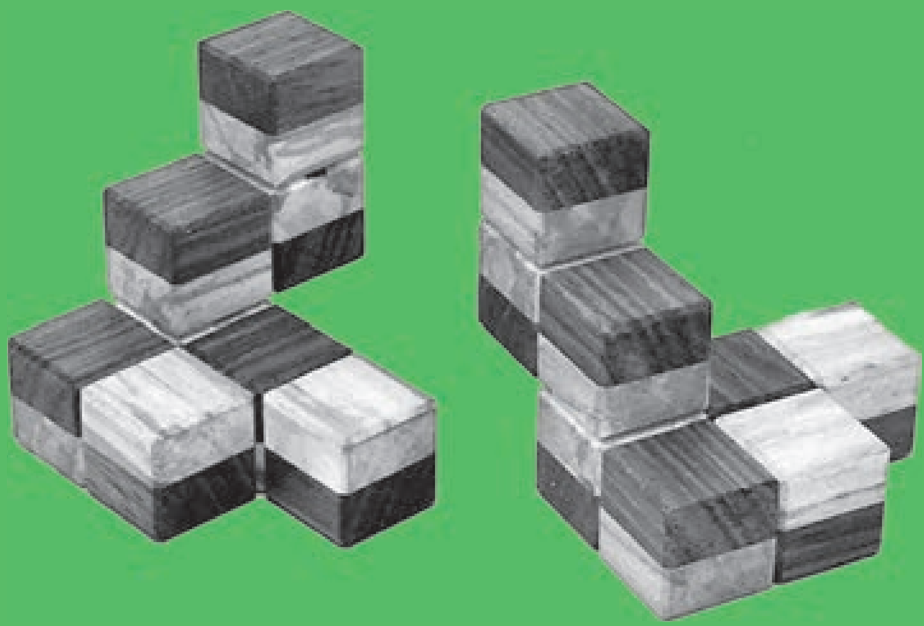
ISSN 0130-2221
СЕНТЯБРЬ
2020 · № 9

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



БЛИЗНЕЦЫ братья

Американский изобретатель головоломок Джордж Зихерман (George Sicherman) не устает радовать нас новыми задачками. На фото изображены две одинаковые детали, составленные из единичных кубиков, – по восемь кубиков в каждой. Вам нужно так расположить эти детали, чтобы у получившейся фигуры была зеркальная симметрия.

Несмотря на то, что в головоломке всего две детали, она довольно сложная и неплохо проверяет пространственное воображение.

Желаем успеха!

Е.Епифанов

КВАНТ СЕНТЯБРЬ 2020 № 9

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Архимед и астрофизика

С.ДВОРЯНИНОВ, В.СОЛОВЬЕВ

Ставим Солнцу градусник

Иллюстрации С.Напалковой

Популярный миф об Архимеде, бегущем по главной улице Афин с криком «Эврика!», знают все. Как и приписываемое ему же изречение: «Дайте мне точку опоры, и я переверну земной шар!» Будем считать, что на самом деле так все и было, именно так он и говорил. А ведь Архимед был прав: его открытия имеют космический размах и объясняют, в первом приближении, поведение типичных звезд, называемых звездами Главной последовательности. Так что совсем не зря именем Архимеда названа лучшая из опер, написанных студентами физического факультета МГУ.

Наблюдения астрономов, которым как минимум две тысячи лет и которым можно доверять, доказывают, что большинство звезд кажутся вечными и неизменными. А это значит, что к ним применимы законы статики, или равновесия, в которых Архимед давно разобрался. Школьное изложение закона Архимеда сводит его к условию плавания тела в жидкости, причем подсознательно мы подразумеваем под этой жидкостью воду и, конечно, считаем ее несжимаемой. Так сложилось исторически с античных времен. Потом появилось воздухоплавание, и закон Архимеда распространился на газы. Состоят ли звезды из воды? Конечно, нет, а если бы и состояли, то вода точно не оставалась бы в жидком состоянии, а превратилась бы в пар. Применим ли закон Архимеда к пару? Да, конечно. Если вы хотя бы год изучали в школе физику, то знаете, что этот закон можно перевести на чуть более современный язык Паскаля и Ньютона. И для газа, и для жидкости силы, действующие внутри вещества, описываются давлением, которое не зависит от направления. Это закон Паскаля. Но если это вещество находится в состоянии покоя по отношению к телу огромной массы, например к планете или звезде, то силы давления в нем должно уравновешивать и силу тяготения. А если эта планета или звезда еще и вращается вокруг своей оси, то надо учитывать и

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20200901

центробежную силу инерции, но здесь мы о ней ради простоты забудем.

Простейший вариант задачи о давлении внутри несжимаемой жидкости в однородном поле тяжести приводит к известной формуле, применяемой чаще всего к определению давления в воде на глубине h:

$$p = p_a + \rho g h.$$

Здесь p_a – это давление атмосферного воздуха у поверхности воды, g – ускорение свободного падения, h – глубина, на которой нас интересует давление, ρ – плотность воды. Формула получается как условие обращения в ноль векторной суммы всех сил, действующих на небольшой объем жидкости, взятый в форме цилиндра или прямой призмы. Это сила тяжести и силы давления на поверхности, ограничивающие выделенный объем.

Пусть теперь вместо воды будет звездное вещество, для него уместно название «плазма». Это газ, в котором электроны оторваны от ядер, объект намного более сложный, чем идеальный газ, с которым вас знакомят на уроках физики. Но для статичной, т.е. неподвижной в среднем, плазмы сложностями можно пренебречь. По сравнению с приведенной школьной формулой давления кое-что все-таки изменится: не только давление p, но и все величины, т.е. и ускорение свободного падения g и плотность ρ, теперь будут зависеть от глубины, а лучше сказать – от расстояния до центра звезды. А вот усложнения, которые внес в теорию гравитации Эйнштейн, для типичных звезд из Главной последовательности можно не учитывать, так как их гравитационное поле слабое (в сравнении с нейтронными звездами или черными дырами).

Итак, выделим внутри статической (т.е. равновесной) звезды объем вещества в форме цилиндра с площадью оснований ΔS и высотой $h = \Delta r$. Пусть ось цилиндра лежит на радиусе звезды. Тогда нижнее основание цилиндра отстоит от центра звезды на расстояние r, а верхнее – на $r + h = r + \Delta r$. Сила давления на нижнее основание направлена «вверх», т.е. вдоль радиуса от центра звезды, и равна $p(r)\Delta S$, а на верхнее – направлена «вниз» к центру звезды и равна $p(r+\Delta r)\Delta S$. Разность этих величин, равная $-\Delta p \Delta S$, и дает «выталкивающую силу» Архимеда, действующую на цилиндр. Заметьте: функция $p = p(r)$ – функция убывающая. Поскольку вещество цилиндра находится в равновесии (как и все вещество звезды в нашей модели), то цилиндр «плавает» и действующая на него сила тяжести равна выталкивающей силе. Сила же тяжести определяется массой $M(r)$ и радиусом r той части звезды, которая находится ниже нижнего основания цилиндра, а также массой Δm вещества, содержащегося внутри цилиндра:

$$F = \frac{GM(r)\Delta m}{r^2},\ \Delta m = \rho(r)\Delta S \Delta r.$$

Здесь нужно считать величину Δr малой, иначе формулы будут сложнее, а выгоды от этого никакой не будет. (Разумеется, это не что иное как стандартный прием исчисления бесконечно малых, изобретенного Ньютоном. Надо сказать, что некоторые результаты Архимеда, например вычисления объемов, показывают, что он и тут был в курсе дела.)

Итак, условием равновесия вещества в цилиндре является равенство

$$\left(p(r) - p(r+\Delta r)\right)\Delta S = \frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}\Delta S \Delta r,$$

или

$$\frac{p(r+\Delta r) - p(r)}{\Delta r} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}.$$

Заметим, что левая часть этого уравнения при малых значениях Δr называется производной давления по радиальной координате r. Тогда получаем уравнение

$$p'(r) = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}.$$

Из астрономических наблюдений обычно можно определить три величины: массу звезды M, ее радиус R и ее светимость L. Через них вычисляют температуру T на поверхности звезды. Вот и мы уравнение, полученное применением закона Архимеда к физике равновесных звезд, используем теперь для оценки давления и температуры в центре звезды. Рассмотрим это уравнение при сильно упрощающих расчеты предположениях, в частности будем считать плотность звезды одинаковой во всем ее объеме. В таком случае

$$\rho(r) = \frac{M}{V},\ V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

масса шара радиусом r равна

$$M(r) = \rho(r)\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Mr^3}{R^3},$$

а наше уравнение принимает вид

$$p'(r) = -\frac{4\pi G M^2}{3V^2}r.$$

Интегрируя производную $p'(r)$, находим функцию

$$p(r) = -\frac{2\pi G M^2}{3V^2}r^2 + c.$$

Произвольную постоянную c найдем, считая давление на поверхности звезды, т.е при $r = R$, равным нулю. Тогда

$$c = \frac{2}{3}\frac{\pi G M^2}{V^2}R^2 \text{ и } p(r) = \frac{2}{3}\frac{\pi G M^2}{V^2}\left(R^2 - r^2\right).$$

При $r = 0$ находим давление в центре звезды:

$$p(0) = \frac{2}{3}\frac{\pi G M^2}{V^2}R^2.$$

Подставив сюда выражение объема шара через его радиус, получим

$$p(0) = \frac{3}{8\pi}\frac{GM^2}{R^4}.$$

Например, для Солнца $M \approx 2\cdot10^{30}$ кг, $R \approx 7\cdot10^8$ м и получается $p(0) \approx 10^{14}$ Па, т.е. миллиард атмосфер(!).

Для оценки температуры в центре Солнца используем уравнение состояния идеального газа, т.е. уравнение Менделеева–Клапейрона. Газ будем считать атомарным водородом, у которого молярная масса равна $\mathrm{M} = 10^{-3}$ кг/моль. Тогда

$$T(0) = \frac{\mathrm{M}p(0)}{R\rho}.$$

Средняя плотность Солнца $\rho = M/V \approx \approx 1{,}4\cdot10^3$ кг/м^3, $R = 8{,}31$ Дж/(К·моль), получается $T(0) \approx 1{,}2\cdot10^7$ К.

Заметим, что согласно современным данным температура в центре Солнца достигает 15 миллионов градусов, а давление составляет $3{,}4\cdot10^{16}$ паскалей. Опираясь лишь на школьную физику (Архимед, Паскаль, Ньютон, Менделеев и Клапейрон), в оценке температуры в центре Солнца мы получили правильный порядок величины, ошибка составляет ≈ 20%. А вот давление получилось на два порядка меньше, чем оно есть на самом деле. Это значит, что плотность в центре Солнца примерно в сто раз больше средней.

Предположения о зависимости плотности звездного вещества от глубины могут быть самыми разными. Далее мы обсудим один экстремальный вариант.

Чудеса гравитации

Если энергия характеризует способность совершать работу, то отрицательная энергия – это что? Неспособность совершать работу? А вот и не так! Ваше богатство измеряется отрицательной величиной – Вы должник! Можете ли Вы тратить деньги? А почему бы нет? Некоторые всю жизнь так и делают. Вспомним, например, Павла Иваныча Чичикова...

В школьных задачах механическая энергия – и кинетическая, и потенциальная – обычно положительна. Перепад высот в плотине ГЭС (ничтожно малый в космических масштабах) обеспечивает превращение положительной потенциальной энергии воды в электрическую. Заметим, что любая потенциальная энергия замкнутой системы тел складывается из суммы потенциальных энергий взаимодействий всех пар этих тел. Эту энергию нельзя разделить на индивидуальные порции. Так, например, упомянутая выше потенциальная энергия воды наверху плотины есть на самом деле энергия взаимодействия двух тел: воды и планеты Земля.

В привычной ситуации на Земле при малых высотах и малых перемещениях мы, упрощая, говорим, что потенциальная энергия тела массой m выражается линейной функцией: $E = mgh$. Мы не упоминаем, что и Земля в равной степени может претендовать на эту энергию. Соломоновым решением было бы деление потенциальной энергии между ними пополам. Но это неверно! Мы считаем, что вся общая потенциальная энергия превращается в кинетическую энергию только одного из двух тел. Почему же мы пренебрегаем приращением кинетической энергии Земли? Потому, что несравнимы массы двух тел, а приобретенные ими импульсы должны быть одинаковыми. Тогда кинетическая энергия, приобретенная Землей, будет $E_{\text{Земли}} = \dfrac{p^2}{2M}$, что катастрофически мало по сравнению с кинетической энергией $E_{\text{воды}} = \dfrac{p^2}{2m}$, которую получает вода.

Обычно h – это высота, отсчитываемая от определенного уровня, например от поверхности Земли в данном месте, а $g \approx G\dfrac{M}{R^2}$, где M – масса Земли, R – ее радиус. Чем выше мы поднимаем массу m, тем больше ее потенциальная энергия. При переходе к космическим масштабам

$$g(r) = G\frac{M}{r^2},\ R \le r < +\infty.$$

Рассмотрим две точечные массы M и m. Согласно закону Ньютона две силы их взаимного притяжения действуют на эти две массы в противоположных направлениях вдоль прямой, проходящей через эти точки, при этом силы равны друг другу и выражаются формулой

$$F(r) = G\frac{Mm}{r^2}.$$

Сейчас мы хотим выяснить, как потенциальная энергия их взаимодействия зависит от r. Предположим, что расстояние между двумя массами увеличилось от r до $r + \Delta r$. Расстояние увеличилось, конечно, не само по себе, а массу *m отдалили* от массы M, которая словно гвоздем прибита к своему месту. Впрочем, можно говорить и наоборот, что массу M отдалили от m, тогда гвоздем прибита масса m. В любом случае сторонняя сила совершила работу. Легко доказать, что эта работа не зависит от траектории отдаляемой массы. Для этого достаточно приближенно заменить кривую ломаной линией, состоящей из бесконечно малых отрезков, лежащих на прямых, проведенных через точки m и M, и отрезков, перпендикулярных к ним. Работа совершается только на первых, а значит, ее можно найти по формуле

$$A(r, r + \Delta r) = \int_r^{r+\Delta r} G\frac{Mm}{x^2}\,dx =$$

$$= \left(-G\frac{Mm}{x} + c\right)\Bigg|_{x=r}^{x=r+\Delta r} = G\frac{Mm}{r(r + \Delta r)} \cdot \Delta r.$$

Видно, что совершенная работа зависит только от начального и конечного значений расстояния между m и M, а значит, сила всемирного тяготения потенциальна и потенциальная энергия задается формулой

$$E_{\text{п}}(r) = -G\frac{Mm}{r} + c,$$

где c – произвольная постоянная. Примечательно, что при стремлении r к нулю работа по отдалению одного тела от другого на фиксированное расстояние Δr растет неограниченно (для точечных масс).

Здесь уместно вспомнить фразеологизм *для танго нужны двое*. Объясним, почему. Пусть несколько точек лежат на одной прямой. Будем интересоваться расстояниями между точками из каждой их пары. Если точек две, то в школе советуют взять линейку, ее ноль совместить с одной из них и посмотреть, какое число соответствует второй точке. А можно вообще о нуле не думать, а просто-напросто совместить линейку с прямой, содержащей все эти точки. Тогда расстояние между двумя любыми точками есть модуль разности соответствующих им чисел. Это расстояние не зависит от расположения линейки, ее можно как угодно сдвигать влево-вправо вдоль прямой.

Говоря о расстоянии, всегда надо иметь две точки. Так же, говоря о потенциальной энергии гравитации тела, расположенного в данной точке, следует понимать, с какими другими телами оно гравитационно взаимодействует. В случае двух тел мы уже записывали формулу для $E_п(r)$. Эта формула задает бесконечное множество функций $E_{п_c}(r)$. При этом для любых двух значений аргумента a и b разность соответствующих значений любых двух функций оказывается одной и той же:

$$E_{п_{c1}}(a)-E_{п_{c1}}(b)=E_{п_{c2}}(a)-E_{п_{c2}}(b).$$

Следовательно, эта функция может служить для описания потенциальной энергии одной материальной точки относительно другой.

В физике для описания потенциальной энергии двух точечных масс выбрали функцию

$$E_п(r)=-G\frac{Mm}{r}.$$

Выбор основан на понятном условии, что когда тела не взаимодействуют (т.е. при $r\to+\infty$), то их потенциальная энергия взаимодействия стремится к нулю. При этом любое значение потенциальной энергии оказывается отрицательным. Это может показаться противоречащим здравому смыслу. Но к этому надо привыкнуть, а главное, понять. Ведь действительно, если $r_1<r_2$, то $E_п(r_1)<E_п(r_2)$. Чем дальше (выше) от M, тем больше потенциальная энергия массы m.

Заметим, что наша формула также определяет и энергию взаимодействия E_{12} двух шаров с массами M и m, расстояние между центрами которых равно r, если плотность внутри каждого шара зависит только от расстояния до его центра. Чтобы избавиться от энергии взаимодействия E_{12}, надо удалить тела друг от друга на бесконечное расстояние, т.е. совершить работу

$$A=G\frac{Mm}{r}.$$

При этом каждый шар имеет и собственную гравитационную энергию, связанную со взаимным притяжением его отдельных частей. Эти энергии определяются формулами

$$E_1=-\omega_1G\frac{M^2}{R_1},\ E_2=-\omega_2G\frac{m^2}{R_2},$$

где числа ω_1 и ω_2 порядка 1, они зависят только от распределения плотностей $\rho_1(r_1)$ и $\rho_2(r_2)$ внутри тел. Если мы хотим растащить каждое из тел на очень малые части и разместить их очень далеко друг от друга, то в этом случае нужно совершить работы $A_1=-E_1$, $A_2=-E_2$ против сил тяготения.

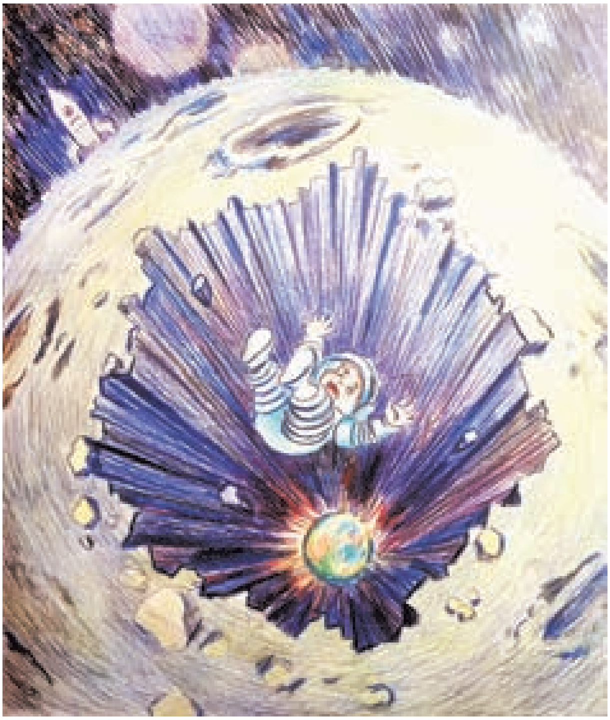
Незнайка на Луне и модель Роша

Самая мощная в мире электростанция находится в Китае и называется «Три ущелья». Она использует кинетическую энергию падающей воды, которая, в свою очередь, получается из гравитационной потенциальной энергии. Общеизвестная формула $E=mgh$ говорит, что энергия тем больше, чем больше будут три величины: масса воды m, высота ее падения h и ускорение силы тяжести g.

В обычной жизни мы можем искать только наилучшие географические условия, т.е. наибольший поток воды и наибольший перепад высот. Но давайте предположим, что и третий фактор, т.е. ускорение g, также поддается оптимизации. Вспомним сказку Николая Носова «Незнайка на Луне» и смелое предположение Знайки о пустотелой Луне. Если видимая поверхность нашего спутника представляет собой тонкую, но жесткую оболочку радиусом R_1, а обитатели Луны живут на ее ядре радиусом R_2 с массой M, то каждая масса m, находящаяся на оболочке, может отдать при спуске на ядро весьма существенную энергию

$$E=E_{п_1}-E_{п_2}=\left(-\frac{GMm}{R_1}\right)-\left(-\frac{GMm}{R_2}\right).$$

Пусть вся масса $M\approx7{,}3\cdot10^{22}$ кг у такой фантастической Луны сосредоточена в ее ядре, $R_1\approx1740$ км – радиус ее внешней оболочки, а, например, $R_2=\frac{1}{2}R_1$ – радиус обитаемого ядра. Тогда для груза массой 100 кг, находящегося на поверхности незнайкиной Луны, эта энергия равна $E\approx2{,}8\cdot10^8$ Дж, что в 2800 раз больше, чем у 100 кг воды, падающей с высоты



расстоянии от материальной точки, в которой сосредоточена масса звезды, при падении этого тела на центр будет бесконечно большим. Положение спасает общая теория относительности, в ней каждой массе соответствует ее гравитационный радиус и поэтому точечных масс не существует. Найти гравитационный радиус можно, как ни странно, из «скрещивания» закона всемирного тяготения и постулата специальной теории относительности о том, что двигаться в пустоте быстрее скорости света нельзя.

