

МАЙ

ISSN 0130-2221

2020 · № 5

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



ГОЛОВОЛОМКА КОНВЕЯ

Британский математик Джон Конвей занимался не только «серьезной наукой» — многие его работы посвящены так называемой развлекательной математике. Достаточно сказать, что он придумал знаменитую игру «Жизнь». Подробно о ней можно почитать в «Кванте» №9 за 1974 год, а о других достижениях Конвея читайте в статьях В. Клепцына и Е. Смирнова в этом номере журнала.

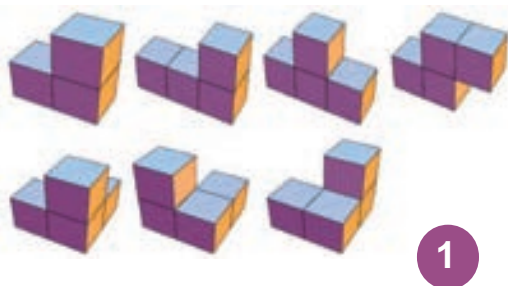
Изучение игр и головоломок иногда приводило Конвея к важным научным результатам (например, исследуя игры, он придумал так называемые сюрреальные числа, которые позже нашли применение в комбинаторной теории игр), но это не было самоцелью. Так, в 1961 году Конвей вместе с Майклом Гаем, еще будучи студентами Кембриджского университета, вручную описали все 240 решений известной головоломки «Кубики Сома», в которой требуется собрать куб $3 \times 3 \times 3$ из семи деталей, показанных на рисунке 1.

Позже Конвей придумал собственную головоломку, в которой также нужно собрать куб из набора деталей, — со временем ее стали называть его именем. В головоломке Конвея 18 деталей: 13 брусков $1 \times 2 \times 4$, один брусок $2 \times 2 \times 2$, один брусок $1 \times 2 \times 2$ и три бруска $1 \times 1 \times 3$ (они показаны на рисунке 2). Из них нужно сложить куб $5 \times 5 \times 5$ (рис.3).

Из-за того, что деталей много, «лобовое» решение перебором скорее всего займет очень много времени. Но можно заметить, что в этой, казалось бы, обычной (хотя и сложной) головоломке неожиданно срабатывает одна из стандартных «олимпиадных» идей, благодаря чему решение заметно упрощается.

Желаем успехов в его поиске!

Е.Епифанов



1



2



3

В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук
Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН

Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,
М.Н.Бондаров, Ю.М.Брук,
А.А.Варламов, С.Д.Варламов,
А.П.Веселов, А.Н.Виленин, В.И.Голубев,
Н.П.Долбилин, С.А.Дориченко,
В.Н.Дубровский, А.А.Заславский,
А.Я.Канель-Белов, П.А.Кожевников
(заместитель главного редактора),
С.П.Коновалов, К.П.Кохась, А.А.Леонович,
Ю.П.Лысов, А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,
А.М.Райгородский, Н.Х.Розов,
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,
А.В.Устинов, А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ
СОВЕТ

А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,
А.А.Боровой, В.В.Козлов,
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин,
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лившевский,
А.И.Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

- 2 Пятьдесят восьмая грань бриллианта.
Н.Дубровинская
- 10 Игры Джона Конвея. *В.Клепцын*
- 15 Числовые фризы. *Е.Смирнов*
- 25 Почему плохо кричать против ветра. **Г.Коткин**

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 28 Задачи M2602–M2605, Ф2609–Ф2612
- 29 Решения задач M2590–M2593, Ф2597–Ф2600
- 37 Вокруг правильного пятиугольника.
А.Даниярходжаев

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Калейдоскоп формул для π

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 40 Задачи

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 41 Парадокс Толи Втулкина. *С.Дворянинов*

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 46 Работа над ошибками. *В.Журавлев, П.Самовол*

- 51 Ответы, указания, решения

Вниманию наших читателей (24, 39, 64)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье В.Клепцына.*
Изображение: Michel Milinkovitch's Laboratory of
Artificial & Natural Evolution, University of Geneva
- II *Коллекция головоломок*
- III *Шахматная страничка*
- IV *Прогулки с физикой*

Пятьдесят восьмая грань бриллианта

Н.ДУБРОВИНСКАЯ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ РАССКАЖЕМ о необычном инструменте для изучения физики и химии материалов при высоких давлениях и температурах – об алмазной наковальне.

Можете ли вы представить себе кузницу и ее главную принадлежность – наковальню? Не уверена, что в наше время это под силу каждому, ведь кузница и наковальня так же далеки от нашей повседневной жизни, как ушедшие в прошлое карета, примус или граммофон. Однако наковальня – это кузнечный инструмент для холодной и горячей обработки металлов, представляющий собой массивную металлическую опору, на которой куют металлические заготовки. Куют – значит с размаху бьют молотом по металлу на наковальне. Алмазная наковальня – это тоже опорный инструмент, на котором тоже «обрабатывают» металлы и другие вещества и который тоже может быть использован с нагревом и без нагрева. Но по этой наковальне не бьют молотом, а напротив, обращаются с ней исключительно деликатно. Что же это за инструмент, как он работает, как и для чего его используют ученые?

Для начала немного физики. Вернемся к ковке. В процессековки, под ударами молота, т.е. под влиянием давления и, как правило, высокой температуры, металл уплотняется, что повышает его прочностные характеристики. Ключевое слово здесь «давление», которое возникает всегда, когда к поверхности прикладывается сила. Под давлением объем сжатого материала уменьшается – это свойственно каждому веществу. При определенном, достаточно высоком давлении любой газ и жидкость

затвердевают, а твердая фаза переходит в новую, более плотную форму. Заставляя атомы адаптироваться к все меньшему и меньшему объему, давление изменяет вещество: под его воздействием атомы должны смещаться, образуя более плотно упакованные конфигурации. Это означает, что связи между атомами – взаимодействия электронов атомов – также должны измениться. Таким образом, давление служит мощным инструментом для изучения твердых тел и их электронной структуры, помогая понять, как устроен наш физический мир и что удерживает его таким, каков он есть. До каких же давлений можно сжать вещество?

Все предметы на поверхности Земли находятся под давлением в одну атмосферу, или приблизительно в один бар ($1 \text{ атм.} \approx 1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па} = 10^5 \text{ Н/м}^2$). Такое давление оказывает вес тела массой в 1 кг на площадь в 1 см^2 . С этой точки зрения большинство давлений, с которыми мы сталкиваемся в повседневной жизни, довольно скромные. Так, скороварка создает давление около полутора атмосфер, воздух в автомобильных шинах обычно находится под давлением около двух атмосфер, а женщина в туфлях «на шпильках» может создать давление в десятки атмосфер. Однако, когда исследователи говорят о высоком давлении, они имеют в виду значительно большие величины – давления в тысячи или миллионы атмосфер (килобары или мегабары). Как же они создаются?

Поскольку давление – это сила, деленная на площадь поверхности, к которой она приложена, то понятно, что поднять его можно за счет увеличения силы и/или уменьшения площади. Сила может созда-

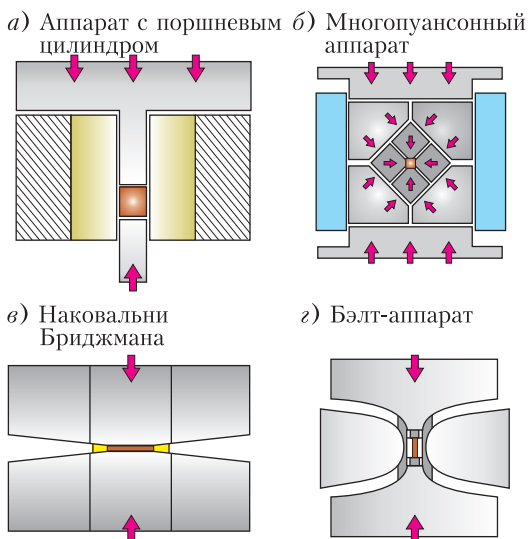


Рис. 1. Схемы типичных устройств, используемых в науке и технике для создания давлений

ваться, например, гидравлическим прессом. Максимальный предел силы определяется прочностью на сжатие того материала, из которого изготавливают детали устройства, передающего давление на испытуемый образец. Современный аппарат с поршневым цилиндром (рис. 1, а) представляет собой простейшее устройство, используемое для создания давления приблизительно в 35–40 тысяч атмосфер – максимального давления, не разрушающего самого поршня, изготовляемого из карбида вольфрама. Принцип работы этого аппарата – увеличение давления при передаче силы с большей поверхности на меньшую – известен с глубокой античности. Древние винные и масляные прессы работали по тому же принципу.

Хитроумный дизайн современных устройств для создания давления позволяет снизить нагрузку на их детали и тем самым увеличить предельное рабочее давление при использовании материалов с аналогичными прочностными характеристиками. Так, давление до 250–300 тысяч атмосфер создается в лабораториях с использованием мощных гидравлических прессов и многопуансонных аппаратов (рис. 1, б), в которых испытуемое вещество сжимается не с двух сторон, как в аппарате с поршне-

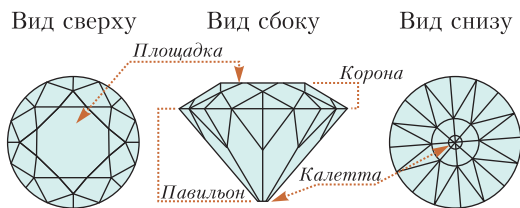


Рис. 2. Бриллиантовая огранка алмаза

вым цилиндром, а сразу с нескольких. Понятно, что размер испытуемого образца при таких давлениях очень мал – от долей миллиметра до нескольких миллиметров. Чтобы создавать интересующие ученых давления в несколько миллионов атмосфер, потребовалось новое решение. Этим решением стала ячейка с алмазными наковальнями. Как же она устроена?

Полагаю, что не каждый из читателей держал в руках ювелирный алмаз и не каждый интересовался особенностями его огранки. Бриллиант (от фр. *brillant* – блестящий, сверкающий) – это алмаз, которому посредством обработки придана специальная форма: бриллиантовая огранка (рис. 2). В круглом бриллианте есть две основные части: верхняя и нижняя – корона и павильон. Корона имеет сверху самую большую грань, так называемую площадку, плюс еще 32 грани, вместе составляющие 33 грани короны. Павильон вытянут вниз и имеет 24 грани. Шестнадцать клиньев и восемь основных граней павильона сходятся в одной точке – шипе, нижней вершине бриллианта. Таким образом, круглый бриллиант «идеальной огранки» имеет 57 граней. Однако ученым нужна как раз та, которая в ювелирном бриллианте необязательна, – 58-я маленькая грань на месте шипа, параллельная площадке. Это – калетта. Она и выполняет роль алмазной наковальни (рис. 3).

Именно 58-гранный бриллиант стал первой эффективной наковальней в ячейке высокого давления, в которой таких наковален две – верхняя и нижняя (рис. 4). Вещество для исследований зажимается между двумя калеттами, и чем меньше размер калетты, тем выше давление. Алмаз прозрачен для рентгеновского излучения, что позволяет изучать структуру и

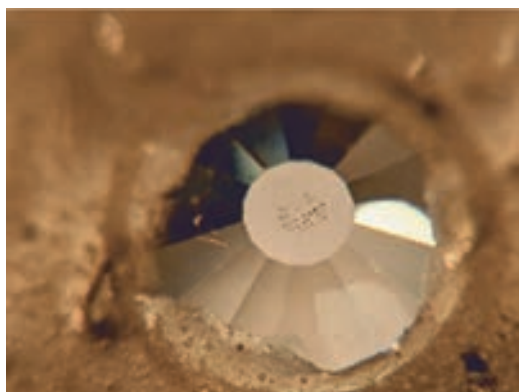


Рис. 3. Алмазная наковальня под микроскопом – калетта бриллианта диаметром 0,5 мм с кристалликами, предназначенными для изучения под давлением

состав вещества, находящегося между наковальнями в камере высокого давления, методами рентгеновской дифракции. Энергия, необходимая для инициирования и осуществления химических реакций под давлением, обеспечивается путем нагрева вещества в камере с помощью лазерного излучения, подводимого с обеих сторон ячейки. Таким образом, эффект генерации очень высоких давлений достигается за счет применения самого твердого и самого нежимаемого из всех известных материалов – алмаза – для изготовления наковален и существенного уменьшения размера образца.

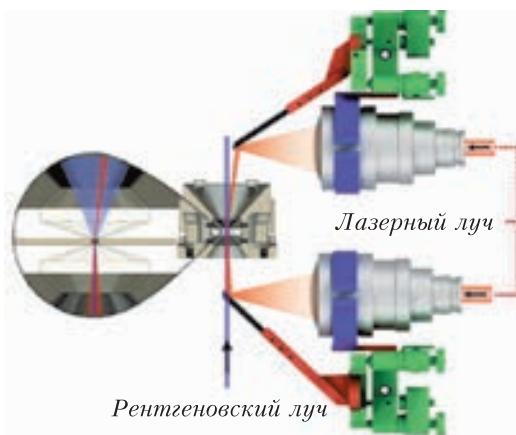


Рис. 4. Алмазные наковальни (слева) в ячейке высокого давления (в центре) с лазерным нагревом (справа)

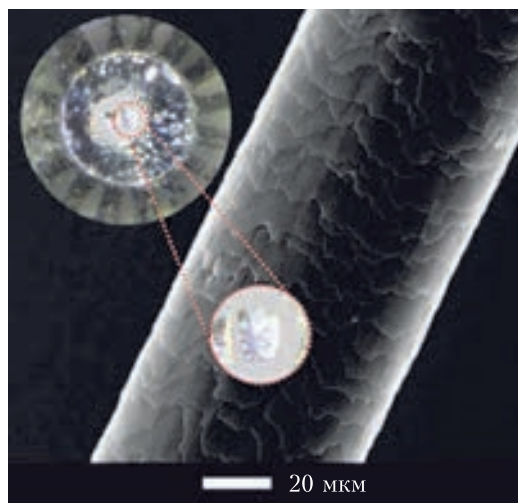


Рис. 5. Камера для образца в ячейке с алмазными наковальнями под оптическим микроскопом (слева вверху) в сравнении с толщиной человеческого волоса (изображение под электронным микроскопом)

С калеттами диаметром в 40 микрон можно создавать давления до 4 миллионов атмосфер – больше, чем в ядре Земли. При этом камера для образца имеет мизерные размеры, а сам образец, как правило, это крупица вещества в несколько микрон, что в десятки раз меньше толщины человеческого волоса (рис.5). Сама ячейка, в которой закрепляются алмазные наковальни, изготавливается из металла. Она состоит из двухдвигающихся друг в друга частей, а давление между калеттами увеличивается путем постепенного закручивания винтов, скрепляющих обе части калетты. Понятно, что работа эта деликатная и молоту на таких наковальнях делать нечего. Приготовление ячейки, т.е. юстировка алмазов, подготовка камеры для образца и закладка в нее всех необходимых для экспериментов компонент, – дело тонкое, почти ювелирное, и выполняется исследователями под микроскопом. Кто же все это придумал? Как ученым пришла в голову такая конструкция?

Воистину неисповедимы пути научного поиска. Однако бывают обстоятельства, приводящие к ускоренному развитию определенного направления. Трудно пове-

рять, но это факт, что существенный вклад в развитие физики высоких давлений внесли... резолюция 181 (II) Генеральной Ассамблеи Организации Объединенных Наций по Палестине в 1947 году и контрабандисты. Контрабанда драгоценностей существовала всегда, но особенно большое количество алмазов попало в Америку после решения Великобритании вывести войска из Палестины в 1948 году. Прежде чем покинуть опасную зону, многие конвертировали свое богатство в бриллианты и пытались незаконно ввезти их. На таможах США в 50-х годах было конфисковано драгоценных камней на миллионы долларов, но правительство отказалось выпускать их на тщательно регулируемый коммерческий рынок. Вместо этого они были переданы ученым государственного Национального Бюро Стандартов. Так исследователи Чарльз Вейр (Charls Weir), Элвин Ван Валкенбург (Alvin Van Valkenburg) и работавший с ними инженер Элмер Бантинг (Elmer Bunting) получили доступ к практически неограниченному запасу бриллиантов. Это именно им и пришла в голову идея ячейки высокого давления с противоположащими алмазными наковальнями, не только создающими давление, но и позволяющими оптически наблюдать сжимаемый образец через прозрачные алмазные «окна».

Казалось бы, идея лежала на поверхности. К тому времени аппарат с противоположащими коническими наковальнями (рис.1,в), сделанными из твердого материала, карбида вольфрама, позволял его изобретателю Перси Бриджману (Percy W. Bridgman), Лауреату Нобелевской премии по физике 1946 года, изучать материалы под давлениями в 100 тысяч атмосфер. Замени карбидные наковальни алмазными – и готово! Однако, нет. Путь к этому дизайну прямым не был.

Изначально прототипом для создания прозрачной миниатюрной ячейки высокого давления был аппарат с поршневым цилиндром. В качестве материала выбрали великолепный драгоценный камень – чистойшей воды кристалл алмаза изумрудной огранки в 7,5 карат (1 карат = 0,2 г) (рис.6)



Рис. 6. Бриллиант изумрудной огранки в 7,5 карат (размером 13,1× 9,7× 6,3 мм). Такой же был использован для изготовления прозрачной миниатюрной ячейки высокого давления

стоимостью около четверти миллиона долларов на сегодняшнем розничном рынке.

В такой ячейке алмаз играл лишь пассивную роль крепкой и прозрачной цилиндрической камеры, в которой двигался миниатюрный поршень из жесткой проволоки. Алмаз является самым твердым из всех известных материалов и на изготовление крошечного отверстия диаметром в 0,4 мм и длиной 6,3 мм потребовалось 4 полных месяца сверления. В результате была получена самая необычная в мире камера высокого давления. Увы, ненадолго. Распираемый изнутри высоким давлением, создаваемым металлическим поршнем, алмаз просто разлетелся вдребезги. Дело было не только в недостаточной крепости поршня – создатели «сверленной ячейки» не учли, что алмаз, будучи чрезвычайно прочным на сжатие, не выдерживает высоких нагрузок на растяжение. Потребовалось еще немало времени и... бриллиантов, пока, издробив изрядное их количество, исследователи сошлись на одном элегантном решении. Они разработали ячейку с противоположащими алмазными наковальнями, основанные на устройстве аппарата Перси Бриджмана. Интересно отметить, что параллельно с деятельностью «алмазодробителей» шла ин-

тенсивная работа «алмазопроизводителей» – ученых и инженеров, стремившихся реализовать искусственный синтез алмазов, т.е. победить в почти двухвековой гонке за тем, что раньше было прерогативой природы. Открытие коренных алмазных пород (кимберлитов) в Южной Африке в 1869 году позволило ученым оценить термодинамические условия формирования алмазов в недрах Земли и понять, хотя и не сразу, решающую роль давления для их синтеза. Первые «рукотворные» алмазы были получены 16 декабря 1954 года командой Американской фирмы «General Electric» в Бэлт-аппарате (от английского *belt* – пояс) (рис.1,2). А в 1959 году, после опубликования «рецепта» в журнале «Nature», каждый имеющий пресс для создания давлений в 55 тысяч атмосфер и температур в 1500 °С мог стать алмазопроизводителем. Но это уже другая история.

Для нашей же истории интересно то, что ученые сначала полагались на Землю, чтобы понять происхождение алмазов, а сегодня они полагаются на алмазы, чтобы понять происхождение и устройство самой Земли. Современные представления о фазовом составе мантии и ядра Земли основаны на результатах экспериментов в алмазных наковальнях. Только они позволяют создать в лаборатории необходимые статические давления и температуры (вплоть до 4 млн атм. и выше 5000 °С, как в ядре Земли) и изучить, что происходит с материалами в таких экстремальных условиях. Образцы в ячейках нагреваются лазерами, а физические и химические изменения, происходящие при этом с материалами, изучаются с помощью рентгеновской дифракции, спектроскопии комбинационного рассеяния, мёссбауэровской и инфракрасной спектроскопии, а также другими современными методами в лабораториях и на источниках синхротронного излучения. Спектр исследований, конечно же, не ограничивается проблемами наук о Земле и планетологии. Какие еще вопросы волнуют ученых в настоящее время?

Научные исследования с помощью ячеек с алмазными наковальнями охватывают

очень широкий круг фундаментальных и прикладных проблем физики, химии и материаловедения. Приведем лишь несколько примеров, касающихся трех особенно интересных и важных современных направлений – проверки теорий в физике твердого тела, синтеза новых материалов и изучения свойств твердых тел в условиях экстремальных давлений и температур. Это важно не только для углубления понимания природы вещей, но и для поиска возможностей целенаправленного синтеза материалов с заданными уникальными свойствами.

Поиск альтернативных источников энергии и новых технологий, которые позволяют использовать энергию максимально эффективно и с минимальными потерями, находится в центре внимания современного материаловедения. Сверхпроводимость, т.е. способность некоторых материалов проводить электрический ток без какого-либо сопротивления, – одно из самых захватывающих физических явлений в физике твердого тела с момента ее первого экспериментального обнаружения в 1911 году. При атмосферном давлении рекорд максимальной критической температуры сохраняется за купратами, которые проявляют сверхпроводимость при температурах до 138 К (–135 °С). Однако такие температуры еще слишком низки и применение сверхпроводников при технологически значимых температурах, близких к комнатной, до сих пор не представляется возможным. Хотя некоторые исследователи сомневаются, достижима ли сверхпроводимость при комнатной температуре вообще, она неоднократно обнаруживалась при температурах, которые ранее были неожиданными или считались невозможными (как в случае с высокотемпературными сверхпроводниками, работающими при температурах выше температуры жидкого азота 77 К). Обнаружение такого сверхпроводника имело бы огромное технологическое значение. Среди прочего, оно помогло бы решить мировые энергетические проблемы, создать еще более быстрые компьютеры, новые запоминающие устройства и сверхчувствительные датчики.

С тех пор как в 1935 году Юджин Вигнер (E. Wigner) и Хиллард Белл Хантингтон (H. B. Huntington) высказали предположение, что при достаточно высоких давлениях молекулярный водород должен перейти в атомарно-металлическое состояние, а в 1968 году Нейл Ашкрофт (Neil Ashcroft) предсказал, что твердый металлический водород при экстремально высоких давлениях должен стать сверхпроводящим при приблизительно комнатной температуре, попытки проверить эти прогнозы экспериментально не прекращаются. Хотя группа Гарвардских ученых в 2017 году заявила о наблюдении металлизации водорода при 495 ГПа, а группа французских ученых в 2019 году – при 425 ГПа, бесспорного экспериментального подтверждения металлизации и сверхпроводимости водорода при комнатной температуре пока нет, а современные теоретические расчеты предсказывают все более высокие давления перехода.

Альтернативный путь к сверхпроводимости при комнатной температуре основан на идее «насыщения» химических соединений атомами водорода. По теории, при химическом синтезе под давлением в гидридных системах (т.е. в соединениях, содержащих водород) можно достичь таких малых расстояний между атомами водорода, которые бы способствовали диссоциации молекул H_2 и образованию в структуре гидрида металлической «подрешетки» из атомов водорода. Недавно опубликованные результаты экспериментов в алмазных наковальнях показали возможность синтезировать богатые водородом гидриды металлов, которые при очень высоких давлениях, как утверждается, становятся сверхпроводящими при температурах до 260 К (-13°C), почти как в морозильной камере холодильника. Этот конкретный рекорд 2019 года относится к гидриду лантана высокого давления (LaH_{10}), предыдущий же был установлен тригидридом серы (H_3S), показавшим сверхпроводимость под высоким давлением при температурах до 203 К (-70°C). Хотя в обоих случаях речь идет о давлениях порядка 200–150 ГПа, что бесконечно далеко от технологически возможных, о

температурах, все еще далеких от комнатных, и материалах, которые нельзя сохранить при нормальных условиях, каждый новый шаг поиска ценен, потому что он ведет к прорыву в нашем понимании мироздания и открытию новых материалов и целых классов соединений, свойства которых еще только предстоит изучить.

