

МАРТ

ISSN 0130-2221

2021 · № 3

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



С ИНДОНЕЗИЙСКОГО

НА

КИТАЙСКИЙ

Даны индонезийские предложения с переводом на китайский язык:

- | | |
|-------------------------------|-----------|
| 1. saja tetangga kawan engkau | 我是你的朋友邻居 |
| 2. saja kawan tetangga engkau | 我是你邻居的朋友 |
| 3. engkau tetangga kawan saja | 你是我的朋友邻居 |
| 4. tetangga engkau kawan saja | 你的邻居是我的朋友 |
| 5. kawan saja tetangga engkau | 我的朋友是你的邻居 |
| 6. kawan tetangga saja engkau | 我的邻居的朋友是你 |
| 7. tetangga kawan saja engkau | 我的朋友邻居是你 |
| 8. kawan tetangga engkau saja | 我的邻居的朋友是我 |

ЗАДАНИЕ 1

Переведите следующие предложения на китайский язык:

1. engkau kawan tetangga saja
2. tetangga kawan engkau saja
3. tetangga saja kawan engkau

ЗАДАНИЕ 2

Переведите на индонезийский язык китайское предложение:

你的朋友是我的邻居

Из книги «Задачи лингвистических олимпиад»

В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук
Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН
Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,
М.Н.Бондаров, Ю.М.Брук,
А.А.Варламов, С.Д.Варламов,
А.П.Веселов, А.Н.Виленкин, В.И.Голубев,
Н.П.Долбиллин, С.А.Дориченко,
В.Н.Дубровский, А.А.Заславский,
А.Я.Канель-Белов, П.А.Кожевников
(заместитель главного редактора),
С.П.Коновалов, К.П.Кохась, А.А.Леонович,
Ю.П.Плысов, А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,
А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,
А.В.Устинов, А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора)**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,
А.А.Боровой, В.В.Козлов,
Н.Н.Константинов, С.П.Новиков,
А.Л.Семенов, С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.КикоинПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА**А.Н.Колмогоров**

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

- 2 Черные дыры существуют. *Л.Белопухов*
12 Линейная независимость радикалов.
А.Канунников, И.Воробьев

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 21 Задачи М2642–М2645, Ф2649–Ф2652
22 Решения задач М2630–М2633, Ф2637–Ф2640

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 30 Задачи

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 31 Задачи 25–28

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Физика × геометрия (стереометрия)

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 34 Как Толик Втулкин физикой увлекся.
С.Дворянинов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 37 Раскраска таблицы в три цвета. *А.Боаг,
Л.Радзиловский*

ОЛИМПИАДЫ

- 42 Региональный этап XLVII Всероссийской
олимпиады школьников по математике
44 Региональный этап LV Всероссийской
олимпиады школьников по физике. Второй тур

- 51 Ответы, указания, решения

Вниманию наших читателей (29, 31)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к «Калейдоскопу «Кванта»*
II *Лингвистические задачи*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

Черные дыры существуют

Л. БЕЛОПУХОВ

НОБЕЛЕВСКАЯ ПРЕМИЯ ПО ФИЗИКЕ 2020 года – это официальное признание астрономией и физической космологией факта существования черных дыр.

Три года назад (2017 г.), когда Нобелевская премия была присуждена за регистрацию гравитационных волн, в официальной формулировке еще не было упоминания о черных дырах. Однако во всех комментариях по поводу той премии говорилось, что наблюдаемая гравитационная волна была рождена миллиард триста миллионов лет назад столкновением двух черных дыр.

К названию «черная дыра», введенному в научный оборот физиком Дж. Уилером в 1967 году, все уже привыкли. А благодаря научно-популярной литературе, фантастическим кинофильмам и компьютерным забавам эти слова становились знакомыми чуть ли не с детсадовского возраста. Уж очень необычны эти космические объекты. Среди многих эпитетов, которыми их награждали, самым безобидным было «бездонные творения Вселенной». А другие – такие, как «космические монстры», «по-

жиратели звезд», «невидимые убийцы», поневоле привлекали внимание. И действительно, необычны. И не то необычно, что большая масса притягивает к себе другие массы, а то, что она абсолютно невидима, не светится ни в каком диапазоне, от гамма-излучения до радиоволн.

Так если она невидима, то как же можно утверждать, что она существует? Но ведь и электрон невидим. А его существование косвенно доказывает и электрический ток, и фотоэффект, и атомные спектры, и все полупроводниковые устройства. То, что невидимый объект можно все же обнаружить, было ясно тем ученым, которые мысленно представили себе возможность существования такого объекта. Мы сейчас говорим: гипотеза родилась «на кончике пера теоретика».

За последние годы, несмотря на гипотетичность существования черных дыр, было опубликовано много серьезных научных статей и книг, но особенно много научно-популярных. Из научно-популярных статей следует выделить статью астронома и популяризатора науки В.Г. Сурдина в интернетовской энциклопедии «Кругосвет». При сравнительно небольшом объеме в ней изложена история астрономических

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20210301>



Нобелевские лауреаты по физике 2020 года: Р. Пенроуз, А. Гез, Р. Генцель

догадок о черных дырах, четко и полно рассмотрены важнейшие свойства черных дыр. Этой статье уже больше 10 лет, и в ней, естественно, не отражены самые новейшие исследования, а главное, триумф окончательного признания существования черных дыр. Часть этого материала изложена В.Г.Сурдиным в его более поздних прекрасных популярных лекциях, с которыми легко ознакомиться в интернете.

В этой «нобелевской» статье будут приведены лишь самые основные сведения о черных дырах. По-видимому, первым из тех, кто выдвинул гипотезу о существовании черных дыр, был английский естествоиспытатель и священник Джон Мичелл (1724–1793). Он был вдохновлен ньютоновской теорией всемирного тяготения, в особенности тем, что тяготение представлялось ему (как и Ньютону) «некоторым наиболее неуловимым божественным духом» (цитата из послесловия Ньютона к его «Началам»). Все другое, что изучал Ньютон, имело свои видимые причины – пружинки деформировались под действием внешней силы, пушечное ядро летело под действием пороховых газов. А вот невидимое и неосязаемое тяготение проникает во все тела и заставляет их притягиваться друг к другу, как бы далеко они ни находились. Фактически Ньютон впервые ввел понятие силового поля. Но мало известно, что он задолго до Фарадея и Максвелла относил это понятие не только к гравитации, но и к притяжению и отталкиванию электрически заряженных тел.

В 1783 году Мичелл послал письмо, а затем и выступил на заседании Лондонского Королевского общества со следующим сообщением. Хорошо зная и понимая ньютоновскую механику и закон всемирного тяготения, Мичелл оценил ту скорость, которую нужно придать телу, чтобы преодолеть тяготение планеты (или звезды). Он назвал эту величину *скоростью убегания*. По-современному – это вторая космическая скорость. Квадрат этой скорости прямо пропорционален массе притягивающего объекта и обратно пропорционален его радиусу. И Мичелл впервые попробовал применить это понятие к свету. Он

знал, что скорость света очень большая. По измерениям астронома О.Рёмера, сделанным им еще в 1676 году в результате наблюдения за движением спутников Юпитера, она равна 214000 км/с (более точное значение 300000 км/с). Мичелл приравнял эту скорость к скорости убегания и вычислил массу и радиус воображаемой звезды, которая своим притяжением удерживала бы испускаемый ею свет. Считая ее плотность такой же, как средняя плотность Земли, он получил для радиуса этой звезды величину порядка 250 солнечных радиусов. А тот факт, что ничего подобного на небе не наблюдается, тем и объясняется, что она не отпускает свет от себя. И искать ее нужно не по ее свечению, а по действию на другие звезды и планеты. Но ученое сообщество не приняло гипотезы Мичелла, поскольку движение планет (законы Кеплера) уже было прекрасно объяснено Ньютоном для всех известных тогда планет и влияния какого-то огромного тела нигде не обнаруживалось.

Через 12 лет знаменитый французский математик, физик и астроном Пьер Симон Лаплас (1749–1827) в своем труде «Изложение системы мира» рассмотрел гипотезу Мичелла и в заключение повторил его вычисления. Правда, из последующих изданий этого труда Лаплас исключил это рассмотрение. В отличие от Мичелла (и Ньютона) Лаплас считал свет не частицами, а волнами и понимал, что нельзя так просто применять к свету закон всемирного тяготения.

На протяжении всего 19-го века астрономы не интересовались проблемой «невидимых звезд» Мичелла и Лапласа. И только в 20-м веке, после создания А.Эйнштейном общей теории относительности (ОТО), астрономы вспомнили о них. Первым был немецкий математик, физик и астроном Карл Шварцшильд (1873–1916). В 1915 году он присутствовал на эпохальном заседании Прусской академии наук, где Эйнштейн сделал сообщение о своей только что законченной (он потратил на нее шесть лет) работе – общей теории относительности. Фактически это была новая теория тяготения, в которой ньютоновский закон

был всего лишь частным случаем, приближенно применимым к слабым гравитационным полям. Главной идеей в докладе Эйнштейна было утверждение, что тяготение – это проявление искажения пространства-времени объектами, имеющими массу и (или) энергию. В качестве астрономического подтверждения своей гипотезы Эйнштейн произвел приближенный расчет наблюдаемого смещения перигелия орбиты Меркурия, которое ньютоновская теория не могла объяснить.

Шварцшильд был покорен математической красотой новой теории тяготения, и за последний год своей жизни он сумел выполнить несколько теоретических работ. В двух из них были получены первые точные решения полевых уравнений ОТО – так называемые внутренние решения для не вращающегося массивного шарообразного однородного тела и внешнее решение для пространства вокруг сферически симметричного тела. Из этих решений вытекала возможность существования «невидимой звезды». Вот почему некоторые термины из теории черных дыр носят имя Шварцшильда. Прежде всего, это радиус Шварцшильда (или радиус горизонта событий) – условный размер сферического массивного объекта, делающий его невидимым. Самое удивительное, что этот размер в точности совпал с величиной, получающейся из классического выражения для второй космической скорости, если приравнять ее к скорости света c в вакууме: $R = 2GM/c^2$, где M – масса притягивающего объекта, а G – гравитационная постоянная.

Сам Эйнштейн, хоть и одобрил появление этих работ, не стал развивать их дальше. Дело в том, что решения Шварцшильда приводили к нестационарности поведения материи внутри звезды, которая стала невидимой, и к появлению точки с бесконечно большой плотностью в ее центре – так называемой сингулярностью. А Эйнштейн считал, что решения ОТО должны быть стационарными и не допускать сингулярности. И только работы бельгийского священника, астронома, космолога и математика Жоржа Леметра (1894–

1966) и русского математика, физика и геофизика А. Фридмана (1888–1925), опубликованные в 1922–1924 годах, убедили Эйнштейна, что ОТО не противоречит возможности существования нестационарной расширяющейся Вселенной и наличию сингулярности при ее рождении. Но проблемой существования объектов с теоретически возможной в их центрах бесконечной плотностью стали заниматься другие ученые.

Таким образом, проблема коллапсаров, как стали называть невидимые звезды, оказалась тесно связанной с проблемой возникновения и развития Вселенной. Большой вклад в теорию рождения Вселенной внес Г.Гамов (1904–1968), введший в обиход термин «Большой взрыв» по отношению к возникновению Вселенной из точки сингулярности. Задача решения уравнений ОТО применительно к коллапсарам привлекала к себе астрофизиков, хорошо владевших математикой. В их числе были астрономы Ф.Цвикки и В.Бааде, физики Р.Оппенгеймер и Х.Снайдер, астрофизик С.Чандрасекар. Большой вклад в решение этой проблемы внесли российские ученые А.Черепашук, Я.Зельдович, И.Новиков, А.Старобинский. В 1960-е годы был опубликован ряд работ, в которых решались уравнения ОТО для все более и более сложных случаев. Новозеландский ученый Р.Керр получил решение для вращающейся черной дыры сферической формы, а английский астрофизик Р.Пенроуз решил задачу для вращающейся черной дыры произвольной формы. Тогда же и появилось впервые это название «черная дыра» (Дж.Уилер). И оно мгновенно заменило все прежние названия.

В это время астрономы открыли пульсары – звездные объекты большой массы, но очень маленького размера, их стали называть нейтронными звездами. И в 1963 году впервые появилось подозрение, что отжившая свой срок звезда после стадии сверхновой может превратиться не только в нейтронную звезду, но и в черную дыру (если у нее будет достаточная масса). Выдающимся событием в астрофизике ста-

ла разработка С. Хокингом термодинамической теории черных дыр. Казалось, что черная дыра нарушает законы термодинамики, неограниченно повышая свою энтропию при поглощении масс. Но С.Корн, Я.Зельдович и С.Хокинг показали, что черной дыре должна соответствовать некоторая абсолютная температура и она обязана излучать энергию.

Вначале было непонятно, как связать это с главным свойством черной дыры – ничего не отпускать от себя, быть полностью невидимой. С.Хокинг разработал квантовый механизм потери массы черной дыры. По квантовым представлениям, около горизонта событий черной дыры вследствие принципа неопределенностей могут появляться виртуальные фотоны. При этом может быть отличной от нуля вероятность превращения такого фотона в пару частица-античастица. И по законам сохранения импульса и энергии одна из них вернется в черную дыру, а другая будет стремительно удаляться и сможет навсегда расстаться с ней. Черная дыра будет «худеть». Хокинг назвал это гипотетическое явление «испарением черной дыры». Это достижение Хокинга можно считать эпохальным в развитии физики. Подтвердилось, что законы физики нельзя рассматривать изолированно. Для объяснения сугубо макроскопического явления, связанного с черными дырами, необходимо было привлечь квантовую механику и стандартную модель, которые были разработаны для микромира.

Оказалось, что черная дыра – неустойчивая, неравновесная система. Понятие абсолютной температуры для нее не вполне точное. Но грубо ее можно оценить как $T = 10^{29}/M$, где M – масса черной дыры (в килограммах). Легко убедиться, что для черных дыр с массами порядка солнечной массы абсолютная температура составляет доли одного кельвина, а для гигантских черных дыр она равна 10^{-7} К, т.е. практически равна абсолютному нулю. При «испарении» черной дыры масса ее уменьшается, следовательно, температура увеличивается и возрастает скорость потери ею массы. В конечном счете черная

дыра может исчезнуть полностью. Были подсчитаны мощность излучения черной дыры, скорость потери массы и время ее существования. Последнее определяется формулой $\tau = 2 \cdot 10^{18} M^3$, где M – масса черной дыры (в килограммах). Из этой формулы видно, что для черных дыр с массой порядка массы Солнца время существования составляет огромную величину, на много порядков большую возраста Вселенной. Любопытно, что перед запуском суперколлайдера БАК появилось много спекуляций на тему рождения в нем мини-черных дыр. Но даже если эти гипотезы и окажутся верными, то легко подсчитать, что время существования таких объектов будет столь ничтожным, что они никак не смогут представлять собой опасности для человечества.

Астрономы заметили у предполагаемых черных дыр странное явление. Когда образуется так называемый аккреционный диск – вращающийся по спирали огромный плазменный диск вещества, втягиваемого черной дырой, то по оси его вращения были обнаружены тонкие стержни плазмы, стремительно (со скоростями, близкими к скорости света) удаляющиеся от черной дыры. Это явление тормозит нарастание массы черной дыры. На каком-то расстоянии от дыры эти струи становились неустойчивыми и разбивались на отдельные участки. Явление получило название *джеты* черной дыры.

Теоретическое объяснение джетов заключается в рассмотрении сложного по своему характеру переменного магнитного поля, рождаемого аккреционным плазменным диском. Возникающее при этом вих-



Втягивание вещества в аккреционный диск и джеты

ревое электрическое поле и разгоняет плазму до релятивистских скоростей. Положительно заряженные частицы двигаются в одну сторону, отрицательно заряженные – в другую. Кроме того, по этим направлениям двигаются и фотоны – гамма-частицы огромных энергий, рождающиеся при столкновениях плазменных частиц. Получается очень красивая картина грандиозного космического объекта. И сегодня уже обнаружено несколько сотен таких «картинок». Но эта красивая картина может означать и смертельную опасность для тех объектов, которые окажутся на пути джетов. Но тем не менее появились и фантастические проекты использования энергии джетов для межзвездных перелетов. Теория образования джетов – это область магнитогидродинамики, и она очень сложна. Одна из последних моделей была рассчитана в лаборатории фундаментальных и прикладных исследований релятивистских объектов Вселенной Московского физико-технического института.

Разрабатывались и сценарии возникновения черных дыр. Главный сценарий – это прохождение цикла угасания достаточно массивной звезды через стадии: сверхновая – белый карлик – нейтронная звезда – черная дыра. Таково происхождение черных дыр с массами порядка до 100 солнечных масс. Один из вариантов – образование двойной звезды, когда черными дырами становятся либо обе звезды, либо одна из них. Только в одной нашей галактике – Млечном Пути – теоретически можно ожидать десятки или даже сотни миллионов черных дыр, примерно по одной на каждую тысячу звезд. Накопилось несколько сотен таких «кандидатов» в черные дыры. Сегодня можно считать их уже не кандидатами, а полноправными членами семейства черных дыр.

Другой тип черных дыр – это реликты ранней стадии рождения Вселенной. Теория этого этапа рождения Мира еще только начинает создаваться, но астрофизики все больше склоняются к мнению, что в центре каждой галактики должна быть сверхмассивная черная дыра – с массой порядка 10^7 – 10^8 солнечных масс. Почему

же ближайшая такая черная дыра в центре Млечного Пути была открыта только в последние годы? Понятно, ведь она была надежно укрыта от наблюдения теми объектами, которые она притягивает, прежде всего пылегазовыми облаками, сквозь которые было очень нелегко измерять параметры движения звезд около центра галактики. Но все-таки две группы астрономов сумели справиться с этой задачей. После почти двадцатилетней работы было доказано, что многие звезды около центра нашей галактики движутся под действием мощного притягивающего объекта, самого по себе невидимого. Их орбиты подчиняются закону тяготения. Несомненно, что этот центр – черная дыра. Определена и ее масса – 4,3 миллиона солнечных масс. Свет от нее доходит до нас через 26 тысяч лет. Предполагается, что ближе к «краю» Вселенной, где находятся самые ранние свидетели ее возникновения, должны существовать и одиночные черные дыры, еще не ставшие галактиками. И, как уже сказано выше, могут существовать (рождаться в природных «ускорителях» и погибать) многочисленные микроскопические черные дыры.

Десять лет назад создалась странная ситуация. Астрономы не могли еще ручаться, что их наблюдения надежно свидетельствуют о существовании черных дыр. А теоретики-астрофизики занимались теорией их возникновения и предсказывали все новые особенности этих объектов. И было много ученых, которые не верили в черные дыры, а теоретические работы о них считали ошибочными. Только вот конкретных ошибок они не могли найти в этих работах, для этого нужно было очень серьезно изучить общую теорию относительности. И остается только преклоняться перед упорством и мужеством тех теоретиков, которые занимались черными дырами. Их вдохновлял упорный труд астрономов, которые совместно с инженерами, создателями астрономической аппаратуры, в том числе и спутниковой, во второй половине прошлого века начали глобальный штурм неба, все более и более детально изучая каждый его участок.

Первые подозрения, что черные дыры все-таки существуют, появились еще в 1964 году, когда суборбитальный высотный зонд зарегистрировал сильное рентгеновское излучение, испускаемое источником, получившим имя Cygnus X3 в созвездии Лебедь. Как выяснилось из многочисленных более поздних наблюдений, этот объект представлял собой систему из вращающихся вокруг общего центра масс черной дыры с массой 15 солнечных масс и голубого сверхгиганта с 19 солнечными массами. Эта пара находится от нас на довольно большом расстоянии 6700 световых лет, но все же ближе центра нашей галактики (26000 световых лет). А что же излучало рентгеновские фотоны? Скорее всего, внутренняя часть аккреционного диска перед поглощением ее черной дырой. По расчетам теоретиков, температура там достигает миллионов градусов. Для равновесного излучения (по закону Вина) максимум излучения как раз и приходится на рентгеновский диапазон. Но возможно, что в это излучение дает свой вклад и излучение джетов.

В 1960-х годах возникла загадка квазаров. К 1964 году было уже найдено несколько этих таинственных небесных объектов, находящихся очень далеко (по первым оценкам на расстоянии больше 10 миллиардов световых лет), но тем не менее наблюдаемых (главным образом радиотелескопами). Термин «квазар» (quasar) – это приближенная аббревиатура от их первого официального названия **quasi-stellar radiosource** (квазизвездный радиоисточник). Развитие радиоастрономии позволило открыть (и пронумеровать) сотни тысяч квазаров. Трудно назвать самый мощный из них, поскольку обработка наблюдений с трудом поспевает за автоматической регистрацией. На сегодня (начало 2021 года) – это зарегистрированный 17 июня 2020 года квазар с очень длинным регистрационным обозначением, содержащим 23 символа: SDSSJ140821.67+025733.2. Этот источник излучает в одну секунду энергии больше, чем, например, наше Солнце излучает за несколько сотен лет! Только поэтому его и можно заметить, хотя он находится от нас на расстоянии свыше 13 миллиардов све-

товых лет (на «краю» Вселенной). Его масса – 0,2 триллиона солнечных масс.

Главной загадкой квазаров была огромная величина излучаемой ими энергии. В 1964 году, когда было известно всего несколько гораздо менее мощных квазаров, после публикации об открытии в нашей галактике таинственного объекта, напоминающего гипотетическую черную дыру, независимо друг от друга советский ученый Я.Зельдович и американский астрофизик Э.Соллитер впервые сделали предположение о механизме излучения от квазаров и черных дыр (вернее, от вещества, падающего в черную дыру) и произвели оценочные расчеты возможной мощности этого излучения. Им тогда мало кто поверил. Ведь они опередили официальное признание черных дыр больше чем на пятьдесят лет! Сегодня излучение квазаров объясняется (по Зельдовичу) излучением аккреционных дисков вокруг центра молодой галактики, являющегося мощной черной дырой. Многие из них «съедают» все вещество вокруг и становятся тогда полностью ненаблюдаемыми объектами. Галактика с приведенным выше длинным номером регистрации 13 миллиардов лет назад была активно «работавшей». И она была поистине огромной – ее горизонт событий, или, что почти то же самое, внутренний диаметр ее аккреционного диска, имел размер, сопоставимый с размером Солнечной системы.

За изучение предполагаемой черной дыры в центре нашей галактики двадцать три года назад взялись две группы астрономов. Одну из них возглавлял немецкий астрофизик Райнхард Генцель. В 1987 году было начато сооружение комплекса радиотелескопов в Чилийской высокогорной пустыне Атакама на высоте 5058 метров. Группа Генцеля (европейские и чилийские астрономы) начали работу всего лишь на нескольких установках, а сегодня там 66 параболических антенн! Успех наблюдения обеспечивался огромной точностью их установки – тридцатиметровые расстояния между фокусами антенн определялись с точностью до сотых долей миллиметра. Это и принесло успех наблюдений.



Обсерватория Кека на Гавайях

Практически в то же время на Гавайях на высоте 4145 метров заканчивалось сооружение двух мощных оптических телескопов-рефракторов. Там работала группа американских ученых под руководством Андреа Гез. Она хотела стать астрономом, но в конечном счете закончила два из лучших американских технологических университетов – Массачусетский (МТИ) и Калифорнийский (Калтех). Несмотря на молодость она уже прославилась своими астрономическими наблюдениями и стала ведущим астрономом США. А ее энергия и увлеченность привлекли ряд спонсоров, обеспечивших финансовую сторону создания телескопов и строительства всей лаборатории. Главным из них был благотворительный фонд У.М.Кека (70 миллионов долларов). Два рядом расположенных телескопа работали в инфракрасном диапазоне. Тогда это были самые крупные инфракрасные телескопы в мире, на которых была использована ранее разработанная адаптивная оптика – способ с помощью расширения лазерного луча в верхних слоях атмосферы определять конкретное состояние погоды на пути наблюдения на определенную звезду и вносить изменения в компьютерную обработку результатов этих наблюдений.

Научное дружеское соревнование групп Гез и Генцеля принесло свои плоды. При изучении звездного скопления SO-2 в со-

звездии Стрельца, закрывающего центр Млечного Пути, были обнаружены большие скорости движения отдельных звезд этого скопления. А рассмотрение их эллиптических траекторий показало, что они подчиняются кеплеровским законам, что и дало возможность определить массу того тела, которое управляло движением звезд. Она составляла 4 миллиона солнечных масс и заставляла крутиться ближайшему к ней газовому облаку с релятивистскими скоростями порядка 0,3

скорости света.

Почти двадцать лет длились наблюдения, результатом которых стала уверенность, что в центре Галактики находится мощная черная дыра. Удалось также восстановить ее «биографию». Вначале она была очень активной, но потом ее активность стала уменьшаться – она не станет поглощать все звезды Млечного Пути (и нашу Землю). Правда, есть угроза со стороны соседней галактики (Туманности Андромеды), которая потихоньку приближается к нашей галактике и через пару миллиардов лет возможно их гигантское столкновение.

Астрономы групп Генцеля и Гез были, конечно, горячими сторонниками существования черных дыр. И для них большой радостью было известие о регистрации гравитационных волн, возникших так далеко, что их можно было объяснить только столкновением черных дыр.

И вот в 2020 году Нобелевскими лауреатами по физике стали Райнхард Генцель (Reinhard Genzel) и Андреа Гез (Andrea Ghez), разделившие половину Нобелевской премии «за открытие сверхмассивного компактного объекта в центре нашей Галактики». Вторая половина Нобелевской премии 2020 года была присуждена почетному профессору математики Оксфордского университета Роджеру Пенроу-

зу (Roger Penrose) «за открытие, согласно которому общая теория относительности надежно предсказывает рождение черных дыр». Впервые в текстах обоснований Нобелевских премий появился термин «черные дыры». Это и следует считать уже окончательным признанием существования во Вселенной этих объектов.

Из истории теоретических обоснований черных дыр следует, что теоретиков-астрофизиков, вложивших вклад в это обоснование, было довольно много. И трудно разобраться, кто из них внес самый большой вклад. Тем более, что работа Пенроуза 1965 года с окончательным изложением своих результатов была представлена всего лишь на двух с половиной журнальных страницах и не содержала математических доказательств. Возможно, Р.Керр или С.Хокинг сделали больше. А сам Пенроуз через несколько лет стал заниматься совсем другими теоретическими вопросами. Но дело в том, что сегодня из всей плеяды теоретиков, занимавшихся ранее черными дырами, остались только Р.Пенроуз, Р.Керр и К.Торн. Но К.Торн, «главный эксперт по общей теории относительности», стал в 2017 году Нобелевским лауреатом «за решающий вклад в развитие детектора LIGO и наблюдение гравитационных волн» (см., например, «Квант», 2018, №3). А дважды Нобелевским лауреатом по физике был только Дж.Бардин (за создание транзистора и за теорию сверхпроводимости). Р.Керр (совместно с Р.Блэндфордом) стал лауреатом престижной премии Крафорда по астрономии (присуждается Шведской Королевской академией наук реже чем раз в четыре года) «за фундаментальные работы по черным дырам». Правда, Р.Генцель тоже стал Крафордским лауреатом – еще в 2012 году «за работы по наблюдению за звездами, вращающимися вокруг галактического

центра, которые указывают на наличие массивной черной дыры».

Вообще говоря, за астрономию Нобелевские премии ее основателем не были предусмотрены (как и за математику). Но астрономия сейчас так тесно связана с физикой, что Нобелевский комитет уже стал присуждать премии и за астрономические работы. Впервые это произошло в 1967 году (Х.Бёте, «за вклад в теорию ядерных реакций, особенно за открытия, касающиеся источников энергии звезд»). С тех пор это случалось 10 раз, из них 4 – в прошедшем десятилетии (2011, 2017, 2019, 2020). За все время существования Нобелевских премий по физике из 214 лауреатов 24 – это астрофизики. А вот за последнее десятилетие из 27 лауреатов астрофизиков уже почти половина (12). Вот в какую область сейчас переместился центр интересов физической науки!

Безусловно, это связано, прежде всего, с прогрессом в конструировании телескопов, особенно радиотелескопов. И, конечно, с установками телескопов на орбитальных космических станциях. Среди многочисленной армии конструкторов, инженеров и техников этого оборудования невозможно выделить несколько (по традиции Нобелевского комитета, не более трех) самых достойных Нобелевской награды. Но по сути, все они – тоже соавторы астрономических открытий. Что-то похо-



Радиотелескоп SKA

жее уже было, когда в 2013 году Нобелевская премия по физике была присуждена за «открытие бозона Хиггса» двум теоретикам (в том числе и самому Хиггсу). И хотя в обосновании премии и говорилось о роли коллайдера БАК и всего ЦЕРН'а в этом открытии, Нобелевский комитет не мог, конечно, выделить самых достойных кандидатов – их было слишком много.

В качестве иллюстрации достижений современной наблюдательной астрономии приведем краткие сведения об одном проекте. В 2016 году были сделаны первые измерения на строящемся гигантском радиотелескопе SKA (Square Kilometer Array). Он представляет собой комплекс, состоящий из трех объектов, расстояние между которыми свыше 3000 км, в пустынных местностях Южной Африки, Австралии и Новой Зеландии. Общее количество антенн поражает воображение – 9000 параболических антенн, каждая из которых высотой с трехэтажный дом, и два миллиона так называемых дипольных антенн, среди которых есть и большие (как деревья) и маленькие (лежащие на земле решетки). Сегодня построены 200 параболических антенн в Южной Африке и ведется монтаж десятков тысяч дипольных антенн в Австралии.

Почему элементы одного прибора разнесены на межконтинентальное расстояние? Дело в том, что чем больше расстояние между принимающими излучение приборами, тем точнее измеряется положение объекта на небесной сфере. В интерференционном радиотелескопе расстояние между двумя приборами играет такую же роль, как и диаметр одиночной антенны. При огромных расстояниях можно достичь углового разрешения в несколько десятитысячных долей угловой секунды. А само название SKA связано с тем, что общая площадь воспринимаемых радиоизображений будет составлять квадратный километр, в котором миллион квадратных метров, т.е. миллион отдельных изображений. Такое большое число антенн обеспечивает высокую чувствительность прибора и охват большего участка небесной сферы. Конечно, обработка огромного количества данных от каждого прибора и

их суммирование доступны только компьютеру. Когда войдет в строй весь телескоп SKA (от 2024 до 2030 года), в два центра обработки будет поступать информация, по объему превышающая весь нынешний интернетовский трафик, а для ее обработки создаются два мощных суперкомпьютера.

Безусловно, это – международный проект. Участвует в нем много стран, в первую очередь Великобритания, США, страны ЕС, Австралия, Южная Африка, Новая Зеландия, Китай, Индия, Канада – всего более 20 стран. Общая стоимость проекта превышает 1,5 миллиарда евро. На сегодня истрачена примерно половина этой суммы. К сожалению, Россия имеет пока только статус наблюдателя в этом проекте, хотя именно советским ученым еще сорок лет назад принадлежала сама идея сверхдлинных астрономических радиointерферометров.

Первая проба самой начальной стадии этого сооружения дала уже замечательные результаты. В изучаемом участке неба были открыты сотни неизвестных ранее очень удаленных галактик. Главная цель этих наблюдений – получить данные об очень молодой Вселенной в возрасте «всего лишь» несколько миллионов лет после Большого взрыва, т.е. в момент образования первых звезд и галактик. Кроме того, ожидается фиксирование гравитационных волн, уточнение представлений о темной материи и темной энергии и многое другое. У обычных оптических телескопов для



Изображение черной дыры

этого не хватает чувствительности. Да и радиоволны лучше доходят до Земли, чем излучения с меньшими длинами волн.

В заключение остановимся на вопросе, что же такое наблюдалось на знаменитом «изображении черной дыры», опубликованном 10 апреля 2019 года. «Изображением» это можно называть весьма условно, а уж «фотографией», как стали называть эту картинку в интернетовских и телевизионных новостях, и подавно нельзя. На самом деле это графическая иллюстрация отчета о десятилетней работе по изучению сверхмассивной черной дыры в галактике M87 с помощью системы интерференционных радиотелескопов. Основной целью этой работы было разобраться как можно лучше с характеристиками излучения того вещества, которое уже совсем близко подошло к горизонту событий черной дыры. Поэтому весь проект так и назывался Event Horizon Telescope – ЕНТ. Было задействовано 8 крупных радиотелескопов в Чили, Испании, на Гавайях, в Мексике, США и даже на Южном полюсе, в систему входило 9 интерференционных плеч длиной по несколько тысяч километров. Угловое разрешение этой системы было рекордным – 20 миллионных долей угловой секунды. Как пишет А.Понятов в журнале «Наука и жизнь» (2019, № 5), это соответствует возможности разглядеть спичечный коробок на лунной поверхности.