Для нахождения гравитационного радиуса вспомним вывод второй космической скорости v_2. Так называется минимальная скорость, которую надо придать телу, находящемуся на поверхности Земли, для его удаления от Земли на сколь угодно большое расстояние. При этом не учитывается ни наличие у Земли атмосферы, ни ее вращение вокруг своей оси, ни воздействие других небесных тел, например Солнца. Кинетическая энергия тела на бесконечном расстоянии от Земли полностью переходит в потенциальную энергию:

$$\frac{mv_2^2}{2} = \frac{GMm}{R},$$

откуда

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}},$$

где M – масса Земли, R – ее радиус. Напомним, что при перемещении массы m с орбиты радиусом R в бесконечность ее потенциальная энергия получает приращение $\frac{GMm}{R}$. Полагая теперь для *произвольной* массы M вторую космическую скорость (ее еще называют параболической скоростью) равной скорости света c (ибо это согласно специальной теории относительности самая большая возможная скорость), мы найдем минимальный возможный радиус для этой массы:

$$R_g = \frac{2GM}{c^2}.$$

100 м на Земле. Незнайка и Козлик могли бы продавать акции не только Компании Гигантских Растений, но и Компании Гигантских Энергий.

Нас могут упрекнуть в несерьезности, однако модель пустотелой звезды встречается не только в сказках. Есть она и в астрофизике и называется моделью Роша.

Эдуард Альбер Рош (1820–1883), французский астроном и математик, изучил предельный случай распределения массы внутри звезды, когда масса сосредоточена в ее центре. Пусть радиус звезды R, а радиус ее центра, т.е. ядра, r. Для Солнца у нас раньше получилось, что плотность в центре примерно в 100 раз больше средней. А модель Роша для Солнца дает, что радиус его ядра должен быть примерно в 5 раз меньше радиуса Солнца. Эта модель неплохо описывает распределение плотности в звездах. Рош также предложил закон изменения плотности Земли с глубиной. Из формулы потенциальной энергии, очевидно, следует, что для предельного случая модели Роша выделение энергии точечным телом, находящимся на конечном

Он и называется гравитационным радиусом. Ничто (даже свет!) не может покинуть поверхность тела массой M с таким радиусом. Если тело не имеет материальной поверхности, то оно называется черной дырой и гравитационный радиус определяет так называемый горизонт черной дыры.

Модифицированная модель Роша – это черная дыра, которая окружена материальной сферой малой массы и весьма большого радиуса (очень большого по сравнению с гравитационным). Немного фантазии, и мы поселим на этой поверхности разумную цивилизацию. Тогда у этой «поверхностной» цивилизации не будет никаких проблем с энергией: достаточно проковырять дыру в поверхности и опускать туда на весьма длинной веревке, намотанной на ротор турбины, ненужные предметы (черная дыра будет еще и безотказным мусорным полигоном). А они при падении будут разгоняться до скорости света и вращать турбины электростанций. Тело массой m в итоге даст нам энергию порядка $\frac{1}{2}mc^2$, больше получить никак невозможно, но и не нужно – вспомните, сколько мусора ежедневно принимают наши мусорные полигоны. Одна беда – воздух тоже будет втягиваться черной дырой…

При превращении звезды в черную дыру может выделиться энергия порядка $\frac{1}{2}Mc^2$, т.е. примерно половина *полной* энергии звезды, включающей энергию покоя. Такое выделение сравнимо с энергией аннигиляции, при которой вещество полностью превращается в излучение, но для аннигиляции звезд нужно иметь антизвезду, т.е. звезду из антивещества, а их во Вселенной пока не обнаружили.

Если вернуться к самому началу времен, к Большому взрыву, то появляется мысль, что вечный двигатель все же существует и это сама Вселенная. Могла ли наша Вселенная родиться из ничего? Закон сохранения энергии не запрещает превращения нуля в сумму двух величин: положительной и отрицательной. Энергия гравитации отрицательна, энергия вещества – положительна. Значит, материя и пространство-время могут возникнуть одновременно. Но как же из этих крошечных новорожденных вырастает такой огромный мир? Здесь в роли волшебника выступает вакуум. Согласно квантовой теории, у вакуума есть положительная энергия и эта энергия создает отрицательное давление – антигравитацию, силу отталкивания, поэтому случайно родившийся мир начинает безумно быстро раздуваться. Отрицательность гравитационной энергии оказывается Вселенной только на руку. Но этот вакуум, обладающий большой плотностью энергии, неустойчив и превращается через какие-то 10^{-30} секунды в элементарные частицы, причем возможно, что всех таких частиц мы пока и не знаем, поскольку энергии наших ускорителей никак не дотягивают до тогдашних. Но плотность энергии вещества (частиц) быстро падает с расширением Вселенной, и даже раньше чем через секунду после Большого взрыва физика становится почти понятной! Почти – это значит, что мы знаем, как ведет себя 5% «населения» Вселенной. Все же темная материя (25%) и темная энергия (70%) пока остаются для нас загадками… (О физике Вселенной в целом можно прочитать в статье авторов «Космология Фридмана: горы реальные и потенциальные» в «Кванте» №1, 2 за 2017 г.)

Зажигаем звезды

Пусть вокруг небесного тела массой M вне его атмосферы обращается по круговой орбите радиусом r со скоростью v спутник массой m. Его центростремительное ускорение $a = \frac{v^2}{r}$ определяется силой взаимного притяжения $G\frac{Mm}{r^2}$. Согласно второму закону Ньютона,

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2},$$

тогда

$$v^2 = G\frac{M}{r}.$$

Из последнего равенства следует, в частности, что если спутник в результате воздействия на него следов атмосферы или после торможения двигателями оказался на более низкой орбите, то его скорость увеличилась.

Подсчитаем полную энергию спутника как сумму кинетической и потенциальной:

$$E = E_к + E_п = \frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{r} =$$

$$= mG\frac{M}{2r} - G\frac{Mm}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r}.$$

Видим, что сохраняющаяся полная энергия спутника отрицательна и равна половине его гравитационной энергии. Это – так называемая теорема вириала для спутника. Последнее уравнение можно записать так:

$$E_к + E_п = \frac{1}{2}E_п.$$

Интересно, что похожая теорема вириала работает и внутри звезд. Кинетическую энергию спутника заменим кинетической энергией частиц идеального газа, который моделирует звездное вещество. На деле этим веществом является плазма, состоящая из заряженных частиц, но для звезд Главной последовательности, находящихся в равновесном состоянии, модель вполне пригодна. Теперь кинетическая энергия – это тепловая (внутренняя) энергия. А что происходит при сжатии звезды? Поскольку работу совершает сила гравитации, то гравитационная энергия уменьшается. Но она отрицательна. Это значит, что ее абсолютная величина растет. Тогда тепловая (т.е. кинетическая) энергия возрастает, и температура внутри звезды увеличивается. Тепловая энергия передается от внутренних слоев звезды наружу и излучается звездой в пространство. При этом звезда не остывает, а напротив, разогревается. Принято говорить, что звезда имеет отрицательную теплоемкость.

Если звезда не сжигает термоядерное горючее (такова судьба звезд с малой массой, температура в их центре мала для осуществления термоядерной реакции), то она может светить за счет постепенного сжатия, т.е. за счет гравитационной энергии. При этом светимость звезды L определяется уменьшением ее полной энергии за единицу времени:

$$L = -\frac{\Delta E}{\Delta t} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta E_п}{\Delta t}.$$

При этом

$$\frac{\Delta E_к}{\Delta t} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta E_п}{\Delta t} = L,$$

т.е. внутренняя (или тепловая) энергия звезды возрастает на столько же, сколько излучает звезда наружу. Гравитационная энергия расходуется поровну между нагреванием внутренности звезды и излучением в окружающее пространство.

Как рождаются звезды? Отрицательность гравитационной энергии приводит к неустойчивости материи (а это, в основном, газообразный водород, 25% гелия, 1% дейтерия и ничтожно малая примесь легких элементов – лития, бериллия и бора), первоначально заполняющей Вселенную почти равномерно. Более плотные участки начинают забирать материю у соседей (первоначальное накопление капитала в экономике), неравенство непрерывно нарастает, но пока оно еще не так велико, существенна роль случайностей (мелкие предприниматели то богатеют, то разоряются). Однако в итоге появляются настолько большие центры уплотнения (сверхмонополии), что судьба их окружения оказывается решенной: начинается «падение на центр», гравитационный коллапс, приостановить который может только... *сила Архимеда*, т.е. возрастающее давление звездного вещества. Но с ростом давления растет и температура – и вот рождается звезда, горячее тело начинает светиться. Когда температура в центре звезды превысит 10 миллионов градусов, там начинаются термоядерные реакции, приводящие к превращению водорода в гелий. Именно этот источник энергии обеспечивает таким звездам, как Солнце, долгую счастливую жизнь (около 10 миллиардов лет).

Как выйти из леса?

А.ЗАСЛАВСКИЙ, В.ПРОТАСОВ

Как нам быть и куда нам идти?
Как мы жили и правда ли жили?
Где свои, где ничьи, где чужие?
Что терять, где искать, как найти?

Л.Костюков

Днем, во втором часу,
Заблудилась принцесса в лесу.

Г.Сапгир. Принцесса и людоед

Как выйти из леса? Что за странный вопрос! Если есть навигатор или, на худой конец, карта и компас, то задача решается просто. Но если карты нет, а телефон разрядился? Тогда нужно идти все время прямо – когда-нибудь да выйдем. Однако эта стратегия опасна: если направление выбрано неудачно, то можно зайти очень далеко вглубь леса. Что же делать? Попробуем точно сформулировать задачу. Итак:

1. Нам неизвестно, в какой точке леса мы находимся, и неизвестны направления.

2. Что-то про лес мы все-таки знаем – скажем, его площадь, форму и т.д.

3. Мы можем идти по любому заранее выбранному маршруту. Например, пройти точно по кругу с заданным центром и радиусом 10 км или, скажем, пройти 5 км в данном направлении, затем повернуть на 60° и пройти 3 км и т.д.

Вопрос: как нужно идти, чтобы, пройдя по нашему маршруту, обязательно выйти из леса, независимо от начального положения и начального направления движения? Какова длина самого короткого маршрута, гарантирующего выход? Ответ, конечно, зависит от того, что мы знаем про лес.

Задача 1. *Каков кратчайший маршрут, обеспечивающий выход из леса, если мы знаем, что диаметр леса не превосходит 10 км?*

Диаметром фигуры называется расстояние между самыми далекими друг от друга точками этой фигуры. Таким образом, диаметр есть у любой ограниченной фигуры, а не только у круга.[1] Значит, нам известно, что лес не очень большой: расстояние между любыми двумя его точками не превосходит 10 км.

Решение. Проходим 10 км по прямой. Всё, мы обязательно выйдем из леса – либо к концу пути, либо еще раньше. Иначе лес будет содержать внутри себя отрезок длиной 10 км, а значит, диаметр леса будет больше 10 км.

И что, так просто? Идем по прямой наугад – и вся «стратегия»? Да. Более того, этот путь *оптимальный*. Это значит, что никакой путь длиной меньше 10 км не может гарантировать выход из леса. В самом деле, пройдем по любому пути длиной меньше 10 км. Обозначим его длину через d. А теперь накроем этот путь очень узкой полоской. Если A и B – любая пара точек на нашем пути, то длина отрезка AB не превосходит длины участка пути от A до B (поскольку кратчайший путь между двумя точками проходит по прямой), а значит, $AB \le d$. Итак, диаметр нашего пути, если его рассматривать как плоскую фигуру, не превосходит d. Поскольку $d < 10$ км, если полоска достаточно узкая, ее диаметр также будет меньше 10 км. А теперь представим, что лес – это наша полоска. Диаметр леса меньше 10 км, но мы так из него и не вышли (ведь полоска содержит внутри себя весь наш путь).

Конечно, это была простая ситуация. А вот посложнее.

[1] Все фигуры считаем замкнутыми, т.е. содержащими свою границу.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20200902

Иллюстрации М.Кашина

Задача 2. *Площадь леса* 16 *км*^{2}*, и в нем нет полян. Каков кратчайший путь выхода из леса?*

Нет полян – значит, лес сплошной, без «дырок».

Решение. Идем по границе круга площадью 16 км^2 и обязательно выходим из леса. Иначе говоря, проходим всю окружность радиусом $\sqrt{\frac{16}{\pi}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} = 2,256\ldots$ км. Направление начального движения (т.е. положение центра окружности) не важно. При этом длина пути составит $2\pi\frac{4}{\sqrt{\pi}} =$

$= 8\sqrt{\pi} = 14,179\ldots$ км.

То, что мы выйдем из леса, понять легко. Если лес содержит внутри себя весь путь – окружность, то он содержит и весь круг (полян нет!), а значит, его площадь должна быть больше 16 км^2.

А что будет, если мы идем не по кругу, а, скажем, по квадрату той же площади? Выйдем ли мы из леса? Конечно. И доказательство такое же. Но при этом мы пройдем больше – сторона квадрата площади 16 км^2 равна 4 км, поэтому длина пути равна 16 км. Круг в данной задаче является оптимальной фигурой. Для доказательства нам понадобится следующий факт.

Факт. *Среди всех кривых заданной длины наибольшую площадь ограничивает окружность.*

Факт этот известен всем. Даже маленький ребенок в магазине игрушек восклицает «Это всё мое, мое!», складывая руки в круг, демонстрируя тем самым, что именно круг вмещает больше всего. Данное свойство круга называется *изопериметрическим* (в переводе с греческого – «равнопериметрическим»). Итак, из всех фигур с равными периметрами именно круг имеет бóльшую площадь. Несмотря на геометрическую очевидность, это довольно сложно обосновать. Известно изопериметрическое свойство с глубокой античности, оно имеет массу объяснений, как геометрических, так и физических, и даже философских. Но строго доказано оно было лишь в XIX веке (см. [1,2]).

Докажем оптимальность кругового маршрута. Если наш маршрут незамкнутый, то его можно поместить в тонкую полоску маленькой площади. Если лес занимает эту полоску, то он, даже при длинном маршруте, может иметь сколь угодно маленькую площадь. А маршрут из леса не выведет. Таким образом, мы смотрим только на замкнутые маршруты. Из изопериметрического свойства круга следует, что замкнутый маршрут длины $8\sqrt{\pi}$ км (или меньшей) не может ограничивать площадь большую, чем окружность той же длины, т.е. площадь 16 км^2. Если лес является фигурой, ограниченной нашим маршрутом, то его площадь не превосходит 16 км^2, и мы проходим $8\sqrt{\pi}$ км, не выходя из леса (хотя, возможно, часть пути идем по краю, не замечая этого). Противоречие. Оптимальность круга доказана.

Итак, для леса без полян круговой маршрут оптимален. А что будет при дополнительном предположении, что лес выпуклый?

Задача 3. *Площадь леса 16 км^2, и лес выпуклый. Каков теперь кратчайший путь выхода из леса?*

Фигура называется *выпуклой*, если вместе с любыми двумя своими точками она целиком содержит отрезок, соединяющий эти точки. Окружность невыпукла, а круг выпуклый. Выпуклые фигуры изучает красивая и содержательная область математики – *выпуклая геометрия*. Ее результаты лежат в основе *выпуклой оптимизации*, имеющий широкие применения в современном мире.

Решение. Выпуклый лес не имеет полян. Иначе можно взять точки на разных концах поляны и соединить их отрезком. Отрезок пройдет через поляну, что противоречит выпуклости леса. И раз полян нет, круговой маршрут из задачи 2 также годится для выпуклого леса. Но будет ли он оптимальным?

Предположим, мы прошли a км и пришли из точки A в точку B. Если мы так и не вышли из леса, то лес целиком содержит наш маршрут. А поскольку лес выпуклый, он содержит и отрезок AB. Итак, лес содержит фигуру, ограниченную замкнутой кривой: наш маршрут + отрезок AB. Какова максимальная площадь такой фигуры? Обозначим эту площадь через S. Изопериметрическое свойство применять нельзя, поскольку длина кривой неизвестна – мы не знаем длину AB. Поэтому поступим так: отразим путь симметрично относительно прямой AB. Наш путь вместе с отраженным образуют замкнутую кривую длины $2a$, ограничивающую фигуру площади $2S$. К этой фигуре применяем изопериметрическое свойство и приходим к выводу, что ее площадь максимальна, когда она ограничена окружностью длины $2a$. Следовательно, *оптимальный путь – полуокружность длины a, т.е. радиусом* $\frac{a}{\pi}$. Площадь ограничиваемого полукруга должна быть равна 16 км^2, откуда

$$16 = \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{\pi}\right)^2 = \frac{a^2}{2\pi}.$$

Следовательно, $a = 4\sqrt{2\pi}$ и $R = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$.

Итак, *мы должны идти по полуокружности радиусом* $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \approx 3{,}191\ldots$ км. Это – оптимальный путь. Его длина составляет $a = 4\sqrt{2\pi} \approx 10{,}026\ldots$ км. Для сравнения: круговой маршрут имеет длину $8\sqrt{\pi} \approx$ $\approx 14{,}179\ldots$ км.

Признаемся, что элегантный трюк с симметрией придумали не мы (знающий читатель, конечно, заметил это). Так решается задача Дидоны об огораживании максимального участка земли от прямого берега моря (см. [1,2]).

Подведем некоторые итоги. Человек находится внутри леса. Он знает форму леса, но не имеет (или имеет неполную) информации о своем местоположении. Требуется найти траекторию наименьшей длины, гарантирующую выход из леса при любой начальной точке и любом направлении движения. По-видимому, такие задачи впервые были рассмотрены в 1954 году выдающимся американским математиком Р.Беллманом[2] в книге [4] и получили название «задачи о выходе из леса». А в 1961 году замечательный советский геометр В.А.Залгаллер[3] в своей статье [3] приводит решения нескольких подобных

[2] Ричард Эрнест Беллман (1920–1984) — американский математик, один из основателей теории оптимального управления и динамического программирования.

[3] Виктор Абрамович Залгаллер (1920–2020) – советский математик, известный работами по многогранникам, дифференциальной геометрии, выпуклой оптимизации. Много сделал для развития математического образования. Из его кружка вышли несколько выдающихся математиков.

задач. Одну из них мы рассмотрим сейчас. На этот раз лес бесконечен. Для простоты мы будем пользоваться безразмерными единицами длины.

Задача 4. *Лес имеет форму бесконечной полосы ширины* 1. *Каков кратчайший путь выхода из такого леса?*

Решение. Будем следовать статье Залгаллера. Нам понадобятся два вспомогательных утверждения. Кривую без самопересечений будем называть *дугой*. Ясно, что кратчайший путь надо искать именно среди дуг. Дугу будем называть *выпуклой*, если она вместе с отрезком, соединяющим ее концы, ограничивает выпуклую фигуру.

Лемма 1. *Существует путь минимальной длины. Он является выпуклой дугой.*

А что тут доказывать? Ну конечно существует кратчайший путь, это же очевидно! Увы, в некоторых задачах на поиск минимума/максимума оптимальное решение не достигается. Более того, именно существование решения порой труднее всего доказать. А не доказывать нельзя – иначе можно прийти к абсурдным выводам (см. несколько примеров в [2]). Данная задача – не исключение. Поэтому лемма 1 очень важна. Но доказывать ее здесь мы все-таки не будем, а примем ее без доказательства и отошлем заинтересованного читателя к статье [3].

Выясним теперь, какими свойствами должна обладать кратчайшая кривая, назовем ее L. Нам понадобится понятие *опорной прямой* выпуклой фигуры. Это прямая, которая имеет с данной фигурой общие точки, но при этом вся фигура лежит по одну сторону от прямой. Например, опорные прямые круга – это касательные. А опорные прямые треугольника – это три прямые, содержащие его стороны, а также прямые, проходящие через его вершины и не имеющие других точек с треугольником.

Лемма 2. *Концы A, B кратчайшей кривой L не совпадают друг с другом, и L расположена между перпендикулярами к отрезку AB в его концах.*

Доказательство. Проведем перпендикулярные к прямой AB опорные прямые к L, изображенной синим цветом (рис.1). Если

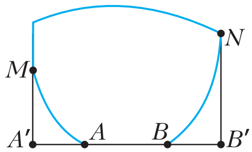


Рис. 1

точки A', B' не совпадают с A и B соответственно, то, заменив дуги MA, NB отрезками MA', NB', мы получим кривую короче L, которая, очевидно, также не помещается в полосе.

Обозначим теперь длину отрезка AB через x, а прямую AB через a. Из леммы 2 следует, что $x \geq 1$, а L лежит внутри полуполосы, ограниченной отрезком AB и перпендикулярами a, b к нему в его концах. Пусть CC', DD' – четверти дуг окружностей единичного радиуса с центрами A и B соответственно (рис. 2). Так как L не

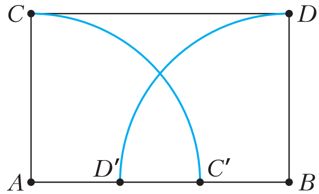


Рис. 2

помещается в единичной полосе, она должна достигать в какой-то точке отрезка CD. Кроме того, на пути от A до CD дуга L не должна пересекать сектор BDD', а на пути от CD до B – сектор ACC'. Будем для каждого фиксированного $x \geq 1$ искать кратчайшую из кривых, обладающих этими свойствами.

Пусть M – точка, в которой искомая кривая достигает отрезка CD. Тогда ее участок AM либо является отрезком, либо состоит из касательных, проведенных из точек A, M к дуге DD', и дуги между точками касания (докажите это!). Аналогичное утверждение верно и для участка MB. Кроме того, для кратчайшей кривой M должна совпадать с серединой отрезка CD или с одним из его концов. Действительно, в противном случае можно провести прямую, параллельную CD и достаточно близкую к ней, которая отсечет от кривой треугольник. Заменив этот треугольник равнобедренным с теми же основанием и высотой, мы уменьшим длину кривой. Теперь докажите самостоятельно, что при $M = C$ или $M = D$ кривая также не будет кратчайшей.