Важным направлением современного научного поиска является создание материалов с высокой плотностью энергии, способных при определенных условиях под влиянием внешних воздействий к быстрому ее освобождению. Среди таких материалов одними из наиболее многообещающих являются полинитриды – азотные соединения, в которых несколько атомов азота связаны простыми одинарными связями. Запасенная в них энергия, по оценкам, может быть в несколько раз больше по сравнению с выделяемой известными в настоящее время наиболее эффективными взрывчатыми веществами. Работы нашей группы в Байройте показали принципиальную возможность синтеза полинитридов путем прямой химической реакции азота с металлами при высоких давлениях и температурах и сохранения их при нормальных условиях. Если бы мы могли производить их в существенных количествах, это произвело бы революцию в двигательной технике, например – в аэрокосмической промышленности. Однако пока их синтезируют только в алмазных наковальнях. Несмотря на все еще отдаленные перспективы применения, этот этап работы крайне необходим для понимания процессов формирования, структуры и состава новых материалов в деталях, что в будущем может помочь в решении вопросов их потенциального промышленного синтеза. Полинитриды интересны также и в связи с их уникальной и непредсказуемой химией и кристаллографией. Как говорил Козьма Прутков, «нельзя объять необъятного», поэтому приведем только несколько примеров наших собственных, самых свежих результатов.

Представьте, вы держите в руках хрупкий декоративный бумажный фонарик или картонную коробку с пирожными. Их лег-

ко раздавить, не прикладывая особых усилий. Раз – и от красивого фонарика останется жалкий комочек бумаги, а от пирожных липкая бесформенная масса. «Природа не терпит пустоты», – сказал Аристотель 24 сотни лет назад. Полости и незаполненные пространства «схлопываются» под давлением, а значит, можно было бы интуитивно предположить, что в процессе химического синтеза при высоких давлениях пористые кристаллические структуры формироваться не могут. Каково же было наше удивление, когда, изучая химические реакции между азотом и переходными металлами (Hf, W, Os) при высоких давлениях и температурах, мы обнаружили, что при гигантском давлении в 1000000 атмосфер (что соответствует давлению на глубине 2500 км внутри Земли) они образуют соединения с пористой структурой (рис.7). Мы назвали их «мифами», но не потому, что в их существование при таких давлениях трудно поверить, а потому, что они представляют собой металл-неорганические каркасы (от англ. *Metal-Inorganic Framework*, MIF). Образованные атомами металла и азота, эти трехмерные каркасы пронизаны каналами, заселенными молекулами азота N_2 .

В то время как открытые нами «мифы» существуют пока только при экстремальных давлениях и сохранить их в нормальных условиях еще не удалось, другие наши исследования показали, что принци-

пиально это возможно. Так, для нитрида рения ReN_2 , синтезированного изначально при очень высоких давлениях, нам удалось не только существенно снизить давление синтеза (что естественно увеличило количество получаемого вещества), но и сохранить и исследовать его в комнатных условиях. В результате мы обнаружили в этом новом материале уникальное сочетание необычных физических свойств – исключительно малую сжимаемость, сверхтвердость и металлическую проводимость. Эти свойства раньше считались несовместимыми.

Приведенные примеры наглядно показывают, насколько мощной термодинамической переменной является давление, позволяющее значительно изменять структуру, химическую связь и физические свойства вещества. Чем выше давление, тем сложнее электронные взаимодействия, тем разнообразнее материалы, которые могут быть синтезированы, и необычнее их свойства. Предел возможностей классической ячейки с алмазными наковальнями – это давления порядка 300–400 ГПа, соответствующие давлениям в центре Земли. Как же шагнуть дальше и заглянуть за пределы возможного? Конечно же, попробовать изменить конструкцию – перераспределить нагрузки так, чтобы алмазы не разрушались, а давления на образце увеличивались.

Несколько лет назад наша группа в Байройте придумала снабдить ячейку нако-

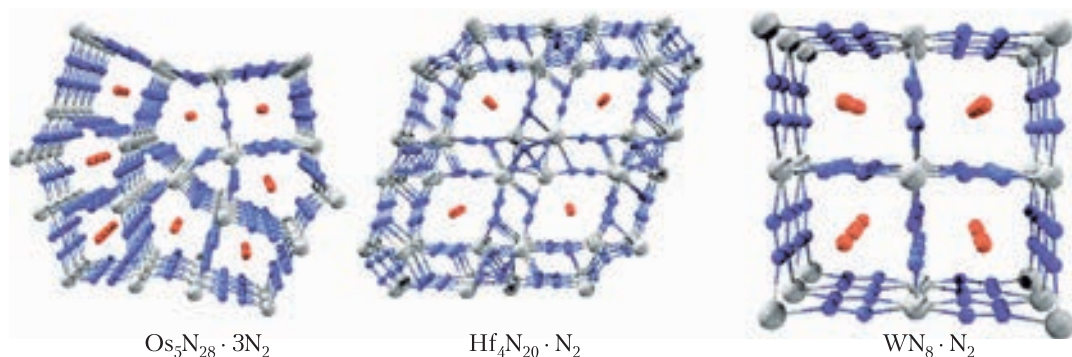


Рис. 7. Металл-неорганические каркасные структуры металл-азотных соединений, синтезированных при гигантских давлениях в 1 мегабар и температурах 2000 К в ячейках с алмазными наковальнями. Трехмерный каркас, образованный атомами металла и азота (серые и синие шарики соответственно), пронизан каналами, заселенными молекулами азота (красные шарики)

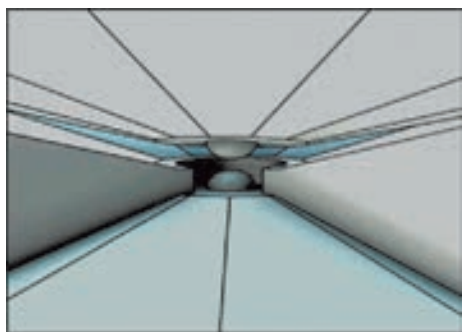


Рис. 8. Схема устройства ячейки с наковальнями второй ступени. Вторичными наковальнями здесь служат половинки шариков из суперпрочного нанокристаллического алмаза, которые сжимают образец металла размером в 0,004 мм

вальнями второй ступени (рис.8) – вторичными наковальнями. В такой ячейке давление передается на еще меньшую поверхность, что обеспечивает его дальнейшее увеличение по тому же принципу, как и в аппарате с поршневым цилиндром. Это позволило нам достичь давлений порядка 1 терапаскаля (1 ТПа = 10^7 атм.), которые отвечают давлениям в центре гигантских планет. До сих пор этот аппарат, в котором 58-я грань бриллианта (калетта) продолжает сохранять свое важное предназначение, – чемпион по созданию статических давлений. Французские исследователи предложили модифицировать профиль самой калетты, позволяющий как бы включить (инкорпорировать) вторичную наковальню непосредственно в классическую, что позволяет достигать давлений до 0,5–0,6 ТПа.

Если теперь взглянуть на корону бриллианта, она тоже претерпела изменения в дизайне. Немецкий исследователь Райни Булер (Reinhard Boehler) предложил придать ей коническую форму, что облегчило ее укрепление и увеличило ее стабильность в ячейке; при этом плоская площадка – оптическое окошко в камеру высокого давления – сохранилась. Наша группа пошла еще дальше – мы придали короне сферическую форму, поместив при этом центр калетты в оптический центр получившейся таким образом линзы (рис.9). Такое изменение короны дало возмож-



Рис. 9. Фотография алмазной наковальни со сферической короной, сделанная под микроскопом. Диаметр ее 2,5 мм

ность исследовать структуру монокристаллов в наковальнях при высоких давлениях с одновременным нагревом, т.е. в условиях, когда рентгеновский и лазерный лучи синхронно сфокусированы на образце во время эксперимента. Технически добиться этого очень сложно, поскольку рентгеновское исследование структуры требует вращения изучаемого кристалла. Если лазерный луч падает на плоскую площадку, то при вращении угол падения меняется и за счет преломления в алмазе лазерный луч теряет фокусировку. Благодаря сферическому дизайну короны, лазерный луч падает на нее всегда под одним и тем же углом – перпендикулярно касательной к сферической поверхности – и, несмотря на вращение наковальни, остается сфокусированным на кристалле.

В заключение рассказа о технике и содержании современных исследований в алмазных наковальнях хочется заметить, что подавляющая часть общей массы вещества, по крайней мере в Солнечной системе, находится под высокими давлениями в недрах планет. Так что исследования состояния материи при высоких давлениях и температурах – это очень важные шаги на пути к пониманию Вселенной.

Автор выражает искреннюю благодарность Т.Федотенко, Е.Быковой и М.Быкову за помощь в подготовке рисунков, а также члену редакционной коллегии «Кванта» Андрею Варламову, вдохновившему автора познакомить читателей журнала с такой необычной, но очень интересной областью современных научных исследований.

Игры Джона Конвея

В. КЛЕПЦЫН

Джон Конвей (26.12.1937–11.04.2020) говорил, что не проработал ни единого дня, а только играл. Блестящий математик современности, он работал «играючи» во многих областях, и мне хочется вспомнить часть того, чем он занимался и запомнился.

Игра «Жизнь»

Пожалуй, самое широко известное открытие Конвея – это придуманная им игра «Жизнь». Устроена она так: на (бесконечной) бумаге в клеточку часть клеток объявляется «живыми» (или «заполненными», и обычно их закрашивают), а остальные «мертвыми» (или «пустыми»). После этого их конфигурация начинает (вся одновременно!) эволюционировать по следующим исключительно простым правилам:

1. Если у живой клетки в некоторый момент из 8 соседей было 2 или 3 живые клетки, то на следующий ход она выживает, в противном случае она умирает (обычно говорят, что если живых соседей 1 или 0, то она умирает «от одиночества», а если больше 3, то «от перенаселения»).

2. Если у пустой клетки ровно 3 живых соседа – то на следующем ходу в ней зарождается жизнь (а иначе она остается пустой).

Так (рис.1), квадрат 2×2 («блок») остается неподвижным (у каждой его клетки по 3 живых соседа), линия из 3 клеток за 1 ход поворачивается на 90 градусов вокруг центра (поэтому ее называют «мигал-

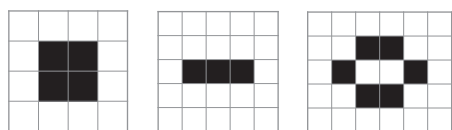


Рис. 1. Блок, семафор и улей

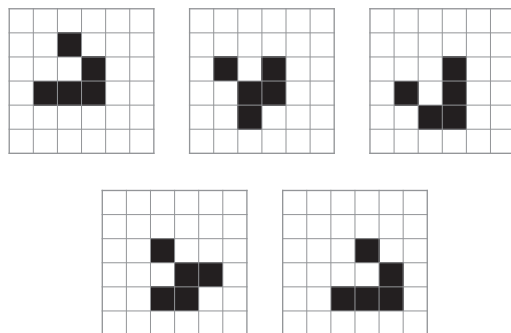


Рис. 2. Пять последовательных положений глайдера, летящего вправо-вниз

кой» или «семафором»), а прямоугольник 2×3 за один ход становится «ульем» (еще одной не меняющейся конфигурацией).

Слово «игра» тут не совсем точное, ибо все, на что влияет «игрок», это начальная расстановка клеток, все дальнейшее от него уже не зависит. Зато за жизнью такой «колонии клеток» бывает очень интересно наблюдать.

Глайдер (или планер), изображенный на рисунке 2, – конфигурация, которая движется вправо-вниз с постоянной скоростью под углом в 45 градусов. А другая невинно выглядящая конфигурация из пяти клеток – г-пентамино (рис.3) – эволюционирует на протяжении 1103 поколений. Глядя на г-пентамино, Конвей задал следующий интересный вопрос: бывают ли бесконечно растущие конфигурации? Он объявил награду в 50 долларов за решение этого вопроса – которую получил Билл Госпер, открывший *глайдерное ружье*, конфигурацию, постоянно «стреляющую» глайдерами.

Создание глайдерного ружья через какое-то время позволило доказать, что игра «Жизнь» Тьюринг-полна: любую программу, которую можно запустить на каком-нибудь компьютере, можно «эмулировать» с

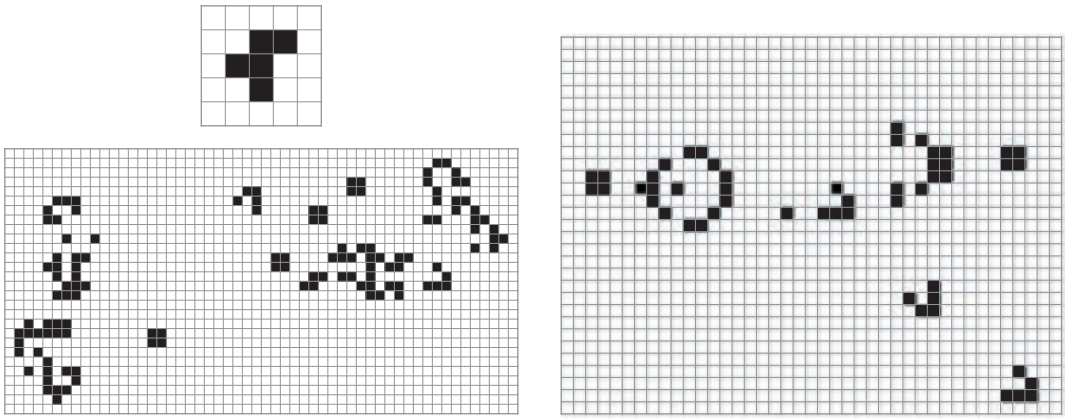


Рис. 3. Слева: г-пентамино (сверху исходное состояние, снизу конфигурация на 103-м шаге); справа: глайдерное ружье и три выпущенных им глайдера

помощью игры «Жизнь». Можно даже запустить игру «Жизнь» на игре «Жизнь» [1]!

Системы, живущие по аналогичным правилам – клетчатая плоскость, раскрашенная во много разных цветов-состояний, и правила перехода между этими состояниями, называют *клеточными автоматами*. Их рассматривали еще в 1950-е годы – они

восходят к идеям фон Неймана о самовоспроизводящихся машинах, и их использовали как упрощенные модели биологических процессов. Но не будет преувеличением сказать, что именно с игры «Жизнь» начался широкий расцвет клеточных автоматов. А их проявления в живой природе (рис.4,5) – предмет и недавних исследований [2].

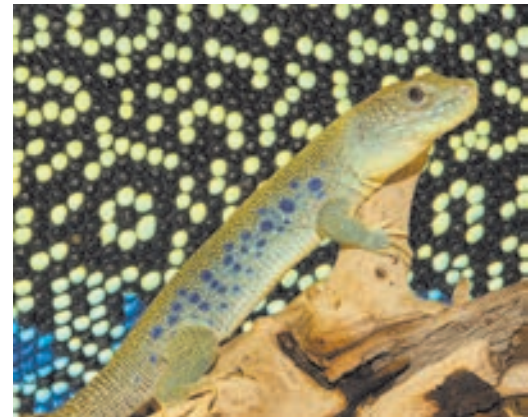


Рис. 5. Ящерица (*Timon Lepidus*), узору чешуек которой посвящена статья «Живой мезоскопический клеточный автомат из чешуек кожи» [2]. Изображение: M.Milinkovitch's laboratory, University of Geneva

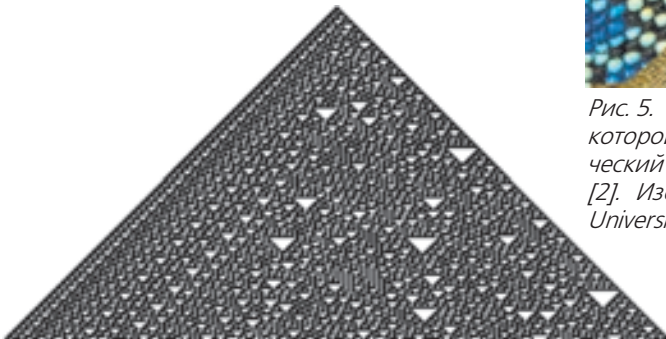


Рис. 4. Узор на ракушке (фото: R. Ling) и результат эволюции клеточного автомата «Правило 30», описанного С. Вольфрамом

Конвей в общении

Я много раз встречался с Конвеем на летних школах ISSMYS/MOMISS в Бремене и в Лионе, и Конвей постоянно что-то рассказывал (как на фотографии на



Рис. 6. Конвей в окружении участников летней школы. (Фото Рины Сергеевой)



Рис. 7. Конвей играет в «футбол». (Фото Рины Сергеевой)

рисунке 6). От его историй невозможно было оторваться; это начиналось с утра и заканчивалось зачастую за полночь (конечно же, не исключая завтраков, обедов и ужинов!).

А на фотографии на рисунке 7 он играет с одной из участниц школы в изобретенную им настольную игру «футбол».

Известный математик Гил Калаи вспоминает про эту игру: «...Конвей установил для меня отдельное правило. Каждый раз, когда я был уверен, что проигрываю, мы менялись сторонами. Излишне уточнять, что это происходило более одного раза: я был уверен, что мое положение безнадежно, мы переворачивали доску, и вскоре после этого я опять был уверен, что мое положение безнадежно...»

А вот что пишет Теренс Тао (бывший тогда аспирантом Принстона, а ныне лауреат премии Филдса): «...Я все еще по-

мню, как меня регулярно громил [Конвей] в этой игре, что было тогда полезным и необходимым уроком скромности для меня (как и для некоторых моих коллег-аспирантов)».

Игра «хакенбуш» и сюрреальные числа

Одна из придуманных Конвеем игр – «хакенбуш», или *рубка кустарника*. У нее довольно простые правила – но при этом она открывает дорогу к изобретенным им *сюрреальным числам*. Ее правила таковы: дан раскрашенный в два цвета граф, часть вершин которого расположена «на земле» (рис.8, слева). Игроки по

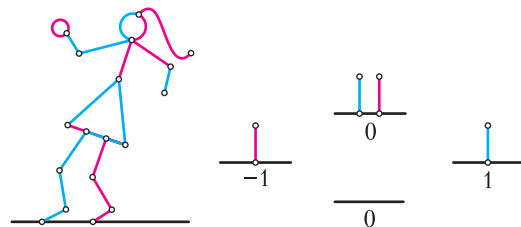


Рис. 8. Игра «хакенбуш»: пример игры и позиции со значениями -1 , 0 , 1

очереди перерезают ребра своего цвета. Если какая-то компонента графа более не связана с землей, то она удаляется; тот, кто не может сделать ход, проиграл.

Оказывается, что в этой игре ходить «невыгодно»: если, скажем, «Синий» игрок выигрывает начиная, то в той же начальной позиции он выигрывает и ходя вторым. И более того – каждой позиции можно сопоставить число, говорящее, «сколько у Синего свободных ходов». Если оно положительно, выигрывает Синий; если отрицательно – Красный. А если оно равно нулю, то в этой позиции начинающий (кем бы он ни был) всегда проигрывает.

Далее, если «сложить вместе» два графа (просто нарисовав их рядом) – то соответствующие числа тоже сложатся. Причем числа тут появляются не только целые, но и дробные. Так, графу из двух ребер, красному над синим (рис.9, слева), правильно сопоставить число $\frac{1}{2}$, потому что сумма двух его копий с позицией -1 будет

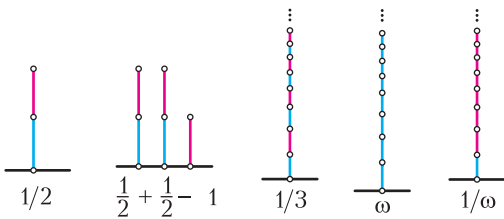


Рис.9. Позиция со значением $1/2$ и уравнение для нее; бесконечный стебель со значением $1/3$; два бесконечных стебля с не-вещественными значениями

нулевой (т.е. такой, где начинающий проигрывает).

Для конечных графов в игре «хакенбуш» сопоставляемые им числа всегда двоично-рациональные. Но – разрешив рассматривать бесконечные «стебли бамбука» (на которых, тем не менее, партия всегда завершается за конечное время), можно получить и позиции, которым сопоставляются любые вещественные числа.

Более того – оказывается, что «внутри теории игр» можно выбрать игры, которые можно объявить «числами». И естественно определить операции на них – сложение, умножение и так далее. Однако среди таких чисел будут не только все вещественные, но и многие другие. Посмотрите на три правые картинка на рисунке 9. Вторая из этих трех игр, бесконечный синий «стебель бамбука», будет соответствовать «бесконечному числу» – ординалу ω . А бесконечный стебель, в котором синее ребро только ниже, – обратному к нему «числу» $1/\omega$. И все это и есть придуманные Конвеем *сюрреальные числа* – которые я здесь, впрочем, не определил. Об этом можно почитать в книге Пьера Деорнуа [3]; а еще сюрреальным числам (уже без связи с теорией игр) была посвящена статья [4] в «Кванте» аж в 1979 году.

Чтобы завершить рассказ об играх, можно упомянуть две книги Конвея – «On Numbers and Games» и написанную в соавторстве с Берлекемпом и Ги «Winning Ways for your Mathematical Plays». Обе стали бестселлерами сразу после выхода.

Иррациональность корня из 2

Мне хочется вспомнить и очень интересную – именно для школьников – статью

Конвея и Шипмана [5], где собраны разные доказательства иррациональности корня из 2 (и других квадратных корней). Это действительно интересное чтение: как один и тот же результат может получаться совершенно разными методами. Конечно же, там упоминается и классическое доказательство, в котором выясняется, что и числитель и знаменатель должны оказаться четными, – но не только оно.

Так, там появляется доказательство Танненбаума. А именно, если бы $\sqrt{2}$ был рационален, то можно было бы взять наименьшую пару целых чисел (p, q) такую, что площадь квадрата со стороной p равна сумме площадей двух квадратов со стороной q . Но поместив два таких квадрата внутрь квадрата со стороной p (рис.10, слева), мы видим, что в таком случае площадь, закрытая дважды (а это квадрат со стороной $(2q - p)$), равна непокрытой площади (а это два квадрата со стороной $(p - q)$ каждый). И мы получаем противоречие с минимальностью пары (p, q) .

А Конвей заметил, что аналогичным образом можно доказывать и иррациональность корня из 3 – оно изображено на рисунке 10 справа.¹

Еще одно из собранных в этой же статье доказательств принадлежит Миклошу Лацковичу: если раскрыть скобки в выражении $(\sqrt{2} - 1)^n$, то получится число вида $A\sqrt{2} - B$, где A и B – целые. И если бы $\sqrt{2}$

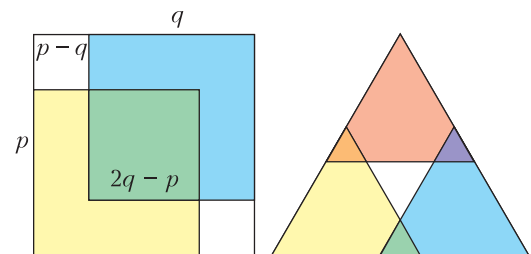


Рис. 10. Доказательство Танненбаума иррациональности $\sqrt{2}$ и его модификация Конвея для $\sqrt{3}$

¹ Есть и аналогичные доказательства для $\sqrt{5}$ и $\sqrt{6}$: их можно найти в статье А.Спивака «Иррациональность корней из 2, 3, 5 и 6» («Квант», 2010, №1).

был рациональным числом вида $\frac{p}{q}$, то ни при каком n такая величина не могла бы быть меньше $\frac{1}{q}$. И это противоречит тому, что $(\sqrt{2} - 1)^n$ с ростом n становится сколь угодно малым.

Головоломная задача

Одна из не очень известных статей Конвея, совместная с М.С.Патерсоном, посвящена вот такой задаче. На доске написаны три числа: 6, 7 и 8. У Антуана, Боба и Чарли на шляпах написаны неотрицательные целые числа, сумма которых равна одному из трех чисел на доске; какому — им неизвестно. Каждый из них видит числа двух других, но не свое.

