстати, на это обстоятельство обратил внимание физиков знаменитый юморист Марк Твен.

... согласно теории относительности при равномерном движении тел их длины сокращаются и замедляется ритм, в котором протекают все процессы. Однако эти изменения можно измерить только с помощью покоящихся приборов. Как только приборы приходят в движение вместе с объектами наблюдений, они оказываются «бессильными» заметить подобные перемены.

... выполненные в конце XX века измерения скорости звука в воздухе потребовали внести важные поправки в справочники. Дело в том, что в прежних экспериментах допускались неопределенности, не учитывающие новейшие значения констант и параметров, описывающих свойства воздуха, а также сомнительные результаты перевода единиц измерения из одной системы в другую.

... современные методы измерений необыкновенно расширили диапазон исследуемых величин. Так, сегодня можно находить расстояния, отличающихся друг от друга примерно на 40 порядков – от межгалактических масштабов до размеров элементарных частиц.

#### **Что читать в «Кванте» о физических измерениях**

*(публикации последних лет)*

1. «Рычажные весы» – 2015, Приложение №3, с.52;
2. «Разрешающая способность измерительных приборов» – 2015, Приложение №3, с.191;
3. «Как студент магнитное поле измерял» – 2016, Приложение №2, с.113;
4. «Рождение гравитационно-волновой астрономии» – 2018, №3, с.14;
5. «Джеймс Джоуль» – 2018, №7, с.10;
6. «Премия за лазерные инструменты» – 2019, №3, с.2.

*Материал подготовил А.Леонович*





Фуко. В инерциальной системе отсчета плоскость, в которой колеблется маятник, остается постоянной, а в действительности, скажем, если опыт поставлен в Москве, плоскость колебаний медленно поворачивается. Другой пример – реки, текущие в северном полушарии, подмывают правый берег. А если бы система, связанная с Землей, была инерциальной, оба берега были бы равноправны. Но это все довольно тонкие эффекты, наблюдаемые либо при очень точных измерениях, либо за очень большие промежутки времени. В нашем же случае систему отсчета, связанную с Землей, вполне можно считать инерциальной. Значит, и любую другую систему отсчета, которая движется относительно Земли равномерно и прямолинейно, также можно считать инерциальной. Наша шлюпка как раз и есть такая система отсчета. И тогда, по принципу относительности Галилея, все законы физики в системе шлюпки выглядят так же, как и в системе, связанной с Землей. И подпрыгнув в шлюпке ты опустишься в ту же точку шлюпки, из которой стартовал, как это было бы и на берегу.

Тут один из наших ребят возразил, что если на твердой почве, т.е. на берегу, выстрелить вертикально вверх, то снаряд не упадет в ту же точку, из которой стартовал, даже если воздух полностью неподвижен относительно Земли. Это дей-

ствительно так, но это еще один случай, демонстрирующий неинерциальность земной системы отсчета. Поскольку эффект незначительный, в нашем опыте его можно не учитывать.

Однако Лешу все эти объяснения не убедили. Приводили ему и рассуждения Галилея, объяснявшего своим современникам, что если дуэль на писто-

летах происходит в трюме движущегося корабля, то ни один из дуэлянтов, смотрит ли он от кормы к носу корабля или наоборот, не имеет преимуществ. И напоминали, как он, Леша, едучи в поезде на Биостанцию, играл в вагоне в мяч и мяч двигался по отношению к вагону так же, как он двигался бы на неподвижной земле при тех же ударах по нему. Но все было бесполезно. Леша непременно хотел подпрыгнуть, а мы возражали, так как шлюпка в результате удара могла дать течь. Но в конце концов уступили, и Леша подпрыгнул. Он, как и должно было быть, опустился в исходную точку (а лодка так качнулась, что набрала некоторое количество воды). Леша надолго задумался. И, наверное, запомнил принцип относительности Галилея навсегда.

Воспользуюсь случаем, чтобы показать на примерах, как поверхностно зачастую школьники учат уроки.

Однажды один студент ехал на Беломорскую биостанцию. Он приехал на поезде в Пояконду, откуда его должны были доставить к месту на катере. Подошел к берегу в три часа ночи (ночи белые), до прихода катера было еще далеко. Кругом ни души. Он положил на землю свой тяжелый рюкзак и пошел осматривать окрестности. А когда вернулся, рюкзака не было. О воровстве не могло быть и речи – поселок крохотный, и жители даже

дверей не запирают. Студент сел на камень и предался тяжелым размышлениям о превратностях жизни. «А что это там в море плавает?» – подумал студент. «Нет, не плавает, а, пожалуй, стоит на месте». Пригляделся. «Да это же мой рюкзак!» – догадался студент. Благо были на нем сапоги – дошел до рюкзака по мелководью. Забыл студент, что в море бывают приливы. А ведь учил это в школе, и, возможно, даже получил пятерку за отлично вызубренный урок. Но в том-то и дело, что можно вызубрить и не задуматься.

Другой случай – опять же на Белом море. Группа туристов пошла погулять, а один из них, Саша Кодряну, остался у костра, чтобы приготовить чай. Это был очень толковый школьник, только что заработавший первую премию на Всесоюзной математической олимпиаде. Он пошел к колодцу, а рядом море – вода в нем такая прозрачная и так красиво играет на солнце. И он набрал в ведро морской воды. Забыл он, что вода в море соленая, а ведь наверняка знал об этом. Но это были знания для отметки, а не для жизни. Вода (соленая) закипела как раз к возвращению уставшей группы.

Получается, что школьные знания могут оказаться бесполезными. Это бывает, если они не связываются с жизненными наблюдениями. У человека должны быть две «школы» – одна на улице и дома, другая – в школе, и они должны быть связаны. Но так бывает не всегда. Вот идет человек по городу, ему пятнадцать лет, и у него стопроцентное зрение. Но он ничего не видит. Он не заметил, что голуби и вороны – это разные птицы. Не заметил, что у троллейбусов на крыше рога (они по-научному называются пантографы). Он никогда не видел радуги, не замечал, что у кучевых облаков нижние поверхности обычно ровные. Все это я не выдумал – это результаты наблюдений. Спросил я как-то своих кружковцев, бывает ли так, что Луна и Солнце видны на небе одновременно. Один сказал, что он однажды это видел, остальные ничего такого не замечали, а некоторые вообще удивились, что Луну можно увидеть днем.

Но... вернемся к птицам. Меня всегда учили, что записные книжки Леонардо да Винчи изобилуют гениальными догадками. И вот недавно я, наконец, решил почитать эти книжки, которые, разумеется, давно изданы в солидных академических издательствах. В «Избранных произведениях» Леонардо да Винчи (М.: Издательство АН СССР, 1955) есть глава «О летании и движении тел в воздухе». Это подробное исследование, в котором много интересных наблюдений и прекрасных рисунков. Но понимать его очень трудно, порой невозможно. Ведь Леонардо писал для себя, не заботясь о том, чтобы разъяснять смысл употребляемых терминов. В этой главе есть раздел «Почему перелетные птицы летают против течения ветра?» Я в этом тексте не смог разобраться, но вывод очевидно не верен. На рисунках показано, как птицы взлетают – действительно всегда против ветра. А когда они уже высоко, то не видно, куда дует ветер. Можно предположить, что это и привело к ошибке.

Надо заметить, что Леонардо постоянно ссылается на законы статики, открытые еще Архимедом (Архимеда он изучал по полному собранию сочинений, которое, как известно из его записных книжек, было ему доступно). Но для изучения полета недостаточно статики. А динамики, как науки, тогда еще не было, и Леонардо там, где не хватало знаний, постоянно использовал интуитивные догадки. Так, всю жизнь он пытался создать летательный аппарат, но это ему не удалось. Потребовались четыре столетия развития науки и техники, чтобы человек поднялся, наконец, в воздух.

Итак, мне кажется, я догадался, откуда у биологов возникла ошибочная мысль о том, что попутный ветер мешает птицам летать. Она возникла из трудов Леонардо да Винчи. А удерживалась эта идея в головах некоторых людей потому, что в знании физики эти люди не перевалили через эпоху Галилея. Но не будем упрекать Леонардо в том, что он не опередил следовавшего за ним гения...

# Фантастика и реальность

**С.ДВОРЯНИНОВ**

**В**ы помните, как в книге Н.Н. Носова «Незнайка на Луне» ее герои представляли строение Луны? Они считали Луну пустотелой, и поэтому Знайка так мечтал о новых путешествиях:

«Хорошо бы построить большой межпланетный корабль, взять значительный запас пищи и воздуха и устроить длительную экспедицию на Луну. Надо полагать, что во внешней оболочке Луны имеются отверстия в виде пещер или кратеров потухших вулканов. Сквозь эти отверстия можно будет проникнуть внутрь Луны и увидеть ее центральное ядро. Если это ядро существует, а оно без сомнения существует, то лунные коротышки живут на его поверхности. Между внешней оболочкой и центральным ядром Луны, наверно, сохранилось достаточное количество воздуха, поэтому условия жизни на поверхности ядра должны быть вполне благоприятными для коротышек».

Но для жизни на такой Луне коротышкам непременно потребовалась бы энергия. Как же ее можно получить? Давайте продолжим фантазии Знайки.

Каждое тело массой  $m$ , находящееся на высоте  $h$  над поверхностью Земли, обладает потенциальной энергией  $W = mgh$ . Так и каждый камень на внешней оболочке Луны обладает потенциальной энергией относительно лунного ядра. Погрузили камень в корзину с веревкой, а веревку наматывали на ротор электрогенератора – и все! Корзина поехала вниз, ротор завертелся, электрическая энергия по проводам потекла куда надо. (По этому же принципу действуют и гири

старинных часов – их потенциальная энергия заставляет работать часовой механизм.) Конечно, одной корзиной не обойтись, несколько корзин надо разместить на кольцевой ленте – подобно обычному транспортеру (аналогичным образом закреплены ступени эскалатора в метро).

Вы скажете: Знайка, Незнайка, пустотелая Луна – несерьезно это, детские фантазии! А вот и нет. Сказанное об использовании потенциальной энергии уже давно реализовано в конструкции водных фуникулеров для подъема людей на гору. Только в этом случае вместо камней используют воду, а вместо корзины для камней – бак под вагончиком фуникулера.

Подобно обычному фуникулеру, два вагончика водного фуникулера связаны тросом. На вершине горы в специальный бак одного из вагончиков заливают воду, а внизу из бака другого вагончика воду выливают. При этом равновесие нарушается, и верхний вагон перевешивает нижний. Затем тормоза отпускают, и вагончики поехали: тяжелый с водой – вниз, легкий без воды – вверх. Вот и все. Первые такие фуникулеры были построены почти полтора века назад, некоторые действуют до сих пор.

Что же, получается вечный двигатель? Нет, конечно. Кончится вода на вершине горы – фуникулер нечем будет заправлять. А оказывается вода на вершине за счет энергии Солнца – вода на земле испаряется, поднимается вверх и в виде дождя или снега падает на вершину горы.



# Об одной олимпиадной задаче по физике

Г. ГАЙДУКОВ, А. РУМЯНЦЕВ

Начнем с такой задачи.

**Задача Иродова.** Три одинаковых шарика, расположенных в вершинах равностороннего треугольника со стороной  $l$ , соединены друг с другом нитями. Заряд и масса каждого шарика равны  $q$  и  $m$ . Одну из нитей пережгли. Найдите максимальную скорость среднего шарика. Силы тяжести нет.

История этой задачи из ставшего уже классическим сборника задач И.Е.Иродова по общей физике для студентов вузов замечательна тем, что спустя десятилетия она расширила «среду обитания» и из вузовских аудиторий распространилась по физическим олимпиадам старшеклассников. При этом, как часто бывает, условие задачи претерпело ряд изменений: масса и заряд среднего шарика стали отличаться от соответствующих равных величин боковых шариков; расположение зарядов из равносторонней конфигурации треугольника превратилось в равнобедренную с заданным углом при вершине. Естественно менялись и вопросы в зависимости от заданных в условии величин. Так, в некоторых вариантах требовалось определить скорости шариков в момент, когда они будут находиться на одной прямой, а также максимальные скорости этих шариков.

Практически все авторы модифицированных задач приводили возможные решения, основываясь на применении законов сохранения импульса и энергии системы шариков, неявно предполагая, что в конфигурации, когда шарик расположены вдоль прямой, их скорости являются максимальными по величине. В данной статье мы проанализируем решение задачи в обобщенной по пара-

метрам системы постановке, фокусируя рассмотрение на вопросе о максимальных величинах скоростей движения шариков.

**Обобщенная задача Иродова.** В вершинах равнобедренного треугольника с длинами боковых сторон  $l$  и углом между ними  $2\theta_0$  находятся три небольших по размерам положительно заряженных шарика, связанных попарно тремя легкими нерастяжимыми и непроводящими нитями. Шарик, находящийся в вершине основания, имеет массу  $m$  и заряд  $q$ . Третий шарик имеет массу  $M$  и заряд  $Q$ . Нить, соединяющую одинаковые шарик, пережигают, и шарик начинают двигаться. Найдите максимальные скорости среднего и боковых шариков. Силы тяжести нет.

## Анализ задачи с использованием законов сохранения импульса и энергии

Обозначим  $\bar{V}$  и  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$  скорости центрального и боковых шариков соответственно. После пережигания нити система шариков будет совершать периодическое колебательное движение. Начальное и промежуточное состояния, а также состояние, соответствующее четверти периода этого движения представлены на рисунке 1. Заметим, что вследствие

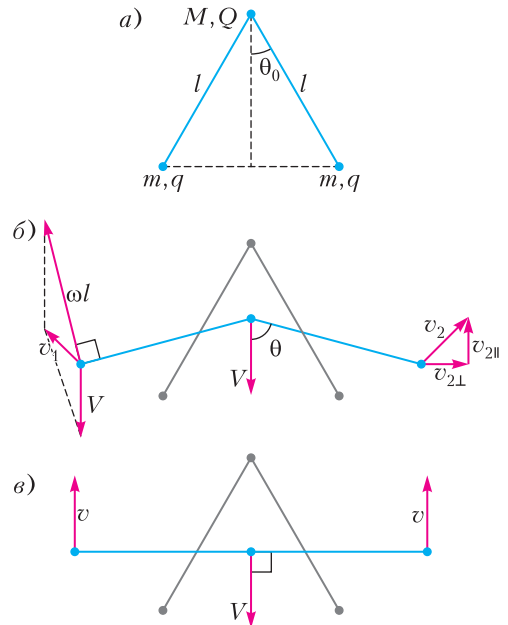


Рис. 1. Положение шариков в начальной конфигурации (а), в промежуточной конфигурации (б) и в линейной конфигурации (в)

симметрии действия электрических сил и сил натяжения нитей на центральный шарик он будет двигаться прямолинейно и ускоренно на всей первой четверти цикла вплоть до линейной конфигурации системы. В этом положении действующая на него результирующая сила обращается в ноль, а величина скорости достигает максимального значения.

Для анализа скоростей запишем законы сохранения импульса и энергии (потенциальной энергии электрического взаимодействия зарядов и кинетической энергии движения шариков) в промежуточной конфигурации (см. рис.1,б):

$$M\bar{V} + m\bar{v}_1 + m\bar{v}_2 = 0,$$

$$\frac{MV^2}{2} + mv^2 = \frac{kq^2}{2l} \left( \frac{1}{\sin \theta_0} - \frac{1}{\sin \theta} \right)$$

и в линейной конфигурации при  $\theta = \pi/2$  (см. рис.1,в):

$$M\bar{V} + 2m\bar{v} = 0,$$

$$\frac{MV^2}{2} + mv^2 = \frac{kq^2}{2l} \left( \frac{1}{\sin \theta_0} - 1 \right),$$

где  $\theta_0$  – значение угла  $\theta$  в начальной конфигурации (см. рис.1,а),  $v = |\bar{v}_1| = |\bar{v}_2|$ ,  $\bar{v}$  – вектор скорости боковых шариков в линейной конфигурации.

В линейной конфигурации скорость среднего шарика имеет максимальное значение

$$V_{\max} = V \left( \theta = \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{\frac{mkq^2}{M(M+2m)l} \left( \frac{1}{\sin \theta_0} - 1 \right)},$$

а скорость боковых шариков выражается формулой

$$v \left( \theta = \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Mkq^2}{m(M+2m)l} \left( \frac{1}{\sin \theta_0} - 1 \right)}.$$

### Особенности движения при разных отношениях масс шариков

В линейной конфигурации ( $\theta = \pi/2$ ) достигается наибольшее расстояние между крайними шариками, а значит, и кинетическая энергия движения всех шариков максимальная. Часто это интерпретируют как утверждение, что в таком положении достигается максимум скорости и боковых шариков тоже. Однако данная интерпретация

оказывается ошибочной. Например, может реализовываться неожиданная ситуация, в которой скорость боковых шариков в линейной конфигурации будет иметь минимальное значение.