Международный коллектив составляли больше 200 астрономов из 60 исследовательских организаций. В течение четырех апрельских дней 2017 года ЕНТ проводил измерения центральной области M87. Все данные поступали в суперкомпьютеры – один в Институте радиоастрономии Общества Макса Планка, другой в американской обсерватории Хайстек. Компьютерная обработка огромного количества данных дала возможность представить размеры и характер аккреционного диска черной дыры, на фоне которого определилась «тень» черной дыры – область, в несколько раз большая горизонта событий, из которой свет уже не мог вырваться наружу и поэтому яркость излучения аккреционного диска здесь слабая.

Вся картина представляет собой пазл, сложенный из огромного числа отдельных

изображений, полученных из измерений приходящих к антеннам радиотелескопов радиоволн с длиной 1,3 мм, поскольку радиоволны с такой длиной лучше всего проходят сквозь земную атмосферу. Обработка нескольких петабайтов информации (петабайт – это 10^{15} байт), полученной в результате работы всех радиотелескопов, проводилась с помощью новейших вычислительных методов, разработанных специально для этой цели участниками проекта. Она длилась два года. Поэтому итоги работы были опубликованы только в 2019 году. Россия не была участницей этого международного консорциума прежде всего потому, что радиотелескопов миллиметрового диапазона у нас пока нет. Есть два проекта, один из них космический, другой наземный (совместно с Казахстаном). Но все упирается в финансирование этих проектов.

Почему для работы телескопа горизонта событий была выбрана именно эта галактика? Самая близкая к нам черная дыра в центре галактики – это «наша» дыра, центр Млечного Пути. А вторая по близости с хорошо различимой центральной черной дырой – это M87 (созвездие Девы). И хотя расстояние до нее составляет 55 миллионов световых лет, что в 2100 раз больше расстояния до нашего центра, но зато она много ярче, поскольку ее масса в 1500 раз больше. Размер ее горизонта событий как раз соответствует разрешающей способности ЕНТ. Кроме того, немаловажно и то обстоятельство, что этот небесный объект хорошо наблюдается и в Северном, и в Южном полушарии. Это позволило задействовать в проекте телескопы обоих полушарий.

Главный результат всей проведенной работы – это не сама картинка, а те параметры, на основании которых компьютеры ее «сочинили». Они хорошо совпали как с измерениями, сделанными на основании результатов других обсерваторий, так и с теоретическими предсказаниями. И безусловно, это стало еще одним доказательством существования черных дыр. Из разряда «ужасных монстров» черные дыры перешли в перечень «законных» космических объектов, изучение которых подтверждает современные представления о Вселенной.

Линейная независимость радикалов

А.КАНУННИКОВ, И.ВОРОБЬЕВ

§1. Введение

Как доказать иррациональность чисел

$$\sqrt[3]{\frac{121}{111}}, \sqrt{2} + \sqrt{3}, \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}, \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}, \\ \sqrt[5]{3} - \sqrt[5]{2}, \sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{\sqrt[17]{2021!}}{2021} + \sqrt[5^{55}]{\frac{7^{77}}{3^{33}}}$$

Иррациональность одного радикала – простой, чисто арифметический вопрос, сводящийся к разложению на простые множители.

Лемма 1.¹ Пусть $A, B, k \in \mathbb{N}$ и $\text{НОД}(A, B) = 1$. Тогда $\sqrt[k]{A/B} \in \mathbb{Q}$, если и только если показатели степеней всех простых делителей в разложениях чисел A и B кратны k .

Число $\sqrt[3]{\frac{121}{111}} = \sqrt[3]{\frac{11^2}{3 \cdot 37}}$ иррационально по лемме 1. Если $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, то $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, откуда $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, что неверно по той же лемме. Предположив, что $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} = a \in \mathbb{Q}$, возведем равенство $\sqrt[3]{3} = a - \sqrt{2}$ в куб: $3 = a^3 + 6a - (3a^2 + 2)\sqrt{2}$ и придем к противоречию: $\sqrt{2} = \frac{a^3 + 6a - 3}{3a^2 + 2} \in \mathbb{Q}$. Однако остальные числа «голыми руками не возьмешь»: незатейливое возведение в степень только приумножит количество радикалов.

«Неужели, прочитав статью, я пойму, почему даже последнее, нарочито дикое,

число иррационально?» – наверное, думает читатель в эту минуту. «Да, – ответим мы, – если только вы умеете делить многочлены с остатком и извлекать корни из комплексных чисел. Если пока не умеете, то во всяком случае вы разберетесь со сколь угодно длинными суммами квадратных радикалов».

На самом деле мы докажем даже большее: между корнями из рациональных чисел не существует линейных соотношений с рациональными коэффициентами, кроме очевидных отношений пропорциональности, например $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Вот точная формулировка.

Теорема 1. Пусть $N, k_1, \dots, k_N \in \mathbb{N}$, $N > 1$, $0 < Q_1, \dots, Q_N \in \mathbb{Q}$ и $\sqrt[k_i]{Q_i} / \sqrt[k_j]{Q_j} \notin \mathbb{Q}$ при $i \neq j$. Тогда равенство

$$a_1 \sqrt[k_1]{Q_1} + \dots + a_N \sqrt[k_N]{Q_N} = 0, \\ \text{где } a_1, \dots, a_N \in \mathbb{Q},$$

выполняется только при $a_1 = \dots = a_N = 0$.

В частности, при $Q_1 = 1$ получим, что сумма $\sqrt[k_2]{Q_2} + \dots + \sqrt[k_N]{Q_N}$ иррациональна, так как равенство $a_1 \sqrt[k_1]{1} + \sqrt[k_2]{Q_2} + \dots + \sqrt[k_N]{Q_N} = 0$ не может выполняться ни при каком $a_1 \in \mathbb{Q}$.

Чтобы применять теорему 1, нужно проверять иррациональность отдельных радикалов $\sqrt[k_i k_j]{Q_i^{k_j} / Q_j^{k_i}}$ по лемме 1.

Задача 1. Выведите из теоремы 1 и леммы 1 иррациональность трех последних чисел в начале статьи.

На языке векторов утверждение теоремы 1 формулируется так: числа $\sqrt[k_1]{Q_1}, \dots, \sqrt[k_N]{Q_N}$ линейно независимы над \mathbb{Q} (сравните с

¹ Леммы и теоремы мы предлагаем читателю доказывать самостоятельно, так же как и решать задачи. Доказательства и решения будут приведены в следующем номере журнала.

некомпланарными векторами на рисунке 1). Условие

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

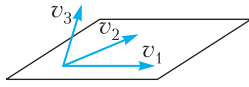


Рис. 1

$\sqrt[k_i]{Q_i} / \sqrt[k_j]{Q_j} \notin \mathbb{Q}$ в этих терминах озна-

чает линейную независимость чисел $\sqrt[k_i]{Q_i}$ и $\sqrt[k_j]{Q_j}$ над \mathbb{Q} (линейная независимость двух векторов – это просто их неколлинеарность).

Вообще, взгляд на алгебраические числа (в частности, на радикалы) как на векторы оказывается естественным и продуктивным – он позволяет применять геометрические идеи к алгебраическим задачам (см. [4]).

Сформулируем более удобную для доказательства, но, как окажется, равносильную теорему.

Теорема 2. Пусть $k, n \in \mathbb{N}$, p_1, \dots, p_n – разные простые числа, $r_1 = \sqrt[k]{p_1}, \dots, r_n = \sqrt[k]{p_n}$. Тогда система $\{r_1^{l_1} \dots r_n^{l_n} \mid 0 \leq l_1, \dots, l_n < k\}$ из k^n чисел линейно независима над \mathbb{Q} .

Эту систему удобно представлять в виде n -мерной решетки (рис. 2).

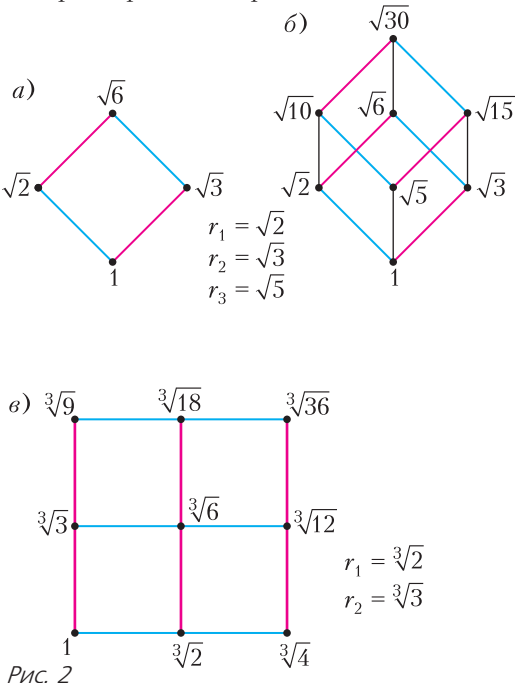


Рис. 2

Задача 2. а) Как связаны наборы чисел на параллельных сторонах квадрата на рисунке 2,а и на параллельных ребрах и гранях куба на рисунке 2,б? б) Попробуйте нарисовать гиперкуб (4-мерный куб) и расставить в его вершинах радикалы по тому же принципу.

Задача 3. Выведите теоремы 1 и 2 друг из друга.

Указание. $1 \Rightarrow 2$: числа из системы в теореме 2 попарно непропорциональны над \mathbb{Q} ; $2 \Rightarrow 1$: обобщите рассуждение из следующего примера.

Пример 1. Сведем линейную независимость (по умолчанию – над \mathbb{Q}) чисел $1, \sqrt{1/2}, \sqrt[3]{4/3}$ к теореме 2. Выравняем показатели корней: $1, \sqrt[6]{1/2^3}, \sqrt[6]{2^4/3^2}$, домножим второе число на 2, а третье – на 3: $1, \sqrt[6]{2^3}, \sqrt[6]{2^4 \cdot 3^4}$ (это не влияет на линейную независимость). Получим подсистему системы $\{\sqrt[6]{2^{l_1}} \sqrt[6]{3^{l_2}} \mid 0 \leq l_1, l_2 \leq 5\}$, а она линейно независима по теореме 2.

В литературе для школьников неоднократно обсуждался случай квадратных радикалов (см. [2, 4, 6]). В §2 мы разберем его на примерах, подводя ко многим, пусть и не всем, идеям в общей ситуации. Теорема 2 при $n = 1$ доказана в [5]. Общий случай разобран, например, в научной статье [7] с помощью теории Галуа. В §3 мы докажем теорему 2 достаточно элементарно, попутно сообщая необходимые сведения об алгебраических числах, интересные и сами по себе. В конце мы приведем совсем короткое доказательство теоремы 1, доступное первокурснику. Все необходимое для понимания собрано в §4 (в следующем номере журнала).

§2. Случай квадратных радикалов

Теорему 2 при $k = 2$ можно доказать индукцией по n . База $n = 1$: линейная независимость 1 и $\sqrt{p_1}$ означает просто иррациональность $\sqrt{p_1}$ и имеет место по лемме 1. Разберем случаи $n = 2, 3$ на конкретных примерах – так проще объяснить и

понять идеи доказательства. Полное рассуждение с любым k индукцией по n проведем в §3.

Пример 2. Докажем, что числа $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ (см. рис.2,*a*) линейно независимы. Пусть $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0$, где $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Выделим $\sqrt{3}$: $a + b\sqrt{2} + (c + d\sqrt{2})\sqrt{3} = 0$. Если $c + d\sqrt{2} = 0$, то и $a + b\sqrt{2} = 0$, а тогда, ввиду иррациональности $\sqrt{2}$, $c = d = 0$ и $a = b = 0$. Если же $c + d\sqrt{2} \neq 0$, то

$$\begin{aligned} \sqrt{3} &= -\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \\ &= -\frac{(a + b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})}{c^2 - 2d^2} = A + B\sqrt{2}, \end{aligned}$$

$$\text{где } A = \frac{bd - ac}{c^2 - 2d^2}, B = \frac{ad - bc}{c^2 - 2d^2} \in \mathbb{Q}.$$

Возведем равенство $\sqrt{3} = A + B\sqrt{2}$ в квадрат:

$$3 = A^2 + 2B^2 + 2AB\sqrt{2} \Rightarrow AB = 0, \text{ иначе } \sqrt{2} \in \mathbb{Q}.$$

При $A = 0$ получаем $\sqrt{3/2} = B \in \mathbb{Q}$, при $B = 0$ получаем $\sqrt{3} = A \in \mathbb{Q}$ – противоречие с леммой 1.

Мы свели линейную независимость чисел на рисунке 2,*a* к «инородности» $\sqrt{3}$ по отношению к множеству

$$\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2} = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

(формально, $\sqrt{3}$ не лежит в нем), подобно тому как $\sqrt{2}$ инородно по отношению к \mathbb{Q} . При этом оказалось важно, что в множестве $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$ можно не только складывать, вычитать, умножать, но и делить (не на 0), как и в \mathbb{Q} . Прежде чем сделать следующий шаг, введем несколько понятий.

Немного теории. Множество чисел, содержащее 0 и 1 и замкнутое относительно четырех арифметических действий, называется *числовым полем*. Слово «числовое» мы будем опускать. Итак, K – поле, если $0, 1 \in K$ и для любых $a, b \in K$ верно

$a \pm b, ab \in K$ и $a/b \in K$ при $b \neq 0$. Легко понять, что \mathbb{Q} – поле, причем «самое маленькое» – любое поле его содержит.² Если поле K содержится в поле L , то говорят, что K – *подполе* в L . В этом параграфе все поля лежат в поле \mathbb{R} действительных чисел.

Числа x_1, \dots, x_n называются *линейно независимыми над полем K* , если равенство $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$, где $a_1, \dots, a_n \in K$, выполняется только при $a_1 = \dots = a_n = 0$. Например, числа 1 и $\sqrt{2}$ линейно независимы над \mathbb{Q} , но линейно зависимы над \mathbb{R} (равенство $a_1 \cdot 1 + a_2\sqrt{2} = 0$ верно при $a_1 = \sqrt{2}$ и $a_2 = -1$).

Лемма 2 (свойства линейной зависимости над произвольным полем K).

1) Система, содержащая 0 или два числа, отношение которых лежит в K , линейно зависима над K .

2) Подсистема линейно независимой системы линейно независима.

3) Система 1, x линейно независима над K , если и только если $x \notin K$.

4) Коэффициенты $a_1, \dots, a_n \in K$ в записи числа $a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ определены однозначно, если и только если система x_1, \dots, x_n линейно независима над K .

Наименьшее (по включению) поле, содержащее поле K и числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, обозначается $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и называется полем, порожденным над K этими числами. Опишем поле, порожденное над K одним квадратным радикалом $\sqrt{d} \notin K$, где $d \in K$. Поле $K(\sqrt{d})$, очевидно, состоит из отношений чисел вида $a + b\sqrt{d}$, где $a, b \in K$. Но от иррациональности в знаменателе можно избавиться, домножив на сопряженное $a - b\sqrt{d}$:

$$\frac{1}{a + b\sqrt{d}} = \frac{a - b\sqrt{d}}{a^2 - db^2}$$

(как в примере 2). Значит,

$$K(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in K\}.$$

² Бывают и другие поля: поле вычетов \mathbb{Z}_p , поле рациональных функций и др. Любое поле содержит либо \mathbb{Q} , либо \mathbb{Z}_p .

Пример 3. Пусть p, q – различные простые числа. Аналогично примеру 2, $\sqrt{q} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ и числа $1, \sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{pq}$ линейно независимы над \mathbb{Q} . Поэтому

$$\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}) = \mathbb{Q}(\sqrt{p})(\sqrt{q}) = \{a + b\sqrt{p} + c\sqrt{q} + d\sqrt{pq} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\},$$

причем запись чисел в таком виде однозначна.

Пример 4. Докажем, что числа на рисунке 2,б линейно независимы над \mathbb{Q} . Пусть $a_1 + a_2\sqrt{2} + \dots + a_8\sqrt{30} = 0$, где $a_1, a_2, \dots, a_8 \in \mathbb{Q}$.

Шаг 1. Вынося $\sqrt{5}$ за скобки, получим равенство вида $A + B\sqrt{5} = 0$, где $A, B \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$:

$$\underbrace{a_1 + a_2\sqrt{2} + a_3\sqrt{3} + a_5\sqrt{6}}_A + \underbrace{(a_4 + a_6\sqrt{2} + a_7\sqrt{3} + a_8\sqrt{6})}_{B}\sqrt{5} = 0. \quad (1)$$

Достаточно доказать, что $A = B = 0$. Тогда, согласно примеру 2, $a_1 = a_2 = a_3 = a_5 = 0$ и $a_4 = a_6 = a_7 = a_8 = 0$.

Шаг 2. Надо доказать, что числа 1 и $\sqrt{5}$ линейно независимы над полем $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Это равносильно условию $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ (пункт 3 леммы 2).

Шаг 3. Предположим, что $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, т.е., с учетом описания этого поля в примере 3,

$$\sqrt{5} = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}, \quad \text{где } a, b, c, d \in \mathbb{Q}. \quad (2)$$

Большое число радикалов может отбить желание возводить в квадрат. Однако это можно сделать по-умному, предварительно сгруппировав слагаемые одним из двух способов:

$$\underbrace{a + b\sqrt{2}}_C + \underbrace{(c + d\sqrt{2})}_{D'}\sqrt{3} = \sqrt{5} = \underbrace{a + b\sqrt{3}}_{C'} + \underbrace{(b + d\sqrt{3})}_{D'}\sqrt{2}, \quad (3)$$

и «не тревожить» C, D, C', D' . Возведем в

квадрат первое равенство:

$$C^2 + 3D^2 + 2CD\sqrt{3} = 5.$$

Так как числа 1 и $\sqrt{3}$ линейно независимы над полем $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, то $CD = 0$. Аналогично, $C'D' = 0$. Всего 4 варианта: $C = C' = 0$, $C = D' = 0, C' = D = 0$ или $D = D' = 0$. Если $C = C' = 0$, то $a = b = c = 0$, поэтому $\sqrt{5} = d\sqrt{6}$, а это противоречит лемме 1. В других случаях получается аналогичное противоречие, так как в правой части равенства (2) остается лишь одно ненулевое слагаемое.

Задача 4. Докажите теорему 2 при $k = 2$: сделайте шаг индукции от $n - 1$ к n , следуя примеру 4.

Прежде чем переходить к радикалам более высокой степени, обсудим, как можно было сделать последний шаг с прицелом на общий случай – без возведения в квадрат. Согласитесь, даже столь безобидное равенство, как $\sqrt[3]{3} = a + b\sqrt[3]{2}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$), едва ли удастся привести к противоречию лобовым возведением в пятую степень... Что если в равенствах (3) перейти к сопряженным числам?

Назовем числа вида $a \pm b\sqrt{d}$ над полем K , где $a, b, d \in K, \sqrt{d} \notin K$, сопряженными. В равенствах (3) сопряженным к числу $C + D\sqrt{3}$ над полем $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ будет $C - D\sqrt{3}$, а сопряженным к числу $C' + D'\sqrt{2}$ над полем $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ будет $C' - D'\sqrt{2}$. В то же время сопряженным к числу $\sqrt{5}$ над обоими полями будет $-\sqrt{5}$. Раз числа равны, то равны и их сопряженные:

$$C - D\sqrt{3} = -\sqrt{5} = C' - D'\sqrt{2}. \quad (4)$$

Отсюда и из (3) получаем $C = C' = 0$, что невозможно, как показано выше.

Увы, несмотря на кажущуюся строгость, это рассуждение содержит «дыру», однако его можно спасти. Логическая ошибка довольно тонкая, и читатель, который ее обнаружит и исправит, вправе собой гордиться.

Задача 5. Почему переход от (3) к (4) не обоснован и как его доказать?

Переход к сопряженным часто бывает эффективен. Вот несколько олимпиадных задач на эту тему.

Задача 6. Существуют ли такие рациональные числа a, b, c, d , что $(a + b\sqrt{2})^2 + (c + d\sqrt{2})^2 = 7 + 5\sqrt{2}$?

Задача 7. Найдите первые 1000 знаков после запятой в десятичной записи числа $(6 + \sqrt{35})^{1000}$.

Задача 8. Докажите, что произведение 2^{100} чисел $\pm\sqrt{1} \pm \sqrt{2} \pm \dots \pm \sqrt{99} \pm \sqrt{100}$ — полный квадрат.

§3. Общий случай

Начнем доказывать теорему 2 при произвольном k , следуя плану из примера 4. При этом на каждом шаге будут возникать новые трудности. Чем дальше в лес — тем больше дров.

Шаг 1: отщепление последнего радикала. Линейное соотношение над \mathbb{Q} (т.е. с коэффициентами из \mathbb{Q}) девяти чисел на рисунке 2, в можно записать в виде

$$f_0(\sqrt[3]{2}) + f_1(\sqrt[3]{2})\sqrt[3]{3} + f_2(\sqrt[3]{2})\sqrt[3]{9} = 0,$$

где f_0, f_1, f_2 — многочлены степени меньше 3 над \mathbb{Q} (сгруппировали слагаемые, как в (1)). Поэтому линейная независимость этих чисел будет следовать из двух фактов:

числа $1, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9}$ линейно независимы над полем $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$; (5)

числа $1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$ линейно независимы над полем \mathbb{Q} . (6)

В самом деле, из (5) получаем $f_0(\sqrt[3]{2}) = -f_1(\sqrt[3]{2})\sqrt[3]{3} - f_2(\sqrt[3]{2})\sqrt[3]{9} = 0$, а тогда из (6) коэффициенты многочленов f_0, f_1, f_2 — нулевые. Это рассуждение несложно обобщить и свести теорему 2 к следующей.

Теорема 2'. В обозначениях теоремы 2 числа $1, r_n, \dots, r_n^{k-1}$ линейно независимы над полем $\mathbb{Q}(r_1, \dots, r_{n-1})$.

Шаг 2: «инородность» последнего радикала. Пусть K — любое поле, r — такое число, что $r^k \in K$. Выясним, когда

числа $1, r, \dots, r^{k-1}$ линейно независимы над K . (7)

Иными словами, r не должно быть корнем многочлена степени меньше k с коэффициентами из K . При $k = 2$ это просто означает, что $r \notin K$. При $k > 2$ все гораздо сложнее и интереснее.

Немного теории. Множество многочленов над полем K обозначается $K[x]$. Многочлен над K положительной степени, который не раскладывается в произведение многочленов над K меньших степеней, называется *неприводимым* над K . Многочлены над полем можно делить с остатком («уголком»).

Пусть число α является корнем ненулевого многочлена над полем K , тогда оно называется *алгебраическим над K* . Среди всех таких многочленов только один имеет наименьшую степень и старший коэффициент 1 (если бы их было два, то их разность была бы многочленом меньшей степени с корнем α). Он называется *минимальным многочленом* числа α над K , и мы будем его обозначать $\mu_\alpha^K(x)$ или $\mu_\alpha(x)$, если ясно, о каком поле K идет речь.

Теорема 3. Многочлен $\mu_\alpha^K(x) = \mu_\alpha(x)$ обладает следующими свойствами:

1) его степень есть наименьшее такое $t \in \mathbb{N}$, что числа $1, \alpha, \dots, \alpha^m$ линейно независимы над K ;

2) многочлен $\mu_\alpha(x)$ неприводим над K ;

3) любой многочлен из $K[x]$ с корнем α делится на $\mu_\alpha(x)$;

4) неприводимый над K многочлен $p(x)$ с корнем α и старшим коэффициентом 1 равен $\mu_\alpha(x)$.

Таким образом, (7) $\Leftrightarrow \mu_r^K(x) = x^k - r^k \Leftrightarrow \Leftrightarrow$ двучлен $x^k - r^k$ неприводим над K . Например, утверждения (5) и (6) равносильны соответственно неприводимости двучлена $x^3 - 3$ над $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ и двучлена $x^3 - 2$ над \mathbb{Q} , а это значит, что $\sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ и $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$ (кубический многочлен неприводим над полем, если не имеет в нем корней). В общем случае условие «инородности» $r \notin K$ необходимо, но не достаточно. Хотя в нашем случае действующие лица K

и r лежат в поле \mathbb{R} , мы выйдем в комплексную плоскость – поле \mathbb{C} , где двучлен $x^k - r^k$ раскладывается на линейные множители. По формуле Муавра [3]

$$x^k - r^k = (x - r)(x - r\varepsilon)\dots(x - r\varepsilon^{k-1}),$$

где $\varepsilon = \varepsilon_k = \cos \frac{2\pi}{k} + i \sin \frac{2\pi}{k}$ (8)

(рис. 3).

Лемма 3. Пусть K – подполе в \mathbb{R} , $r \in \mathbb{R}$,

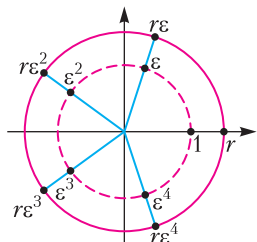


Рис. 3

$r^k \in K$ и $r, \dots, r^{k-1} \notin K$. Тогда двучлен $x^k - r^k$ неприводим над K .

(Для $r \notin \mathbb{R}$ лемма неверна; например, при $k = 3$ и $r = \varepsilon$ имеем $\varepsilon, \varepsilon^2 \in \mathbb{R}$, но двучлен $x^3 - 1$ приводим.)

Пример 5. Для любого простого p и натурального $k > 1$ имеем $\sqrt[k]{p}, \dots, \sqrt[k]{p^{k-1}} \notin \mathbb{Q}$ (лемма 1), поэтому двучлен $x^k - p$ неприводим над \mathbb{Q} (лемма 3)³, значит, $\mu_{\sqrt[k]{p}}^{\mathbb{Q}}(x) = x^k - p$.

Вообще, теорема 2' посредством леммы 3 сведена к **теореме 2''**: в тех же обозначениях

$$r_n, \dots, r_n^{k-1} \notin \mathbb{Q}(r_1, \dots, r_{n-1}). \quad (9)$$

При $n = 1$ это верно по лемме 1. Чтобы прийти к противоречию при $n > 1$, научимся записывать числа из $\mathbb{Q}(r_1, \dots, r_{n-1})$ в виде многочленов от r_1, \dots, r_{n-1} . Например, условие $\sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ запишется в виде $\sqrt[3]{3} \neq a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ при $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

³ В [5] линейная независимость чисел $1, \sqrt[k]{p}, \dots, \sqrt[k]{p^{k-1}}$ также сведена к неприводимости двучлена $x^k - p$, установленной по признаку Эйзенштейна.

Шаг 3: избавление от иррациональности в знаменателе. Пресловутое «домножение на сопряженное» работает лишь с квадратными радикалами. Как действовать при $k > 2$, сначала покажем на примере.

Пример 6. Избавимся от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 3}$. Обозначим $r = \sqrt[3]{2}$ и $f(x) = x^2 + x + 3$. Надо найти такой многочлен $u \in \mathbb{Q}[x]$, что $\frac{1}{f(r)} = u(r)$. Это значит, что многочлен $f(x)u(x) - 1$ имеет корень r , а тогда делится на $\mu_r^{\mathbb{Q}}(x) = x^3 - 2$ (пример 5). Таким образом,

$$u(x)f(x) + v(x)(x^3 - 2) = 1$$

для некоторого многочлена $v \in \mathbb{Q}[x]$. Многочлены u и v найдем с помощью алгоритма Евклида.

Алгоритм Евклида:

$$x^3 - 2 = (x^2 + x + 3)(x - 1) - 2x + 1;$$

$$x^2 + x + 3 = (2x - 1)\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) + \frac{15}{4}.$$

Обратный ход алгоритма Евклида:

$$\begin{aligned} \frac{15}{4} &= f(x) - (f(x)(x - 1) - (x^3 - 2))\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) = \\ &= (x^3 - 2)\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) + f(x)\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}\right). \end{aligned}$$

Итак,

$$(2x^2 + x - 7)(x^2 + x + 3) - (2x + 3)(x^3 - 2) = -15,$$

откуда при $x = r$ получаем

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 3} = \frac{7 - \sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4}}{15}.$$

Лемма 4 (об избавлении от иррациональности в знаменателе). Если число α алгебраично над полем K и $\deg \mu_{\alpha}(x) = k$, то каждое число в поле $K(\alpha)$ однозначно записывается в виде

$$c_0 + c_1\alpha + \dots + c_{k-1}\alpha^{k-1},$$

где $c_0, c_1, \dots, c_{k-1} \in K$. (10)

Задача 9. Избавьтесь от иррациональности в знаменателях: а) $\frac{1}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6}}$; б) $\frac{1}{\sqrt[4]{27} + 2\sqrt[4]{3} - 1}$.

Вернемся к доказательству теоремы 2". По предположению индукции двучлен $x^k - r_1^k$ неприводим над \mathbb{Q} , двучлен $x^k - r_2^k$ — над $\mathbb{Q}(r_1), \dots$, двучлен $x^k - r_{n-1}^k$ — над $\mathbb{Q}(r_1, \dots, r_{n-2})$. Последовательно избавляясь от иррациональности в знаменателе, представим каждое число из $\mathbb{Q}(r_1, \dots, r_{n-1})$ однозначно в виде суммы чисел вида

$$ar_1^{l_1} \dots r_{n-1}^{l_{n-1}}, \text{ где } a \in \mathbb{Q}, 0 \leq l_1, \dots, l_{n-1} < k. \quad (11)$$

Пусть (9) неверно, т.е. r_n^l при некотором $l \in \{1, \dots, k-1\}$ равно сумме чисел вида (11). В этой сумме должно быть больше одного слагаемого, иначе $r_n^l / (r_1^{l_1} \dots r_{n-1}^{l_{n-1}}) = a \in \mathbb{Q}$, что противоречит лемме 1. Значит, какой-то из радикалов r_1, \dots, r_{n-1} встречается в двух слагаемых в разных степенях, пусть это r_{n-1} . Итак,

$$r_n^l = A_0 + A_1 r_{n-1} + \dots + A_{k-1} r_{n-1}^{k-1}, \quad (12)$$

где среди $A_0, \dots, A_{k-1} \in \mathbb{Q}(r_1, \dots, r_{n-2})$ хотя бы два ненулевых. Самое интересное наступает в этот момент — трудность по сравнению со случаем $k = 2$ возрастает еще больше. И вправду, при $k = 2$ равенство (12) совсем не страшно: $\sqrt{p_n} = A_0 + A_1 \sqrt{p_{n-1}}$ без труда возводится в квадрат. Но при $k > 2$ о возведении (12) в k -ю степень даже думать не хочется... На помощь вновь приходят минимальные многочлены. Но если для левой части минимальный многочлен найти легко, то для правой не очевидна даже алгебраичность.

Пример 7. Приведем к противоречию упомянутое выше равенство $\sqrt[3]{3} = a + b\sqrt[3]{2}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, — частный случай (12). По лемме 1, $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Согласно примеру 5, $\mu_{\sqrt[3]{3}}(x) = x^3 - 3$ и $\mu_{\sqrt[3]{2}}(x) = x^3 - 2$, а тогда $\mu_{a+b\sqrt[3]{2}}(x) = (x-a)^3 - 2b^3$ (сделали линейную замену $x \mapsto \frac{x-a}{b}$ и умножили

на b^3). Получаем противоречие:

$$x^3 - 3 = (x-a)^3 - 2b^3 = x^3 - 5ax^2 + \dots \Rightarrow a = 0.$$

Задача 10. Решите уравнение в натуральных числах: $\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} = 2021$.

В общем случае путь к минимальному многочлену правой части равенства (12) лежит через сопряженные числа. Вот только что это такое, мы определили пока лишь для квадратичных иррациональностей, и в конце §2 наметили рассуждение с переходом к сопряженным.

Еще немного теории. Пусть число $\alpha \in \mathbb{C}$ алгебраично над полем K и

$$\mu_\alpha(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_k)$$

(согласно основной теореме алгебры любой многочлен над \mathbb{C} раскладывается на линейные множители)⁴. Числа $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ называются сопряженными с α над K . Обозначим их сумму $\sigma(\alpha)$. По теореме Виета

$$\sigma(\alpha) = \alpha_1 + \dots + \alpha_k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mu_\alpha(x) = x^k - \sigma(\alpha)x^{k-1} + \dots \quad (13)$$

Пример 7 показывает, что именно коэффициент $-\sigma(\alpha)$ будет играть ключевую роль.