Ведущий спрашивает по кругу у каждого из них, знает ли тот свое число. Требуется доказать, что рано или поздно кто-нибудь ответит «да». Если на шляпах участников написаны числа 2, 2 и 3 соответственно, то перед этим прозвучит аж 18 ответов «нет» — что явно не помогает «лобовому» подходу к разбору случаев.

Теорема, которую изящным рассуждением доказали Конвей с Патерсоном в работе с говорящим названием «Задача, вызывающая головную боль» [6], утверждает, что если участников не меньше, чем вариантов чисел на доске, то рано или поздно ответ «да» прозвучит.

Другое

Многое и многое из того, чем занимался Конвей, осталось за кадром нашего рассказа. Это *полином Конвея* в топологии — инвариант узла, позволяющий доказывать, что какие-то узлы нельзя развязать. Исследования решеток и кодов и три *группы Конвея* — исключительные простые группы. Мысленный эксперимент в квантовой механике — *теорема о свободе воли*. Оператор чтения [7] (итерации которого задают последовательность «Посмотри-и-скажи»²). Числовые фризмы [8], которым

была посвящена статья Конвея в «Кванте» (1991, №3) и вокруг которых происходит много интересного даже сегодня (см. статью Е.Смирнова в этом номере журнала). Книга «Квадратичные формы, данные нам в ощущениях», она переведена на русский язык. *Атлас конечных групп*, в создании которого Конвей участвовал, и сформулированная им и Нортеном гипотеза *Monstrous Moonshine*, относящаяся к самой большой спорадической простой группе — *Монстру*, и еще многое.

Но хочется завершить этот текст цитатой из Мартина Гарднера про формулу Конвея для вероятности выигрыша в *игру Пенни* (Penney's game): «Я не понимаю, почему это работает. Она просто выдает ответ как по волшебству, как многие другие алгоритмы Конвея». [9]

Литература

1. <https://www.youtube.com/watch?v=xP5-iIeKXE8>
2. L.Manukyan, S.Montandon, A.Fofonjka, S.Smirnov & M. Milinkovitch. A living mesoscopic cellular automaton made of skin scales. — Nature, 544 (2017), pp. 173–179.
3. П.Деорнуа. Комбинаторная теория игр. — М.: МЦНМО, 2017.
4. А. Кириллов, И. Клумова, А. Сосинский. Сюрреальные числа. — «Квант», 1979, №11.
5. J.H.Conway & J.Shipman. Extreme Proofs I: The Irrationality of $\sqrt{2}$. — The Mathematical Intelligencer, 35 (2013), pp. 2–7.
6. J.H.Conway, M.S.Paterson & Moscow (U.S.S.R.). A Headache-Causing Problem. — The American Mathematical Monthly, 127 (2020), pp.291–296.
7. J.H.Conway. The Weird and Wonderful Chemistry of Audioactive Decay. — Open Problems in Communication and Computation (1987), pp. 173–188.
8. J.H. Conway and H.S.M. Coxeter. Triangulated Polygons and Frieze Patterns. — The Mathematical Gazette, 57: 401 (Oct., 1973), pp.175–183.
9. M. Gardner. On the paradoxical situations that arise from nontransitive relations. — Scientific American, 231: 4 (Oct., 1974), pp. 120–125.

² Вот она: 1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, ...

Числовые фриззы

Е. СМИРНОВ

Фауст:

Так пентаграмма этому виной?
Но как же, бес, пробрался ты за мной?
Каким путем впросак попался?

Мефистофель:

Изволили ее вы плохо начертить,
И промежуток в уголку остался,
Там, у дверей, – и я свободно мог вскочить.

Фауст:

Да, случай над тобой удачно посмеялся.
Так ты мой пленник, стало быть?
Вот удалось негаданно-нежданно!

И.-В.Гете. Фауст (пер. Н.Холодковского)

Введение

Фризами называются таблицы, заполненные положительными числами в соответствии с некоторым мультипликативным правилом. Такие таблицы были впервые определены в 1970-х годах в работах Дональда Кокстера и Джона Конвея. Как и многое другое, что делали эти замечательные математики, фриззы можно рассматривать как некоторую математическую забаву; она состоит в том, чтобы выписывать по некоторым правилам числа и смотреть на получающиеся закономерности.

Однако оказывается, что, несмотря на простоту их определения, фриззы обладают рядом весьма неожиданных свойств. Они связаны со множеством других математических понятий, в числе которых – триангуляции многоугольников, числа Каталана и Фибоначчи, цепные дроби, ряды Фарея... Кроме того, оказалось, что фриззы (так, конечно, тогда еще не называвшиеся) неявным образом возникали еще в работах К.-Ф.Гаусса и даже Дж.Непера – т.е. более 400 лет назад!

В XXI веке интерес к фризам среди математиков существенно вырос: выясни-

лось, что фриззы возникают в теории кластерных алгебр, в связи с представлениями колчанов, многообразиями Грассмана, эллиптическими функциями, обобщенными ассоциациями и многими другими сюжетами из современной «серьезной» математики.

Первая русскоязычная публикация о фризах появилась в «Кванте» почти тридцать лет назад, в №3 за 1991 год – причем написана она была самим Конвеем. Этот двухстраничный текст содержал множество вопросов, над ответами на которые предлагалось подумать читателю. В послесловии от редакции было сказано: «Мы надеемся получить от вас письма с ответами на вопросы, поставленные Конвеем, и тогда вновь вернуться к числовым фризам». На часть вопросов Конвея к читателям «Кванта» мы отвечаем в этой статье.

11 апреля 2020 года Джон Хортон Конвей, один из самых удивительных и неординарных математиков нашего времени, скончался на 83-м году жизни. Посвящая этот текст его памяти.

Фриззы малых порядков

Определение и первые свойства. Начнем с определения.

Определение 1. Назовем *фризом* порядка n таблицу (t_{ij}) , состоящую из $n-1$ бесконечной влево и вправо строки положительных чисел, расположенных в шахматном порядке, которая удовлетворяет следующим свойствам:

• первая и последняя строки состоят из единиц: $t_{1j} = t_{n-1,j} = 1$;

• для любых четырех чисел a d в b c

вершинах единичного ромба верно равенство $ad - bc = 1$; это свойство будем называть *унимодулярностью*.

Назовем фриз *целочисленным*, если все числа t_{ij} целые.

Пример 1. На рисунке 1 приведен пример целочисленного фриза порядка 7 (такой фриз, как следует из определения, состоит из 6 строк).

...	1	1	1	1	1	1	1	1	...	
...	2	1	4	2	1	3	2	2	1	...
...	3	1	3	7	1	2	5	3	1	...
...	1	2	5	3	1	3	7	1	3	...
...	2	1	3	2	2	1	4	2	2	...
...	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...

Рис. 1

Глядя на этот и другие примеры, можно отметить ряд замечательных свойств. Во-первых, такой фриз оказывается периодичным с периодом n – т.е. можно считать его нарисованным на цилиндре. Во-вторых, этот фриз дополнительно обладает скользящей симметрией: если перевернуть его вверх ногами и сдвинуть вбок на три с половиной позиции, он совпадет с исходным.

Наконец, фриз, очевидно, определяется своими первыми двумя строками (единичной и первой нетривиальной). Так вот, почему-то оказывается, что если все элементы второй строки будут целыми числами, то и все остальные элементы фриза являются целыми. Это совершенно неочевидно из определения: из условия уни-

модулярности для ромба a b c d следует,

$$\text{что } c = \frac{ad - 1}{b}, \text{ т.е. для вычисления элементов приходится использовать деление – и тем не менее, результат этого деления почему-то всегда оказывается целым числом.}$$

Наша ближайшая цель – разобраться с этими феноменами.

Фризы порядков 3 и 4. Посмотрим, как могут быть устроены фризы малых порядков. При $n = 3$ фриз состоит из двух строк, т.е. фриз порядка три единственен (рис.2).

...	1	1	1	1	1	1	1	1	...
...	1	1	1	1	1	1	1	1	...

Рис. 2

Далее, фризы порядка 4 имеют такой вид, как на рисунке 3. Условие унимодулярности равносильно тому, что произведение любых двух элементов во второй строке равняется 2. Поэтому такой фриз имеет такой вид, как на рисунке 4, где $ab = 2$. В частности, целочисленных фризов порядка 4 будет два: один будет отвечать ситуации, когда $a = 2$ и $b = 1$, а другой – когда $a = 1$ и $b = 2$. Среди нецелочисленных фризов (рис.5) отметим такой:

...	1	1	1	1	1	...
...	a	b	c	d	...	
...	1	1	1	1	1	...

Рис. 3

Рис. 4

...	1	1	1	1	1	...
...	a	b	a	b	...	
...	1	1	1	1	1	...

Рис. 4

Рис. 5

...	1	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	1	...
...	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$...
...	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...

Рис. 5

Замечание 1. Заметим, что фризы порядка 4 периодичны с периодом 2, а не 4 (а период последнего фриза и вовсе равен 1). Это связано с наличием скользящей симметрии: если перевернуть фриз вверх ногами и сдвинуть на половину периода, он совпадет с исходным.

Фризы порядка 5. Такие фризы удобно восстанавливать не по верхней строке, а по диагонали. Рассмотрим фриз, показанный на рисунке 6. Выразим все его значения последовательно через x и y . Мы получим, что

...	1	1	1	1	...
...	x	z	v	t	...
...	y	u	w
...	1	1	1	1	...

Рис. 6

$$z = \frac{1+y}{x}; \quad u = \frac{1+z}{y} = \frac{1+x+y}{xy};$$

$$v = \frac{1+u}{z} = \frac{1+x+y+xy}{xy} \cdot \frac{x}{1+y} = \frac{1+x}{y};$$

$$w = \frac{1+v}{u} = \frac{1+x+y}{y} \cdot \frac{xy}{1+x+y} = x;$$

$$t = \frac{1+w}{v} = (1+x) \cdot \frac{y}{1+x} = y.$$

Мы опять получили x и y , но уже на другой диагонали. Видим, что фриз снова получа-

ется периодичным с периодом 5, и он вновь обладает скользящей симметрией.

Упражнения

1. Перечислите все целочисленные фризы порядка 5. Сколько их?
2. Рассмотрите фриз порядка 5, у которого $x = y = \tau$. Покажите, что $\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, и найдите остальные элементы этого фриза.

Фриз из упражнения 2 получается путем применения к правильному пятиугольнику *теоремы Птолемея*. Эта теорема из школьного курса планиметрии гласит, что для вписанного четырехугольника $ABCD$ верно равенство $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$. Действительно, рассмотрим правильный

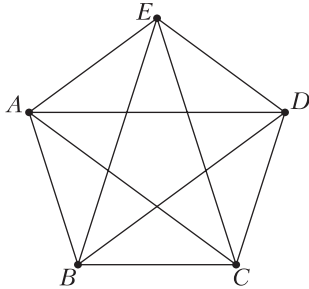


Рис. 7

пятиугольник, все стороны которого равны 1 (рис.7). Пусть его диагональ равна τ . Запишем теорему Птолемея для равнобокой трапеции $ABCD$; в этой трапеции $AB = BC = CD = 1$, $AD = AC = BD = \tau$. Мы получим уравнение $1 \cdot \tau + 1 \cdot 1 = \tau \cdot \tau$, т.е. $\tau^2 - \tau - 1 = 0$.

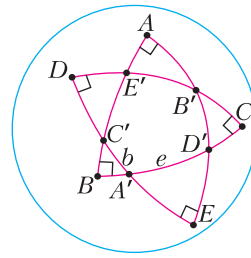
Положительный корень этого уравнения как раз равен $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$; это знаменитое *золотое сечение*.

Упражнение 3. Рассмотрим правильный n -угольник со стороной 1 и многократно применим к нему теорему Птолемея. Какой фриз порядка n мы получим? Чему равны элементы в его k -й строке?

Pentagramma mirificum. Впервые фризы порядка 5 появились в связи со сферической тригонометрией в работах Натаниэла Тарпорли¹ и Джона Непера². Даль-

¹ Nathaniel Torporley (Torporley) (1564–1632) – английский математик, астроном и астролог. Некоторое время работал во Франции секретарем Франсуа Виета.

² John Napier (1550–1617) – шотландский математик. Известен как изобретатель логарифмов и десятичной точки.



"This uniformitie of the Circular parts, most manifestly appeareth in right-angle triangles made on the superficies of a globe, of five great circles, the first whereof cutteth the second, the second the third, the third the fourth, the fourth the fifth, and lastly, the fifth the first, at right angles. But all the other Sections shall bee made at oblique angles."

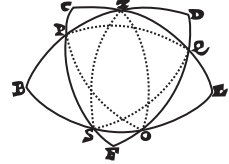


Рис. 8. *Pentagramma mirificum*. Справа рисунок из работы Непера (1614 г.)

нейшее развитие они получили в работах Карла-Фридриха Гаусса. Их появление было связано со следующей задачей сферической геометрии.

Рассмотрим пятиконечную звезду на сфере, все углы которой являются прямыми (рис.8). В частности, это значит, что точка A' является полюсом для большого круга CD , B' – для DE и т.д.

Обозначим через $\alpha, \dots, \varepsilon$ квадраты тангенсов длин сторон пятиугольника:

$$\alpha = \text{tg}^2 B'E', \beta = \text{tg}^2 E'C', \gamma = \text{tg}^2 A'C',$$

$$\delta = \text{tg}^2 A'D', \varepsilon = \text{tg}^2 D'B'.$$

Оказывается, что эти пять величин связаны следующими соотношениями, позволяющими получить по любым двум из них остальные три:

$$1 + \alpha = \gamma\delta; 1 + \beta = \delta\varepsilon; 1 + \gamma = \varepsilon\alpha;$$

$$1 + \delta = \alpha\beta; 1 + \varepsilon = \beta\gamma. \quad (*)$$

Таким образом, эти величины являются элементами следующего фриза (рис.9) порядка 5.

...	1	1	1	1	1	...
...	α	β	γ	δ	ε	...
...	δ	ε	α	β	γ	...
...	1	1	1	1	1	...

Рис. 9

Упражнение 4. Используя соотношения (*), докажите следующее равенство (также принадлежащее Гауссу):

$$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = 3 + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon =$$

$$= \sqrt{(1 + \alpha)(1 + \beta)(1 + \gamma)(1 + \delta)(1 + \varepsilon)}.$$

Это равенство в работе Гаусса названо *schöne Gleichung*, т.е. «красивым тождеством».

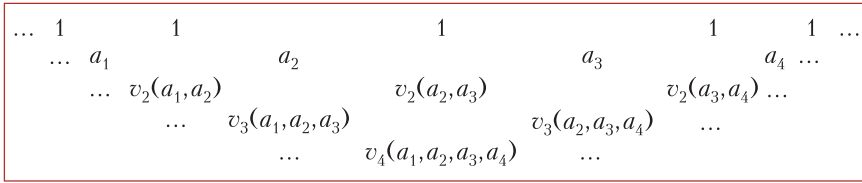


Рис. 10

Континуанты

Рекуррентное соотношение. Теперь перейдем к фризам произвольного порядка. Наша ближайшая цель – получить выражение для элементов третьей и последующих строк фриза через элементы второй строки.

Пусть дан фриз со второй строкой $\dots, a_1, a_2, a_3, \dots$. Ясно, что каждый из элементов третьей строки выражается через два элемента второй строки, стоящие непосредственно над ним (слева и справа). Далее, каждый элемент четвертой строки можно найти по правилу унимодулярности уже через *три* стоящих над ним элемента второй строки и так далее. Обозначим элементы третьей, четвертой и т.д. строк через $v_2(a_i, a_{i+1})$, $v_3(a_i, a_{i+1}, a_{i+2})$ и т.д., как показано на рисунке 10.

Нетрудно найти выражение для элементов третьей строки:

$$v_2(a_1, a_2) = a_1 a_2 - 1, \quad v_2(a_2, a_3) = a_2 a_3 - 1,$$

а из них уже выразить элементы четвертой:

$$v_3(a_1, a_2, a_3) = (v_2(a_1, a_2)v_2(a_2, a_3) - 1) / a_2 = a_1 a_2 a_3 - a_1 - a_3,$$

пятой:

$$v_4(a_1, a_2, a_3, a_4) = (v_3(a_1, a_2, a_3)v_3(a_2, a_3, a_4) - 1) / v_2(a_2, a_3) = \dots = a_1 a_2 a_3 a_4 - a_1 a_2 - a_1 a_4 - a_3 a_4 + 1,$$

шестой:

$$v_5(a_1, \dots, a_5) = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 - a_1 a_2 a_3 - a_1 a_2 a_5 - a_1 a_4 a_5 - a_3 a_4 a_5 + a_1 + a_3 + a_5$$

(проделайте эти вычисления самостоятельно!).

Внимательно посмотрев на эти выражения, можно заметить закономерность, которой они подчиняются.

Коды Морзе.

Рассмотрим n расположенных в ряд точек, которые занумеруем переменными

a_1, \dots, a_n . Теперь соединим между собой какие-нибудь пары соседних точек, с условием, что каждую точку можно соединить не более чем с одной соседней. Мы получим «код Морзе» из точек и тире – конфигурацию наподобие изображенной на рисунке 11.

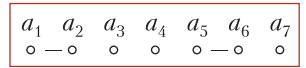


Рис. 11

Такой конфигурации сопоставим моном (т.е. одночлен): произведение переменных, которые стоят в *точках* (не соединенных с соседними), взятое со знаком «плюс» или «минус» в зависимости от четности числа *тире*. Будем называть этот моном *весом* кода Морзе s и обозначать через $w(s)$. Так, конфигурации рисунка 11 будет отвечать выражение

$$w(s) = (-1)^2 a_3 a_4 a_7 = a_3 a_4 a_7$$

Пример 2. Все коды Морзе и соответствующие им мономы при n от 1 до 5 представлены в таблице на рисунке 12.

Определение 2 (правило Эйлера). *Континуантой* $V_n(a_1, \dots, a_n)$ *порядка* n называется сумма одночленов, соответствующих всевозможным кодам Морзе на n вершинах.

Замечание 2. Положим континуанту нулевого порядка (не зависящую от каких-либо аргументов) равной $V_0 = 1$. Более того, иногда бывает удобно считать, что $V_n = 0$, если n отрицательно.

Таблица (см. рис.12) позволяет нам вычислить континуанты порядков, не превосходящих 5. Мы видим, что у нас получаются в точности те же выражения, что и для $v_n(a_1, \dots, a_n)$. Вскоре мы докажем это утверждение, но сначала установим еще некоторые свойства континуант. Начнем с рекуррентного соотношения.

$n = 1$	○	a_1
$n = 2$	○ ○	$a_1 a_2$
	○ — ○	-1
$n = 3$	○ ○ ○	$a_1 a_2 a_3$
	○ ○ — ○	$-a_1$
	○ — ○ ○	$-a_3$
$n = 4$	○ ○ ○ ○	$a_1 a_2 a_3 a_4$
	○ ○ ○ — ○	$-a_1 a_2$
	○ ○ — ○ ○	$-a_1 a_4$
	○ — ○ ○ ○	$-a_3 a_4$
	○ — ○ ○ — ○	1
$n = 5$	○ ○ ○ ○ ○	$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$
	○ ○ ○ ○ — ○	$-a_1 a_2 a_3$
	○ ○ ○ — ○ ○	$-a_1 a_2 a_5$
	○ ○ — ○ ○ ○	$-a_1 a_4 a_5$
	○ — ○ ○ ○ ○	$-a_3 a_4 a_5$
	○ ○ — ○ ○ — ○	a_1
	○ — ○ ○ ○ — ○	a_3
	○ — ○ ○ — ○ ○	a_5

Рис. 12. Коды Морзе при $n \leq 5$

Предложение 1. *Континуанты удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$V_n(a_1, \dots, a_n) = a_1 V_{n-1}(a_2, \dots, a_n) - V_{n-2}(a_3, \dots, a_n). (**)$$

Доказательство. Возьмем какой-нибудь код Морзе на n вершинах. Посмотрим на первую вершину. Возможны два варианта. Либо ей отвечает точка, и тогда всякая конфигурация s получается как код Морзе s' на вершинах $2, \dots, n$; при этом $w(s) = a_1 w(s')$, поскольку в коде s первая вершина учитывается, а в конфигурации s' нет. Либо же, напротив, первая вершина соединена со второй при помощи тире; в таком случае обозначим код Морзе на вершинах $3, \dots, n$ через s'' , а веса кодов s и s'' отличаются знаком: $w(s) = -w(s'')$.

Стало быть, все коды, начинающиеся с точки, дадут в континуанту $V_n(a_1, \dots, a_n)$ вклад, равный $a_1 V_{n-1}(a_2, \dots, a_n)$, а все начинающиеся с тире – вклад, равный $-V_{n-2}(a_3, \dots, a_n)$. Это и дает нам искомое соотношение (**).

Дальнейшие свойства континуант мы оставим в качестве упражнения для читателя.

Упражнение 5. Докажите следующие равенства:

- (1) $V_n(a_1, \dots, a_n) = V_n(a_n, \dots, a_1)$;
- (2) $V_n(a_1, \dots, a_{n-1}, 0) = V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1})$;
- (3) $V_n(a_1, \dots, a_n) = a_n V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) - V_{n-2}(a_1, \dots, a_{n-2})$.

Соотношение унимодулярности для континуант. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для любых a_1, \dots, a_{n+1} имеет место соотношение*

$$V_n(a_1, \dots, a_n) V_n(a_2, \dots, a_{n+1}) = V_{n-1}(a_2, \dots, a_n) V_{n+1}(a_1, \dots, a_{n+1}) + 1.$$

Мы приведем два доказательства этой теоремы, алгебраическое и комбинаторное.

Алгебраическое доказательство. Будем доказывать эту теорему индукцией по n . База, при $n = 1$, очевидна.

Запишем требуемое соотношение для n и перепишем все члены, в которые входит a_{n+1} , с помощью равенства (3) из упражнения 5:

$$\begin{aligned} V_{n+1}(a_1, \dots, a_{n+1}) &= a_{n+1} V_n(a_1, \dots, a_n) - V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}); \\ V_n(a_2, \dots, a_{n+1}) &= a_{n+1} V_{n-1}(a_2, \dots, a_n) - V_{n-2}(a_2, \dots, a_{n-1}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда соотношение перепишется в виде} \\ V_n(a_1, \dots, a_n) (a_{n+1} V_{n-1}(a_2, \dots, a_n) - V_{n-2}(a_2, \dots, a_{n-1})) = \\ = V_{n-1}(a_2, \dots, a_n) (a_{n+1} V_n(a_1, \dots, a_n) - V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1})) + 1. \end{aligned}$$

В левой и правой частях нашего равенства встречается слагаемое $a_{n+1} V_{n-1}(a_2, \dots, a_n) V_n(a_1, \dots, a_n)$; уничтожив его, получим равенство

$$\begin{aligned} -V_n(a_1, \dots, a_n) V_{n-2}(a_2, \dots, a_{n-1}) = \\ = -V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) V_{n-1}(a_2, \dots, a_n) + 1, \end{aligned}$$

которое имеет место по предположению индукции. Теорема доказана.

Комбинаторное доказательство. Рассмотрим каждую из континуант в левой части соотношения как сумму мономов, отвечающим кодам Морзе на множествах $\{1, \dots, n\}$ и $\{2, \dots, n+1\}$ соответственно. Будем изображать эти коды Морзе на

одном рисунке, только относящиеся к первому коду тире будем изображать пунктирными линиями, а ко второму – сплошными, как показано на рисунке 13. Таким



Рис. 13

образом, пунктирные тире могут стоять на всех возможных местах, кроме последнего, а сплошные – на всех, кроме первого. Тогда левая часть доказываемого соотношения равна сумме мономов, полученным по всевозможным *парам* кодов Морзе с такими условиями.