Для пояснения введем параметр  $\gamma = M/(2m)$  и рассмотрим предельные случаи большой и малой масс центрального шарика. Так, при  $\gamma \gg 1$  центральный шарик практически неподвижен и боковые шарики, двигаясь по круговым траекториям радиусом  $l$ , проходят линейную конфигурацию с максимальными скоростями (рис.2,а). В противоположном случае  $\gamma \ll 1$  боковые шарики движутся практически прямолинейно (вдоль пунктирной линии на рисунке 2,б). Когда центральный шарик движется сверху вниз и проходит через точку  $A$ , боковые шарики расходятся, а в момент прохождения точки  $B$  они уже движутся навстречу друг другу. Очевидно, что в линейной конфигурации их скорость при этом обращается в ноль. Именно этот момент и соответствует минимуму скорости; можно сказать, что шарики испытывают упругое отражение. Отметим, что поскольку

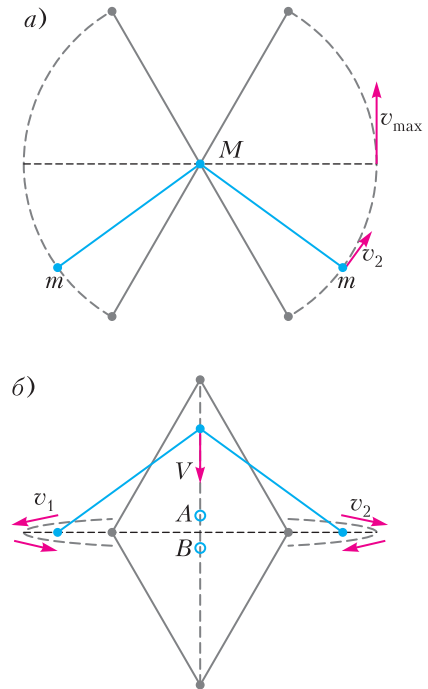


Рис. 2. Схематическое изображение системы шариков при  $\gamma \rightarrow \infty$  (а) и при  $\gamma \rightarrow 0$  (б)



при  $\gamma \ll 1$  скорость минимальна в начальной и линейной конфигурациях, то ее максимум имеет место в некотором промежуточном положении.

Визуализировать изменение характера движения системы при варьировании параметра  $\gamma$  можно также с помощью компьютерного моделирования, в котором для каждого шарика численно решаются уравнения движения Ньютона с учетом наложенных на систему связей. Результат моделирования, проведенного с помощью пакета программ LAMMPS (<https://lammps.sandia.gov/>), можно найти по ссылке <https://www.youtube.com/watch?v=TaWrbTs2aZk>.

Таким образом, из рассмотрения предельных случаев и проведенного моделирования вытекает, что боковые шарики могут проходить линейную конфигурацию как с максимальной, так и с минимальной скоростью. Для произвольного отношения масс шариков будет реализовываться одна из двух ситуаций: либо максимум скорости в промежуточном положении и минимум в линейной конфигурации, либо единственный экстремум в линейной конфигурации, представляющий собой максимум. Точные соотношения между значениями параметров  $\gamma$  и  $\theta_0$ , при которых реализуется каждый из этих сценариев, будут установлены позже.

Напомним, что экстремум скорости достигается, когда проекция действующей на шарик силы на направление его движения становится равной нулю. В случае центрального шарика векторы действующей на него силы и скорости всегда коллинеарные, и

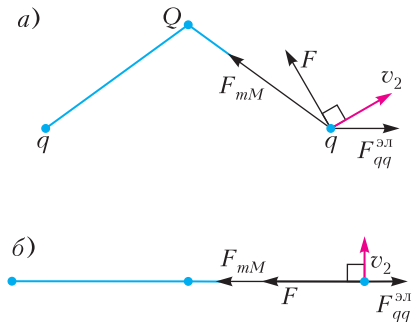


Рис. 3. Действующие на боковой шарик силы в положении, когда экстремум скорости достигается в промежуточной конфигурации (а) и в линейной конфигурации (б)

экстремум реализуется только в линейной конфигурации ( $dV/dt = 0|_{\theta=\pi/2}$ ) и представляет собой максимум.

На рисунке 3 наглядно показаны ситуации, в которых экстремум скорости бокового шарика достигается в промежуточной (а) и линейной (б) конфигурациях. Сила  $\vec{F}$ , действующая на боковой шарик, представляет собой сумму электрических сил, вызванных взаимодействием с центральным ( $\vec{F}_{qQ}^{эл}$ ) и вторым боковым шариком ( $\vec{F}_{qq}$ ), а также силы натяжения нити  $\vec{F}_n$ . Так как  $\vec{F}_{qQ}^{эл}$  и  $\vec{F}_n$  действуют вдоль одной прямой, для их суммы введено обозначение  $\vec{F}_{mM} = \vec{F}_{qQ}^{эл} + \vec{F}_n$ .

### Связь скоростей центрального и бокового шариков

Для дальнейшего решения обобщенной задачи найдем соотношения между скоростями шариков  $v$  и  $V$  как функцию их масс  $m$ ,  $M$  и угла  $\theta$ . Представим скорость движения боковых шариков как сложение векторов скорости  $\vec{V}$  конца соединенной с центральным шариком нити и линейной скорости  $\omega l$  кругового вращения с угловой скоростью  $\omega = \Delta\theta/\Delta t$  относительно оси, проходящей через этот конец нити (см. скорость левого шарика на рисунке 1, б). Такое представление соответствует переходу в систему отсчета, движущуюся вместе с центральным шариком, в которой траектория бокового шарика будет представлять собой окружность.

Из векторного представления скорости по теореме косинусов получим

$$v^2 = V^2 + (\omega l)^2 - 2\omega l V \sin \theta = V^2 \cos^2 \theta + (\omega l - V \sin \theta)^2,$$

а из закона сохранения импульса вдоль оси симметрии найдем величину скорости вращения  $\omega l$  как функцию  $\theta$ :

$$MV + 2m(V - \omega l \sin \theta) = 0,$$

откуда следует

$$\omega l = \frac{(M + 2m)V}{2m \sin \theta}.$$

Подставляя  $\omega l$  в выражение для  $v^2$ , получим связь между скоростями шариков в произ-

вольной конфигурации, задаваемой углом  $\theta$ :

$$v^2 = V^2 \left( \left( \frac{M+2m}{2m} \right)^2 \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{M+m}{m} \right).$$

Исключая  $V$  из последнего уравнения и из формулы для закона сохранения энергии, окончательно получим выражение, которое описывает зависимость  $v$  от  $\theta$ :

$$v^2(\theta) = \frac{kq^2}{2ml} \left( \frac{1}{\sin \theta_0} - \frac{1}{\sin \theta} \right) \left( \frac{1 - (1+2\gamma) \left( \frac{\sin \theta}{1+\gamma} \right)^2}{1 - (1+\gamma) \left( \frac{\sin \theta}{1+\gamma} \right)^2} \right),$$

$$\gamma = \frac{M}{2m}.$$

### Экстремум скорости бокового шарика в линейной конфигурации

Полученное точное соотношение для  $v^2$  позволяет исследовать характер экстремума  $v^2(\theta)$  при  $\theta = \pi/2$ , представив зависимость  $\sin \theta$  как функцию малого угла отклонения  $\delta$  ( $\theta = \pi/2 + \delta$ ) от прямолинейной конфигурации. Действительно,  $\sin \theta = \sin(\pi/2 + \delta) = \cos \delta \approx 1 - \delta^2/2 + \dots$ , при этом  $1/\sin \theta = 1 + \delta^2/2 + \dots$  и  $\sin^2 \theta = 1 - \delta^2 + \dots$ . Заменяя выражения для синусов приближенными формулами, в первом приближении по  $\delta^2$  для квадрата скорости получим

$$v^2 \left( \frac{\pi}{2} + \delta \right) = v_m^2 (1 - D(\gamma, \theta_0) \delta^2),$$

где

$$v_m^2 = \frac{kq^2}{2ml} \frac{\gamma}{\gamma + 1} \left( \frac{1 - \sin \theta_0}{\sin \theta_0} \right),$$

а величина коэффициента  $D$  перед  $\delta^2$  определяется заданными значениями параметров  $\gamma$ ,  $\theta_0$  обобщенной задачи и равна

$$D(\gamma, \theta_0) = \frac{\sin \theta_0}{2(1 - \sin \theta_0)} - \frac{1 + \gamma}{\gamma^2}.$$

Из этого представления следует, что если  $D(\gamma, \theta_0) > 0$ , то  $v^2$  при  $\theta = \pi/2$  достигает максимума, а если  $D(\gamma, \theta_0) < 0$ , то  $v^2$  при этом угле достигает локального минимума:

$$v^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) = v_m^2 = \begin{cases} v_{\max}^2, & \text{если } D(\gamma, \theta_0) > 0, \\ v_{\min}^2, & \text{если } D(\gamma, \theta_0) < 0. \end{cases}$$

Остается найти величину максимальной скорости бокового шарика, которая достигается в первой четверти цикла при  $\theta_0 < \theta < \pi/2$  для случая  $D(\gamma, \theta_0) < 0$ . Для удобства анализа введем новую переменную  $z = (1 + \gamma)/\sin \theta$ , при подстановке которой в выражение для  $v^2$ , получим зависимость вида

$$v^2(z) = \frac{kq^2}{2ml(1+\gamma)} \left( \frac{1+\gamma}{\sin \theta_0} - z \right) \left( \frac{z^2 - (1+2\gamma)}{z^2 - (1+\gamma)} \right),$$

$$z \in \left( 1 + \gamma, \frac{1+\gamma}{\sin \theta_0} \right).$$

Условие максимума  $v^2$  внутри указанного интервала приводит к соотношению

$$\frac{dv^2}{d\theta} = \frac{dv^2}{dz} \frac{dz}{d\theta} = 0,$$

которое сводится к уравнению

$$z^4 - (2 + \gamma)z^2 - \frac{2\gamma(1+\gamma)}{\sin \theta_0}z + (1+2\gamma)(1+\gamma) = 0.$$

Это уравнение четвертой степени имеет четыре корня, алгебраические выражения которых в общем случае чрезвычайно громоздки. Поэтому отметим только наиболее существенные свойства этих корней для нашей физической задачи. Два корня являются комплексно сопряженными, а из двух действительных корней только один удовлетворяет условию  $z_m = (1 + \gamma)/\sin \theta_m > 1 + \gamma$ , где  $\theta_m$  – угол, при котором достигается максимальная скорость.

Таким образом, при  $D(\gamma, \theta_0) < 0$  получим

$$v_{\max}^2 = v^2(z_m),$$

где  $z_m$  является корнем уравнения четвертой степени и  $z_m > 1 + \gamma$ .

### Графическое представление результатов анализа

Теперь представим полученные результаты, используя для наглядности диаграмму параметров  $\gamma$ ,  $\theta_0$  обобщенной задачи Иродова (рис.4). Условие  $D(\gamma, \theta_0) = 0$  разбивает множество возможных решений на две области: внутреннюю, в которой  $D(\gamma, \theta_0) > 0$  и значения скоростей центрального и боковых шариков при линейной конфигурации ( $\theta = \pi/2$ ) достигают максимумов, и внешнюю, в которой  $D(\gamma, \theta_0) < 0$  и центральный шарик проходит линейную конфигурацию с макси-

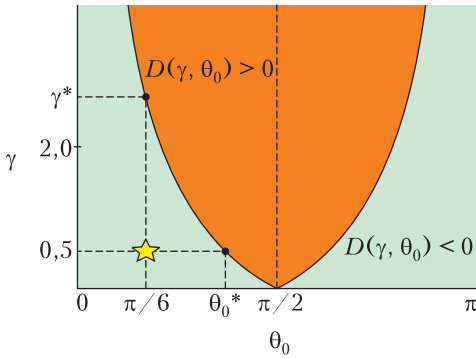


Рис. 4. Диаграмма значений функции  $D(\gamma, \theta_0)$ ; звездочкой показана точка, соответствующая первоначальному варианту задачи

мальной скоростью, а скорости боковых шариков имеют локальный минимум.

Так, в оригинальном варианте условия задачи  $\gamma = 1/2$ ,  $\theta_0 = \pi/6$  и соответствующая точка диаграммы (выделена звездочкой) лежит в области  $D(\gamma, \theta_0) < 0$ . Зависимость кинетической энергии бокового шарика  $T = T(\theta) = mv^2(\theta)/2$  для этих параметров представлена на рисунке 5,а, где для удобства выполнена нормировка кинетической энергии на величину  $U_0 = kq^2/l$ . Конфигурация системы при  $\theta = \pi/2$  характеризуется локальным минимумом скорости боковых шариков (см. рис.3,б), максимальная же скорость достигается при  $\theta_m = 0,985$  рад =  $= 56,4^\circ$  (см. рис.3,а). На рисунке 5,а также приведены графики  $T(\theta)$  для других значений параметра  $\gamma$ . Видно, что при уменьшении  $\gamma$  угол  $\theta_m$  увеличивается и в пределе  $\gamma \rightarrow 0$  стремится к  $\theta_m = \pi/2$ . С ростом  $\gamma$ , при достижении  $\gamma \geq \gamma^* \approx 2,74$ , величина  $D(\gamma, \theta_0)$  становится неотрицательной и максимум скорости боковых шариков соответствует углу  $\pi/2$ . Отметим, что кривые для  $\gamma = 10^5$  и  $\gamma = 10^{-5}$ , соответствующие ситуациям на рисунках 2,а и 2,б, практически совпадают, за исключением резкого провала при  $\theta = \pi/2$  в случае  $\gamma = 10^{-5}$ , отвечающего «упругому отражению», описанному ранее. Для лучшей видимости кривая  $\gamma = 10^5$  показана красными кружками.

Если же в первоначальном условии задачи будет меняться угол  $\theta_0$  (рис.5,б), то с его ростом  $\theta_m$  также увеличивается; при  $\theta_0^* = 0,37\pi$  величина  $D(\gamma, \theta_0)$  обращается в ноль и максимальная скорость бокового

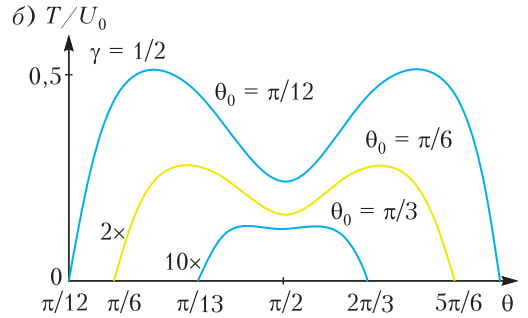
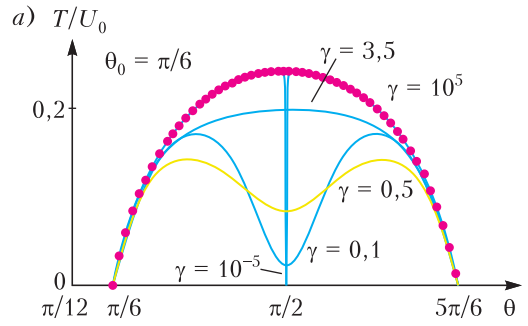


Рис. 5. Графики нормированной кинетической энергии бокового шарика в зависимости от угла  $\theta$  при различных значениях параметров  $\gamma$  (а) и  $\theta_0$  (б); для лучшей видимости графики для  $\theta_0 = \pi/6$  и  $\theta_0 = \pi/3$  увеличены в два и десять раз соответственно. Желтым цветом выделены кривые, соответствующие первоначальному варианту задачи

шарика соответствует конфигурации  $\theta = \pi/2$  при  $\theta_0 \geq \theta_0^* = 0,37\pi$ . Также наглядно видно, что графикам с малыми значениями  $\theta_0$  соответствует большая величина кинетической энергии боковых шариков, так как кинетическая энергия системы равна убыли потенциальной энергии начальной конфигурации  $kq^2/(2l(1/\sin \theta_0 - 1/\sin \theta))$  и уменьшается при увеличении  $\theta_0$ . Случай  $\theta_0 = \pi/2$  является особым – при нем система находится в состоянии равновесия.

Таким образом, в этой статье не только получено решение обобщенной задачи Иродова, но и сформулирован критерий ( $D(\gamma, \theta_0) \leq 0$ ) того, что при определенных значениях масс шариков и угла при вершине треугольника в начальном положении боковые шарики проходят линейную конфигурацию с минимальной скоростью.

В заключение, для заинтересовавшихся читателей предлагается такая задача.

### Задача для самостоятельного решения

Три одинаковых заряженных шарика, расположенных в вершинах равнобедренного треугольника, соединены друг с другом нерастяжимыми нитями. Нить, соединяющую шарики в основании треугольника, пережгли. В момент времени, когда шарик, движущийся прямолинейно, достиг максимальной скорости, скорости боковых шариков оказались минимальными. В этом состоянии системы кинетическая энергия движения шариков оказалась в  $\eta = 2,4$  раза меньше энергии электростатического взаимодействия

шариков. Во сколько раз надо изменить массу центрального шарика, чтобы скорости всех шариков одновременно достигали максимальных значений? (Ответ:  $M \geq 10m$ .)

Авторы хотели бы поблагодарить студентов Национального исследовательского университета «МИЭТ», участвовавших в обсуждении рассматриваемой задачи в рамках факультативного семинара по физике, а также профессоров Н.И.Боргардта и И.Н.Горбатого за внимательное прочтение рукописи статьи и внесенные замечания.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

# Подобие с медианами

Д.ШВЕЦОВ

*Я не боюсь противника, который один раз тренировал тысячу разных приемов. Я боюсь воина, который тысячу раз тренировал один удар.*

Брюс Ли

### Основные мотивы

Наша статья посвящена такому простому, но эффективному наблюдению: в подобных треугольниках соответствующие медианы образуют равные углы с соответствующими сторонами (рис.1).

Давайте рассмотрим несколько простых примеров на эту идею.