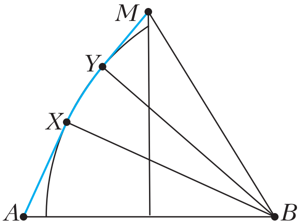


Рис. 3

Таким образом, при любом x кратчайшей будет симметричная кривая $L(x)$, состоящая из кратчайших путей, соединяющих точки A и B с серединой M отрезка CD. Найдем теперь, при каком x такая кривая имеет наименьшую длину. При $x \geq 2/\sqrt{3}$ кратчайшие пути AM, MB являются отрезками, длины которых возрастают с ростом x, поэтому надо найти минимум длины $L(x)$ при $1 \leq x \leq 2/\sqrt{3}$.

Пусть AX, MY – касательные из точек A, M к дуге DD' (рис. 3), $\alpha = \angle ABX$, $\beta = \angle MBY = \pi/2 - \angle ABM$. Тогда $\cos\alpha = 1/x$, $\operatorname{tg}\beta = x/2$, $\angle XBY = \pi/2 - 2\beta$ и, следовательно, длина кривой $AXYM$ равна

$$\sqrt{x^2-1} + x/2 + \pi/2 - \arccos(1/x) - 2\operatorname{arctg}(x/2).$$

Для того чтобы найти минимум этой функции, исследуем ее с помощью производной. Производная обращается в ноль в единственной точке $x \approx 1{,}0436$, при этом длина кривой $L(x)$ примерно равна $2{,}278\ldots$

Заметим, что найденная кривая является оптимальной также для леса, имеющего форму прямоугольника с достаточно большим отношением сторон. Но для прямоугольников, близких к квадрату, решение авторам неизвестно.

Мы разобрали четыре задачи о выходе из леса. В них человек знает некоторые геометрические параметры леса, но не имеет представления о своем местоположении. Если же человеку что-то известно о том, где он находится (скажем, на каком расстоянии от границы леса), то это уже другой тип задач. Как ни странно, порой более сложный.

Задача 5. *Лес имеет форму полуплоскости, а человек находится на расстоянии 1 от ее границы. Каков кратчайший путь выхода из леса в этом случае?*

В решении мы используем еще одно понятие из выпуклой геометрии. *Выпуклая оболочка* произвольного множества точек A – это наименьшее выпуклое множество, содержащее A. Наименьшее – значит, оно лежит в любом выпуклом множестве, содержащем A. Выпуклая оболочка есть у каждого множества. Например, выпуклая оболочка двух точек – отрезок, соединяющий данные точки. Выпуклая оболочка трех точек, не лежащих на одной прямой, – треугольник с вершинами в данных точках. Выпуклая оболочка окружности и точки вне ее ограничена двумя касательными из точки к окружности и дугой, соединяющей точки касания. На рисунке 4 изображена выпуклая оболочка окружности и не

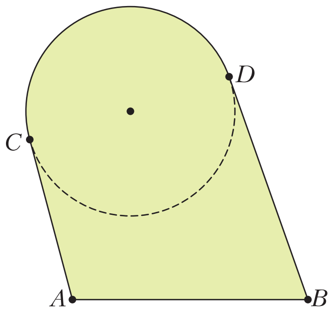


Рис. 4

пересекающего ее отрезка AB, она ограничена отрезком, касательными AC и BD к окружности и дугой CD. Выпуклую оболочку фигуры можно строить по такому правилу: выпуклая оболочка ограничена всеми опорными прямыми к данной фигуре.

Решение. Пусть K – единичный круг с центром в точке O, где находимся мы. Если выпуклая оболочка пути не содержит круг K, то к нему можно провести касательную l, не пересекающую нашего пути (рис. 5). Очевидно, что в этом случае путь не гарантирует выход из леса. С другой стороны, если K содержится в выпуклой оболочке,

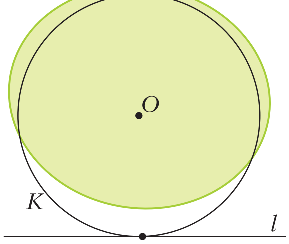


Рис. 5

то любая касательная к этому кругу пересекает наш путь, и выход гарантирован. Поэтому оптимальный путь должен состоять из отрезка OX, ведущего в некоторую точку X, лежащую вне или на границе K и дуги XY, выпуклая оболочка которой содержит K.

Лемма 3. *Для кратчайшей кривой отрезок XY касается K, а кривая XY состоит из касательных XA, YB к K и ограничивающей его дуги AB.*

Доказательство. Для любой кривой XY, выпуклая оболочка которой, назовем ее F, содержит круг K, можно построить кривую, удовлетворяющую условию леммы, выпуклая оболочка которой также содержит K и содержится в F. (Можно представить себе, что в точках X, Y вбиты гвозди, к которым прикреплена охватывающая K резинка. Очевидно, что резинка примет форму, указанную в условии леммы.)

Таким образом, задача сводится к следующей. Пусть прямая l касается K в некоторой точке C. Выберем точки A, B на границе K и проведем в них касательные, пересекающие l в точках X, Y соответственно. Требуется минимизировать длину кривой $OXABY$ (рис. 6).

Обозначив углы $\angle AOC = \alpha$, $\angle BOC = \beta$, получим, что длина пути равна $1/\cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + 2\pi - 2\alpha - \beta$. Минимум этой функции достигается при $\alpha = \pi/6$, $\beta = \pi/2$ и равен 6,395…

Итак, мы нашли путь для выхода из леса и доказали его оптимальность. Это путь, изображенный на рисунке 6.

Интересно, что в книге Беллмана и в статье Залгаллера приведен более длинный путь. А оптимальное решение, которое мы сейчас нашли, было впервые получено американским математиком Джоном Исбеллом в 1957 году в его статье [5]. Беллман назвал это решение гениальным («The author solves this problem in an ingenious fashion …»). Интересно также, что Залгаллер в своей статье [3] ссылается на решение Исбелла, но воспроизводит его неверно, получая тем самым неоптимальный путь. Мы подозреваем, что американский «Флотский журнал», в котором была напечатана статья Исбелла, был в то время в нашей стране недоступен, и Виктор Абрамович вынужден был пользоваться данными «Реферативного журнала», в котором публикуются краткие описания научных статей. А эти описания могли быть неточны.

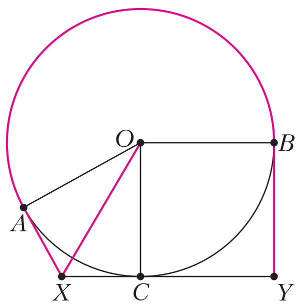


Рис. 6

1954 год, 1957 год, 1961 год… Для молодого читателя это – доисторические даты. А есть ли интерес к этой теме сейчас? Да! Например, следующая задача прозвучала совсем недавно: в 2019 году она предлагалась на Геометрической олимпиаде имени И.Ф.Шарыгина. И хотя в ней речь идет о причаливании корабля к берегу, она относится к тому же типу задач о выходе из леса.

Задача 6. *Корабль в тумане пытается пристать к берегу. Экипаж не знает, в какой стороне находится берег, но видит маяк, находящийся на маленьком острове в 10 км от берега, и понимает, что расстояние от корабля до маяка не превышает 10 км (точное расстояние до маяка неизвестно). Маяк окружен рифами, поэтому приближаться к нему нельзя. Может ли корабль достичь берега, проплыв не больше 75 км? (Береговая линия — прямая, траектория до начала движения вычерчивается на дисплее компьютера, после чего автопилот ведет корабль по ней.)*

Если бы не было условия, запрещающего приближаться к маяку, то, подплыв к нему вплотную, мы свели бы задачу к задаче 5 и получили бы траекторию с

длиной, меньшей 74 км. Впрочем, решением задачи 5 все равно можно воспользоваться. Пусть корабль находится в точке K, маяк – в точке M, а K' – точка на луче KM такая, что $KK' = 10$ км. Чтобы корабль причалил к берегу, выпуклая оболочка его траектории должна содержать круг с центром M и радиусом KK', но, поскольку положение точки M на отрезке KK' неизвестно, выпуклая оболочка должна содержать объединение всех таких кругов с центрами на KK'. Ясно, что это условие будет и достаточным.

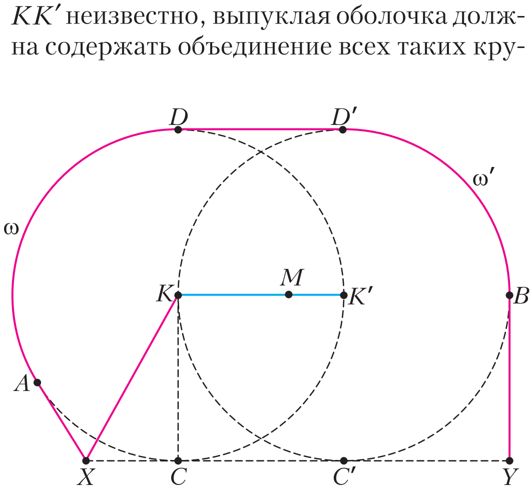


Рис. 7

Пусть ω, ω' – окружности с центрами K, K' соответственно и радиусами, равными KK'; CC' и DD' – общие касательные к этим окружностям; X – точка на прямой CC' такая, что $\angle XKC = 30°$; XA – касательная к ω; B – середина дуги $C'D'$, лежащей вне ω; Y – проекция B на CC' (рис. 7). Тогда путь $KXADD'BY$ удовлетворяет условию, а его длина равна $10\left(\sqrt{3} + 2\pi/3 + 1 + \pi/2 + 1\right)$ км < 74 км.

Повторяя рассуждение из решения задачи 5, мы приходим к выводу, что указанный путь является кратчайшим среди всех, для которых прямая XY совпадает с CC'. Интуитивно кажется очевидным, что кратчайший путь должен удовлетворять этому условию, но доказательство авторам неизвестно. Возможно, читатель сможет его найти.

Задачи о выходе из леса имеют непосредственные практические приложения. И их не следует понимать буквально: к «выходу из леса» они часто не имеют никакого отношения. Это и построение оптимальных стратегий, и теория игр, и динамическое программирование. Достаточно упомянуть, что Дж.Исбелл выбрал для своей статьи именно «Флотский журнал», который посвящен прикладным инженерным и экономическим проблемам морских перевозок. Много прикладных аспектов «выхода из леса» можно найти в книге [6]. Есть ли в этой науке нерешенные задачи? Конечно! Они связаны как с различными формами леса, так и с иными постановками самой проблемы. Например, на практике нас интересует не столько путь, обеспечивающий выход *всегда*, сколько – обеспечивающий выход *с высокой вероятностью*. А такой путь может быть значительно короче! Иногда задача ставится о минимизации среднего времени выхода, т.е. *математического ожидания*.

В заключение предлагаем вам попробовать свои силы в решении еще нескольких задач.

7. Лес имеет форму единичного круга. Докажите, что кратчайшей траекторией выхода из леса является отрезок длины 2.

8. Лес имеет форму круга радиусом 10, а человек находится в лесу на расстоянии 1 от его границы.

а) Обеспечивает ли путь из задачи 5 выход из леса?

б) Существует ли более короткий путь?

9. Лес имеет форму прямого угла, а человек находится на расстоянии 1 от его вершины. Можно ли выйти из леса, пройдя расстояние, не большее 3?

10. Лес имеет форму квадрата. Можно ли выйти из него, пройдя расстояние, меньшее диагонали квадрата?

11. Лес имеет форму правильного треугольника. Можно ли выйти из него, пройдя расстояние, меньшее стороны треугольника?

В последних четырех задачах авторы не знают, какой путь является кратчайшим.

Литература

1. *В.М.Тихомиров*. Рассказы о максимумах и минимумах. – Библиотечка «Квант», вып. 56. – М.: Наука, 1986.

2. *В.Ю.Протасов*. Максимумы и минимумы в геометрии. – Библиотека «Математическое просвещение», вып. 31. – М.: МЦНМО, 2005.

3. *В.А.Залгаллер*. Как выйти из леса? (Об одной задаче Беллмана). – «Математическое просвещение», сер. 2 (1961), № 6, с.191–195.

4. *R.Bellman*. Dynamic Programming. – Princeton University Press, 1957.

Русский перевод: *Р.Беллман*. Динамическое программирование. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960.

5. *J.R. Isbell*. An optimal search pattern. – Naval Research Logistics Quart Ferly, 4 (1957), 357–359.

6. *P.J.Nahin*. Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion. – Princeton University Press, 2007.

Вячеслав Викторович Произволов

Вот уже год как не стало замечательного математика Вячеслава Викторовича Произволова. Читателям «Кванта» он в первую очередь известен как задачный композитор, обладающий уникальным чутьем и вкусом. С конца 1990-х до середины 2000-х Вячеслав Викторович заведовал «Задачником «Кванта». В его ярких задачах всегда просматривается незабываемый изящный авторский почерк. В этом и ближайших номерах мы вспомним некоторые из его замечательных задач.

На семинаре учителей математики, посвященном памяти Вячеслава Викторовича, выступила его дочь, учитель математики Александра Вячеславовна Дроботова. Приводим здесь текст ее рассказа.

ВЯЧЕСЛАВ ВИКТОРОВИЧ РОДИЛСЯ незадолго до войны, в 1939 году.

Одним из первых его воспоминаний и впечатлений было удивление: он сидит на коленях у деда, а дед протягивает ему кусок фанеры и говорит: «Кушай, внучек!» Оказалось, это была вафля!

Первые шаги на научном поприще вряд ли можно назвать удачными. Папа рассказывал, как он ходил в первый класс: выходил из дому, в соседнем дворе прятал портфель и шел по своим делам. К обеду забирал портфель и возвращался домой. Когда тайное стало явным, последовало громкое возмездие. И дальше процесс учебы развивался примерно в этом же духе.

Математикой папа заинтересовался в пионерском лагере, после 8 класса. Друг предложил решить несколько логических задач, Слава решил и, очарованный, спросил: «Что это?» Оказалось, математика.

В результате в выпускном классе работу папы на Московской математической олимпиаде заметил Андрей Николаевич Колмогоров. Участникам было предложено несколько задач. Приступив к одной из них, папа не заметил или не увидел одно из условий, получилась задача с неполными исходными данными. Все время, отведенное на олимпиаду, папа потратил на эту задачу, провел целое исследование. Видимо, удачно, потому что за решение этой задачи он получил поощрительную премию.

В 1956 году Вячеслав Викторович поступил на мехмат МГУ. Первые годы работал с Андреем Николаевичем Колмогоровым и Павлом Сергеевичем Александровым. Вернее, конечно, академики работали с ним. Где-то в это время появилась так называемая теорема Произволова – что-то связанное с топологией. Когда я приставала, чтобы Вячеслав Викторович объяснил мне суть теоремы, он морщился и махал рукой. На третьем курсе пришла пора выбрать научного руководителя. После бурных всеобщих переживаний руководителем стал Павел Сергеевич Александров. Область

В центре – Павел Сергеевич Александров, справа – Вячеслав Викторович Произволов (выпускной вечер в МГУ, 1961; фото Е. Ермаковой) научных интересов студента Произволова – топология. Затем аспирантура, преподавание на мехмате, участие в научных симпозиумах, конференциях, защита диссертации, около 15 научных статей.

Долгое время он преподавал в ВЗМИ (Всесоюзном заочном машиностроительном институте). Читал в том числе теорию вероятностей и статистику. Была у Вячеслава Викторовича знаменитая лекция про колбасу. Суть в том, что некое событие происходит не по одной какой-то причине, а по совокупности нескольких причин, каждая из которых имеет свой вес. Так вот папа начинал лекцию с вопроса: «Почему колбасу режут наискосок?» Постепенно аудитория разогревалась, и высказывались самые разные версии ответов, от шуточных до строго научных. Например, что руке так удобнее двигаться, что кусок колбасы так больше: бутерброд вкуснее, и даже, что, согласно науке, вероятность того, что угол будет в точности равен 90 градусов, равна 0. Причин десять Вячеслав Викторович выписывал на доске, а затем снова спрашивал: «Так почему колбасу режут наискосок?»

После работы во ВЗМИ Вячеслав Викторович работал в ЦНИИ Госстроя. Вот, например, одна из задач, которые там решались. Нужно подобрать размер ячейки металлической сетки, которую натягивают на стройке вдоль перекрытий так, чтобы сквозь сетку не проваливался инструмент. Чем крупнее ячейка, тем дешевле, чем мельче, тем надежнее.

С этого времени Вячеслав Викторович начинает составлять задачи. Как он объяснял, нужно было поле для игры ума. Началось многолетнее сотрудничество с «Квантом». Затем работа в МИРОСе (Московском институте развития образовательных систем), организация и участие летних математических выездов под Кострому, отбор задач для Московской математической олимпиады. Появилась книжка «Задачи на вырост».

Так получилось, что сама я никогда не решала папиных задач с листа, из журнала или книжки. Некоторые из задач или их элементы папа давал мне во время прогулок. Мы с папой шутили, что он приверженец перипатетиков: любил обучать на ходу, во время прогулки. Например, когда я слышу слова «теорема Пифагора», мне до сих пор вспоминаются пифагоровы штаны, нарисованные прутиком на снегу.

Вячеслав Викторович Произволов (начало 90-х)

Вячеслав Викторович был очень разносторонним человеком, блестящим собеседником. Он увлекался минералогией, классической музыкой, историей, философией, поэзией. Его можно было заслушаться.

Что касается проблем математического образования, Вячеслава Викторовича всегда приводило в желчное настроение появление очередной методички с названием вроде «Математика легко и весело». Он очень злился, говорил, что не надо, нельзя делать вид, что изучать математику – это просто. Это серьезный труд. Важно, что это может быть интересным. Подтверждение тому – его задачи.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Автор задач Ф2625–Ф2628 – С.Варламов

Задачи М2618–М2621, Ф2625–Ф2628

М2618. Для данного числа α пусть f_α – функция, определенная как $f_\alpha(x) = \left[\alpha x + \frac{1}{2}\right]$, где квадратными скобками обозначена целая часть числа. Пусть $\alpha > 1$ и $\beta = 1/\alpha$. Докажите, что для любого натурального n выполнено соотношение

$$f_\beta(f_\alpha(n)) = n.$$

И.Дорофеев

М2619. Пусть даны целые неотрицательные числа $a \le b \le c$. Треугольник на клетчатой плоскости с вершинами в узлах сетки назовем (a, b, c)-треугольником, если на одной его стороне расположено ровно a узлов (не считая вершин), на другой стороне – ровно b узлов, а на третьей стороне – ровно c узлов.

а) Существует ли $(9, 10, 11)$-треугольник?

б) Найдите все тройки целых неотрицательных чисел $a \le b \le c$, для которых существует (a, b, c)-треугольник.

в) Для каждой такой тройки найдите минимальную возможную площадь (a, b, c)-треугольника.

П.Кожевников

М2620. Какое наименьшее количество спутников надо запустить над шарообразной планетой, чтобы в некоторый момент с каждой точки поверхности планеты были доступны сигналы хотя бы двух спутников? Спутник считается доступным из точки A поверхности планеты, если он находится относительно касательной плоскости, проведенной в точке A, строго по другую сторону, нежели сама планета.

С.Волчёнков

М2621. Дан треугольник ABC, в котором $AB < BC < CA$. Вневписанные окружности касаются сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Через точки A_1, B_1 и C_1 проведена окружность, которая вторично пересекает стороны BC, CA, AB в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно. На какой из сторон треугольника может лежать наибольший из отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2?

И.Вайнштейн

Ф2625. У Васи есть несколько одинаковых шариков с резиновой оболочкой, заполненных гелием. Если такой шарик отпустить в спокойном воздухе, то он поднимается вверх с установившейся скоростью 3 м/с. Вася взял с собой несколько шариков и на электричке поехал на дачу. Дорога ведет на север, и электричка едет со скоростью 12 м/с. Погода ветреная, и над землей дует восточный ветер со скоростью 4 м/с. Один из шариков Вася выпустил «на свободу» из окна электрички. На каком примерно расстоянии от Васи окажется этот шарик через 2 минуты?

Ф2626. Кеша и Тучка, находясь в своих домиках, одновременно получили СМСсообщения от Лисички с информацией, что яблочный пирог уже готов, и тут же бросились бежать к дому Лисички. Кеша половину времени бежал со скоростью 5 м/с, а оставшуюся половину времени – со скоростью 4 м/с (устал). Тучка первую половину пути пробежал со скоростью 4 м/с, а вторую половину пути – со скоростью 5 м/с. В результате оба прибежали к Лисичке одновременно. Каково расстояние от дома Кеши до дома Лисички в шагах Цыпы, если расстояние от дома Тучки до дома Лисички равно 800 шагов Цыпы?

Ф2627. Вася собрал электрическую схему, которая изменяет мощность W электрического нагревателя по линейному закону от времени t, прошедшего после включения нагревателя: $W = W_0 \cdot t/\tau$, где $W_0 = 100$ Вт, $\tau = 10$ с. Этот нагреватель помещен на дно банки с водой. Начальная температура воды 20 °С. Пренебрегая теплоемкостью банки и потерями тепла в окружающую среду, найдите, сколько воды было в банке, если она вскипела через 5 минут. Удельная теплоемкость воды 4,2 Дж/(г·°С). Давление воздуха нормальное.

Ф2628. В однородном магнитном поле с индукцией B движется электрон, и его скорость всегда перпендикулярна полю. В момент начала наблюдений скорость электрона $v \ll c$ (здесь c – это скорость света). Через какое время скорость его движения станет в 2 раза меньше? Мощность W излучения нерелятивистской электрически заряженной частицы, движущейся с ускорением a, пропорциональна квадрату произведения ускорения на заряд q частицы: $W = (qa)^2 \cdot A$, где A – постоянная величина, зависящая от выбора системы единиц. Получите численный ответ для случая, когда $B = 1$ Тл, $v = c/100$. Как изменится ответ для времени, если в том же поле и с той же начальной скоростью будет двигаться протон?

Решения задач М2606–М2609, Ф2613–Ф2616

М2606. Решение этой задачи приведено в статье К.Кнопа «Шесть перпендикуляров».