Сделаем то же для произведения континуант в правой части: каждое произведение мономов из $V_{n-1}(a_2, \dots, a_n)$ и $V_{n+1}(a_1, \dots, a_{n+1})$ можно интерпретировать как пару кодов Морзе на множестве $\{1, \dots, n+1\}$ – причем первый код (будем его обозначать пунктирными тире) не может иметь тире на первой и последней позициях, а на второй (обозначим его сплошными тире) никаких ограничений не накладывается.

Рассмотрим какую-либо конфигурацию (c_1, c_2) , где c_1 и c_2 – коды Морзе на $\{1, \dots, n\}$ и $\{2, \dots, n+1\}$ соответственно. Ей отвечает моном $w(c_1)w(c_2)$ из левой части равенства. Построим по ней новую конфигурацию (c'_1, c'_2) , где c'_1 будет кодом Морзе на $\{1, \dots, n+1\}$, а c'_2 – кодом на $\{2, \dots, n\}$.

Если между 1 и 2 в коде c_1 нет (пунктирного) тире, то c_1 можно рассматривать как код на вершинах $2, \dots, n$. В то же время код из сплошных тире c_2 можно рассматривать как код на вершинах $1, \dots, n+1$, у которого на первом месте нет тире. В таком случае положим $(c'_1, c'_2) = (c_1, c_2)$.

Пусть теперь вершины 1 и 2 соединены входящим в код c_1 пунктирным тире. Поскольку в код c_2 входят вершины, начинающиеся со 2-й, то между вершинами 1 и 2 нет сплошного тире. Построим по паре кодов (c_1, c_2) пару кодов (c'_1, c'_2) следующим образом: рассмотрим путь, выходящий из 1-й вершины и состоящий из пунктирных и сплошных тире. Ясно, что они могут только чередоваться. Заменяем в нем каждое пунктирное тире на сплошное, а сплошное на пунктирное. Мы получим

новую пару кодов (c'_1, c'_2) , у которой на первом месте стоит сплошное тире и нет пунктирного. Эта пара будет иметь тот же вес, что и (c_1, c_2) .

На рисунке 14 показана пара кодов, которые получаются такой операцией из



Рис. 14

изображенных на рисунке 13. При этом пара (c'_1, c'_2) будет «почти всегда» отвечать моному из правой части. Далее, эту процедуру «почти всегда» можно обратить: по «почти» каждой паре кодов (c'_1, c'_2) можно единственным образом восстановить ту пару (c_1, c_2) , по которой она построена, причем веса этих пар будут равны.

Осталось разобраться с тем, что значит слова «почти всегда». Здесь нужно будет рассмотреть два случая: когда n чётно и когда оно нечётно.

Пусть n чётно. Тогда единственная конфигурация (c_1, c_2) , для которой описанная процедура не сработает (т.е. подходящего монома в правой части не найдется), будет иметь вид, как

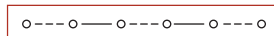


Рис. 15

все вершины будут соединены чередующимися пунктирными и сплошными тире, причем и первое и последнее тире будут пунктирными (число вершин чётно, значит, число тире между ними нечётно), а вес конфигурации (c_1, c_2) будет равен $(-1)^{n-1} = -1$. Поэтому произведение континуант в левой части равенства будет на 1 меньше, чем произведение континуант в правой части.

Если же, напротив, число вершин нечётно, то у каждой конфигурации (c_1, c_2) будет единственный образ (c'_1, c'_2) – и найдется ровно одна конфигурация из правой части, у которой не будет прообраза. Она изображена на рисунке 16. В таком

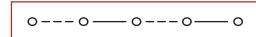


Рис. 16

случае произведение континуант в правой части будет опять-таки на 1 больше, чем произведение континуант в левой части.

Целочисленность фризов. Из результатов предыдущего подраздела немедленно получается следующий результат.

Теорема 2. *Элемент $(n + 1)$ -й строки фриза, над которым во второй строке стоят числа a_1, \dots, a_n , равняется континуанте $V_n(a_1, \dots, a_n)$.*

Эта теорема сразу объясняет отмеченный нами выше «феномен целочисленности» – то, что все элементы фриза с целочисленной второй строкой (a_1, a_2, \dots) оказываются целыми числами, хотя, казалось бы, чтобы их вычислить, приходится совершать деление.

Следствие 1. *Фриз, элементы второй строки которого целые положительные числа, является целочисленным.*

Действительно, континуанта – это многочлен от (a_1, a_2, \dots) с целыми коэффициентами.

Восстановление второй строки по диагонали.

Итак, мы нашли способ вычислять диагональ фриза, зная вторую строку: это делается с помощью континуанты. Решим теперь обратную задачу: найдем (в обозначениях рисунка 10) вторую строку a_1, \dots, a_n , зная диагональ v_2, \dots, v_{n-1} .

Это непосредственно следует из рекуррентного соотношения для континуант. Следующая теорема – просто переформулировка предложения 1.

Теорема 3. *Пусть $a_1, a_2, a_3 \dots$ – вторая строка фриза, $v_1 = a_1, v_2, v_3 \dots$ – его диагональ. Тогда имеют место равенства*

$$a_k = \frac{v_{k-2} + v_k}{v_{k-1}}.$$

(Напомним, что мы формально полагаем $v_0 = 1, v_{-1} = 0$ – тогда эта формула применима при любых $k > 0$).

Иногда эту теорему полезно формулировать в таком виде:

Следствие 2. *Последовательность v_k является решением разностного уравнения («уравнения Хилла», или «дискретного уравнения Штурма–Лиувилля»)*

$$V_k = a_k V_{k-1} - V_{k-2},$$

где a_1, a_2, \dots – коэффициенты, V_1, V_2, \dots – неизвестные.

Периодичность и скользящая симметрия. Рассмотрим фриз порядка n . Напомним, что такой фриз состоит из $n - 1$ строки; последняя его строка состоит из единиц, а «следующая за последней», т.е. n -я, состоит из нулей. Таким образом, для его диагонали $1, v_1, \dots, v_{n-1}$ имеют место равенства

$$v_{n-2} = 1; v_{n-1} = 0.$$

Запишем последнее из рекуррентных соотношений. Оно имеет вид

$$v_{n-1} = a_{n-1}v_{n-2} - v_{n-3}, \text{ т.е. } v_{n-3} = a_{n-1}.$$

Итак, мы получаем, что предпоследний ненулевой элемент диагонали V_{n-3} равняется элементу a_{n-1} из второй строки. Аналогично, следующий за ним в строке элемент равняется элементу a_n . Получается, что предпоследняя ненулевая строка фриза совпадает со второй, сдвинутой на $n/2$ позиций, и фриз имеет такой вид, как показано на рисунке 17.

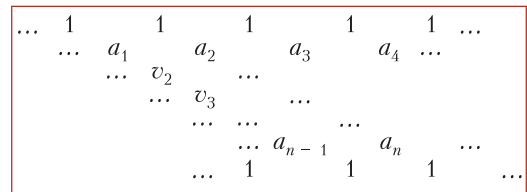


Рис. 17

А значит, из условия унимодулярности получается, что фриз можно строить не от второй строки вниз, а от предпоследней – вверх, и результат будет тем же.

Следствие 3. *Фриз порядка n обладает скользящей симметрией: его k -я строка, сдвинутая на $n/2$ позиций, совпадает с $(n - k)$ -й строкой.*

Следствие 4. *Фриз порядка n является периодичным с периодом n .*

В самом деле, сдвиг фриза на n является результатом применения двух скользящих симметрий со сдвигом на $n/2$.

Целочисленные фриз

Сущность целочисленного фриза. В этом разделе мы опишем все фриз, состоящие исключительно из целых элементов.

Будем называть *сущностью* (по-английски quiddity) фриза его вторую строку

(a_1, \dots, a_n) . Очевидно, она не может содержать двух единиц подряд – это противоречило бы унимодулярности. Однако оказывается, что хотя бы одна единица в этой строке обязательно должна быть.

Предложение 2. *Вторая строка целочисленного фриза обязательно содержит 1.*

Доказательство. Предположим, что это не так и что найдется фриз, все элементы во второй строке которого отличны от 1: $a_k \geq 2$. Тогда для элементов его диагонали (скажем, первой) имеет место неравенство

$$v_k = a_k v_{k-1} - v_{k-2} \geq 2v_{k-1} - v_{k-2},$$

откуда

$$v_k - v_{k-1} \geq v_{k-1} - v_{k-2}.$$

Но это верно для всех k . Стало быть,

$$v_k - v_{k-1} \geq v_{k-1} - v_{k-2} \geq \dots \geq v_2 - v_1 = \\ = a_2 - 1 \geq 1,$$

т.е. последовательность v_k строго возрастающая. Это противоречит тому, что в какой-то момент она в силу замкнутости фриза должна принять значение 1 (и тем более 0).

Следующая лемма позволит нам делать из данного целочисленного фриза порядка n новый фриз порядка $n + 1$.

Лемма. *Пусть (a_1, \dots, a_n) – сущность целочисленного фриза порядка n , и $1 \leq k \leq n$. Тогда:*

(1) *набор $(a_1, \dots, a_{k-1} + 1, a_k + 1, a_{k+1}, \dots, a_n)$ является сущностью целочисленного фриза порядка $n + 1$;*

(2) *если $1, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ – первая диагональ исходного фриза и $v_1 = a_1$, то соответствующая диагональ нового фриза имеет вид*

$$1, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_{k-1} + v_k, v_k, \dots, v_{n-2}.$$

Доказательство. Начнем с доказательства пункта (2). Посмотрим, как будет устроена первая диагональ нового фриза: обозначим ее через $1, w_1, \dots, w_{n-1}$.

Ясно, что при $i \leq k - 2$ диагонали этих двух фризсов совпадают: $w_i = v_i$. При этом на $(k - 1)$ -м месте нового фриза будет стоять

$$w_{k-1} = (a_{k-1} + 1)v_{k-2} - v_{k-3} = v_{k-1} + v_{k-2}.$$

Далее,

$$w_k = w_{k-1} - w_{k-2} = v_{k-1} + v_{k-2} = v_{k-1}.$$

Следующий элемент диагонали будет равен

$$w_{k+1} = (a_k + 1)w_k - w_{k-1} = \\ = (a_k + 1)v_{k-1} - v_{k-1} - v_{k-2} = \\ = a_k v_{k-1} - v_{k-2} = v_k.$$

При всех $j > k + 1$ будет иметь место равенство $w_j = v_{j-1}$. В частности, $(n - 2)$ -й и $(n - 1)$ -й члены этой последовательности будут равны 1 и 0 соответственно, т.е. фриз оборвется – а диагональ будет содержать n положительных элементов. То же самое рассуждение применимо и к любой другой диагонали. Стало быть, в результате такой вставки получится целочисленный фриз на единицу большего порядка. Часть (1) также доказана.

Замечание 3. Эта конструкция очевидным образом является обратной: если $(\dots, b_{k-1}, 1, b_{k+1}, \dots)$ – сущность целочисленного фриза, то и $(\dots, b_{k-1} - 1, b_{k+1} - 1, \dots)$ будет сущностью фриза на единицу меньшего порядка (обратите внимание, что в силу отсутствия двух единиц подряд оба числа $b_{k-1} - 1$ и $b_{k+1} - 1$ положительны).

Фризы и триангуляции. Рассмотрим выпуклый n -угольник с пронумерованными вершинами. Его *триангуляцией* будем называть его разбиение на треугольнички с помощью диагоналей, не пересекающихся нигде, кроме вершин.

Замечание 4. Число триангуляций n -угольника называется $(n - 2)$ -м числом Каталана (это одно из их многочисленных эквивалентных определений). Для него справедлива формула $C(n) = \frac{1}{n-1} \binom{2n-4}{n-2}$. О числах Каталана можно прочесть во многих книгах по комбинаторике; также о них неоднократно писал «Квант» – см., например, статью Мартина Гарднера в №7 за 1978 год.

Рассмотрим произвольную триангуляцию n -угольника. Ей можно сопоставить

набор чисел (c_1, \dots, c_n) , где c_i – число треугольников, сходящихся в n -й вершине. Будем называть такой набор *сущностью триангуляции*. Триангуляция однозначно восстанавливается по своей сущности (почему?).

Теорема 4 (теорема Конвея–Кокстера). *Набор (c_1, \dots, c_n) , построенный по триангуляции n -угольника, является сущностью целочисленного фриза порядка n ; это отображение устанавливает взаимно однозначное соответствие между триангуляциями n -угольника и целочисленными фризами n -го порядка.*

Доказательство. Будем доказывать эту теорему по индукции по n . База $n=3$ очевидна: имеются лишь одна триангуляция треугольника и единственный фриз 3-го порядка с сущностью $(1, 1, 1)$. (Читатель, которого это не убеждает, может начать с $n=4$.)

Рассмотрим некоторую триангуляцию n -угольника. Выберем в ней «ухо» – вершину, примыкающую к единственному треугольнику (в силу принципа Дирихле таких вершин не менее двух). Пусть эта вершина имеет номер k , а в вершинах $k-1$ и $k+1$ сходятся b_{k-1} и b_{k+1} треугольников соответственно. Таким образом, сущность этой триангуляции имеет вид $(\dots, b_{k-1}, 1, b_{k+1}, \dots)$. Выбросим треугольник, примыкающий к k -й вершине, из этой триангуляции, получим триангуляцию $(n-1)$ -угольника, сущность которой равна $(\dots, b_{k-1}-1, b_{k+1}-1, \dots)$. Эта триангуляция, по предположению индукции, определяет фриз с той же сущностью. Но по лемме из предыдущего подраздела тогда и набор $(\dots, b_{k-1}, 1, b_{k+1}, \dots)$ определяет целочисленный фриз.

Взаимная однозначность полученного соответствия следует из замечания 3: из сущности каждого фриза порядка n можно удалить единицу, сведя дело к фризу на единицу меньшего порядка.

Восстановление фриза по триангуляции. Теорема Конвея–Кокстера утверждает, что каждый элемент второй строки фриза – это количество треугольников, сходящихся при соответствующей верши-

не триангуляции. А как восстановить остальные элементы фриза? В чем их комбинаторный смысл?

Пусть дан целочисленный фриз, который мы будем обозначать в соответствии с рисунком 10: его вторая строка равна (a_1, a_2, \dots, a_n) , а через $v_0 = 1, v_1, v_2, \dots, v_{n-2}$ обозначены элементы диагонали, начинающейся в a_1 , т.е. $v_1 = a_1$. Удобно также считать, что $v_{-1} = 0$.

Рассмотрим триангуляцию n -угольника, вершины которого пронумерованы числами от 1 до n , с сущностью (a_1, \dots, a_n) . По ней можно восстановить (v_0, v_1, v_2, \dots) посредством следующего алгоритма:

- напишем в вершинах 1 и 2 числа 0 и 1 соответственно;
- далее расставим числовые отметки во всех остальных вершинах многоугольника по такому правилу: для каждого треугольника, в двух вершинах которого уже стоят числа a и b , поставим в третьей его вершине число $a + b$.

Упражнение 6. Докажите, что во всех вершинах, соединенных с первой вершиной диагональю или стороной, будут написаны единицы.

Предложение 3. *Полученная по этому алгоритму отметка в i -й вершине будет равна элементу v_{i-2} диагонали фриза.*

Доказательство. Данной триангуляции n -угольника сопоставим двойственный граф на $n-2$ вершинах: вершины его будут соответствовать треугольникам из триангуляции, причем две вершины будут соединены ребром, если у двух треугольников имеется общая сторона. Такой граф является деревом, валентности всех его вершин не превосходят трех, а висячие вершины отвечают «ушам» триангуляции (рис.18).

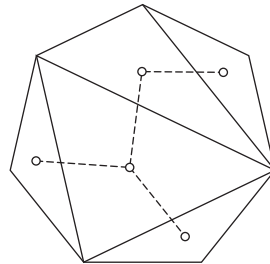


Рис. 18. Триангуляция и отвечающее ей дерево

Далее, запись чисел в вершинах треугольников в соответствии с нашим алгоритмом можно рассматривать как обход вершин дерева, отвечающего триангуляции: на первом шаге алгоритма мы берем треугольник, содержащий вершины 1 и 2, и записываем число в его третьей вершине (для первого шага это число будет единицей). Сделав это, отметим отвечающую этому треугольнику вершину дерева как посещенную.

На каждом следующем шаге мы рассматриваем какую-то вершину, смежную с уже посещенными; ей отвечает треугольник, в двух вершинах которого уже стоят какие-то числа. Записав в третьей вершине треугольника их сумму, отметим как посещенную вершину дерева, которая отвечает этому треугольнику.

Докажем наше предложение по индукции по n . База при $n = 3$ очевидна: мы получаем треугольник, в вершинах которого записаны 0, 1 и 1. Он отвечает единственному фризу порядка 3.

Индуктивный переход: пусть наше предложение доказано для всевозможных триангуляций n -угольника, а мы хотим доказать его для $(n + 1)$ -угольника. Посмотрим на последний шаг алгоритма; в его ходе мы обязаны посетить какую-то висячую вершину дерева триангуляции, т.е. добавить к триангуляции n -угольника «ухо». Пусть данный n -угольник имеет сущность (a_1, \dots, a_n) , а «ухо» на последнем шаге приклеивается к стороне $(k - 1, k)$. По предположению индукции, построенный в ре-

зультате выполнения алгоритма набор отметок в вершинах (v_0, \dots, v_{n-1}) будет стоять на диагонали фриза с сущностью (a_1, \dots, a_n) . Далее, на последнем шаге между вершинами $k - 1$ и k будет добавлена вершина с отметкой $v_{k-1} + v_k$. При этом триангуляция $(n + 1)$ -угольника будет иметь сущность $(\dots, b_{k-1} + 1, 1, b_k + 1, \dots)$ – что согласуется с результатом леммы об элементах фриза. Предложение доказано.

Упражнения

7. Рассмотрим триангуляцию n -угольника, все диагонали которой образуют зигзаг (иными словами, все элементы сущности этой триангуляции не превосходят 3). Докажите, что все элементы соответствующего фриза будут числами Фибоначчи.

8. Пусть в триангуляции есть вершина, где сходятся не менее 4 треугольников. Докажите, что соответствующий фриз содержит число 4.

Замечание 5. Большинство результатов из этого раздела можно найти в двух работах Дж.Конвея и Д.Кокстера «Triangulated polygons and frieze patterns». Эти работы, опубликованные в двух последовательных номерах журнала *The Mathematical Gazette* (57(400, pp. 87–94; 401, pp. 175–183), 1973), посвященного вопросам математического образования, по форме представляют собой привычный ученикам математических кружков и классов листок с задачами. В первой статье ряд утверждений о фризах сформулирован в виде последовательности из примерно трех десятков задач, а во второй статье приводятся их решения или достаточно подробные указания.

Вниманию наших читателей

Начиная с 2017 года журнал «Квант» стал ежемесячным и в год выходит 12 номеров журнала.

Подписаться на наш журнал можно с любого номера в любом почтовом отделении. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» – 90964.

Купить журнал «Квант» возможно в магазине «Математическая книга» издательства МЦНМО (адрес интернет-магазина: biblio.mcsme.ru), а также в московских книжных магазинах «Библио-глобус», «Молодая гвардия», «Московский дом книги» и в редакции журнала.

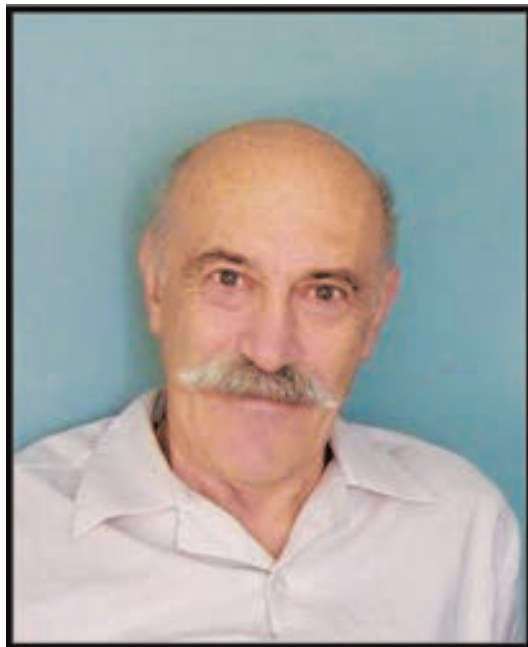
Архив вышедших номеров журнала «Квант» имеется на сайте <http://kvant.ras.ru>

Восьмого мая 2020 года ушел из жизни Глеб Леонидович Коткин.

Г.Л.Коткин родился 20 сентября 1934 года в городе Тобольске. В 1961 году после окончания аспирантуры Московского государственного университета Глеб Леонидович приезжает в Академгородок и начинает работать в Новосибирском государственном университете на физическом факультете. За годы работы Глеб Леонидович стал одним из самых авторитетных преподавателей физфака НГУ, настоящей его опорой. Он провел тысячи семинаров, прочитал сотни лекций. За его плечами задачи, задания, контрольные, экзамены, олимпиады, известный в мире задачник по аналитической механике, первые в нашей стране компьютерные программы по моделированию физических процессов и квантовой механике, задачник по статистической физике, учебные пособия для университетов по статистической физике и аналитической механике. Глеб Леонидович успешно занимался научными исследованиями по физике высоких энергий в лаборатории теоретической физики в Институте математики СО РАН. Работы с его участием пролили свет на возможность создания фотон-фотонных пучков.

Глеб Леонидович был замечательным педагогом, внимательным, но строгим и принципиальным. Среди его учеников немало успешных и выдающихся ученых. Многие из них вспоминают Глеба Леонидовича как главного Учителя в своей жизни.

Всю свою творческую жизнь Глеб Леонидович отдавал много сил работе со школьниками. Уже на втором курсе физфака МГУ он вел школьный кружок. Когда в начале 60-х



Глеб Леонидович Коткин
(20.09.1934 – 08.05.2020)

стало быстро развиваться олимпиадное движение, он принял в нем активное участие, в том числе как автор красивых оригинальных задач. После открытия в 1963 году Новосибирской физико-математической школы-интерната он много работал с ее воспитанниками.

С 1969 года Глеб Леонидович Коткин принимал самое активное участие в становлении и развитии журнала «Квант», на страницах которого регулярно печатались его интересные статьи и яркие задачи. Он неизменно входил в Редакционный совет нашего журнала.

Почему плохо кричать против ветра?

Г.КОТКИН

ПОЧЕМУ МЫ ПЛОХО СЛЫШИМ звук, если ветер дует от нас к его источнику? На первый взгляд, это ясно. Против ветра ближе падает брошенный

камень, медленнее летит птица... Попробуем, однако, провести количественную оценку.

Пусть c – скорость звука относительно воздуха, а u – скорость ветра. Тогда скорость звукового сигнала относительно зем-

ли равна $c - u$ и время его распространения на расстояние l равно $t = \frac{l}{c - u}$. За это время сигнал проходит относительно воздуха расстояние

$$l' = ct = \frac{lc}{c - u}.$$

Именно величина l' определяет ослабление звука: находясь на расстоянии l от источника звука (против ветра), мы слышим звук таким же, как если бы ветра не было, а мы находились на расстоянии l' .

Примем $u = 15$ м/с (довольно сильный ветер), $c = 330$ м/с, $l = 50$ м. Тогда $l' \approx 52$ м. Ветер «отодвигает» нас примерно на 2 м. Этого мы, пожалуй, и не заметили бы. В действительности же влияние ветра гораздо сильнее. Следовательно, надо искать другое объяснение.

Обратим внимание на тот факт, что скорость ветра не одинакова на разных высотах – она растет с увеличением высоты над уровнем земли. Казалось бы, это никак не должно повлиять на распространение звука, когда источник и приемник расположены на одной высоте. Если же приемник (или источник) звука опустится, часть пути звуковой сигнал будет проходить в слоях воздуха, движущихся с меньшей скоростью, и придет менее ослабленным. На самом же деле, если слушающий (или кричащий) человек присядет, слышимость только ухудшится. И все-таки дело именно в зависимости скорости ветра от высоты.