Замечание. Числа $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ различны (для доказательства это не нужно): если $\mu_\alpha(x) = (x - \alpha_j)^2 g(x)$, то производная $\mu'_\alpha(x) = 2(x - \alpha_j)g(x) + (x - \alpha_j)^2 g'(x) \in K[x]$ имеет корень α_j , хотя $\deg \mu'_\alpha < \deg \mu_\alpha$.

Ввиду пункта 4) теоремы 3 все алгебраические над K числа разбиваются на классы сопряженных, каждый из которых состоит из корней какого-то неприводимого над K многочлена.

Пример 8. Разложим двучлен $x^4 - 2$ на неприводимые и разобьем его корни на классы сопряженных над каждым из полей $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$ (рис.4).

⁴ Мы этим пользоваться не будем: в доказательстве все многочлены раскладываются явно.

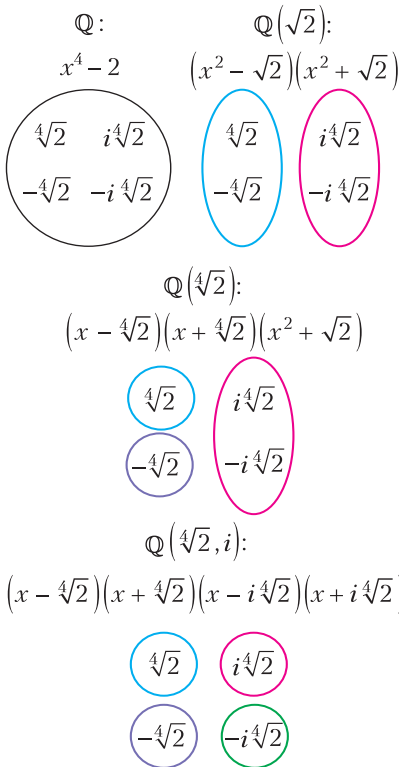


Рис. 4

Пример 9. Для квадратичных иррациональностей $a \pm b\sqrt{d}$ ($a, b, d \in K$, $b \neq 0$, $\sqrt{d} \notin K$) получается привычное понятие сопряженности:

$$\mu_{a \pm b\sqrt{d}}^K(x) = x^2 - 2ax + a^2 - db^2, \quad \sigma(a \pm b\sqrt{d}) = 2a.$$

(Кстати, при $K = \mathbb{R}$ и $d = -1$ получаем комплексно-сопряженные числа $a \pm bi$.) Это спасает приведенное выше обоснование перехода от (3) к (4).

Пример 10. Пусть $a, b \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$. Числа $a \pm b\sqrt[k]{2}$, конечно, не будут сопряженными при $k > 2$ (по аналогии с квадратичными иррациональностями). Сопряженные с числом $a + b\sqrt[k]{2}$ суть корни многочлена $\mu_{a+b\sqrt[k]{2}}(x) = (x - a)^k - 2b^k$ (аналогично примеру 7), т.е. числа $a + b\sqrt[k]{2}\varepsilon^j$, $j = 0, \dots, k - 1$ (пример на рисунке 5). Знак \pm при $k = 2$ объясняется тем, что $\varepsilon_2 = -1$.

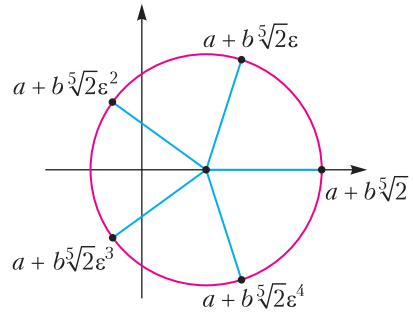


Рис. 5

Лемма 5. Пусть K – подполе в \mathbb{R} , $r \in \mathbb{R}$, $r \notin K$, $r^k \in K$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\sigma(r) = 0$.

Шаг 4: переход к сопряженным числам. Пример 10 подсказывает вид сопряженных к числу вида (10).

Задача 11. Опровергните равенство $\sqrt[3]{3} = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, где $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Для этого, обозначив $f(x) = a + bx + cx^2$ и $\varepsilon = \varepsilon_3$, покажите, что сопряженные с правой частью суть

$$\begin{aligned} f(\sqrt[3]{2}) &= a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}, \\ f(\sqrt[3]{2}\varepsilon) &= a + b\sqrt[3]{2}\varepsilon + c\sqrt[3]{4}\varepsilon^2, \\ f(\sqrt[3]{2}\varepsilon^2) &= a + b\sqrt[3]{2}\varepsilon^2 + c\sqrt[3]{4}\varepsilon. \end{aligned}$$

Лемма 6. Пусть $\alpha_1 = \alpha, \dots, \alpha_k$ – все сопряженные с числом α , алгебраичным над полем K , и $f \in K[x]$. Тогда число $f(\alpha)$ алгебраично над K и для некоторого $d \in \mathbb{N}$

$$\mu_{f(\alpha)}(x)^d = (x - f(\alpha_1)) \dots (x - f(\alpha_k)). \quad (14)$$

Приравняем суммы корней (с кратностями) многочленов в равенстве (14):

$$d\sigma(f(\alpha)) = f(\alpha_1) + \dots + f(\alpha_k).$$

Нас интересует случай $\mu_\alpha(x) = x^k - \alpha^k$, тогда $\alpha_j = \alpha\varepsilon^{j-1}$, $j = 1, \dots, k$. Для многочлена $f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{k-1}x^{k-1}$ имеем

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= c_0 + c_1\alpha + \dots + c_{k-1}\alpha^{k-1}, \\ f(\alpha\varepsilon) &= c_0 + c_1\alpha\varepsilon + \dots + c_{k-1}\alpha^{k-1}\varepsilon^{k-1}, \\ &\dots \\ f(\alpha\varepsilon^{k-1}) &= c_0 + c_1\alpha\varepsilon^{k-1} + \dots + c_{k-1}\alpha^{k-1}\varepsilon^{(k-1)^2}. \end{aligned}$$

Сложим числа в каждом столбике. Так как $\varepsilon^k = 1$, то при $j = 1, \dots, k-1$

$$1 + \varepsilon^j + \varepsilon^{2j} + \dots + \varepsilon^{(k-1)j} = \frac{1 - \varepsilon^{kj}}{1 - \varepsilon^j} = 0.$$

Значит, $f(\alpha) + f(\alpha\varepsilon) + \dots + f(\alpha\varepsilon^{k-1}) = kc_0$, откуда

$$\sigma(c_0 + c_1\alpha + \dots + c_{k-1}\alpha^{k-1}) = \frac{k}{d} \cdot c_0. \quad (15)$$

Наконец мы готовы привести равенство (12) к противоречию. Пусть A_j – первый ненулевой коэффициент в ряду A_0, \dots, A_{k-1} . Разделим равенство (12) на r_{n-1}^j :

$$\frac{r_n^j}{r_{n-1}^j} = A_j + A_{j+1}r_{n-1} + \dots + A_{k-1}r_{n-1}^{k-j-1}. \quad (16)$$

Пусть $K = \mathbb{Q}(r_1, \dots, r_{n-2})$, $R = r_n^j / r_{n-1}^j$. Тогда $R \notin K$, иначе $R = A_j$ и $A_{j+1} = \dots = A_{k-1} = 0$ ввиду линейной независимости $1, r_{n-1}, \dots, r_{n-1}^{k-1}$ над K (напомним, среди чисел A_j, \dots, A_{k-1} хотя бы два ненулевых). При этом $R^k = p_n^j / p_{n-1}^j \in \mathbb{Q}$, поэтому $\sigma(R) = 0$ по лемме 5. В то же время значение σ от правой части (16), согласно (15), пропорционально A_j (играющего роль c_0), а потому не равно 0. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 2.

Фактически мы доказали большее: каждое число в поле $\mathbb{Q}(r_1, \dots, r_n)$ представляется в виде линейной комбинации k^n чисел

$$r_1^{l_1} \dots r_n^{l_n}, \text{ где } 0 \leq l_1, \dots, l_n < k,$$

с однозначно определенными рациональными коэффициентами. На языке векторов, эти числа образуют *базис* поля $\mathbb{Q}(r_1, \dots, r_n)$ над \mathbb{Q} . Такое представление достигается избавлением от иррациональности в знаменателе, а однозначность коэффициентов равносильна линейной независимости данной системы.

Короткое доказательство с помощью следа. Используя чуть больше сведений об алгебраических числах либо владея началами линейной алгебры, можно совсем коротко доказать теорему 1 (не сводя ее к теореме 2). В основе рассуждения также лежит некоторая величина, пропорциональная сумме сопряженных. Но при

этом она обладает замечательным свойством линейности, благодаря чему техника сводится к минимуму.

Функция $f : L \rightarrow \mathbb{C}$, где L – подполе в \mathbb{C} , называется *линейной* (точнее, \mathbb{Q} -линейной), если $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$ для всех $x, y \in L$ и $a, b \in \mathbb{Q}$. Пусть $L = \mathbb{Q}(\sqrt[k_1]{Q_1}, \dots, \sqrt[k_N]{Q_N})$. В §4 мы покажем, что существует линейная функция $\text{tr} : L \rightarrow \mathbb{C}$, называемая следом (от англ. trace – след), которая обладает свойством:

для каждого $\alpha \in L$ найдется такое $d \in \mathbb{N}$, что $\text{tr}(\alpha) = d\sigma(\alpha)$ (17)

($\sigma(\alpha)$ определено в (13)). Предположим, что $a_1\sqrt[k_1]{Q_1} + \dots + a_N\sqrt[k_N]{Q_N} = 0$, где $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{Q}$ не все равны 0. Будем считать, что $a_N \neq 0$. Неожиданным образом уединим не радикал, а коэффициент. Разделим обе части на $\sqrt[k_N]{Q_N}$ и обозначим $R_i = \sqrt[k_i]{Q_i} / \sqrt[k_N]{Q_N}$, $i = 1, \dots, N-1$:

$$-a_N = a_1R_1 + \dots + a_{N-1}R_{N-1}. \quad (18)$$

Так как $R_i^{k_i k_N} \in \mathbb{Q}$ и по условию $R_i \notin \mathbb{Q}$, то $\sigma(R_i) = 0$ по лемме 5, а тогда $\text{tr}(R_i) = 0$ в силу (17). Отсюда в силу линейности след от правой части равенства (18) равен 0. В то же время $\sigma(-a_N) = -a_N \neq 0$ и по (17) $\text{tr}(-a_N) \neq 0$. Это противоречие завершает доказательство теоремы 2.

(Продолжение следует)

Литература

1. Э.Б.Винберг. Курс алгебры. – М.: МЦНМО, 2019.
2. Л.Камнев. Иррациональность суммы радикалов. – «Квант», 1972, №2.
3. А.Канунников. Алгебра и геометрия комплексных чисел. – «Квант», 2017, № 5,6.
4. А.Л.Канунников. Алгебраические числа как векторы. – Математическое просвещение, сер.3, вып.26, 2020, с.91–122.
5. В.Олейников. Иррациональность и неприводимость. – «Квант», 1986, №10.
6. В.А.Уфнаровский. Математический аквариум. – М.:МЦНМО, 2010.
7. I.Richards. An Application of Galois Theory to Elementary Arithmetic. – Advances in Mathematics, 13, 1974, p. 268–273.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи М2642 – М2645 предлагались на региональном этапе XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Задачи Ф2649–2652 предлагались на региональном этапе LV Всероссийской олимпиады школьников по физике.

Задачи М2642–М2645, Ф2649–2652

М2642. Ненулевые числа x и y удовлетворяют неравенствам

$$x^{2n} - y^{2n} > x \text{ и } y^{2n} - x^{2n} > y$$

при некотором натуральном n . Может ли произведение xy равняться отрицательному числу?

Н. Агаханов

М2643. Окружности Ω и ω касаются друг друга внутренним образом в точке A (рис. 1). Проведем в большей окружности Ω хорду CD ,

касающуюся ω в точке B (хорда AB не является диаметром ω). Точка M – середина отрезка AB . Докажите, что

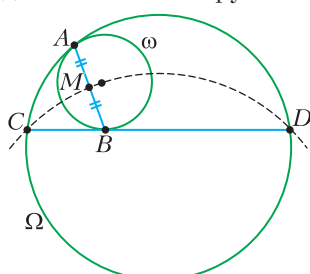


Рис. 1

окружность, описанная около треугольника CMD , проходит через центр ω .

П. Бибииков

М2644. Петя и Вася играют на доске 100×100 . Изначально все клетки доски белые. Каждым своим ходом Петя красит в черный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по диагонали.

Каждым своим ходом Вася красит в черный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по вертикали. Первый ход делает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

М. Дидин

М2645. Витя записал в тетрадь n различных натуральных чисел. Для каждой пары чисел из тетради он выписал на доску их наименьшее общее кратное. Могло ли при каком-то $n > 100$ случиться так, что

$\frac{n(n-1)}{2}$ чисел на доске являются (в некотором порядке) последовательными членами непостоянной арифметической прогрессии?

С. Берлов

Ф2649. На трех фото снимках одного участка местности, сделанных с равными интервалами времени τ , запечатлен игрушечный паровоз и фрагменты шлейфа дыма от него. Наложенные друг на друга фотографии приведены на рисунке 2. Зная, что, тронувшись

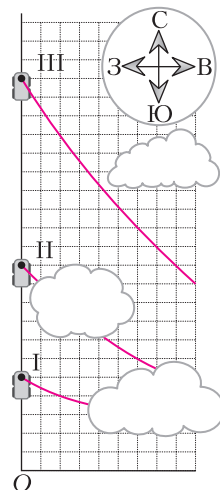


Рис. 2

с места, паровоз поехал на север с постоянным ускорением $a = 0,4 \text{ м/с}^2$ и что в этот день дул западный ветер со скоростью $u = 4 \text{ м/с}$, найдите интервал времени τ и расстояние от точки O , на котором находилась труба неподвижного паровоза. Цены делений шкал сетки по вертикали и горизонтали равны.

М.Замятнин

Ф2650. В вертикальной плоскости находятся два невесомых стержня, соединенных шарниром массой M (рис.3). На свободном конце верхнего стержня закреплен груз массой m , а на свободном конце нижнего стержня закреплено легкое колечко, которое может скользить по гладкой горизонтальной закрепленной спице. Длина верхнего стержня l , длина нижнего стержня $L > l$. Изначально стержни составляют углы α с горизонтом и удерживаются неподвижно. Затем их отпускают. Найдите:

Рис. 3

1) ускорения шарнира $a_{\text{ш0}}$ и грузика $a_{\text{г0}}$ сразу после начала движения;
2) ускорение колечка $a_{\text{к}}$ в момент времени, когда шарнир, груз и колечко окажутся на одной прямой.

Считайте, что стержни и спица тонкие и все тела могут пролетать мимо друг друга не соударяясь. Ускорение свободного падения g .

А.Уймин

Ф2651. Две одинаковые проводящие оболочки в форме цилиндров с малыми отверстиями на общей оси образуют конденсатор емкостью C (рис.4). В центре левой оболочки удерживают шарик с зарядом q .

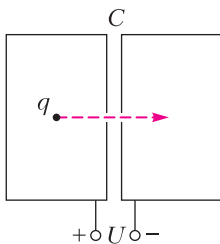


Рис. 4

Суммарный заряд всей системы, включая заряд шарика, равен нулю. Конденсатор заряжают, подключив к источнику с напряжением U , затем отключают от источника и

отпускают шарик. Шарик начинает двигаться вдоль оси и, пролетев через отверстия, попадает внутрь правой оболочки. Какую кинетическую энергию будет иметь шарик в центре правой оболочки? При каком заряде шарика эта энергия максимальна и чему она равна? Выделением тепла из-за тока в оболочках можно пренебречь. Поле тяжести не учитывайте.

И.Воробьев

Ф2652. В вакууме в невесомости между круглыми полюсами электромагнита на расстоянии x от оси магнита покоится частица с массой m и зарядом q (рис.5).

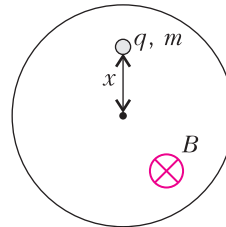


Рис. 5

Сначала магнитное поле равно нулю. Затем, за малый промежуток времени, индукция магнитного поля увеличивается до значения B_0 и поддерживается постоянной в течение времени $\tau < \pi m / (qB_0)$, после чего очень быстро уменьшается до нуля.

1) Почему частица приходит в движение? Опишите качественно траекторию частицы.

2) С какой скоростью движется частица после включения магнитного поля?

3) С какой скоростью движется частица после выключения магнитного поля?

4) На каком минимальном расстоянии от оси магнита проходит траектория частицы?

5) Через какое время от момента включения поля частица окажется на минимальном расстоянии от оси магнита?

Магнитное поле в пределах полюсов можно считать однородным. Перемещением частицы за время включения и выключения поля можно пренебречь.

А.Аполонский

Решения задач М2630–М2633, Ф2637–Ф2640

М2630. Назовем пару различных натуральных чисел удачной, если их среднее арифметическое и среднее геометрическое – натуральные числа. Верно ли, что

для каждой удачной пары найдется другая удачная пара с тем же средним арифметическим?

Ответ: да, верно.

Пусть среднее арифметическое удачной пары равно натуральному числу m . Тогда числа из этой пары можно представить в виде $m + n$ и $m - n$, где n тоже натуральное. Так как среднее геометрическое чисел пары – натуральное число, их произведение – полный квадрат: $m^2 - n^2 = k^2$, где k натуральное. Тогда $m^2 - k^2 = n^2$, откуда $m + k$ и $m - k$ – удачная пара с тем же средним арифметическим. Это действительно другая пара, поскольку $k \neq n$, иначе $m^2 = 2n^2$, что, очевидно, невозможно.

Б. Френкин

М2631. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ обладает таким свойством: ни из каких трех его сторон нельзя сложить треугольник. Докажите, что а) один из углов этого четырехугольника не больше 60° ; б) один из углов этого четырехугольника не меньше 120° .

Пусть AD – наибольшая сторона четырехугольника $ABCD$. По условию, сумма любых двух других сторон не больше AD .

а) Пусть углы A и D оба больше 60° . Построим на стороне AD равносторонний треугольник AKD во внутреннюю сторону четырехугольника (рис.1). Стороны AK и DK выходят из вершин A и D внутрь четырехугольника.

Как известно, если один выпуклый многоугольник находится внутри другого, то его периметр не больше

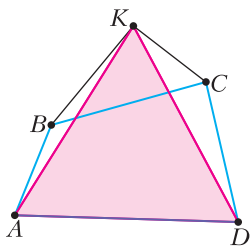


Рис. 1

периметра внешнего многоугольника. Поэтому если точка K будет лежать внутри (или на границе) четырехугольника $ABCD$, то $AB + BC + CD + AD \geq AK + KD + AD$, откуда $AB + BC + CD \geq 2AD$, и тогда какие-то две стороны из AB, BC, CD в сумме больше AD – противоречие. Пусть точка K лежит вне четырехугольника $ABCD$. Тогда $\angle BKC > 60^\circ$, поэтому в треугольнике BKC

сторона BC – не самая маленькая. Пусть для определенности она больше стороны BK . Тогда $AB + BC > AB + BK > AK = AD$ – противоречие.

б) Пусть каждый из углов B и C меньше 120° . Тогда смежные с ними углы будут больше 60° . Построив на стороне BC равносторонний треугольник BLC во внешнюю сторону четырехугольника, получим выпуклый пятиугольник $ABLCD$ (рис.2). Тогда угол ALD будет меньше 60° , значит, в треугольнике ALD сторона AD не самая большая. Пусть для определенности она меньше AL . Тогда $AD < AL < AB + BL = AB + BC$ – противоречие.

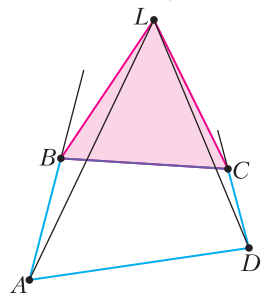


Рис. 2

М. Дидин, С. Дориченко

М2632. Петя и Вася по очереди пишут на доске дроби вида $1/n$, где n – натуральное. Начинает Петя. Петя за ход пишет только одну дробь, а Вася за первый ход – одну, за второй ход – две, и так каждым следующим ходом на одну дробь больше. Вася хочет, чтобы после какого-то хода сумма всех дробей на доске была натуральным числом. Сможет ли Петя помешать ему?

Ответ: сможет.

Лемма. Любое число a можно представить в виде суммы k дробей вида $\frac{1}{n}$ конечным числом способов (если вообще можно представить).

Доказательство леммы. Будем доказывать индукцией по k . Для $k = 1$ утверждение очевидно. Пусть утверждение верно для $k = l - 1$. Докажем для $k = l$. Посмотрим на наибольшую дробь в разложении. Она не может быть меньше $\frac{a}{k}$, иначе сумма всех дробей точно меньше a . Значит, знаменатель этой дроби точно не больше $\frac{k}{a}$, т.е. у нас существует конечное количество

возможных значений наибольшей дроби. Далее для каждого отдельного значения этой наибольшей дроби мы получаем, что сумма оставшихся $l-1$ дробей должна быть каким-то фиксированным числом. По предположению индукции мы знаем, что количество таких $l-1$ дробей для каждого отдельного значения наибольшей дроби конечно, а значит, и всего представлений a в виде суммы k дробей конечно. Лемма доказана.

Теперь покажем, как Петя может ходить так, чтобы Вася после своего хода никогда не сделал сумму целой. Пусть перед ходом Пети сумма чисел на доске равна S , а Вася после его хода будет выписывать k дробей. Заметим, что после хода Васи сумма чисел точно не станет больше чем $S+k+1$, т.е. он точно не получит натуральное число, большее $S+k+1$. Для каждой из оставшихся потенциальных натуральных сумм (а их осталось конечное количество) посчитаем, на сколько надо увеличить текущую сумму, чтобы она стала такой. Для каждого такого числа существует лишь конечное количество представлений его в виде суммы $k+1$ дроби вида $\frac{1}{n}$ по следствию из леммы. Значит, всего во всех представлениях задействовано конечное число дробей вида $\frac{1}{n}$.

Пусть Петя тогда запишет на доску ту дробь, которая не задействована ни в одном из представлений. Тогда Вася точно не сможет написать k дробей так, чтобы сумма стала натуральной. Задача решена.

Отметим, что можно сформулировать и аналогичным образом решать родственные задачи, например следующую:

Петя и Вася по очереди пишут на доску дроби вида $1/x$, где x – целое число, не равное 0. Оба сначала пишут по одной дроби, потом по две, и так каждый ход на одну больше. Вася хочет, чтобы в какой-то момент сумма всех дробей на доске была целым числом, не равным 0. Требуется доказать, что Петя сможет ему помешать.

А.Аржанцев

M2633. *За каждым из k круглых столов сидит по $n \geq 2$ гномов. Каждый дружит*

только со своими соседями по столу слева и справа. Добрый волшебник хочет рассадить всех гномов за один круглый стол так, чтобы каждые два соседних гнома дружили между собой. Он имеет возможность подружить между собой kn пар гномов (гномы в паре могут быть как от одного стола, так и от разных), но после этого злой волшебник поссорит между собой n пар гномов из этих kn пар. Выясните, при каких n добрый волшебник может добиться желаемого, как бы ни действовал злой волшебник, если а) $k=2$; б) $k \geq 2$ – данное натуральное число.*

Ответ: при нечетных n (для любого k). Пронумеруем столы и гномов за каждым столом; таким образом, символ i_j обозначает гнома, сидящего за столом i на месте j ($i \leq k, j \leq n$).

Случай четного n . Приведем стратегию злого волшебника. Пусть добрый волшебник уже как-то подружил kn пар гномов; построим граф, в котором вершины соответствуют гномам, а ребра – парам гномов, которых подружил добрый волшебник. Раскрасим гномов за каждым столом в два цвета в шахматном порядке, для каждого стола используя новую пару цветов. Тогда всего цветов $2k$, а суммарная степень вершин $2kn$, следовательно, найдется цвет, для которого сумма степеней вершин этого цвета не превосходит n . Без ограничения общности будем считать, что это гномы с нечетных мест первого стола: $1_1, 1_3, \dots, 1_{n-1}$. Поссорим все пары друзей, в которые входят эти гномы. Тогда если эти гномы сидят со всеми за одним круглым столом, то их соседями могут быть только гномы с четных мест первого стола. Однако в таком случае гномы с четных мест первого стола тоже не сидят рядом с кем-либо с другого стола – следовательно, требуемая рассадка невозможна.

Случай нечетного $n = 2t - 1$. Стратегия за доброго волшебника: подружить пары гномов $(i, (l+1)_i)$ для $l = 1, \dots, k-1$ и $i = 1, \dots, n$, а также $(1_i, k_{i+1})$ для $i = 1, \dots, n$ (здесь считаем, что $k_{n+1} = k_1$). Таким образом, между различными парами столов (совпадающими только в случае $k=2$) мы образовали k

групп ребер, каждая содержит по n ребер. Назовем такую группу ребер (слабым) *звеном*, если после действий злого волшебника в ней осталось хотя бы t ребер, и *сильным звеном*, если в ней осталось хотя бы $t + 1$ ребер. Заметим, что если группа ребер является звеном, то в ней найдутся два ребра, концами которых являются сидящие рядом за исходным столом гномы. Назовем такие ребра *соседними*. Если же звено сильное, то такие два ребра не единственны.

Заметим, что хотя бы $k - 1$ группа ребер суть звенья (обратное требует удалить по t ребер из двух групп, которые мы хотим сделать не-звеном, т.е. всего $2t = n + 1$ ребер) и хотя бы $k - 2$ групп ребер суть сильные звенья, если только $n > 3$ (в случае $k = 2$ утверждение очевидно; при $k > 2$ обратное требует удалить по $t - 1$ ребер из трех групп, т.е. всего $3t - 3$ ребра, что больше $n = 2t - 1$, если $n > 3$ и, соответственно, $t > 2$).

При $k = 2$ одна из двух групп ребер является звеном, пусть соответствующие два ребра $(1_i, 2_i), (1_{i+1}, 2_{i+1})$. Тогда рассадка за столом следующая: $1_i, 2_i, 2_{i-1}, \dots, 2_{i+1}, 1_{i+1}, 1_{i+2}, \dots, 1_{i-1}$.

При $k > 2$ и $n > 3$ мы имеем (как минимум) $k - 1$ звено, одно из которых, возможно, не является сильным. Зафиксируем в этом звене пару соседних ребер; далее перейдем к соседним звеньям (возможно, в одну сторону или в две) и выберем в них пару соседних ребер так, чтобы не задействовать тех же двух гномов (одного из них – можно). Такой выбор нам доступен, поскольку все звенья (кроме, возможно, рассмотренного первым) сильные. Удалим в исходном графе (состоящем из k циклов) ребра между гномами, которые участвуют в выбранных нами соседних ребрах, и добавим сами соседние ребра; несложно видеть, что этот набор ребер обеспечивает цикл по всем вершинам.

Теперь пусть $k > 2$ и $n = 3$. В этом случае злой волшебник удалит всего 3 ребра, и нас интересует только ситуация, когда из трех групп удалено по одному ребру (иначе мы имеем $k - 2$ сильных звена, и этот случай рассмотрен в предыдущем абзаце).

Тогда мы имеем 3 слабых звена и $k - 3$ сильных звена. Если $k > 3$, то существует слабое звено, у которого хотя бы одно из соседних звеньев – сильное. Поэтому мы можем выбрать $k - 1$ звено так, чтобы среди них было 2 слабых звена и эти слабые звенья не были соседними. Далее выбираем на каждом звене (начиная со слабых) пару соседних ребер, как и в предыдущем абзаце. На любом сильном звене между этими слабыми выбор возможен, поскольку в случае $n = 3$ на сильном звене можно выбрать пару соседних ребер тремя способами, а недоступно из этих трех опций максимум две – по одной с каждой стороны.

Наконец, осталась такая ситуация: $n = 3, k = 3$, и после действий злого волшебника в каждой группе осталось 2 ребра. Тогда за счет того, что между первым и последним столами ребра проведены со сдвигом на 1, мы можем выбрать 2 группы так, что на общем для них столе задействованы различные пары гномов. Действительно, пусть без ограничения общности злой волшебник удалил ребро $(1_1, 2_1)$, тогда, чтобы создать коллизию между любыми двумя группами ребер, ему следует удалить также ребра $(1_1, 3_i)$ и $(2_1, 3_i)$, но для любого i добрый волшебник исходно провел не более 1 из этих ребер. Значит, коллизии нет, и рассадка всех гномов за один стол возможна.

М.Святловский

Ф2637.¹ На рисунке 1 показана схема простейшего теплообменника. В теплоизолированной баке находится теплоноситель при высокой температуре. Через бак проходит длинная и тонкая трубка-змеевик, сделанная из металла с высокой теплопро-

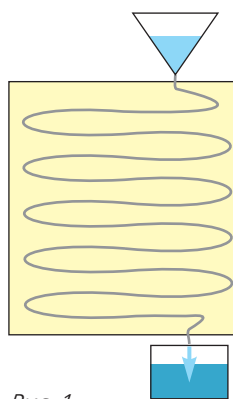


Рис. 1

¹ Автор решений задач Ф2637–Ф2640 – А.Власов.

водностью. Определите конечную температуру первоначально холодной жидкости (напитка), протекающей через змеевик теплообменника. В рабочем режиме скорость перетекания и массу жидкости в змеевике считайте малыми. Известны следующие величины: M , T_0 – масса и начальная температура теплоносителя, m , t_0 – соответственно масса и начальная температура нагреваемой жидкости (напитка). Теплоемкости жидкостей считайте равными, потерями тепла можно пренебречь. Как изменится результат, если «поменять местами» жидкости – нагреваемую жидкость налить в бак, а через змеевик проливать теплоноситель?

Рассматриваем первый вариант: холодный напиток протекает через горячий теплоноситель. Записываем уравнение теплового баланса для небольшой порции напитка:

$$M \cdot dT = -(T - t_0) \cdot dm.$$

После интегрирования получаем конечную температуру теплоносителя при протекании всего напитка массой m :

$$T = (T_0 - t_0) \cdot e^{-m/M} + t_0.$$

Температуру подогретого напитка определяем с помощью закона сохранения тепловой энергии:

$$M((T_0 - t_0) \cdot e^{-m/M} + t_0) + mt = MT_0,$$

откуда получаем

$$t_1 = (T_0 - t_0)(1 - e^{-m/M}).$$

Рассматриваем второй вариант: горячий теплоноситель протекает через холодный напиток. Записываем дифференциальное уравнение теплообмена для этого варианта:

$$dM \cdot (T_0 - t) = m \cdot dt.$$

После интегрирования получаем температуру напитка во втором варианте теплообмена:

$$t_2 = T_0 - (T_0 - t_0) \cdot e^{-M/m}.$$

Результаты дифференциальных теплообменов интересно сравнить с результатами интегрального (простого) теплообмена, при

котором сосуд с холодным напитком опускается в горячий теплоноситель:

$$t_3 = T_0 \frac{M}{M + m}.$$

Для сравнения результатов строим объединенный график трех вариантов зависимости температуры напитка от величины отношения $x = m/M$ (рис.2; начальная тем-

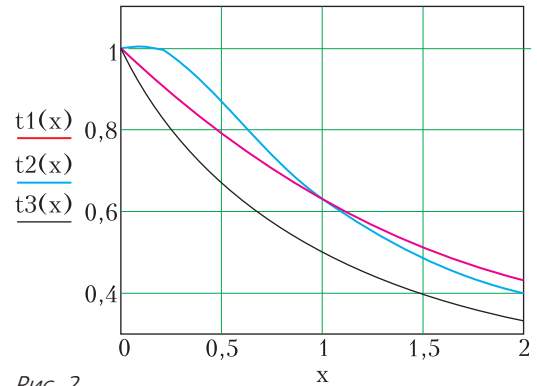


Рис. 2

пература теплоносителя условно принята равной 1, начальная температура напитка 0). На графиках видно, что дифференциальный теплообмен эффективнее простого теплообмена. При равенстве масс теплоносителя и напитка оба варианта дифференциального теплообмена дают один и тот же результат. При малой массе напитка эффективнее второй вариант. При малой массе теплоносителя температура напитка будет выше при первом варианте теплообмена.

Ф2638. Из материала с удельным сопротивлением ρ изготовлена тонкостенная сфера радиусом A (рис.1). Толщина стенок сферы $d = \beta A$, $\beta \ll 1$. Небольшие области полюсов сферы (контактные области) изготовлены из сверхпроводника, их приближенно можно считать дисками радиуса r . Определите сопротивление

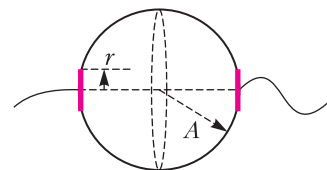


Рис. 1

сферы между контактными областями. Каким станет это сопротивление, если все геометрические размеры сферы увеличить в n раз?