М2607. *Дано натуральное число n. Множество A, составленное из натуральных чисел, таково, что для любого натурального числа $m \le n$ во множестве A есть число, делящееся на m. Какое наименьшее значение может принимать сумма всех элементов множества A?*

Ответ: $\dfrac{(3k+2)(k+1)}{2}$ при нечетном $n = 2k+1$; $\dfrac{(3k+1)k}{2}$ при четном $n = 2k$.

Пример. При нечетном $n = 2k+1$ искомое множество A образуют числа $k+1$, $k+2$, …, $2k+1$; при четном $n = 2k$ – числа $k+1$, $k+2$, …, $2k$.

Оценка. Докажем лемму.

Лемма. Пусть даны натуральные $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$, при этом $a_m < 2a_1$. Тогда $\text{НОК}(a_1, a_2, \ldots, a_m) \ge a_1 + a_2 + \ldots + a_m$.

Доказательство. Пусть $\text{НОК}(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ равен $M = a_1b_1 = a_2b_2 = \ldots = a_mb_m$. Тогда $2b_m > b_1 > b_2 > \ldots > b_m$. Следовательно, $b_m = 2b_m - b_m \ge m$, откуда $M \ge ma_m \ge a_1 + \ldots + a_m$.

Лемма доказана.

Пусть теперь A – множество, удовлетворяющее условиям задачи. Каждому натуральному числу из указанных в примере сопоставим одно из делящихся на него чисел множества A. Тогда каждое число из A делится на НОК всех сопоставленных ему чисел и, стало быть, не меньше суммы этих чисел, а сумма всех чисел из A – не меньше суммы, указанной в ответе. Задача решена.

Отметим, что ключевая лемма идейно близка к известной красивой задаче М666 А.Разборова: Докажите, что наименьшее общее кратное n натуральных чисел $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ не меньше na_1.

А.Кузнецов

М2608. *Из четырех реек сделали шарнирный выпуклый четырехугольник. Затем две точки на его противоположных сторонах соединили еще одной рейкой (рис.1), но конструкция осталась нежесткой. Следует ли из этого, что данный четырехугольник – параллелограмм?*

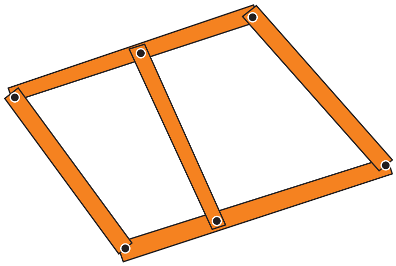


Рис. 1

Ответ: да.

Поймем вначале, насколько определяется четырехугольник $ABCD$ (рис.2), отличный от параллелограмма, заданием длин сторон и векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ (иначе говоря, длинами сторон и углом между противоположными сторонами). Для этого рассмотрим параллелограмм $ABCK$. Треугольник AKD фиксирован двумя векторами сторон. Кроме того, длины CD и $CK = AB$ фиксированные, поэтому в треугольнике CKD зафиксированы все три длины сторон, значит, для точки C есть не более двух положений (в последнем рассуждении важно, что точки K и D различны, т.е. что $\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{BC}$). Отсюда следует, что при небольшой деформации шарнирного четырехугольника $ABCD$ (отличного от параллелограмма) угол t между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ не постоянный (принимает бесконечное множество значений).

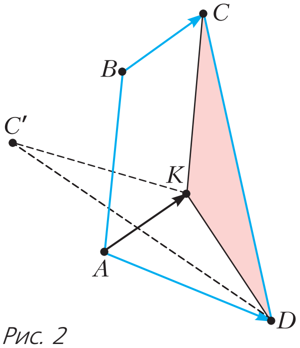


Рис. 2

Перейдем к задаче. Пусть $ABCD$ – четырехугольник, отличный от параллелограмма, точка E лежит на стороне AD, точка F – на BC. Предположим, что конструкцию можно деформировать с сохранением длин AB, CD, AE, ED, BF, FC, EF.

Обозначим $t = \angle\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}\right)$, $x = \angle(BA, FE)$, $y = \angle(FE, CD)$, тогда $z = \angle(BA, CD) = x + y$. Считаем, что мы уже чуть деформировали конструкцию так, что $AD \nparallel BC$.

Вернемся к дополнительному построению параллелограмма $ABCK$. В треугольниках AKD и CKD углы KAD и KCD равны t и z соответственно. Выражая по теореме косинусов сторону EK треугольников AEK и FEK, получим, что $\cos z$ линейно выражается через $\cos t$, т.е. $\cos z = \alpha \cos t + \beta$, при этом $\alpha \neq 0$. Аналогично, из четырехугольников $ABFE$ и $EFCD$ (они не параллелограммы) понимаем, что $\cos y$ и $\cos x$ также линейно выражаются через $\cos t$. Но при $z = x + y$ справедливо тождество

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 2\cos x \cos y \cos z - 1 = 0.$$

Заменив в этом тождестве $\cos x$, $\cos y$, $\cos z$ их выражениями через $\cos t$, получим многочлен третьей степени относительно $\cos t$ с ненулевым старшим коэффициентом. С другой стороны, этот многочлен должен иметь бесконечное количество корней – противоречие.

А.Заславский

М2609. *Дано натуральное $n \geq 2$. Все клетки таблицы $n \times n$ красят в несколько цветов так, чтобы не нашлось квадрата 2×2, состоящего из четырех клеток одного и того же цвета. Пестрым путем длины k будем называть последовательность различных клеток $a_1, a_2, \ldots, a_k$ такую, что для всех $1 \leq i \leq k-1$ клетки a_i и a_{i+1} имеют общую сторону и раскрашены в разные цвета. При каком наибольшем k в таблице найдется пестрый путь длины k вне зависимости от раскраски клеток таблицы?*

Ответ: $k = n$.

Приведем решение, которое придумал Палмер Мебейн (оригинальное авторское решение использовало похожие идеи, но было технически сложнее).

Сперва предъявим пример, показывающий, что нельзя гарантировать $k \geq n+1$. Покрасим столбцы поочередно в красный и зеленый цвета. В таком примере пестрый путь может быть лишь горизонтальным, значит, он не может содержать более n клеток.

Далее докажем, что всегда найдется пестрый путь длины не меньше n.

Предположим противное. Для каждой пары соседних по стороне одноцветных клеток a и b поставим *стенку* (единичный отрезок) на их общую сторону. После «возведения стен» пестрый путь становится просто путем (по соседним клеткам), которые не проходит через стенку.

Так как никакой квадрат 2×2 не состоит из четырех одноцветных клеток, невозможно, чтобы 3 или 4 стенки сходились в одном узле решетки. Значит, в каждой вершине сходится не более двух стенок, поэтому стенки образуют несколько (непродолжаемых) попарно непересекающихся ломаных (некоторые из которых могут быть замкнутыми).

Если некоторый пестрый путь соединяет некоторую клетку нижнего ряда с некоторой клеткой верхнего ряда, то его длина не меньше n – противоречие. Значит, стенки должны отделять клетки нижнего ряда от клеток верхнего ряда. Следовательно, некая (незамкнутая) ломаная P, состоящая из стенок, должна начинаться в некотором узле A на левой стороне данной таблицы, а заканчиваться в некотором узле B правой стороны. При этом отметим, что A и B не являются углами (угловыми узлами) таблицы (поскольку в угле не сходится стенок). Также отметим, что первое и последнее звенья ломаной P горизонтальны.

Аналогично ломаной P определим ломаную Q, идущую от верхней стороны таблицы к нижней стороне. При этом первое и последнее звенья ломаной Q вертикальны. Очевидно, ломаные P и Q различны. Из предыдущего следует, что они должны пересекаться в некотором внутреннем узле таблицы, что противоречит нашему выводу о том, что различные ломаные из стенок не пересекаются.

Полученное противоречие завершает решение задачи.

Н.Белухов

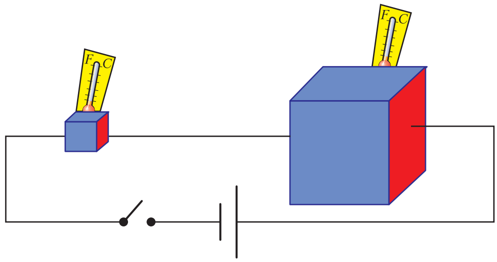
Ф2613.[1] *Для изучения циклона, который со средней скоростью 20 км/ч перемещался к северу, с одного аэродрома были направлены два беспилотных летательных аппарата – БПЛА – с разными полетными заданиями. Каждый аппарат должен был, оставаясь от центра циклона на расстоянии 20 км по горизонтали и двигаясь с постоянной скоростью относительно окружающего воздуха 20 м/с на определенной высоте (одинаковой для обоих аппаратов), облетать центр циклона. Один аппарат – по часовой стрелке (если смотреть сверху), а второй – против часовой стрелки. В момент старта расстояние от аэродрома до центра циклона как раз равнялось 20 км. Через 15 часов полета оба БПЛА практически одновременно приземлились на одном аэродроме, расположенном севернее аэродрома, с которого они взлетали, причем все время полета каждый строго выполнял заложенную в память компьютера программу полета. Сколько кругов вокруг центра циклона совершил один из БПЛА, если второй все время двигался по отношению к земле по прямой линии и не совершил ни одного круга?*

Если один из аппаратов двигался по прямой, то это означает, что его скорость по отношению к земле была такой же, как и скорость центра циклона, т.е. 20 км/ч. Иными словами, в движущейся поступательно системе отсчета, в которой центр циклона неподвижен, этот аппарат был неподвижен. Следовательно, на расстоянии 20 км от центра циклона скорость ветра в этой системе отсчета равна 20 м/с. А скорость другого аппарата в системе отсчета, связанной с циклоном, равна сумме относительной и переносной скоростей, т.е. равна 40 м/с. За 15 часов этот аппарат налетает такое расстояние, что сумеет совершить вокруг центра циклона

$$N = \frac{40\ \text{м/с} \cdot 15 \cdot 3600\ \text{с}}{2\pi \cdot 20 \cdot 10^3\ \text{м}} \approx 17\ \text{кругов}.$$

[1] Автор решений задач Ф2613–Ф2616 – С.Варламов.

Ф2614. *Сосуды кубической формы заполнены морской водой, и начальная температура воды 0 °С в обоих сосудах одинакова. Длины ребер кубов относятся как 1:3. Боковые стенки и дно каждого сосуда имеют очень малые теплоемкости и ток не проводят – за исключением правых и левых стенок. А эти левые и правые стенки сделаны из тонких медных листов. На короткое время ключ в цепи (см. рисунок) замыкают и снова размыкают*



его. В сосуде справа температура воды за короткое время протекания тока поднялась на 1 градус. Как изменилась за это же время температура в сосуде слева?

Поскольку ток через оба сосуда течет один и тот же и время его протекания тоже одинаково, то изменение температуры пропорционально сопротивлению и обратно пропорционально теплоемкости содержимого сосуда. Сопротивление обратно пропорционально длине ребра куба, а теплоемкость пропорциональна кубу длины ребра. В результате отношение изменений температур в левом и правом сосудах будет равно $3^4 : 1 = 81$. Значит, температура воды в сосуде слева поднялась на 81 градус.

Ф2615. *К идеальной батарейке через переменный резистор подключен вольтметр. Он показывает напряжение $U = 3$ В. Когда сопротивление переменного резистора уменьшили в три раза, вольтметр показал напряжение $2U = 6$ В. Что покажет вольтметр, если сопротивление резистора уменьшить еще в два раза?*

Соединение элементов электрической цепи последовательное. Если обозначить ЭДС батарейки через $\mathscr{E}$, сопротивление вольтметра через R, а начальное сопротивление переменного резистора через r, то можно записать такие два соотношения:

$$\frac{\mathscr{E}R}{R+r} = U,\quad \frac{\mathscr{E}R}{R+r/3} = 2U.$$

Отсюда получаем

$$\frac{r}{R} = 3 \text{ и } \mathscr{E} = 4U.$$

Теперь находим итоговое показание вольтметра:

$$U_1 = \frac{\mathscr{E}R}{R+\frac{r}{6}} = \frac{2\mathscr{E}}{3} = \frac{8U}{3} = 8 \text{ В}.$$

Ф2616. *Школьники создали систему телефонной связи с помощью нити и двух пластиковых стаканчиков (см. рисунок). Они использовали нить №20. Номер пряжи (нити) определяется количеством мотков, которые содержат 1 кг этой пряжи при длине нити в каждом мотке 1000 м. Длина телефонной линии $L = 100$ м. Сила натяжения нити $F = 10$ Н. С какой задержкой по времени в передаче звука работает такая телефонная линия?*

Скорость v движения звуковых волн по натянутой нити определяется тремя величинами: массой участка нити m, длиной этого участка L и силой натяжения F:

$$v = \sqrt{\frac{FL}{m}}.$$

Время задержки равно

$$\tau = \frac{L}{v} = \sqrt{\frac{mL}{F}}.$$

Если использовано 100 м нити №20, то эта нить имеет массу 5 грамм. Подставив в формулу для времени задержки все известные величины, получим оценку задержки этого времени:

$$\tau \approx 0{,}22 \text{ с}.$$

Шесть перпендикуляров

К. КНОП

Эта статья посвящена простейшей геометрической задаче на построение – настолько простой, что многие и задачей-то ее не считают.

Задача 1. *Даны две точки A и B. Как с помощью циркуля и линейки провести через A прямую, перпендикулярную AB?*

Казалось бы, в чем тут может быть сложность? Решение же очевидно.

Способ 1. Школьный

Проводим с помощью линейки прямую AB, а с помощью циркуля находим на ней точку C, симметричную B относительно A. Теперь нам нужно всего лишь построить серединный перпендикуляр к отрезку BC – это делается еще двумя окружностями и одной прямой (окружности с центрами C и B и прямая DE на рисунке 1).

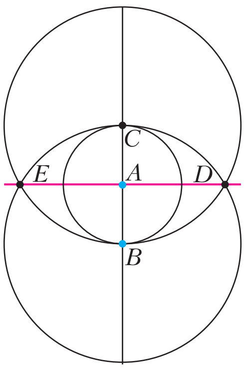


Рис. 1

Да, все правильно. Но нельзя ли побыстрее? Ведь нам потребовались для этого простого построения целых пять линий. А не хватит ли четырех?

И вот тут начинаются маленькие геометрические открытия. Безусловно, четырех линий хватает, причем по-разному.

Способ 2. Используем произвольную точку

Если провести (первой линией) прямую AB, то перпендикуляр к ней можно построить четвертой (а не пятой) линией, если использовать знаменитое свойство окружности: все углы, опирающиеся на диаметр, прямые.

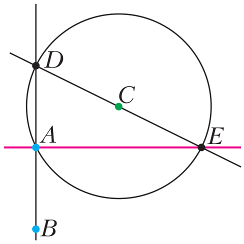


Рис. 2

Проводим через точку A окружность с произвольным центром C, как показано на рисунке 2 (вторая линия). Пусть она вторично пересечет AB в точке D. Если теперь (третья линия) провести через точку C диаметр DE, то прямая AE (четвертая линия) будет искомым перпендикуляром. Не правда ли, красиво и естественно?

Способ 3. Сведем задачу к построению касательной

Если провести через A окружность с центром B (первая линия), то искомая прямая должна быть касательной к этой окружности (рис.3). Чтобы построить эту касательную, возьмем произвольную точку C на окружности и проведем (вторая линия) окружность с центром C и радиусом CA. Пусть D – вторая точка пересечения окружностей. Тогда проводим (третья линия) окружность с центром A через точку D. В пересечении второй и третьей окружностей получаем точку E. Прямая AE – искомая.

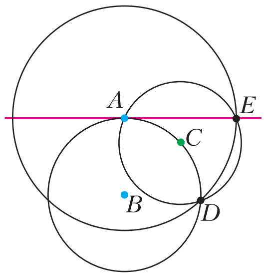


Рис. 3

Упражнение. Докажите, что AE – касательная к окружности с центром B и радиусом BA.

* * *

Теперь рассмотрим небольшую вариацию нашей задачи.

Задача 2. *Даны две точки A и B, лежащие на одной окружности. Центр окружности неизвестен. Как с помощью циркуля и линейки провести через A прямую, перпендикулярную хорде AB?*

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20200903

Казалось бы, чем помогает какая-то посторонняя окружность? Если бы ее центр был дан, то построение перпендикуляра было бы очевидным (см., например, линии 3 и 4 в способе 2). А поскольку центра в нашем распоряжении нет, то остается только игнорировать эту окружность. Так ведь?

Нет, не так! Парадоксально, но наличие даже «посторонней» окружности дает новые варианты построения перпендикулярной прямой.

Способ 4. Вписанный четырехугольник

Данная в условии окружность нарисована синим цветом (рис.4). Проведем прямую AB, а также окружность с центром A через точку B. Пусть E – точка пересечения этих прямой и окружности (т.е. точка, симметричная B относительно A), а D – точка пересечения двух окружностей.

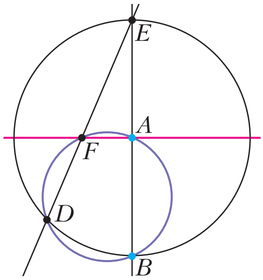


Рис. 4

Тогда третья линия – прямая DE; пусть F – точка ее пересечения с данной окружностью. Прямая AF – искомая.

Доказательство. Четырехугольник $ABDF$ – вписанный, поэтому сумма противоположных углов равна 180°. Так как $\angle BDE$ опирается на диаметр BE, то он прямой. Следовательно, $\angle BAF$ тоже прямой.

Способ 5. Произвольная окружность плюс две прямые

Как и в предыдущем способе, мы хотели бы построить точку F, диаметрально противоположную B в данной синей окружности. Но делать это будем совсем иначе.

Первый шаг – возьмем произвольный центр C и проведем окружность радиусом CB (рис.5). Если D – вторая точка ее пересечения с данной окружностью, а E – второй конец диаметра BC, то прямая DE пересечет синюю окружность в нужной

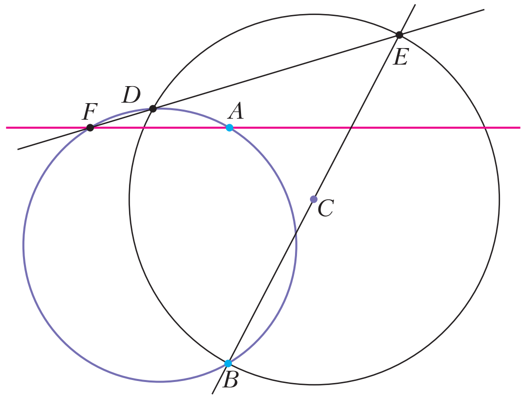


Рис. 5

точке F. Это напрямую следует из того, что угол BDE опирается на диаметр BE, а значит, является прямым. Следовательно, угол BDF также прямой, а так как вписанный угол BAF опирается на ту же дугу, то и он прямой.

Способ 6. Две окружности и одна прямая

Опять начинаем с произвольного центра окружности, но саму окружность проведем через точку A (рис.6). Пусть D – вторая точка ее пересечения с данной (синей) окружностью. Теперь строим (вторая линия) окружность с центром B радиусом BD. Эта окружность пересечет две предыдущие окружности в точках E и F. Тогда прямая EF пересекает первую из построенных нами окружностей в такой точке G, для которой угол GAB – прямой.

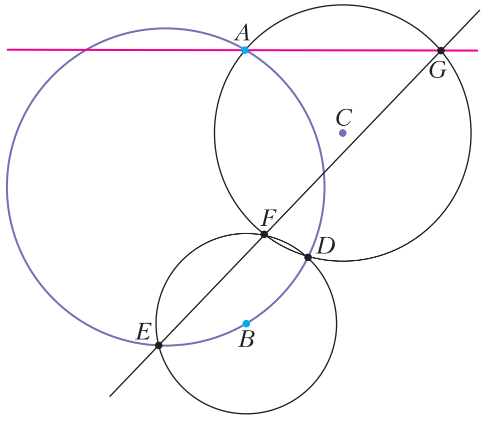


Рис. 6

Докажем, что в данной конструкции действительно $\angle GAB = 90°$. В этом состояло утверждение задачи М2606.

М2606. *Три окружности ω_1, ω_2, ω_3 проходят через одну точку D и пересекаются вторично в точках A, E, F, как показано на рисунке 7. Известно, что ω_3*

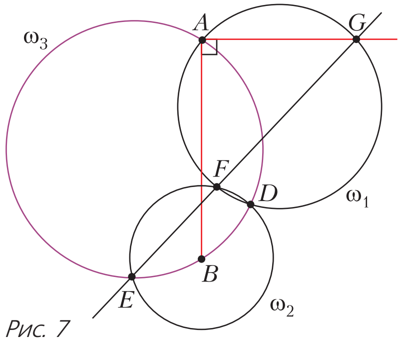


Рис. 7

проходит через центр B окружности ω_2. Прямая EF вторично пересекает ω_1 в точке G. Докажите, что $\angle GAB = 90°$.

Доказательство. Пусть GA пересекает вторично ω_3 в точке H (рис. 8). Тогда $\angle HED = \angle DAG = \angle DFG$, значит, $\angle EFD = 180° - \angle HED$, что означает касание прямой HE и окружности ω_2. Следовательно, $\angle HEB = 90°$, откуда $\angle HAB = 90°$, что нам и нужно.