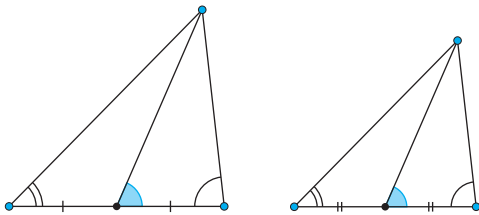


Рис. 1

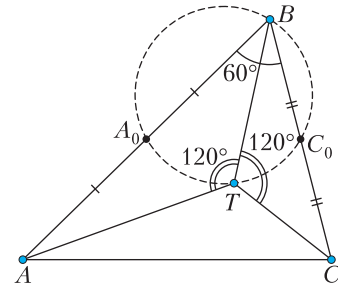


Рис. 2

**1.** В треугольнике  $ABC$   $\angle B = 60^\circ$  (рис.2). Внутри треугольника выбрали точку  $T$  такую, что  $\angle ATB = \angle CTB = 120^\circ$ ;  $A_0, C_0$  – середины сторон  $AB, BC$ . Докажите, что точки  $A_0, T, C_0, B$  лежат на одной окружности.

Наивные попытки расписать углы тут не приводят сразу к решению, однако счетом углов легко убедиться, что треугольники  $ABT$  и  $BCT$  подобны. Действительно, из суммы углов треугольника находим, что  $\angle BAT + \angle ABT = 60^\circ = \angle ABT + \angle TBC$ , следовательно,  $\angle BAT = \angle TBC$ . Итак, мы получили пару подобных треугольников  $ABT$  и  $BCT$ , в которых проведем медианы  $TA_0$  и  $TC_0$ . Тогда медианы в подобных треугольниках  $ABT$  и  $BCT$  дают нам равные углы:  $\angle AA_0T = \angle TC_0B$  (рис.3). Таким образом, в четырехугольнике  $A_0BC_0T$  сумма противоположных углов  $\angle TA_0B$  и  $\angle TC_0B$  составляет  $180^\circ$ , поэтому точки  $A_0, T, C_0, B$  лежат на одной окружности.



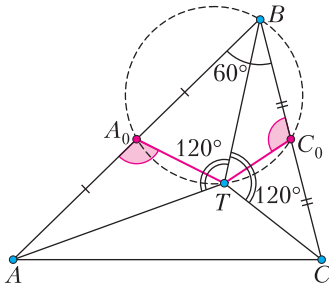


Рис. 3

Еще один пример.

2. В прямоугольнике  $ABCD$  опущен перпендикуляр  $BH$  на диагональ  $AC$  (рис.4). Точки  $M$  и  $N$  – середины отрезков  $AH$  и  $CD$  соответственно. Докажите, что угол  $BMN$  прямой.

В четырехугольнике  $BCNM$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ , и нас просят доказать то же про противоположный ему угол  $BMN$ . Другими словами, нам нужно показать, что четырехугольник  $BCNM$  вписанный (рис.5). А это, в свою очередь, можно сделать, доказав равенство углов  $BMC$  и  $BNC$ .

Теперь заметим, что  $BM$  является медианой в прямоугольном треугольнике  $ABH$ , а отрезок  $BN$  – медианой в прямоугольном треугольнике  $BCD$  (рис.6). Но прямоугольные треугольники  $ABH$  и  $DBC$  подобны, потому что острые углы  $ABC$  и  $BDC$  равны.

Тем самым мы показали, что углы  $BMH$  и  $BNC$  равны, что и завершает доказательство.

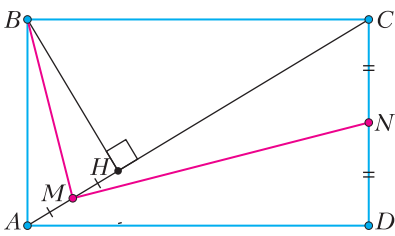


Рис. 4

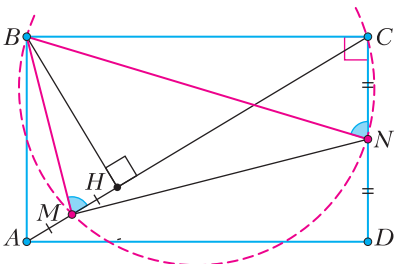


Рис. 5

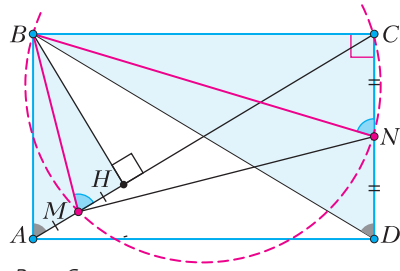


Рис. 6

### Секреты олимпиадной кухни

Примеры выше показывают, что рассмотрение медиан в подобных треугольниках может быть очень плодотворным. Более того, можно даже самому придумывать «новые» задачи, если только слегка спрятать подобие. Рассмотрим такую классическую конструкцию: в треугольнике  $ABC$  провели высоты  $AA_1$  и  $CC_1$ ; точки  $M$  и  $N$  – середины отрезков  $AC$  и  $A_1C_1$  соответственно (рис.7).

Напомним, что  $C_1M = \frac{1}{2} AC = A_1M$  как медианы в прямоугольных треугольниках, проведенные к гипотенузе. Следовательно, треугольник  $A_1MC_1$  равнобедренный и отрезок  $MN$  является в нем не только медианой, но и высотой:  $MN \perp A_1C_1$  (рис.8).

Теперь давайте, используя перпендикулярность отрезков  $MN$  и  $A_1C_1$ , попробуем

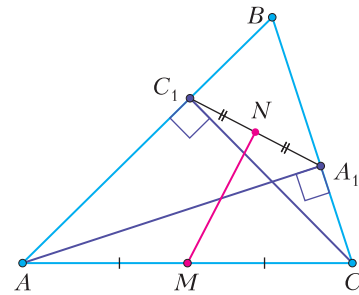


Рис. 7

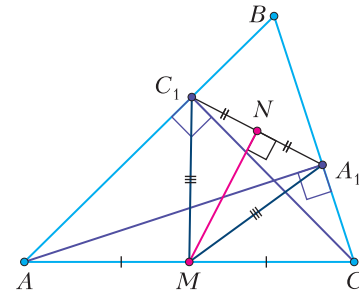
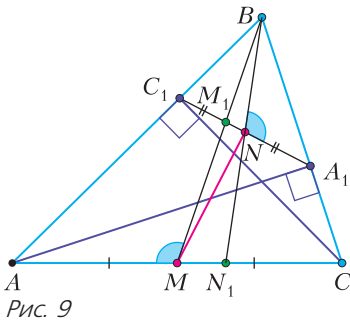


Рис. 8



придумать «новую» задачу. В конструкции имеется пара подобных треугольников  $ABC$  и  $A_1BC_1$  (почему?), поэтому медианы  $BM$  и  $BN$  дадут нам равные углы:  $\angle A_1NB = \angle AMB$  (рис.9).

Равенство углов  $AMB$  и  $BNA_1$  дает вписанность четырехугольника  $M_1NN_1M$ , где  $M_1$  – точка пересечения прямых  $BM$  и  $A_1C_1$ , а  $N_1$  – прямых  $BN$  и  $AC$  (рис.10).

С другой стороны, мы уже выяснили, что угол  $M_1NM$  прямой, поэтому и угол  $M_1N_1M$  тоже прямой. Тем самым, мы придумали такую новую задачу:

**3.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$  и  $CC_1$ ; точки  $M, N$  – середины отрезков  $AC$  и  $A_1C_1$  соответственно. Прямые  $A_1C_1$  и  $BM$  пересекаются в точке  $M_1$ , а прямые  $BN$  и  $AC$  – в точке  $N_1$ . Докажите, что  $M_1N_1 \perp AC$ .

Давайте продолжим. В конструкции с высотами есть еще одна пара подобных треугольников – треугольники  $AHC$  и  $A_1HC_1$ , где точка  $H$  – ортоцентр треугольника  $ABC$  (рис.11).

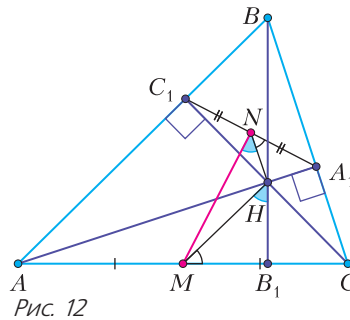
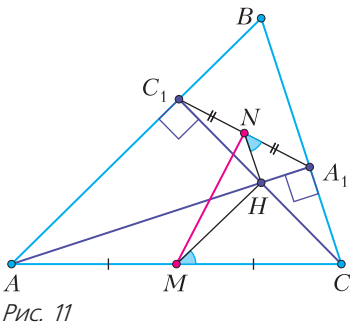
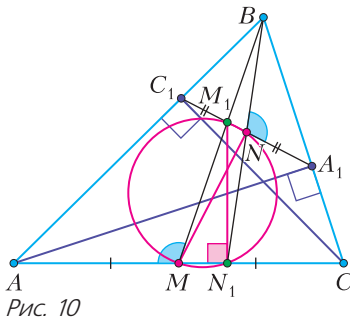
Тут медианы  $HM$  и  $HN$  в подобных треугольниках  $AHC$  и  $A_1HC_1$  дают нам равенство углов  $HMC$  и  $HNA_1$ . Обозначим эти равные углы через  $\alpha$ , тогда  $\angle MNH = 90^\circ - \alpha$ . С другой стороны, угол такой же величины  $90^\circ - \alpha$  имеется в треугольнике  $MHB_1$ , где  $B_1$  – основание высоты треугольника  $ABC$ , т.е.  $\angle MNH = \angle MHB_1$  (рис.12).

Равенство этих углов можно переформулировать таким образом:

**4.** В треугольнике  $ABC$  высоты  $AA_1$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $H$ . Точки  $M$  и  $N$  – середины отрезков  $AC$  и  $A_1C_1$  соответственно. Докажите, что прямая  $BB_1$  касается описанной окружности треугольника  $NHM$ .

Напомним про эту конструкцию еще и такой факт: прямые  $MC_1$  и  $MA_1$  являются касательными к описанной окружности треугольника  $A_1BC_1$  (рис.13).

С другой стороны, треугольники  $ABC$  и  $A_1BC_1$  подобны, а отрезки  $BM$  и  $BN$  – медианы в них, что дает нам равенство углов  $ABM$  и  $A_1BN$ . Теперь, если отбросить все лишнее, то мы доказали основное свойство-определение симедианы:



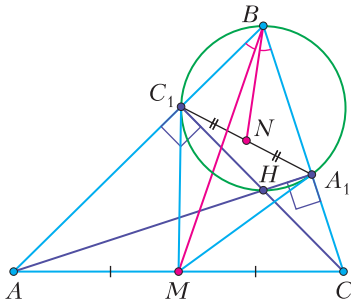


Рис. 13

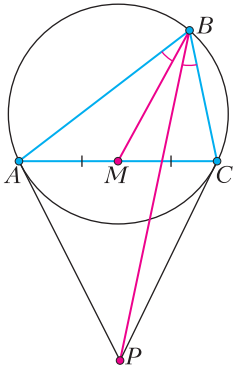


Рис. 14

5. Касательные, проведенные в вершинах  $A$  и  $C$  к описанной окружности треугольника  $ABC$ , пересекаются в точке  $P$ . Тогда прямая  $BP$  симметрична медиане  $BM$  относительно биссектрисы угла  $ABC$  (рис. 14).

Прямую  $BP$  и называют симедианой треугольника. О многих интересных свойствах симедианы можно прочитать в замечательных статьях [1], [2].

### Трудный пример

Под занавес давайте рассмотрим такую непростую задачу с Всероссийской олимпиады, в которой переплетается сразу несколько классических сюжетов:

6. В треугольнике  $ABC$  ( $AB < BC$ ) точка  $I$  – центр вписанной окружности,  $M$  – середина стороны  $AC$ ,  $N$  – середина дуги  $ABC$  описанной окружности (рис. 15). Докажите, что  $\angle IMA = \angle INB$ .

Медиана  $IM$  треугольника  $AIC$  видна сразу. А как быть с отрезком  $IN$ ? В каком треугольнике отрезок  $IN$  мог бы быть медианой? Намекнуть на нужное направление поиска может тот факт, что  $BN$  является внешней биссектрисой угла  $B$  треугольника  $ABC$ , ведь точка  $N$  – середина дуги  $ABC$ . Поэтому давайте дополним рисунок центра-

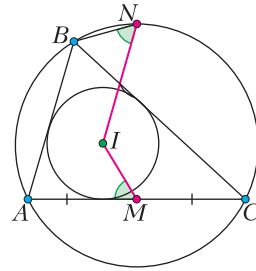


Рис. 15

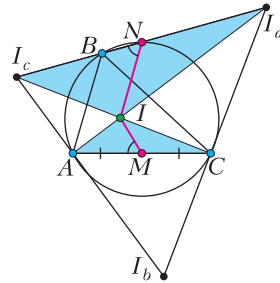


Рис. 16

ми внеписанных окружностей треугольника  $ABC$  – точками  $I_a, I_b, I_c$  (рис. 16).

Тогда точки  $A, B$  и  $C$  в треугольнике  $I_a I_b I_c$  являются основаниями высот (почему?). Следовательно, описанная окружность треугольника  $ABC$  в треугольнике  $I_a I_b I_c$  проходит через основания высот, т.е. является окружностью девяти точек этого треугольника. Как известно, окружность девяти точек проходит и через середины сторон треугольника. Откуда заключаем, что точка  $N$  является серединой отрезка  $I_a I_c$ . Теперь у нас возникают два подобных треугольника  $AIC$  и  $I_a I_b I_c$ , медианы  $IM$  и  $IN$  которых и дают желаемое равенство углов.

Прочитав решение выше, читатель, скорее всего, справедливо возмутится: «Как до такого решения можно было догадаться?» На это заметим, что данная задача, трудная сама по себе, послужила толчком к созданию отдельного эффектного и эффективного метода решения задач, которому посвящена увлекательная статья [3].

### Упражнения

В качестве первого упражнения приглашаем читателя проследить «решение» одной из самых красивых задач элементарной геометрии нашим методом.

1 (задача о бабочке). Через середину  $M$  хорды  $PQ$  окружности провели две произвольные хорды  $AB$  и  $CD$  (рис. 17). Отрезки  $PM$  и  $AC$  пересе-

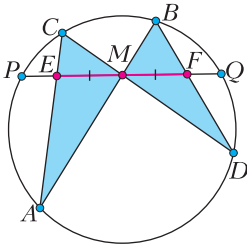


Рис. 17

каются в точке  $E$ , а отрезки  $BD$  и  $MQ$  – в точке  $F$ . Докажите, что  $EM = MF$ .

Доказательство в духе древних греков приведено на рисунках 18–20. Эстетическая глубина этой задачи заставляет искать все новые и новые

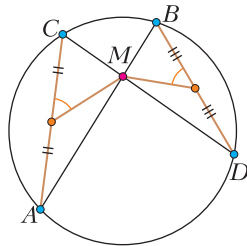


Рис. 18

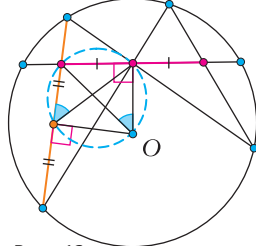


Рис. 19

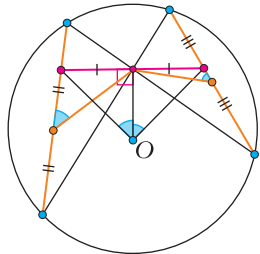


Рис. 20

решения. Большую коллекцию различных доказательств, завораживающие вариации и обобщения содержатся в замечательной статье [4], которая рекомендуется к прочтению всем любителям геометрии!

**2.** Дан вписанный четырехугольник  $ABCD$  (рис. 21). Продолжения его противоположных сторон пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Пусть  $K$  и  $N$  – середины диагоналей. Докажите, что сумма углов  $PKQ$  и  $PNQ$  равна  $180^\circ$ .

**3.** Касательная в точке  $A$  к описанной окружности треугольника  $ABC$  пересекает продолжение стороны  $BC$  за точку  $B$  в точке  $K$  (рис. 22);  $L$  – середина  $AC$ , а точка  $M$  – середина отрезка  $AB$ . Докажите, что  $\angle AKM = \angle CKL$ .

**4.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  из середины  $H$  основания  $BC$  опущен перпендикуляр  $HE$  на боковую сторону  $AC$  (рис. 23);  $M$  – середина отрезка  $HE$ . Докажите, что прямые  $AM$  и  $BE$  перпендикулярны.

**5.** Дан треугольник  $ABC$  (рис. 24). Обозначим через  $M$  середину стороны  $AC$ , а через  $P$  – середину отрезка  $CM$ . Описанная окружность треугольника  $ABP$  пересекает сторону  $BC$  во внутренней точке  $Q$ . Докажите, что  $\angle ABM = \angle MQP$ .