Чтобы легче было разобраться в картине распространения звука, рассмотрим сначала такой пример. Представим себе моторную лодку L , идущую со скоростью \vec{c} относительно воды под углом к течению, скорость которого \vec{u} (рис.1). Пусть сидящий в лодке человек, будем называть его капитаном, «целит» на видимую где-то вдали заводскую трубу T . Если бы течения не было, лодка пристала бы к берегу в точке A . В действительности скорость лодки относительно берега равна $\vec{v} = \vec{c} + \vec{u}$. Если бы скорость течения была неизменной вплоть до берега, лодка пристала бы в точке B . Но скорость течения убывает по мере приближения к берегу, поэтому изменяются

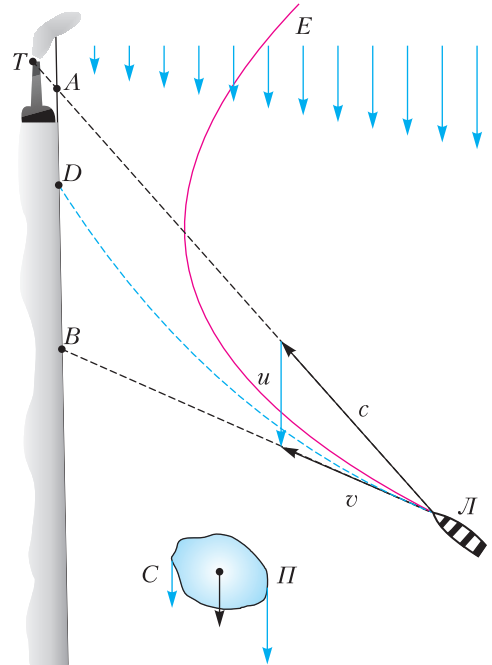


Рис. 1

величина и направление скорости лодки \vec{v} , так что она движется по кривой LD .

Предположим, что капитан ненадолго задремал, но продолжает удерживать руль в прежнем положении. Пока он спит, посмотрим на плывущую по течению льдину $СП$. Эта льдина плывет вращаясь: ее приводит во вращение вода, которая у одного края льдины (C) от нее отстает, а у другого края ($П$) – обгоняет ее. То же самое произойдет и с лодкой. Она будет поворачиваться, при этом будет изменяться направление скорости \vec{c} (несмотря на неподвижно удерживаемый руль). Проснувшись, капитан увидит, что лодка, описавшая дугу LE , удаляется от берега.

Теперь нам нетрудно изобразить и картину распространения звуковых сигналов. Их траектории («лучи») искривляются, подобно траектории лодки со спящим капитаном (рис.2; ветер дует справа налево). При этом область MLN оказывается «мертвой зоной»: в нее не заходят «лучи» звука. Человек в этой области почти не слышит звука от источника S . (Некоторая слышимость в «мертвой зоне» связана с рассеянием звука при отражении от поверхности земли, а также с дифракцией звука.)

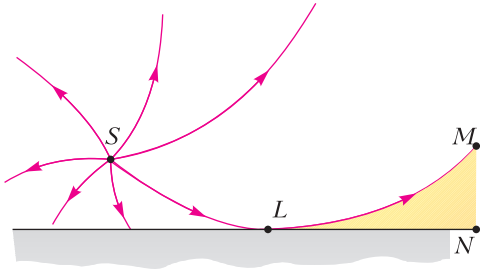


Рис. 2

Вспомним, однако, что мы обнаружили несостоятельность первого объяснения явления при попытке количественной оценки. Попробуем провести количественную оценку и для второго объяснения. Оценим расстояние до «мертвой зоны».

Рассмотрим «луч» SLM (см. рис.2), будем считать его направление близким к горизонтальному. Выделим малый участок AB волновой поверхности, будем считать его плоским и расположенным вертикально (рис.3). Через время Δt этот участок займет положение $A'B'$, причем

$$AA' = (c - u_A)\Delta t,$$

$$BB' = (c - u_B)\Delta t$$

(u_A и u_B – скорости ветра на высоте точек A и B). При этом рассматриваемый участок повернется на малый угол α :

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \frac{B'B''}{A'B''} = \frac{(c - u_A)\Delta t - (c - u_B)\Delta t}{\Delta h} = \frac{\Delta u \Delta t}{\Delta h},$$

где $A'B'' = AB = \Delta h$ и $\Delta u = u_B - u_A$.

Таким образом, участок волновой поверхности поворачивается с угловой скоростью

$$\omega = \frac{\alpha}{\Delta t} \approx \frac{\Delta u}{\Delta h}.$$

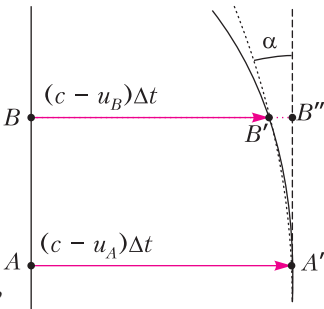


Рис. 3

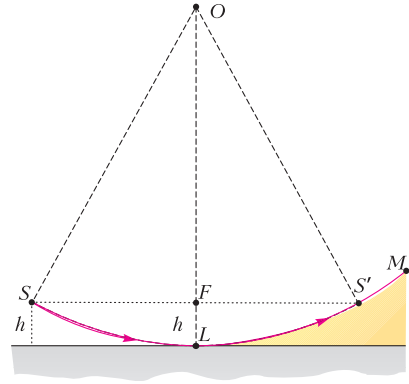


Рис. 4

С такой же угловой скоростью вращается и вектор скорости \vec{c} – скорости звука относительно воздуха.

Будем считать, что величина ω постоянна вдоль всего «луча», тогда рассматриваемый участок SLM (см. рис.2) можно считать дугой окружности. Скорость звукового сигнала относительно земли $v = c - u \approx c$ можно связать с радиусом r этой окружности: $v = \omega r$. Отсюда получаем (рис.4)

$$SO = OL = r = \frac{v}{\omega} \approx \frac{c \Delta h}{\Delta u}.$$

Из треугольника OSF находим

$$SF = \sqrt{OS^2 - OF^2} = \sqrt{r^2 - (r - h)^2} \approx \sqrt{2rh} \approx \sqrt{2ch} \frac{\Delta h}{\Delta u}.$$

Итак, слушатель, находящийся на той же высоте h , что и источник звука, попадает в «мертвую зону» на расстоянии

$$SS' = 2SF \approx 2\sqrt{2ch} \frac{\Delta h}{\Delta u}.$$

Примем $\frac{\Delta u}{\Delta h} \approx \frac{u}{h}$. Тогда

$$SS' \approx 2h\sqrt{\frac{2c}{u}} \approx 3h\sqrt{\frac{c}{u}}.$$

Для $h = 1,5$ м, $c = 330$ м/с, $u = 15$ м/с получаем $SS' \approx 20$ м – вполне разумный результат. Точный расчет формы «звуковых лучей» приводит примерно к такому же результату.

Разумеется, есть еще много причин, ухудшающих слышимость при ветре, но приведенный расчет дает уверенность, что главную причину мы указали правильно.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: *math@kvant.ras.ru* и *phys@kvant.ras.ru* соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задача M2603 предлагалась на XLI Турнире городов. Задачи M2604, M2605 предлагались на XII Международной олимпиаде *Romanian Master of Mathematics*.

Задачи M2602–M2605, Ф2609 – Ф2612

M2602. Для данного натурального k выпуклый многоугольник назовем k -треугольным, если он является пересечением некоторых k треугольников.

а) При каком наибольшем n существует k -треугольный n -угольник?

б) При каком наибольшем n любой выпуклый n -угольник является k -треугольным?

П.Кожевников

M2603. Для бесконечной последовательности чисел a_1, a_2, \dots назовем ее *первой производной* последовательность $a'_n = a_{n+1} - a_n$ ($n = 1, 2, \dots$), а ее k -й производной – первую производную ее $(k-1)$ -й производной ($k = 2, 3, \dots$). Назовем последовательность *хорошей*, если она и все ее производные состоят из положительных чисел. Докажите, что если a_1, a_2, \dots и b_1, b_2, \dots – хорошие последовательности, то и a_1b_1, a_2b_2, \dots – хорошая последовательность.

Р.Салимов

M2604. Дан треугольник ABC с прямым углом C (рис. 1). Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC , а D – основание высоты, проведенной из C на AB . Вписанная окружность ω треугольника ABC касается его сторон BC , CA и AB в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Пусть E и F – точки, симметричные точке C относительно прямых C_1A_1 и C_1B_1 соответ-

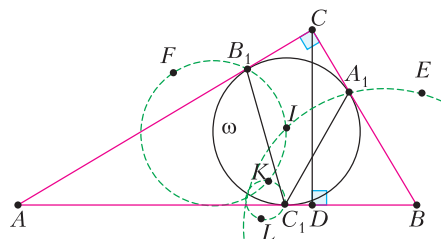


Рис. 1

ственно. Пусть K и L – точки, симметричные точке D относительно прямых C_1A_1 и C_1B_1 соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольничков A_1EI , B_1FI и C_1KL имеют общую точку.

Д.Прокопенко

M2605*. Для каждого целого числа $n \geq 2$ обозначим через $F(n)$ наибольший простой делитель числа n . Назовем *странный парой* пару различных простых чисел p и q , для которых не существует целого числа $n \geq 2$ такого, что $F(n)F(n+1) = pq$. Докажите, что существует бесконечно много странных пар.

Д.Крачун

Ф2609. Полдень. Солнце в зените. Над горой Килиманджаро летит корабль инопланетян с постоянной горизонтальной скоростью $v = c/\sqrt{3}$ (рис. 2). По склону горы бежит тень. При

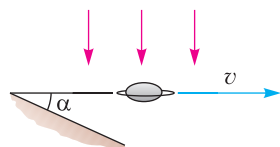


Рис. 2

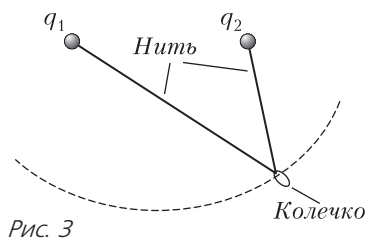
каком значении угла α наклона горы к горизонту скорость тени корабля на земле будет минимальной?

В.Гребень

Ф2610. Цилиндр с жесткими стенками с внутренним радиусом R доверху заполнен несжимаемой жидкостью с плотностью ρ . Ось симметрии цилиндра вертикальна. Горизонтальная плоская крышка цилиндра прикреплена к его доньшку тонким вертикальным тросом, натянутым с силой F , трос расположен на оси симметрии цилиндра. Этот сосуд раскрутили вокруг вертикальной оси, совпадающей с его осью симметрии, до угловой скорости ω . Как изменилась сила натяжения троса?

Х.Цилиндров

Ф2611. Два положительных заряда q_1 и q_2 закреплены на расстоянии d друг от друга (рис.3). К зарядам привязана нерастяжи-

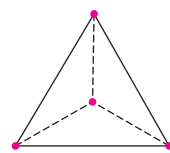


мая непроводящая нить длиной L . По нити может скользить без трения маленькое положительно заряженное колечко. Система находится в невесомости. Найдите расстояния от колечка до зарядов в положении равновесия.

М.Николсон

Ф2612. Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли оптическую схему, на которой изображены идеальная тонкая линза, предмет и его изображение. Из текста следует, что предмет представляет собой стержень длиной l с двумя точечными источниками света на концах. Стержень и главная оптическая ось линзы находятся в плоскости рисунка и стержень не пересекает плоскость линзы. От времени чернила выцвели, и на рисунке остались видны лишь сами источники и их изображения, причем неизвестно, какая из четырех точек чему соответствует. Интересно, что эти точки

расположены в вершинах и в центре равностороннего треугольника (рис.4).



1) Определите, самому предмету или его изображению принадлежит точка

Рис. 4

в центре треугольника.

2) Восстановите оптическую схему (предмет, изображение, линзу, ее главную оптическую ось и фокусы) с точностью до поворота рисунка на 120° и отражения.

3) Найдите фокусное расстояние линзы.

Примечание. Линза называется идеальной, если любой пучок параллельных лучей фокусируется в ее фокальной плоскости.

А.Аполонский

Решения задач М2590–М2593, Ф2597–Ф2600

М2590. Решение этой задачи будет опубликовано позже.

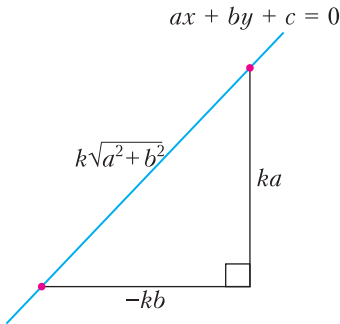
М2591. На плоскости нарисованы 100 синих прямых, среди которых нет параллельных и никакие три из которых не проходят через одну точку. Точки пересечения синих прямых отмечены красным. Могло ли получиться так, что расстояние между любыми двумя красными точками, лежащими на одной синей прямой, равно целому числу?

Ответ: могло.

Во-первых, заметим, что достаточно построить пример, в котором расстояние между любыми двумя красными точками, лежащими на одной синей прямой, равно рациональному числу. Действительно, если конструкция с рациональными расстояниями имеется, далее можно увеличить размеры в нужное количество раз n , т.е. рассмотреть конструкцию, гомотетичную данной с коэффициентом n , где n делится на знаменатели всех рациональных чисел, выражающих расстояние (здесь важно, что расстояний конечное количество).

Идея построения нужного примера может состоять в следующем. Если брать на координатной плоскости прямые, задаваемые уравнениями с рациональными коэффициентами, красные точки будут иметь рациональные координаты (в этом легко

убедиться, решив систему $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$ с рациональными коэффициентами). Тогда вектор, соединяющий красные точки, лежащие на одной синей прямой $ax + by + c = 0$, будет иметь рациональные координаты. Чтобы длина этого вектора была рациональна, достаточно потребовать, чтобы синус (или косинус) угла наклона прямой к оси был рациональным, иначе говоря, чтобы вместе с коэффициентами a , b , число $\sqrt{a^2 + b^2}$ было рациональным (см. рисунок).



Реализовать этот план можно так. Берем в качестве $(a_k; b_k)$ различные непропорциональные пифагоровы тройки, например $a_k = 2k^2 + 2k$, $b_k = 2k + 1$, так что $a_k^2 + b_k^2 = (a_k + 1)^2$. Далее в уравнениях прямых $a_k x + b_k y + c_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, 100$) можно последовательно в качестве c_k выбирать произвольные целые числа, соблюдая лишь одно условие: k -я прямая не должна проходить ни через одну точку пересечения первых $k - 1$ прямых.

В завершение опишем еще одну конструкцию, которую предложил 11-классник из Астрахани Тимофей Ковалев. В этой конструкции строится даже бесконечное множество синих прямых.

Основная идея – брать синие прямые как прямые l_a вида $y = 2tx - ta^2$, это касательные к параболе $y = tx^2$, проведенные в точках $(a; ta^2)$. Поскольку абсцисса точки пересечения касательных l_a и l_b равна $\frac{a+b}{2}$, нетрудно вычислить длину отрезка, отсекаемого на прямой l_a прямыми l_b и l_c :

$$d_{(a;b;c)} = \left| \frac{c-b}{2} \right| \cdot \sqrt{1 + 4t^2 a^2}.$$

Положим $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Чтобы все длины $d_{(a;b;c)}$ были целыми, выбираем в качестве a , b , c натуральные y_i из пар $(x_i; y_i)$, являющиеся решениями уравнения Пелля $x^2 - 2y^2 = 1$. Таких решений бесконечно много (см., например, статью В. Сендерова и А. Спивака «Уравнения Пелля» в «Кванте» № 3, 4, 6 за 2002 г.), и все соответствующие y_i окажутся четными. Выбор a , b , c , ... можно осуществить так, чтобы у прямых не было тройных пересечений.

П. Кожевников

M2592. а) Существует ли бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде

$$\frac{k(k+1)}{2} - 2^n,$$

где n и k – целые неотрицательные числа? б*) Пусть задан многочлен $P(x)$, принимающий в целых точках целые значения. Существует ли бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде

$$P(k) - 2^n,$$

где n и k – целые неотрицательные числа?

В пункте б) будет доказано, что если степень многочлена P хотя бы 2, то натуральных чисел, не представимых в нужном виде, бесконечно много даже среди значений многочлена P . Пункт а) является частным случаем пункта б) для многочлена $P(x) = \frac{x(x+1)}{2}$. Тем не менее, приведем вначале решение пункта а).

а) Покажем, что при натуральном m таком, что $m+1$ не является степенью двойки, число вида $\frac{m(m+1)}{2}$ не представимо в нужном виде.

Равенство $\frac{m(m+1)}{2} = \frac{k(k+1)}{2} - 2^n$ преобразуется к виду $(k-m)(k+m+1) = 2^{n+1}$. Тогда $k+m+1 > 1$ – степень двойки, а $k-m$ нечетно, значит, $k-m = 1$ и $k = m+1$, следовательно, $2(m+1)$ – степень двойки. Другое решение пункта а) можно получить, доказав, что числа вида $\frac{k(k+1)}{2} - 2^n$

могут давать не любой остаток при делении на 15.

б) Для многочленов $P(x)$, множество значений которых при положительных x ограничено сверху некоторой константой C , не представимо любое натуральное $a > C$. Поэтому далее можно считать, что старший коэффициент многочлена P положительный.

С линейными многочленами вида $P(x) = ax + b$ разобраться несложно. Так как P принимает в целых точках целые значения, коэффициент a должен быть натуральным. Ясно, что при $a = 1$ и $a = 2$ все натуральные числа, большие b , представимы в виде $P(k) - 1$ или $P(k) - 2$. При $a \geq 3$ степени двойки принимают не все остатки при делении на a , поэтому числа, дающие некоторый фиксированный остаток при делении на a , не будут представимы в нужном виде.

Докажем, что если степень P хотя бы 2, то непредставимых чисел вида $P(m)$ бесконечно много. Предположим противное, тогда найдется m_1 такое, что все числа $P(m)$ при $m > m_1$ представимы. По сравнению с пунктом а) потребуется больше техники.

Докажем лемму, означающую, что значения многочлена, равные степени двойки, могут встречаться «довольно редко».

Лемма. Пусть $R(x)$ – непостоянный многочлен. Тогда для любого $d > 0$ найдется x_0 такое, что на любом отрезке длины d , расположенном правее x_0 , имеется не более одного x такого, что $R(x)$ – степень двойки.

Доказательство. Если старший коэффициент R меньше 0, то можно выбрать x_0 так, что при $x > x_0$ выполнено $R(x) < 0$. Иначе можно выбрать x_0 такое, что на промежутке $(x_0; \infty]$ $R(x)$ возрастает и, кроме того, $R(x + d)/R(x) < 2$ (последнее возможно, так как $\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x + d)/R(x) = 1$). Лемма доказана.

Вернемся к задаче. Как известно, если P – целозначный (принимает в целых точках целые значения), то его коэффициенты рациональны, поэтому для некоторого натурального N многочлен $Q(x) = N \cdot P(x)$ имеет целые коэффициенты. Разложим

$Q(x + t) - Q(x)$ по степеням t : $Q(x + t) - Q(x) = tQ'(x) + t^2S(x) + \dots$, здесь $Q'(x)$, $S(x)$, ... – многочлены с целыми коэффициентами, при этом $Q'(x)$ – многочлен степени не меньше 1 (на самом деле, это действительно производная, в согласии с обозначением).

Пусть для некоторого натурального m_0 (целое) число $Q'(m_0)$ отлично от 0. Найдем натуральное r такое, что $Q'(m_0)$ не делится на 2^r . Тогда и для любого m из прогрессии $m_0 + t \cdot 2^r$ (t пробегает целые числа) $Q'(m)$ не делится на 2^r ($Q'(m)$ дает тот же остаток при делении на 2^r , что и $Q'(m_0)$).

Найдется $x_0 > 0$ такое, что для любого x из интервала $[x_0; +\infty)$ выполнено $P(x + 1) - P(x) > 2^r$, а также $P(x) > P(y)$ при $0 \leq y < x$.

Далее рассматриваем m из множества M вида $m_0 + t \cdot 2^r$, которые больше m_1 и x_0 , так что $P(m)$ представимо в виде $P(k) - 2^n$, и при этом, в силу выбора x_0 , должно быть $k > m$.

Оценим сверху разность $d = k - m$. Имеем $P(k) - P(m) = 2^n$, $P(m + d) - P(m) = 2^n$, откуда $Q(m + d) - Q(m) = 2^n \cdot N$,

$$dQ'(m) + d^2S(m) + \dots = 2^n \cdot N. (*)$$

Отсюда видим, что d – делитель $2^n \cdot N$. С другой стороны, докажем, что d не может делиться на 2^r . От противного, пусть $d = 2^t s$, где $t \geq r$, а s – нечетное, в равенстве (*) $dQ'(m)$ не делится на 2^{t+r} , остальные слагаемые в левой части делятся на 2^{2t} , а следовательно, на 2^{t+r} . Покажем, что правая часть тоже делится на 2^{t+r} , откуда получим противоречие. Действительно,

$$\begin{aligned} 2^n &= P(m + d) - P(m) = \\ &= (P(m + d) - P(m + d - 1)) + \\ &+ (P(m + d - 1) - P(m + d - 2)) + \dots \\ &\dots + (P(m + 1) - P(m)) > d \cdot 2^r \geq 2^t \cdot 2^r, \end{aligned}$$

откуда $n \geq t + r$. Противоречие. Таким образом, d – делитель $2^n \cdot N$, который не делится на 2^r , значит, $d < d_0 = 2^r \cdot N$.

(Продолжение см. на с. 34)

...я считал, что есть две математики — алгебраическая и геометрическая, и что геометрическая математика принципиально «трансцендентна» для алгебраической. Возьмите, например, формулу длины окружности — там есть

«геометрическое» число π . Или, скажем, синус — он определяется чисто геометрически.

Когда я обнаружил, что синус можно записать алгебраически в виде ряда, барьер обрушился, математика стала единой.

И.М.Гельфанд

Калейдоскоп формул для π

Формула Виета. Одна из первых алгебраических формул для π — это открытое в XVI веке Виетом бесконечное произведение

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \dots$$

Это равенство не очень сложно доказать. Идея состоит в следующем. Применив несколько раз формулу $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, мы получаем, что

$$\sin x = 2^n \sin \frac{x}{2^n} \cdot \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots \cos \frac{x}{2^n} \right).$$

Но при малых t имеет место приближенное равенство¹ $\sin t \approx t$. Поэтому $2^n \sin(x/2^n) \approx x$, и, устремляя n к бесконечности, мы получаем разложение

$$\frac{\sin x}{x} = \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{8} \dots$$

Остается подставить $x = \pi/2$ (и найти косинусы в правой части, пользуясь формулой половинного угла).

Геометрически формула Виета связана с приближением окружности правильными 2^k -угольниками.

Формула Лейбница. Во второй половине XVII века Лейбниц нашел замечательно простое представление π в виде (бесконечной) суммы рациональных слагаемых:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Для современного студента эта формула, вероятно, самая понятная из собранных здесь: она получается, если подставить $x = 1$ в разложение арктангенса в степенной ряд

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

(при $|x| > 1$ ряд расходится и доказательство того, что равенство верно не только при $|x| < 1$, но и для $x = 1$, требует отдельных усилий).

Суммы такого типа часто возникают в теории чисел. В частности, если знать, какие числа представимы в виде сумм двух квадратов², то можно доказать, что сумма $L = 4(1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots)$ вычисляет *среднее* (по N) количество решений уравнения $x^2 + y^2 = N$ в целых числах. Это объясняет, почему в ответе возникает число π : с одной стороны, количество целых точек в круге большого радиуса (т.е. число решений неравенства $x^2 + y^2 \leq R^2$) примерно равно $L \cdot R^2$, а с другой стороны, количество целых точек в большом круге примерно равно его площади, πR^2 . Про это рассказывается в ролике³ https://youtu.be/NaL_Cb42WuY.