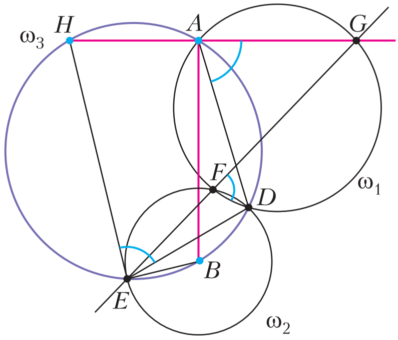


Рис. 8

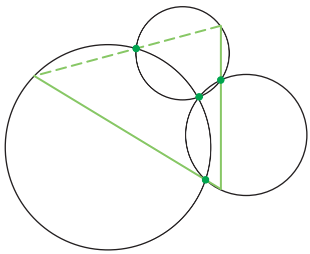


Рис. 9

Отметим, что в приведенном решении $E-G-H-E$ является частным случаем замкнутой траектории через попарные точки пересечения окружностей, проходящих через одну точку (рис. 9).

Вниманию наших читателей

Начиная с 2017 года журнал «Квант» стал ежемесячным и в год выходит 12 номеров журнала.

Подписаться на наш журнал можно с любого номера в любом почтовом отделении. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» – 90964.

Купить журнал «Квант» возможно в магазине «Математическая книга» издательства МЦНМО (адрес интернет-магазина: biblio.mccme.ru), а также в московских книжных магазинах «Библио-глобус», «Молодая гвардия», «Московский дом книги» и в редакции журнала.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» имеется на сайте http://kvant.ras.ru

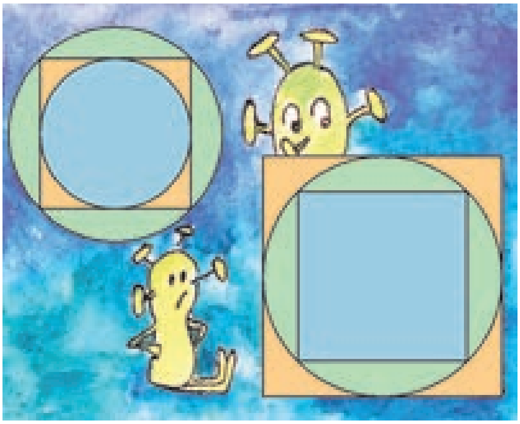
Задачи

1. Найдите хотя бы одно решение в натуральных числах уравнения с шестью неизвестными:

$$11x + 12y + 13z = 14a + 15b + 16c.$$

2. Брат и сестра имеют одну фамилию, но я не смог назвать фамилию брата, узнав фамилию сестры. Как такое могло случиться?

3. В круг площади 1 вписали квадрат, а в него – новый круг, который закрасили в синий цвет. Затем в квадрат площади 1 вписали круг, а в него – квадрат, который закрасили в синий цвет. Чья площадь больше: синего круга или синего квадрата?



4. Во дворце по кругу было установлено 10 скульптур. Император повелел между каждыми двумя соседними скульптурами установить шар, масса которого равна разности масс этих скульптур. Докажите, что сумма масс нескольких из этих шаров равна сумме масс остальных шаров.

Иллюстрации Д.Гришуковой

Автор этих задач – В.В.Произволов. (Задача 1 ранее не публиковалась, ее сообщила редакции А.Дроботова.)

Равновеликость от Произволова

А.БЛИНКОВ

Вячеслав Викторович Произволов был выдающимся композитором математических задач для школьников. Многие из них вошли в его замечательную книжку «Задачи на вырост», изданную последний раз в 2003 году, но далеко не все. Сейчас в МЦНМО готовится новое, дополненное издание этой книги.

Большинство задач В.В.Произволова отличают запоминающиеся факты в условиях, умение по-новому преподнести, казалось бы, известную идею, краткость и изящество решений. Будучи настоящим математиком, «поймав» какую-либо идею, он старался ее развить, поэтому его задачи легко объединять в серии, из которых можно составлять кружковые занятия для школьников, что и делают многие преподаватели.

Одна из серий задач Произволова уже была представлена в статье «Угол в квадрате» («Квант» №4 за 2014 г.). А для этой статьи отобраны задачи, связанные с площадями. В них можно проследить несколько излюбленных идей и приемов Вячеслава Викторовича. Подчеркнем, что многие из предлагаемых задач можно решить разными способами, но мы будем обсуждать именно авторские решения, которые не требуют громоздких вычислений и в то же время, как правило, содержат глубокие идеи.

Начнем со сравнительно простой задачи, идея решения которой известна практически каждому школьнику, но ее не так-то просто опознать.

Задача 1. *Параллелограммы ABCD и BEFG с общей вершиной B расположены так, что точка C лежит на отрезке EF, а точка G – на отрезке AD. Докажите, что эти параллелограммы равновелики.*

Решение. Площадь каждого параллелограмма равна удвоенной площади треугольника BCG, так как этот треугольник имеет общее основание и равную высоту с каждым из параллелограммов (рис.1).

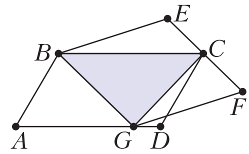


Рис. 1

А вот похожая идея, но ее увидеть и реализовать существенно сложнее.

Задача 2. *На стороне AC треугольника ABC задана точка B_1. На сторонах AB и BC постройте точки C_1 и A_1 соответственно так, чтобы площади треугольников AB_1C_1, BC_1A_1 и CA_1B_1 были равны.*

Решение. Равновеликость (равенство площадей) указанных треугольников равносильна равновеликости параллелограммов, для которых стороны треугольника $A_1B_1C_1$ являются диагоналями (рис.2).

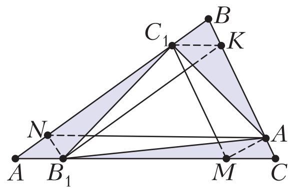


Рис. 2

Отсюда следует, что надо построить ломаную $B_1KC_1MA_1N$, последовательные звенья которой соответственно параллельны AB, AC, BC, AB и AC. Тогда площадь параллелограмма AC_1KB_1 равна площади параллелограмма CKC_1M (у них общая сторона CK и равны высоты, проведенные к ней), а площадь CKC_1M, в свою очередь, равна площади параллелограмма BC_1MA_1 (у них общая сторона C_1M и равны высоты, проведенные к ней). Из равновеликости AC_1KB_1 и BC_1MA_1 следует равенство площадей треугольников AB_1C_1 и BC_1A_1.

Чтобы доказать, что треугольник CA_1B_1 имеет такую же площадь, достаточно провести аналогичное рассуждение. Но сначала надо доказать, что CB_1NA_1 – параллелограмм. Это несложно, так как $NA_1 \parallel B_1C$ по построению, а равенство этих сторон следует из того, что $AB_1 = C_1K = MC$.

В следующей задаче – другой случай стандартной равновеликости (и ее надо сначала увидеть!). Но прежде всего она служит иллюстрацией еще одной идеи, которая привлекала Произволова, – это использование объединения и пересечения фигур.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20200904

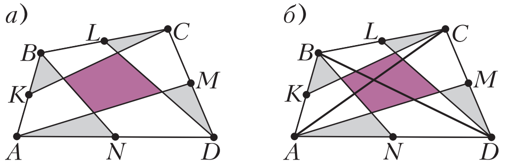


Рис. 3

Задача 3. *Точки K, L, M и N – середины сторон выпуклого четырехугольника ABCD (рис.3,а). Докажите, что сумма площадей закрашенных треугольников равна площади закрашенного четырехугольника.*

Решение. Проведем в данном четырехугольнике диагональ AC (рис.3,б). Так как CK – медиана треугольника ABC, то $S_{BCK} = \frac{1}{2}S_{ABC}$. Аналогично, $S_{AMD} = \frac{1}{2}S_{ACD}$, значит, $S_{BCK} + S_{AMD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. Проведя диагональ BD, аналогичными рассуждениями получим, что $S_{ABN} + S_{CLD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. Таким образом, сумма площадей четырех треугольников, указанных выше, равна площади $ABCD$. Следовательно, та часть площади $ABCD$, которую они покрывают дважды, т.е. сумма площадей закрашенных треугольников, равна той части площади $ABCD$, которую они вообще не покрывают (площадь закрашенного четырехугольника).

Во многих задачах В.В.Произволова требуется сравнить площади частей фигуры, по-разному закрашенных. Вот пример, в котором, наряду с применением пересечения, используется идея перекладывания частей.

Задача 4. *Правильный восьмиугольник разрезан на части, которые закрашены в четыре цвета (рис.4). Докажите, что каждым цветом закрашена одна и та же площадь.*

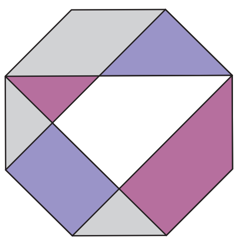


Рис. 4

Решение. Поменяв местами равные треугольники: лиловый и нижний серый, получим две одинаковые равнобокие трапеции, у которых меньшее основание равно ее боковой стороне, а угол при большем основании равен 45°.

Кроме того, если разрезать сиреневый прямоугольный треугольник на два треугольника, проведя высоту к гипотенузе, и заменить этими треугольниками два серых, то получится такая же трапеция.

Площадь восьмиугольника равна сумме площадей четырех таких трапеций, так как из четырех прямоугольных треугольников их попарного пересечения можно сложить центральный квадрат, дополняющий трапеции до восьмиугольника. Следовательно, белая часть имеет такую же площадь.

А вот та же идея перекладывания частей, но в более сложном исполнении.

Задача 5. *В выпуклом шестиугольнике $AC_1BA_1CB_1$: $AB_1 = AC_1$, $BC_1 = BA_1$, $CA_1 = CB_1$ и $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1$. Докажите, что площадь треугольника ABC равна половине площади шестиугольника.*

Решение. Отрежем от шестиугольника треугольники BA_1C, CB_1A, AC_1B и приложим их друг к другу так, чтобы вершины A_1, B_1 и C_1 совместились в некоторой точке O, сторона A_1C первого треугольника совместилась со стороной B_1C второго, а сторона B_1A второго – со стороной C_1A третьего (рис.5).

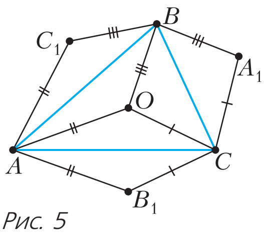


Рис. 5

Так как сумма углов шестиугольника равна 720°, то $\angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 = 360°$. Отсюда следует, что сторона C_1B третьего треугольника автоматически совместится со стороной A_1B первого. Таким образом, из трех отрезанных треугольников мы сложили треугольник со сторонами, равными BC, CA и AB, поэтому он равен треугольнику ABC. Следовательно, $S_{BA_1C} + S_{CB_1A} + S_{AC_1B} = S_{ABC}$, значит, площадь треугольника ABC равна половине площади шестиугольника.

Из доказанного следует, что точка O симметрична вершинам A_1, B_1 и C_1 относительно соответствующих сторон треугольника ABC, поэтому описанное построение равносильно *свертыванию* треугольников BA_1C, CB_1A, AC_1B внутрь шестиугольника по отрезкам BC, CA и AB соответственно.

Вот другой пример использования этой же идеи.

Задача 6. *Вокруг прямоугольника описан четырехугольник так, что две противоположные вершины прямоугольника являются серединами двух противоположных сторон четырехугольника. Докажите, что площадь прямоугольника равна половине площади четырехугольника.*

Решение. Пусть $KLMN$ – данный прямоугольник, $ABCD$ – описанный около него четырехугольник, K – середина AB, M – середина CD (рис.6,*а*). Перегнем внутрь прямоугольника четыре треугольника: KAN, KBL, MCL и MDN. Так как $KA = KB$ и $\angle AKN + \angle BKL = 90° = \angle LKN$, то вершины A и B совместятся в точке E. Аналогично, вершины

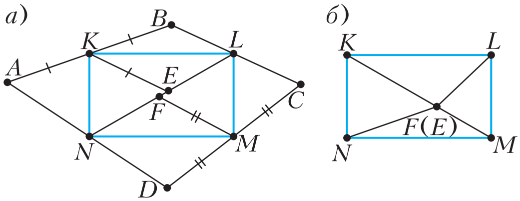


Рис. 6

C и D совместятся в точке F. Кроме того, точки E и F окажутся на одной прямой как с вершиной L, так и с вершиной N. Значит, если E и F не совпадают, то они лежат на LN. Возможен и случай совпадения точек E и F (рис.6,*б*), но в обоих случаях указанные треугольники накрывают прямоугольник без просветов и перекрытий, поэтому площадь $KLMN$ равна половине площади $ABCD$.

Идею свертывания В.В.Произволов использовал в разных задачах, не только на площади. Она связана с идеей использования осевых симметрий и их композиции. Поэтому перейдем к серии задач, в которых напрямую или завуалированно использованы различные движения на плоскости.

Задача 7. *Из бумажного прямоугольника вырезали два одинаковых круга. Проведите прямую, делящую получившуюся фигуру на две части равной площади.*

Решение. Любая прямая, проходящая через центр симметрии прямоугольника, делит его на две равные части, которые имеют равные площади. Для того чтобы вырезанные части в обеих фигурах имели равные площади, искомая прямая m должна также проходить через центр симметрии вырезанных кругов (рис.7).

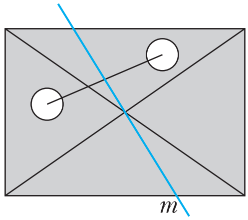


Рис. 7

В ситуации, показанной на рисунке 7, достаточно, чтобы прямая прошла через центр прямоугольника, а вырезанные круги оказались в разных полуплоскостях относительно нее. Однако требование, чтобы прямая проходила через центр симметрии двух вырезанных кругов, становится принципиальным, если, например, один из вырезанных кругов содержит центр прямоугольника.

Задача 8. *В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$: $BC = CD = AE = 1$, $AB + DE = 1$, $\angle ABC = \angle CDE = 90°$. Найдите его площадь.*

Решение. «Отрежем» треугольник ABC и «приложим» его так, чтобы сторона BC совместилась со стороной DC, при этом точка A займет положение A' (рис.8). Так как $\angle ABC = \angle CDE = 90°$, то точки E, D и A' будут лежать на одной прямой, значит, $EA' = A'B' + DE = 1$. Следовательно, $S_{A'CE} = 0{,}5$. Но треугольник $A'CE$ равен треугольнику ACE (по трем сторонам), поэтому $S_{ABCDE} = S_{ACA'E} = 1$.

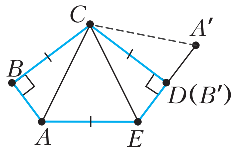


Рис. 8

По сути, был выполнен поворот треугольника ABC с центром C на угол CBD против часовой стрелки.

Задача 9. *На стороне AD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка M, а на сторонах AB и CD – такие точки P и Q, что $PM \parallel BD$, $QM \parallel AC$. Докажите, что равны площади треугольников PMB и QMC.*

Решение. Заметим, что точки P и Q симметричны относительно точки O пересечения диагоналей параллелограмма (рис.9). Действительно, по теореме о пропорцио-

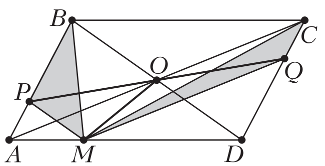


Рис. 9

нальных отрезках $\frac{AP}{AB} = \frac{AM}{AD} = \frac{CQ}{CD}$, откуда $AP = CQ$. Проведем отрезки PQ и OM. Так как $BPMO$ – трапеция, то $S_{PMB} = S_{MPO}$. Аналогично, из трапеции $MOCQ$ получим, что $S_{QMC} = S_{MQO}$. Но MO – медиана треугольника PMQ, поэтому $S_{MPO} = S_{MQO}$, следовательно, $S_{PMB} = S_{QMC}$, что и требовалось.

Задача 10. *Угол B при вершине равнобедренного треугольника ABC равен 120°. Из вершины B выпустили внутрь треугольника два луча под углом 60° друг к другу, которые, отразившись от основания AC в точках P и Q, попали на боковые стороны в точки M и N (рис.10,а). Докажите, что площадь треугольника PBQ равна сумме площадей треугольников AMP и CNQ.*

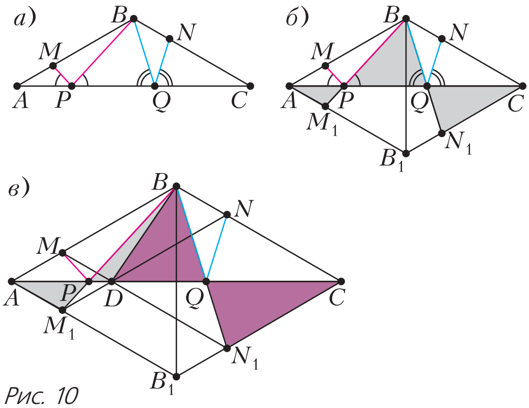


Рис. 10

Решение. Отразим картинку относительно прямой AC, обозначив точки, симметричные M, B и N, через M_1, B_1 и N_1 соответственно (рис.10,*б*,*в*). Заметим. что треугольники ABM_1 и B_1BN_1 равны (один получается из другого поворотом на 60° вокруг точки B). Учитывая симметрию, достаточно доказать, что $S_{BPQ} = S_{APM_1} + S_{CQN_1}$. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Добавив к обеим частям этого равенства $S_{M_1PQN_1B_1}$, сведем задачу к доказательству равенства $S_{ACB_1} = S_{BM_1B_1N_1}$ (см. рис.10,*б*). По доказанному выше $S_{BM_1B_1N_1} = S_{M_1BB_1} + S_{B_1BN_1} = S_{M_1BB_1} + S_{ABM_1} = S_{ABB_1} = S_{ACB_1}$.

Второй способ. Из симметрии и поворота следует, что $MB = M_1B_1 = N_1C$. Проведем отрезок MN_1, пересекающий AC в точке D (см. рис.10,*в*). В силу симметрии отрезок NM_1 пройдет через ту же точку D. Так как отрезки MB и N_1C параллельны и равны, то $MBCN_1$ – параллелограмм, а BDN_1C – трапеция. Значит, $S_{BDQ} = S_{CN_1Q}$. Аналогично, из трапеции BDM_1A получим, что $S_{BDP} = S_{AM_1P}$. Значит, $S_{BPQ} = S_{APM_1} + S_{CQN_1}$.

Задачи для самостоятельного решения

Эти задачи содержат те же идеи, причем большинство из них можно назвать либо «предками», либо «потомками» уже разобранных задач.

11. Из бумажного прямоугольника вырезали прямоугольник. Проведите прямую, делящую получившуюся фигуру на две части равной площади.

12. В четырехугольнике $ABCD$: $AB = BC$, $\angle ABC = \angle ADC = 90°$. Найдите его площадь, если расстояние от вершины B до прямой AD равно 1.

13. Прямоугольный лист бумаги разрезали на три треугольника. Сумма площадей двух из них в два раза больше площади третьего. Найдите отношение площадей этих треугольников.

14. Противолежащие стороны шестиугольника $ABCDEF$ равны и параллельны. Найдите площадь треугольника ACE, если площадь шестиугольника равна S.

15. Внутри равностороннего треугольника отмечена точка, которая соединена отрезками с вершинами, и из нее проведены перпендикуляры к сторонам (рис.11). Три из образовавшихся шести треугольников закрашены (через один). Докажите, что сумма площадей закрашенных треугольников равна половине площади данного треугольника.

16. Какая часть квадрата $ABCD$ имеет большую площадь: серая или лиловая (рис.12)?

17. Две диагонали разбили правильный восьмиугольник на две трапеции и прямоугольник. Докажите, что площадь прямоугольника равна половине площади восьмиугольника.

18. Правильный девятиугольник разрезан диагоналями на белые и закрашенные треугольники

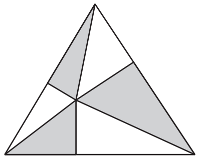


Рис. 11

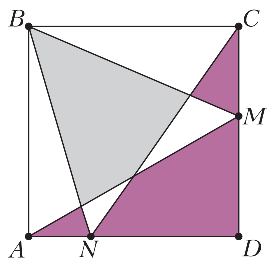


Рис. 12

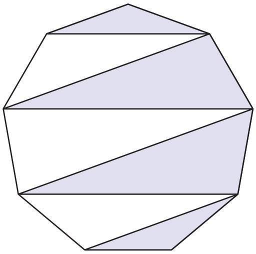


Рис. 13

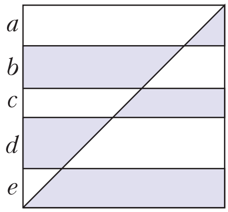


Рис. 14

(рис.13). Какая часть площади больше: белая или закрашенная?

19. Квадрат разрезан на полоски, ширина которых обозначена буквами a, b, c, d, e, проведена его диагональ и полученные части закрашены так, как показано на рисунке 14. Известно, что $a+c+e=b+d$. Докажите, что равны суммы площадей закрашенных частей, расположенных выше и ниже диагонали.

20. Прямоугольники $ABCD$ и $KLMN$ с соответственно параллельными сторонами расположены так, как показано на рисунке 15. Докажите равенство площадей четырехугольников $ALCN$ и $KBMD$.

21. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ отмечена точка P. Постройте параллелограмм с вершиной P, вписанный в $ABCD$ так, что его стороны отсекают от исходного параллелограмма треугольники равной площади.

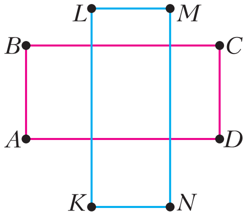


Рис. 15

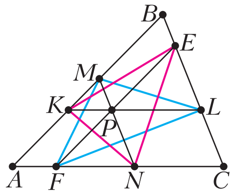


Рис. 16

22. Через точку P проведены отрезки EF, KL и MN, параллельные сторонам треугольника ABC (рис.16). Докажите равновеликость треугольников KEN и MLF.