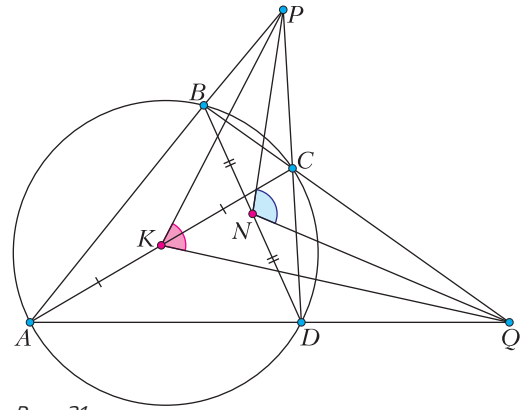


Рис. 21

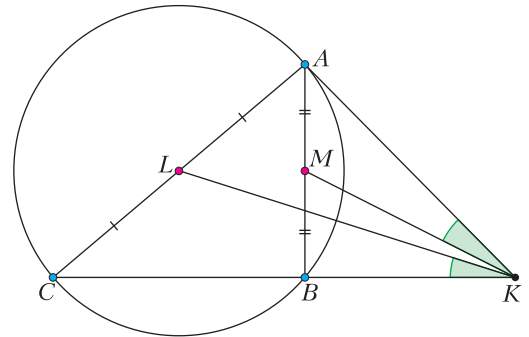


Рис. 22

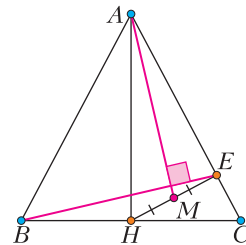


Рис. 23

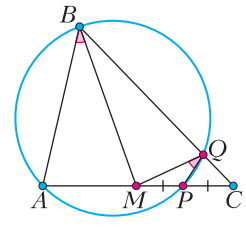


Рис. 24

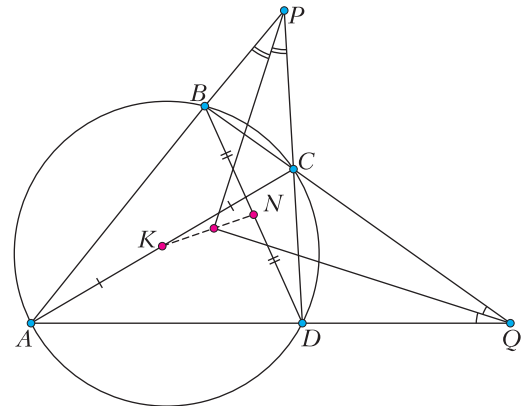


Рис. 25



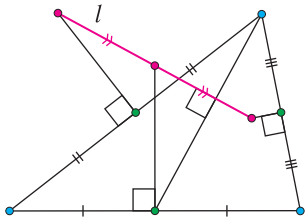


Рис. 26

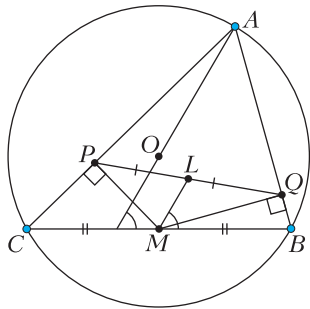


Рис. 27

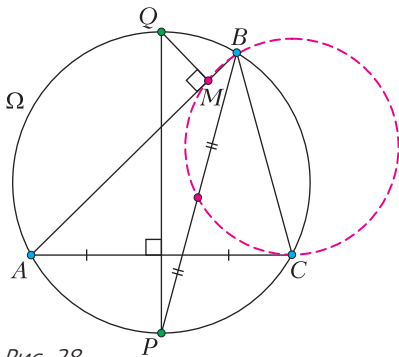


Рис. 28

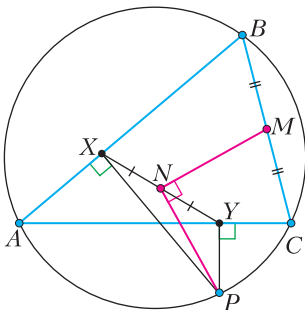


Рис. 29

6. Дан вписанный четырехугольник  $ABCD$  (рис.25). Противоположные стороны  $AB$  и  $CD$  при продолжении пересекаются в точке  $P$ , стороны  $BC$  и  $AD$  – в точке  $Q$ . Докажите, что биссектрисы углов  $BPC$  и  $BQA$  пересекаются на прямой, проходящей через середины  $AC$  и  $BD$ .

7. Прямая  $l$  перпендикулярна одной из медиан треугольника (рис.26). Серединные перпендикуляры к сторонам этого треугольника пересекают прямую  $l$  в трех точках. Докажите, что одна из них является серединой отрезка, образованного двумя оставшимися.

8. Пусть  $M$  – середина стороны  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$ ; точка  $O$  – центр описанной окружности (рис.27);  $P$  и  $Q$  – основания перпендикуляров, опущенных из точки  $M$  на стороны  $AC$  и  $AB$ . Докажите, что медиана  $ML$  треугольника  $PMQ$  параллельна прямой  $AO$ .

9. В окружность  $\Omega$  вписан остроугольный треугольник  $ABC$ , в котором  $AB > BC$  (рис.28). Пусть  $P$  и  $Q$  – середины меньшей и большей дуг  $AC$  окружности  $\Omega$  соответственно, а  $M$  – основание перпендикуляра, опущенного из точки  $Q$  на отрезок  $AB$ . Докажите, что окружность, описанная около треугольника  $BMC$ , делит пополам отрезок  $BP$ .

10. Пусть  $P$  – произвольная точка описанной окружности треугольника  $ABC$ , точки  $X$  и  $Y$  – проекции точки  $P$  на прямые  $AB$  и  $AC$ , а точки  $N$ ,  $M$  – середины отрезков  $XY$  и  $BC$  соответственно (рис.29). Докажите, что  $\angle PNM = 90^\circ$ .

### Закключение

В статье мы обсудили трудные задачи, придумали несколько новых – и все это на базе одного приема, в основе которого лежит идея *преобразования подобия*. Об этом (и многом другом!) можно прочитать в замечательной книге И. М. Яглома «Геометрические преобразования» [6].

### Литература

1. Ю.Блинков. Симедиана. – «Квант», 2015, №2.
2. А.Карлюченко, Г.Филипповский. О касательных, проведенных в двух вершинах треугольника. – [https://geometry.ru/articles/symmedian\\_f\\_k.pdf](https://geometry.ru/articles/symmedian_f_k.pdf)
3. А.Полянский. Из пушки по воробьям. – «Квант», 2012, №2.
4. В.Протасов. О двух велосипедистах и вишневой косточке. – «Квант», 2008, №8.
5. А.Спивак. Десять бабочек. – [https://geometry.ru/articles/spivak\\_butterfly.pdf](https://geometry.ru/articles/spivak_butterfly.pdf)
6. И.Яглом. Геометрические преобразования. Том 1. – <https://math.ru/lib/bib-mat-kr/7>

# Заключительный этап XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике

Заключительный этап Всероссийской математической олимпиады школьников прошел в Тюмени с 16 по 23 апреля 2021 года. Напомним, что предыдущий заключительный этап состоялся ровно два года назад, а в 2020 году заключительный этап не проводился из-за пандемии. Эти обстоятельства повлияли на структуру отбора на заключительный этап этого года; в частности, все школьники невыпускных классов, набравшие на региональном этапе 2020 года количество баллов, необходимое для прохода на заключительный этап, были автоматически приглашены в Тюмень в 2021 году. Все это отразилось на количестве участников олимпиады – оно составило 516 человек, что почти в полтора раза превосходит обычные для последних лет цифры.

Пандемия внесла и другие коррективы. Программа этого года для участников олимпиады была намного короче, чем обычно: показ работ и закрытие прошли уже в дистанционном формате, а некоторые делегации покидали Тюмень почти сразу после окончания второго тура.

Олимпиада проводилась на базе Тюменского индустриального университета. Организаторы старались и работали слаженно. В программу олимпиады были традиционно включены научно-популярные лекции представителей ведущих университетов страны.

Олимпиада порадовала прежде всего тем, что она состоялась, причем в полноценном очном формате. И школьники, и руководители делегаций соскучились по мероприятиям такого уровня и по задачам такой сложности. К слову, варианты заданий этого года оказались далеко не самыми простыми даже в сравнении с заключительными этапами прошлых лет. Оценить количественно трудность задач олимпиады может помочь следующая таблица (решившим задачу здесь считаем участника, получившего за эту задачу 5, 6 или 7 баллов из 7 возможных).

## 9 класс

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8
Количество участников (из 178), решивших задачу	162	59	79	17	161	35	5	6

## 10 класс

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8
Количество участников (из 172), решивших задачу	155	105	10	2	144	68	7	1

## 11 класс

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8
Количество участников (из 166), решивших задачу	152	122	30	14	132	119	36	6

Ниже приведены условия задач и список победителей заключительного этапа XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике.

## Условия задач

### 9 класс

**1.** На окружности отмечено 1000 точек, каждая окрашена в один из  $k$  цветов. Оказалось, что среди любых пяти попарно пересекающихся отрезков, концами которых являются 10 различных отмеченных точек, найдутся хотя бы три отрезка, у каждого из которых концы имеют разные цвета. При каком наименьшем  $k$  это возможно?

*С.Берлов*

**2.** Пусть  $n$  – натуральное число. Целое число  $a > 2$  назовем  *$n$ -разложимым*, если  $a^n - 2^n$  делится на каждое число вида  $a^d + 2^d$ , где  $d$  – натуральный делитель  $n$ , отличный от  $n$ .

Найдите все составные натуральные  $n$ , для которых существует  $n$ -разложимое число.

*С.Кудря*

**3.** На прямой отмечено  $n + 1$  различных отрезков; одна из точек прямой принадлежит всем этим отрезкам. Докажите, что среди отмеченных отрезков можно выбрать различные отрезки  $I$  и  $J$ , пересекающиеся по отрезку длины не меньше  $\frac{n-1}{n}d$ , где  $d$  — длина отрезка  $I$ .

*И.Богданов, В.Уфнарковский*

**4.** На стороне  $AB$  остроугольного треугольника  $ABC$  отмечена точка  $D$ , а на продолжении стороны  $BC$  за точку  $C$  — точка  $E$ . Оказалось, что прямая, проходящая через  $E$  и параллельная  $AB$ , касается окружности, описанной около треугольника  $ADC$ . Докажите, что одна из касательных, проведенных из точки  $E$  к описанной окружности треугольника  $BDC$ , отсекает от угла  $ABE$  треугольник, подобный треугольнику  $ABC$ .

*А.Кузнецов, С.Берлов*

**5.** Числа  $b > 0$  и  $a$  таковы, что квадратный трехчлен  $x^2 + ax + b$  имеет два различных корня, ровно один из которых лежит на отрезке  $[-1; 1]$ . Докажите, что ровно один из этих корней лежит в интервале  $(-b; b)$ .

*А.Храбров*

**6.** Внутри неравностороннего остроугольного треугольника  $ABC$ , в котором  $\angle ABC = 60^\circ$ , отмечена точка  $T$  так, что  $\angle ATB = \angle BTC = \angle ATC = 120^\circ$ . Медианы треугольника пересекаются в точке  $M$ . Прямая  $TM$  пересекает вторично окружность, описанную около треугольника  $ATC$ , в точке  $K$ . Найдите  $TM/MK$ .

*А.Кузнецов*

**7.** См. задачу М2657 «Задачника «Кванта»».

**8.** Сотне мудрецов предложили следующее испытание. Их по очереди (в заранее известном порядке) приводят в зал. В зале зритель предлагает мудрецу на выбор каких-то два различных числа из набора 1, 2, 3. Мудрец выбирает ровно одно из них, сообщает выбранное число зрителю и уходит из зала. При этом до своего выбора мудрец имеет право узнать у зрителя,

какое из чисел выбрал каждый из двух предыдущих мудрецов (второй мудрец имеет право узнать про первого). Во время испытания любое общение между мудрецами запрещено. Если в конце сумма всех 100 чисел, выбранных мудрецами, окажется равной 200, то мудрецы провалили испытание; иначе они его выдержали. Докажите, что мудрецы могут заранее договориться о своих действиях так, чтобы гарантированно выдержать испытание.

*С.Берлов*

*10 класс*

**1.** См. задачу М2654 «Задачника «Кванта»».

**2.** Найдите все наборы натуральных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_{20}$  такие, что

$$x_{i+2}^2 = \text{НОК}(x_{i+1}, x_i) + \text{НОК}(x_i, x_{i-1})$$

при  $i = 1, 2, \dots, 20$ , где  $x_0 = x_{20}$ ,  $x_{21} = x_1$ ,  $x_{22} = x_2$ .

*П.Козлов*

**3.** В стране  $N$  городов. Некоторые пары городов связаны двусторонними авиалиниями, каждая пара не более чем одной. Каждая авиалиния принадлежит одной из  $k$  компаний. Оказалось, что из любого города можно попасть в любой другой (возможно, с пересадками), но при закрытии всех авиалиний любой из компаний это свойство нарушается. Какое наибольшее количество авиалиний (при произвольных данных  $N$  и  $k$ ) могло быть в этой стране?

*С.Берлов, Н.Власова*

**4.** Дано натуральное число  $n \geq 4$  и  $2n + 4$  карточки, пронумерованные числами  $1, 2, \dots, 2n + 4$ . На карточке с номером  $m$  написано вещественное число  $a_m$ , причем  $[a_m] = m$ . Докажите, что можно выбрать 4 карточки так, чтобы сумма чисел на первых двух карточках отличалась от суммы чисел на двух других карточках менее чем на  $\frac{1}{n - \sqrt{n/2}}$ .

*А.Кузнецов*

**5.** См. задачу М2655 «Задачника «Кванта»».

**6.** Дан многочлен  $P(x)$  степени  $n > 1$  с вещественными коэффициентами. Известно, что уравнение  $P(P(P(x))) = P(x)$  имеет

ровно  $n^3$  различных вещественных корней. Докажите, что эти  $n^3$  корней можно разбить на две группы с равными средними арифметическими.

*А. Кузнецов*

7. См. задачу M2657 «Задачника «Кванта»».

8. В окружность  $\omega$  вписан пятиугольник  $ABCDE$ . Прямая  $CD$  пересекает лучи  $AB$  и  $AE$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Отрезки  $EX$  и  $BY$  пересекаются в точке  $P$  и вторично пересекают окружность  $\omega$  в точках  $Q$  и  $R$ . Точка  $A'$  симметрична точке  $A$  относительно прямой  $CD$ . Окружность  $\gamma$ , описанная около треугольника  $PQR$ , пересекает окружность, описанную около треугольника  $A'XY$ , в двух точках. Докажите, что их можно назвать  $M$  и  $N$  так, чтобы прямые  $CM$  и  $DN$  пересекались на окружности  $\gamma$ .

*М. Дидин, А. Кузнецов*

### 11 класс

1. При некоторых натуральных  $n > t$  число  $n$  оказалось представимо в виде суммы 2021 слагаемых, каждое из которых равно некоторой целой неотрицательной степени числа  $t$ , а также в виде суммы 2021 слагаемых, каждое из которых равно некоторой целой неотрицательной степени числа  $t + 1$ . При каком наибольшем  $t$  это могло произойти (хоть при каком-то  $n > t$ )?

*А. Кузнецов*

2. Пусть  $P(x)$  – ненулевой многочлен степени  $n$  с неотрицательными коэффициентами такой, что функция  $y = P(x)$  – нечетная. Может ли оказаться так, что для различных точек  $A_1, A_2, \dots, A_n$  на графике  $G: y = P(x)$  выполняются условия: касательная к графику  $G$  в точке  $A_1$  проходит через точку  $A_2$ , касательная в точке  $A_2$  проходит через точку  $A_3$ , ..., касательная в точке  $A_n$  – через точку  $A_1$ ?

*Н. Агаханов*

3. В языке три буквы – Ш, У и Я. Словом называется последовательность из 100 букв, ровно 40 из которых – гласные (т.е. У или Я), а остальные 60 – буква Ш. Какое наибольшее количество слов можно выбрать так, чтобы у любых двух выбранных слов

хотя бы в одной из ста позиций одновременно стояли гласные, причем различные?

*Ф. Петров*

4. В треугольнике  $ABC$  биссектрисы  $AA_1$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $I$ . Прямая, проходящая через точку  $B$  параллельно  $AC$ , пересекает лучи  $AA_1$  и  $CC_1$  в точках  $A_2$  и  $C_2$  соответственно. Точка  $O_a$  – центр описанной окружности треугольника  $AC_1C_2$ , точка  $O_c$  – центр описанной окружности треугольника  $CA_1A_2$ . Докажите, что  $\angle O_aBO_c = \angle AIC$ .

*А. Кузнецов*

5. См. задачу M2655 «Задачника «Кванта»» с измененным вопросом: смогут ли ученики помешать учительнице победить?

6. В тетраэдре  $SABC$  длины всех шести ребер различны. Треугольник  $SAB$  достроен до равнобокой трапеции  $SABC'$  ( $AB \parallel SC'$ ). Точка  $A'$  в плоскости  $SBC$  симметрична точке  $S$  относительно серединного перпендикуляра к отрезку  $BC$ . Точка  $B'$  в плоскости  $SAC$  и точка  $C'$  в плоскости  $SAB$  определяются аналогично. Докажите, что плоскости  $AB'C'$ ,  $A'BC'$ ,  $A'B'C$  и  $ABC$  имеют общую точку.

*А. Кузнецов*

7. Найдите все перестановки  $(a_1, a_2, \dots, a_{2021})$  чисел  $1, 2, \dots, 2021$  такие, что при любых натуральных  $m, n$ , удовлетворяющих условию  $|m - n| > 20^{21}$ , выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{2021} \text{НОД}(m + i, n + a_i) < 2|m - n|.$$

(Перестановка  $(a_1, a_2, \dots, a_{2021})$  – это последовательность, в которой каждое из чисел  $1, 2, \dots, 2021$  встречается ровно по одному разу.)

*П. Козлов*

8. У каждой из 100 девочек есть по 100 шариков; среди этих 10000 шариков есть по 100 шариков 100 различных цветов. Две девочки могут обменяться, передав друг другу по шарiku. Они хотят добиться того, чтобы у каждой девочки было по 100 разноцветных шариков. Докажите, что они могут добиться этого такой серией обменов, чтобы любой шарик участвовал не более чем в одном обмене.