Ответ на второй вопрос задачи очень прост. Поскольку любой участок, обладающий сопротивлением, при увеличении геометрических размеров в n раз в длину увеличивается в n раз, а в сечении (перпендикулярном вектору плотности тока) увеличивается в n^2 раз, то его сопротивление уменьшится в n раз.

Величину сопротивления будем определять интегрированием. Для этого сферу вдоль оси x разбиваем на кольца одинаковой толщины dx (рис.2). Тогда длина

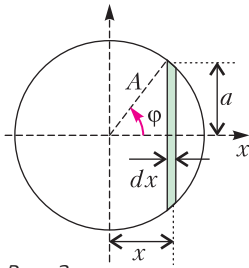


Рис. 2

(ширина) кольцевого участка вдоль вектора плотности тока равна $dx/\sin \varphi$, а площадь поперечного сечения этого участка равна $\beta A \cdot 2\pi A \sin \varphi$. Его электрическое сопротивление, в соответствии с формулой $R = \rho l/S$, получается равным

$$dR = \rho \frac{dx}{\sin \varphi \cdot \beta A \cdot 2\pi A \sin \varphi} = \rho \frac{dx}{2\pi\beta A^2 \sin^2 \varphi}.$$

От угловой координаты φ можно перейти к переменной x :

$$\sin^2 \varphi = \left(\frac{a}{A}\right)^2 = 1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2.$$

Тогда

$$dR = \rho \frac{dx}{2\pi\beta A^2 \left(1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2\right)}.$$

Для вычисления пределов интегрирования используем независимость площади кольца от его радиуса. Можно доказать

(пусть это будет простым самостоятельным математическим упражнением), что кольца будут иметь одинаковую площадь поверхности, равную $dS = 2\pi A \cdot dx$. При уменьшении радиуса кольца «автоматически» увеличивается ширина кольцевой ленты $dl = dx \frac{A}{a}$ (где a – радиус кольца). Можно считать, что толщина контактной области равна dx . Приравняем площадь кольцевой ленты площади контакта:

$$2\pi A \cdot dx = \pi r^2,$$

откуда

$$dx = \frac{r^2}{2A} \text{ и}$$

$$x_{\max} = A - dx = A \left(1 - \frac{r^2}{2A^2}\right) = \alpha A,$$

где α – коэффициент, близкий к 1.

Теперь можно записать сопротивление сферы в виде интеграла:

$$R = \int_0^{\alpha A} \rho \frac{dx}{2\pi\beta A^2 \left(1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2\right)} = \frac{\rho}{2\pi\beta A} \int_0^{\alpha} \frac{dy}{1 - y^2},$$

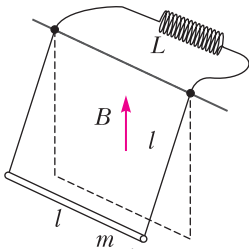
$$\text{где } y = \frac{x}{A}.$$

После вычисления интеграла получаем

$$R = \frac{\rho}{2\pi\beta A} \cdot \ln \left(\frac{1+y}{1-y}\right)_0^{\alpha} = \frac{\rho}{2\pi\beta A} \cdot \ln \left(\frac{2 - \frac{r^2}{2A^2}}{\frac{r^2}{2A^2}}\right) \approx \frac{\rho}{2\pi\beta A} \cdot \ln \left(\frac{2A}{r}\right)^2.$$

Полученная формула подтверждает справедливость предварительного ответа на второй вопрос задачи. При увеличении геометрических размеров сферического проводника в n раз его сопротивление уменьшится в n раз.

Ф2639. Металлический стержень подвешен горизонтально на двух параллельных нитях (см. рисунок). Такая конструкция представляет собой гравитационный маятник, который имеет три



степени свободы и соответственно может совершать три разных собственных колебаний. Очевидно, что период малых колебаний ортогональной моды (стержень при этом колебании смещается поперек оси симметрии) определяется формулой $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Как изменится период этой моды, если маятник поместить в вертикальное магнитное поле, нити сделать проводящими и к точкам крепления нитей подключить катушку индуктивности? Длина стержня и нитей одинакова и равна l , масса стержня m , индукция магнитного поля B , индуктивность катушки L . Сопротивления стержня, нитей и провода катушки малы.

Ток контура при отклонении определим по закону сохранения магнитного потока. При малых углах отклонения

$$Bl^2\varphi = Li, \text{ или } i = \frac{Bl^2}{L}\varphi.$$

Записываем энергию системы при колебаниях:

$$W = ml^2 \frac{(\varphi')^2}{2} + mgl \frac{\varphi^2}{2} + \frac{L}{2} \left(\frac{Bl^2}{L} \varphi \right)^2.$$

Отсюда определяем коэффициенты инертности α и упругости β :

$$\alpha = ml^2, \beta = mgl + \frac{(Bl^2)^2}{L}.$$

Период колебаний нашего маятника равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl + \frac{(Bl^2)^2}{L}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\left(1 + \frac{B^2l^3}{mgL}\right)}} = T_0\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{B^2l^3}{mgL}}}.$$

При слабом магнитном поле результат

можно записать в виде

$$T \approx T_0 \left(1 - \frac{B^2l^3}{2mgL} \right).$$

Из полученной формулы видно, что магнитная добавка приводит к уменьшению периода колебаний.

Ф2640. На листе бумаги начерчен круг радиусом r . Сверху на лист кладут стеклянную полусферу, совмещая ее центр с

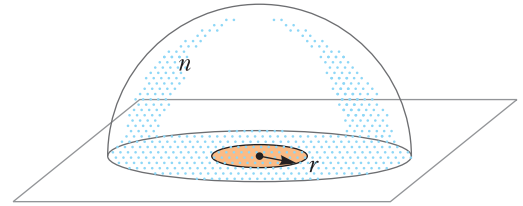


Рис. 1

центром нарисованного на бумаге круга (рис.1). Полусфера является толстой линзой. При рассматривании сверху изображение круга в этой линзе кажется увеличенным. Определите коэффициент увеличения изображения круга. Показатель преломления стекла $n = 3/2$. Радиус нарисованного круга значительно меньше радиуса полусферы.

Стеклянную полусферу заменяем оптической системой – стеклянной пластиной толщиной R и тонкой плосковыпуклой

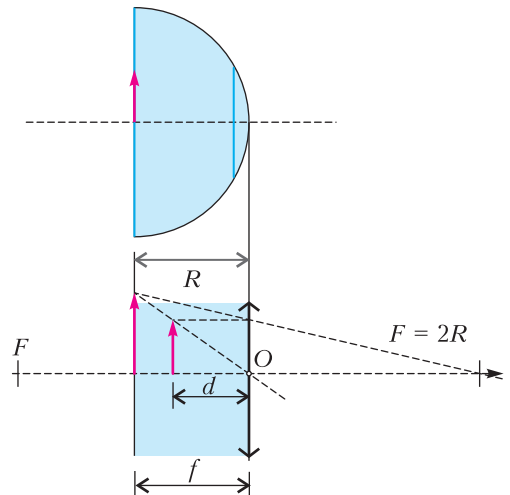


Рис. 2

линзой с радиусом кривизны R , которые соприкасаются друг с другом (рис.2). Рассчитываем фокусное расстояние линзы по известной формуле:

$$F = \frac{R}{n-1} = \frac{R}{3/2-1} = 2R.$$

Далее рассчитываем положение изображения в оптической системе последовательным методом. Напомним, что предмет расположен на левой плоскости стеклянной пластины. Известно, что пластина сдвигает изображение по ходу лучей на $\Delta f = a \frac{n-1}{n}$, где a – толщина пластины. В нашем случае

$$\Delta f = R \frac{3/2-1}{3/2} = \frac{R}{3}.$$

В результате первое изображение получается на расстоянии $d = (2/3)R$ (или R/n)

от линзы. Для расчета изображения в линзе воспользуемся известной формулой

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

откуда находим положение вторичного изображения:

$$f = \frac{dF}{d-F} = \frac{(2/3)R \cdot 2R}{(2/3)R - 2R} = -R.$$

Изображение находится в плоскости предмета, т.е. на левой стороне стеклянной пластины. Рассчитаем коэффициент увеличения:

$$k = \left| \frac{f}{d} \right| = \frac{R}{(2/3)R} = \frac{3}{2} = n.$$

Итак, изображение круга, рассматриваемого через стеклянную полусферу, лежит в плоскости круга и увеличено в n раз.

Какой могла бы быть высота Эвереста?

В основании горы порода под давлением вышележащих слоев не должна разрушаться. Это и определяет максимальную высоту горы.

Эверест состоит из гранитов и базальтов. Прочность этих пород на сжатие $p_{сж}$ меньше 300 МПа, а их плотность ρ больше 2700 кг/м³. Пусть высота горы равна H , а ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с². Тогда давление у основания горы равно

$p = \rho g H$. При этом давление p должно быть меньше $p_{сж}$, т.е. $\rho g H < p_{сж}$, иначе основание горы разрушится. Из этого неравенства получаем

$$H < \frac{p_{сж}}{\rho g} \approx 11 \text{ км.}$$

Таким образом, все горы на Земле не могут быть выше 11 км.

Заметим, что сделать вертикальные дырки в земле глубиной больше 11 км тоже нельзя – по той же причине.

К.Богданов



Задачи

1. У Гриши есть 5000 рублей. В магазине продаются шоколадные зайцы по цене 45 рублей за штуку. Чтобы отнести зайцев домой, Грише придется купить еще несколько сумок по 30



рублей за штуку. В одну сумку помещается не более 30 шоколадных зайцев. Гриша купил наибольшее возможное количество зайцев и достаточное количество сумок, чтобы донести в них всех зайцев. Сколько денег осталось у Гриши?

Т.Казицына

2. Ёжик может встретить в тумане либо Сивого Мерина, либо Сивую Кобылу, либо своего друга Медвежонка. Однажды Ёжику вышли навстречу все трое, но туман был густой, и Ёжик не видел, кто из них кто, а потому попросил представиться. Тот, кто, с точки зрения Ёжика, был слева, сказал: «Рядом со мной Медвежонок». Тот, кто стоял справа, заявил: «Это тебе сказала Сивая Кобыла». Наконец, тот, кто был в центре, сооб-



Эти задачи предлагались на Турнире имени М.В.Ломоносова.

щил: «Слева от меня Сивый Мерин». Определите, кто где стоял, если известно, что Сивый Мерин врет всегда, Сивая Кобыла — иногда, а Медвежонок Ёжику не врет никогда.

М.Ахмеджанова

3. На лицевой стороне каждой из 6 карточек Аня написала черным или красным фломастером по натуральному числу. При этом каждым цветом



Аня написала хотя бы два числа. Затем Боря взял каждую карточку, посмотрел, каким цветом на ней написано число, перемножил все Анины числа того же цвета на других карточках и записал результат на обороте карточки (если другая карточка того же цвета всего одна, то Боря пишет число с этой одной карточки). Мы видим обороты, на которых написаны числа 18, 23, 42, 42, 47, 63. А что написано на лицевых сторонах этих карточек?

М. Хачатурян

4. Приведите пример таких целых чисел a, b, c, d , среди которых нет одинаковых, что $a^b = c^d$ и $b^a = d^c$.

Д.Шноль



КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на учащихся начиная с 8–9 классов, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт kvantik.com).

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest
Желаем успеха!

25. Внутри квадрата $ABCD$ отметили точку K , а на стороне AB – точку N так, что треугольники AKN и CBK подобны $\left(\frac{AK}{CB} = \frac{KN}{BK} = \frac{AN}{CK}\right)$. Угол какой величины обязательно встретится среди углов этих треугольников?

Е. Бакаев

26. Из тысячи красных и синих кубиков $1 \times 1 \times 1$ сложили куб $10 \times 10 \times 10$. Чтобы кубики не перепачкались свежей краской, между соседними кубиками разного цвета вставляли тонкий изолирующий квадратик. Оказалось, что изолирующих квадратиков нечетное количество. Докажите, что на поверхности куба не может быть поровну красного и синего.

С. Дворянинов

27. Какое наибольшее количество узлов клетчатого листа можно отметить так, что-

Внимание наших читателей

Подписаться на журнал «Квант» можно с любого номера в любом почтовом отделении. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» – 90964.

Купить журнал «Квант» возможно в магазине «Математическая книга» издательства МЦНМО (адрес интернет-магазина: biblio.msste.ru), а также в московских книжных магазинах «Библиоглобус», «Молодая гвардия», «Московский дом книги» и в редакции журнала.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» имеется на сайте <http://kvant.ras.ru>

бы никакие три отмеченные точки не лежали на одной прямой и точка пересечения медиан любого треугольника с вершинами в отмеченных узлах не являлась узлом?

М. Евдокимов

28. Назовем последовательность из 50 натуральных чисел с суммой 100 хорошей, если из нее нельзя выбрать несколько подряд идущих чисел с суммой 50. Найдите количество таких последовательностей.

Е. Бакаев

БИБЛИО-ГЛОБУС
ВАШ ГЛАВНЫЙ КНИЖНЫЙ

МЫ ПРЕДЛАГАЕМ
БОЛЬШОЙ ВЫБОР ТОВАРОВ И УСЛУГ

УСЛУГИ

- Интернет-магазин www.bgshop.ru
- Кафе
- Клубные (дисконтные) карты и акции
- Подарочные карты
- Предварительные заказы на книги
- Встречи с авторами
- Читательские клубы по интересам
- Индивидуальное обслуживание
- Подарочная упаковка
- Доставка книг из-за рубежа
- Выставки-продажи

АССОРТИМЕНТ

- Книги
- Аудиокниги
- Антиквариат и предметы коллекционирования
- Фильмы, музыка, игры, софт
- Канцелярские и офисные товары
- Цветы
- Сувениры

г. Москва,
м. Лубянка,
м. Китай-город,
ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1
8 (495) 781-19-00
www.biblio-globus.ru
пн – пт 9:00 - 22:00
сб – вс 10:00 - 21:00
без перерыва на обед

www.biblio-globus.ru

...геометрия основывается на механической практике и есть не что иное, как та часть общей механики, в которой излагается и доказывается искусство точного измерения.

Исаак Ньютон

...геометрия становится, очевидно, естественной наукой; мы можем рассматривать ее фактически как самую древнюю ветвь физики.

Альберт Эйнштейн

...раздается зов природы, и в этот отвлеченный мир (геометрии – А.Л.) врывается физика.

Джон Лайтон Синг

Правильные многогранники...нельзя считать изобретениями человеческого разума, ибо они

существовали в земной коре в виде кристаллов задолго до того, как на сцене появилось человечество.

Мауриц Корнелис Эшер

...мы явно имеем две «геометрии»: «геометрию-физику», ... изучающую специфические свойства реальных тел, ...и «геометрию-математику», ...изучающую определенные математические структуры...

Исаак Яглом

Невозможное на плоскости осуществимо в трехмерном пространстве!

Игорь Шарыгин

А так ли хорошо знакомы вам физика × геометрия?

Обещанное продолжение разговора о приумножающем друг друга союзе этих научных сфер, прирастает сегодня третьим измерением. СТЕРЕОМЕТРИЯ вкупе с физикой особенно подчеркивает связь конкретных, осязаемых тел с их образами, восходящими до условности высокой абстракции. Простейшие – они же фундаментальные – положения геометрии, изучаемые в школе, эволюционировали до возможности не только описать свойства непосредственного окружения, но и объять все представимое (да и непредставимое!) пространство Вселенной, проникнуть в сложнейшую структуру нашего мира.

Неразделимость геометрического и физического подходов к решению заметного числа задач то и дело приводит к «перекочевыванию» их из одной предметной области или олимпиады в другую. Действуя как сообщающиеся сосуды, точные науки интегрируются, производя (используя модное выражение) *синергетический эффект*. Попробуем же «оседлать» этого кентавра!

Вопросы и задачи

1. На потолке комнаты, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда, находится паук, а на полу – муха. Как должен двигаться паук, чтобы быстрее всего добраться до мухи?

2. Аквариум, все грани которого – прямоугольники, заполнен водой наполовину. Ее переливают в другой аквариум, все линейные размеры которого больше исходного в 3 раза. Какую долю по высоте займет вода в новом аквариуме?

3. Две медные кастрюли одинаковой формы имеют стенки одной толщины, первая в 8 раз вместительнее второй. Во сколько раз она тяжелее?

4. Опущенная в воду таблетка шипучего аспирина некоторое время лежит на дне, а затем всплывает. Почему?

5. Высота и диаметр основания цилиндра равны диаметру шара. Цилиндр имеет две одинаковые конические воронки на основаниях с общей вершиной. Какое из этих двух тел весит больше?

6. Пусть вишня и ее косточка имеют форму шариков, причем слой мякоти вишни такой же толщины, как и косточка. Во сколько раз объем сочной части вишни больше, чем объем косточки?

7. Как из шести спичек сложить четыре правильных треугольника, чтобы стороной каждого была целая спичка?

8. Чему равна длина ребра наибольшего правильного тетраэдра, который можно поместить в коробку, имеющую форму куба с ребром 1 дм?

9. Тела какой формы можно сложить наиболее плотно, без просветов?

10. От каждой вершины правильного тетраэдра с длиной ребра 2 см отсекается по правильному тетраэдру с длиной ребра 1 см. Форму какого геометрического тела будет иметь остаток от большего тетраэдра?

11. Найдите массу полого куба из латуни, если площадь его наружной поверхности 216 см², а толщина стенок 2 мм.

12. Непрозрачный куб закреплен так, что одна из его вершин находится на горизонтальном экране, а центр куба лежит на одной вертикали с этой вершиной. Сверху на куб вертикально падает широкий параллельный пучок света. Какой будет форма тени, отбрасываемой кубом на экран?

13. Что представляет собой зеркальная поверхность, отражающая параллельные лучи так, что они кажутся исходящими из одной точки за зеркалом?

14. Широкий параллельный пучок световых лучей падает на плоское основание стеклянного полушара с показателем преломления $n = \sqrt{2}$ перпендикулярно плоскости основания. Каков максимальный угол отклонения прошедших через шар лучей от их первоначального направления?

Микроопыт

Склейте бумажную трубку достаточно большого диаметра. Сможете ли вы руками превратить ее в тетраэдр?

Любопытно, что...

...происхождение наименований объемных фигур берет начало от названий близких по форме объектов. Например, «цилиндр» означал у греков валик или каток, «сфера» – мяч, а древнеегипетское слово «пурама» преобразилось в нынешнее «пирамида».

...в середине 6 века до новой эры древнегреческий философ Анаксимандр, первым пытавшийся составить карту известной элинам части Земли, задумавшись об ее истинной форме, пришел к выводу: Земля есть цилиндр с осью, направленной с востока на запад.

...известную сегодня школьнику формулу объема пирамиды древний грек Фалес

позаимствовал от египтян, но вряд ли знал ее обоснование.

...Архимед самым большим своим достижением считал доказательство, что объем шара в полтора раза меньше объема описанного около него цилиндра.

...разыскивая гармонию в движениях планет, Кеплер объяснял ее с помощью пяти правильных многогранников. Если их расположить матрешкой так, чтобы каждый касался двух соседних небесных сфер, то те получают размеры, близкие к наблюдаемым планетным орбитам.

...в 1604 году Кеплер, исследуя по идеям Альхазена конусы лучей, исходящие по всем направлениям из каждой светящейся точки, сумел истолковать опыт с кажущимся переломом опущенной в воду палки. До него этот опыт оставался нераскрытой тайной в течение тысячелетий, по выражению самого Кеплера – «черным пятном в прекраснейшей науке».

...ярким примером физической теории, превратившейся, по сути, в математическую, служит геометрическая оптика, преобразование которой привело к так называемой проективной геометрии. Ее развитие было обусловлено потребностями архитектуры и инженерии в эпоху Возрождения.

...созданные в XIX веке неевклидовы геометрии сыграли определяющую роль при построении Эйнштейном теории относительности, требующей принять факт искривленности окружающего нас пространства.

...недавно открыт интуитивно неочевидный факт, что поверхность правильного тетраэдра (вспомните пакеты с молоком) можно смять так, что ограничиваемый ею объем увеличится, причем даже на 37,7%!

Что читать в «Кванте» по теме «Физика x стереометрия»

(публикации последних лет)

1. Калейдоскоп «Кванта» – 2015, №2, 4 и 2016, №5/6, с.32;
2. «Расстояния на сфере» – 2017, №4, с. 36;
3. «Картография и кривизна» – 2019, №9, с.9;
4. «Муравей на консервной банке» – 2020, №2, с.31.

Материал подготовил А. Леонович

Как Толик Втулкин физикой увлекся

С.ДВОРЯНИНОВ

В ШКОЛЕ ТОЛИК ВТУЛКИН ВНАЧАЛЕ увлекался ботаникой. Началась она в пятом классе, а ему с раннего детства нравилось бывать в саду или на огороде. Особенно в жаркий день, когда в любом месте он мог устроить себе душ водой из шланга. Это он называл «полить огород». А еще у Толика была обязанность – наливать воду в прямоугольный железный бак, чтобы она за день на солнце нагрелась.

Но заполнить бак водой до самых краев никак не удавалось. Причина простая – бак стоял «неровно», он был наклонен в одну сторону, и вода переливалась через край. Вот с этого все и началось.

– Почему это бак не падает набок? – удивился было Толик. – Ведь на одну его стенку вода давит сильнее, чем на все остальные.

Ответ на этот вопрос он нашел быстро. А потом, лежа в тени под яблоней, начал размышлять о баке с водой на наклонной плоскости, о которой говорили на уроке физики.

Бак-куб на наклонной плоскости

Представим себе, что на наклонной плоскости стоит пустой железный бак в форме куба без крышки, а невысокий горизонтальный бортик удерживает его от скольжения. (Или трение столь велико, что скользить бак по плоскости не может.) При этом ребро основания бака упирается в бортик. Начнем увеличивать угол наклона этой плоскости. Ясно, что в некоторый момент бак опрокинется, вращаясь вокруг бортика. А насколько большим должен быть для этого опрокидывания угол наклона плоскости?

Пусть ребро бака равно a . Бак будем считать тонкостенным, ρ – его поверхност-

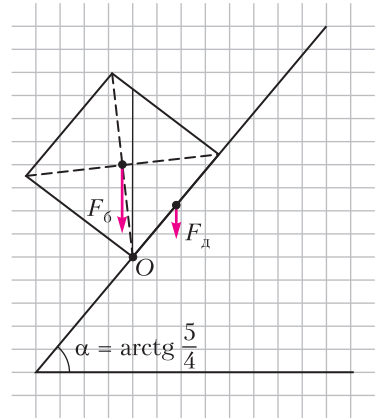


Рис. 1

ная плотность. Посмотрим на бак сбоку, можно сказать – в профиль. В проекции увидим квадрат, а бортик и упирающееся в него ребро основания превратятся в точку O (рис.1). Плечо силы тяжести дна бака, т.е. расстояние от центра дна до вертикали, проходящей через точку O , равно $\frac{a}{2} \cos \alpha$, сила тяжести дна равна $\rho a^2 g$, момент силы тяжести дна равен

$$M_d = \rho a^2 g \cdot \frac{a}{2} \cos \alpha.$$

Плечо силы тяжести боковой поверхности бака относительно той же точки, т.е. расстояние от центра квадрата до той же вертикали, равно $\frac{a \sin \alpha - a \cos \alpha}{2}$, сила тяжести боковины равна $\rho \cdot 4a^2 g$, ее момент равен

$$M_6 = 4\rho a^2 g \cdot \frac{a \sin \alpha - a \cos \alpha}{2}.$$

Например, если $\alpha = 45^\circ$, то этот момент равен нулю (рис.2). Бак устойчиво стоит на

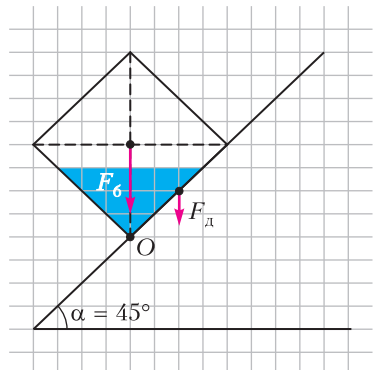


Рис. 2

наклонной плоскости. Будем наливать в этот бак воду. Когда половина объема бака заполнится, вода начнет из него выливаться.

Условие опрокидывания бака таково:

$$M_6 > M_d, \text{ или (после сокращения на } \frac{\rho a^3 g}{2})$$

$$4(\sin \alpha - \cos \alpha) > \cos \alpha, \text{ т.е. } \operatorname{tg} \alpha > \frac{5}{4}.$$

Итак, пустой бак опрокинется, если его поставить на наклонную плоскость с углом $\alpha > \operatorname{arctg} \frac{5}{4}$. В случае равенства моментов бак находится в положении неустойчивого равновесия (см. рис.1).

Квадратный бак на наклонной плоскости

Пусть теперь на наклонной плоскости с углом α находится бак высотой h со стороной основания a . Угол наклона плоскости начинаем медленно увеличивать. Для каких значений угла α бак не опрокинется?

Как и прежде, масса дна бака равна ρa^2 , плечо его силы тяжести относительно точки O равно $\frac{a}{2} \cos \alpha$, момент силы тяжести дна равен $\rho a^2 g \cdot \frac{a}{2} \cos \alpha$. Масса боковой поверхности бака равна $\rho \cdot 4ah$, плечо ее силы тяжести относительно точки O равно $\frac{h \sin \alpha - a \cos \alpha}{2}$. Бак не опрокинется до тех пор, пока будет выполнено неравенство

$$4\rho ahg \frac{h \sin \alpha - a \cos \alpha}{2} \leq \rho a^2 g \frac{a}{2} \cos \alpha.$$

Отсюда после упрощения получаем неравенство

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{a^2 + 4ha}{4h^2}, \text{ или } \operatorname{tg} \alpha \leq \left(\frac{a}{2h}\right)^2 + \frac{a}{h}.$$

В случае равенства центр масс бака расположен над точкой O , т.е. лежит на вертикали, проходящей через точку O , и бак находится в положении неустойчивого равновесия. При дальнейшем увеличении угла α бак опрокидывается.

Для кубического бака при $h = a$ получаем уже известное условие $\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{5}{4}$.

Заметим, что чем больше отношение a/h , т.е. чем более бак является плоским, тем на

более крутой наклонной плоскости он удерживается от опрокидывания.

Бак высотой h на наклонной плоскости с углом $\alpha = 45^\circ$

Рассмотрим другую причину опрокидывания бака – для наклонной плоскости он оказывается чрезмерно высоким. Пусть плоскость наклонена под углом 45° и квадратный бак высотой h имеет размеры $a \times a \times h$. При этом плечо силы тяжести его боковой поверхности равно $\frac{h-a}{2\sqrt{2}}$. Приравнявая два момента сил тяжести, получаем после упрощения условие неустойчивого равновесия такого бака:

$$4ah \cdot \frac{h-a}{2\sqrt{2}} = a^2 \cdot \frac{a}{2\sqrt{2}}, \text{ или}$$

$$4h^2 - 4ah - a^2 = 0.$$

Отсюда находим

$$h = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} a.$$

При меньшей высоте бак устойчиво стоит на наклонной плоскости с углом 45° .

Если в пустой бак высотой $h = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} a$ наливать воду, то неустойчивое равновесие будет сначала сохраняться. Но как только дно бака окажется в воде, бак опрокинется.

Круглая бочка на наклонной плоскости

Допустим, что на наклонной плоскости с углом α находится пустая открытая сверху тонкостенная круглая бочка цилиндрической формы (рис.3). Высота бочки h , радиус основания R . Как и раньше, бочку удерживает от скольжения невысокий горизонтальный бортик. Угол наклона плоскости начинаем медленно увеличивать. Для каких значений угла α бочка не опрокинется?

Пусть бочка касается бортика в точке O и ρ – поверхностная плотность бочки. Тогда

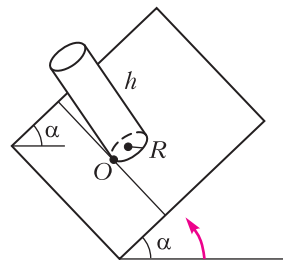


Рис. 3

масса дна бочки равна $\rho\pi R^2$, плечо его силы тяжести относительно точки O равно $R \cos \alpha$, момент силы тяжести дна бочки равен $\rho\pi R^2 g \cdot R \cos \alpha$. Масса боковой поверхности бочки равна $\rho \cdot 2\pi R h$. Плечо ее силы тяжести относительно точки O , т.е. расстояние от геометрического центра цилиндра до вертикали, проходящей через точку O , равно $\frac{h \sin \alpha - 2R \cos \alpha}{2}$.

Бочка не опрокинется до тех пор, пока будет выполнено неравенство

$$\rho \cdot 2\pi R h g \frac{h \sin \alpha - 2R \cos \alpha}{2} \leq \rho\pi R^2 g R \cos \alpha.$$

Отсюда после преобразований получаем

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{R^2 + 2hR}{h^2}, \text{ или } \operatorname{tg} \alpha \leq \left(\frac{R}{h}\right)^2 + 2\frac{R}{h}.$$

В случае равенства центр масс бочки расположен над точкой касания бочки с бортиком. При дальнейшем увеличении угла α бочка опрокинется.

Неравенство показывает, что чем больше отношение R/h , т.е. чем более бочка является плоской, тем на более крутой наклонной плоскости она удерживается от опрокидывания. Это хорошо известно из опыта. На рисунке 4 показан частный случай: $R = h$ и $\operatorname{tg} \alpha = 3$. При этом масса боковой поверхности бочки в два раза больше массы ее дна и плечи их сил тяжести (красные отрезки) тоже отличаются в два раза.

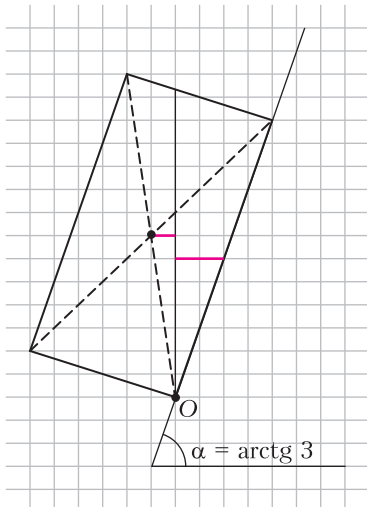


Рис. 4

Сравним устойчивость бочки с диаметром основания $2R = a$ и квадратного бака со стороной основания a и с одной и той же высотой h . Для бочки условие устойчивости принимает вид

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{R^2 + 2hR}{h^2} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2h\frac{a}{2}}{h^2} = \frac{a^2 + 4ha}{4h^2},$$

что полностью совпадает с условием устойчивости бака. Иными словами, бочка и бак устойчивы в равной мере.

Что такое катастрофа

Рассмотрим очень тонкостенный кубический бак, стоящий на наклонной плоскости с углом $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{4,5}{4}$ (рис.5). Бак находится в состоянии устойчивого равновесия, потому что его центр масс находится правее вертикали, проходящей через точку O . Вообразим, что в этот бак по каплям льется вода. По рисунку видно, что центр масс воды в любой момент времени находится слева от вертикали, проходящей через точку O . С каждой новой каплей воды центр масс системы бак + вода будет смещаться все левее.

(Продолжение см. на с. 41)

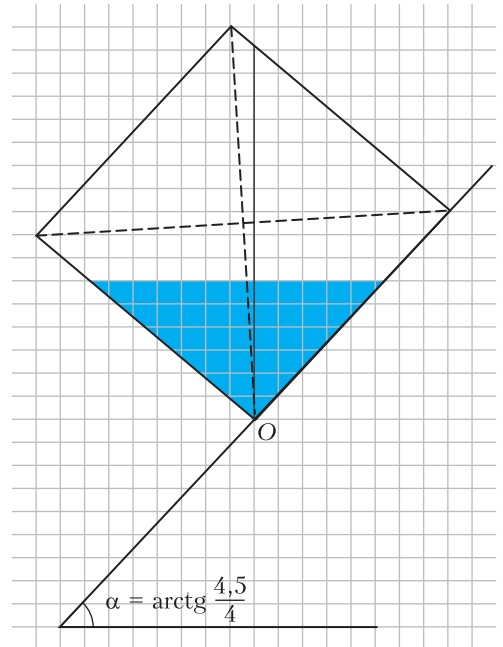


Рис. 5

Раскраска таблицы в три цвета

А. БОАГ, Л. РАДЗИВИЛОВСКИЙ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ РАЗБЕРЕМ одну комбинаторную задачу так называемого *рамсеевского* типа и на ее примере продемонстрируем множество интересных идей и методов – от принципа Дирихле до небольшого путешествия в аффинную геометрию над конечным полем.