23. В треугольник ABC вписана окружность с центром I, которая касается его сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Отрезки AI, BI и CI пересекают окружность в точках A_2, B_2 и C_2. Докажите, что площадь треугольника $A_2B_2C_2$ равна половине площади шестиугольника $B_1A_2C_1B_2A_1C_2$.

24. В выпуклом четырехугольнике провели отрезки, соединяющие середины противоположных сторон. Их точку пересечения соединили с вершинами четырехугольника. Докажите, что суммы площадей противолежащих треугольников равны.

Почему обжигает пар?

Л.АШКИНАЗИ

Во многих задачниках можно встретить вопрос – «почему обжигает пар» или «почему пар обжигает сильнее, чем вода той же температуры». И дается ответ – «потому, что происходит конденсация с тепловыделением». Но, во-первых, не всякое тепловыделение заметно поднимает температуру; нужно хотя бы простейшей оценкой показать, что эффект заметен. Во-вторых, вдумчивый школьник может выдвинуть такое возражение – горячий металл обжигает сильнее горячего дерева, а холодный металл «холодит» сильнее камня, т.е. тепловые потоки зависят от теплопроводности. Пар – это газ, его теплопроводность много меньше, чем у жидкости, так что все должно быть наоборот.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20200905

Теплопроводность пара действительно мала, однако в целом это возражение неправильное. В этом нам еще предстоит разобраться, а начнем мы с понятия теплопроводности, которое употребляем интуитивно. Мы введем его для частного случая, но применяется оно шире; при этом из нашего частного вывода станет понятно ограничение, при котором можно пользоваться этим понятием.

Запишем формулу

$$Q = cm\Delta T,$$

которая вам известна. Здесь при чтении надо сделать короткую паузу – вспомнить, что как обозначается, написать на бумажке размерности и убедиться, что все правильно. Попутно вопрос: позволяет ли проверка размерностей убедиться в полной правильности формулы? Нет, в формуле может быть безразмерный коэффициент – он не влияет на размерность. В данной формуле его нет, как нет его в законе Ньютона или в законе Ома. А в законе всемирного тяготения он есть, причем размерный, в законе Кулона есть и размерный и безразмерный коэффициенты – почему? Подумайте об этом на досуге.

Кроме того, вам известно понятие потока тепла, т.е. тепловой мощности, которое вы, скорее всего, определяете так:

$$N = \frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

где t – естественно, время. Заметим, что одни и те же, по сути, величины в разных разделах физики могут называться по-разному. Так, в электричестве Q – это заряд, а N – ток. Когда определение дается с «дельтами», например как здесь $N = \Delta Q/\Delta t$ или как в электричестве $I = \Delta Q/\Delta t$, подразумевается, что Δt можно брать любое. Иными словами, ΔQ пропорционально Δt, и, какое бы Δt мы не брали, отношение получится то же. Поэтому это определение уже предполагает, что мощность (или, соответственно, ток), постоянны. Иначе надо было бы писать $N = dQ/dt$, $I = dQ/dt$, дифференцировать, вводить понятия мгновенной мощности и мгновенного значения тока. Но в школе про переменное N вообще не упоминается, а определение тока дается именно для постоянного тока. Однако это формальные вещи, а вот теперь нам потребуется серьезное физическое предположение.

Рассмотрим прямой цилиндр длиной L и сечением S. Пусть на торцах цилиндра температуры постоянны, разность температур между торцами равна ΔT, а боковые поверхности теплоизолированы, т.е. поток тепла через них равен нулю. Пусть в этих условиях поток тепла вдоль цилиндра равен N. Если пристроить к торцу такого цилиндра еще один такой же с потоком N, получим удвоение L и удвоение ΔT, а если пристроить сбоку, то получим удвоение N и S (рис.1). Таким образом, N оказывается пропорционально $S\Delta T/L$, или

$$N = \frac{\lambda \Delta T S}{L},$$

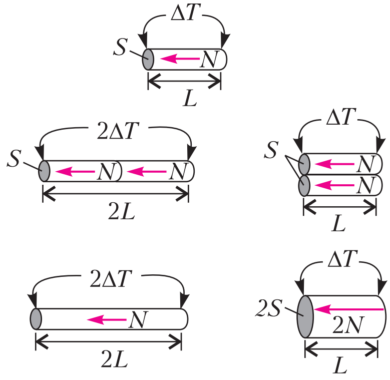


Рис. 1

где λ – коэффициент пропорциональности, который как раз и называют теплопроводностью.

Определим размерность коэффициента теплопроводности и подумаем, какое предположение мы не сделали, а без него наша формула не то чтобы совсем ошибочна, но на экзамене придраться можно. Размерность λ есть Вт/(м · К), а предположений по меньшей мере три – одно серьезное и два не очень. Не серьезные, что и S и L – константы, не зависящие от ΔT. В данном случае это действительно так, потому что при нагреве на 300 К они изменяются обычно не более чем на 0,3%. Это не означает, правда, что тепловыми расширениями можно пренебрегать в других случаях! А серьезное предположение, что λ – константа. Для многих материалов это не так. При нагреве на 300 К теплопроводность может и увеличиться на треть и уменьшиться на 30%, а это обычно существенно. Складывая два цилиндра торцами, мы не только увеличили вдвое ΔT, но и увеличили сами значения T, а на возможную зависимость $\lambda(T)$ внимания не обратили. Но для нашей конкретной задачи это не важно – очень большие нагревы мы, понятное дело, не рассматриваем. Формулу $N = \dfrac{\lambda \Delta T S}{L}$ полезно запомнить. Хоть мы ее вывели для простейшей (одномерной) задачи, но она бывает полезна всегда, когда теплообмен «вбок» мал. Ведь при использовании теплоизоляции (одежда, строительство) это бывает чаще всего.

Теперь вернемся к нашей задаче. Пусть у нас есть полупространство, в нашем случае рука человека (опять, естественно, одномер-

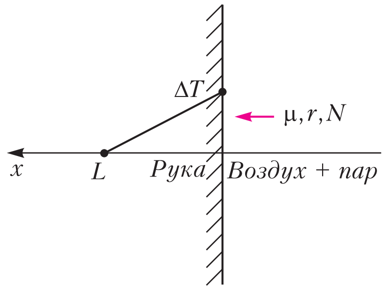


Рис. 2

ная задача), на границу которого падает тепловой поток N, приходящийся на площадь S (рис.2). У нас этот поток создается конденсацией пара, на площадь S падает поток вещества μ (размерность кг/с) с теплотой фазового перехода r (размерность Дж/кг). Настоящим решением была бы функция $\Delta T(x,t)$, говорящая, на сколько нагреется вещество на глубине x за время t. Получение решения в таком виде требует решения уравнения в частных производных, а мы этого не умеем. Поэтому рассмотрим самое сложное приближение, с которым мы справимся математически, и оно же самое простое, позволяющее получить разумный ответ. Совпадение этих двух приближений – принципиально важный момент. В физике это случается далеко не всегда, но в данном случае нам повезло.

Будем считать, что температура падает в глубину линейно. Запишем очевидные уравнения:

$$N = \mu r,\ Q = Nt,\ Q = \frac{cm\Delta T}{2},\ m = \rho SL,\ N = \frac{\lambda \Delta T S}{L},$$

где Q – количество теплоты, m – масса, ρ – плотность. Во втором уравнении для Q произведено деление на 2, потому что мы использовали модель с линейной и непрерывной функцией $\Delta T(x)$. Менее реалистичной была бы модель $\Delta T(x) = \text{const}$ при $0 < x < L$, в этом случае исчезло бы деление на два. Ну вот, решаем эту систему и получаем

$$\Delta T(t) = \left(\frac{\mu r}{S}\right)\left(\frac{2t}{c\rho\lambda}\right)^{1/2}.$$

Прежде чем радостно подставлять числа, надо проверить размерность и разумность результата. Размерность проверьте сами, а разумностью займемся вместе.

То, что впереди стоит $(\mu r/S)$, – это правильно, поскольку это просто плотность мощности. То, что она в первой степени – следствие «линейности задачи», постоянства λ. Энергии и мощности действительно суммируются (кстати, если они ноль, то нет никакого нагрева). Дальше – интереснее, время получилось под корнем. Так как энергия, введенная в систему, т.е. Q, растет со временем линейно, это значит, что как $t^{1/2}$ растет не только ΔT, но и L. Да, из наших уравнений получаем

$$L = \left(\frac{2\lambda t}{c\rho}\right)^{1/2}.$$

Эту формулу полезно запомнить, она позволяет оценить, на какое расстояние распространится в среде тепло за какое-то время, если мы знаем параметры среды.

Теперь займемся цифрами. Возьмем $r = 2{,}2$ МДж/кг, $S = 1$ см^2, $t = 0{,}2$ с, $\rho = 10^3$ кг/м^3, $c = 3000$ Дж/(кг · К), $\lambda = 0{,}5$ Вт/(м · К). Две последние цифры для мяса находим в интернете, остальное очевидно. Но у нас проблема с величиной μ – как можно было бы ее оценить? Есть три варианта – экспериментальный, смешанный и теоретический. Первый: на секунду внести в поток пара из носика чайника блюдце или чашку и посмотреть, сколько воды на них конденсируется. Второй вариант: посмотреть, за какое время выкипает некоторое количество воды, и пересчитать это в поток вещества. Третий: просто вычислить μ, исходя из мощности чайника. Первый вариант имеет в бытовых условиях низкую точность, третий плох тем, что мы не знаем КПД чайника. Однако в общем все три способа дают примерно одинаковые ответы – от 10^{-4} кг/с до $3 \cdot 10^{-4}$ кг/с.

Но не вздумайте прямо подставлять! Это же поток на самом носике, а реально ближе 10 см от носика руку никто не проносит. Тогда надо сбросить еще полтора порядка – учесть квадрат отношения этого расстояния к диаметру отверстия в носике 2 см. (Ибо мы живем в трехмерном пространстве – вы же помните про квадрат расстояния в законе всемирного тяготения и в законе Кулона?)

В итоге получается для перегрева ΔT разумная цифра – 60 К. И это за 0,2 секунды, так что будьте осторожны!

ЕГЭ по физике

Варианты ЕГЭ по физике 2020 года не отличались по структуре от вариантов предыдущего года. Они содержали 32 задания, и максимальная сумма первичных баллов составляла 52 балла. При этом 16 заданий (1–4, 8–10, 13–15, 19, 20, 22, 23, 25–26) оценивались максимум в 1 балл, 10 заданий (5–7, 11, 12, 16-18, 21, 24) оценивались максимум в 2 балла, 6 заданий (27–32), требующие развернутого решения, оценивались максимум в 3 балла каждое. Максимальная сумма первичных баллов составляла 54 балла.

В 2021 году структура вариантов по физике не изменится.

Приведем один из вариантов открытого сегмента 2020 года.

Инструкция по выполнению работы

Для выполнения экзаменационной работы по физике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 32 задания.

В заданиях 1–4, 8–10, 14, 15, 20, 25–26 ответом является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите по приведенному ниже образцу в бланк ответов №1. Единицы измерения физических величин писать не нужно.

Ответ: $-2{,}5$ м/с^2. -2,5

Ответом к заданиям 5–7, 11, 12, 16–18, 21, 23 и 24 является последовательность двух цифр. Ответ запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите по приведенному ниже образцу без пробелов, запятых и других дополнительных символов в бланк ответов №1.

Ответ:

А	Б
4	1

41

Ответом к заданию 13 является слово. Ответ запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите по приведенному ниже образцу в бланк ответов №1.

Ответ: вправо. ВПРАВО

Ответом к заданиям 19 и 22 являются два числа. Ответ запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите по приведенному ниже образцу, не разделяя числа пробелом, в бланк ответов №1.

Заряд ядра Z	Массовое число ядра A
38	94

3894

Ответ: $(1{,}4 \pm 0{,}2)$ Н. 1,40,2

Ответ к заданиям 27–32 включает в себя подробное описание всего хода выполнения задания. В бланке ответов №2 укажите номер задания и запишите его полное решение.

При вычислениях разрешается использовать непрограммируемый калькулятор.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими черными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание был записан под правильным номером.

Справочные данные

ДЕСЯТИЧНЫЕ ПРИСТАВКИ

Наименование	Обозначение	Множитель
гига	Г	10^9
мега	М	10^6
кило	к	10^3
гекто	г	10^2
деци	д	10^{-1}
санти	с	10^{-2}
милли	м	10^{-3}
микро	мк	10^{-6}
нано	н	10^{-9}
пико	п	10^{-12}

КОНСТАНТЫ

число π

$$\pi = 3{,}14$$

ускорение свободного падения на Земле

$$g = 10 \text{ м/с}^2$$

гравитационная постоянная

$$G = 6{,}7 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$$

универсальная газовая постоянная

$$R = 8{,}31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$$

постоянная Больцмана

$$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$$

постоянная Авогадро

$$N_А = 6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

скорость света в вакууме

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

коэффициент пропорциональности в законе Кулона

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2$$

модуль заряда электрона (элементарный электрический заряд)

$$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

постоянная Планка

$$h = 6{,}6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ ЕДИНИЦАМИ

температура	0 К = –273 °С
атомная единица массы	1 а.е.м. = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг
1 атомная единица массы эквивалентна	931,5 МэВ
1 электронвольт	1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж
1 астрономическая единица	1 а.е. ≈ 150 000 000 км
1 световой год	1 св. год ≈ $9{,}46 \cdot 10^{15}$ м
1 парсек	1 пк ≈ 3,26 св. года

МАССА ЧАСТИЦ

электрона	$9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг ≈ $5{,}5 \cdot 10^{-4}$ а.е.м.
протона	$1{,}673 \cdot 10^{-27}$ кг ≈ 1,007 а.е.м.
нейтрона	$1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг ≈ 1,008 а.е.м.

АСТРОНОМИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

средний радиус Земли	$R_\oplus = 6370$ км
радиус Солнца	$R_\odot = 6{,}96 \cdot 10^8$ м
температура поверхности Солнца	$T = 6000$ К

ПЛОТНОСТЬ

воды	1000 кг/м^3
древесины (сосна)	400 кг/м^3
керосина	800 кг/м^3
подсолнечного масла	900 кг/м^3
алюминия	2700 кг/м^3
железа	7800 кг/м^3
ртути	13600 кг/м^3

УДЕЛЬНАЯ ТЕПЛОЕМКОСТЬ

воды	$4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К)
льда	$2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К)
железа	460 Дж/(кг · К)
свинца	130 Дж/(кг · К)
алюминия	900 Дж/(кг · К)
меди	380 Дж/(кг · К)
чугуна	500 Дж/(кг · К)

УДЕЛЬНАЯ ТЕПЛОТА

парообразования воды	$2{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг
плавления свинца	$2{,}5 \cdot 10^4$ Дж/кг
плавления льда	$3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг

НОРМАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

давление – 10^5 Па, температура – 0 °С

МОЛЯРНАЯ МАССА

азота	$28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
аргона	$40 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
водорода	$2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
воздуха	$29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
воды	$18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
гелия	$4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
кислорода	$32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
лития	$6 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
неона	$20 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
углекислого газа	$44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

ЧАСТЬ 1

Ответами к заданиям 1–24 являются слово, число или последовательность цифр или чисел. Ответ запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждый символ пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в

бланке образцами. Единицы измерения физических величин писать не нужно.

1. На рисунке 1 показан график зависимости проекции v_x скорости тела от времени t.

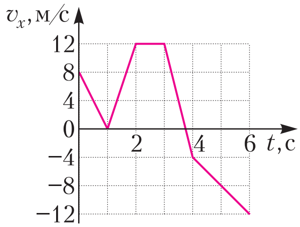


Рис. 1

Какова проекция a_x ускорения этого тела в интервале времени от 1 до 2 с?

2. В инерциальной системе отсчета сила, модуль которой равен 100 Н, сообщает некоторому телу ускорение 10 м/с^2. Каков модуль силы, которая сообщит этому телу ускорение 7 м/с^2 в этой системе отсчета?

3. Какова кинетическая энергия автомобиля массой 1000 кг, движущегося со скоростью 10 м/с? (Ответ приведите в кДж.)

4. Человек услышал звук грома через 8 с после вспышки молнии. Считая, что скорость звука в воздухе равна 340 м/с, определите, на каком расстоянии от человека ударила молния.

5. Автомобиль массой 2 т проезжает верхнюю точку выпуклого моста, двигаясь с постоянной по модулю скоростью 36 км/ч. Радиус кривизны моста равен 40 м.

Из приведенного ниже списка выберите два правильных утверждения, характеризующих движение автомобиля по мосту.

1) Сила, с которой мост действует на автомобиль в верхней точке моста, меньше 20000 Н и направлена вертикально вниз.

2) Центростремительное ускорение автомобиля в верхней точке моста равно 2,5 м/с^2.

3) Ускорение автомобиля в верхней точке моста направлено противоположно его скорости.

4) Равнодействующая сил, действующих на автомобиль в верхней точке моста, сонаправлена с его скоростью.

5) В верхней точке моста автомобиль действует на мост с силой, равной 15000 Н.

6. Шарик, брошенный горизонтально с высоты H с начальной скоростью $\vec{v}_0$, до падения на землю пролетел в горизонтальном направлении расстояние L (рис.2). Что произойдет с дальностью полета и ускорением шарика, если в этой же постановке опыта уменьшить начальную скорость шарика? Сопротивлением воздуха пренебречь.

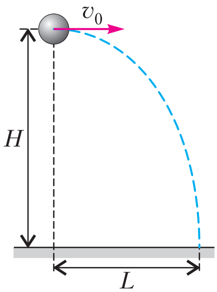


Рис. 2

Для каждой величины определите соответствующий характер ее изменения:

1) увеличится;
2) уменьшится;
3) не изменится.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

7. Шайба массой m, скользящая по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью v, абсолютно неупруго сталкивается с покоящейся шайбой массой M.

Установите соответствие между физическими величинами и формулами, выражающими их в рассматриваемой задаче.

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию из второго столбца и запишите в таблицу выбранные цифры.

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ	ФОРМУЛЫ
А) суммарная кинетическая энергия шайб после столкновения	1) $\dfrac{(m+M)v^2}{2}$
Б) импульс первоначально покоившейся шайбы после столкновения	2) $\dfrac{m^2v^2}{2(m+M)}$
	3) $\dfrac{mMv}{m+M}$
	4) $\dfrac{m^2v}{m+M}$

8. Цилиндрический сосуд разделен неподвижной перегородкой на две части. В одной части сосуда находится гелий, в другой – неон. Концентрации газов одинаковы. Средние кинетические энергии теплового движения молекул газов равны. Определите отношение давления гелия к давлению неона.

9. Рабочее тело идеальной тепловой машины за цикл работы получает от нагревателя количество теплоты, равное 100 Дж, и отдает холодильнику количество теплоты, равное 60 Дж. Чему равен КПД тепловой машины? (Ответ приведите в %.)

10. На рисунке 3 показан график изменения температуры t вещества по мере поглощения им количества теплоты Q. Масса вещества 0,4 кг. Первоначально вещество было в жидком состоянии. Какова удельная теплота парообразования вещества? (Ответ приведите в кДж/кг.)

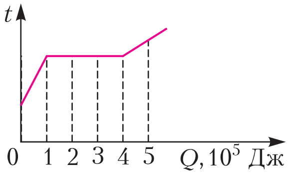


Рис. 3

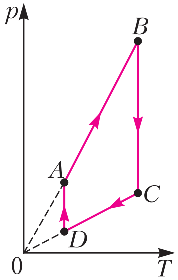


Рис. 4

11. На рисунке 4 в координатах p–T, где p – давление газа, T – абсолютная температура газа, показан график циклического процесса, проведенного с одноатомным идеальным газом. Количество вещества газа постоянно.

Из приведенного ниже списка выберите **два** правильных утверждения, характеризующих процессы на графике.

1) В процессе CD работа газа равна нулю.

2) В процессе DA газ изотермически расширяется.

3) В процессе AB газ отдает положительное количество теплоты.

4) В процессе BC внутренняя энергия газа остается неизменной.

5) Газ за цикл совершает работу, равную нулю.

12. Аргон в количестве ν моль помещают в открытый сверху сосуд под тяжелый подвижный поршень и начинают охлаждать. Начальное давление газа p_0. Трением между поршнем и стенками сосуда пренебречь.

Установите соответствие между физическими величинами, характеризующими газ, и формулами, выражающими их зависимость от абсолютной температуры T газа (R – универсальная газовая постоянная).

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию из второго столбца и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ	ФОРМУЛЫ
А) объем газа $V(T)$	1) $\dfrac{\nu R p_0}{T}$
Б) внутренняя энергия газа $U(T)$	2) $\dfrac{\nu RT}{p_0}$
	3) $\dfrac{3}{2}\nu RT$
	4) $\dfrac{3}{2}\dfrac{\nu RT}{p_0}$

13. Квадратная проволочная рамка расположена в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ так, как показано на рисунке 5. Направление тока в рамке показано стрелками. Куда направлена относительно рисунка (**вправо, влево, вверх, вниз, к наблюдателю, от наблюдателя**) сила, действующая на сторону cd рамки со стороны внешнего магнитного поля? (Ответ запишите словом (словами).)

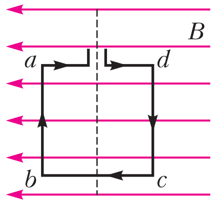


Рис. 5

14. С какой силой взаимодействуют в вакууме два маленьких заряженных шарика, находящихся на расстоянии 60 см друг от друга? Заряд каждого шарика равен 10^{-8} Кл. (Ответ приведите в мкН.)

15. Определите энергию магнитного поля катушки индуктивностью 0,2 мГн при силе тока в ней 2 А. (Ответ приведите в мДж.)