*И. Богданов, Ф. Петров*



**Победители олимпиады***9 класс*

*Згонник Илья* – Санкт-Петербург,  
*Кузнецов Роман* – Санкт-Петербург,  
*Лопатин Егор* – Санкт-Петербург,  
*Гизатуллин Тимур* – Республика Татарстан,  
*Федоров Василий* – Санкт-Петербург,  
*Климчук Александр* – Москва,  
*Лаврова Вера* – Санкт-Петербург,  
*Габитов Булат* – Республика Татарстан,  
*Французов Церен* – Санкт-Петербург,  
*Прозоров Павел* – Санкт-Петербург;

*10 класс*

*Шарафетдинова Галия* – Республика Татарстан,  
*Почетцов Игорь* – Москва,  
*Романов Владимир* – Удмуртская республика,  
*Галатенко Дмитрий* – Москва,  
*Нагибин Всеволод* – Новосибирская область,  
*Казанцева Татьяна* – Московская область,  
*Загоскин Егор* – Кировская область,  
*Трошкин Кирилл* – Челябинская область,  
*Шамсутдинов Данис* – Республика Татарстан,  
*Афанасьев Максим* – Москва;

*11 класс*

*Филатов Андрей* – Москва,  
*Аникин Сергей* – Москва,  
*Коротченко Таисия* – Санкт-Петербург,  
*Власов Алексей* – Ульяновская область,  
*Туревский Максим* – Санкт-Петербург,  
*Бидва Максим* – Москва.

Кроме того, следующие участники получили специальные призы:

*9 класс*

*Сущенко Дмитрий* (Санкт-Петербург) – за оригинальное решение задачи 3,  
*Прозорова Мария* (Москва), *Дик Кирилл* (Ярославская область) – за решение трудной задачи 8;

*11 класс*

*Коротченко Таисия* (Санкт-Петербург), *Васильев Дмитрий* (Санкт-Петербург) – за оригинальное решение сложной задачи по геометрии,

*Сибгатуллин Данил* (Москва) – за оригинальное решение сложной задачи по теории чисел,

*Нагибин Ярослав* (Новосибирская область) – за элементарное решение задачи.

*Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, П.Кожевников, О.Подлитский, Д.Терёшин*

# Всероссийская олимпиада по физике имени Дж.К.Максвелла

**Заключительный этап****Теоретический тур***7 класс***Задача 1. Навигатор**

Экспериментатор Глюк выехал на автомобиле на вокзал, расстояние до которого  $s = 10$  км. Первую часть пути он ехал со скоростью  $v_1$ , а затем со скоростью  $v_2$ . Бортовой навигатор показывал не только маршрут, но и предполагаемое расчетное время до приезда на вокзал. Что любопытно, надпись «Осталось  $\tau_0 = 12$  мин 00 с» появлялась трижды: в моменты времени  $\tau_1 = 0$  мин 30 с,  $\tau_2 = 3$  мин 00 с,  $\tau_3 = 12$  мин 00 с. Определите

по этим данным  $v_1$ ,  $v_2$ , а также время всего движения  $\tau$ . Показания навигатора Глюка рассчитывались как отношение оставшегося пути к средней скорости автомобиля на пройденном к этому моменту времени расстоянии.

*Д.Рубцов*

**Задача 2. Качаем пресс**

Для того чтобы подвешенный за верхний поршень гидравлический пресс оставался в покое, к его нижнему поршню необходимо прикладывать вертикальную силу  $F_1 = 50$  Н (рис.1,а). Если пресс перевернуть и подвесить за другой поршень, то для его равновесия к нижнему поршню нужно будет приложить вертикальную силу  $F_2 = 200$  Н (рис.1,б).

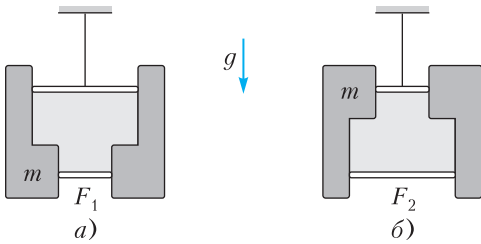


Рис. 1

Определите, в какую сторону направлены силы  $F_1$  и  $F_2$ . Найдите, во сколько раз отличаются площади поршней и чему равна масса  $m$  прессы. Массой поршней и жидкости внутри прессы можно пренебречь. Трения в системе нет,  $g = 10$  Н/кг.

М.Замятин

### Задача 3. Зыбкое равновесие

На рисунке 2 представлена система, состоящая из двух однородных стержней массой  $m$ , шарнирно закрепленных на опорах, и

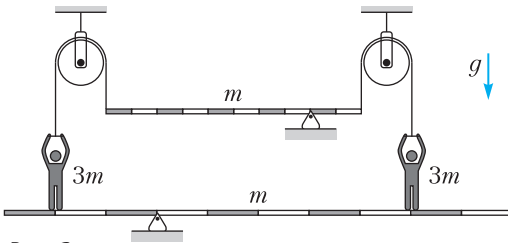


Рис. 2

легких нитей, перекинутых через блоки. На нижнем стержне стоят два человека массой  $3m$  каждый, с помощью нитей удерживающие систему в равновесии. Определите силы давления людей на нижний стержень и силы натяжения нитей. Участки нитей, не касающиеся блоков, вертикальны. Стержни горизонтальны, и каждый из них разделен на равные отрезки. Трение в шарнирах и осях блоков отсутствует.

М.Замятин

### Задача 4. Лишние калории

Теоретик Баг с помощью неподвижного блока поднял на высоту  $h = 10$  м оборудование общей массой  $m_1 = 1000$  кг. Для компенсации потерь энергии, затраченной на подъем груза, ему потребовалось употребить с едой на 500 килокалорий больше, чем в обычный рабочий день, проведенный на стуле за компьютером. На следующий день Баг заметил несколько ящиков общей мас-

сой  $m_2 = 240$  кг, которые он вчера забыл поднять. Проявив сообразительность, он, используя тот же блок, для движения веревки применил электродвигатель с КПД  $\eta_d = 70\%$ . Баг определил, что для подъема груза массой  $m_2$  электродвигатель потренил  $10$  Вт · ч электроэнергии. Чему равны КПД  $\eta_6$  блока и  $\eta$  самого Бага? Коэффициент  $g = 10$  Н/кг, 1 калория равна 4,2 Дж.

*Примечание.* КПД человека равен отношению совершенной им работы к потребленной им для этого энергии.

П.Гусихин, А.Заяц

8 класс

### Задача 1. Средняя скорость

Танк  $n$ -ю часть всего пути ехал по болотистой местности со скоростью  $v_1 = 8$  км/ч. Затем  $n$ -ю часть всего времени он ехал по шоссе со скоростью  $v_2 = 32$  км/ч. Наконец, оставшийся участок пути он двигался по проселочной дороге со скоростью, равной средней скорости  $v_{cp}$  на всем пути. Вычислите  $v_{cp}$ . При каких значениях  $n$  такое движение возможно?

В.Слободянин

### Задача 2. Скрытая масса

К левому концу неоднородного стержня, шарнирно закрепленного на неподвижной опоре, подвешен груз массой  $m_1$ , а к правому концу стержня подвешен груз массой  $m_2 = 4,0$  кг. Система находится в равновесии. Затем груз массой  $m_2$  убрали, на его место перенесли груз массой  $m_1$ , а на левый конец подвесили груз массой  $m_3 = 2,5$  кг, и система снова оказалась в равновесии. Определите, при каких значениях массы  $m_1$  это возможно. Известно, что центр масс стержня находится справа от точки опоры.

В.Слободянин

### Задача 3. Три плитки и одна кастрюля

Воду комнатной температуры  $t_0 = 20^\circ\text{C}$  нагревали в кастрюле в течение 10 мин последовательно на трех разных плитках, причем перенос с одной плитки на другую происходил быстро. Значения температуры  $t$  воды в разные моменты времени  $\tau$  занесли в таблицу, но затем на нее случайно пролили варенье и часть данных пропала. Остались только 3 точки, которые нанесли на график (рис.3). Известно, что точки 1, 2 и 3 относятся к моментам нагрева на первой,

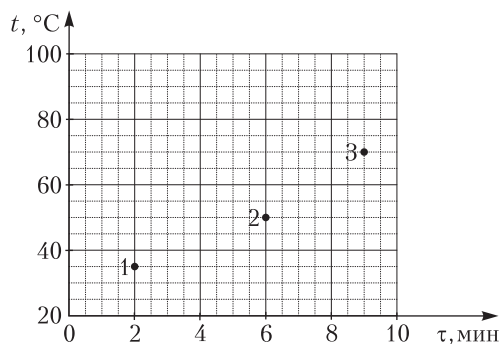


Рис. 3

второй и третьей плитках соответственно. Также сохранилась информация, что третья плитка в два раза мощнее первой и что за все время нагрева вода получила 1100 кДж теплоты.

- 1) Определите конечную температуру воды.
- 2) Найдите массу воды.
- 3) Какую мощность могла иметь вторая плитка?
- 4) Какое время длился нагрев кастрюли на второй плитке?

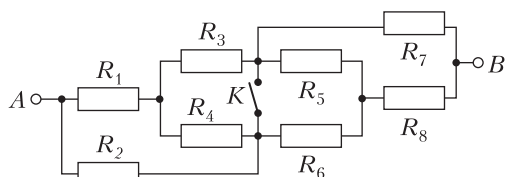


Рис. 4

*Примечание.* Тепловые потери и теплоемкость кастрюли пренебрежимо малы, удельная теплоемкость воды  $c = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C})$ .

*А.Евсеев*

#### Задача 4. 8 резисторов

В электрической цепи, представленной на рисунке 4, сопротивления резисторов  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$ , а  $R_5 = R_6 = R_7 = R_8 = 2R$ . Определите сопротивление между клеммами  $A$  и  $B$  при замкнутом и при разомкнутом ключе  $K$ . Определите силу тока через замкнутый ключ при подключении к клеммам  $A$  и  $B$  идеального источника с напряжением  $U$ .

*В.Слободянин*

*Публикацию подготовил В.Слободянин*

## Заключительный этап LV Всероссийской олимпиады школьников по физике



*Жюри за работой*

В этом году заключительный этап Всероссийской олимпиады школьников по физике проходил в городе Тюмени. На олимпиаду прибыли как лидеры регионального этапа текущего года (250 человек), так и те, кто должен был участвовать в заключительном этапе прошлого года (140 человек).

Ниже приводятся условия задач теоретического тура и список участников, получивших дипломы победителей олимпиады.

#### Теоретический тур

*9 класс*

#### Задача 1. Маленький плот

От прямого берега реки оттолкнули небольшой круглый плот, сообщив ему в направлении, перпендикулярном берегу, скорость, равную по модулю скорости течения

реки. Через время  $t = 10$  с плот удалился от точки старта на расстояние  $l = 23$  м, а от берега на  $d = 20$  м. Определите скорость течения реки.

*А.Аполонский*

**Задача 2. WOT**

Небольшой игрушечный танк поместили на наклонную плоскость, составляющую угол  $\alpha$  с горизонтом (рис.1). За какое минимальное время  $\tau$  танк, двигаясь с постоянной скоростью, сможет проехать по окружности радиусом  $R$ ? Чему будет равен максимальный угол  $\gamma$  между векторами силы трения и ускорения танка во время этого движения? Коэффициент трения между гусеницами и плоскостью  $\mu$ . Ускорение свободного падения  $g$ .

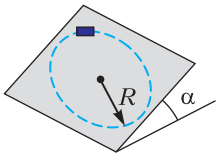


Рис. 1

Решение задачи 2. Пусть танк движется по окружности радиусом  $R$  с постоянной скоростью  $v$ . Тогда его ускорение направлено к центру окружности и равно  $a = v^2/R$ . Силы, действующие на танк: сила тяжести  $mg$ , сила реакции опоры  $N$ , сила трения  $F_{тр}$ . Угол  $\gamma$  между векторами  $F_{тр}$  и  $a$  равен углу между векторами  $F_{тр}$  и  $mg$ . Вектор  $mg$  направлен вертикально вниз, а вектор  $F_{тр}$  — по касательной к окружности. Угол  $\gamma$  равен  $90^\circ - \alpha$ .

*М.Замятнин*

**Задача 3. С отливом**

В пустой стакан с отводной трубкой и вертикальными стенками начали наливать с небольшим массовым расходом  $\mu$  горячей

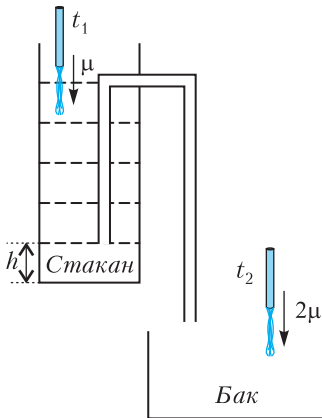


Рис. 2

воду при температуре  $t_1 = 90$  °С (рис. 2). За время  $\tau$  уровень воды в стакане поднялся на высоту  $h$ . Через время  $3\tau$  после начала заполнения стакана в бак, расположенный под отводной трубкой, из другого крана стала поступать с массовым расходом  $2\mu$  холодная вода при температуре  $t_2 = 20$  °С.

1) Постройте график зависимости температуры воды в баке от времени для интервала от  $3\tau$  до  $10\tau$  от начала заполнения стакана.

2) Найдите, какая температура установится в баке через большое время.

3) Какого максимального значения достигала температура в баке?

Перетекание по отводной трубке и теплообмен в системе происходят очень быстро. Тепловыми потерями и теплоемкостями сосудов и трубки можно пренебречь. Объем отводной трубки мал. Вода из бака не выливается.

*М.Замятнин*

**Задача 4. Ареометры**

В лаборатории экспериментатора Глюка было два одинаковых ареометра. Когда один из них Глюк погрузил в сосуд с исследуемой жидкостью, прибор сначала показал значение  $1,027$  г/см<sup>3</sup>. Затем его показания стали изменяться, но через продолжительное время он вновь стал показывать  $1,027$  г/см<sup>3</sup>. Убедившись, что изменений показаний больше нет, Глюк погрузил в сосуд второй прибор (не вынимая первый) и снова стал ждать. Теперь показания приборов установились на значении  $1,022$  г/см<sup>3</sup>. Какова начальная температура ареометров в лаборатории Глюка? Зависимость плотности жидкости от ее температуры изображена на рисунке 3. Теплоемкости

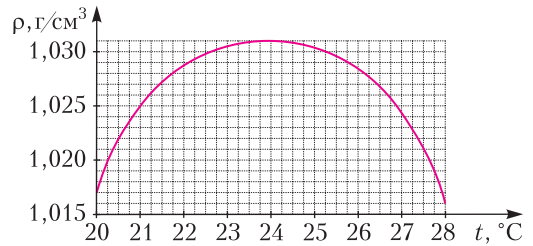


Рис. 3

жидкости и приборов можно считать постоянными. Теплообмена с внешней средой нет.

*А.Заяц*

**Задача 5. Авометрия**

По известным показаниям вольтметра  $V_1$  и амперметра  $A_1$  ( $U_1 = 1$  В,  $I_1 = 6$  мкА) определите показания остальных приборов в электрической цепи, схема которой приведена на рисунке 4. Все вольтметры одинаковые и их сопро-

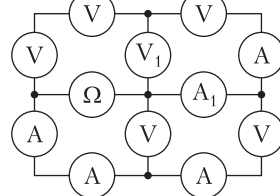


Рис. 4



тивления гораздо больше сопротивлений амперметров.

*М.Замятнин*

10 класс

### Задача 1. Ползущая полоска

При использовании специальной технологии обработки полимерных материалов можно добиться анизотропии свойств их поверхности. Например, движение полоски из полиэтилена по горизонтальной поверхности стола в направлении  $AB$  характеризуется коэффициентом трения  $\mu_1$ , а движение в направлении  $BA$  – коэффициентом трения  $\mu_2 < \mu_1$  (рис.5). Если подвергнуть лежащую на столе

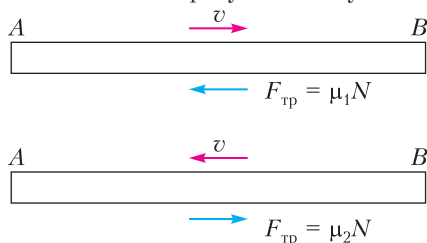


Рис. 5

полоску длиной  $l$  циклическому нагреванию-охлаждению, то можно заметить, что полоска перемещается по поверхности стола.

1) В каком направлении ( $AB$  или  $BA$ ) сместится полоска при большом количестве циклов?

2) На какое расстояние переместится полоска за  $N$  циклов нагревания-охлаждения, если разность максимальной и минимальной температур в цикле равна  $\Delta T$ ? Ответ запишите в виде формулы.

3) Вычислите, на какое расстояние переместится полоска длиной  $l = 20$  см за  $N = 100$  циклов нагревания-охлаждения при изменении ее температуры на  $\Delta T = 80$  °С. Значения коэффициентов трения:  $\mu_1 = 0,15$ ,  $\mu_2 = 0,05$ .

Считайте, что при изменении температуры полиэтилена на  $\Delta T$  его длина изменяется на величину  $\Delta l = \alpha l \Delta T$ , где  $l$  – длина полоски при комнатной температуре,  $\alpha = 2 \cdot 10^{-4}$  °С<sup>-1</sup> – коэффициент температурного расширения полиэтилена. Полоска имеет постоянную толщину, не изгибается и прижимается к столу равномерно всей поверхностью. Нагревание и охлаждение происходят медленно.

*А.Аполонский*

### Задача 2. Газовая батарея

На вход гладкой прямолинейной трубы постоянного сечения  $S$ , ось которой горизон-

тальна, поступает идеальный многоатомный газ, движущийся со скоростью  $v_1$ . Давление газа на входе в трубу  $p_1$ , плотность  $\rho_1$ . Давление газа на выходе из трубы  $p_2 = p_1 + \Delta p$ . Определите:

1) плотность  $\rho_2$  и скорость  $v_2$  газа на выходе из трубы;

2) отношение температур газа  $T_2/T_1$  на выходе и на входе соответственно;

3) тепловую мощность  $N$ , выделяемую трубой в окружающую среду.