Формула Эйлера. В 1734 году Эйлер решил не поддававшуюся разным математикам уже без малого 100 лет проблему и нашел сумму обратных квадратов:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

Рассуждение Эйлера связано с разложением синуса в бесконечное произведение:

$$\sin x = x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots$$

(см. книгу «Что такое математика?» Р.Куранта и Г.Роббинса или статью Н. Виленкина «В таинственном мире бесконечных рядов» в «Кванте» №10 за 1989 г.).

С тех пор был найден не один десяток доказательств этой формулы. А.М. и И.М.Яг-

² См., например, статью В.Сендерова и А.Спивака «Суммы двух квадратов и целые гауссовы числа» («Квант», 1999, №3).

³ Grant Sanderson aka 3Blue1Brown. «Pi hiding in prime regularities».

¹ Говоря точнее, отношение $\frac{\sin t}{t}$ стремится к 1 при $t \rightarrow 0$.

ломы нашли тригонометрическое доказательство⁴, а недавно Й. Вэстлунд (J. Wastlund) сумел заменить тригонометрию элементарной геометрией (<https://youtu.be/d-o3eB9sfls>).

Как уже говорилось, суммы подобного вида часто возникают в теории чисел. Это связано с открытым Эйлером разложением дзета-функции по простым числам:

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots = \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \dots\right) \times \left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^{2s}} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{5^{2s}} + \dots\right) = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{3^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{5^s}\right)^{-1} \dots$$

(в первом равенстве использована основная теорема арифметики, во втором – формула для суммы геометрической прогрессии). Для $s = 2$ отсюда следует, что «вероятность того, что случайная дробь несократима, равна $6/\pi^2$ »⁵ (это тоже обсуждается в упомянутой статье Н. Виленкина).

Формула Валлиса. Если подставить $x = \pi/2$ в разложение Эйлера синуса в произведение, то получается равенство

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots}$$

Впрочем, Джон Валлис нашел эту формулу почти за 100 лет до формулы Эйлера, вычисляя некоторые интегралы.

В упоминавшейся статье Ягломов при помощи тригонометрии доказывается и формула Валлиса. А Вэстлунд нашел доказательство, непосредственно связывающее произведение Валлиса с площадью круга.

При помощи формулы Валлиса можно доказать, что если подкинуть монету $2n$ раз, то вероятность того, что орлов и решек выпадет в точности поровну, приблизительно равна $1/\sqrt{\pi n}$.

Также формула Валлиса помогает доказать приближенную формулу Стирлинга:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

⁴ «Элементарный вывод формул Валлиса, Лейбница и Эйлера для числа π » (УМН, 1953).

⁵ А точнее, если выбрать два случайных числа k и l от 1 до N , то вероятность того, что дробь k/l несократима, стремится с ростом N к $6/\pi^2$.

которая является источником появления числа π в комбинаторных задачах.⁶

Рамануджан и быстрые алгоритмы. Формулы, приведенные выше, не слишком хорошо подходят для вычисления π . Например, сумма первых 500 членов формулы Лейбница дает лишь два верных знака после запятой.⁷

Ситуация радикально улучшается, если кроме разложения арктангенса в ряд пользоваться тождествами типа $\frac{\pi}{4} = \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{4} = 4\arctg \frac{1}{5} - \arctg \frac{1}{239}$. Именно так уже в начале XVIII века было вычислено 100 знаков числа π .⁸

А в начале XX века Рамануджан нашел ряд формул, обобщения которых сходятся настолько быстро, что позволяют вычислить на достаточно мощном персональном компьютере триллионы⁹ знаков π . Вот одна из таких формул:

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum (-1)^k \frac{(6k)!}{(3k)!(k!)^3} c_k,$$

где

$$c_k = \frac{163 \cdot 3344418k + 13591409}{640320^{3(k+1/2)}}.$$

Скажем про нее только, что если предыдущие формулы были связаны с тригонометрическими функциями, то эта – с модулярными формами, а 163 и 640320³ – те же числа, что возникают в удивительном (погрешность менее 10^{-12}) равенстве

$$e^{\pi\sqrt{163}} \approx 640320^3 + 744.$$

Материал подготовил Г. Мерзон

⁶ И об этом, и о доказательстве формулы Валлиса можно прочитать в статье А. Егорова «Интеграл и оценки сумм» («Квант», 2015, № 4).

⁷ Впрочем, если добавить к сумме $\sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ поправку $1/N - 1/4N^3 + 5/16N^5$, то количество правильных цифр для $N = 500$ вырастет с 2 до 15 (!).

⁸ Об истории вычисления π см. также статью А. Савина «Число π » («Квант», 1996, № 6).

⁹ Это не преувеличение – см., например: А. Yee, S. Kondo «10 trillion digits of pi: A case study of summing hypergeometric series to high precision on multicore systems».

(Начало см. на с. 28)

Отсюда следует, что для каждого $m \in M$ хотя бы один из d_0 многочленов

$$P(x+1) - P(x), P(x+2) - P(x), \dots, P(x+d_0) - P(x)$$

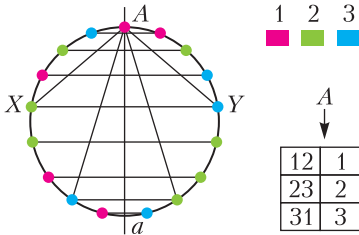
принимает при $x = m$ значение, равное степени двойки. Отрезок $[m; m + d_0 2^r]$ содержит $d_0 + 1$ число из M , поэтому хотя бы один из указанных многочленов принимает на этом отрезке значение, равное степени двойки, хотя бы дважды.

При достаточно большом m это противоречит лемме, что и завершает решение.

Ф.Петров

M2593*. Каждая вершина правильного многоугольника окрашена в один из трех цветов так, что в каждый из трех цветов окрашено нечетное число вершин. Докажите, что количество равнобедренных треугольников, вершины которых окрашены в три разных цвета, нечетно.

Рассмотрим одну из вершин, скажем вершину A . Оставшиеся вершины разобьем на пары вершин (X, Y) , симметричных относительно оси симметрии a , проходя-



щей через вершину A . Вершине A сопоставим k отрезков вида XU , так что каждый треугольник AXU – равнобедренный с вершиной A и основанием XU . На рисунке приведен пример из 8 отрезков, сопоставленных вершине A , из них три отрезка типа 31 (т.е. концы которых – вершины цветов 3 и 1), по два отрезка типов 23 и 22 и один отрезок типа 12.

Вершину A цвета 1 назовем *четной*, если среди сопоставленных ей отрезков XU четное количество отрезков типа 23 (т.е. в которых вершины X и U – цветов 2 и 3). В противном случае вершину A назовем

нечетной. Общее количество вершин цвета 2 нечетно, и каждая из них входит в отрезок типа 12, 22 или 23. Очевидно, в отрезки типа 22 входит четное количество вершин цвета 2. Поэтому четной вершине A цвета 1 сопоставлено нечетное количество отрезков XU типа 12, а каждой нечетной вершине A цвета 1 – четное количество отрезков XU типа 12.

Аналогично вводим понятия четности и нечетности для вершин цветов 2 и 3. Например, вершину цвета 2 назовем *четной*, если среди сопоставленных ей отрезков четное количество отрезков типа 13, и т.д. Рассуждая как выше, заполним «таблицу четности» количеств сопоставленных отрезков (0 – четное количество, 1 – нечетное):

Сопоставлено:	1 чет	1 неч	2 чет	2 неч	3 чет	3 неч
Типа 12	1	0	1	0	1	0
Типа 23	0	1	0	1	0	1
Типа 31	1	0	1	0	1	0

Обозначим количество четных вершин i -го цвета x_i , а нечетных – y_i , так что $x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3$ нечетны. Далее заметим, что каждый равнобедренный треугольник с вершинами разных цветов означает сопоставление вершине какого-то цвета отрезка двух других цветов, либо, если треугольник равносторонний, – три таких сопоставления. Тем самым, интересующая нас четность количества таких треугольников совпадает с четностью числа $y_1 + y_2 + y_3$. Всего отрезков типа 12 нечетное количество (оно равно произведению количеств вершин типа 1 и типа 2), и каждый отрезок сопоставлен ровно одной вершине. Тем самым, из первой строки таблицы получаем, что $x_1 + x_2 + y_3$ нечетно. Тогда $y_1 + y_2 + y_3 = (x_1 + x_2 + y_3) - (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + 2y_1 + 2y_2$ – нечетно, что и требовалось установить.

Задачу можно решить и другими способами. Например, можно (хотя и не так просто) свести задачу к частным случаям раскраски, показав, что четность количества разноцветных равнобедренных треугольников не изменяется при обмене цветов двух вершин.

П.Кожевников

Ф2597. Гантель равномерно тянут вдоль ее оси по горизонтальной плоскости некоторой силой,

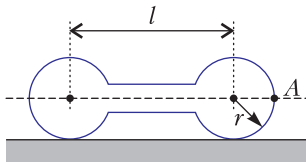


Рис. 1

приложенной в точке А (рис.1). Под каким углом α к горизонту должна быть направлена эта сила, чтобы левый шар действовал на плоскость с вдвое большей силой, чем правый? Размеры гантели приведены на рисунке, а ее коэффициент трения о плоскость равен μ .

Гантель находится в равновесии под действием четырех сил: силы тяжести $m\vec{g}$, силы \vec{F} , приложенной в точке А, и двух параллельных сил реакции, приложенных в точках В и С и наклоненных к нормали под углом трения $\alpha_{\text{тр}}$, тангенс которого равен μ (рис.2). Последние две силы могут

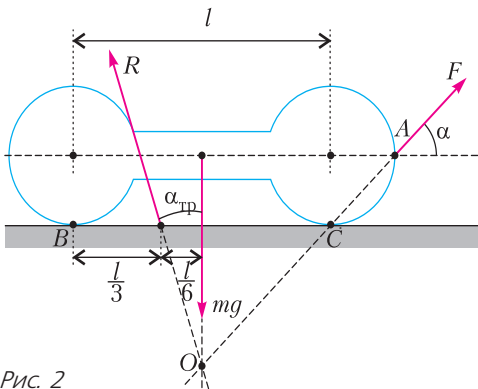


Рис. 2

быть сведены к одной силе \vec{R} , линия действия которой делит отрезок BC на части, обратно пропорциональные силам $\left(\frac{1}{3} \text{ и } \frac{2}{3}\right)$. Эта сила пересекает линию действия силы тяжести в некоторой точке О, через которую и должна пройти линия действия приложенной силы. Из рисунка 2 получаем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{l/6}{2} + r}{\frac{l}{2} + r} = \frac{r + l/(6\mu)}{r + l/2} = K.$$

Таким образом, искомый угол равен $\alpha = \operatorname{arctg} K$.

С.Крюков

Ф2598. Автоматический космический корабль совершил посадку на Европу – спутник Юпитера. Установленный на неподвижное ледяное покрытие планеты телескоп был наведен на Солнце, и на видео было записано редкое явление – прохождение Земли по диску Солнца. Земля проходила точно посередине солнечного диска, т.е. условия для наблюдения были самые лучшие. В течение какого максимального и какого минимального промежутков времени могло длиться это событие? Необходимые дополнительные данные отыщите самостоятельно.

Плоскости почти круговых орбит Земли и Юпитера при их движении вокруг Солнца почти совпадают, поэтому отмеченное событие действительно можно наблюдать с поверхности Европы.

Поискем дополнительные данные, например, в Википедии. Расстояние от Юпитера до Солнца в $N = 5,2$ раза больше расстояния $S = 150$ млн км от Земли до Солнца. Расстояние от Юпитера до Европы $L = 670$ тыс. км, период обращения Европы вокруг Юпитера в 3,55 раза больше земных суток, т.е. $T_E = 3,55$ сут. Европа все время обращена к Юпитеру одной стороной. Эксцентриситет ее орбиты около 0,01, т.е. орбита близка к круговой; наклонение орбиты по отношению к экватору Юпитера $0,466^\circ$. Наклонение орбиты самого Юпитера по отношению к эклиптике 1° . Средний радиус Юпитера $R_{\text{Ю}} = 70$ тыс. км. Юпитер закрывает собой значительную часть неба над Европой, его угловой размер примерно равен $2R_{\text{Ю}}/L \approx 0,209$ радиан или 12° . А поскольку наклонения орбит Европы и Юпитера по отношению к эклиптике весьма малы, то Юпитер закрывает собой Солнце при каждом обороте Европы вокруг него. Таким образом, максимальный непрерывный промежуток времени наблюдения Солнца и Земли с Европы близок по длительности к периоду обращения Европы вокруг Юпитера. Будем считать, что Юпитер не закрывает собой Солнце за время наблюдений этого события.

В системе отсчета Коперника, в которой центр Солнца неподвижен, а оси направ-

лены на далекие звезды, Земля движется со скоростью $v_1 = 2\pi S/T_3 \approx 29,865$ км/с ≈ 30 км/с. Скорость движения Европы вокруг Юпитера $v_2 = 2\pi L/T_E \approx 13,7$ км/с. Скорость движения самого Юпитера по отношению к системе отсчета Коперника можно найти из третьего закона Кеплера. Эта скорость равна $v_1/\sqrt{N} \approx 13,1$ км/с.

В результате скорость движения телескопа вместе с поверхностью планеты в системе отсчета Коперника может принимать значения от минимальной величины

$$v_3 = v_1/\sqrt{N} - 2\pi L/T_E \approx -0,6 \text{ км/с}$$

(попятное движение) до максимальной величины

$$v_4 = 2\pi L/T_E + v_1/\sqrt{N} \approx 26,8 \text{ км/с.}$$

Угловой размер Солнца при наблюдении с Земли равен примерно $\varphi_{ЗС} = 0,5^\circ$. А при наблюдении Солнца с Европы угловой размер Солнца в 5,2 раза меньше, т.е. составляет примерно $\varphi_{ЕС} = 0,1^\circ$. Угловой размер Земли в момент прохождения по диску Солнца при наблюдении с Европы равен $\varphi_{ЗЕ} = 2R_3/(S(N-1)) \approx (1,1 \cdot 10^{-3})^\circ$, что примерно в 100 раз меньше солнечного. Максимальное время наблюдения события будет получено, если угловая скорость движения Европы вокруг Солнца (в системе отсчета Коперника) максимальна, а минимальное – когда Европа движется в попятном направлении. При этом угловая скорость вращения Земли вокруг Солнца составляет $\omega_1 = v_1/S$, а угловая скорость движения Европы вокруг Солнца минимальна при попятном движении: $\omega_3 = v_3/(5,2S)$ и максимальна при прямом движении: $\omega_4 = v_4/(5,2S)$.

Максимальная продолжительность прохождения Земли по диску Солнца составит примерно

$$\varphi_{ЗС}/(\omega_1 - \omega_4) \approx 2 \text{ ч } 55,6 \text{ мин.}$$

Это время значительно меньше периода обращения Европы вокруг Юпитера, поэтому изменением скорости Европы в системе отсчета Коперника за такой промежуток времени можно пренебречь. Минимальное время наблюдения будет соответ-

ствовать ситуации, когда Европа во время этого события движется в попятном направлении, оно равно

$$\varphi_{ЗС}/(\omega_1 - \omega_3) \approx 2 \text{ ч } 25 \text{ мин.}$$

С.Варламов

Ф2599. По тонкому прямому отрезку длиной L равномерно по длине распределен положительный электрический заряд. На большом расстоянии от отрезка (в сравнении с L) в точке A вектор напряженности электрического поля, созданного зарядами отрезка, составляет с самим отрезком угол $\alpha < \pi/2$. На каком расстоянии от центра отрезка находится точка, из которой вышла линия напряженности электрического поля, которая прошла через точку A ?

На большом расстоянии от любого заряженного тела распределение вектора напряженности электрического поля по разным направлениям совсем мало отличается от соответствующего распределения поля, созданного точечным зарядом, расположенным на таком же расстоянии. Найдем долю от полного телесного угла, приходящуюся на конус с углом α между осью симметрии конуса и его образующей:

$$\frac{\Delta\Omega}{4\pi} = \int_0^\alpha \frac{d\alpha \cdot 2\pi \sin \varphi}{4\pi} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

Расстояние от ближайшего к точке A конца отрезка до точки, из которой вышла соответствующая силовая линия, равно

$$L_1 = \frac{L(1 - \cos \alpha)}{2}.$$

А расстояние от этой точки до центра отрезка составляет

$$\frac{L}{2} - L_1 = \frac{L \cos \alpha}{2}.$$

В.Плис

Ф2600. По контурам всех трех фигур, изображенных на рисунке, проложены



одинаковые тонкие проволоочки. Для левой фигуры индуктивность равна L_1 , а для средней фигуры она равна L_2 . Какова индуктивность для правой фигуры?

Пусть ток, текущий по проволочке, равен I . Обозначим поток вектора магнитной индукции, который создает один шестиугольник в самом себе, через Φ_0 , а поток, созданный им же, но в соседнем шестиугольнике, через Φ_1 . Тогда для указанных в условии задачи индуктивностей и для

искомой индуктивности L_3 потоки будут такими:

$$IL_1 = 3\Phi_0 - 6\Phi_1, \quad IL_2 = 2\Phi_0 - 2\Phi_1, \quad IL_3 = \Phi_0.$$

Отсюда можно найти выражение для Φ_0 :

$$\Phi_0 = \frac{3IL_2 - IL_1}{3} = I \left(L_2 - \frac{L_1}{3} \right),$$

а значит, и для L_3 :

$$L_3 = L_2 - \frac{L_1}{3}.$$

С.Варламов

ВОКРУГ ПРАВИЛЬНОГО ПЯТИУГОЛЬНИКА

А.ДАНИЯРХОДЖАЕВ

В этой статье мы установим несколько удивительных на первый взгляд фактов о правильном пятиугольнике. В частности, дадим решение задачи М2583, опубликованной в «Кванте» №11 за 2019 год.

Пусть a – сторона правильного пятиугольника, d – диагональ, h – расстояние между параллельными стороной и диагональю. Тогда $\frac{d}{a} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ – известное «золотое сечение», а $\frac{h}{a} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$. Вывести

эти соотношения можно из «тождеств пятиугольника»

$$a^2 + ad = d^2, \quad (1)$$

$$a^2 + d^2 = 4h^2, \quad (2)$$

которые доказываются следующим образом. Зеркально отразим правильный пятиугольник $ABCDE$ относительно прямой CD (рис.1). Из подобия треугольников ACD и $AB'E'$ следует равносильная (1) пропорция $\frac{d}{a+d} = \frac{a}{d}$. Опустим перпендикуляр AH на прямую DE . Так как

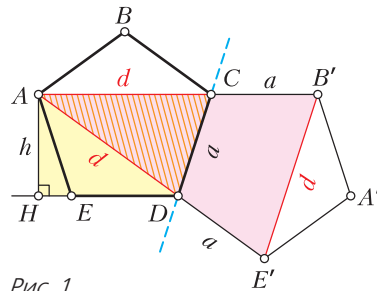


Рис. 1

$DH = \frac{a+d}{2}$, по теореме Пифагора из треугольника ADH получаем (2).

Соотношения (1) и (2), в частности, лежат в основе решения задачи М2583:

На стороне DE и диагонали BE правильного пятиугольника $ABCDE$ «вовне» построены квадраты $DEFG$ и $BEHI$ (рис.2, a).

а) Докажите, что точки A , I и G лежат на одной прямой.

б) Докажите, что на этой же прямой лежит центр O квадрата $BDJK$, построенного на диагонали BD «вовнутрь».

Оказывается, кроме прямой l_1 , о которой идет речь в задаче, меняя направление пристраивания квадратов («вовне» или «вовнутрь»), можно получить аналогичные прямые l_2 и l_3 (рис.2, б, в).

Для доказательства рассмотрим симметричную конструкцию из четырех правильных пятиугольников (рис.3): повернем правильный пятиугольник $ABCDE$ вокруг

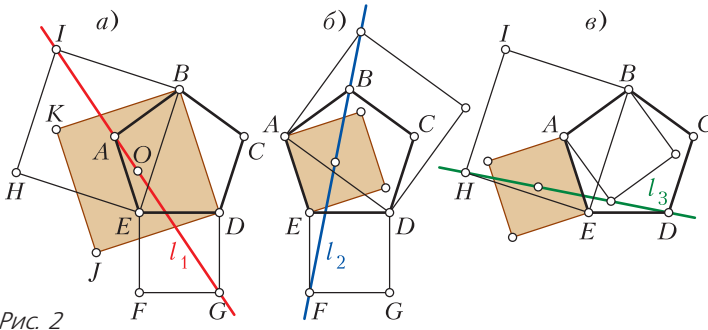


Рис. 2

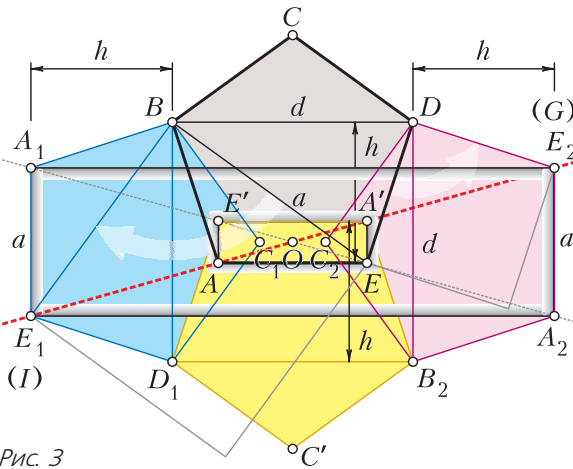


Рис. 3

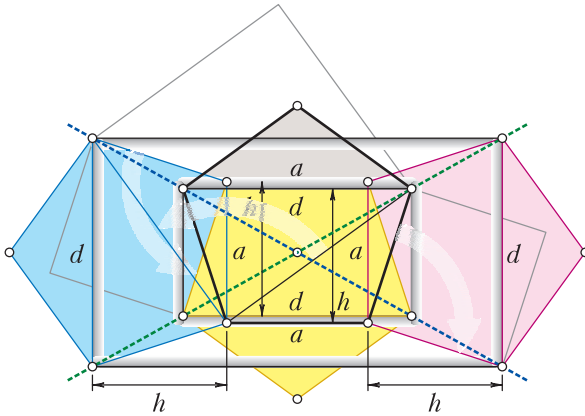


Рис. 4

точек B и D на -90° и $+90^\circ$ соответственно (считаем, что вращение против хода часовой стрелки совершается на положительные углы, а по ходу – на отрицательные); обозначим полученные пятиугольники $A_1BC_1D_1E_1$ и $A_2B_2C_2DE_2$; образ $A_2B_2C_2DE_2$ при повороте вокруг B_2 на $+90^\circ$ обозначим

$A'B_2C'D_1E'$. Очевидно, что BDB_2D_1 – квадрат, его центр O является центром симметрии объединения четырех пятиугольников, а вершины I и G квадратов $BEHI$ и $DEFG$, построенных на диагонали BE и стороне DE «вовне», совпадают с точками E_1 и E_2 . Таким образом, для решения задачи достаточно проверить, что прямоугольники $A_1E_2A_2E_1$ и $AE'A'E$ (с центром O и параллельными соответствующими сторонами) подобны. Их размеры: $(2h+d) \times a$ и $a \times (2h-d)$. В силу (2) отношения соответствующих сторон равны: $(2h+d) : a = a : (2h-d)$. Задача M2583 решена.

Используя рисунок 4, аналогично можно доказать утверждения о прямых l_2 и l_3 .

Покажем теперь, что прямые l_1, l_2, l_3 пересекаются в одной точке; l_2 и l_3 перпендикулярны; l_1 – биссектриса угла, образованного l_2 и l_3 , т.е. углы между прямыми l_1 и l_2, l_1 и l_3 равны по 45° .