16. Две параллельные металлические пластины больших размеров расположены на расстоянии d друг от друга и подключены к источнику постоянного напряжения (рис. 6,*а*). Пластины закрепили на изолирующих подставках и спустя длительное время отключили от источника (рис.6,*б*).

Из приведенного ниже списка выберите **два** правильных утверждения.

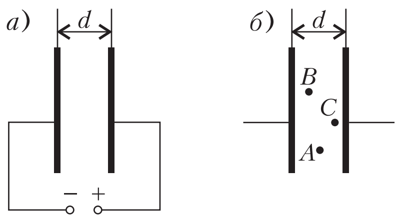


Рис. 6

1) Если после отключения от источника уменьшить расстояние d между пластинами, то заряд правой пластины не изменится.

2) Напряженность электрического поля в точке B больше, чем в точке C.

3) Потенциалы электрического поля в точках A и B одинаковы.

4) Если после отключения от источника пластины полностью погрузить в керосин, то энергия электрического поля системы пластин уменьшится.

5) Если после отключения от источника увеличить расстояние d между пластинами, то напряженность электрического поля в точке A увеличится.

17. Частица массой m, несущая заряд q, движется в однородном магнитном поле с индукцией B по окружности радиусом R со скоростью v. Что произойдет с радиусом орбиты и периодом обращения частицы при уменьшении скорости ее движения?

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

1) увеличится;
2) уменьшится;
3) не изменится.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждого ответа. Цифры в ответе могут повторяться.

18. Конденсатор идеального колебательного контура длительное время подключен к источнику постоянного напряжения (рис.7). В момент $t = 0$ переключатель K переводят из положения 1 в положение 2. Графики А и Б (рис.8) отображают изменения физических величин, характеризующих возникшие после этого электромагнитные колебания в контуре (T – период колебаний).

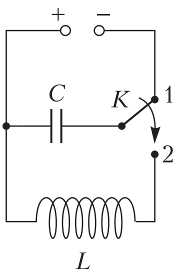


Рис. 7

Установите соответствие между графиками и физическими величинами, зависимости которых от времени эти графики могут отображать.

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию из второго столбца и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

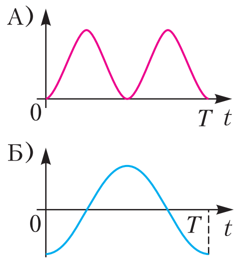
ГРАФИКИ	ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ
	1) энергия магнитного поля катушки 2) заряд правой обкладки конденсатора 3) энергия электрического поля конденсатора 4) сила тока в катушке

Рис. 8

19. В результате ядерной реакции синтеза $^2_1\mathrm{H} + ^2_1\mathrm{H} \to ^A_Z\mathrm{X} + ^1_1p$ образуется ядро химического элемента $^A_Z\mathrm{X}$. Каковы заряд образовавшегося ядра Z (в единицах элементарного заряда) и его массовое число A?

В бланк ответов № 1 перенесите только числа, не разделяя их пробелом или другим знаком.

20. На рисунке 9 показан график зависимости числа нераспавшихся ядер европия $^{160}_{63}\mathrm{Eu}$ от времени. Каков период полураспада этого изотопа?

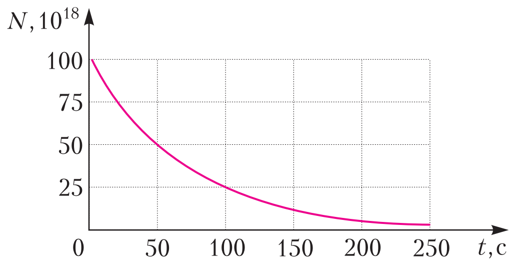


Рис. 9

21. Монохроматический свет с энергией фотонов $E_ф$ падает на поверхность металла, вызывая фотоэффект. Как изменятся длина волны λ падающего света и длина волны $\lambda_{кр}$, соответствующая «красной границе» фотоэффекта, если энергия падающих фотонов $E_ф$ уменьшится, но фотоэффект не прекратится?

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

1) увеличится;
2) уменьшится;
3) не изменится.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

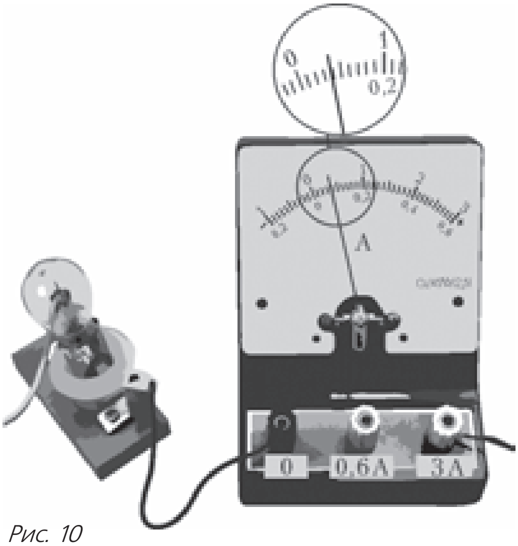


Рис. 10

22. Определите силу тока в лампочке (рис.10), если погрешность прямого измерения силы тока равна цене деления амперметра. (Ответ: (_____ ± _____) А.)

В бланк ответов № 1 перенесите только числа, не разделяя их пробелом или другим знаком.

23. Необходимо собрать экспериментальную установку, с помощью которой можно определить плотность бензина. Для этого школьник взял стакан с бензином и динамометр.

Какие **два** предмета из приведенного ниже перечня оборудования необходимо дополнительно использовать для проведения этого эксперимента?

1) Термометр.
2) Стальной цилиндр с крючком.
3) Калориметр.
4) Пружина.
5) Мензурка.

В ответе запишите номера выбранного оборудования.

24. На рисунке 11 представлена диаграмма Герцшпрунга–Рессела.

Выберите **все** верные утверждения о звездах.

1) Звезда Альтаир, имеющая радиус $1{,}9R_{\odot}$ относится к звездам главной последовательности.

2) Плотность белых карликов существенно больше средней плотности звезд главной последовательности.

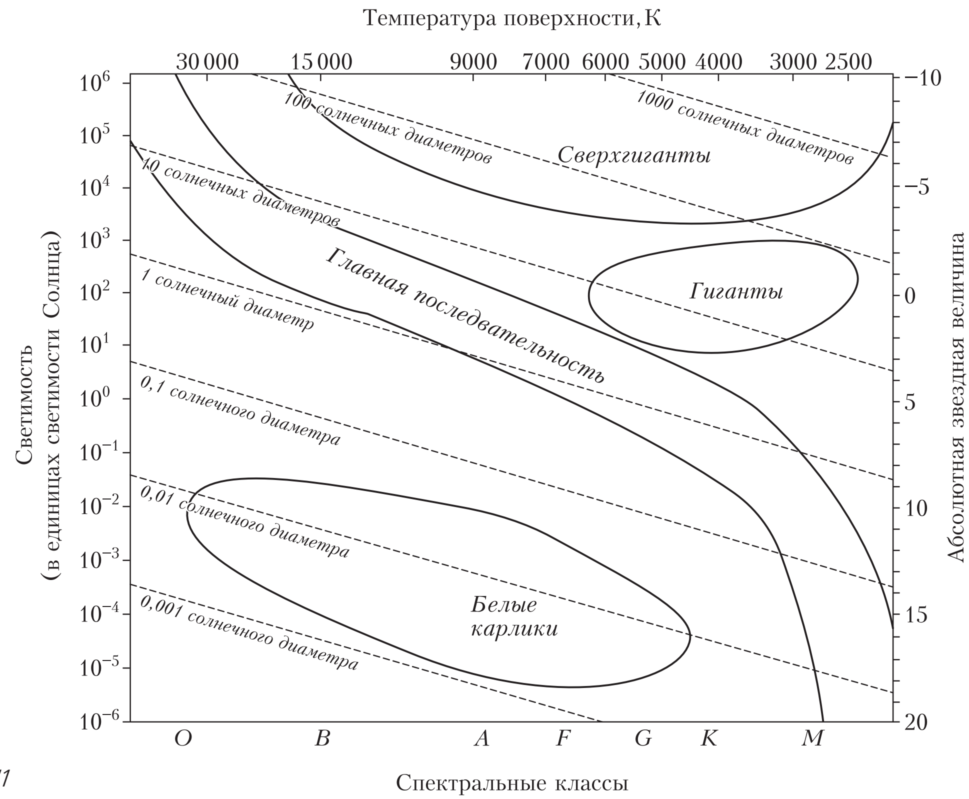


Рис. 11

3) Температура поверхности звезд спектрального класса G выше температуры поверхности звезд спектрального класса O.

4) Звезда Бетельгейзе относится к голубым звездам главной последовательности, поскольку ее радиус почти в 1000 раз превышает радиус Солнца.

5) «Жизненный цикл» звезды спектрального класса O главной последовательности более длительный, чем звезды спектрального класса M главной последовательности.

ЧАСТЬ 2

Ответом к заданиям 25 и 26 является число. Это число запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждый символ пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерения физических величин писать не нужно.

25. Для охлаждения лимонада в него бросают кубики льда, имеющие температуру 0 °С. Масса каждого кубика 8 г. Первоначальная температура лимонада равна 30 °С. После того как в лимонад бросили четыре кубика льда, установилась температура 15 °С. Сколько лимонада было в стакане? Ответ в граммах (г) округлите до целых. Теплообменом лимонада и льда с другими телами пренебречь. Удельная теплоемкость лимонада равна удельной теплоемкости воды.

26. Сколько фотонов видимого света с длиной волны 0,45 мкм попадает на сетчатку глаза за 2 с, если мощность поглощенного сетчаткой излучения на этой длине волны составляет $1{,}98 \cdot 10^{-17}$ Вт?

Для записи ответов на задания 27–32 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер задания (27, 28 и т. д.), а затем решение соответствующей задачи. Ответы записывайте четко и разборчиво.

27. В одном сосуде под поршнем в объеме V_0 при комнатной температуре находятся только насыщенный водяной пар и вода, которая занимает малый объем. В другом сосуде под поршнем в объеме V_0 при том же давлении p_0 находится сухой воздух. Воздух и водяной пар изотермически сжимают так, что объем под поршнем уменьшается в 2 раза. Постройте графики этих двух процессов в переменных $p-V$. Опираясь на законы молекулярной физики, объясните построение графиков.

Полное правильное решение каждой из задач 28–32 должно содержать законы и формулы, применение которых необходимо и достаточно для решения задачи, а также математические преобразования, расчеты с численным ответом и при необходимости рисунок, поясняющий решение.

28. Два пластилиновых шарика с массами $3m$ и m, летящие навстречу друг другу с одинаковыми по модулю скоростями, при столкновении слипаются. Каким был модуль скорости каждого из шариков перед столкновением, если сразу после столкновения скорость шариков стала равной 0,5 м/с? Временем взаимодействия шариков пренебречь.

29. Невесомый стержень AB с двумя малыми грузиками массами $m_1 = 200$ г и $m_2 = 100$ г, расположенными в точках C и B соответственно, шарнирно закреплен в точке A (рис.12). Груз массой $M = 100$ г подвешен к невесомому блоку за невесомую и нерастяжимую нить, другой конец которой соединен с нижним концом стержня, как показано на рисунке. Вся система находится в равновесии, если стержень отклонен от вертикали на угол $\alpha = 30°$, а нить составляет с вертикалью угол, равный $\beta = 30°$. Расстояние $AC = b = 25$ см. Определите длину l стержня AB. Сделайте рисунок с указанием сил, действующих на груз M и на стержень.

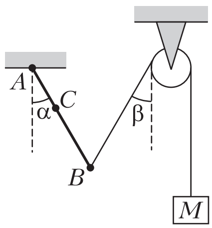


Рис. 12

30. В вертикальном цилиндрическом сосуде с гладкими стенками под подвижным поршнем массой 10 кг и площадью поперечного сечения 50 см^2 находится разреженный газ (рис.13). При движении сосуда по вертикали с ускорением, направленных вверх и равным по модулю 1 м/с^2, высота столба газа под поршнем постоянна и на 5% меньше, чем в покоящемся сосуде. Считая температуру газа под поршнем неизменной, а наружное давление постоянным, определите внешнее давление. Масса газа под поршнем постоянна.

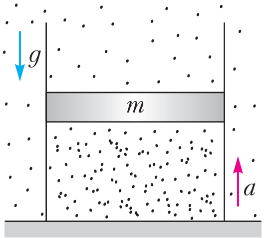


Рис. 13

31. Плоский воздушный конденсатор электроемкостью $C = 10$ нФ подключили к источнику постоянного напряжения $U = 10$ В. После полной зарядки конденсатор отсоединили от источника напряжения. Определите изменение энергии этого конденсатора, если расстояние между его обкладками увеличить на 20%.

32. Математический маятник совершает колебания в плоскости рисунка 14 с амплитудой $A = 1$ см. Равновесное положение нити маятника находится на расстоянии $l = \sqrt{5}$ см от переднего фокуса собирающей линзы. Крайние положения груза маятника лежат на главной оптической оси линзы. Найдите расстояние между изображениями двух крайних положений груза маятника, если оптическая сила линзы равна 50 дптр.

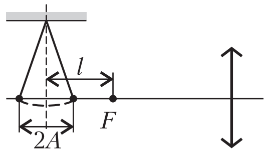


Рис. 14

Публикацию подготовили
М.Демидова, А.Черноуцан

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Мы начинаем очередной конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на учащихся 8–9 классов, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт kvantik.com).

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest

Желаем успеха!

1. Дан правильный 10-угольник $ABCDEFGHIJ$. Какую часть его площади занимает треугольник ACD?

Е.Бакаев

2. На клетчатой плоскости (все клетки – квадратики 1×1) нарисован прямоугольник по линиям сетки. Его разрезали по линиям сетки на N прямоугольников, проведя несколько горизонтальных и вертикальных разрезов от края до края. Докажите, что можно покрасить какие-то из этих N прямоугольников (возможно, один или все) так, чтобы окрашенная область была прямоугольником площади, делящейся на N.

П.Кожевников

3. Вася покрасил 50 полей доски 10×10 в красный цвет, а остальные 50 полей – в желтый цвет. После этого он подсчитал количество квадратов (стороны которых проходят по линиям сетки), содержащих равное количество красных и желтых полей. Какое наименьшее число мог получить Вася?

С.Костин

4. Дан квадрат $ABCD$ и прямая l, проходящая через точку C и не пересекающая квадрат в других точках. Используя только линейку, постройте на прямой l точку T такую, что $AT \perp l$. (Используя линейку, можно проводить прямую через две точки.)

В.Расторгуев

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №8)

1. При n, кратных 3.

Пример. Заметим, что трапеция со сторонами 1, 1, 1, 2 состоит из трех правильных треугольничков со стороной 1 (рис.1). Правильный треугольник со стороной $n = 3k$ легко разбить на правильные треугольники со стороной 3. Каждый из них

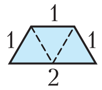


Рис. 1

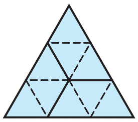


Рис. 2

состоит из 9 правильных треугольничков со стороной 1 и разбивается на три трапеции (рис.2).

Оценка. Пусть s – площадь правильного треугольника со стороной 1, тогда площадь трапеции равна $3s$. Если правильный треугольник со стороной n разбит на m трапеций, то его площадь равна, с одной стороны, n^2s, а с другой стороны, $3ms$. Отсюда $n^2s = 3ms$, $n^2 = 3m$, т.е. n кратно 3.

2. а) Могло.

Разобьем девочек на 5 пар, пронумеруем пары от 0 до 4. Первую девочку k-й пары познакомим с k мальчиками, вторую – с остальными $9 - k$ мальчиками. При этом каждый мальчик знаком ровно с одной девочкой из каждой пары.

б) Не могло.

Предположим, что такое случилось. Девочка может быть знакома с 0, 1, …, 10 мальчиками. Поскольку девочек 11 и вариантов 11, то все эти варианты реализуются. При этом общее число пар знакомых равно $0 + 1 + \ldots + 10 = 55$, поэтому каждый мальчик знаком с $55 : 10 = 5{,}5$ девочками. Противоречие.

3. Да, может.

На рисунке 3 приведен пример, где число частей равно 21. Одна из них – многосвязная «оконная рама», в ячейках которой помещаются другие части – одиночные диагонали.

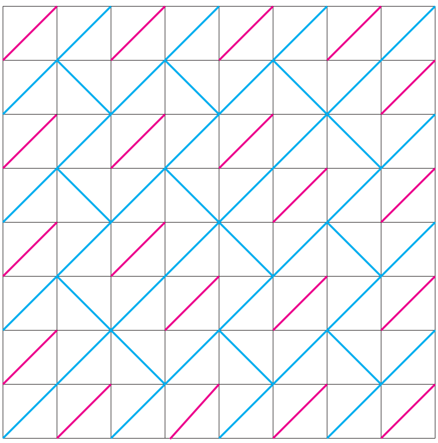


Рис. 3

4. Поровну.

Первое решение. Подсчитаем количество чисел, не кратных 5. На первом месте может стоять любая из 9 ненулевых цифр, на втором, третьем и четвертом – любая из 10 цифр, на последнем – любая из восьми, не 5 или не 0. Всего получаем $9 \cdot 8 \cdot 10^3$ чисел.

Теперь подсчитаем количество чисел, у которых ни первая, ни вторая цифра – не пятерка. На первом месте может стоять любая из 8 цифр (не 5 и не 0), на втором – любая из девяти (не 5), на третьем, четвертом и пятом – любая из 10 цифр. Получаем тот же результат: $9 \cdot 8 \cdot 10^3$ чисел.

Второе решение. Установим взаимно однозначное соответствие между двумя указанными множествами чисел. Пусть в числе $ABCDE$ обе первые цифры отличны от 5.

Если $B \neq 0$, поставим ему в соответствие число $BCDEA$;

если $B = 0$, поставим ему в соответствие число $5CDEA$.

Ясно, что таким способом получаются все пятизначные числа, не кратные 5.

Равновеликость от Произволова

11. Прямая проходит через центры симметрии прямоугольников (рис.4). Сравните с задачей 7.

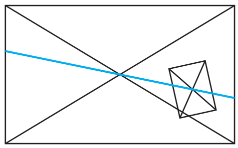


Рис. 4

12. 1.

Проведем перпендикуляры BP и BQ к прямым AD и CD (рис.5). Тогда из равенства прямоугольных треугольников ABP и CBQ (по гипотенузе и катету) следует, что площадь $ABCD$ равна площади квадрата $BPDQ$ со стороной 1.

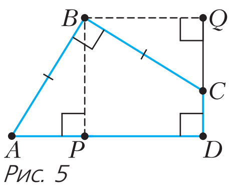


Рис. 5

По сути, треугольник CBQ получается из треугольника ABP поворотом вокруг точки B на 90° против часовой стрелки. Сравните с задачей 8.

13. 1 : 2 : 3.

Пусть S – площадь прямоугольника, тогда при любом способе разрезания площадь одного из

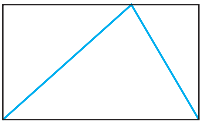


Рис. 6

треугольников равна $0,5S$ (см., например, рис.6).

Из уравнения $0,5S + x = 2(0,5S - x)$ получим, что $x = \frac{1}{6}S$ (площадь меньшей части).

Сравните с задачей 1.

14. $0,5S$.

Внутри шестиугольника существует такая точка P, что $ABCP$, $CDEP$ и $EFAP$ – параллелограммы (рис.7). Тогда треугольник ACE состоит из трех треугольников, площади которых равны половинам площадей соответствующих параллелограммов.

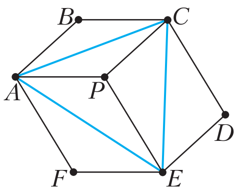


Рис. 7

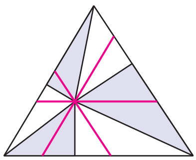


Рис. 8

15. Через общую вершину всех треугольников проведем прямые, параллельные сторонам (рис.8). Тогда данный треугольник будет составлен из 12 попарно равных треугольников, один из которых закрашен, а другой – нет.

16. Площади этих частей равны.

Площадь каждого из треугольников AMB и BNC равна половине площади квадрата. Значит, площадь серой части, которую они покрывают дважды, равна площади лиловой части, которую они не покрывают.

Сравните с задачей 3.

17. Указанное разбиение восьмиугольника осуществляется однозначно (с точностью до поворота). Сделаем два таких разбиения так, чтобы диагонали одного были перпендикулярны диагоналям другого (рис.9). При пересечении прямоугольников образуется квадрат, в котором проведем диагонали. Тогда прямоугольник состоит из тех же частей, что и две трапеции. Следовательно, его площадь равна половине площади восьмиугольника.

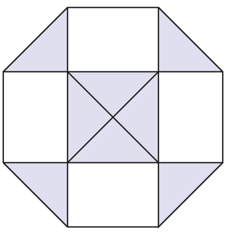


Рис. 9

Сравните с задачей 4.

18. Больше площадь закрашенной части.

Проведем недостающие диагонали трех образовавшихся трапеций, после чего одинаково пронумеруем попарно равновеликие части (рис.10). Одна закрашенная часть осталась без пары.

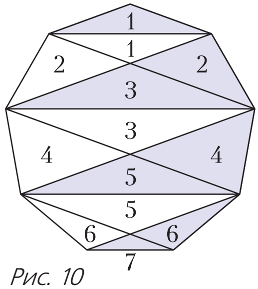


Рис. 10

19. Сумма площадей полосок шириной b и d и площади треугольника, расположенного выше диагонали, равна площади квадрата. Поэтому та часть площади квадрата, которую они покрывают дважды, равна той части площади квадрата, которую они не покрывают.