Считайте, что в любом сечении трубы плотность и давление газа постоянны и не зависят от времени. Вязким трением можно пренебречь.

*А.Уймин*

### Задача 3. Что измеряют омметром?

В соответствии с одной из моделей омметра он состоит из идеального источника постоянного напряжения  $\mathcal{E}$  (с нулевым внутренним сопротивлением) и соединенных с ним последовательно резистора сопротивлением  $r$  и идеального амперметра (рис.6). При подключении исследуемого резистора к клеммам  $A$  и  $B$  встроенный амперметр показывает

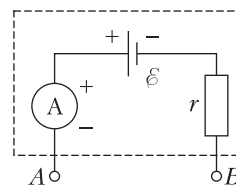


Рис. 6

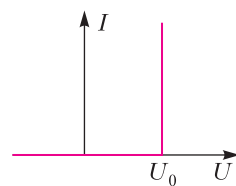


Рис. 7

силу тока, которая затем пересчитывается в величину измеряемого сопротивления и отображается на индикаторе омметра. Если подключить к выводам такого омметра диод, вольт-амперная характеристика которого приведена на рисунке 7, то он покажет сопротивление  $R_d = 6$  кОм. Если к этому диоду добавить последовательно резистор сопротивлением  $R = 20$  кОм и измерить сопротивление получившейся пары омметром, то он покажет  $R_1 = 30$  кОм. Если вместо резистора и диода подключить к омметру идеальную батарейку с напряжением  $U_0 = 3$  В (полярность подключения неизвестна!), то он покажет отрицательное сопротивление  $R_0 = -7,5$  кОм ( $R_0 < 0$ ). По этим данным определите:

1) величину напряжения  $\mathcal{E}$  внутреннего источника омметра;

2) величину внутреннего сопротивления  $r$  омметра;

3) напряжение  $U_0$ , при котором открывается диод;

4) показания  $R_{01}$  омметра при подключении к нему той же батарейки, но с изменением полярности.

*Примечание.* Амперметр, встроенный в омметр, измеряет силу тока с учетом его направления. Если ток течет через амперметр в обратном направлении, то его величина определяется как отрицательная. Омметр выполняет все вычисления с учетом знаков.

*А.Аполонский*

#### Задача 4. Частично заряженный цилиндр

Бесконечный тонкостенный диэлектрический цилиндр радиусом  $R$  разбит вдоль оси вращения на равные «четвертинки» (рис.8). Две

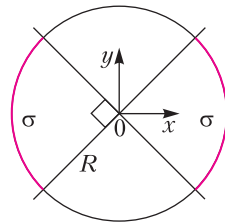


Рис. 8

противоположные четвертинки зарядили равномерно с поверхностной плотностью заряда  $\sigma > 0$ , а другие две оставили незаряженными. Найдите векторы напряженности электрического поля цилиндра в точках, близких к его центру и имеющих координаты  $(x; 0)$  и  $(0; y)$ . Считайте  $x, y \ll R$ . Координатные оси  $x$  и  $y$  направлены вдоль биссектрис прямых углов.

*А.Уймин*

#### Задача 5. Разлетающиеся зонды

Два автономных исследовательских зонда движутся навстречу друг другу с выключенными двигателями в глубоком космосе вдали от других тел курсами, пересекающимися под прямым углом (рис.9). Масса первого зонда  $m_1 = m$ , а его скорость  $v_1 = v$ . Масса второго зонда  $m_2 = 4m$ , а скорость  $v_2 = v/3$ . В момент времени, когда расстояние между зондами  $L$ , а расстояние от первого зонда до точки пересечения траекторий  $x$ , на обоих зондах включаются двигатели с постоянной по модулю силой тяги  $F$ , при этом вектор силы тяги в любой момент времени на-

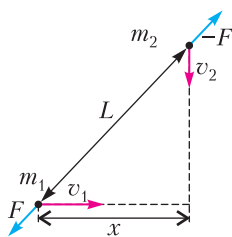


Рис. 9

правлен противоположно направлению на другой зонд. Рисунок приведен для момента включения двигателей. Двигатели выключаются, когда расстояние между зондами становится равным  $2L$ . Размеры зондов малы по сравнению с  $L$ , а их гравитационным взаимодействием можно пренебречь.

1) При каком значении  $x = x_{кр}$  произошло бы столкновение зондов, если бы двигатели на них не включались?

2) Найдите минимальное значение силы тяги  $F_{min}$ , при котором зонды не столкнутся, если  $x = x_{кр}$ .

3) Пусть величины сил тяги двигателей равны  $F = F_{min} + dF$  ( $dF \ll F_{min}$ ), а  $x = x_{кр}$ . Найдите *вектор* конечной скорости первого зонда в виде  $\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2$ .

4) Пусть сила тяги двигателей  $F$ , а  $x = x_1$  ( $x_1 > x_{кр}$ ). Найдите *модуль* конечной скорости первого зонда относительно второго.

*М.Карманов*

11 класс

#### Задача 1. Куда упадет шарик?

С лодки, движущейся по течению реки, опускают в воду металлический шарик. Шарик падает на дно реки на расстоянии  $l_1$  по горизонтали от места, где его опустили в воду. Если опустить в воду шарик с лодки, движущейся против течения, то шарик падает на дно на расстоянии  $l_2$  ниже по течению. Для лодки, переплывающей реку по траектории, перпендикулярной течению реки, расстояние до точки падения на дно составляет  $l_3$ .

1) Чему равно расстояние до точки падения на дно для лодки, движущейся в озере той же глубины, что и река?

2) Во сколько раз скорость лодки больше скорости течения?

Величина проекции скорости шарика на вертикальное направление при падении в воду равна нулю, закон зависимости силы сопротивления при движении шарика в воде неизвестен, все расстояния отсчитываются по горизонтали от места падения шарика в воду до места падения его на дно. Течение реки и ее глубина везде одинаковы. Двигатель лодки развивает постоянную силу тяги независимо от направления движения.

*А.Аполонский*

#### Задача 2. «Буль-буль»

В реакторе в водном растворе некоторого вещества в результате химической ре-

акции выделяется тепло с мощностью  $N = 5$  кВт. Для регулирования температуры в реактор через трубки с маленькими отверстиями, проложенными на дне реактора, продувается воздух (рис. 10). Давление воздуха, пода-

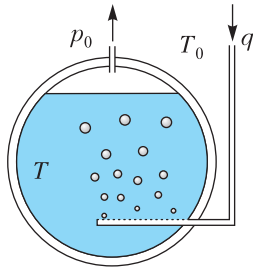


Рис. 10

ющегося в реактор, можно считать равным атмосферному  $p_0 = 10^5$  Па, температуру – равной температуре помещения  $T_0 = 22$  °С. Определите объемный расход воздуха  $q$ , необходимый для поддержания в реакторе температуры  $T < T_k$ , где  $T_k = 100$  °С – температура кипения водного раствора при атмосферном давлении. Считайте  $T_k - T \ll T_k$ . Определите численное значение  $q$  для  $T = 95$  °С.

Молярная теплота испарения при температуре  $T$  для воды известна:  $\lambda = 40$  кДж/моль. Давление насыщенного водяного пара вблизи  $T_k$  меняется практически линейно с коэффициентом  $\alpha = 3,5$  кПа/°С. Давление насыщенного пара над раствором в точности соответствует давлению насыщенного водяного пара. Теплотой, идущей на нагрев воздуха, можно пренебречь. Перепад давлений на отводящей из реактора газ трубке пренебрежимо мал. В отсутствие подачи воздуха в реактор теплообмена с окружающей средой нет.

И. Юдин

### Задача 3. Пластина с шайбой

1) Тонкий стержень из диэлектрика равномерно заряжен с линейной плотностью заряда  $\lambda$ . Точка  $A$  расположена на расстоянии  $h$  от стержня и равноудалена от его концов (рис. 11). Стержень виден из точки  $A$  под углом  $2\varphi$ . Определите напряженность электрического поля в точке  $A$ .

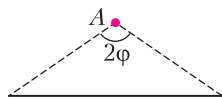


Рис. 11

2) Тонкая диэлектрическая квадратная пластина с длиной стороны  $L$  равномерно заряжена с поверхностной плотностью  $\sigma > 0$  (рис. 12). В точку  $A$ , смещенную в плоскости пластины на малое расстояние  $r \ll L$  относительно ее центра

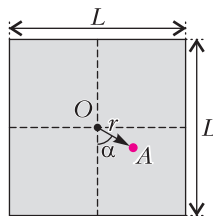


Рис. 12

(точка  $O$ ) под углом  $\alpha = 60^\circ$  к стороне квадрата, помещают маленькую гладкую диэлектрическую шайбу массой  $m$  с зарядом  $q < 0$ . Шайбу отпускают без начальной скорости. Определите величину и направление ускорения шайбы сразу после того, как ее отпустили. Через какое время шайба впервые окажется на минимальном расстоянии от центра пластины? Силы тяжести нет, пластина закреплена.

А. Уймин

### Задача 4. Виток в витке

Индуктивность кольца радиусом  $R$ , сделанного из тонкой проволоки, равна  $L$ .

1) Найдите индуктивность проволочного кольца, у которого все геометрические размеры в 2 раза больше.

Если в плоскости кольца радиусом  $R$  поместить сверхпроводящее колечко с вдвое меньшими геометрическими размерами так, чтобы плоскости колец и их центры совпадали (рис. 13), то индуктивность кольца радиусом  $R$  оказывается равной  $L_1$ .

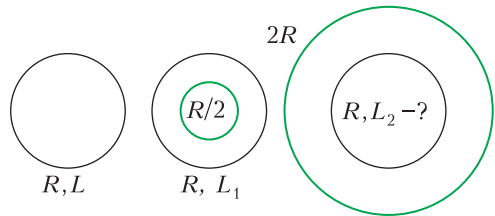


Рис. 13

2) Какой станет индуктивность кольца  $L_2$  радиусом  $R$  при помещении его внутрь сверхпроводящего кольца с вдвое большими геометрическими размерами? Плоскости и центры колец во втором случае также совпадают.

А. Аполонский

### Задача 5. Прозрачный слой

В шаре радиусом  $2R$  из оптически прозрачного материала имеется сферическая полость радиусом  $R$  (рис. 14). Центры шара и полости совпадают. Внутри полости воздух. Из воздуха снаружи на поверхность шара падает луч света. При каких значениях угла падения луча на поверхность

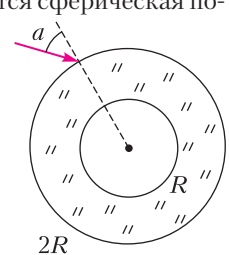


Рис. 14

шара  $\alpha$  луч проникнет внутрь полости?  
Рассмотрите два случая:

1) показатель преломления вещества шара постоянен и равен  $n = 2$ ;

2) показатель преломления вещества шара линейно уменьшается при увеличении расстояния  $r$  от центра:  $n(r) = 2,5 - 0,5 \frac{r}{R}$ ,  $R \leq r \leq 2R$ .

Показатель преломления воздуха считать равным  $n_0 = 1$ .

*А.Аполонский*

## Победители олимпиады

### 9 класс

*Пак Артур* – Москва,  
*Кокорева Кира* – Москва,  
*Ладоха Тимофей* – Санкт-Петербург,  
*Мингалев Тимофей* – Тюменская область,  
*Доля Всеволод* – Санкт-Петербург,  
*Коровичев Сергей* – Санкт-Петербург,  
*Петрановский Феликс* – Санкт-Петербург,  
*Стеценко Георгий* – Санкт-Петербург,  
*Степанов Антон* – Москва,  
*Ившин Александр* – Кировская область;

### 10 класс

*Пермяков Максим* – Республика Мордовия,  
*Тухватулин Данияр* – Московская область,  
*Ляпин Дмитрий* – Санкт-Петербург,  
*Ерин Вадим* – Московская область,  
*Минаков Андрей* – Алтайский край,  
*Акопян Артур* – Москва,  
*Фадеев Родион* – Москва,  
*Гладышев Илья* – Москва,  
*Тимофеев Максимилиан* – Санкт-Петербург,  
*Касьянов Иван* – Алтайский край,  
*Карецкий Владислав* – Московская область,  
*Жилов Игорь* – Москва;

### 11 класс

*Кононенко Николай* – Москва,  
*Коблов Даниил* – Санкт-Петербург,



*Жюри подводит итоги*

*Прядилин Тимур* – Москва,  
*Князев Матвей* – Московская область,  
*Ахундзянов Амир* – Санкт-Петербург,  
*Житов Даниил* – Москва,  
*Новиков Артемий* – Москва,  
*Раскатов Александр* – Свердловская область,  
*Бускина Анжелика* – Московская область,  
*Щигарев Дмитрий* – Вологодская область,  
*Сорокин Дмитрий* – Москва,  
*Самоделкин Данила* – Москва.

*Публикацию подготовил В.Слободянин*

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## «Квант» для младших школьников

(с.м. «Квант» №6)

1. 24.

Мы не знаем, с какой именно стороны был показан игрушечный город на втором рисунке в условии. Рассмотрим 4 варианта (рис.1). Для

2		1	
2			3
		1	3
2	4		3

смотрим снизу  
сумма — 21

3		3	
1			1
		4	4
2	2		2

смотрим справа  
сумма — 22

3		4	
3			2
		4	2
3	1		2

смотрим сверху  
сумма — 24

Рис. 1

2		2	
4			4
		1	1
3	3		3

смотрим слева  
сумма — 23

каждого из них на башенке кубиков напишем, какое наибольшее количество кубиков в ней может быть, чтобы видны были башенки высотой 2, 4, 1, 3. Сложив для каждого из 4 вариантов эти числа, получим, какое наибольшее количество кубиков может быть в каждом из вариантов, и среди них выберем наибольшее количество — это 24.

2. 19 см.

Расстояние от каждого внутреннего квадрата до левой стороны большого квадрата — это разность сторон большого и внутреннего квадратов. Отсюда мы находим стороны внутренних квадратов: это  $6$ ,  $28 - x$  и  $13$  см (рис.2). В то же время стороны внутренних квадратов дают в сумме сторону большого квадрата, значит,  $6 + 28 - x + 13 = 28$ ,

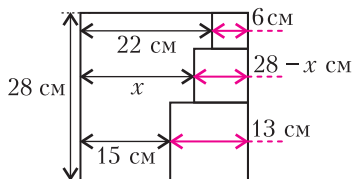


Рис. 2

откуда  $x = 19$  см.

3. Иван может спасти брата, заработать денег и даже (если царь сдержит слово) получить полцарства, посадив все 6 видов деревьев так, как показано на рисунке 3.

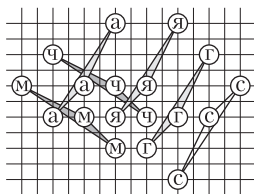


Рис. 3

Других способов посадить все 6 видов деревьев не существует; а вот посадить только 4 или 5 видов деревьев можно многими различными способами.

4. *Первое решение.* Отметим на продолжении отрезка  $LM$  за точку  $M$  такую точку  $T$ , что  $MT = 2$  (рис.4). Углы  $BLK$  и  $TMK$  равны, так как они смежные с равными углами равнобедренного треугольника  $KLM$ . Значит, треугольники  $BLK$  и  $TMK$  равны по двум сторонам и углу между ними. Тогда равны их соответствующие углы:  $\angle KTM = \angle KBL = 60^\circ$ .

В треугольнике  $KBT$  два угла по  $60^\circ$ , поэтому он равнобедренный, и  $BK = BT$ . Так как треугольник  $ABC$  тоже равнобедренный и  $BA = BC$ , то  $CT = BC - BT = BA - BK = AK = 3$  (и точка  $T$  лежит именно на стороне  $BC$ , а не на ее продолжении). Тогда  $CM = CT + MT = 3 + 2 = 5$ .

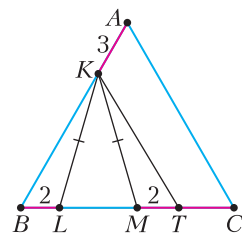


Рис. 4

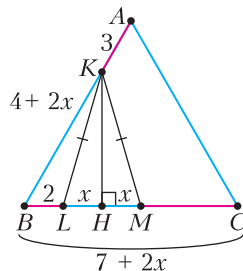


Рис. 5

*Второе решение.* Проведем высоту  $KH$  равнобедренного треугольника  $KLM$  (рис.5). Она также является его медианой, поэтому  $LH = HM$ . Обозначим  $LH = HM = x$ . Треугольник  $KBH$  — прямоугольный с углом  $B$ , равным  $60^\circ$ , а значит, его гипотенуза  $KB$  в 2 раза больше его катета  $BH$ . Так как  $BH = 2 + x$ , то  $KB = 2BH = 4 + 2x$ , а тогда

$$BA = BK + KA = 4 + 2x + 3 = 7 + 2x.$$

Треугольник  $ABC$  равнобедренный, поэтому  $BC = BA = 7 + 2x$ . А значит,  $MC = BC - BM = (7 + 2x) - (2 + 2x) = 5$ .

## Калейдоскоп «Кванта»

### Задачи-измерения

- У большинства людей измеренные расстояния одинаковы. Впервые, кстати, это было замечено Леонардо да Винчи.
- Угол, под которым видны раздвинутые пальцы вытянутой руки, равен примерно 5 градусам или  $\frac{1}{10}$  радиана.
- Положите коробок на край стола и отметьте на столе положение точки  $A$  (рис.6). Затем поверните коробок вокруг вертикальной оси, проходящей через точку  $B$ . Теперь линейкой можно измерить искомое расстояние  $AB$ .