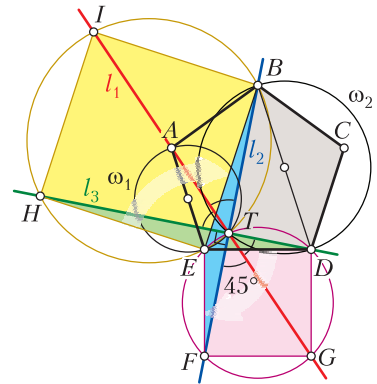


Рис. 5

Пусть FB (l_2) и HD (l_3) пересекаются в точке T (рис.5). Заметим, что при повороте вокруг E на -90° треугольник HED переходит в треугольник BEF . Значит, $HD \perp BF$. Поэтому точка T лежит на описанных окружностях квадратов $DEFG$ и $BEHI$. Но тогда TG – биссектриса угла

FTD (так как $FG = DG$), а TI – биссектриса угла BTH (так как $HI = BI$). Следовательно, точки I, T и G лежат на одной прямой – прямой l_1 .

Через точку T проходят не только три прямые и две окружности (описанные около квадратов), но, оказывается, еще и окружности ω_1 и ω_2 , построенные на AE и BD как на диаметрах. Это не очень удивительно, так как $\angle BTD = 90^\circ$, $\angle ATE = \angle ATF - \angle ETF = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$ (см. рис.5).

Интереснее, что ω_1 и ω_2 ортогональны. Напомним: углом между окружностями называют угол между касательными к ним, проведенными в точке пересечения. Пусть P, Q, R – середины AE, BD, DE соответственно (рис.6). Равенство (2) равносильно $PQ^2 = PT^2 + QT^2$, т.е. $PT \perp TQ$, что и означает ортогональность ω_1 и ω_2 . Есть и другое, «более геометрическое» доказательство ортогональности ω_1 и ω_2 , которое, таким образом, дает еще один способ вывести (2). Поскольку $BR \perp DE$, точка R лежит на ω_2 . Покажем, что точка S пересечения отрезков BP и AR также лежит на ω_2 . При повороте вокруг центра пятиугольника на 72° треу-

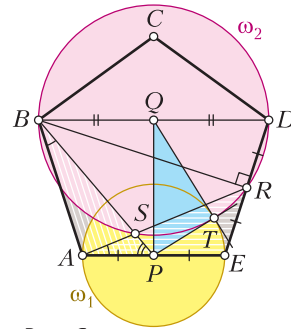


Рис. 6

гольник AER переходит в треугольник BAP , значит, $\angle BSR = 108^\circ$. А так как $\angle BDR = 72^\circ$, четырехугольник $BDRS$ вписанный, т.е. $S \in \omega_2$. Заметим, что треугольники ASP и BAP подобны (по двум углам: $\angle P$ общий, $\angle SAP = \angle PBA$ из равенства треугольников AER и BAP). Значит, $\frac{PA}{PB} = \frac{PS}{PA}$, или $PA^2 = PS \cdot PB$. Величина $PS \cdot PB$ – это степень точки P относительно ω_2 , она равна $PQ^2 - BQ^2$. Следовательно, $PT^2 = PA^2 = PQ^2 - BQ^2 = PQ^2 - QT^2$. Это и означает перпендикулярность QT и PT .

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

Прыжки в воду

Философу, физику и математику требуется решить такую задачу: прыгнуть с вышки в бассейн диаметром метр.

Ну, философ сосредоточился, вспомнил Сократа и Гегеля и, понадеявшись на удачу, прыгнул. И... не попал.

Физик измерил скорость и направление ветра, высоту вышки, все рассчитал, прыгнул и... попал.

Математик построил модель, написал программу, получил траекторию полета, долго что-то вычислял, потом разбежался, прыгнул и... улетел вверх. В знаке ошибся.

Кто как может

Инженер, физик и математик поселились в отеле. В одно и то же время у каждого в номере возникает пожар. Инженер тут же выбегает в коридор, хватается со стены пожарный шланг, открывает воду и быстро заливает огонь в своем номере. Физик мгновенно прикидывает температуру пламени, объем горючих веществ, атмосферное давление и т.д., затем наливая в стакан нужное количество воды, которой заливает очаг возгорания. Математик выскакивает в коридор, видит на

стене огнетушитель, радостно восклицает «Решение существует!», после чего спокойно возвращается в номер.

Перезанимался

Студент заходит во время сессии в библиотеку.

- Где библиотекарь? – спрашивает он уборщицу.
- В архиве.
- Разархивируйте, пожалуйста, мне срочно нужна книжка.

Слишком просто

Математик идет по улице и видит афишу – «Выступает камерный хор». Заинтересовавшись, покупает билет и идет на концерт. Вскоре выходит разочарованный:

- Частный случай, k равно трем.

Неожиданный ракурс

На экзамене по элементарной геометрии в педвузе профессор спрашивает студента:

- Можете ли вы дать определение точки?
- Запросто. Точка – это прямая линия, если смотреть ей прямо в торец.

Из книги «Математики тоже шутят»

Задачи

1. В ребусе Я Е М З М Е Я = 2020 замените каждую букву в левой части равенства цифрой или знаком арифметического действия (одинаковые буквы одинаково, разные — по-разному) так, чтобы получилось верное равенство. Достаточно привести один пример.

А.Заславский, О.Заславский

2. Используя один волшебный орех, Баба Яга может превратить блоху в жука или паука в клопа. А используя один волшебный желудь, может превратить блоху в паука или жука в клопа. За вечер Баба Яга потратила 20 волшебных орехов и 23 волшебных желудя. За счет этих действий количество жуков увеличилось на 5. Как могло поменяться количество пауков?

Е.Бакаев

3. Миша сложил из кубиков куб $3 \times 3 \times 3$. Затем некоторые соседние по грани кубики он склеил друг с другом. Получилась цельная конструкция из



16 кубиков, остальные кубики Миша убрал. Обмакнув конструкцию в чернила, он поочередно приложил ее к бумаге тремя гранями. Вышло слово КОТ (см. рисунок). Что получится, если

отпечатать грань, противоположную букве «О»?

М.Евдокимов, О.Заславский, А.Шаповалов

4. Ваня придумывает число из неповторяющихся цифр без нулей — пароль для своего телефона. Пароль работает так: если, не отрывая палец от экрана, последовательно соединить отрезками точки, соответствующие цифрам пароля, телефон разблокируется. При этом телефон не позволяет соединять отрезком две точки, между которыми есть третья: если Ваня соединит, например, 1 и 3, телефон «подумает», что Ваня вводит 1-2-3.

Ваня хочет, чтобы при вводе пароля линия движения пальца не пересекала сама себя. А еще чтобы перестановкой цифр пароля ни в каком порядке, кроме обратного, нельзя было получить другую такую линию. Например, пароль 1263 Ване не нравится, так как линия 6-3-2-1 другая, но тоже не имеет самопересечений.

Ваня придумал пароль 723 (см. рисунок). Эти три цифры — 2, 3 и 7 —



действительно никакой другой линией соединить нельзя. Жаль только, что пароль такой короткий.

Помогите Ване придумать пароль подлиннее. В ответе напишите сам пароль и нарисуйте ту единственную линию, которую можно получить из этих цифр.

И.Яценко

Задачи 1, 3, 4 предлагались на Математическом празднике; задача 2 — на Кавказской математической олимпиаде.

Парадокс Толи Втулкина

С. ДВОРЯНИНОВ

Часть I

Вниманию читателей предлагается научно-фантастический рассказ для будущих физиков-теоретиков.

Уже много лет прошло с тех пор, как на нашем школьном физическом кружке Толя Втулкин демонстрировал изобретенную им экспериментальную установку. А кажется, это было вчера...

Конструкция очень простая. Главная ее часть – тонкая стеклянная трубка, но не прямая, а изогнутая в виде полуокружности радиусом R . Есть еще металлический шарик 1, масса которого m . Он очень маленький и может свободно двигаться внутри трубки. Трубка закреплена на штативе в вертикальной плоскости в форме буквы С (рис.1). Ее верхний конец B и нижний H располагаются точно на одной вертикали. Когда мы пытались поместить шарик в точку B , то это нам никак не удавалось. И ясно, почему: это положение шарика неустойчиво. А еще к точке B была привязана тонкая нить длиной $2R$. К этой нити можно было привязывать другие шарики, которых были три. Массы M у

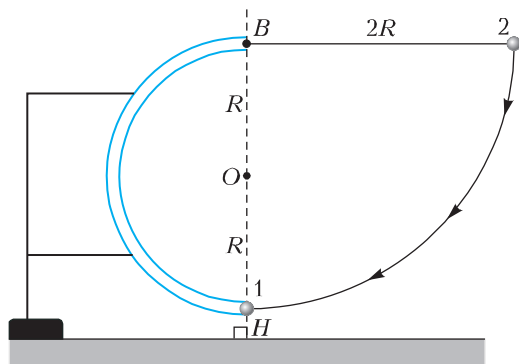


Рис. 1

них были разные, а диаметры – чуть больше диаметра трубки.

Сначала Толик поместил наш шарик 1 в точку H , а к нити привязал легкий шарик 2, масса которого M существенно меньше массы m . Затем он отвел нить в сторону и натянул ее. В результате нить расположилась вдоль горизонтали. Это, можно сказать, была стартовая позиция.

– Что будет происходить дальше, если я выпущу свой шарик 2 из рук? – спросил Толик.

Ответ был всем очевиден. Шарик в руках у Толика обладает потенциальной энергией $Mg \cdot 2R$. Он, двигаясь вниз как маятник, столкнется с шариком 1 и передаст ему часть своей кинетической энергии. Шарик 1, обладая некоторой энергией, начнет двигаться по трубке вверх, но, не дотянув даже до уровня точки O , на миг остановится, потом начнет скатываться вниз и выкатится из трубки. Так оно и оказалось на опыте.

Во второй раз Толик привязал к нити тяжелый шарик 2, масса M которого много больше m . И эта ситуация была понятна. Шарик 1 после удара по нему шарика 2 получил такую порцию энергии, что смог подняться по трубке до точки B , причем с ненулевой скоростью. И действительно, шарик 1 вылетал из трубки, как из пушки.

После этих простых опытов некоторые стали было терять всякий интерес к Толиной установке.

– Подождите, не уходите, сейчас будет самое интересное, – воскликнул Толик. – Пожалуйста, посмотрите! – с этими словами он привязал к нити шарик 2 с массой m , отвел нить в сторону и натянул.

– Что теперь будет с шариком 1, который сейчас покоится в точке H , после того как я выпущу из рук свой шарик 2? А? Какие ваши предположения? – обратился ко всем Толик.

Дело это всем показалось нехитрым. Потенциальная энергия шарика 2 в руках у Толика равна $2mgR$. После столкновения она переходит в энергию шарика 1 с массой m . Этой энергии ему в точности, тютельница в тютельница, хватит для того, чтобы по трубке подняться в точку B .

Примерно таким был наш ответ на вопрос Толика.

– Так, хорошо. Вы говорите – подняться в точку B , т.е. оказаться в точке B ? – продолжал допытываться Толик.

– Да, именно так, оказаться в точке B , какие могут быть в этом сомнения? – настаивали мы.

– А вот и нет! Смотрите! – торжествуя произнес Толик и выпустил из рук свой шарик 2 с массой m .

Его шарик 2, двигаясь на нити вниз, столкнулся с неподвижным шариком 1 и остановился. А бывший до этого неподвижным шарик 1 начал по трубке двигаться вверх, все выше и выше. Все происходило так, как мы и предполагали...

Здесь уместно вспомнить о хорошо известном опыте с подвешенными на нитях одинаковыми шариками. На рисунке 2 изображены пять одинаковых шариков,

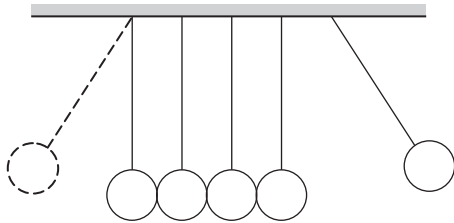


Рис. 2

касающихся один другого и подвешенных на горизонтальной штанге. Если крайний правый шарик вывести из положения равновесия, отклонив его нить на некоторый угол от вертикали, и затем отпустить, то в результате серии ударов его импульс перейдет к крайнему левому шарика. Тот выйдет из положения равновесия, причем его нить отклонится от вертикали на тот же самый угол. Далее процесс будет повторяться. При этом три средних шарика будут оставаться (или казаться?) неподвижными.

...А дальше на нашем кружке началось непредвиденное. Шарик карабкался вверх, его скорость уменьшалась, он был все ближе и ближе к точке B , но...

Помните, как у М.Булгакова в романе «Мастер и Маргарита» говорится о погоне поэта Ивана Бездомного за Воландом и его свитой: «Сколько Иван ни прибавлял шагу,

расстояние между преследуемым и им ничуть не сокращалось».

Так и у нас: время шло, а шарик все катился и катился по трубке вверх, не останавливаясь. Нам даже стало казаться, что он неподвижен, столь мала была его скорость. Но взяв в руки лупу, мы смогли увидеть, что нет – шарик неустанно перемещался по трубке выше и выше. Картина была удивительной: со стороны казалось, что шарик стоит на месте, на дуге окружности, слева от точки B , но вниз не катится, словно нет никакой скатывающей силы.

Когда на следующий день мы пришли в класс, картина по-прежнему оставалась неизменной.

...Прошло много лет, а установка Толи Втулкина до сих пор стоит в школьном шкафу и неутомимый в своем движении шарик продолжает поражать всякого, увидевшего ее.

Сразу скажем, что разобраться с этим удивительным явлением не так-то просто. Но, попробуем.

Часть II

Герой этой части статьи (так же, как и ее первой части) – маятник. Рассказать о нем автора вдохновили замечательные статьи А.Мигдала и В.Арнольда, опубликованные в юбилейном номере «Кванта» (№1 за 2020 год).

Наш маятник – это тонкий невесомый стержень длиной L с точечной массой m на конце, который может, совершая полный оборот (сальто-мортале), вращаться в вертикальной плоскости (рис.3). Начнем мы с энергии маятника и запишем ее закон сохранения:

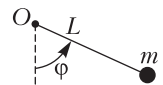


Рис. 3

$$\frac{mv^2(t)}{2} + mgh(t) = \text{const} . \quad (1)$$

Здесь $v(t)$ – линейная скорость точечной массы m , $h = L - L \cos \varphi$ – высота подъема маятника от крайнего нижнего положения, φ – угол отклонения от вертикали. Итак,

$$\frac{mv^2(t)}{2} + mg(L - L \cos \varphi(t)) = \text{const} .$$

Сократив на массу m и введя обозначение

$$\frac{v^2(t)}{2Lg} = u^2(t), \text{ уравнение (1) приведем к виду}$$

$$u^2 = \cos \varphi + C, \quad (2)$$

где величина u с точностью до постоянного коэффициента есть линейная скорость, а C – параметр. На время забудем, что в уравнении (2) переменные u и φ зависят от времени, и построим график этого уравнения на плоскости с координатами $(u; \varphi)$. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию (точнее, семейство функций, зависящих от параметра C)

$$u = \sqrt{\cos \varphi + C}. \quad (3)$$

Эта функция 2π -периодическая, поэтому сначала можно построить ее график на отрезке $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, а потом периодически продолжить на всю прямую $-\infty < \varphi < \infty$. Затем к этому графику надо добавить график функции $u = -\sqrt{\cos \varphi + C}$. В итоге получится график уравнения (2).

На отрезке $-\pi \leq \varphi \leq 0$ функция $f(\varphi) = \cos \varphi + C$ возрастает, на отрезке $0 \leq \varphi \leq \pi$ убывает. Функция \sqrt{f} возрастает в своей области определения, причем промежутки монотонности функции (3) совпадают с промежутками монотонности функции косинуса (разумеется, в своей области определения). А область определения функции (3) задается неравенством $\cos \varphi + C \geq 0$. Ясно, что эта область определения не пуста, если $C \geq -1$. Рассмотрим несколько возможных случаев.

1. Если $C = -1$, то получаем единственную точку $(0; 0)$ (точка 0 на рисунке 4). Этой точке соответствует неподвижный маятник, находящийся в крайнем нижнем устойчивом положении. При этом плоскость $(u; \varphi)$ (т.е. плоскость $(v; \varphi)$, или $(\varphi'; \varphi)$) называется фазовой плоскостью маятника.

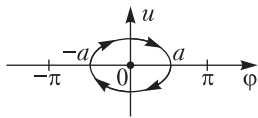


Рис. 4

2. Если $C \in (-1; 1)$, то функция (3) определена на отрезке вида $[-a; a] \subset [-\pi; \pi]$, т.е. на отрезке $[-\arccos(-C); \arccos(-C)]$ (см. рис.4). Изменению аргумента φ на этом отрезке соответствуют колебания маятника. Двум точкам на плоскости $(u; \varphi)$ с координатами $(-\arccos(-C); 0)$ и $(\arccos(-C); 0)$ соответствуют два крайних положения маят-

ника – левое и правое. В этих точках пространства маятник «на мгновение замирает», т.е. его скорость становится равной нулю.

Из опыта известно, что из крайнего левого положения маятник попадает в крайнее правое и обратно за конечное время, которое называют периодом колебаний. На плоскости $(u; \varphi)$ этим колебаниям соответствует замкнутая траектория. Касательная к этой траектории в крайних левой и правой точках вертикальна. Это следует из того, что производная функции $u = \sqrt{\cos \varphi + C}$ при $\varphi = \pm \arccos(-C)$ не существует (или обращается в бесконечность). Если теперь на графике (см. рис.4) поставить стрелки, соответствующие возрастанию времени t , то части графика превратятся в фазовые траектории.

В уравнении (3) вернемся к линейной скорости $v(t)$:

$$\frac{v(t)}{\sqrt{2Lg}} = \sqrt{\cos \varphi(t) + C}.$$

Линейная скорость связана с угловой скоростью формулой $v = \omega L$, а переменная угловая скорость – это производная от угла отклонения маятника от вертикали, т.е. $\varphi'(t)$, поэтому получаем уравнение

$$\sqrt{\frac{L}{2g}} \cdot \varphi' = \sqrt{\cos \varphi + C},$$

или

$$\varphi'(t) = K \sqrt{\cos \varphi(t) + C}, \quad (4)$$

где $K = \sqrt{\frac{2g}{L}}$. Это – дифференциальное уравнение, которое связывает неизвестную функцию $\varphi(t)$ и ее производную.

В окрестности правой точки $(\arccos(-C); 0)$ (или $(a; 0)$) функция $f(\varphi) = \cos \varphi + C$ «похожа» на линейную функцию $f(\varphi) = k(a - \varphi)$. Значит, на отрезке $[a - \varepsilon; a]$ уравнение (4) можно заменить близким, но более простым дифференциальным уравнением $\varphi' = K\sqrt{k(a - \varphi)}$, или

$$\varphi' = p\sqrt{a - \varphi}, \quad (5)$$

где p – некоторое положительное число.

Мы не требуем от наших читателей умения решать дифференциальные уравнения, достаточно лишь уметь дифференцировать.

Можно проверить, что функция

$$\varphi(t) = a - \frac{(pt - 2\sqrt{\varepsilon})^2}{4}$$

удовлетворяет уравнению (5) и начальному условию $\varphi(0) = a - \varepsilon$. Эта функция равна a при $t = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{p}$. Другими словами, на временном отрезке $0 \leq t \leq \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{p}$ угол отклонения

маятника от вертикали возрастает от $a - \varepsilon$ до наибольшего значения $a = \arccos(-C)$. Тем самым, мы рассмотрели математическую модель хорошо известного явления: при приближении маятника к крайним левому или крайнему правому положению (там, где скорость маятника равна нулю) его скорость монотонно убывает до нуля, но при этом в крайние положения маятник попадает за конечное время.

3. Рассмотрев два первых случая, мы узнали, как выглядят фазовые траектории уравнения (2) при каждом значении параметра C из промежутка $[-1; 1)$: это или точки, или овалы. А что будет, если $C \in (1; +\infty)$? Фазовые траектории для этого случая, пожалуй, самые простые (если не считать точек). Таким значениям C соответствуют те значения механической энергии маятника, которые больше потенциальной энергии в самой верхней точке его пути. Другими словами, такой маятник, находясь на самом верху, обладает еще и кинетической энергией, т.е. ненулевой скоростью. Движение такого маятника – это не колебания туда-сюда, влево-вправо, а постоянное вращение против или по часовой стрелке. При этом ясно, что его линейная скорость (как и угловая) меняется: при движении маятника вниз она нарастает, а после прохождения крайнего нижнего положения – уменьшается. Это хорошо видно на графике функции $u = \sqrt{\cos \varphi + C}$ (или на графике $u = -\sqrt{\cos \varphi + C}$) (рис.5). В верх-

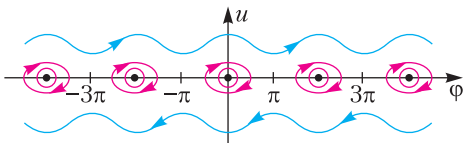


Рис. 5

ней полуплоскости стрелки на фазовых траекториях направлены вправо, в сторону возрастания φ , траектории описывают вращение маятника против часовой стрелки. В нижней полуплоскости стрелки на траектории направлены влево – маятник вращается по часовой стрелке.

4. Рассмотрим теперь функцию (3) при $C = 1$:

$$u = \sqrt{\cos \varphi + 1}. \tag{6}$$

Она определена на всей прямой $-\infty < \varphi < +\infty$, неотрицательна и равна нулю при $\varphi = \pi + 2\pi n$ (рис.6). В этих точках график имеет излом

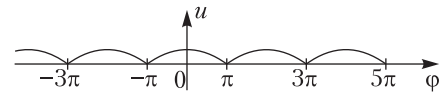


Рис. 6

(это следует из того, что здесь функция (6) имеет односторонние производные $\pm\sqrt{2}$). А какие фазовые траектории соответствуют графику этой функции? Сколько их?

На графике есть точки $(\pi + 2\pi n; 0)$, $\{n\} = Z$. Они соответствуют верхнему неустойчивому положению маятника. Каждая такая точка есть траектория динамической системы. Пусть при $t = 0$ маятник находится в самой нижней точке, т.е. $\varphi = 0$, и его скорость положительна. С течением времени угол $\varphi(t)$ увеличивается, скорость (и линейная, и угловая) уменьшается. Возникает вопрос: достигнет ли маятник самого верхнего положения и остановится ли он там? (В разных случаях ответ на этот вопрос разный. Об этом рассказывается, например, в статье С.Дворянинова, З.Краутера и В.Прогасова «Сколько времени длится причаливание?» в «Кванте» №11 за 2017 год.)

Рассмотрим функцию (6) на отрезке $\pi - \varepsilon \leq \varphi \leq \pi$:

$$u = \sqrt{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Воспользуемся связью этой функции с линейной и угловой скоростями:

$$u = \frac{v(t)}{\sqrt{2Lg}} = \frac{L\varphi'(t)}{\sqrt{2Lg}} = \sqrt{\frac{L}{2g}} \cdot \varphi'(t)$$

и получим следующее уравнение для угловой скорости $\varphi'(t)$:

$$\varphi'(t) = 2\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Будем теперь рассматривать новую функцию $\alpha(t) = \pi - \varphi(t)$, т.е. отклонение функции $\varphi(t)$ от π , при этом $0 \leq \alpha \leq \varepsilon$. Для новой функции имеем уравнение

$$-\alpha'(t) = 2\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right),$$

или

$$\alpha'(t) = -2\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (7)$$

Хорошо известно, что синус малого аргумента приближенно равен самому аргументу, поэтому вместо уравнения (7) рассмотрим приближенное уравнение

$$\beta'(t) = -\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot \beta.$$

Так как на отрезке $0 \leq \alpha \leq \varepsilon$ справедливо неравенство $\sin \alpha \leq \alpha$, то функция $\beta(t)$ убывает быстрее функции $\alpha(t)$. Легко проверить, что решением последнего уравнения является функция

$$\beta(t) = (\pi - \varepsilon) \cdot e^{-\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot t},$$

или

$$\beta(t) = (\pi - \varepsilon) \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot t\right).$$

Эта функция убывает до нуля бесконечно долго. Поэтому функция $\alpha(t)$, убывающая еще медленнее, тем более будет убывать до нуля бесконечно долго! Это означает, что движение фазовой точки по сепаратрисе – так называется кривая, задаваемая уравнением (6) на интервале $(-\pi; \pi)$, – длится бесконечно долго. Сепаратриса – это дуга кривой конечной длины без концевых точек. На фазовой плоскости сепаратрис бесконечно много.