Рассмотрим таблицу $m \times n$ (m строк и n столбцов), где $m, n > 1$, и раскраски такой таблицы, при которых каждая клетка покрашена в один из данных k цветов. Назовем раскраску *хорошей*, если найдется прямоугольник, угловые клетки которого покрашены в один цвет (здесь и далее длина и ширина прямоугольника больше 1). Остальные раскраски назовем *плохими*. Задача: для фиксированного $k > 1$ выяснить, при каких m и n любая раскраска – хорошая. Такие пары (m, n) назовем хорошими, а остальные пары – плохими.

Например, любая пара вида (k, n) всегда будет плохой (напомним, что k – число цветов, а не произвольное число). Действительно, у таблицы $k \times n$ есть плохая раскраска: каждая строка покрашена в свой цвет. С другой стороны, интуиция подсказывает, что пары (m, n) , в которых и m и n достаточно велики, должны быть хорошими: в большой таблице прямоугольник какого-то цвета уж точно должен найтись! Сравните с другой классической задачей: среди любых шести людей на земном шаре обязательно найдутся трое попарно знакомых или трое попарно незнакомых. Такого рода вопросы относятся к *теории Рамсея*. Эта теория изучает условия, при которых в достаточно больших математических объектах обязательно появляется фрагмент данного вида. Другие интересные задачи в духе теории Рамсея можно найти в статье [1].

Начнем с простых соображений, верных для любого фиксированного k .

– Пары (m, n) и (n, m) хорошие (плохие) одновременно.

– Свойство раскраски быть хорошей или плохой не зависит от перестановок строк и перестановок столбцов.

– Введем порядок на парах:

$$(m', n') \geq (m, n) \Leftrightarrow (m' \geq m \text{ и } n' \geq n) \text{ или } (m' \geq n \text{ и } n' \geq m). \quad (1)$$

Если пара (m, n) хорошая, то хорошие также все пары $(m', n') \geq (m, n)$.

Уже для четырех цветов нам ответ неизвестен. Для трех цветов мы опишем все хорошие пары. Начнем с более простого случая.

Случай двух цветов

Пусть цветов всего два: белый и синий. Будем увеличивать число m строк и каждый раз находить наименьшее $n \geq m$, при которых пара (m, n) – хорошая (если такое n существует). Как отмечалось выше, все пары $(2, n)$ плохие.

При $m \geq 3$ в каждом столбце есть хотя бы две клетки одного цвета. Поэтому всякая раскраска с двумя одинаковыми столбцами – хорошая. Поскольку всего различных столбцов 2^m , то все пары (m, n) , где $m \geq 3$, $n > 2^m$, хорошие. В частности, при $m = 3$ есть всего 8 разных столбцов высоты 3, так что пара $(3, 9)$ хорошая. Далее, в таблице 3×7 с различными столбцами обязательно есть одноцветный столбец, скажем синий. Поэтому, если раскраска плохая, то в остальных столбцах может быть максимум одна синяя клетка, а таких столбцов всего 4. Значит, любая раскраска доски 3×7 – хорошая, т.е. $(3, 7)$ – хорошая пара. А пара $(3, 6)$ уже плохая, так как даже пара $(4, 6)$ плохая: пример плохой раскраски показан на рисунке 1. Столбцы в ней представляют все 6 сочетаний из 4 по 2 (в каждом столбце ровно две синие клетки).

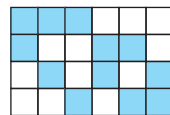


Рис. 1

Для полного описания хороших пар осталось исследовать пару $(5, 5)$.

Задача 1. Докажите, что пара $(5, 5)$ хорошая (для двух цветов).

Теорема 1. При раскраске в два цвета хорошими являются в точности следующие пары:

$$(m, n) \geq (3, 7), (5, 5).$$

Далее будем решать задачу для $k = 3$. Выведем теорему, аналогичную теореме 1. «Пороговых» пар, аналогичных парам $(3, 7)$ и $(5, 5)$, будет больше. Теперь случай $m = 3$ тривиален: все пары $(3, n)$ плохие. Аналогично случаю двух цветов, пары (m, n) , где $m \geq 4$ и $n > 3^m$, хорошие. Но эта оценка на n слишком грубая. Займемся ее усилением.

Мультиграф раскраски

Пусть дана некоторая раскраска K таблицы $m \times n$. Сопоставим ей мультиграф $G(K)$ по следующему правилу (в отличие от графа, в мультиграфе две вершины могут соединяться несколькими ребрами). Вершинами в $G(K)$ будут номера строк $1, \dots, m$ нашей таблицы. Если столбец X пересекает i -ю и j -ю строки по клеткам одного цвета, то соединим вершины i и j ребром с меткой X (причем если эти две клетки, скажем, синие, то и ребро будем называть синим, однако цвета ребер нас будут редко интересовать). Пример соответствия таблицы и мультиграфа показан на рисунке 2 (белым клеткам

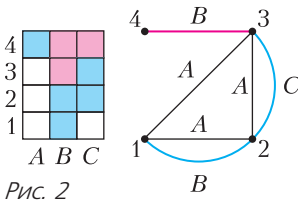


Рис. 2

соответствуют черным ребрам). Число ребер в полученном мультиграфе обозначим $P(K)$.

Возьмем две строки i и j в какой-нибудь плохой раскраске K . Максимум один столбец может пересекать их по белым клеткам, максимум один – по синим и максимум один – по красным. Поэтому в мультиграфе $G(K)$ вершины i и j могут быть соединены максимум тремя ребрами. Поскольку всего пар вершин $C_m^2 = m(m-1)/2$, мы получаем верхнюю оценку на число ребер:

$$P(K) \leq 3m(m-1)/2 \text{ для любой плохой раскраски } K \text{ таблицы } m \times n. \quad (2)$$

А теперь оценим $P(K)$ снизу. Какой бы ни была раскраска K (хорошей или плохой),

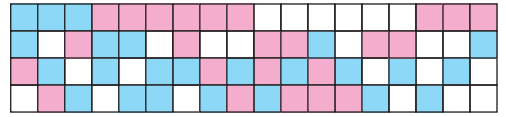


Рис. 3

при $m \geq 4$ в каждом столбце есть две клетки одного цвета. В терминах нашего мультиграфа это значит, что в нем будут ребра, помеченные всеми n столбцами. Значит,

$$P(K) \geq n \text{ для любой раскраски } K \text{ таблицы } m \times n, \text{ где } m \geq 4. \quad (3)$$

При $m = 4$ оценки (2) и (3) дают неравенство для плохих раскрасок: $n \leq P(K) \leq 18$. Существует ли плохая раскраска при $n = 18$? Если да, то обе оценки (2) и (3) обращаются в равенства, т.е. в каждом столбце есть клетки всех цветов и любые две строки имеют ровно одну общую клетку каждого цвета. Один из примеров показан на рисунке 3. Итак, пара $(4, n)$ – хорошая тогда и только тогда, когда $n \geq 19$.

Неравенство между числом столбцов и числом ребер

Усилим неравенство (3), дающее хорошую оценку лишь при $m = 4$. Для этого точнее оценим вклад каждого столбца в общее число ребер. Для примера рассмотрим таблицу на рисунке 4.

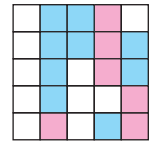


Рис. 4

Столбец A «соединяет» все $C_5^2 = 10$ пар строк, столбец $B - C_4^2 = 6$ пар строк (с 1 по 4), столбец $C - 3 + 1 = 4$ пары, столбец $D -$ три пары, столбец $E -$ две пары. С точностью до переименования цветов и порядка строк мы перебрали все варианты столбцов высоты 5. Как видим, каждый соединяет хотя бы две пары строк, а потому $P(K) \geq 2n$ при $m = 5$.

Вообще, пусть в столбце высоты m имеется x белых, y красных и z синих клеток. Тогда он соединяет

$$C_x^2 + C_y^2 + C_z^2 = (x(x-1) + y(y-1) + z(z-1))/2 \quad (4)$$

строк. Нас интересует минимум $f(m)$ этого выражения при условии $x + y + z = m$: раз в каждом из n столбцов хотя бы $f(m)$ пар одинаково раскрашенных клеток, то в муль-

тиграфе ребро, помеченное любым из n столбцов, встретится хотя бы $f(m)$ раз. Это дает оценку

$$P(K) \geq nf(m) \text{ для любой раскраски } K \text{ таблицы } m \times n, \text{ где } m \geq 4. \quad (5)$$

С учетом обратной оценки (2) отсюда заключаем, что

$$\text{все пары } (m, n), \text{ где } m \geq 4, \\ n > \lceil 3m(m-1)/2f(m) \rceil, \text{ — хорошие} \quad (6)$$

(здесь квадратными скобками обозначена целая часть числа).

Интуиция и пример с $m = 5$ подсказывают, что минимум $f(m)$ выражения (4) достигается, когда числа x, y, z «примерно равны». Идея в том, что если какие-то два из этих чисел сильно различаются, то их можно сблизить с сохранением суммы, отчего значение выражения (4) уменьшится (это иллюстрирует рисунок 5). Кстати, это общее свойство выпуклых функций. Сформулируем

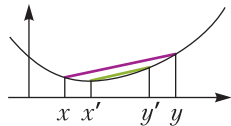


Рис. 5

четкое утверждение и предложим читателю его аккуратно доказать. Благо мы имеем дело с совсем простой, квадратичной функцией.

Задача 2. Докажите, что минимум выражения (4) при условии $x + y + z = m$ достигается, когда числа x, y, z отличаются не более чем на 1 (x, y, z — целые неотрицательные числа).

Такое разбиение числа m назовем равномерным.

Составим таблицу:

m	Равномерное разбиение $m = x + y + z$	$f(m)$	$\lceil \frac{3m(m-1)}{2f(m)} \rceil$
4	2 + 1 + 1	1	18
5	2 + 2 + 1	2	15
6	2 + 2 + 2	3	15
7	3 + 2 + 2	5	12
8	3 + 3 + 2	7	12
9	3 + 3 + 3	9	12
10	4 + 3 + 3	12	11
11	4 + 4 + 3	15	11

Мы остановились на $m = 11$, так как верхняя граница для n тогда тоже 11. Мы бы завершили решение, если бы привели при-

меры плохих раскрасок размеров $6 \times 15, 9 \times 12$ и 11×11 . Первые два примера мы построим и покажем, как до них догадаться, а вот с последним случаем все не так просто. Но обо всем по порядку.

Пример 6×15 : турнирная таблица

Поскольку минимум $f(6) = 2$ достигается лишь на равномерном разбиении $6 = 2 + 2 + 2$, то в плохой раскраске 6×15 каждый столбец содержит по две клетки каждого цвета, причем одна и та же пара клеток в разных столбцах не может быть покрашена одним цветом. Такую таблицу можно интерпретировать как турнирную для своеобразного троеборья между шестью участниками. Строки таблицы — игроки 1, ..., 6. Каждый столбец — это раунд, в котором белые клетки обозначают играющих в шахматы, красные — в шашки, синие — в нарды. При этом за весь турнир каждая пара играет между собой в каждую игру по разу. Как раз получается $15 = 5 \times 3$ раундов: каждый играет с пятью другими в три игры. Как же составить такую таблицу?

Начнем с построения более простой таблицы — для шахматного турнира между шестью игроками, имеющими три доски. Нужно разбить их на пары пятью способами, чтобы каждый побывал в паре с каждым ровно один раз. Для этого есть простая геометрическая картинка. Возьмем вершины правильного пятиугольника и его центр — всего 6 точек, они обозначают участников. Эти точки разбиваются ровно пятью способами на такие пары: сторона, параллельная ей диагональ, две оставшиеся точки (рис.6).

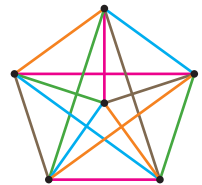


Рис. 6

Задача 3. Обобщите описанную конструкцию на любое число шахматистов $2n$ или $2n + 1$, имеющих n досок и желающих провести однокруговой турнир за наименьшее число туров.

Теперь превратим таблицу 6×5 для шахматного турнира в искомую таблицу 6×15 для троеборья. Каждый столбец шахматной таблицы — это просто разбиение на пары A, B и C . Объявим, что в первом туре пара A играет в шахматы, пара B — в шашки, пара C — в нарды. Во втором туре те же пары

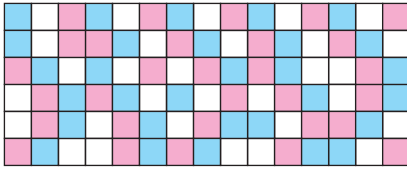


Рис. 7

играют в игры, сдвинутые по циклу: A – в шашки, B – в нарды, C – в шахматы. Наконец, в третьем туре сделаем цикл еще раз: A – в нарды, B – в шахматы, C – в шашки. Проредавав эту процедуру с каждым столбцом шахматной таблицы 6×5 , получим искомую раскраску 6×15 , пример приведен на рисунке 7.

**Пример 9×12 :
конечная аффинная геометрия**

В плохой таблице 9×12 в каждом столбце должно быть по три клетки каждого цвета (минимум $f(9) = 12$ достигается лишь на разбиении $9 = 3 + 3 + 3$). Построить такую таблицу поможет аффинная геометрия над полем $\mathbb{Z}_3 = \{-1, 0, 1\}$. Пугаться не стоит. Сейчас все объясним по-простому.

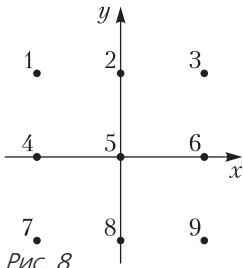


Рис. 8

Сопоставим каждой строке точку (x, y) на плоскости с координатами $x, y \in \{0, 1, -1\}$, которые складываются, вычитаются и умножаются по модулю 3 (рис.8). Например, $1 + 1 = -1$, $(-1)(-1) = 1$. Прямые, как обычно, задаются линейными уравнениями вида $y = ax + b$ и $x = c$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}_3$). Каждая прямая, тем самым, состоит из трех точек. Параллельные прямые – те, которые не пересекаются, т.е. вертикальные $x = b$, а также прямые первого вида с одинаковым угловым коэффициентом a и разными коэффициентами b . Всего получается 12 прямых, разбитых на 4 группы параллельных (4 направления). Возьмем любое такое разбиение на параллельные прямые и покрасим их в белый, синий и красный цвета произвольным образом. Перенеся цвет каждой точки в соответствующую ей клетку таблицы 9×4 , получим плохую раскраску. И даже «очень плохую» – в том смысле, что эта раскраска обладает более сильным свойством:

если в каком-то прямоугольнике угловые клетки в одном столбце одноцветны, то угловые клетки другого столбца обязательно разноцветны. (7)

Действительно, парам клеток каждого из четырех столбцов отвечают пары точек на соответствующем рисунке с параллельными прямыми. Если на одном рисунке точки одноцветны, то они лежат на одной из параллельных прямых, но тогда на другом рисунке те же точки лежат на разных параллельных прямых, а значит, покрашены в разные цвета.

Теперь сделаем из нашей таблицы 9×4 плохую таблицу 9×12 : для каждого столбца сделаем две копии и сдвинем в них цвета по циклу синий $>$ белый $>$ красный $>$ синий

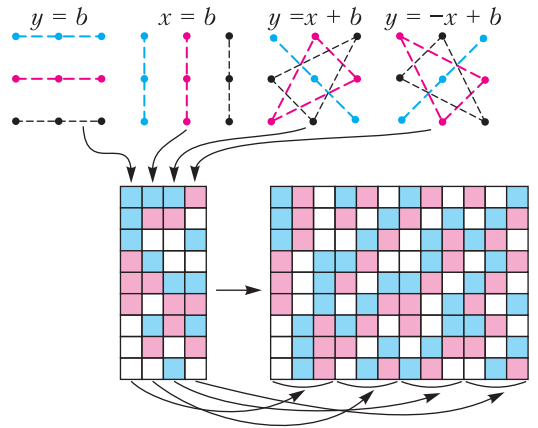


Рис. 9

(рис.9). Раскраска и впрямь плохая: если прямоугольник взят из одной группы скопированных столбцов, то его левые и правые углы покрашены в разные цвета, а иначе для него выполняется свойство (7).

Кстати, метод, которым мы построили таблицу 9×4 , используют для организации турнира со следующими условиями. В турнире всего q^2 участников, где q – степень простого числа (u нас $q = 3$). В каждом туре участники как-то разбиваются на q групп по q в каждой, внутри группы каждый играет с каждым, при этом за весь турнир каждый играет с каждым ровно один раз. Чтобы составить расписание разбиений на группы, используют описанную выше конструкцию с полем из q элементов вместо \mathbb{Z}_3 . При простом q это просто поле вычетов по модулю q . Подробнее об этом рассказано в статье [2].

Анализ таблиц 10×10 и 10×11

Оказывается, примера плохой раскраски 11×11 не существует, т.е. пара $(11, 11)$ хорошая. На самом деле, даже пара $(10, 11)$ хорошая, но для доказательства недостаточности оценки (5). Приведем план доказательства, оставив детали читателю в виде задачи. Предположим, нам удалось построить плохую раскраску K размера 10×11 . Ребер каждого цвета в мультиграфе $G(K)$ не более $C_{10}^2 = 45$. Клеток какого-то цвета, скажем синего, в S хотя бы 37 (так как $36 \times 3 = 108$). Если их ровно 37 и они распределены по столбцам равномерно, то среди них 4 четверки и 7 троек, и тогда синих ребер ровно $4C_4^2 + 7C_3^2 = 45$.

Задача 4. Докажите, что при любом другом распределении синих клеток по столбцам синих ребер было бы больше.

Итак, можно считать, что в столбцах $A-D$ по 4 синих клетки, а в остальных – по 3.

Задача 5. Докажите, что среди столбцов $A-D$:

а) любые два имеют ровно одну общую (с тем же номером) синюю клетку;

б) никакие три не имеют общей синей клетки.

Таким образом, можно считать, что синие клетки в столбцах $A-D$ расположены, как на рисунке 10. Галочками отмечены строки, в которых две синие клетки. Эти строки назовем *темными*, а остальные – *светлыми*. Попробуем покрасить в одном из оставшихся столбцов три клетки синим цветом, чтобы не получилось синего прямоугольника.

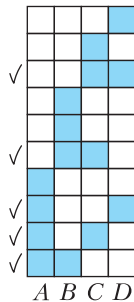


Рис. 10

Задача 6. Докажите, что при этом хотя бы две из трех синих клеток будут в светлых строках.

Поскольку светлых строк всего 4, то из них можно образовать лишь $C_4^2 = 6$ пар, поэтому среди семи последних столбцов обязательно найдутся два с общей парой синих клеток. Итак, любая таблица 10×11 хорошая.

Пример плохой таблицы 10×10 мы нашли с помощью компьютера (рис. 11).

Собирая все вместе, получаем следующую теорему.

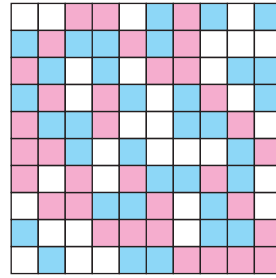


Рис. 11

Теорема 2. При раскраске в три цвета хорошими являются в точности следующие пары:

$$(m, n) \geq (4, 19), (6, 16), (9, 13), (10, 11).$$

Задача 7. Рассмотрим такую же задачу для k цветов. Докажите, что пары $(k+1, k^2(k+1)/2)$ и (k^2+k, k^2+k) хорошие.

Задача 8. Пусть q – степень простого числа. Докажите, что для q цветов пара (q^2, q^2+q) плохая. (Если вы не знаете других конечных полей, кроме полей вычетов, считайте, что q – простое.)

Литература

1. А.Райгородский. Задачи о пересечениях множеств. – «Квант», 2016, №5–6.
2. М.Горелов. Абстрактная математика волейбольного турнира. – «Квант», 2015, №2.

(Начало см. на с. 34)

Ясно, что наступит момент, когда этот центр масс окажется слева от точки O . С поступлением этой последней капельки бак с водой начнет опрокидываться. И чем дальше, тем быстрее. Вот это явление потери устойчивости и называется катастрофой.

Задачи для самостоятельного решения

1. Один и тот же квадратный бак, стоящий на наклонной плоскости, в одном случае упирается в бортик ребром основания, а в другом – углом основания (ребра основания образуют угол 45° с бортиком). В каком случае бак более устойчив?

2. В школьном саду квадратный бак, стоящий на наклонной плоскости, заполняли водой до тех пор, пока вода не стала выливаться из бака. Толик Втулкин утверждает, что в этот бак, не убирая его с этой плоскости, можно влить еще больше воды. Может ли утверждение Толика Втулкина быть верным?

Региональный этап XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике

Задачи олимпиады

9 класс

1. Ослик Иа-Иа составил из шести палочек два треугольника. Затем он разобрал треугольники обратно и покрасил шесть палочек в два цвета: три самых коротких – в желтый цвет, а три остальных – в зеленый. Обязательно ли ослику удастся составить два треугольника, один – из трех желтых палочек, а другой – из трех зеленых?

Л.Емельянов

2. См. задачу M2642 «Задачника «Кванта».

3. Рассмотрим такие натуральные числа a , b и c , что дробь

$$k = \frac{ab + c^2}{a + b}$$

является натуральным числом, меньшим a и b . Какое наименьшее количество натуральных делителей может быть у числа $a + b$?

П.Козлов

4. См. задачу M2643 «Задачника «Кванта».

5. См. задачу M2644 «Задачника «Кванта».

6. Десятизначные натуральные числа a , b , c таковы, что $a + b = c$. Какое наибольшее количество из 30 их цифр могут оказаться нечетными?

И.Богданов

7. Вася записал в клетки таблицы 9×9 натуральные числа от 1 до 81 (в каждой клетке стоит по числу, все числа различны). Оказалось, что любые два числа, отличающиеся на 3, стоят в соседних по стороне клетках. Верно ли, что обязательно найдутся две угловых клетки, разность чисел в которых делится на 6?

О.Подлипский

8. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Оказалось, что точка пересечения медиан треугольника ABD лежит на биссектрисе угла BCD . Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABC лежит на биссектрисе угла ADC .

А.Кузнецов

9. В алфавите $n > 1$ букв; словом является каждая конечная последовательность букв, в которой любые две соседние буквы различны. Слово называется *хорошим*, если из него нельзя вычеркнуть все буквы, кроме четырех, так, чтобы осталась последовательность вида $aabb$, где a и b – различные буквы. Найдите наибольшее возможное количество букв в хорошем слове.

Д.Храмцов

10. См. задачу M2645 «Задачника «Кванта».

10 класс

1. Первоклассник составил из шести палочек два треугольника. Затем он разобрал треугольники обратно и разбил шесть палочек на две группы по три палочки: в первой группе оказались три самых длинных палочки, а во второй – три самых коротких. Обязательно ли можно составить треугольник из трех палочек первой группы? А из трех палочек второй группы?

Л.Емельянов

2. См. задачу M2642 «Задачника «Кванта».

3. Пусть S – множество, состоящее из натуральных чисел. Оказалось, что для любого числа a из множества S существуют два числа b и c из множества S такие, что $a = \frac{b(3c - 5)}{15}$. Докажите, что множество S бесконечно.

Д.Крачун

4. Вписанная окружность касается сторон AB , BC и CA неравностороннего треугольника ABC в точках C_1 , A_1 и B_1 соответственно. Пусть m – средняя линия треугольника $A_1B_1C_1$, параллельная стороне B_1C_1 . Биссектриса угла $B_1A_1C_1$ пересекает m в точке K . Докажите, что описанная окружность треугольника BCK касается m .

И.Богданов

5. См. задачу 5 для 9 класса.

6. На доску выписали три натуральных числа: два десятизначных числа a и b , а

также их сумму $a + b$. Какое наибольшее количество нечетных цифр могло быть написано на доске?

И. Богданов, П. Кожевников

7. См. задачу 7 для 9 класса.

8. Точка M – середина основания AC равнобедренного треугольника ABC . На продолжении отрезков AC и BC за точку C отмечены точки D и K соответственно так, что $BC = CD$ и $CM = CK$. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABD и MCK , касаются.

А. Кузнецов

9. Фокусник с помощником собираются показать следующий фокус. У них есть $n \geq 3$ карточек с номерами $1, 2, \dots, n$ и ряд из n клеток размером в карточку. Обратные стороны всех карточек неразличимы. Зритель выкладывает на некоторые два места карточки 1 и 2; помощник фокусника, видя это, выкладывает на свободные места остальные карточки. Затем все карточки переворачиваются числами вниз, и входит фокусник. Он переворачивает одну из карточек, а затем зритель переворачивает другую. После этого фокусник должен правильно указать карточку 1 и правильно указать карточку 2. При каких n фокусник и помощник смогут договориться так, чтобы гарантированно фокус удался?

И. Богданов, К. Кноп

10. См. задачу 10 для 9 класса.

11 класс

1. Натуральное число, большее 1000000, дает одинаковые остатки при делении на 40 и на 625. Какая цифра может стоять у этого числа в разряде тысяч?

Н. Агаханов, К. Сухов

2. См. задачу 2 для 10 класса.

3. На оси Ox отметили точки $0, 1, 2, \dots, 100$ и нарисовали графики 200 различных квадратичных функций, каждый из которых проходит через две из отмеченных точек и касается прямой $y = -1$. Для каждой пары графиков Олег написал на доске число, равное количеству общих точек этих графиков. После чего он сложил все 19900 чисел, написанных на доске. Мог ли он получить число 39699?

О. Подлитский

4. Треугольная пирамида $SABC$ вписана в сферу Ω . Докажите, что сферы, симметричные Ω относительно прямых SA, SB, SC и плоскости ABC , имеют общую точку. Сфера, симметричная данной относительно прямой l , – это сфера такого же радиуса, центр которой симметричен центру исходной сферы относительно прямой l .

И. Богданов

5. В Цветочном городе живет 99^2 коротышек. Некоторые из коротышек рыцари (всегда говорят правду), а остальные – лжецы (всегда лгут). Дома в городе расположены в клетках квадрата 99×99 (всего 99^2 домов, расположенных в 99 вертикальных и в 99 горизонтальных улицах). В каждом доме живет ровно один коротышка. Номер дома обозначается парой чисел $(x; y)$, где $1 \leq x \leq 99$ – номер вертикальной улицы (номера возрастают слева направо), а $1 \leq y \leq 99$ – номер горизонтальной улицы (номера возрастают снизу вверх). Цветочным расстоянием между двумя домами с номерами $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ называется число $\rho = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Известно, что на каждой улице – вертикальной или горизонтальной – проживает не менее k рыцарей. Кроме того, все коротышки знают, в каком доме живет рыцарь Знайка. Вы хотите найти его дом, но не знаете, как выглядит Знайка. Вы можете подходить к любому дому и спрашивать живущего в нем коротышку: «Каково цветочное расстояние от вашего дома до дома Знайки?» При каком наименьшем k вы можете гарантированно найти дом Знайки?

Р. Новиков

6. См. задачу 7 для 9 класса

7. Пусть I – центр вписанной окружности остроугольного треугольника ABC , M и N – точки касания вписанной окружности сторон AB и BC соответственно. Через точку I проведена прямая l , параллельная стороне AC , и на нее опущены перпендикуляры AP и CQ . Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.

Р. Женодаров, О. Дмитриев

8. См. задачу 9 для 9 класса.

9. Многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами имеет степень 10^5 , а его старший коэффициент равен 1. Найдите наи-

меньшую возможную степень многочлена

$$R(x) = P(x^{1000} + 1) - P(x)^{1000}.$$

И. Богданов

10. На доску записали три рациональных положительных числа. Каждую минуту чис-

ла x , y , z на доске стираются, а вместо них выписываются числа $x + \frac{1}{yz}$, $y + \frac{1}{zx}$, $z + \frac{1}{xy}$.

Докажите, что начиная с некоторого момента на доске не будет появляться целых чисел.

С. Кудря

Публикацию подготовили Н. Агаханов, И. Богданов, П. Кожевников, О. Подлипский

Региональный этап LV Всероссийской олимпиады школьников по физике

Второй тур

7 класс

Задача 1. На речке (10 баллов)

Петя и Вася решили выяснить, кто быстрее плавает. Для этого они одновременно прыгнули с мостка в речку и поплыли вдоль берега в разные стороны. Через некоторое время t по сигналу с берега они развернулись и поплыли обратно. В результате Вася вернулся к месту старта через время $t/2$ после разворота, а Петя потратил на обратный путь время $2t$. Кто из мальчиков плавает быстрее? Во сколько раз отличаются скорости мальчиков от скорости течения реки?

М. Замятнин

Задача 2. Дорога вдоль канала (10 баллов)

Глеб и Вова после кружка по физике отправились вдоль берега длинного прямого канала на прогулку. Вова поехал на велосипеде, а Глеб пошел в ту же сторону пешком. График зависимости расстояния l между

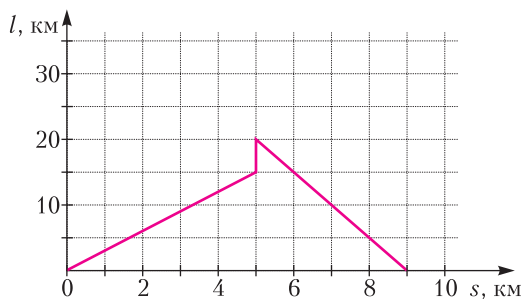


Рис. 1

мальчиками от перемещения s Глеба приведен на рисунке 1. Все время мальчики двигались с постоянными скоростями, но, устав, Глеб сделал привал, в конце которого позвонил Вова и попросил его подъехать к нему, после чего продолжил движение в прежнем направлении. В результате ребята встретились через 2 часа после того, как расстались. Определите, какой путь проехал Вова за всю прогулку до встречи с Глебом, сколько времени Глеб отдыхал на привале, чему равны скорости мальчиков.

М. Замятнин

Задача 3. Две кастрюли под дождем (10 баллов)

Две цилиндрические кастрюли стояли под дождем. Первая заполнилась за время $T_1 = 4$ ч, а вторая – за $T_2 = 2$ ч. Если бы вода из второй кастрюли перетекала в первую с постоянным объемным расходом, то они наполнились бы одновременно за $T = 2,5$ ч. Определите отношение высот h_1/h_2 , площадей S_1/S_2 и объемов V_1/V_2 кастрюль. Интенсивность дождя считайте постоянной.

Примечание. Под интенсивностью дождя понимается объем осадков, выпадающих за единицу времени на единичную площадку.

К. Кутелев

Задача 4. Северный экспресс (20 баллов)

Экспериментатор Глюк во время поездки на экспрессе из Долгопрудного в Дубну записал показания T термометра за окном в зависимости от пройденного расстояния s . В

пути поезд двигался почти с постоянной скоростью и сделал только одну остановку в Дмитрове. Узнав позже на сайте гидрометцентра, как в этот день в течение времени t изменялась температура, Глюк рассчитал время отправления экспресса из Долгопрудного, скорость экспресса, расстояние от Дмитрова до Дубны, примерную длительность остановки в Дмитрове. Постройте графики зависимостей, приведенных в таблицах, и с их помощью получите зависимость

$s, \text{км}$	0	8	12	24	32	41	48	55	60
$T, ^\circ\text{C}$	10,0	10,1	10,2	10,4	10,4	10,6	10,7	11,3	11,6

$s, \text{км}$	69	73	90	96	100	101	105	108	110
$T, ^\circ\text{C}$	12,2	12,4	13,4	13,7	14,0	14,1	14,3	14,4	14,6

$t, \text{ч:мин}$	10:05	10:12	10:18	10:22	10:30	10:42	10:48	10:53	10:59
$T, ^\circ\text{C}$	9,7	9,8	9,9	10,1	10,2	10,5	10,7	10,8	10,9

$t, \text{ч:мин}$	11:05	11:11	11:19	11:25	11:38	11:45	11:55	12:02	12:18
$T, ^\circ\text{C}$	11,5	12,0	13,0	13,5	14,8	15,5	15,8	16,3	16,4

пройденного экспрессом расстояния от времени. Постройте ее график и определите то, что смог рассчитать экспериментатор.

Примечание. В одно и то же время на всем маршруте следования экспресса температура воздуха одинаковая.