20. Достроим данную конструкцию до прямоугольника $PQRT$ (рис.11). Пусть S – площадь

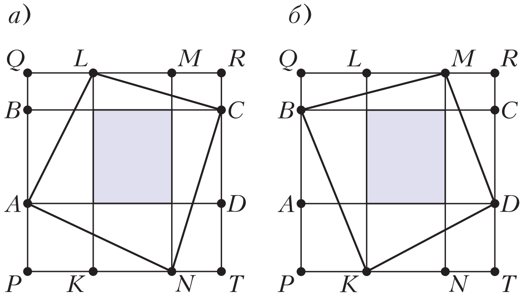


Рис. 11

пересечения данных прямоугольников. Остальные прямоугольники образуют «рамку» вокруг прямоугольника пересечения.

Тогда

$$S_{ALCN} = S_{PQRT} - 0,5\left(S_{PQRT} - S\right) = 0,5S_{PQRT} + S$$

(см. рис.11,*а*). Аналогично,

$$S_{KBMD} = S_{PQRT} - 0,5\left(S_{PQRT} - S\right) = 0,5S_{PQRT} + S$$

(см. рис.11,*б*). Следовательно, $S_{ALCN} = S_{KBMD}$.

21. Пусть искомый параллелограмм $PEQF$ построен (рис.12). Тогда площади противолежащих треугольников равны, так как эти треугольники симметричны относительно точки O пересечения диагоналей данного параллелограмма. Для равновеликости треугольников PBE и ECQ достаточно выполнения равенства $BP \cdot BE = CE \cdot CQ$ (синусы углов B и C этих треугольников равны). Так

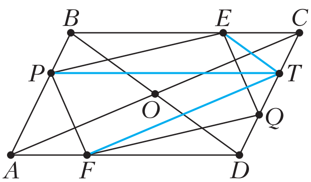


Рис. 12

как $CQ = AP$, то это равенство равносильно равенству $\frac{BE}{CE} = \frac{AP}{BP}$. Таким образом, искомое построение сводится к построению точки E, которая разделит сторону BC в указанном отношении, и точек Q и F, симметричных точкам P и E соответственно относительно O.

Используя рассуждения из задачи 9, можно выполнить построение иначе: провести отрезок PT, параллельный BC, тогда точки E и F являются точками пересечения прямых, проходящих через T параллельно BD и AC. Положение точки Q определяется автоматически (см. рис.12).

22. Заметим, что $S_{KEN} = S_{KPE} + S_{EPN} + S_{NPK}$, а $S_{MLF} = S_{MPL} + S_{LPF} + S_{FPM}$. Докажем, что $S_{KPE} = S_{MPL}$. Проведем отрезок BP (рис.13). Так как

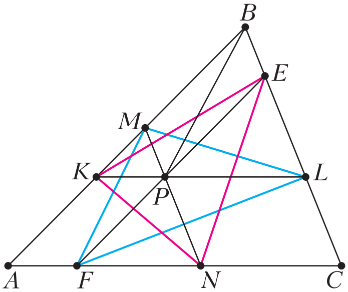


Рис. 13

$BEPK$ – трапеция, то $S_{KPE} = S_{BPE}$, а так как $BMPL$ – трапеция, то $S_{MPL} = S_{PMB}$. Но $S_{BPE} = S_{PMB}$ ввиду того, что $BMPE$ – параллелограмм. Следовательно, $S_{KPE} = S_{MPL}$.

Аналогично доказывается, что $S_{EPN} = S_{LPF}$ и $S_{NPK} = S_{FPM}$. Таким образом, $S_{KEN} = S_{MLF}$.

23. Заметим, что треугольники $A_2C_1B_2$, $B_2A_1C_2$ и $C_2B_1A_2$ обладают следующими свойствами (рис.14): 1) в силу симметрии относительно биссектрис $A_2C_1 = A_2B_1$, $B_2C_1 = B_2A_1$ и $C_2A_1 = C_2B_1$, 2) по теореме о вписанном угле

$$\angle A_2C_1B_2 + \angle B_2A_1C_2 + \angle C_2B_1A_2 = \\ = (180° - 0,5\angle A_2IB_2) + (180° - 0,5\angle B_2IC_2) + \\ + (180° - 0,5\angle C_2IA_2) = 360°.$$

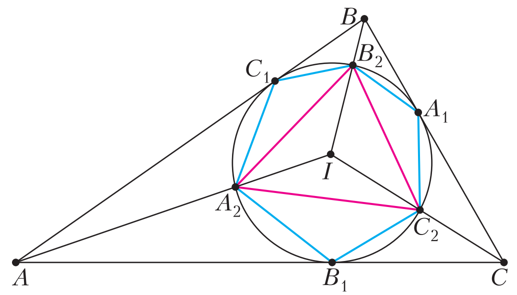


Рис. 14

Следовательно, аналогично задаче 5, из этих треугольников можно составить треугольник, который будет равен треугольнику $A_2B_2C_2$ (по трем сторонам). Тогда площадь треугольника $A_2B_2C_2$ равна сумме площадей этих трех треугольников, откуда и следует утверждение задачи.

24. Пусть средние линии EF и PQ данного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K. Так как $EPFQ$ – параллелограмм, то K – середина EF и середина PQ.

Разрежем $ABCD$ по EF и PQ и сложим полученные четырехугольники так, чтобы вершины A, B и C совместились в точке D (рис.15). Это достигается следующим образом:

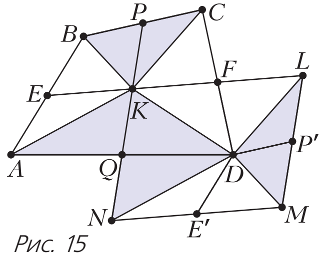


Рис. 15

$DFLP'$ симметричен $CFKP$ относительно точки F, $DQNE'$ симметричен $AQKE$ относительно точки Q, $DP'ME'$ получен из $BPKE$ параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{BD}$.

Тогда сумма углов при вершине D равна сумме углов $ABCD$, т.е. 360°. Кроме того, $KN \parallel LM$ и $KN = PQ = LM$, значит, $KLMN$ – параллелограмм, равновеликий $ABCD$. Сумма площадей треугольников DKN и DLM равна половине площади параллелограмма. Следовательно, сумма площадей треугольников AKD и BKC равна половине площади $ABCD$, откуда и следует утверждение задачи.

ЕГЭ по физике

Ответы к заданиям 1–26

№ задания	Ответ	№ задания	Ответ
1	12	10	750
2	70	11	14
3	50	12	23
4	2720	13	от наблюдателя
5	25	14	2,5
6	23	15	0,4
7	23	16	14
8	1	17	23
9	40	18	12

№ задания	Ответ	№ задания	Ответ
19	13	23	25
20	50	24	12
21	13	25	200
22	0,40,1	26	90

Решения заданий 27–32 (официальные решения предметной комиссии)

27. При изотермическом сжатии давление насыщенного водяного пара остается постоянным, поэтому процесс изображается на pV-диаграмме горизонтальным отрезком *1–2* (рис.16,*а*). При

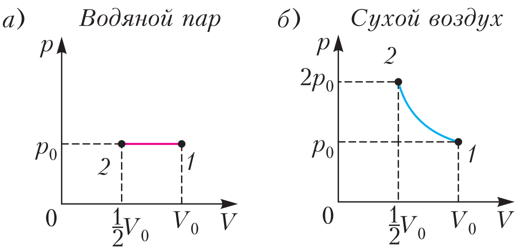


Рис. 16

комнатной температуре плотность водяного пара ничтожна по сравнению с плотностью воды, поэтому объемом сконденсированной воды можно пренебречь и случай соприкосновения поршня с водой – исключить. Изотермическое сжатие сухого воздуха описывается законом Бойля–Мариотта ($pV = \text{const}$), поэтому процесс изображается на pV-диаграмме фрагментом гиперболы *1–2*, начинающимся также в точке 1 (рис.16,*б*).

28. Шарики испытывают абсолютно неупругое соударение. Для системы из двух шариков выполняется закон сохранения импульса, так как при малом времени взаимодействия действием внешней силы (силы тяжести) можно пренеб-

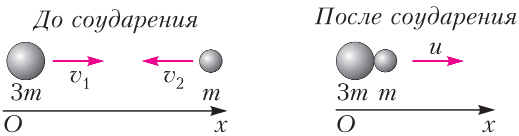


Рис. 17

речь. Взаимодействие шаров можно изобразить так, как показано на рисунке 17. С учетом того, что $v_1 = v_2 = v$, а совместная скорость после соударения равна u, запишем закон сохранения импульса в проекциях на ось Ox:

$$3mv - mv = 4mu,$$

откуда

$$v = 2u = 2 \cdot 0{,}5 \text{ м/с} = 1 \text{ м/с}.$$

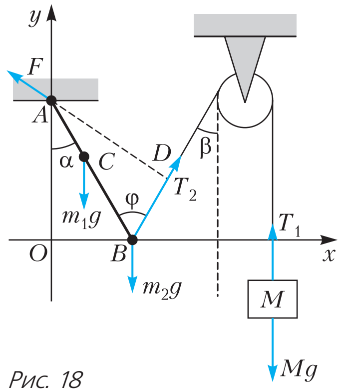


Рис. 18

29. Систему отсчета, связанную с Землей, считаем инерциальной. Введем декартову систему координат xOy, как показано на рисунке 18. Поскольку груз находится в равновесии, то согласно второму закону Ньютона

$$T_1 - Mg = 0.$$

На стержень с грузами действуют силы $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$, а также сила натяжения нити $\vec{T}_2$. Поскольку нить невесома, то $T_1 = T_2 = T$. Кроме того, на стержень действует сила $\vec{F}$ со стороны шарнира. Запишем условие равенства нулю суммы моментов этих сил относительно оси вращения, проходящей через точку A – точку шарнирного закрепления стержня:

$$m_1g \cdot b\sin\alpha + m_2g \cdot l\sin\alpha - T \cdot AD = 0.$$

Решая систему уравнений полученных условий равенства, с учетом соотношения

$$AD = l\sin\varphi = l\sin(\alpha + \beta)$$

найдем

$$l = \frac{m_1 \cdot b\sin\alpha}{M\sin(\alpha+\beta) - m_2\sin\alpha} \approx 68{,}3 \text{ см}.$$

30. Запишем в инерциальной системе отсчета второй закон Ньютона для неподвижного поршня в неподвижном сосуде:

$$(p_1 - p_0)S - mg = 0,$$

где m – масса поршня, S – площадь его поперечного сечения, p_0 – внешнее давление, p_1 – давление газа под поршнем в покоящемся сосуде. В проекциях на ось Ox второй закон Ньютона для поршня, неподвижного относительно сосуда, движущегося с ускорением $\vec{a}$, имеет вид

$$(p_2 - p_0)S - mg = ma,$$

где p_2 – давление газа в сосуде, движущемся с ускорением; при этом результирующая сила давления равна (рис.19) $F = (p_2 - p_0)S$.

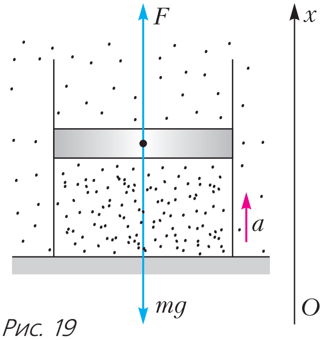


Рис. 19

По закону Бойля–Мариотта для газа под поршнем имеем

$$p_1V_1 = p_2V_2,\ p_1Sh_1 = p_2Sh_2,\ p_1 = p_2(1-\eta),$$

где h_1 и h_2 – начальная и конечная высоты столба газа под поршнем соответственно, а $\eta = \frac{h_1 - h_2}{h_1}$ – относительное изменение высоты столба газа. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} p_1S = p_0S + mg, \\ p_2S = p_0S + mg + ma, \\ p_1 = p_2(1-\eta), \end{cases}$$

найдем внешнее давление:

$$p_0 = \frac{m}{\eta S}\left((1-\eta)a - \eta g\right) = 18 \cdot 10^3 \text{ Па}.$$

31. Начальная электроемкость плоского воздушного конденсатора равна $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$, а при увеличении расстояния между его пластинами на 20 % электроемкость уменьшается: $C' = \frac{\varepsilon_0 S}{1,2d} = \frac{C}{1,2} = \frac{5C}{6}$. При отключении заряженного конденсатора от источника напряжения сохраняется его заряд: $q = CU = \text{const}$. Энергия конденсатора определяется соотношением $W = \frac{q^2}{2C}$. Следовательно, изменение энергии конденсатора равно

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{q^2}{2C'} - \frac{q^2}{2C} = \frac{6CU^2}{10} - \frac{CU^2}{2} = \frac{CU^2}{10} = 100 \text{ нДж}.$$

Энергия конденсатора увеличится.

32. Формула тонкой линзы для двух крайних положений груза маятника имеет вид

$$\frac{1}{F+l-A} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \quad \text{и} \quad \frac{1}{F+l+A} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{F},$$

где b и b' – расстояния от изображения груза маятника до линзы для двух его положений. Отсюда находим

$$b = \frac{F(F+l-A)}{l-A} \quad \text{и} \quad b' = \frac{F(F+l+A)}{l+A}.$$

Учитывая, что расстояние x между изображениями маятника в крайних положениях равно $b - b'$, получим

$$x = \frac{2F^2A}{l^2 - A^2}.$$

Так как оптическая сила линзы $D = \frac{1}{F}$, то $F = 2$ см. Тогда

$$x = \frac{2F^2A}{l^2 - A^2} = 2 \text{ см}.$$

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ № 202741

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: +7 916 168-64-74
E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8
Тел.: (831) 216-40-40

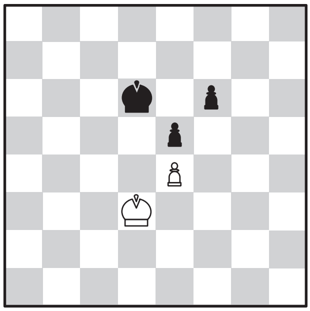
Не забывай ПРО ОППОЗИЦИЮ

В шахматной игре оппозиция – прием в пешечном эндшпиле. Король одной из сторон занимает поле, расстояние от которого до другого короля измеряется четным числом «королевских» ходов. На турнире в норвежском городе Ставангере этот прием встретился в двух партиях чемпиона мира Магнуса Карлсена.

А.Фируджа – М.Карлсен

Ставангер, 2020

1. ♘f3 ♞f6 2. g3 c5 3. ♗g2 ♞c6 4. 0-0 e5 5. e4 d6 6. c3 g6 7. d4 cd 8. cd ♝g4 9. de (на 9. d5 следует типичная жертва пешки: 9…♞d4 10. ♗e3 ♝g7 11. ♗d4 ed 12. ♕d4 0-0 с компенсацией за счет игры по черным полям) **de 10. ♘c3 ♝g7 11. h3 ♝f3 12. ♕d8+ ♜d8 13. ♗f3 0-0 14. ♔g2 ♞d4 15. ♗g5.** Белые играют пассивно. 15. ♖ab1!? выглядело активнее. **15…h6 16. ♗f6 ♝f6 17. ♘d5 ♜d6 18. ♖ac1 ♝d8 19. ♖fd1 ♚g7 20. ♘e3 ♜a6 21. a3 h5 22. ♘c4 ♝f6 23. h4 ♜c8 24. ♘e3 ♜ac6 25. ♖c6 ♜c6 26. ♖d3 ♝d8 27. ♗d1 ♜c1 28. ♗b3 b5 29. ♖d1 ♜c8 30. ♗a2 a5 31. ♖d3?!** (неточность – 31. ♗b1 a4 32. ♗d3 ♝a5 33. ♘d5 позволяло взять под контроль все поля вторжения по линии c) **a4 32. ♔f1 ♝b6 33. ♖c3.** Теперь белые вынуждены закрывать линию с ценой ослабления пешечной структуры. **33…♜c3 34. bc ♞b3 35. ♔e1 ♝c5 36. ♘c2 ♞c1?** Ответная неточность. Хорошие шансы на выигрыш давало 36…f5! 37. ef gf 38. f3 f4 39. gf ef с последующим ♝e7 – h4. **37. ♗d5 ♞d3+ 38. ♔e2 ♞f2 39. ♗c6 f6 40. ♘e3 ♞h1 41. ♘f1 ♝a3 42. ♗b5 ♝b2 43. ♗a4 ♝c3 44. ♔f3 ♝d4 45. g4 hg+ 46. ♔g4 ♞f2+ 47. ♔f3 ♚h6 48. ♘g3 ♞d3 49. ♗e8 ♞f4 50. ♘e2 ♞e6 51. ♗f7 ♞c5 52. ♘g3 ♝c3 53. h5 ♝e1 54. ♗g6 ♝g3 55. ♔g3 ♚g5 56. ♔f3 ♞b3 57. ♗f7 ♞d4+ 58. ♔g3 ♞e2+ 59. ♔f3 ♞f4 60. ♔g3 ♞h5+ 61. ♗h5!** Пешечный эндшпиль теоретически ничейный. Легкофигурный эндшпиль после 61. ♔f3 ♞h4 более сложен для белых с практической точки зрения. **61…♚h5 62. ♔h3 ♚h6 63. ♔h4 ♚g7 64. ♔g3 ♚f8 65. ♔f2 ♚e7 66. ♔e2 ♚e8 67. ♔e3 ♚d7 68. ♔d3 ♚d6.** После этого хода у иранского гроссмейстера оставалось всего несколько секунд, и он дрогнул.

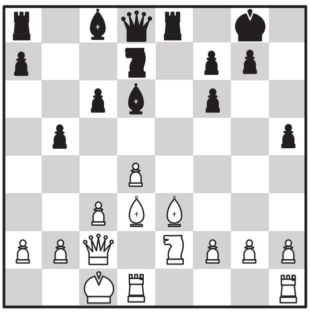


69. ♔c3?? Разумеется, правильно 69. ♔d2, держа дальнюю оппозицию. **69…♚c5**, и черный король отталкивает белого от пешки e4, поэтому **белые** тут же **сдались**.

Я.-К.Дуда – М.Карлсен

Ставангер, 2020

1. e4 c6 2. d4 d5 3. ♘c3 de 4. ♘e4 ♞f6 5. ♘f6+ ef 6. c3 ♝d6 7. ♗d3 0-0 8. ♕c2 ♜e8+ 9. ♘e2 h5!? Новинка, реанимирующая вариант. На 9…g6 следует 10. h4 с атакой, а 9…h6 слишком пассивно. **10. ♗e3 ♞d7 11. 0-0-0 b5.**



12. d5! c5! Практически вынужденно. Жертвуя пешку, черные получают возможность давить на ферзевом фланге. **13. ♗b5 ♜b8 14. c4 a6 15. ♗a4 ♜e7 16. ♘g3 ♞e5?!** (точнее 16…♞b6 17. ♗c6 ♜e3!? 18. fe h4 19. ♘f1 ♝g4 с сильной инициативой) **17. ♘e4?!** (ответная неточность, сильнее 17. ♗d2! ♜eb7 18. b3, не пуская ладью на b4) **♜eb7 18. b3 ♜b4 19. ♗d2 ♜a4 20. ba ♝f5 21. ♖de1 h4?!** Снижает темп атаки, сильнее продолжить нападения 21…♞g4!? 22. f3 ♝e4! 23. fe ♝e5 24. ♗c3 ♝d4!? с атакой по черным полям. **22. h3 ♞g6 23. ♖e3 ♞f4 24. g4 ♝g6 25. ♔d1 f5 26. ♘d6 ♛d6 27. gf ♝h5+ 28. f3 ♛f6 29. ♗c3 ♛g5 30. ♕e4 ♛g2?** Логичный ход, но на него у белых припасен эффектный ответ. Компьютерный анализ указывает на необходимость профилактики: 30…♚h7! 31. ♗e5 ♞d5!! 32. cd ♜b1+ 33. ♕b1 ♛e3, и черные отыгрывают материал, переходя в ничейный эндшпиль с разноцветными слонами. **31. ♖he1 ♛a2? 32. ♕c2 ♛c4 33. ♖e8+! ♚h7** (очевидно, только в этот момент Магнус заметил, что на 33…♜e8 34. ♖e8+ ♚h7 следует вскрытое нападение с выигрышем ферзя: 35. ♖h8! ♚h8 36. ♗g7! ♚g7 37. ♕c4) **34. ♖b8 ♛d5+ 35. ♔d2 ♝f3+ 36. ♔c1 ♛f5 37. ♖e3 ♞e2+ 38. ♔b2 ♞c3 39. ♕c3.** Позиция белых полностью выиграна, но они были в цейтноте, поэтому чемпион мира решил еще побороться: **39…♛f4 40. ♕d3+ f5 41. ♖f8 ♛b4+ 42. ♔c1 ♝e4 43. ♕b3 ♛d4 44. ♕c3 ♛d6 45. ♖f7 ♛g6 46. ♖d7 ♛g1+ 47. ♔b2 c4 48. ♖e4 fe 49. ♖d4 ♛f2+ 50. ♕d2 c3+ 51. ♔c3 ♛g3+ 52. ♔b2 ♛h3 53. ♖e4 ♛g3 54. ♕d4 ♛g2+ 55. ♔c3 ♛f3+ 56. ♔b4 ♛f8+ 57. ♔a5 ♛f5+ 58. ♔a6 g5 59. a5 h3 60. ♖e7+ ♚g6 61. ♕g7+ ♚h5 62. ♕h7+ ♚g4 63. ♖e4+!** Потеря ферзя неизбежна, поэтому **черные сдались.**

А.Русанов

Индекс 90964

Прогулки с физикой

Почему пар обжигает сильнее, чем вода, а металл «холодит» сильнее камня?

Кто круче ?

(Подробнее – на с.33 внутри журнала)

ISSN 0130-2221 20009
9 770130 222207