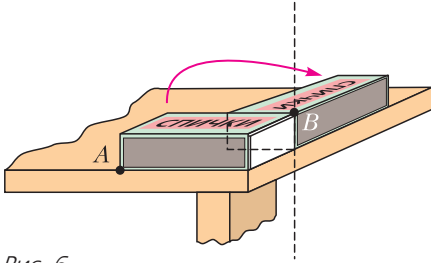


Рис. 6

4. Можно капнуть на мяч водой, прокатить его по полу и измерить длину следа. Если полученную длину окружности разделить на  $\pi$ , определится и диаметр.
5. Бросаем много (сколько влезет) фасолин в мензурку с водой и находим вытесненный ими объем. Поделив его на число брошенных фасолин, определим только *средний* их объем. Вытесненный же объем *конкретного* малого тела при его погружении в воду в нашем случае практически неразличим.
6. Измерив площадь дна бутылки  $S$  и высоту столба воды  $h_1$  (рис.7), а затем, перевернув бу-

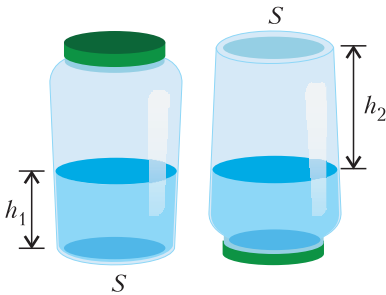


Рис. 7

тылку, измерив высоту другой ее части  $h_2$ , получим вместимость бутылки:  $V = S(h_1 + h_2)$ .

7. Сначала надо взвесить пустой сосуд, затем сосуд, заполненный водой, и найти разность полученных масс. Если выразить ее в граммах, то это число будет равно объему сосуда в кубических сантиметрах.

8. Следует (осторожно!) завести слона на прямоугольный плот с вертикальными стенками и засечь, на сколько по высоте погрузился плот в воду. Измерив площадь плота, можно найти объем вытесненной слонем воды, а значит и ее вес, равный весу слона.

9. Кубик надо подвесить за края к двум симметрично расположенным нитям, к одной из которых прикрепить динамометр. В этом случае его показания будут равны  $F = \frac{mg}{2}$ . Значит, масса кубика  $m = \frac{2F}{g}$ .

10. Потребуется тело, вес которого измерен на Земле, и пружинные весы (динамометр). Рычажные (чашечные) весы не годятся – их показания на Луне и на Земле будут одинаковы, так как сами гири «уменьшаются» в весе в 6 раз.

11. Абсолютное удлинение материала пропорционально его линейному размеру, поэтому термометр с цилиндрической емкостью быстрее реагирует на измерение температуры.

12. Оба амперметра соединяют *параллельно* и включают в цепь. Неизвестное сопротивление находится из уравнения  $\frac{I_{A1}}{I_{A2}} = \frac{R_{A2}}{R_{A1}}$ , где  $I_{A1}$  и  $I_{A2}$  – показания амперметров.

13. Оба вольтметра соединяют *последовательно* и подключают к источнику напряжения. Неизвестное сопротивление находится из уравнения  $\frac{U_{V1}}{U_{V2}} = \frac{R_{V1}}{R_{V2}}$ , где  $U_{V1}$  и  $U_{V2}$  – показания вольтметров.

14. Нужно поставить линейку вертикально и измерить длину ее тени, затем измерить длину тени от здания или дерева (рис.8). Высоты дере-

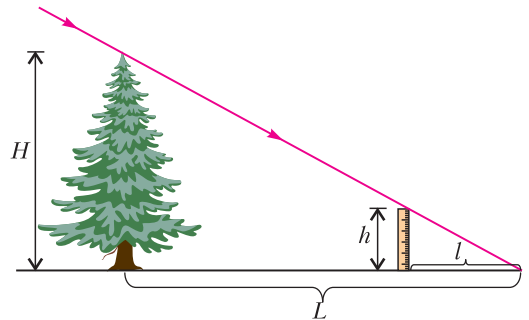


Рис. 8

ва и линейки будут относиться как длины их теней – если исходить из подобия двух треугольников. Скорее всего, так измерил высоту пирамиды Хеопса древнегреческий ученый Фалес.

### Всероссийская олимпиада по физике имени Дж.К.Максвелла

7 класс

- $v_1 = 48$  км/ч,  $v_2 = 20$  км/ч;  $\tau = 27$  мин.
- $F_1$  направлена вниз, а  $F_2$  вверх;  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{F_2}{F_1} = 4$ ;  $m = 15$  кг.
- $N_1 = \frac{71}{36}mg$ ,  $N_2 = \frac{7}{18}mg$ ;  $T_1 = \frac{37}{36}mg$ ,  $T_2 = \frac{47}{18}mg$ .
- $\eta_6 = \frac{20}{21} \approx 95,2\%$ ,  $\eta = \frac{1}{20} = 5,0\%$ .

8 класс

- $v_{cp} = \sqrt{v_1 v_2} = 16$  км/ч;  $n > 1 + \sqrt{\frac{v_2}{v_1}} = 3$ .

2.  $m_3 < m_1 < \sqrt{m_2 m_3}$ , или  $2,5 \text{ кг} < m_1 < 3,2 \text{ кг}$ .  
 3. 1)  $t_k = 85 \text{ }^\circ\text{C}$ ; 2)  $m \approx 4 \text{ кг}$ ; 3)  $N_{2\text{max}} = 1057,7 \text{ Вт}$ ;  
 4)  $t_2 = 3 \text{ мин } 40 \text{ с}$ .  
 4.  $R_{\text{общ}1} = \frac{9}{5} R$ ,  $R_{\text{общ}2} = \frac{11}{5} R$ ;  $I = \frac{U}{3R}$ .

**Заключительный этап LV Всероссийской олимпиады школьников по физике**

9 класс

1.  $u = \frac{\sqrt{l^2 - d^2} + d}{t} \approx 3,14 \text{ м/с}$ .  
 2.  $t_{\text{min}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu \cos \alpha - \sin \alpha}} \sqrt{\frac{R}{g}}$ ;  $\gamma = \arcsin \frac{\text{tg } \alpha}{\mu - \text{tg } \alpha}$ .  
 3. 1) См. рис.9; 2)  $t_{\text{уст}} = \frac{t_1 + t_2}{2} = 55 \text{ }^\circ\text{C}$ ;  
 3)  $t_{\text{max}} = \frac{t_1 + 2t_2}{3} = 43,3 \text{ }^\circ\text{C}$ .

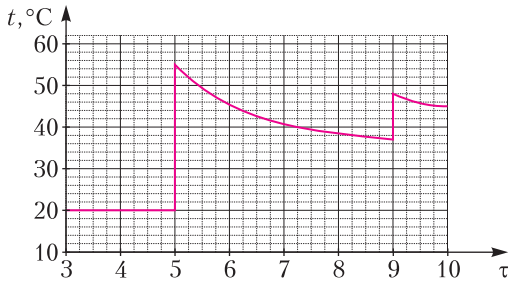


Рис. 9

4.  $19 \text{ }^\circ\text{C}$  или  $28,7 \text{ }^\circ\text{C}$  (в первом случае температура ареометра выше начальной температуры жидкости, во втором случае наоборот).  
 5. Показания вольтметров и амперметров приведены на рисунке 10; омметр показывает  $R_0 = 417 \text{ кОм}$ .

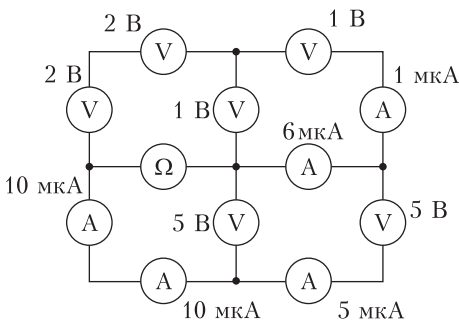


Рис. 10

10 класс

1. 1)  $VA$ ; 2)  $\Delta x = N \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} l \alpha \Delta T$ ; 3)  $\Delta x = 16 \text{ см}$ .  
 2. 1)  $\rho_2 = \frac{\rho_1^2 v_1^2}{\rho_1 v_1^2 - \Delta p}$ ,  $v_2 = v_1 - \frac{\Delta p}{\rho_1 v_1}$ ;

$$2) \frac{T_2}{T_1} = \left(1 + \frac{\Delta p}{p_1}\right) \left(1 - \frac{\Delta p}{\rho_1 v_1^2}\right);$$

$$3) N = \rho_1 S v_1 \left(\frac{v_1^2}{2} \left(1 - \frac{\Delta p}{\rho_1 v_1^2}\right)^2\right) + \frac{4p_1}{\rho_1} \left(1 - \left(1 + \frac{\Delta p}{p_1}\right) \left(1 - \frac{\Delta p}{\rho_1 v_1^2}\right)\right);$$

3. 1)  $\varepsilon = -U_0 \frac{r + R_0}{R_0} = 9 \text{ В}$ ;  
 2)  $r = \frac{RR_d}{R_1 - R_d - R} = 30 \text{ кОм}$ ;  
 3)  $U_0 = \frac{\varepsilon}{6} = 1,5 \text{ В}$ ; 4)  $R_{01} = r \frac{U_0}{\varepsilon - U_0} = 15 \text{ кОм}$ .

4. В точке с координатами  $(x; 0)$   $E_x = -\frac{\sigma x}{\pi R \varepsilon_0}$ ,  $E_y = 0$ ; в точке с координатами  $(y; 0)$   $E_x = 0$ ,  $E_y = \frac{\sigma y}{\pi R \varepsilon_0}$ .

5. 1)  $x_{\text{кр}} = \frac{3L}{\sqrt{10}}$ ; 2)  $F_{\text{min}} = \frac{4mv^2}{9L}$ ;  
 3)  $\vec{v}_k = \frac{1}{5}(1 - 4\sqrt{2})\vec{v}_1 + \frac{4}{5}(1 + \sqrt{2})\vec{v}_2$ ;  
 4)  $v_{\text{отн}} = \sqrt{\frac{10v^2}{9} + \frac{5FL}{2m}}$ .

11 класс

1. 1)  $l = \frac{l_1 - l_2}{2}$ ; 2)  $\frac{v_l}{v_r} = \frac{l_1^2 - l_2^2}{l_1^2 + l_2^2 - 2l_3^2}$ .

2.  $q = \frac{NRT_0 \alpha (T_k - T)}{p_0 \lambda (p_0 - \alpha (T_k - T))} \approx 6,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{с}$ .

3. 1)  $E_A = \frac{\lambda \sin \varphi}{2\pi \varepsilon_0 h}$ ;  
 2) ускорение шайбы направлено к точке O и равно  $a = \frac{\sqrt{2} r \sigma}{\pi \varepsilon_0 m L}$ ,  $t = \sqrt{\frac{\pi^3 \varepsilon_0 m L}{4\sqrt{2} \sigma q}}$ .

4. 1)  $L_1 = 2L$ ; 2)  $L_2 = L_1$ . 5. 1)  $\alpha < 30^\circ$ ; 2)  $\alpha < 30^\circ$ .

**LXXXIV Московская математическая олимпиада школьников**

(с.м. «Квант» №6)

13. Представим описанную в условии сеть дорог в виде графа, вершинами которого являются города, развилки и перекрестки, а ребрами – дороги. Покажем, что этот граф является деревом, т.е. связным графом без циклов. Связность следует из того, что из любого города можно

проехать в любой другой, а любая развилка или перекресток должны быть соединены с каким-либо городом. Допустим, что в нашем графе есть цикл. Он не содержит двух и более вершин-городов, так как в этом случае, двигаясь в противоположных направлениях по циклу, мы могли бы получить два различных пути из одного города в другой. Далее, пусть между некоторыми городами  $A$  и  $B$  существует путь, содержащий какую-то вершину цикла. Он обязательно найдется, так как иначе эта вершина не могла бы быть в нашей сети. Но тогда, добавляя к этому пути «кольцо» вдоль цикла, мы получим еще один путь между  $A$  и  $B$ . Значит, циклов в нашем графе быть не может и это действительно дерево. По условию задачи все концевые вершины дерева – города. Назовем эти города концевыми. Назовем также концевой город  $B$  следующим за концевым городом  $A$ , если по пути из  $A$  в  $B$  на каждой развилке выбирается самая правая дорога. Выберем какой-нибудь концевой город  $A_1$  и измерим расстояние между ним и следующим за ним концевым городом  $A_2$ . Потом измерим расстояние между  $A_2$  и следующим за ним концевым городом  $A_3$  и так далее. После не более чем 100 таких измерений мы вернемся в исходный город  $A_1$ .

Покажем, что при этом каждая дорога нашей сети будет пройдена ровно два раза в противоположных направлениях. Рассмотрим произвольную дорогу. При удалении из дерева любого ребра оно распадается на две компоненты связности  $K_1$  и  $K_2$ , причем каждая из них содержит города. Пусть изначально мы находились в  $K_1$ . Поскольку необходимо обойти все города сети, мы должны пройти по этой дороге два раза: первый раз – когда движемся из  $K_1$  в  $K_2$ , а второй – когда возвращаемся обратно. Процедура обхода устроена таким образом, что мы посетим все вершины компоненты  $K_2$  до того, как покинем ее, поэтому больше проходить по дороге из  $K_1$  в  $K_2$  не потребуется.

Наконец, сложив измеренные величины и разделив сумму пополам, мы получим длину всей сети. **14. 8.**

Пусть ребро исходного куба, из которого получился кубооктаэдр, равно 1. Рассмотрим сечения кубооктаэдра плоскостью, параллельной основанию куба, на расстоянии  $0 < h < \frac{1}{2}$  от основания.

В сечении будут получаться восьмиугольники, все углы которых равны  $135^\circ$ . Для доказательства этого факта достаточно рассмотреть точки пересечения плоскости сечения с ребрами куба (рис.11). Найдем значение  $h$ , при котором соседние стороны получающе-

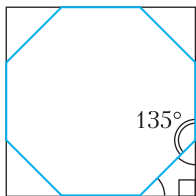


Рис. 11

гося в сечении восьмиугольника равны, тогда он окажется правильным. Длина  $x$  стороны, которая лежит в грани куба, находится из пропорции  $\frac{x}{1} = \frac{h}{1/2} = 2h$ . Другая сторона – это гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника, длина которой равна  $\frac{\sqrt{2}}{2} - h\sqrt{2}$ . Поэтому доста-

точно потребовать, чтобы выполнялось равенство  $2h = \frac{\sqrt{2}}{2} - h\sqrt{2}$ , т.е.  $h = \frac{1}{2(1+\sqrt{2})} < \frac{1}{2}$ . Итак, правильный восьмиугольник в сечении получиться может.

Предположим, что в сечении кубооктаэдра некоторой плоскостью  $\alpha$  получился правильный  $n$ -угольник и  $n > 8$ . Тогда вершины этого  $n$ -угольника должны лежать на ребрах кубооктаэдра, причем одному ребру не может принадлежать более двух вершин  $n$ -угольника. Рассмотрим сечение исходного куба, которое является правильным шестиугольником

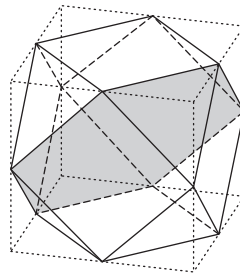


Рис. 12

(на рисунке 12 оно закрашено серым), а также сечения, которые получаются из данного поворота на  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  и  $270^\circ$  относительно вертикальной оси куба. Заметим, что объединение сторон этих четырех правильных шестиугольников

есть объединение всех ребер кубооктаэдра. Покажем, что на сторонах какого-то из четырех выбранных правильных шестиугольников лежит хотя бы 3 вершины  $n$ -угольника. Действительно, если на сторонах каждого такого шестиугольника лежит не более двух вершин, то всего вершин будет не более восьми. Следовательно, плоскость сечения  $n$ -угольника совпадает с плоскостью этого шестиугольника и в сечении кубооктаэдра получается шестиугольник. Получаем противоречие.

**15.** Пусть  $x_1 < x_2 < x_3$  – корни многочлена  $P(x)$ . По условию  $x_3 = x_1 + x_2$ . Заметим, что  $x_1 > 0$  (а значит, все корни положительны), так как иначе  $x_3 \leq x_2$ , что противоречит максимальнойности корня  $x_3$ . Далее можно рассуждать по-разному.

Например, можно заметить что  $-a = x_1 + x_2 + x_3 = 2x_3$ . Кроме того,  $c - ab = P(-a) = P(2x_3) > 0$ , так как многочлен  $P(x)$  положителен при  $x > x_3$ .

**16.** Точка  $O$  – центр описанной окружности треугольника  $ABC$ , следовательно,  $\angle AOB = 2\angle C$ . Треугольник  $AOB$  равнобедренный, поэтому  $\angle BAO = \frac{180^\circ - \angle AOB}{2} = 90^\circ - \angle C$ . Точки  $B$  и  $B_1$

симметричны относительно прямой  $AC$ , откуда  $\angle BB_1C = 90^\circ - \angle C$ . Следовательно, четырехугольник  $ABKB_1$  вписанный (рис. 13). Дуги  $BA$  и  $AB_1$  равны в силу симметрии, поэтому  $\angle BKA = \angle AKB_1$ . Значит, луч  $KA$  является биссектрисой угла  $BKB_1$ , что и требовалось доказать.

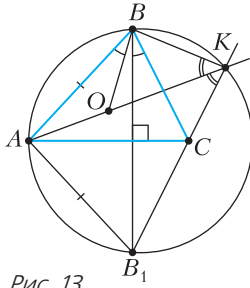


Рис. 13

17. 13 264 513.