М.Замятнин

8 класс

Задача 1. Натяжение (10 баллов)

Два одинаковых однородных рычага массой $m = 7 \text{ кг}$ и длиной 80 см каждый шарнирно соединены с помощью легкого стержня и нитей, между которыми подвешен груз с такой же массой m (рис.2). Определите, на каком расстоянии x от левого края верхнего стержня находится точка крепления нити, удерживающей систему в равновесии, чему равны силы натяжения всех трех нитей и сила, действующая со стороны шарнира на верхний стержень. Для удобства на рисунке стержни размечены на 8 равных частей. Точка крепления самой верхней нити к рычагу изображена условно. Ускорение $g = 10 \text{ Н/кг}$.

М.Замятнин

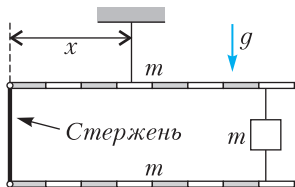


Рис. 2

Задача 2. Дорога доканала (10 баллов)

Ярик и Прохор после кружка по физике отправились на прогулку вдоль берега длинного прямого канала. Ярик пошел пешком, а Прохор поехал на велосипеде. График зависимости расстояния l между ними от перемещения s Ярика приведен на рисунке 1. Сначала мальчики двигались с постоянными скоростями, но, устав, Ярик сделал привал, в конце которого позвонил Прохору и попросил его подъехать к нему, после чего продолжил движение с прежней скоростью в прежнем направлении. Прохор развернулся и, увеличив скорость более чем в два раза, направился к другу. В результате ребята встретились через $1 \text{ ч } 55 \text{ мин}$ после того, как расстались. Определите, какой путь проехал Прохор с начала прогулки до встречи с Яриком, во сколько раз увеличил скорость Прохор после разворота, сколько времени Ярик отдыхал на привале, чему равна скорость Ярика. Обоснуйте однозначность своих ответов.

М.Замятнин

Задача 3. Груз на пружинке (10 баллов)

Груз плотностью $\rho_1 = 0,80 \text{ г/см}^3$ прикреплен к пружине с коэффициентом жесткости $k = 50 \text{ Н/м}$, нижний конец которой соединен с дном сосуда (рис.3). Длина пружины в недеформированном состоянии $L_0 = 10 \text{ см}$, высота груза $L = 12,5 \text{ см}$, площадь поперечного сечения груза $S = 10 \text{ см}^2$. В сосуд начинают медленно наливать воду. Найдите зависимость деформации Δx пружины от уровня h воды в сосуде. Плотность воды $\rho = 1,00 \text{ г/см}^3$, ускорение $g = 10 \text{ Н/кг}$. Укажите, при каких значениях h пружина растянута. Постройте график зависимости Δx от h , считая, что если пружина сжата, то $\Delta x < 0$.

Рис. 3

О.Инишева

Задача 4. Глюк и оловянный солдатик (20 баллов)

Однажды экспериментатор Глюк решил отлить оловянного солдатика. Для этого он

положил в ковшик кусок оловянного сплава массой $m = 150$ г и поместил его на плитку постоянной мощности. Как только началось плавление металла, Глюк стал снимать зависимость его температуры t от времени τ (см. таблицу). Вскоре после перехода всего сплава в жидкую фазу экспериментатор выключил плитку. По результатам измерений определите:

- 1) удельную теплоемкость c сплава;
- 2) мощность P плитки;
- 3) через какое время T , прошедшее после выключения плитки, сплав затвердел (полностью кристаллизовался).

$t, ^\circ\text{C}$	238,0	238,2	237,7	238,3	238,1	240,4	243,2	246,1	248,0
$\tau, \text{с}$	0	8	15	27	35	42	45	48	50

$t, ^\circ\text{C}$	246,9	244,7	242,0	239,1	238,0	238,2	237,8	238,0
$\tau, \text{с}$	53	59	68	77	80	84	89	95

Теплоемкостью ковшика и плитки можно пренебречь. Известно, что удельная теплота плавления сплава $\lambda = 20$ кДж/кг.

А.Вергунов

9 класс

Задача 1. Испытания автомобилей (10 баллов)

Автомобиль должен проехать с постоянным ускорением прямой участок длиной L от линии старта AB до линии CD и после ее пересечения, развернувшись по дуге окружности на 180° , пересечь эту линию в обратном направлении (рис.4).

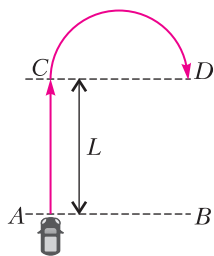


Рис. 4

автомобиля равна нулю, а на закругленном участке постоянна и равна скорости, достигнутой при разгоне по прямой. Ускорение автомобиля во время всего движения не должно превышать a_{\max} . Во сколько раз минимальное время t_1 движения автомобиля от A

до D при разгоне на участке AC с ускорением a_{\max} превышает минимально возможное время t_2 движения от A до D ?

С.Кармазин

Задача 2. Трехлитровый сосуд (10 баллов)

Тонкостенный сосуд (в форме уголка) без дна, изображенный на рисунке 5, установ-

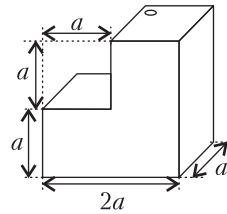


Рис. 5

лен на гладкой горизонтальной поверхности. В него через небольшое отверстие в правой верхней грани наливают воду. Когда $5/6$ объема сосуда оказывается заполненным, вода начинает вытекать из-под него.

Определите массу сосуда, если известно, что $a = 10$ см, а плотность воды $\rho = 1,0 \cdot 10^3$ кг/м³.

А.Евсеев

Задача 3. Девять резисторов (10 баллов)

Электрическая цепь состоит из девяти одинаковых резисторов и трех идеальных амперметров A_0, A_1, A_2 (рис.6). Через амперметр A_0 протекает ток силой $I_0 = 9$ мА. Определите показания амперметров A_1 и A_2 .

В.Слободянин

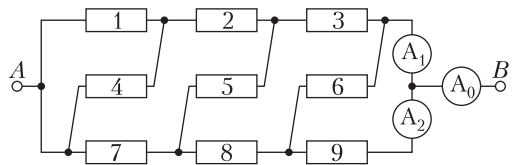


Рис. 6

Задача 4. Испарение азота (20 баллов)

В стакан, установленный на весах, налит жидкий азот. Из-за теплообмена с окружающей средой азот выкипает и показания весов уменьшаются. В некоторый момент времени в стакан опускают цилиндр, имеющий комнатную температуру ($t_0 = +24^\circ\text{C}$). Зависимость показания весов от времени приведена в таблице:

$\tau, \text{мин}$	0	1	2	3	4	5
$m, \text{г}$	250,0	244,0	238,0	232,0	229,5	227,5
	6	7	8	9	10	11
	251,5	232,5	220,0	214,0	208,0	202,0
	12					
						196,0

Постройте график зависимости $m(\tau)$. Определите удельную теплоту λ испарения азота. Температура кипения азота $t_{\text{к}} = -196^\circ\text{C}$, масса цилиндра $M = 70$ г. Зависимость удельной теплоемкости материала цилиндра от температуры в диапазоне от -200°C до $+50^\circ\text{C}$ линейная, при этом удельная теплоемкость при -200°C равна 300 Дж/(кг \cdot °C), а при 50°C она равна 1200 Дж/(кг \cdot °C).

10 класс

Задача 1. Желоб (13 баллов)

Шарик движется по гладкому желобу, расположенному в вертикальной плоскости, из точки A без начальной скорости (рис.7). Желоб соединяет фиксированную точку A , имеющую координаты $(r; r)$, с некоторой точкой B , лежащей на дуге окружности радиусом R с центром в точке $O(0; 0)$. При некотором положении точки B время движения шарика на участке AB оказывается минимально возможным (в процессе движения шарика точка B не перемещается). Определите, чему равно это минимальное время t . Ускорение свободного падения g .

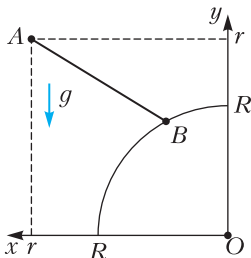


Рис. 7

А.Уймин

Задача 2. Разветвленная цепь (12 баллов)

На рисунке 8 представлена часть разветвленной электрической цепи, включающей девять резисторов и идеальный амперметр.

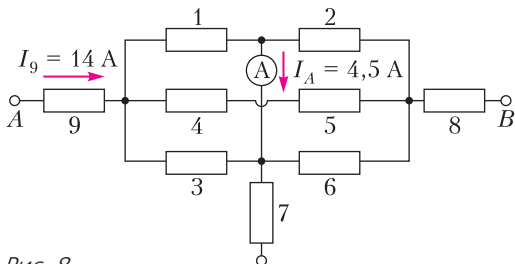


Рис. 8

Сопротивления резисторов равны $R_1 = 1,0$ Ом, $R_2 = 2,0$ Ом, ..., $R_9 = 9,0$ Ом (на рисунке приведены номера резисторов). Силы токов, протекающих через R_9 и амперметр, известны: $I_9 = 14$ А, $I_A = 4,5$ А, их направления указаны на рисунке. Определите силы токов, протекающих через резисторы R_7 и R_8 , а также напряжение между точками A и B .

А.Аполонский

Задача 3. На складе (10 баллов)

На территории промышленного объекта, обнесенной забором $FQHE$, расположены пост охраны – точка O и склад $ABCD$ (рис.9). Охранники жаловались, что с поста им не видны стороны склада AB и AD . Для

решения проблемы было решено установить плоские зеркала. Так как по территории объекта постоянно передвигается тяжелая техника, то зеркала можно вешать только на забор или на стены склада.

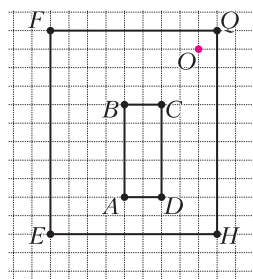


Рис. 9

При этом плоскость зеркала должна совпадать с плоскостью стены/склада. Схема территории приведена на рисунке, размер одной клеточки равен 10 м.

- 1) Укажите, где нужно разместить плоское зеркало, чтобы с поста охраны была видна вся стена AB склада. Построениями докажите, что в зеркале будет видна вся стена AB .
- 2) Укажите минимально возможную ширину зеркала для пункта 1 и где оно должно располагаться. Свои выводы подкрепите построениями и рассуждениями.

3) Возможно ли расположить на стене EH одно зеркало так, чтобы с поста охраны в него была видна вся стена AD ? Свой ответ подкрепите построениями и рассуждениями.

4) Нарисуйте схему расположения зеркал, с помощью которой охрана будет видеть всю стену склада AD . Вам необходимо использовать минимальное количество зеркал. Построениями докажите, что в зеркалах будет видна вся стена AD .

М.Карманов

Задача 4. Гидростатический «серый ящик» (15 баллов)

Внутри «серого ящика», имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, находятся тонкие перегородки, которые могут быть расположены только вдоль пунктирных линий (рис.10,11) перпендикулярно боковым

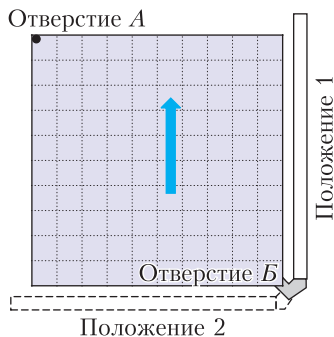


Рис. 10

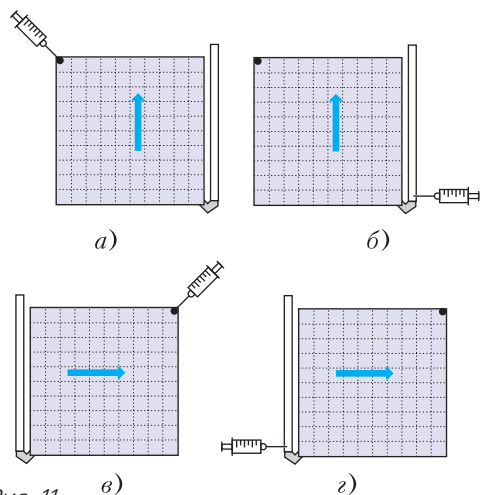


Рис. 11

стенкам ящика (боковыми называются стенки, на которых нарисована стрелка). Перегородки могут начинаться и заканчиваться либо на стенках «серого ящика», либо в точках пересечения пунктирных линий. Перегородки полностью перекрывают расстояние между боковыми стенками и непроницаемы как для воды, так и для воздуха. С помощью имеющегося оборудования определите расположение перегородок и их размеры. Толщиной перегородок и стенок «серого ящика» можно пренебречь. Оценивать погрешность не нужно.

Описание оборудования

«Серый ящик» – квадратная коробочка небольшой толщины с жесткими непрозрачными стенками серого цвета. На рисунке 10 показана боковая стенка коробочки. В одном из углов коробочки есть отверстие А. В противоположном углу сделано отверстие В, в которое помещен вращающийся штуцер с закрепленной на нем прозрачной трубкой. Штуцер и трубочка не съемные, но трубочку можно поворачивать в положение 1 или в положение 2. Шприц медицинский объемом 100 мл с ценой деления 1 мл. Игла для шприца. Полоска миллиметровой бумаги шириной 1 см и длиной 15 см. Пластиковый стакан (объемом 200 мл) с подкрашенной жидкостью, которая плохо смачивает трубку и стенки коробочки. Пустой пластиковый стакан (объемом 200 мл). Ножницы канцелярские. Небольшая бобина узкого скотча.

От вас требуется обработать приведенные ниже измерения и сделать выводы. В каче-

стве ответа необходимо привести схему расположения перегородок в «сером ящике». Ответ должен быть обоснован и не противоречить данным, которые получены экспериментальным путем и поэтому содержат погрешности.

Проделанные эксперименты и результаты измерений

Опыт №1. С помощью полоски миллиметровой бумаги измерим размеры коробочки. Они равны 100 мм × 100 мм × 10 мм. Измерим расстояние между пунктирными линиями, а также от пунктирных линий до стенок коробочки. Все эти расстояния равны 10 мм каждое.

Опыт №2. Для измерения внешнего диаметра трубки измерим длину ее окружности. Для этого намотаем на трубку полоску миллиметровой бумаги, сделаем 2 оборота. Длина намотанной части бумаги равна 8,9 см.

Опыт №3. Для измерения внутреннего диаметра трубки наберем в шприц жидкость, затем присоединим шприц (без иглы) к трубке и выдавим часть жидкости в трубку так, чтобы жидкость образовывала сплошной цилиндр без пузырьков воздуха. Объем выдавленной жидкости равен 8 мл. С помощью полоски миллиметровой бумаги измерим длину части трубки, заполненной жидкостью. Она равна 8,0 см.

Опыт №4. Установим коробочку на горизонтальный стол так, чтобы нарисованная на ней стрелка указывала вверх (рис.11,а). Наберем в шприц 100 мл жидкости и будем заливать ее в коробочку порциями через отверстие А так, чтобы за каждую порцию уровень воды в трубочке поднимался на 5 мм. Уровень h жидкости в трубочке будем измерять от нижней стенки коробочки с помощью полоски миллиметровой бумаги, приклеенной к коробочке. Полученные измерения $h(V_4)$ занесем в таблицу. Если при достаточно большом увеличении объема жидкости в коробочке уровень в трубочке не изменяется, то запишем в таблицу два крайних значения объемов, соответствующих этому уровню.

Опыт №5. Выльем всю жидкость из коробочки. При этом заметим, что после простого переворота коробочки из нее вытекает не вся

$h, \text{мм}$	$V_4, \text{мл}$	$V_5, \text{мл}$	$V_6, \text{мл}$	$V_7, \text{мл}$
0	0 – 9	0	0 – 10	0
5	11	2	15	6
10	13	4	21	11
15	15	6	26	17
20	17	8	32	22
25	19	10	38	28
30	21	12 – 21	43	33
35	25	25	46	36
40	28	28	49	39
45	31	31	52	42
50	35	35	55	45 – 55
55	37	37	56	56
60	38	39	58	58
65	40	41	59	60
70	44 – 71	43 – 71	61	61
75	75	75	62	62
80	79	79	64	63
85	83	83	66	65
90	87	87	67	67
95	91	91	68	68
100	95	95	70	70

жидкость. Чтобы извлечь из коробочки всю жидкость, ее нужно наклонять под разными углами и трясти. По звуку определим, что нам удалось вылить всю жидкость из коробочки. Установим коробочку так же, как в опыте №4. Теперь будем заливать жидкость через отверстие Б, в которое вставлена трубочка (рис. 11, б). Для этого наберем в шприц 100 мл жидкости, наденем на него иглу и аккуратно проткнем иглой трубочку в самом низу. Таким образом мы сможем подавать жидкость в самое основание трубочки. Снимем аналогичную зависимость $h(V_5)$ – уровня жидкости в трубочке от объема налитой жидкости. Полученные данные занесем в таблицу.

Опыт №6. Вновь удалим всю жидкость из коробочки. Заклеим дырочку в трубочке с помощью скотча. Поставим коробочку так, чтобы стрелка смотрела вправо, а трубочка располагалась в положении 2 (рис. 11, в). Повторим те же действия, что в опыте №4, заливая жидкость через открытое отверстие А.

Полученные данные $h(V_6)$ занесем в таблицу.

Опыт №7. Опять удалим всю жидкость из коробочки и повторим опыт №5, но

расположив коробочку как в опыте №6 (рис. 11, з). Полученные данные $h(V_7)$ занесем в таблицу.

М. Карманов

11 класс

Задача 1. Разгон при отключенном источнике (12 баллов)

Две одинаковые проводящие оболочки в форме цилиндров с малыми отверстиями на общей оси образуют конденсатор емкостью C (рис. 12). В центре левой оболочки удерживают шарик с зарядом q . Суммарный заряд всей системы, включая заряд шарика, равен нулю. Конденсатор заряжают, подключив к источнику с напряжением U , затем отключают

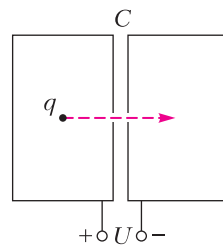


Рис. 12

от источника и отпускают шарик. Шарик начинает двигаться вдоль оси и, пролетев через отверстия, попадает внутрь правой оболочки. Какую кинетическую энергию будет иметь шарик в центре правой оболочки? При каком заряде шарика эта энергия максимальна и чему она равна? Выделением тепла из-за тока в оболочках можно пренебречь. Поле тяжести не учитывайте.

И. Воробьев

Задача 2. Нелинейная цепь (12 баллов)

Электрическая цепь (рис. 13, а) состоит из идеального источника с ЭДС $\mathcal{E} = 20$ В, резистора с сопротивлением $R = 5$ Ом, катушки с индуктивностью $L = 20$ мГн и нулевым сопротивлением и нелинейного элемента, вольт-амперная характеристика которого представлена на рисунке 13, б ($I_0 = 3$ А). Изначально ключ разомкнут, тока в цепи нет. Какое количество теплоты выделится на резисторе через большой промежуток времени после замыкания ключа?

А. Уймин

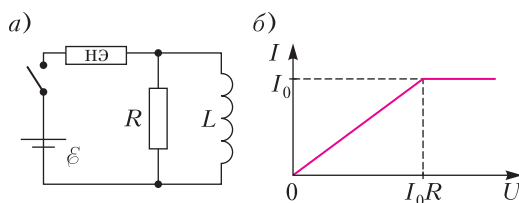


Рис. 13

Задача 3. Вспышка в кубе (12 баллов)

В кубе из вещества с показателем преломления $n = 2$ точечный источник испустил кратковременную вспышку, свет от которой расходится однородно во всех направлениях. Свет веществом куба не поглощается. Какие значения может принимать доля η энергии вспышки, вышедшей наружу, в зависимости от положения источника внутри куба? Укажите, при каких положениях источника эта доля минимальна, при каких максимальна и чему она равна. При падении света на границу раздела часть его энергии, зависящая от угла падения, отражается, а часть проходит через границу раздела.

Примечание. При решении вам может понадобиться формула площади поверхности сферического сегмента: $S = 2\pi Rh$, где R – радиус сферы, h – высота сегмента.

А.Аполонский

Задача 4. Определение удельной теплоты испарения жидкого азота (14 баллов)

Жидкий азот, налитый в пенопластовый контейнер, из-за теплообмена с окружающей средой испаряется и его масса уменьшается. При погружении в жидкий азот алюминиевого цилиндра, имевшего температуру помещения, азот начинает активно кипеть и интенсивность его испарения увеличивается. Масса M контейнера с жидким азотом фиксируется с помощью электронных весов. Показания весов в зависимости от времени приведены в таблице:

t , мин:с	0:00	0:49	1:32	2:05	2:41	3:22	4:06	4:50	5:23	5:52	6:07	6:30
M , г	250	246	242	238	234	230	226	222	218	214	210	206
t , мин:с	6:54	7:25	7:48	8:20	8:49	9:33	10:15	10:55	11:37	12:20	13:05	
M , г	244	232	229	224	219	215	211	207	203	199	195	

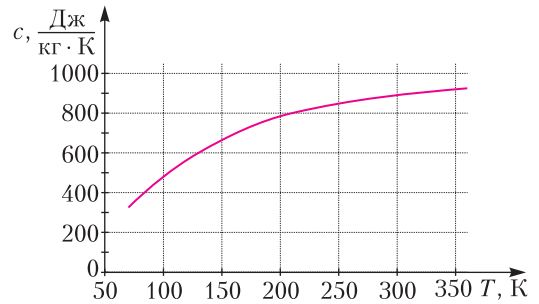


Рис. 14

Удельная теплоемкость алюминия зависит от температуры. График этой зависимости представлен на рисунке 14. Масса цилиндра $m_{\text{Al}} = 69$ г, начальная масса контейнера с азотом $M = 250$ г, температура помещения $+23$ °С. Температура кипения жидкого азота -196 °С.

Используя результаты измерения зависимости массы азота от времени и график зависимости удельной теплоемкости алюминия от температуры, определите удельную теплоту испарения азота λ .

Из-за ограниченного времени выполнения задания погрешность определения λ оценивать не требуется, однако точность полученных вами промежуточных и конечных результатов будет учитываться при выставлении баллов.

А.Аполонский

Публикацию подготовил В.Слободянин

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №2)

1. $(4 \times 2) + 9 = 17$.

Так как операция $8 - 2$ дала результат 4, то «-» обозначает деление, а раз $5 + 1$ дало результат 4, то «+» обозначает вычитание. Значит, «x» обозначает сложение, а тогда «:» - умножение.

2. 42.

Сторона синего квадрата равна 2, поэтому стороны черного прямоугольника равны 2 и 4. Площадь бело-черно-синего прямоугольника равна 36, а его вертикальная сторона $2 + 4 = 6$. Значит, это квадрат, и его горизонтальная сторона также равна 6. Красный квадрат имеет сторону 7, значит, сторона всего полотна составляет $6 + 7 = 13$. Наконец, площадь серых прямоугольников есть разность площади правой «половины» полотна и бело-черно-синего квадрата: $6 \cdot 13 - 36 = 42$.

3. Чтобы решить задачу, достаточно правильно на нее посмотреть. Вместо того чтобы думать, сколько бананов покупать в каждый день, давайте для каждого дня выберем, в какой из дней купить банан! Для этого надо выбрать самую низкую цену из четырех: текущего дня и трех предыдущих (если предыдущих дней меньше трех, то смотрим только на те, что есть).

Для каждого дня на диаграмме (рис.1) стрелкой указана самая низкая цена из доступных. Соот-

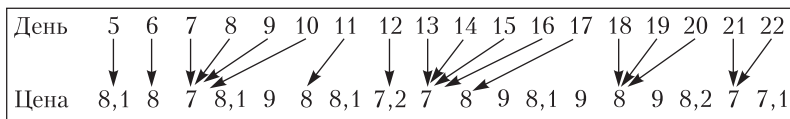


Рис. 1

ветственно, в каждый из дней следует купить столько бананов, сколько стрелок указывают на цену под этим днем.

Получаем ответ:

5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	1	4	0	0	1	0	1	4	1	0	0	0	3	0	0	2	0

4. Сторона квадрата при нагревании увеличивалась на 0,5 мм, а стороны прямоугольника - на 0,5 мм и 1,5 мм.

Вы поняли, почему пластины расплзлись? Конечно, всем очевидно, что при нагревании пластины расширяются, а при охлаждении сжимаются, весь фокус в том, относительно каких точек это происходит!

При нагреве квадрат и прямоугольник ведут себя как один большой прямоугольник и расширяются относительно центра O этого большого прямоугольника (рис.2,а). Обозначим сторону квадрата через a , а ее удлинение через Δa . Тогда центр квадрата O_1 отодвинется от точки O на

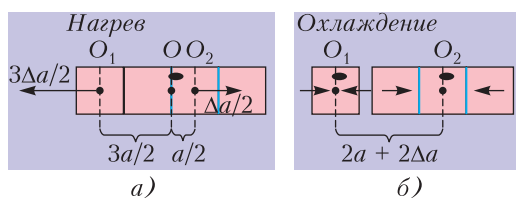


Рис. 2

$3\Delta a/2$, а центр прямоугольника O_2 - на $\Delta a/2$ (потому что длина отрезка OO_1 равна $3a/2$, а длина отрезка OO_2 - $a/2$). При охлаждении квадрат и прямоугольник сжимаются уже как отдельные фигуры относительно своих собственных центров. Точки O_1 и O_2 остаются неподвижными, и расстояние между ними не изменяется. Итого, в результате двух процессов расстояние между центрами фигур увеличивается на $2\Delta a$. Это и есть величина зазора, поэтому $\Delta a = 0,5$ мм. Теперь мы можем сформулировать окончательный ответ: при нагревании стороны квадрата увеличивались на 0,5 мм, а стороны прямоугольника - на 0,5 мм и 1,5 мм.

Конкурс имени А.П.Савина

(см. «Квант» №1)

17. а) Нельзя; б) можно.

а) Убедимся, что при любой расстановке чисел от 1 до 2021 по кругу найдутся два соседних

числа, дающих в сумме составное число. Достаточно найти соседние нечетные числа (их сумма не меньше $1 + 3 = 4$ и четна, такое число составное). Но у нас

1011 нечетных чисел, а четных 1010 - меньше, поэтому за каким-то нечетным числом по часовой стрелке стоит нечетное.

б) Заметим, что 2027 и 2029 - простые числа, отличающиеся на 2 (их называют «близнецами»). Напишем по кругу по часовой стрелке в порядке возрастания нечетные числа от 5 до 2021, а между ними напишем по часовой стрелке в порядке убывания четные числа от 2022 до 6 (легко убедиться, что этих четных и нечетных чисел поровну). Получится такая «цепочка»:

$$5 \ 2022 \ 7 \ 2020 \ 9 \ 2018 \ \dots \ 2019 \ 8 \ 2021 \ 6$$

В этой цепочке сумма каждых двух соседних чисел попеременно равна то 2027, то 2029 - т.е. простым числам. И мы использовали все натуральные числа от 5 до 2022. Осталось как-то втиснуть числа от 1 до 4 между крайними числами цепочки (т.е. 5 и 6), дабы «круг замкнулся». Это несложно:

$$\dots \ 5 \ 2 \ 3 \ 4 \ 1 \ 6 \ \dots$$

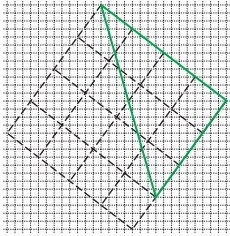


Рис. 3

18. Да, можно. Пример показан на рисунке 3.

19. Нет, нельзя.

Предположим, такая раскраска существует.

Количество вершин додекаэдра совпадает с количеством троек цветов:

$$C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20. \quad \text{Значит, никакая тройка цветов не встречается у двух разных вершин и у каждой вершины встречаются три различных цвета. Каждый цвет участвует в } C_5^2 = 10 \text{ тройках, и на каждой грани по 5 вершин, поэтому в каждый цвет должно быть покрашено по 2 грани.}$$

Рассмотрим две грани f и h одного цвета, допустим зеленого. Рассмотрим такие случаи.

• Если f и h соседние, то при их общей вершине встречаются не три разных цвета, чего быть не может.

• Если грани f и h не соседние и есть ребро FH такое, что вершина F лежит на f , а H — на h (рис.4), то при вершинах F и H одинаковые тройки цветов, чего опять же быть не может.

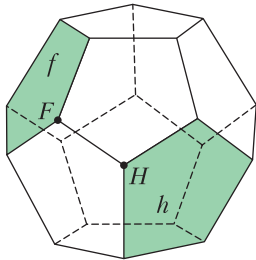


Рис. 4

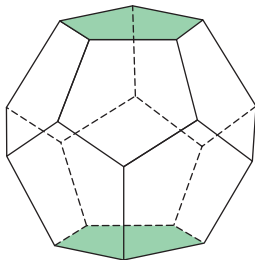


Рис. 5

Нетрудно видеть, что тогда единственная возможная ситуация — когда грани f и h противоположны (рис.5).

Итак, мы рассмотрели произвольный цвет и показали, что его грани противоположны, а значит, это верно для каждого цвета. Таким образом, раскраска центрально симметрична. Следовательно, у двух симметричных относительно центра вершин встречаются одинаковые тройки цветов. Противоречие.

20. а) Да, можно.

Покажем, как это сделать (каждая строка описывает очередную операцию, скобки показывают разбиение на пары):

(1, 3), (1, 5), (2, 6), (4, 6) → 4, 2, 6, 4, 8, 4, 10, 2
 (2, 6), (2, 10), (4, 4), (4, 8) → 8, 4, 12, 8, 8, 0, 12, 4
 (0, 8), (4, 12), (4, 12), (8, 8) → 8, 8, 16, 8, 16, 8, 16, 0
 (0, 16), (8, 8), (8, 8), (16, 16) → 16, 16, 16, 0, 16, 0, 32, 0

(0, 0), (0, 32), (16, 16), (16, 16) → 0, 0, 32, 32, 32, 0, 32, 0

(0, 32), (0, 32), (0, 32), (0, 32) → 32, 32, 32, 32, 32, 32, 32, 32

б) Нет, нельзя.

Посмотрим, как меняется сумма квадратов чисел a и b при операции $(a, b) \mapsto (a + b, |a - b|)$:

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Итак, в каждой паре сумма квадратов удваивается. Следовательно, и общая сумма квадратов всех 8 написанных на доске чисел в результате каждого хода удваивается. Исходно эта сумма равна

$$S = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 141.$$

Следовательно, спустя k ходов сумма квадратов всех написанных на доске чисел станет равна $141 \cdot 2^k = 3 \cdot 47 \cdot 2^k$. С другой стороны, если предположить, что все 8 чисел стали равны a , сумма их квадратов равна $8a^2$. Мы приходим к равенству

$$8a^2 = 3 \cdot 47 \cdot 2^k.$$

Это равенство невозможно, так как простое число 3 входит в разложение правой части на простые множители ровно один раз, а левой — четное количество раз. Полученное противоречие доказывает, что наше предположение неверно, т.е. что все 8 чисел на доске одновременно не могут стать равными.

в) Нет, нельзя.

Начало рассуждений такое же, как в пункте б), но теперь $S = 144$ и мы приходим к равенству

$$8a^2 = 144 \cdot 2^k.$$

Правая часть равенства делится на 3, следовательно, и левая часть равенства делится на 3, тогда и a делится на 3. Итак, спустя k ходов все числа на доске стали равными и все они делятся на 3. Осталось заметить следующий факт: если после некоторого хода все числа на доске делятся на простое число p , $p \neq 2$, то и до этого хода все числа на доске делились на p . (Это следует из того, что если числа $a + b$ и $|a - b|$ делятся на p , то их сумма, равная $2a$ или $2b$, тоже делится на p , а значит, каждое из чисел a и b делится на p .) Но среди тех чисел, которые исходно написаны на доске, есть числа, которые не делятся на 3. Значит, какие бы ходы мы ни сделали, не может получиться так, что все написанные на доске числа будут делиться на 3.

Полученное противоречие завершает решение задачи.

Можно подвести итоги и подумать о том, как в общем случае установить ответ на вопрос задачи. Приведем рассуждение, которое прислал участник конкурса Иван Часовских (Химки, Московская обл.).

Если числа на доске имеют общий делитель s , то, поделив их все на s , мы просто изменим результаты всех последующих действий в s раз, поэтому можно считать, что исходные числа взаимно простые. Если S содержит простой делитель $p > 2$, то противоречие получится таким же образом, как в пункте в), – ведь общего делителя p у исходных чисел нет.

Осталось рассмотреть случай, когда S – это степень двойки. Покажем алгоритм, приводящий к ситуации, когда все числа одинаковые. Если $S = 1$, то одно число равно 1, а остальные равны 0, тогда можно поступить следующим образом:

$(1, 0), (0, 0), (0, 0), (0, 0) \rightarrow 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0$
 $(1, 0), (1, 0), (0, 0), (0, 0) \rightarrow 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0$
 $(1, 0), (1, 0), (1, 0), (1, 0) \rightarrow 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$

Если же $S > 1$, то S чётно, а раз сумма квадратов чисел чётна, то среди них чётное количество нечётных. Разобьем их на пары так, чтобы чётные числа были с чётными, а нечётные – с нечётными, и сделаем операцию. После нее все числа станут чётными. А раз все числа имеют общий делитель 2, то мы можем все числа поделить на 2, не повлияв на дальнейший ход действий (не считая того, что все числа изменятся в несколько раз). При такой операции с последующим делением пополам сумма квадратов чисел уменьшится в два раза. Но она является неотрицательным числом и не сможет все время уменьшаться, поэтому либо она равна 0 (тогда все числа равны), либо когда-то станет равна 1 – а этот вариант уже разобран.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Понятно, что надо двигаться по прямой, соединяющей положения паука и мухи на развертке поверхности комнаты (рис.6). Однако может быть не одна прямая, и пауку придется выбирать кратчайшую (на рисунке – PM_1).

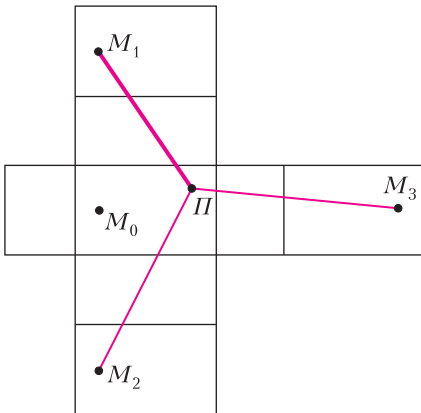


Рис. 6

2. Пусть S – площадь дна первого аквариума и h – его высота. Тогда $\frac{Sh}{2}$ – объем воды. Разлившись во втором аквариуме по большей в 9 раз площади, вода займет $1/18$ начальной высоты h , или $1/54$ новой высоты $3h$.

3. Кастрюли геометрически подобны, поэтому первая из них вдвое шире и вдвое выше, а ее поверхность в четыре раза больше. При одинаковой толщине стенок масса кастрюли пропорциональна ее поверхности. Значит, первая кастрюля в четыре раза тяжелее второй.

4. Площадь поверхности таблетки, окруженной выделяющимися и обеспечивающими плавучесть пузырьками, уменьшается пропорционально квадрату ее линейного размера, объем же, а с ним и масса – пропорционально кубу, т.е. значительно быстрее.

5. Объем шара составляет две трети объема цилиндра, а общий объем воронок – одну треть. Поэтому тела весят одинаково.

6. Диаметр вишни в три раза больше диаметра косточки, значит, объем больше в 27 раз, т.е. сочная часть вишни больше косточки по объему в 26 раз.

7. Выйти в пространство – сложить из спичек правильный тетраэдр.

8. Длина ребра такого тетраэдра равна $\sqrt{2}$ дм (рис.7).

9. Например, кубы и правильные тетраэдры. С более сложными вариантами можно ознакомиться в статье «Замощение параллелеэдрами» («Квант», 2019, №1, с.32).

10. Оставшаяся часть большего тетраэдра будет иметь форму правильного октаэдра.

11. Считая толщину стенок куба малой по сравнению с длиной его ребра, можно рассчитать массу полого куба по формуле $m = \rho Sh$, где $\rho = 8,5 \text{ г/см}^3$ – плотность латуни, тогда $m \approx 367 \text{ г}$.

12. Тень от куба представляет собой правильный шестиугольник со стороной r , равной расстоянию от боковой вершины куба до вертикали (рис.8).

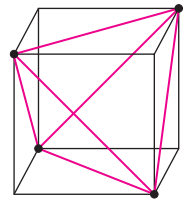


Рис. 7

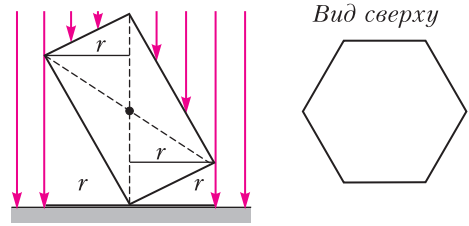


Рис. 8

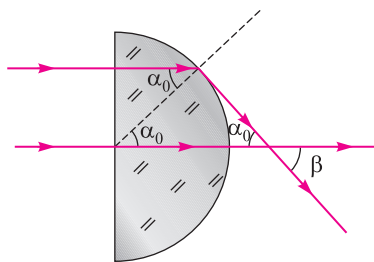


Рис. 9

13. Ею является выпуклая поверхность параболоида вращения, ось которого параллельна лучам.

14. Из рисунка 9 следует, что искомый угол β равен углу полного внутреннего отражения α_0 .

Так как $\sin \alpha_0 = \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $\beta = \alpha_0 = 45^\circ$.

Микроопыт

Обхватите обеими руками «крест-накрест» левый и правый края трубки (рис. 10) и сжимайте их до образования прямых линий. В результате

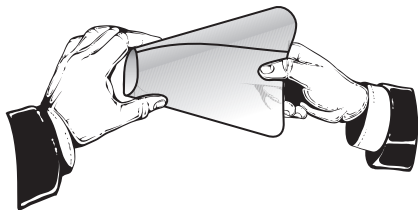


Рис. 10

трубка изогнется так, что получится тетраэдр. Кстати сказать, описанный метод лежит в основе промышленного получения пакетов для хранения и перевозки жидких и сыпучих продуктов.

Как Толик Втулкин физикой увлекся

1. Бак, упирающийся в бортик наклонной плоскости углом, более устойчив. Иными словами, при увеличении угла наклона плоскости упирающийся ребром бак опрокинется первым.

2. Да, может, если бак вначале упирался в бортик наклонной плоскости углом. Тогда если бак перевернуть и совместить с бортиком ребро основания бака, то в бак можно будет влить еще некоторое количество воды. Важно, что основание бака – квадрат, для круглого бака это невозможно.

Раскраска таблицы в три цвета

1. Рассмотрим произвольную раскраску таблицы 5×5 в два цвета. В первом столбце есть хотя бы три клетки одного цвета, поэтому можно считать, что первые три клетки в нем синие. Отрежем две последние строки и будем работать со столбцами $A-E$ высоты 3. В каждом из столб-

цов $B-E$ не более одной синей клетки (иначе получаем прямоугольник с синими углами), поэтому можно выбрать пару белых клеток. Хотя бы две из этих четырех пар находятся в одном положении, т.е. образуют углы прямоугольника.

2. Предположим, что какие-то два числа из x, y, z отличаются более чем на 1. Можно считать, что $y - x > 1$. Покажем, что

$$f(x) + f(y) > f(x+1) + f(y-1),$$

где $f(t) = \frac{t(t-1)}{2}$. Имеем

$$f(x) + f(y) > f(x+1) + f(y-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) + y(y-1) > (x+1)x + (y-1)(y-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(y-1) > 2x \Leftrightarrow y - x > 1.$$

3. Для $2n$ игроков берем правильный $(2n-1)$ -угольник и его центр. Каждая сторона дает разбиение на n пар аналогично пятиугольнику. В итоге каждый сыграет с каждым по одной партии. Для $2n+1$ игроков добавим воображаемого $(2n+2)$ -го игрока и повторим предыдущую конструкцию, но уже с $(2n+1)$ -угольником. Участник, попавший в пару с воображаемым игроком, пропускает тур. В итоге каждый сыграет с каждым ровно по разу, а всего будет $2n+1$ тур (по числу направлений) по n партий в каждом. Меньше туров провести нельзя, так как общее число партий $C_{2n+1}^2 = n(2n+1)$ в $2n+1$ раз больше числа n досок.

4. Пусть a_1, \dots, a_{11} – количества синих клеток в столбцах. Если их сумма больше 37, уменьшив некоторые из них так, чтобы сумма была равна 37. Величина $\sum_{i=1}^{11} C_{a_i}^2$ от этого лишь уменьшится. Если какие-то из полученных чисел x, y отличаются более чем на 1, $y - x > 1$, то заменим x на $x+1$, а y – на $y-1$. Как показано в решении задачи 2, сумма $C_x^2 + C_y^2$ от этого уменьшится. Так будем делать, пока все числа не будут отличаться максимум на 1. Так как их 11 и их сумма равна 37, то они равны 3 и 4, причем единственный вариант – это 4 четверки и 7 троек.

5. Никакие два столбца не имеют более одной общей синей клетки (иначе сразу получаем синий прямоугольник).

а) Предположим, что столбцы A и B не имеют общих синих клеток. Переставляя строки, можно считать, что синими являются клетки $A1-A4$ и $B5-B8$. Тогда в столбцах C и D не более одной синей клетки в строках 1–4 и не более одной синей клетки в строках 5–8, поэтому 9-я и 10-я клетки в этих столбцах синие. Получаем синий прямоугольник.

б) Предположим, что 10-я клетка в столбце $A-C$ синяя. Тогда остальные тройки синих клеток в этих столбцах не пересекаются, и можно

рассуждать по рисунку 11. В каждой группе клеток $\{D1, D2, D3\}$, $\{D4, D5, D6\}$ и $\{D7, D8, D9\}$ не более одной синей клетки. Значит, в каждой группе ровно одна синяя клетка, плюс клетка D10 тоже синяя. Получаем синий прямоугольник.

10				
9				
8				
7				
6				
5				
4				
3				
2				
1				
	A	B	C	D

Рис. 11

6. Предположим противное: в некотором новом столбце, скажем E, две синие клетки оказались в темных строках i и j и еще есть синяя клетка в строке k . Среди клеток $Ai-Di$ ровно две синие и среди клеток $Aj-Dj$ тоже. Никакие из этих четырех клеток не лежат в одном столбце, иначе с клетками Ei и Ej они образуют синий прямоугольник. Пусть для определенности клетки Ai, Bi, Cj, Dj синие (возможна любая перестановка букв A, B, C, D, но рассуждение аналогично). Но одна из клеток $Ak-Dk$ синяя, поэтому образуется синий прямоугольник: например, если Ak синяя, то получаем прямоугольник с угловыми клетками Ak, Ai, Ek, Ei .

7. Аналогично неравенству (2), $P(K) \leq \frac{km(m-1)}{2}$

для любой плохой раскраски K таблицы $m \times n$. Аналогично неравенству (3), $P(K) \geq n$ для любой раскраски K таблицы $m \times n$, где $m \geq k+1$. Положив $m = k+1$, получаем, что пара $\left(k+1, \frac{k^2(k+1)}{2}\right)$ хорошая.

Далее, аналогично (6), хорошими заведомо являются пары (m, n) , для которых $m \geq k+1$ и

$$n > \left\lceil \frac{km(m-1)}{2f(m)} \right\rceil, \text{ где}$$

$$f(m) = \min_{\substack{x_1+\dots+x_n=m \\ x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}_0}} \left(\frac{x_1(x_1-1)}{2} + \dots + \frac{x_k(x_k-1)}{2} \right).$$

Положим $m = k(k+1)$. Аналогично задаче 2, минимум $f(m)$ достигается, когда числа x_1, \dots, x_k равны $k+1$, тогда

$$f(m) = \frac{k^2(k+1)}{2} \text{ и } \left\lceil \frac{km(m-1)}{2f(m)} \right\rceil = k^2 + k - 1.$$

Значит, пара $(k^2 + k, k^2 + k)$ хорошая.

8. Так как q – степень простого числа, то существует поле \mathbb{R}_q из q элементов (это доказывается в университетском курсе алгебры). Если q простое, то это просто поле вычетов \mathbb{Z}_q . Рассмотрим прямые на плоскости \mathbb{R}_q^2 . Всего будет $q^2 + q$ прямых, разбитых на $q+1$ направлений по параллельным прямым в каждом направлении. Далее рассуждения с раскрасками аналогичны построению таблицы 9×12 , где $q = 3$.

**Региональный этап
XLVII Всероссийской олимпиады
школьников по математике**

9 класс

1. Нет, не обязательно.

Если, например, у Иа-Иа были два равных треугольника со сторонами 1, 2, 2, то в первой кучке окажутся палочки с длинами 1, 1, 2, из которых треугольник составить нельзя.

3. Три делителя.

Поскольку число $a+b$ больше единицы, оно имеет хотя бы два различных делителя. Докажем, что их не может быть ровно два, т.е. что число $a+b$ не может быть простым. Домножив равенство из условия на знаменатель, получим $ab+c^2 = ka+kb$, или, что то же самое, $ab-ka-kb+k^2 = k^2-c^2$. Разложив обе части на множители, придем к соотношению

$$(a-k)(b-k) = (k-c)(k+c).$$

Поскольку $k < a$ и $k < b$, обе скобки в левой части положительны и, значит, $c < k$. Тогда существуют такие натуральные числа x, y, z и t , что

$$a-k = xy, \quad b-k = zt, \quad k-c = xz \text{ и } k+c = yt.$$

Например, можно положить $x = \text{НОД}(a-k, k-c)$, $t = \text{НОД}(b-k, k+c)$, $y = (a-k)/x$ и $z = (b-k)/t$. Тогда первые два равенства будут выполнены по определению; с другой стороны, $k-c$ делит xz , а $k+c$ делит yt , поэтому из равенства произведений вытекают написанные равенства.

Следовательно,

$$a+b = (a-k) + (b-k) + (k-c) + (k+c) = xy + zt + xz + yt = (x+t)(y+z).$$

Таким образом, число $a+b$ представляется в виде произведения двух натуральных чисел, больших 1, и, значит, не является простым.

Наконец, несложно увидеть, что $a+b$ может иметь ровно три различных делителя. Например, если $a = 10, b = 15, c = 5$, то $k = \frac{10 \cdot 15 + 5^2}{10 + 15} = 7$. Тогда $a+b = 25 = 5^2$ имеет три делителя.

6. 29.

Заметим, что если $a+b = c$, то все три числа a, b, c не могут оказаться одновременно нечетными. Следовательно, среди них есть как минимум одно четное число, и последняя цифра этого числа также будет четной. Таким образом, среди 30 цифр есть как минимум одна четная, а нечетных – не более 29.

Пример $1999999999 + 1111111111 = 3111111110$ показывает, что среди 30 цифр могут оказаться ровно 29 нечетных.

7. Верно.

Рассмотрим остатки от деления чисел, расположенных в четырех угловых клетках, на 3. По принципу Дирихле, как минимум у двух из этих чисел, x и y , эти остатки совпадут, т.е. разность $y - x$ делится на 3. Не умаляя общности, положим $x < y$.

Раскрасим клетки нашей таблицы в шахматном порядке в черный и белый цвета так, чтобы угловые клетки были черными. Рассмотрим клетки с числами $x, x + 3, x + 6, \dots, y - 3, y$. Любые два из них стоят в клетках с общей стороной – т.е. в клетках разного цвета. Значит, все числа в нашей последовательности, имеющие ту же четность, что и x , стоят в черных клетках, а все остальные – в белых. Так как число y стоит в черной клетке, оно имеет ту же четность, что и x , т.е. $y - x$ четно. Значит, $y - x$ делится на 6.

8. Пусть P и Q – точки пересечения медиан треугольников ABD и ABC соответственно, а K – середина AB .

Достроим треугольник ABD до параллелограмма $ALBD$ (рис.12); тогда $CL = CB + BL =$

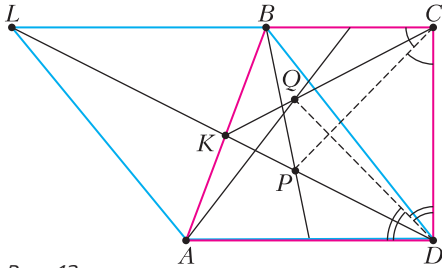


Рис. 12

$= BC + AD$. Диагонали этого параллелограмма пересекаются в точке K , поэтому $DK = KL$. Поскольку $DP = \frac{2}{3}PK$, получаем $DP = \frac{1}{3}DL$, т.е. $PL = 2DP$. Значит, по свойству биссектрисы в треугольнике CDL , точка P лежит на биссектрисе угла BCD тогда и только тогда, когда

$$\frac{CL}{CD} = \frac{PL}{PD} = 2,$$

т.е. когда $AD + BC = 2CD$.

Аналогично, точка Q лежит на биссектрисе угла ADC при том же самом условии. Отсюда и следует утверждение задачи.

9. $2n + 1$.

Назовем *длиной* слова количество букв в нем. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n – буквы алфавита. Тогда нетрудно проверить, что хорошим является слово

$$a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_2 a_1 a_2 a_3 \dots a_n.$$

Осталось показать, что нет хороших слов большей длины.

Предположим, что в n -буквенном алфавите существует хорошее слово длины $2n + 2$. Тогда какая-то буква, скажем a_1 , встречается в нем хотя бы три раза. Отметим ее второе (V) и предпоследнее (P) вхождение в слово (тогда V стоит не правее, чем P).

Любая другая буква встречается не более одного раза перед P , а также не более одного раза после V , иначе вычеркиванием можно получить запрещенную последовательность. Значит, каждая из букв a_2, \dots, a_n встречается не более двух раз. Более того, если такая буква и встречается дважды, то одно из ее вхождений стоит до V , а другое – после P .

Пусть a_1 встречается $k \geq 3$ раз. Тогда между V и P стоят хотя бы $k - 3$ буквы, отличные от a_1 (по одной между соседними вхождениями a_1), и все такие буквы встречаются ровно по разу. Выделим $k - 3$ таких буквы. Остальные $n - k + 2$ букв могут встречаться максимум по два раза. Поэтому длина слова не превосходит

$$k(k - 3) \cdot 1 + (n - k + 2) \cdot 2 = 2n + 1,$$

что противоречит нашему предположению.

10 класс

1. Ответ на первый вопрос – да, обязательно, на второй – нет, не обязательно.

1) Пусть $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5 \geq a_6$ – данные длины палочек. Так как a_1 входила в треугольник с некоторыми двумя другими палочками, то a_1 меньше их суммы, а следовательно, меньше суммы двух самых длинных из оставшихся палочек: $a_1 < a_2 + a_3$. Так как $a_1 \geq a_2$ и $a_1 \geq a_3$, выполнение неравенства $a_1 < a_2 + a_3$ достаточно для того, чтобы из палочек a_1, a_2, a_3 можно было составить треугольник.

2) Пусть изначально были два равных треугольника со сторонами 1, 3, 3 и 1, 3, 3. Тогда в группе самых коротких палочек окажутся палочки 1, 1, 3, из которых треугольник составить нельзя.

3. Предположим противное: множество S конечно. Тогда среди всех чисел множества S выберем число a , которое делится на максимальную степень тройки, пусть, скажем, a делится на 3^m , но не делится на 3^{m+1} . Если условие выполняется, то $15a = b(3c - 5)$ для некоторых $b, c \in S$. Левая часть этого равенства делится на 3^{m+1} . Но тогда, поскольку $3c - 5$ не делится на 3, число b должно делиться на 3^{m+1} , что противоречит выбору a .

4. Пусть m пересекает BC в точке X , а P и Q – середины A_1B_1 и A_1C_1 соответственно. Для определенности, пусть X и C лежат по одну сторону от A_1 (рис.13). Для решения задачи достаточно доказать, что $XB \cdot XC = XK^2$.

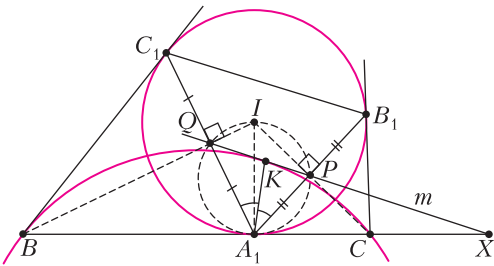


Рис. 13

Окружность (A_1PQ) получается из окружности $(A_1B_1C_1)$ гомотетией с центром A_1 и коэффициентом $1/2$. Поэтому окружность (A_1PQ) , как и окружность $(A_1B_1C_1)$, касается BC . Используя это касание, имеем $\angle KA_1X = \angle KA_1P + \angle PA_1X = \angle KA_1Q + \angle PQA_1 = \angle A_1KX$. Следовательно, треугольник KXA_1 равнобедренный, в нем $XA_1 = XK$. Также из касания следует равенство $XP \cdot XQ = XA_1^2$.

Далее, пусть I – центр окружности $(A_1B_1C_1)$. Точки A_1 и B_1 симметричны относительно IC , значит, A_1P – высота в прямоугольном треугольнике IA_1C , откуда $IC \cdot IP = IA_1^2$. Аналогично, $IB \cdot IQ = IA_1^2$. Тогда $IC \cdot IP = IB \cdot IQ$, следовательно, $BQPC$ – вписанный.

Окончательно получаем $XB \cdot XC = XP \cdot XQ = XA_1^2 = XK^2$, что и требовалось.

6. 30.

Заметим, что в числе $a + b$ не более 11 разрядов, таким образом, всего на доске выписано не более 31 цифры. При этом все три числа a , b , $a + b$ не могут оказаться одновременно нечетными. Следовательно, одна из их трех последних цифр – четная, поэтому нечетных цифр выписано не более 30.

Приведем пример, показывающий, что нечетных цифр могло оказаться ровно 30:

$$5555555555 + 5555555555 = 11111111110.$$

8. Проведем биссектрису m угла BCD (рис.14). По построению, B и D , а также M и K симметричны относительно m .

Из симметрии, BM и DK пересекаются в точке X , лежащей на m . Так как $XM \perp CM$, то $XK \perp CK$, значит, X лежит на окружности (CMK) , причем CX – диаметр этой окружности.

Далее, $\angle BXD = \angle MXK = 180^\circ - \angle MCK = \angle BCA = \angle BAC = \angle BAD$, поэтому X лежит на окружности (ABD) .

Так как m – серединный перпендикуляр к BD , то центр окружности (ABD) лежит на m . Но тогда X лежит на каждой из окружностей (CMK) , (ABD) и на их линии центров, следовательно, эти окружности касаются друг друга в точке X .

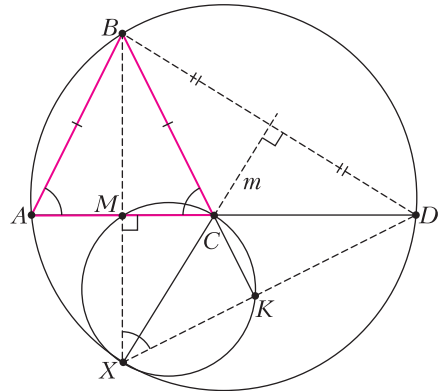


Рис. 14

9. При всех n .

Приведем одну из возможных договоренностей фокусника и помощника. Отметим самое левое место знаком $*$ (карточку на нем перевернет фокусник). Пронумеруем все остальные места числами от 1 до $n-1$; фокусник и помощник будут считать, что эти места расположены по циклу, т.е. место 1 следует за местом $n-1$.

Если на месте $*$ лежит карточка 1 или 2, пусть для определенности это карточка 1, то помощник выкладывает все свои карточки по возрастанию по циклу за картой 2. Тогда фокусник, увидев карту на месте $*$, восстанавливает циклический порядок всех остальных карт (т.е. их порядок с точностью до сдвига по циклу), и по любой карте, открытой зрителем, фокусник сможет определить расположения всех карт.

Пусть теперь карты 1 и 2 лежат в цикле. Тогда помощник считает количество мест i , на которое надо сдвинуться по циклу, чтобы от карточки 1 добраться до карточки 2; тогда $1 \leq i \leq n-2$. Далее помощник кладет на место $*$ карточку $i+2$. Остальные же карточки он выкладывает по возрастанию по циклу за карточкой 1, пропуская место карточки 2. Увидев карточку на месте $*$, фокусник узнает число i . По нему он опять же восстанавливает циклический порядок карт на остальных местах, и по любой открытой зрителем карточке он может определить места всех остальных.

11 класс

1. 0 или 5.

Пусть n – данное число, t – его остаток от деления на 40 и от деления на 625. Тогда число $n-t$ делится на 40 и на 625, т.е. делится на $\text{НОК}(40;625) = 5000$. Значит, разность $n-t$ оканчивается либо на 5000, либо на 0000. А остаток $t < 40$. Поэтому цифра в разряде тысяч может быть 0 или 5. Обе ситуации возможны,

такие цифры имеют, например, числа 20210000 и 20215000 (оба этих числа имеют остатки 0 при делении на 40 и на 625).

3. Не мог.

Каждому из наших 200 многочленов соответствует две целые точки a и b на оси Ox . Не умаляя общности будем считать, что $a < b$. Назовем *шириной* многочлена f натуральное число $b - a$, а *осью* многочлена – число $\frac{a+b}{2}$.

Пусть многочлен f имеет ширину $w > 0$ и ось c , тогда он записывается в виде

$$f(x) = \frac{4}{w^2}(x - c)^2 - 1.$$

Покажем, что графики двух разных многочленов такого вида имеют ровно две общие точки, когда у них разные ширины и оси. Если же у них совпадает ширина или ось, то у них ровно одна общая точка.

Действительно, $\frac{4}{w_1^2}(x - c_1)^2 - 1 = \frac{4}{w_2^2}(x - c_2)^2 - 1$ равносильно $(x - c_1)w_2 = \pm(x - c_2)w_1$. Если

$w_1 \neq w_2$, то каждое из двух линейных уравнений имеет корни, и они совпадают, только если $c_1 = c_2$. Если же $w_1 = w_2$, то $c_1 \neq c_2$ (трехчлены разные) и одно из двух линейных уравнений корней не имеет, а второе имеет.

Заметим, что ширина многочлена может принимать значение от 1 до 100, при этом найдется не более одного многочлена с шириной 100. Обозначим x_i количество многочленов с шириной i . Оценим количество пар многочленов с одинаковой шириной:

$$\sum_{i=1}^{100} \frac{x_i(x_i - 1)}{2} = \sum_{i=1}^{100} \frac{(x_i^2 - 4x_i + 4) + 3x_i - 4}{2} = \sum_{i=1}^{100} \frac{(x_i - 2)^2}{2} + \frac{3 \cdot 200 - 4 \cdot 100}{2} \geq 1 + 100.$$

В последнем неравенстве мы воспользовались следующим соображением: так как сумма ста чисел x_i равна 200 и $x_{100} \neq 2$, то найдется еще хотя бы одно $x_i \neq 2$, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{100} (x_i - 2)^2 \geq 2.$$

Осью многочлена может быть любое целое или полуцелое число от $\frac{1}{2}$ до $99\frac{1}{2}$, таких чисел 199, следовательно, найдется как минимум одна пара многочленов с общей осью. Это будет ранее не учтенная пара, так как трехчлены с общими шириной и осью совпадают.

Чтобы найти количество точек пересечения графиков, надо из удвоенного количества пар мно-

гочленов вычесть количество пар с одинаковой шириной или осью. Таким образом, точек пересечения не более чем $2 \cdot \frac{200 \cdot 199}{2} - 101 - 1 = 39698$, что меньше 39699.

4. Обозначим через R радиус описанной сферы Ω тетраэдра $SABC$, через O – ее центр. Отметим точку O' , симметричную точке O относительно плоскости (ABC) (рис.15), и точку P такую, что $\vec{O'P} = \vec{OS}$ (в случае, когда точки S, O

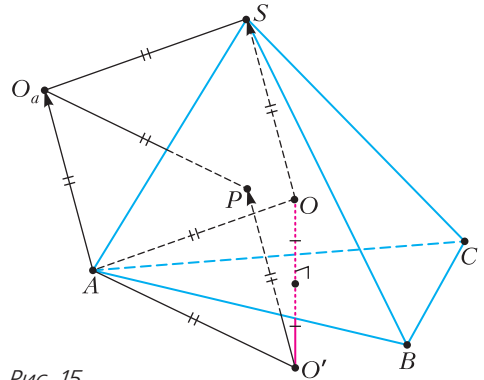


Рис. 15

и O' не лежат на одной прямой, мы построили треугольник SOO' до параллелограмма $SOO'P$. Поскольку $O'P = OS = R$, то точка P лежит на сфере, симметричной Ω относительно плоскости (ABC) . Покажем, что P лежит на сфере Ω_a , симметричной Ω относительно прямой SA . Расуждение для двух других сфер аналогично. Обозначим через O_a центр сферы Ω_a , эта точка симметрична точке O относительно прямой SA . Тогда четырехугольник $SOAO_a$ – ромб (или точки O и O_a совпадают с серединой отрезка SA). В любом случае $\vec{AO_a} = \vec{OS} = \vec{O'P}$. Значит, AO_aPO' – параллелограмм, в котором $PO' = R = O'A$, поэтому он еще и ромб. Следовательно, $O_aP = R$, откуда и следует, что P лежит на сфере Ω_a .

5. 75.

Пример. Покажем, что если $k = 74$, то мы не сможем гарантированно найти дом Знайки. Разместим Знайку и лжеца Незнайку в дома с номерами (50;49) и (49;50) соответственно. Покажем, что может оказаться так, что по ответам жителей нельзя однозначно определить, в каком из этих двух домов живет Знайка.

В нижний левый квадрат 49×49 поселим рыцарей. Их расстояния до Знайки и Незнайки одинаковые. В верхний правый квадрат 50×50 тоже поселим рыцарей, их расстояния тоже одинаковы. В нижний правый прямоугольник (из 49 строк и 50 столбцов) поселим рыцарей так, чтобы в каждой строке было ровно 25 рыцарей и 25

лжецов, а в каждом столбце хотя бы 24 рыцаря и 24 лжеца. В верхний левый прямоугольник поселим коротышек диагонально-симметрично правому верхнему, причем рыцарей и лжецов поменяем местами. В нем в каждом столбце будет по 25 рыцарей и 25 лжецов, а в каждой строке хотя бы 24 рыцаря и 24 лжеца. Для каждого коротышки из этих прямоугольников расстояния до Знайки и Незнайки разные. Пусть все лжецы в них говорят расстояние не до Знайки, а до Незнайки. Тогда при замене местами рыцарей и лжецов в этих прямоугольниках (в частности, при замене местами Знайки и Незнайки) все будут говорить то же самое, но Знайка будет жить в другом доме.

Оценка. Покажем, что если $k \geq 75$, то мы сможем гарантированно найти дом Знайки. Предположим, что, задав вопросы всем коротышкам, мы не можем понять, где находится Знайка, т.е. есть хотя бы два дома, где он может быть. Пусть у одного номер $(x; y)$, а у другого $(u; v)$. Можно считать, что $x \leq u$, $y \leq v$, так как квадрат можно повернуть требуемым образом. Поскольку оба неравенства одновременно не могут быть равенствами, без ограничения общности будем считать, что $y < v$. Рассмотрим столбцы (x, \dots) и (u, \dots) (возможно, это один и тот же столбец). Если $u - x > v - y$ или $(u - x) + (v - y)$ нечетно, то в этих столбцах нет ни одного коротышки, расстояния от которого до двух выделенных домов одинаковы.

Если $x = u$, а $v - y$ четно, то в столбце (x, \dots) находится один коротышка, расстояния от которого до двух домов одинаковы.

Если $u - x < v - y$, а $(u - x) + (v - y)$ четно, то в столбцах (x, \dots) и (u, \dots) находятся по одному коротышке, расстояния от которого до двух домов одинаковы.

Если же $u - x = v - y$, то в столбце (x, \dots) места, от которых расстояния до $(x; y)$ и $(u; v)$ одинаковы, имеют вид $(x; V)$, где $V \geq v$, и таких мест ровно $100 - v$. Аналогично, в столбце (u, \dots) места, от которых расстояния до $(x; y)$ и $(u; v)$ одинаковы, имеют вид $(u; Y)$, где $Y \leq y$, и таких мест ровно y .

Заметим, что $y + (100 - v) \leq 99$. Значит, какое-то из чисел y , $100 - v$ не больше 49.

Таким образом, во всех случаях найдется столбец, в котором не более 49 рыцарей указывают на оба места, при этом на неправильное место указывают не более чем эти рыцари и все лжецы (их не больше $99 - 75 = 24$), т.е. не более $49 + 24 = 73$ коротышек. В то же время, на правильное место в любом столбце указывают хотя бы все рыцари, т.е. не менее 75 коротышек.

Таким образом, из двух подозрительных мест всегда можно исключить одно (так как строка или столбец, на который мы ориентируемся, зависит только от положения мест, а не от расположения рыцарей/лжецов). Значит, всегда можно найти единственное правильное место.