Пусть наименьшее подходящее число имеет вид  $a_1a_2 \dots a_n$ . Из условия следует, что среди его цифр нет 0 и 7. Если в числе есть цифры 8 или 9, то их можно заменить на 1 или 2 соответственно и получить меньшее число с тем же свойством. Таким образом, искомое число состоит из цифр от 1 до 6.

Рассмотрим соседние цифры  $a_k$  и  $a_{k+1}$ . По условию числа с замененными семеркой цифрами  $a_1a_2 \dots 7a_{k+1} \dots a_n$  и  $a_1a_2 \dots a_k 7 \dots a_n$  делятся на 7, следовательно, их разность также кратна 7, т.е.  $10a_k \equiv a_{k+1} \pmod{7}$  для любого  $k$ . Значит, запись числа может быть устроена только следующим образом: за 1 следует 3, за 3 следует 2 (поскольку цифры 9 в числе нет) и так далее (рис. 14).

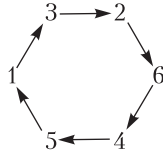


Рис. 14

По условию исходное число, у которого вместо последней цифры стоит 7, делится на 7. Следовательно, исходное число без последней цифры  $a_1a_2a_3 \dots a_{n-1}$  делится на 7. Используя несколько раз сравнение  $10a_k \equiv a_{k+1} \pmod{7}$ , получаем:

$$\begin{aligned} a_1a_2 \dots a_{n-1} &\equiv a_1 10^{n-2} + a_2 10^{n-3} + a_3 10^{n-4} + \dots + a_{n-1} \equiv \\ &\equiv 10a_1 \cdot 10^{n-3} + a_2 10^{n-3} + a_3 10^{n-4} + \dots + a_{n-1} \equiv \\ &\equiv 2a_2 10^{n-3} + a_3 10^{n-4} \dots + a_{n-1} \equiv \dots \equiv (n-1)a_{n-1} \pmod{7}. \end{aligned}$$

Поскольку  $a_{n-1}$  не делится на 7, заключаем, что  $n-1$  делится на 7, поэтому наименьшее возможное  $n$  равно 8. Таким образом, наименьшее возможное число состоит не менее чем из восьми знаков. Остается заметить, что число 13 264 513 удовлетворяет условию задачи, а поскольку оно начинается с 1, то это число и будет наименьшим.

18. Да, существует.

Пусть  $a$  – некоторое положительное число. Треугольник со сторонами 1,  $a$  и  $a^2$  существует тогда и только тогда, когда выполняются три неравенства:

$$1 < a + a^2, \quad a < 1 + a^2, \quad a^2 < a + 1.$$

Первое из этих неравенств выполнено при  $a > \frac{1}{\varphi}$ , второе – при всех положительных  $a$ , третье – при  $a < \varphi$ , где  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  – так называемое «золотое сечение», положительный корень квадратного уравнения  $x^2 - x - 1 = 0$ . Следовательно, треугольник с такими сторонами существует при  $a \in \left(\frac{1}{\varphi}; \varphi\right)$ . При таких же  $a$  существует треугольник со сторонами 1,  $\frac{1}{a}$  и  $\frac{1}{a^2}$ . Пусть далее значение  $a$  принадлежит отрезку  $\left[1; \sqrt{\varphi}\right] \subset \left(\frac{1}{\varphi}; \varphi\right)$ .

В декартовой системе координат  $Oxy$  отметим точки  $O(0; 0)$ ,  $B(1; 0)$ , точку  $A$  в полуплоскости  $y > 0$ , для которой  $OA = a^2$  и  $AB = a$ , а также точку  $C$  в полуплоскости  $y < 0$ , для которой  $OC = \frac{1}{a^2}$  и  $CB = \frac{1}{a}$  (рис. 15). По доказанному выше такие точки существуют для всех  $a \in \left[1; \sqrt{\varphi}\right]$ . Кроме того, треугольники  $OAB$  и  $OBC$  подобны по трем пропорциональным сторонам. Значит,  $\angle AOB = \angle BOC$  и  $\angle OAB = \angle OBC$ . Поскольку  $1 \leq a \leq a^2$ , угол  $AOB$ , лежащий напротив стороны  $a$  треугольника  $OAB$ , меньше  $90^\circ$ . Отсюда получаем, что  $\angle AOC = 2\angle AOB < 180^\circ$  и  $\angle ABC = \angle ABO + \angle OBC = \angle ABO + \angle OAB < 180^\circ$ . Следовательно,  $OABC$  – выпуклый четырехугольник при всех указанных значениях  $a$ .

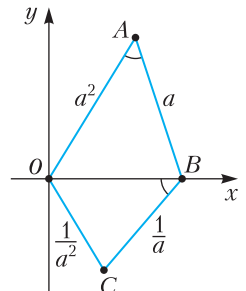


Рис. 15

Пусть точка  $A$  имеет координаты  $(x; y)$ , тогда  $x^2 + y^2 = a^4$  и  $(x-1)^2 + y^2 = a^2$ . Из этих уравнений получаем  $x = \frac{a^4 - a^2 + 1}{2} = f(a)$  и

$y = \sqrt{a^4 - f^2(a)}$ . Эти выражения непрерывно зависят от  $a$  на отрезке  $\left[1; \sqrt{\varphi}\right]$ . Аналогично доказывается, что координаты точки  $C$  также непрерывно зависят от  $a$  на этом отрезке. Следовательно, длина диагонали  $AC$  четырехугольника  $OABC$ , равная  $g(a)$ , также непрерывно зависит от  $a$  на этом отрезке.

При  $a = 1$  треугольники  $OAB$  и  $OBC$  являются равносторонними со стороной 1, поэтому  $g(1) = \sqrt{3}$ . При  $a = \sqrt{\varphi}$  получаем

$$g(\sqrt{\varphi}) = AC < AB + BC = \sqrt{\varphi} + \frac{1}{\sqrt{\varphi}} = \frac{1 + \varphi}{\sqrt{\varphi}} = (\sqrt{\varphi})^3.$$

Значит, непрерывная на отрезке  $[1; \sqrt{\varphi}]$  функция  $g(a) - a^3$  принимает в концах этого отрезка значения разных знаков:  $g(1) - 1^3 = \sqrt{3} - 1 > 0$  и  $g(\sqrt{\varphi}) - (\sqrt{\varphi})^3 < 0$ . Поэтому найдется такое значение  $a \in (1; \sqrt{\varphi})$ , при котором  $g(a) - a^3 = 0$  и, следовательно,  $OC = \frac{1}{a^2}$ ,  $CB = \frac{1}{a}$ ,  $OB = 1$ ,  $AB = a$ ,  $OA = a^2$  и  $AC = a^3$ . Таким образом, искомым четырехугольником существует.

**19.** Да, можно.

Для описания отправляемых в лабораторию смесей составим таблицу, состоящую из 120 строк и 19 столбцов. Каждый столбец таблицы – это описание состава смеси, отправляемой в лабораторию. На пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца стоит 1, если  $j$ -я смесь содержит жидкость из  $i$ -й пробирки, и 0 в противном случае.

Сначала попробуем найти пару пробирок с ядом и противоядием, не устанавливая, где в этой паре яд, а где противоядие. Для этого огрубим результат лаборатории, убрав из него знак (т.е. будем считать, что для каждой смеси лаборатории сообщает результат +1, если в смеси есть яд без противоядия или противоядие без яда, и ноль иначе). Рассмотрим две строки, соответствующие пробиркам с ядом и противоядием. Их покоординатная сумма, взятая по модулю 2, совпадает со строкой результатов, присланных лабораторией. Следовательно, если все суммы пар строк таблицы, взятые по модулю 2, будут попарно различны, то мы сможем определить номера строк, соответствующих яду и противоядию.

Такую таблицу можно построить следующим образом. Первую ее строку заполним произвольно. Вторую строку заполняем так, чтобы она не совпадала с первой. Третья и все последующие строки должны удовлетворять двум условиям:

- новая строка не должна совпадать с уже заполненными;

- суммы всех возможных пар построенных строк, взятые по модулю 2, различны.

Покажем, что построение возможно. Покоординатную сумму строк  $a$  и  $b$ , взятую по модулю 2, будем обозначать как  $a \oplus b$ . Рассмотрим строчки  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$  и  $s_4$ . Предположим, что  $s_1 \oplus s_2 = s_3 \oplus s_4$ , тогда  $s_1 \oplus s_2 \oplus s_3 = s_3 \oplus s_3 \oplus s_4 = s_4$ . Следовательно, правила построения таблицы можно переформулировать следующим образом:

- новая строка не должна совпадать с уже заполненными;

- новая строка отлична от всех возможных сумм троек уже построенных строк.

Число строк длины 19, составленных из нулей и единиц, равно  $2^{19} = 2^{10} \cdot 2^9 > 1000 \cdot 500 = 500000$ . Запретов, даже после заполнения всех 120 строк,

будет не более чем  $C_{120}^3 + 120 = \frac{120 \cdot 119 \cdot 118}{6} + 120 < 20 \cdot 120 \cdot 120 + 120 = 288120 < 300000$ . Следовательно, такую таблицу можно построить. Чтобы определить пару пробирок с ядом и противоядием, найдем все попарные суммы строк таблицы, взятые по модулю 2. Найдем такие строки  $s_1$  и  $s_2$ , что  $s_1 \oplus s_2$  совпадает с огрубленным результатом лаборатории. Пробирки, соответствующие строкам  $s_1$  и  $s_2$ , содержат яд и противоядие. Далее, рассматривая уже настоящий результат лаборатории, мы сможем точно сказать, в какой пробирке яд, а в какой противоядие. Действительно, обязательно найдется хотя бы одна смесь, содержащая либо только яд, либо только противоядие, иначе строки таблицы, соответствующие пробирке с ядом и пробирке с противоядием, будут одинаковыми, что запрещено построением. Тогда по знаку результата для этой смеси мы сможем определить, был в ней яд или противоядие.

# КВАНТ

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,  
А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов,  
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,  
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**Е.В.Морозова**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован  
в Комитете РФ по печати.  
Рег. св-во ПИ №ФС77–54256**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,  
«Квант»**

**Тел.: +7 916 168-64-74**

**E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru**

**Отпечатано**

**в соответствии с предоставленными  
материалами**

**в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,  
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8**

**Тел.: (831) 216-40-40**

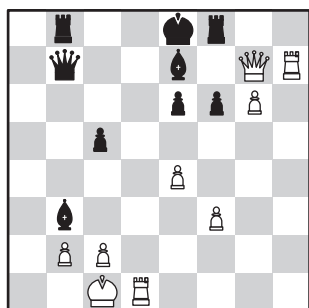


## НА РОССИЙСКИХ ПОЛЯХ

В мае-июне 2021 года прошли личный (этап «Высшая лига», Чебоксары) и командный (Сочи) чемпионаты России, подарившие любителям шахмат немало ярких партий, которые мы и рассмотрим сегодня.

### М.Чигаев – И.Ильющенок Чебоксары, 2021

1. e4 c5 2. ♘f3 d6 3. d4 cd 4. ♘d4 ♘f6 5. ♘c3 a6 6. ♔g5 ♘bd7 7. ♘c4 ♗b6 8. ♘b3 e6 9. ♗d2 ♘e7 10. 0-0-0 ♘c5 11. f3 ♗c7 12. g4 b5 13. a3 ♗b8. Черные не меняются на b3, так как в подобной позиции конь необходим для развития атаки. 14. ♘a2!? Белые освобождают поле b3 для собственного коня. 14...b4 15. ab ♗b4 16. h4 ♗b8 17. ♘b3 ♗b7? Позволяет белым испортить пешечную структуру, сильнее 17...♘cd7!. 18. ♘f6 gf 19. ♗h6 ♘d7 20. g5 fg 21. hg ♗f8 22. ♗g7 a5 23. ♗h7 a4? (форсированно проигрывает, но остаться в игре могла помочь только серия «компьютерных» ходов: 23...♘b3+ 24. ♘b3 a4! 25. ♘a4 ♗a7!) 24. ♘c5 dc 25. ♘a4 (более точно 25. ♘d5! ed 26. ♘d5 ♗b6 27. ♘f7+) ♘a4 26. g6 f6 27. ♘b3 ♘b3



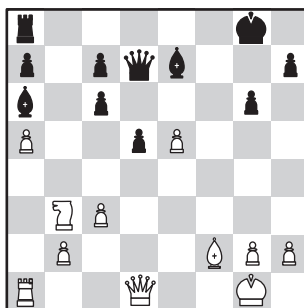
28. ♗f7+!! ♗f7 29. gf+ ♘f8 30. ♗g1, и ввиду неизбежного мата с g8 черные сдались.

Максим Чигаев занял второе место на турнире в Чебоксарах, а победителем стал Павел Понкратов, который продемонстрировал в одной из партий способ

игры на победу против «берлинской стены» – системы игры за черных в испанской партии, известной ничейными тенденциями.

### П.Понкратов – А.Горячкина Чебоксары, 2021

1. e4 e5 2. ♘f3 ♘c6 3. ♘b5 ♘f6 4. 0-0 ♘e4 5. d4 ♘d6 6. de ♘b5 7. a4 ♘bd4 8. ♘d4 d5 9. c3. Относительно редкий вариант берлинской защиты, известный по партиям Д. Дубова. 9...♘e7 10. f4 g6 11. ♘c6 bc 12. ♘e3 0-0?! В сложившейся пешечной структуре необходимо было сразу решать проблему черных полей: 12...c5! 13. ♘d2 d4 14. ♘f2 0-0. 13. ♘d2 f6 (вновь лучше 13...c5 14. ♘b3 ♗b8) 14. a5 ♘a6 15. ♗f2 fe 16. fe ♗f2 17. ♘f2 ♗d7 18. ♘b3.

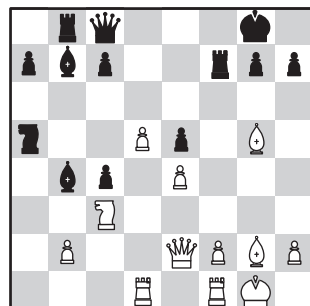


Позиция «мечты» для белых в подобной структуре, часто возникающей из шотландской партии. Легкие фигуры контролируют поле c5, и черные фактически играют без пешки. П.Понкратов уверенно довел партию до победы: 18...♗f8 19. ♗e1 ♗g4 20. h3 ♗f4 21. ♘d4 ♗e4 22. ♗d2 ♘c5 23. b4 ♘d4 24. ♘d4 ♗f5 25. ♗e1 ♗e6 26. ♘a7 ♗f5 27. ♘d4 g5 28. ♗d1 h6 29. ♗g4 ♗f7 30. ♗h2 ♘e7 31. ♗e3 ♗f4 32. ♗g3 ♗e8 33. ♗f3 ♗f3 34. ♗f3 ♗d7 35. ♗f8 ♘b5 36. ♗g1 ♘c4 37. ♗g7+ ♗d8 38. ♘c5 ♗c8 39. ♘b6 ♗d7 40. ♗f8+ ♗b7 41. ♘d4 h5 42. ♗f6 g4 43. e6 ♗h7 44. e7 ♗b1+ 45. ♗h2 ♗e1 46. ♘e5 c5 47. hg ♘b5 48. a6+ ♘a8 49. ♘c7 ♘e8 50. ♘g3, и черные сдались.

В командном чемпионате победу одержал клуб «Медный всадник» из Санкт-Петербурга, в составе которого особенно отличился Андрей Есипенко, набравший в 7 партиях 6,5 очков.

### А.Есипенко – М.Кобалия Сочи, 2021

1. d4 ♘f6 2. c4 e6 3. ♘f3 d5 4. g3 ♘b4+ 5. ♘c3 dc 6. ♘g2 ♘c6 7. 0-0 0-0 8. a3 ♘e7 9. e4 ♗b8 10. ♘e3 b5 11. ♗e2 ♘a5 12. ♗ad1 ♘b7 13. ♘e5 ♗c8 14. g4 b4 15. ab ♘b4 16. g5 ♘d7 17. ♘g4 f5 18. gf ♘f6 19. ♘f6+ ♗f6 20. ♘g5 ♗f7 21. d5 e5. Белые пожертвовали пешку за инициативу, в данный момент их преимущество определяется тем, что большинство черных фигур сконцентрировались на ферзевом фланге и не могут участвовать в защите короля, соответственно белым нужно действовать решительно.



22. f4 h6 23. fe! Белые жертвуют слона, но получают мощный кулак в центре. 23...♗f1+ 24. ♗f1 hg 25. e6 ♗d8 26. ♗h5 ♗e7 27. ♗f7 ♗c5+ 28. ♗h1 ♘c3! Изобретательно. В случае 29. bc ♘d5! белым остается лишь вечный шах после 30. ♗g7+ ♗g7 31. ♗g5+, а при 29. ♘h3 ♗e3! 30. ♘f5 ♗e1 вечный шах форсируют черные. 29. ♗f3! (парируя угрозы вторжения и угрожая матом после ♗f7 и ♗h3) ♘e1 30. ♗f7+ ♗h8 31. e7 ♗d6 32. e8♗+, и ввиду 32...♗e8 33. ♗e8+ ♗h7 34. ♗f8 черные сдались.

Индекс 90964

# Прогулки с физикой

Вода, вода, кругом вода



Паровая машина,  
гидроэлектростанция, ... ,  
водный фуникулер.  
Как только человек  
не использует энергию воды!

ISSN 0130-2221 21007



9 770130 222214

(ПОДРОБНЕЕ – НА С. 36 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)