7. Пусть углы BAC и BCA треугольника ABC равны 2α и 2γ соответственно (рис.16). Углы

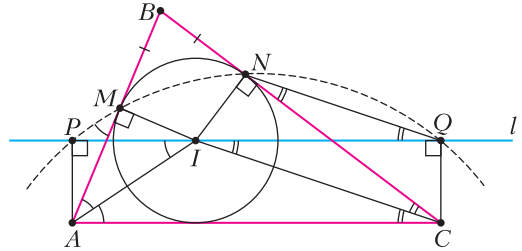


Рис. 16

API и AMI – прямые, поэтому точки A, P, M, I лежат на одной окружности с диаметром AI . Тогда $\angle AMP = \angle AIP$ и, в силу параллельности, $\angle AIP = \angle IAC = \alpha$. Аналогично, $\angle QNC = \gamma$. Из равнобедренного треугольника MBN находим $\angle BMN = \frac{180^\circ - \angle MBN}{2} = \alpha + \gamma$. Тогда $\angle PMN = \angle PMA + (180^\circ - \angle BMN) = 180^\circ - \gamma$. Но $\angle PQN = \angle ICN = \gamma$, значит, сумма углов PMN и PQN равна 180° , т.е. точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.

9. $99 \cdot 10^6$.

Обозначим $n = 1000$, $k = 100$, т.е. степени рассматриваемых многочленов P равны nk .

Лемма. Существует единственный многочлен P степени nk (со старшим коэффициентом 1) такой, что степень полученного многочлена R будет меньше $nk(n - 1)$.

Доказательство. Запишем наш многочлен как

$$P(x) = x^{nk} + p_1 x^{nk-1} + p_2 x^{nk-2} + \dots + p_{nk}.$$

Обозначим $F(x) = P(x^n + 1)$ и $G(x) = P(x)^n$; это – многочлены степени n^2k со старшим коэффициентом 1.

В многочлене $F(x)$ коэффициент p_j участвует лишь в членах степени не больше $n(nk - j)$. Значит, для любого $i = 1, 2, \dots, nk$ коэффициент при x^{n^2k-i} в многочлене $F(x)$ зависит лишь от коэффициентов p_j при $j \leq i/n < i$. С другой стороны, коэффициент при этой же степени в $G(x)$ есть $np_i + A$, где A зависит лишь от коэффициентов p_j при $j < i$. Если мы хотим, чтобы степень R была меньше $nk(n - 1)$, то эти коэффициенты должны быть равны; это равенство дает однозначное выражение p_i через p_1, p_2, \dots, p_{i-1} (в частности, p_1

находится единственным образом). Значит, из этих равенств по очереди находятся все коэффициенты многочлена $P(x)$. Лемма доказана.

Теперь достаточно предъявить многочлен $P(x)$ такой, что степень R окажется меньше $nk(n-1)$ — по лемме, он единственный, и он и даст минимальную степень R . Положим $P(x) = (x^n + 1)^k$. Тогда многочлен

$$R(x) = \left((x^n + 1)^n + 1 \right)^k - (x^n + 1)^{nk} = k(x^n + 1)^{n(k-1)} + C_k^2(x^n + 1)^{n(k-2)} + \dots$$

имеет степень всего лишь $n^2(k-1) < nk(n-1)$. Значит, наименьшая возможная степень R и есть $n^2(k-1) = 99 \cdot 10^6$.

10. Заметим сразу, что все числа, появляющиеся на доске, положительны и рациональны. Пусть x_n, y_n, z_n — числа на доске после n минут, а $a = x_0, b = y_0, c = z_0$ — исходные числа.

Положим $F_n = 1 + \frac{1}{x_n y_n z_n}$. Тогда $x_{n+1} = x_n F_n$,

$$y_{n+1} = y_n F_n \text{ и } z_{n+1} = z_n F_n. \text{ В частности, } \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} = \frac{y_n}{x_n} = \dots = \frac{b}{a} \text{ и, аналогично, } \frac{z_{n+1}}{x_{n+1}} = \frac{c}{a}.$$

Положим $P_n = x_n y_n z_n$, и пусть $P_n = \frac{p_n}{q_n}$ — представление этого числа в виде несократимой дроби. Тогда $F_n = \frac{p_n + q_n}{p_n}$, и потому

$$P_{n+1} = P_n F_n^3 = \frac{(p_n + q_n)^3}{p_n^2 q_n},$$

где последняя дробь также несократима (ибо p_n и q_n взаимно просты). Итак, $p_{n+1} = (p_n + q_n)^3$ и $q_{n+1} = p_n^2 q_n$. В частности, $p_n = (p_{n-1} + q_{n-1})^3 \geq (1+1)^3 = 8$ при $n \geq 1$, и потому $q_n \geq 8^2 q_{n-1} > q_{n-1}$ при $n \geq 2$. Иными словами, последовательность q_1, q_2, q_3, \dots строго возрастает.

Обозначим через D произведение всех числителей и знаменателей чисел a, b и c . Тогда при некотором N имеем $q_N > D^2$. Докажем, что с N -й минуты все числа на доске нецелые. Действительно, пусть, скажем, x_n — целое при $n \geq N$.

Тогда $y_n = x_n \cdot \frac{b}{a}$, $z_n = x_n \cdot \frac{c}{a}$, и потому

$$P_n = x_n^3 \cdot \frac{bc}{a^2}.$$

Знаменатель этого числа в несократимой записи делит D^2 ; но это невозможно, ибо $q_n \geq q_N > D^2$. Противоречие.

Региональный этап LV Всероссийской олимпиады школьников по физике

Первый тур

(см. «Квант» №2)

10 класс

- См. задачу Ф2649 «Задачника «Кванта».
- См. задачу Ф2650 «Задачника «Кванта».
- В зависимости от количества закачанного гелия объем шара V таков, что $V \leq 4\pi r^3/3$. Пока оболочка не раздулась до максимального объема, давление гелия внутри равно атмосферному. Максимальное значение объема достигается при массе закачанного гелия $m_0 = \frac{4\pi}{3} r^3 \frac{\rho_0 M_{\text{He}}}{RT}$. При массе гелия $m < m_0$ объем шара $V = \frac{m}{\rho_{\text{He}}} \frac{RT}{p_0}$. Для того чтобы при этой массе гелия шар начал подниматься, необходимо, чтобы сила Архимеда была больше силы тяжести:

$$\rho_v V g > mg + 4\pi r^2 \sigma g.$$

Здесь $\rho_v = p_0 M_v / (RT)$ — плотность воздуха. Подставляя выражения для V и ρ_v в условие подъема шара, получаем

$$m \left(\frac{M_v}{M_{\text{He}}} - 1 \right) > 4\pi r^2 \sigma, \text{ или } m > \frac{4\pi r^2 \sigma M_{\text{He}}}{M_v - M_{\text{He}}}.$$

Если масса гелия $m > m_0$, то условие подъема выглядит так:

$$\frac{4\pi r^3}{3} \frac{\rho_0 M_v}{RT} > m + 4\pi r^2 \sigma, \text{ или } m < 4\pi r^2 \left(\frac{\rho_0 M_v r}{3RT} - \sigma \right).$$

Окончательно условие для массы гелия, при которой шар поднимет сам себя, имеет вид

$$\frac{4\pi r^2 \sigma M_{\text{He}}}{M_v - M_{\text{He}}} < m < 4\pi r^2 \left(\frac{\rho_0 M_v r}{3RT} - \sigma \right).$$

Если левая часть этого неравенства больше правой, то шар не поднимется ни при каких массах.

Это произойдет, если $r < \frac{3RT\sigma}{\rho_0 (M_v - M_{\text{He}})}$.

- Для начала разберемся, какие данные нам нужны и как их обрабатывать. В условии сказано, что после запуска конуса его движение на участке между датчиками можно считать равномерным. В этом случае действующая на конус сила тяжести уравновешивается силой сопротивления, значит, можем записать $F_{\text{сопр}} = mg$, где m — масса конуса с пластилином. Так как движение равномерное, то скорость можно вычислить как $v = L/t$, где L — расстояние между датчиками, а t — время полета между датчиками. Из условия задачи $L = (3,0 \pm 0,5)$ см. Осталось ра-

зобратъся со временем. В таблице приведены 4 временные отметки и нужно понять, какие из них нам нужны.

Рассмотрим конус и то, как он пересекает луч лазера. На рисунке 17 представлен конус (вид сбоку) и две возможные траектории луча лазера относительно конуса. Как видно, из рисунка невозможно определить, на какой высоте находился конус, когда он перекрыл луч лазера, а вот определив, когда луч лазера перестает перекрываться конусом, положение конуса будет задано однозначно. Значит, нам нужны времена T_2 и T_4 , тогда $v = L / (T_4 - T_2)$. Из условия известно, что $F_{\text{сопр}} = kv^n$, или $\ln F_{\text{сопр}} = \ln k + n \ln v$. Для определения параметра n воспользуемся таблицей и построим график в логарифмических координатах (рис. 18). Из

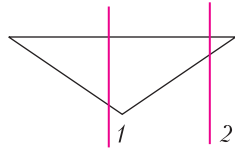


Рис. 17

$m, \text{мг}$	$T_2, \text{мс}$	$T_4, \text{мс}$	$F_{\text{сопр}}, 10^{-3} \text{ Н}$	$v, \text{м/с}$	$\ln F_{\text{сопр}}$	$\ln v$
533	181	386	5,22	1,122	-5,25	0,115
600	143	341	5,88	1,162	-5,14	0,150
700	198	381	6,86	1,257	-4,98	0,229
790	552	723	7,74	1,345	-4,86	0,296
894	149	301	8,76	1,513	-4,74	0,414
990	131	277	9,70	1,575	-4,64	0,454
1125	576	709	11,03	1,729	-4,51	0,548

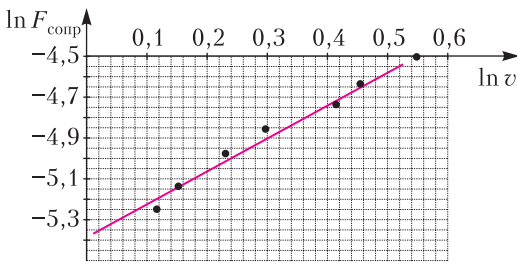


Рис. 18

графика найдем угловой коэффициент (и координату точки пересечения с вертикальной осью). Получаем $n = 1,64$.

11 класс

- См. задачу Ф2648 «Задачника «Кванта».
- В установившемся режиме поршни и вода движутся равноускоренно с ускорением $a = \frac{(p_1 - p_2)S}{3m} = \frac{(1,5p_n - 0,5p_n)S}{3m} = \frac{p_n S}{3m}$, где p_n — давление на-

сыщенного водяного пара при температуре T . Из уравнения движения поршня 1 («позади» порции воды) следует, что давление воды на него равно $p' = p_1 - \frac{ma}{S} = \frac{7}{6}p_n$. Отсюда ясно, что у поверхности этого поршня вода находится в жидком состоянии. Аналогично, из уравнения движения поршня 2 находим, что у его поверхности давление воды равно $p'' = p_2 + \frac{ma}{S} = \frac{5}{6}p_n$, т.е. здесь вода является паром. На границе раздела фаз давление равно p_n , а поскольку вода несжимаема, то из уравнения движения для слоя жидкой воды находим толщину этого слоя: $\rho Sh \cdot a = (p' - p_n)S$, и $h = \frac{m}{2\rho S}$. Поэтому масса жидкой воды равна $m_{\text{ж}} = \rho Sh = \frac{m}{2}$, т.е. в жидком состоянии находится половина (50%) массы воды.

Теперь в области, занятой водяным паром, выделим слой пара толщиной Δx и запишем уравнение движения для него (под действием сил давления):

$$\rho_n S \Delta x \cdot a = -\Delta p S, \text{ где плотность пара равна } \rho_n = \frac{Mp}{RT}. \text{ Таким образом, толщина слоя, на котором давление убывает на величину } \Delta p < 0, \text{ равна}$$

$$\Delta x = -\frac{3mRT}{Mp_n S} \frac{\Delta p}{p} = -\frac{3m}{\epsilon p S} \frac{\Delta p}{p}. \text{ Здесь}$$

учтено, что $\frac{Mp_n}{RT} = \rho_n = \epsilon p$. На всем участке пара давление падает не очень значительно — от p_n до $p'' = \frac{5}{6}p_n$. Поэтому толщина слоя H пара может быть приближенно вычислена по этой формуле, где $\Delta p = \frac{1}{6}p_n$ и средняя величина давления $p \approx \frac{1}{2} \left(p_n + \frac{5}{6}p_n \right) = \frac{11}{12}p_n$. Таким образом, $H \approx \frac{6m}{11\epsilon p S} \approx 73 \text{ см}$. Значит, расстояние между поршнями

$$L = H + h \approx \frac{m}{2\rho S} \left(1 + \frac{12}{11\epsilon} \right) \approx 77 \text{ см}.$$

- См. задачу Ф2652 «Задачника «Кванта».
- Выразим U_x через силу тока I в образце. Заметим, что при скорости дрейфа v за единицу времени через сечение образца bd проходит заряд электронов проводимости из объема vbd , что при концентрации n электронов проводимо-

сти создает силу тока $I = envbd$. Для разности потенциалов $U_X = bvB$ получим

$$U_X = \frac{IB}{end}.$$

Выразим сопротивление R образца между гранями, отстоящими друг от друга на расстояние L , через подвижность μ и концентрацию n электронов проводимости. Так как $v = \mu E$, где $E = U/L$, U – напряжения между сечениями бруска, то скорость дрейфа электронов $v = \mu U/L$. Поскольку

сила тока равна $I = envbd = \frac{en\mu Ubd}{L}$, то из

равенства $R = \frac{U}{I}$ имеем $R = \frac{L}{en\mu bd}$. Соответственно,

для удельного сопротивления получим

$$\rho = \frac{1}{en\mu}.$$

Запишем закон Ома для замкнутой цепи: $\mathcal{E} = I(r + R)$, где R – сопротивление образца.

Подставляя в это уравнение $I = \frac{U_X end}{B}$ и выражение для R , находим

$$r + R = \frac{\mathcal{E}B}{U_X end}, \text{ или } \frac{\mathcal{E}B}{U_X} = end \cdot r + \frac{L}{\mu b}.$$

Мы получили, что обратное напряжение Холла линейно зависит от сопротивления переменного резистора r . Это позволяет применить графическую обработку. По угловому коэффициенту den можно найти концентрацию n , а по свободному члену $\frac{L}{\mu b}$ – подвижность μ . Таблицу из условия преобразуем к виду:

$r, \text{кОм}$	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
$\mathcal{E}B/U_X, \text{Тл}$	4,0	4,8	5,6	6,3	7,1	8,3

Наносим на график с осями $\frac{\mathcal{E}B}{U_X}$ и r точки, отвечающие измерениям, и проводим наиболее близкую к ним прямую (рис.19). Для нашей прямой получаем $\frac{L}{\mu b} = 4,1 \text{ Тл}$, откуда

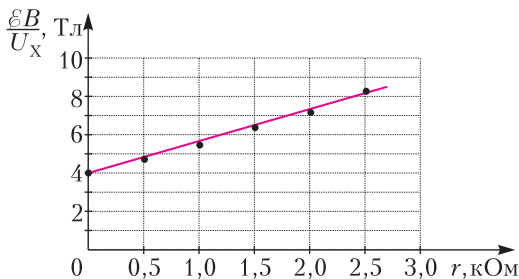


Рис. 19

$$\mu = \frac{1,0 \cdot 10^{-2}}{5,0 \cdot 10^{-3} \cdot 4,1} \text{ м}^2/(\text{с} \cdot \text{В}) = 4,9 \cdot 10^3 \text{ см}^2/(\text{с} \cdot \text{В}).$$

Угловым коэффициентом равен

$$end = \frac{8,2 - 4,0}{2,5 \cdot 10^3} \text{ Тл/Ом} \approx 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ Тл/Ом}.$$

Отсюда

$$n = 1,06 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}, \quad \rho = \frac{1}{en\mu} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ Ом} \cdot \text{м}.$$

Второй тур

(см. «Квант» №3)

7 класс

1. Мальчики одинаково хорошо плавают, и их скорость в 3 раза больше скорости реки.

2. Глеб сделал привал через 5 км, так как до этого момента удаление Вовы увеличивалось пропорционально пройденному Глебом расстоянию, что соответствует движению с постоянными скоростями. Заметим, что к этому времени Вова удалился от Глеба на 15 км, а от места старта – на 20 км. Следовательно, скорость Вовы в 4 раза больше скорости Глеба. Пока Глеб отдыхал, Вова проехал еще 5 км, после чего по звонку друга развернулся и поехал навстречу. Глеб успел пройти вперед еще 4 км, а Вова – проехать 16 км. Это соответствует условию сохранения их скоростей. Всего путь Вовы составил $(20 + 5 + 16) \text{ км} = 41 \text{ км}$, а его скорость равна $41 \text{ км}/2 \text{ ч} = 20,5 \text{ км/ч}$. Скорость Глеба равна $20,5 \text{ км}/4 \text{ ч} \approx 5,1 \text{ км/ч}$. Время привала можно найти по расстоянию, на которое за это время уехал Вова: $t = 5 \text{ км}/20,5 \text{ км/ч} \approx 14,6 \text{ мин}$.

3. Объем воды, которая попадает в кастрюлю в единицу времени, пропорционален площади кастрюли. Тогда условие заполнения кастрюль можно описать так:

$$uS_1T_1 = h_1S_1, \quad uS_2T_2 = h_2S_2,$$

где u – интенсивность дождя, имеющая размерность скорости (типичные значения интенсивности дождя 1–10 мм/ч). Отсюда получаем

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{T_1}{T_2} = 2.$$

Обозначим через V объем воды, перекачиваемый между кастрюлями в единицу времени. Тогда условие заполнения кастрюль выглядит так:

$$(uS_1 + V)T = h_1S_1, \quad (uS_2 - V)T = h_2S_2.$$

Объединив оба условия, находим

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{T_2 - T}{T - T_1} = \frac{1}{3}, \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{h_1 S_1}{h_2 S_2} = \frac{T_1(T_2 - T)}{T_2(T - T_1)} = \frac{2}{3}.$$

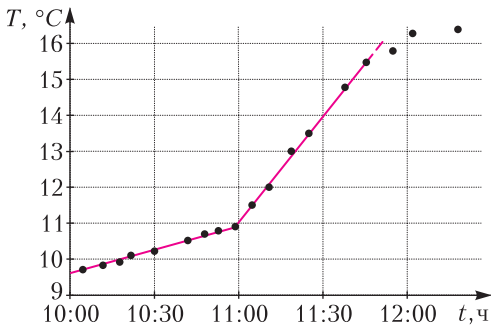


Рис. 20

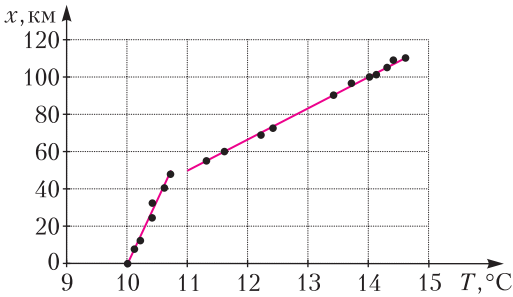


Рис. 21

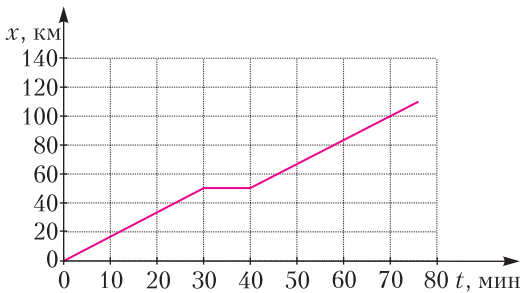


Рис. 22

4. По графику зависимости температуры от времени (рис.20) находим время, когда температура была 10,0 °С. Это 10:20 – время начала движения.

По графику зависимости координаты от температуры (рис.21) получаем график зависимости координаты от времени (рис.22), из которого находим остальные ответы на вопросы задачи: скорость поезда 100 км/ч; от Дмитрова до Дубны 60 км; стоянка в Дмитрове длилась 10 мин.

8 класс

- См. задачу Ф2646 «Задачника «Кванта».
- Проход проехал 39 км, увеличив после разворота скорость в 3 раза, а Ярик шел со скоростью 6 км/ч и отдыхал 25 мин (мальчики начали движение в разные стороны).
- График зависимости деформации пружины от высоты уровня жидкости представлен на рисун-

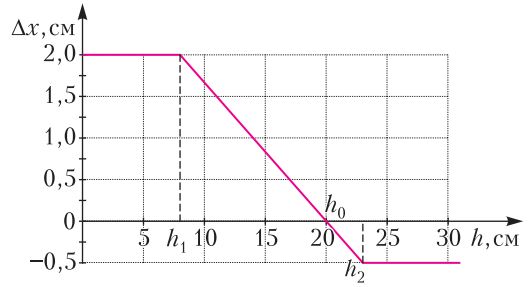


Рис. 23

ке 23. Начальное сжатие пружина на 2 см остается таким до высоты уровня воды $h_1 = 8$ см, затем равномерно уменьшается до нуля при $h_2 = 20$ см. После этого пружина будет растягиваться до величины деформации 0,5 см при высоте уровня $h_3 = 23$ см и дальше изменяться не будет.

4. Построим график зависимости $t(\tau)$ (рис.24). Из графика следует, что после 50 с плитка была выключена и затем система остывала в результате теплопередачи. Будем считать, что мощность теплопотерь P_x постоянна на протяжении всего эксперимента. Для интервала времени $[0; 40]$ с: $\lambda m = (P - P_x)\tau_1$, для интервала времени $[40; 50]$ с: $cm(t_2 - t_1) = (P - P_x)\tau_2$, где $t_2 = 248$ °С, $t_1 = 238$ °С, $\tau_2 = 10$ с, $\tau_1 = 40$ с. Для интервала времени $[50; 80]$ с: $cm|t_1 - t_2| = P_x\tau_3$, где $\tau_3 = 30$ с. Отсюда найдем

$$c = \frac{\tau_2}{\tau_1} \frac{\lambda}{(t_2 - t_1)} = 500 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}),$$

$$P_x = \frac{\lambda m \tau_2}{\tau_1 \tau_3} = 25 \text{ Вт},$$

$$P = \frac{\lambda m (\tau_3 + \tau_2)}{\tau_1 \tau_3} = 100 \text{ Вт},$$

$$T = \frac{\lambda m}{P_x} + \tau_3 = 150 \text{ с}.$$

(Продолжение следует)

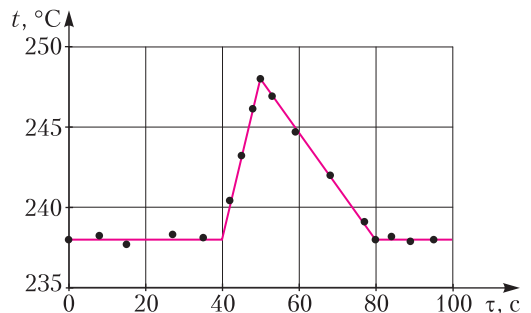


Рис. 24

Лингвистические задачи

(см. 2-ю с. обл.)

Сравнивая 1 и 2, видим, что перестановка слов tetangga и kawan вызывает перестановку групп 朋友 и 邻居; то же в 6 и 7. Между этими иероглифами стоит иероглиф 的, не имеющий прямого соответствия в индонезийских предложениях; по-видимому, это грамматический показатель.

Сравнивая 2 и 8, а также 3 и 7, получаем соответствия: saja – 我 и engkau – 你, кроме того, обнаруживается еще один иероглиф, не соответствующий определенному индонезийскому слову: 是. То же видно из сравнения 4 и 5, откуда, кроме того, получаем: tetangga engkau – 你的邻居 и kawan saja – 我的朋友; следовательно, tetangga – 邻居 и kawan – 朋友.

Обозначим каждое индонезийское слово его первой буквой, его китайский эквивалент – такой же заглавной буквой, а иероглифы с (предположительно) грамматическим значением – цифрами 1 и 2. Отмечая знаком / то место индонезийского предложения, в котором при переводе на китайский появляется иероглиф 的, перепишем данные задачи следующим образом:

1. s / t k e	S 1 E 2 K 2 T
2. s / k t e	S 1 E 2 T 2 K
3. e / t k s	E 1 S 2 K 2 T
4. t e / k s	E 2 T 1 S 2 K
5. k s / t e	S 2 K 1 E 2 T
6. k t s / e	S 2 T 2 K 1 E
7. t k s / e	S 2 K 2 T 1 E
8. k t e / s	E 2 T 2 K 1 S

Индонезийское предложение имеет на конце e или s и делится на две части так, чтобы первая часть тоже кончалась на e или s. Каждая часть переводится отдельно, и результаты соединяются иероглифом 的. (Можно предположить, что две части предложения – это группы подлежащего и сказуемого, а 1 – связка.) Китайские эквиваленты индонезийских слов, составляющие одну часть предложения, располагаются в обратном порядке и соединяются показателем 2.

Задание 1

1. 你是我的邻居的朋友
2. 你的朋友邻居是我
3. 我的邻居是你的朋友

Задание 2

kawan engkau tetangga saja

Дополнение

Для справки приведем переводы использованного в условии задачи языкового материала на русский язык:

1. я – сосед твоего друга
2. я – друг твоего соседа
3. ты – сосед моего друга
4. твой сосед – мой друг
5. мой друг – твой сосед
6. друг моего соседа – это ты
7. сосед моего друга – это ты
8. друг твоего соседа – это я

и предложения из задания 2:

мой друг – твой сосед

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ
РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

**Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.**

Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ № 210997

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»**

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

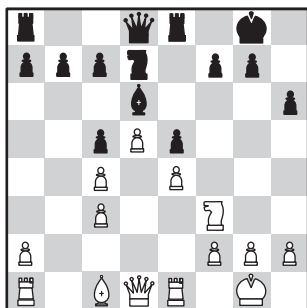
**в соответствии с предоставленными
материалами
в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8
Тел.: (831) 216-40-40**

Позиционная ЖЕРТВА

После традиционного турнира в Вейк-ан-Зее, состоявшегося в начале 2021 года, в профессиональных шахматах снова наметился перерыв в «живых» турнирах. Поэтому сегодня мы вернемся к творчеству компьютерной программы AlphaZero и разберем примеры позиционных жертв из ее партий в матчах против Stockfish.

Stockfish – AlphaZero Лондон, 2018

1. e4 e5 2. ♘f3 ♗c6 3. ♗b5 ♗f6 4. d3 ♗c5 5. ♗c6 dc 6. c3 ♗d6 7. 0-0 ♗e6 8. b3 h6 9. ♗bd2 ♗d7 10. ♗c4 0-0 11. ♚e1 ♚e8 12. d4 ♗c4 13. bc c5 14. d5. Кажется, что предстоит долгая позиционная борьба, однако AlphaZero с помощью жертвы двух пешек находит способ резко обострить позицию.

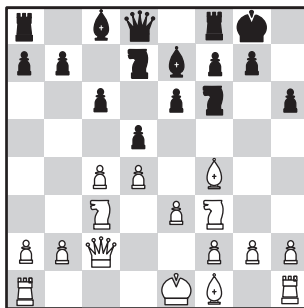


14...f5! 15. ef e4 16. ♗d2 e3! 17. fe ♗h4 18. g3 ♗g3 19. hg!. Лучшая защита. Многие шахматисты предпочли бы 19. ♗f3, с темпом нападая на ферзя, однако несмотря на то, что после 19...♗f2 20. ♗g2 ♗e4 21. ♗f2 ♗f8 белый король убегает на ферзевый фланг, их позиция хуже из-за многочисленных связок. 19...♗g3+ 20. ♗h1 ♗e5. Черные пытаются играть на победу: в случае 20...♗e5 21. e4 им пришлось бы сразу форсировать вечный шах посредством ♗h3-♗g3. 21. ♚e2! (21. e4 ♗f6 22. ♚e2 ♗e4 23. ♚e4 ♗h3 позволяло чер-

ным развить опасную атаку, теперь же позиция стабилизируется) 21...♗f5 22. ♗g2 ♗h3+ 23. ♗h2 ♗e3 24. ♗a3 ♗e8 25. ♗g4 ♗f7 26. ♗h4 ♗e7 (26...♗e5? 27. ♚e1, и выигрывают уже белые!) 27. ♗g1 ♗e5 28. ♗g3 ♗e1+ 29. ♗g1 ♗e3 30. ♗g3 ♗e1+ 31. ♗g1, ничья повторением ходов.

AlphaZero – Stockfish Лондон, 2018

1. ♗f3 ♗f6 2. c4 e6 3. ♗c3 d5 4. d4 c6 5. ♗g5 ♗e7 6. e3 h6 7. ♗f4. Чаше встречается ♗h4, сохраняя слона на диагонали h4-d8, однако ход в партии хорошо сочетается с агрессивным продолжением на 9-м ходу. 7...0-0 8. ♗c2 ♗bd7.



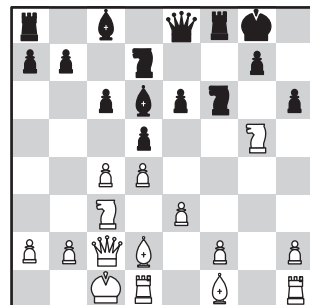
9. g4!? Разработка гроссмейстеров А.Широва и А.Шабалова с основной идеей – использовать слабости, возникшие после хода h6. 9...dc. Принимать жертву слишком рискованно: 9...♗g4 10. ♗g1 ♗g6 11. ♗h6, и пешка отыгрывается, а открытая линия g гарантирует белым хорошие атакующие перспективы. 10. ♗g1 (новинка, раньше играли 10. g5 hg 11. ♗g5) ♗d5 11. g5 ♗f4 12. gh. Оригинальная жертва – черным не грозит немедленный мат, но защищаться по линии g крайне сложно. 12...♗h5 13. hg ♗g7 14. 0-0-0 ♗a5 15. ♗c4 ♗f5 16. ♗c2 ♗h7 17. ♗g3. Белые уклонились от размена ферзей и грозят построить батарею на линии g. 17...♗h8 18. ♗dg1 ♗f5 19. ♗f1! Соль замысла белых – отдавая качество, они затем выигрывают

ферзя. 19...♗g3 20. ♗g3 ♗g8 21. ♗h3 ♗g7 22. ♗h7+ ♗h7. В дальнейшем белые четко реализовали материальный перевес, черные сдались на 52 ходу.

На наш взгляд, подобная идея может быть взята на вооружение читателями, предпочитающими атакующий стиль игры. Приведем оригинальную партию, сыгранную одним из разработчиков варианта.

А. Широв – Т. Торхальссон Рейкьявик, 1992

1. d4 e5 2. c4 c6 3. ♗c3 ♗f6 4. ♗f3 a5 5. e3 ♗bd7 6. ♗c2 ♗d6 7. g4 0-0 8. g5 ♗h5 9. ♗d2 f5. Черным, вероятно, не понравилось, что белые могут атаковать застрявшего на краю доски коня путем ♗e2 или ♗e5, однако этот ход создает другую проблему, открывая линию g. 10. gf ♗hf6 11. ♗g5 ♗e8 12. 0-0-0 h6.



13.h4! Типичный атакующий план, встречающийся во многих дебютах. Принятие жертвы приведет к атаке по линии h. 13...♗b4 14. ♗d3 ♗c3 15. ♗c3 hg. 16. hg ♗e4 17. ♗e4 de 18. ♗e4 ♗f5 19. ♗h4 ♗g6 20. ♗h8+ ♗f7 21. f4 ♗f8 22. ♗h4 ♗e8 23. e4 ♗f7 24. ♗he1 ♗d8. Серией пешечных прорывов А. Широв вскрывает позицию, не оставляя сопернику шансов. 25. d5! cd 26. cd ♗d7 27. f5! ef 28. e5. Черные беззащитны против столь мощной пары пешек. 28...f4 29. e6 ♗a4 30. ♗d2 ♗f5 31. ♗f2 f3 32. ♗e4 ♗g5 33. ♗a4 ♗g1+ 34. ♗d1 ♗g2 35. ♗h4+ ♗e8 36. ♗e4 ♗c8 37. d6 ♗d8 38. ♗e7x.

А. Русаков

«Отпустите меня в Гималаи...»

Почему в Гималаи? А потому, что именно там находится «вершина мира» – гора Эверест высотой около 8849 км. А могут ли быть более высокие горы?

Прогулки с физикой



ISSN 0130-2221 21003



9 770130 222214

(ПОДРОБНЕЕ – НА С. 29 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)