Все фазовые траектории маятника показаны на рисунке 7. Они делятся на четыре вида: точки, овалы, сепаратрисы, бесконечные кривые (изображены разными цветами).

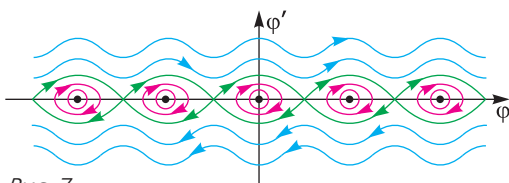


Рис. 7

Заметим, что в установке Толи Втулкина (о ней рассказывается в первой части статьи) шарик никогда не останавливается именно потому, что соответствующая ему фазовая точка движется по сепаратрисе. В реальности, конечно, провести такой опыт не удастся – попасть на сепаратрису невозможно (вспомните знакомые вам выражения: сепаратный мир, сепаратные переговоры, сепаратор в подшипнике и т.п.).

В заключение – задача:

Невесомый стержень OO_1 длиной $2L$ может вращаться в вертикальной плоскости вокруг точки O (рис.8). С ним связан

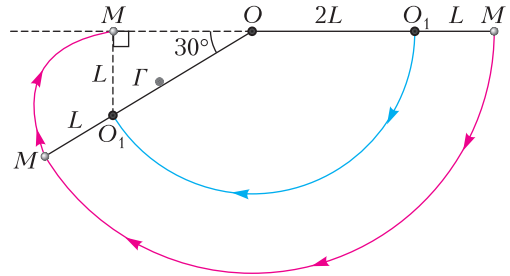


Рис. 8

шарниром невесомый стержень O_1M длиной L , на конце которого закреплена точечная масса. Этот двухзвенный маятник удерживают в горизонтальном положении, а затем отпускают без начальной скорости. На пути верхнего стержня маятника находится гвоздь G . Луч OG образует угол 60° с вертикалью, а длина отрезка OG меньше $2L$. Докажите, что такой маятник никогда не вернется в исходное положение.

Ясно, что в тот момент, когда наш маятник, вращаясь вокруг точки O , «наткнется» на гвоздь, он превратится в маятник длиной L , вращающийся вокруг точки O_1 . При этом запаса его кинетической энергии будет ровно столько, сколько требуется точке M для подъема на начальную высоту. Это означает, что движению точки M по окружности радиусом L будет соответствовать движение фазовой точки по сепаратрисе. Но это движение длится бесконечно долго. Следовательно, укороченный маятник будет подниматься вверх бесконечно долго. Именно поэтому он никогда не вернется в исходное положение.

Работа над ошибками

В.ЖУРАВЛЕВ, П.САМОВОЛ

Если вы не делаете ошибок, вы решаете слишком простые задачи, и это большая ошибка.

Фрэнк Вильче

Введение

Эта история началась с того, что дочь одного из авторов этой статьи принесла пример вступительной работы на кружки Малого мехмата за 7 класс. На листке с условиями задач выделялась надпись: **«Во всех задачах требуется полное решение!»** Одна из задач привлекла наше внимание. Вот она.

Задача 1. Квадрат $ABCD$ разрезали на треугольники и внутри каждого из них написали его периметр (рис.1). Найдите сторону квадрата $ABCD$.

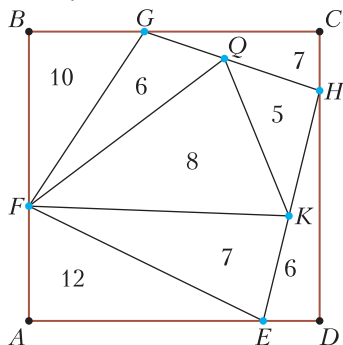


Рис. 1

Казалось бы, что в ней такого? Сначала нужно найти периметр четырехугольника $FGHE$. Для этого сложим периметры трех треугольников FGQ , QHK и KEF , находящихся внутри этого четырехугольника, и вычтем периметр треугольника FQK . Поступая аналогично, найдем периметр квадрата $ABCD$. Для этого сложим периметры треугольников AFE , DEH , CHG и BGF и вычтем периметр четырехугольника $FGHE$.

Итак,

$$P_{FGHE} = P_{FGQ} + P_{HQK} + P_{KEF} - P_{FQK} = 6 + 5 + 7 - 8 = 10,$$

$$P_{ABCD} = P_{AFE} + P_{DEH} + P_{CHG} + P_{BGF} - P_{FGHE} = 12 + 10 + 7 + 6 - 10 = 25.$$

Поскольку у квадрата все стороны равны, легко находим ответ: длина стороны квадрата равна $25/4 = 6,25$.

Видимо, такого решения и ожидают от семиклассника.

Однако все не так просто. Как говорится, дьявол скрывается в деталях. В геометрической задаче нельзя произвольно назначать параметры. Нельзя взять и расставить понравившиеся нам числа по треугольникам. Но если мы это все-таки сделали, следовало бы задуматься: *существует ли такой квадрат?*

Напомним фольклорную задачу, ставшую уже классической.

Задача 2. Найдите площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой 10 см и высотой, проведенной к гипотенузе, равной 6 см.

С одной стороны, площадь треугольника равна половине произведения гипотенузы на высоту, проведенную к ней, откуда получаем ответ: $S_{\Delta} = \frac{10 \cdot 6}{2} = 30$ (см²). С другой стороны, медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы. В условиях задачи 2 длина медианы равна 5 см. При этом медиана как наклонная не может быть короче высоты, равной 6 см. Получаем противоречие. Это означает, что прямоугольного треугольника, удовлетворяющего условиям задачи 2, *не существует!*

Однако вернемся к первоначальной задаче. Во время написания этой статьи мы предлагали задачу 1 как школьникам, так и коллегам с высшим образованием. В нашей нерепрезентативной выборке никто не заметил подвоха, как, впрочем, и автор, предложивший эту задачу.

Сейчас мы докажем, что такого квадрата не существует. Для этого нам потребуется следующий известный факт.

Теорема. В прямоугольном треугольнике длина гипотенузы больше длины катета.

Применим эту теорему для прямоугольных треугольников FBG и EDH . Имеем $GF > GB$, тогда $10 = P_{BGF} > BG + GF > > 2BG$, следовательно, $BG < 5$ и $GC = BC - BG > 6,25 - 5 = 1,25$, т.е. $GC > 1,25$. Аналогично, $HE > HD$, тогда $6 = P_{EHD} > EH + HD > 2HD$, следовательно, $HD < 3$ и $CH = CD - HD > 6,25 - 3 = 3,25$, т.е. $CH > 3,25$.

Теперь применим теорему для прямоугольного треугольника CHG . Получаем

$$7 = P_{GCH} = GC + CH + GH > GC + 2CH > > 1,25 + 2 \cdot 3,25 = 7,75.$$

Противоречие. Итак, такого квадрата не существует!

Блестящая идея со сложением и вычитанием периметров разбилась о свойства прямоугольных треугольников.

Обнаружение скрытой ошибки в условии задачи заставляет нас задуматься над несколькими вопросами.

Один из вопросов можно отнести к педагогике и методике обучения математике. *Засчитывать ли решение задачи школьнику, нашедшему ответ в задаче, условие которой сформулировано некорректно?*

Применительно к нашим задачам – засчитывать ли решение задачи школьнику, получившему в задаче 1 ответ 6,25 тем способом, который описан выше, или школьнику, нашедшему в задаче 2, что площадь прямоугольного треугольника равна 30 см^2 ?

Здесь могут быть разные мнения. Время, отведенное на выполнение вступительной работы, ограничено, и у школьника вряд ли есть возможность провести полное исследование. Поэтому мы бы засчитали ему такое решение. Естественно, что школьник, доказавший невозможность существования такого квадрата, выше любой похвалы. Такой школьник наверняка усвоил, что одним из важнейших действий, которому учат при решении задач, является проверка! В то же время, мы можем привести следующий логический аргумент, основанный на известном свойстве импликации. *Из ложного утверждения может следовать как истинное утверждение, так и ложное. Но из истинного утверждения ложное утверждение не следует.* Таким образом, к задаче с противоречивыми условиями подходит любой ответ (даже тот, который мы здесь не привели), и его нужно засчитать. Однако оставим обсуждение этого непростого

педагогического и методического вопроса за рамками этой статьи.

Второй вопрос связан с попыткой исправить ошибку в условии и, возможно, провести небольшое математическое исследование. *Можем ли мы спасти идею задачи, немного «пошевелить» ее условие?*

Прямоугольник

Что произойдет, если в условии задачи квадрат заменить на прямоугольник? Чтобы не загромождать чертеж, уберем из рассмотрения ΔFQK . Переформулируем задачу.

Задача 3. *От прямоугольника $ABCD$ отрезали треугольники и внутри каждого из них написали его периметр (рис. 2). Найдите периметр прямоугольника $ABCD$ при условии, что периметр четырехугольника $FGHE$ равен 10.*

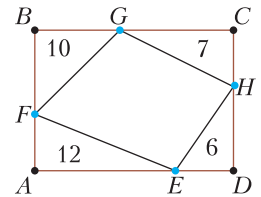


Рис. 2

Применяя те же рассуждения со сложением и вычитанием периметров треугольников, найдем, что периметр прямоугольника $ABCD$ равен 25. Но теперь мы хотим знать: существует ли такой прямоугольник?

При обсуждении задач 1 и 3 с друзьями возник вопрос о большом разбросе значений периметров четырехугольника $FGHE$ и квадрата $ABCD$. Такая конструкция казалась невозможной. Периметр четырехугольника $FGHE$, равный 10, подозрительно мал по сравнению с периметром квадрата (прямоугольника) $ABCD$. Дальнейшие выкладки подтверждают верность высказанной догадки.

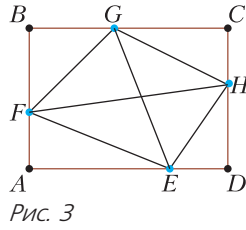
Начнем наше исследование с определения. Назовем четырехугольник *вписанным* в прямоугольник (квадрат), если каждая из его вершин лежит на одной из сторон прямоугольника (квадрата). В нашей задаче четырехугольник $FGHE$ является вписанным в прямоугольник $ABCD$. Получим несколько несложных оценок, связывающих периметры прямоугольника (квадрата) и вписанного в него четырехугольника.

Задача 4. *Для периметров прямоугольника $ABCD$ и вписанного в него четырехугольника $FGHE$ выполняются неравенства*

$$P_{FGHE} < P_{ABCD} < 2P_{FGHE}.$$

Докажите это.

Левая часть неравенства следует из неравенств треугольника (рис.3): действительно, $FE < AF + AE$, $FG < BF + BG$, $GH < CG + CH$ и $HE < DH + DE$. Сложим



все эти неравенства и получим требуемое. Докажем правую часть неравенства. Поскольку наклонные меньше перпендикуляра, то $AB \leq GE$ и $BC \leq FG$. Опять используем неравенства треугольника: $GE < FG + FE$ и $GE < GH + HE$; аналогично, $FH < FG + GH$ и $FH < FE + HE$. Следовательно,

$$P_{ABCD} = 2AB + 2BC \leq 2GE + 2FH < 2P_{FGHE},$$

что и требовалось доказать.

В условии задачи 3 периметр прямоугольника равен 25, а периметр вписанного четырехугольника равен 10, что невозможно, поскольку $25 > 2 \cdot 10 = 20$.

Доказанное нами неравенство достаточно слабое, хотя оно помогло доказать, что такого прямоугольника не существует.

Неравенство, связывающее периметры прямоугольника и вписанного четырехугольника, можно усилить. Для этого используем известные неравенства о средних. Итак, среднее квадратическое двух чисел не меньше их среднего арифметического:

$$\frac{x + y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}.$$

Теперь сформулируем усиление неравенства из задачи 3.

Задача 5. Для периметров прямоугольника $ABCD$ и вписанного в него четырехугольника $FGHE$ выполняется неравенство $P_{ABCD} \leq \sqrt{2}P_{FGHE}$. Докажите это.

Используем неравенство о средних в несколько измененном виде:

$$x + y \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Применим теорему Пифагора. Имеем

$$\begin{cases} AF + AE \leq \sqrt{2}\sqrt{AF^2 + AE^2} = \sqrt{2}FE, \\ BF + BG \leq \sqrt{2}\sqrt{BF^2 + BG^2} = \sqrt{2}FG, \\ CG + CH \leq \sqrt{2}\sqrt{CG^2 + CH^2} = \sqrt{2}HG, \\ DE + DH \leq \sqrt{2}\sqrt{DE^2 + DH^2} = \sqrt{2}HE. \end{cases}$$

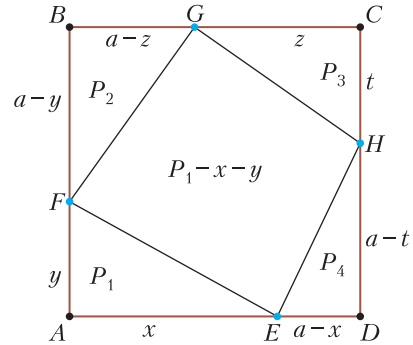
Сложим все неравенства и получим требуемое. Задача решена.

Из неравенств, доказанных в задаче 4, следует, что если периметр прямоугольника равен 25, то периметр вписанного четырехугольника должен быть больше 12,5. В задаче 5 доказано более сильное неравенство, из которого следует, что периметр вписанного четырехугольника не меньше $\frac{25}{\sqrt{2}} > 17,67$.

Итак, знание несложных геометрических фактов помогло бы избежать ошибки при составлении задачи 1.

Квадрат

Вернемся к квадрату. Для упрощения рассуждений уберем на рисунке 1 из рассмотренной точки Q и K и треугольники FGQ , QHK , KEF и FQK . Получим «упрощенную» конструкцию (рис.4).



В этом разделе статьи простота геометрических решений уступит место надежному и «скучному» аппарату алгебры. Чтобы развить успех, попробуем поработать не с конкретными значениями периметров, а будем рассматривать значения периметров как переменные. Используя теорему Пифагора и проводя технические выкладки, мы сможем составить и решить систему уравнений. Часть громоздких выкладок опускаем.

Проделаем вычисления для квадрата, а пылкий читатель может адаптировать их для прямоугольника. Пусть длина стороны квадрата равна a . Введем обозначения для периметров треугольников: $P_{AFE} = P_1$, $P_{BFG} = P_2$, $P_{CHG} = P_3$ и $P_{DHE} = P_4$. Из условия задачи нам известен периметр четырехугольника $FGHE$; с другой стороны, с учетом наших обозначений он равен

$$P_{FGHE} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 - 4a.$$

Целью наших дальнейших рассуждений является получение соотношения, связывающего переменные a , P_1 , P_2 , P_3 и P_4 .

Неравенство из задачи 5 нам дает

$$4a \leq \sqrt{2}(P_1 + P_2 + P_3 + P_4 - 4a).$$

Отсюда получаем следующее неравенство, ограничивающее выбор параметров:

$$a \leq \frac{2 - \sqrt{2}}{4}(P_1 + P_2 + P_3 + P_4).$$

Обозначим длины отрезков, как на рисунке 4. Применим теорему Пифагора для $\triangle AFE$:

$$(P_1 - x - y)^2 = x^2 + y^2.$$

Тогда

$$y = \frac{P_1^2 - 2P_1x}{2P_1 - 2x} = P_1 - \frac{P_1^2}{2P_1 - 2x}.$$

Аналогично применим теорему Пифагора для $\triangle BFG$, $\triangle CHG$ и $\triangle DEH$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} y = P_1 - \frac{P_1^2}{2P_1 - 2x}, \\ a - y = P_2 - \frac{P_2^2}{2P_2 - 2(a - z)}, \\ t = P_3 - \frac{P_3^2}{2P_3 - 2z}, \\ a - t = P_4 - \frac{P_4^2}{2P_4 - 2(a - x)}. \end{cases}$$

Последовательно избавимся от переменных. Для этого сложим первое уравнение со вторым, а третье с четвертым и выразим из них переменную z . Получим

$$\begin{cases} a = P_1 - \frac{P_1^2}{2P_1 - 2x} + P_2 - \frac{P_2^2}{2P_2 - 2(a - z)}, \\ a = P_3 - \frac{P_3^2}{2P_3 - 2z} + P_4 - \frac{P_4^2}{2P_4 - 2(a - x)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - z - P_2 = \frac{P_2^2(P_1 - x)}{2(a - P_1 - P_2)(P_1 - x) + P_1^2}, \\ z - P_3 = \frac{P_3^2(P_4 - (a - x))}{2(a - P_3 - P_4)(P_4 - (a - x)) + P_4^2}. \end{cases}$$

Сложив полученные уравнения, избавляем-

ся от переменной z :

$$a - P_2 - P_3 = \frac{P_2^2(P_1 - x)}{2(a - P_1 - P_2)(P_1 - x) + P_1^2} + \frac{P_3^2(P_4 - (a - x))}{2(a - P_3 - P_4)(P_4 - (a - x)) + P_4^2}.$$

Домножим обе части уравнения на выражения, стоящие в знаменателях, перенесем слагаемые в одну сторону уравнения и приведем подобные члены по степеням x , считая a , P_1 , P_2 , P_3 , P_4 параметрами. Мы получим квадратное уравнение относительно переменной x .

Здесь мы не приводим это квадратное уравнение ввиду его громоздкости, хотя читатели могут его получить, исписав несколько листов бумаги или, как авторы, проведя выкладки в онлайн-калькуляторе.

Если это квадратное уравнение имеет положительный корень, то это означает, что мы можем построить квадрат с заданными параметрами a , P_1 , P_2 , P_3 , P_4 . При этом, поскольку мы знаем x , мы знаем и расположение точки E (и точек F , G , H) на стороне квадрата.

При значениях параметров $a = 6,25$, $P_1 = 12$, $P_2 = 10$, $P_3 = 7$, $P_4 = 6$ дискриминант квадратного уравнения отрицательный и, следовательно, квадратное уравнение не имеет решения. Мы еще одним способом доказали невозможность существования квадрата из задачи 1.

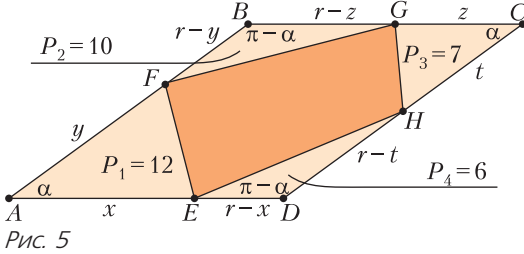
Обратите внимание, что в условии задачи 1 периметры всех треугольников – натуральные числа. Это понятно: автор хотел облегчить семиклассникам вычисление ответа. Однако следует учесть, что если мы имеем дело с прямоугольными треугольниками, то в наших построениях могут появиться несоизмеримые отрезки. Поэтому подбор параметров, при котором периметры треугольников являются целочисленными, это отдельный вопрос, связанный не только с геометрией, но и с теорией чисел.

Мы так долго говорили о невозможности конструкции из задачи 1, что хочется увидеть пример параметров, для которых конструкция возможна. Подойдут, например, значения $a = 7$, $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 12$, где от квадрата со стороной 7 отрезаны четыре египетских прямоугольных треугольника со сторонами 3, 4 и 5.

Ромб

Мы один раз уже шевелили условие первоначальной задачи, пытаясь заменить квадрат на прямоугольник. Но что произойдет, если в условии задачи квадрат заменить на ромб? Переформулируем задачу.

Задача 6. От ромба $ABCD$ отрезали треугольники и внутри каждого из них написали его периметр (рис.5). Найдите сторону



ромба $ABCD$ при условии, что периметр четырехугольника $FGHE$ равен 10.

Пусть длина стороны ромба $ABCD$ равна r . Применим рассуждения со сложением и вычитанием периметров треугольников из решения задачи 1 и найдем, что $r = 6,25$.

Учитывая предыдущий опыт, нам интересно знать: *существует ли такой ромб?*

Отметим, что случай, когда угол A ромба тупой, практически ничем не отличается от случая квадрата. В случае, когда угол A ромба острый, переформулированная задача оказалась серьезное сопротивление, и нам не удалось полностью ответить на поставленный вопрос.

Обратим внимание, что рассуждения, которые мы применяли для четырехугольника, вписанного в прямоугольник, в случае с ромбом не проходят. Вписанный четырехугольник может располагаться близко к меньшей диагонали ромба, что не позволяет получить требуемую оценку на величину периметра. Возможно, читатели будут более удачливы и найдут ответ на вопрос – существует ли такой ромб?

Предлагаем читателям решить самостоятельно еще несколько задач.

Задачи для самостоятельного решения

1. Дана окружность с центром в точке O и с диаметром BD (рис.6). Известно, что $AF = 4$, $CG = 2$, $AE = OG = FG = 3$. Найдите BE .
2. а) Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка P . Из точки P к серединам сторон квадрата проведены четыре отрезка (рис.7). Известны площади трех четырехугольников $S_1 = 16$, $S_2 = 20$, $S_3 = 32$.

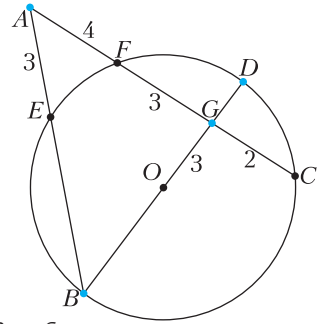


Рис. 6

Найдите площадь четвертого четырехугольника.

б) Будет ли корректным условие задачи, если в качестве значений площадей трех четырехугольников будут выбраны некоторые три произвольных положительных числа S_1, S_2, S_3 ?

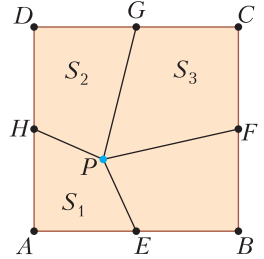


Рис. 7

3. Дана пирамида $ABCD$ (рис.8). Точка P движется по прямой BC . Обозначим: $\vec{AB} = \vec{i}$, $\vec{AC} = \vec{v}$, $\vec{AD} = \vec{w}$, $\vec{BP} = t \cdot \vec{BC}$. Известно, что

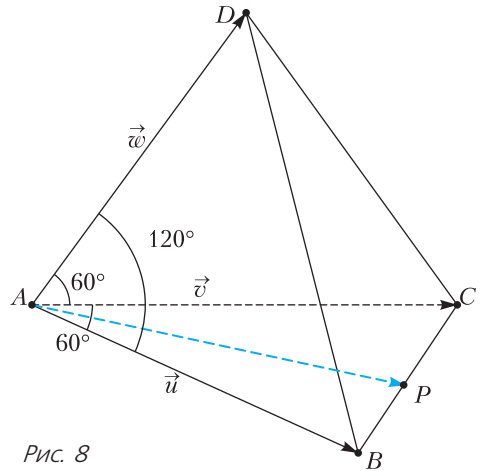


Рис. 8

$\angle BAC = \angle CAD = 60^\circ$, $\angle BAD = 120^\circ$, $|\vec{i}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = 1$. При каких значениях параметра t угол между \vec{AP} и \vec{AD} равен углу между \vec{AP} и \vec{AC} ?

В заключение нашей работы над ошибками напомним читателю выдающегося физика Петра Леонидовича Капицы, который говорил: «Свобода творчества – свобода делать ошибки».

Авторы благодарят Е.Теренкова за ценные замечания.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

Задачи

(см. «Квант» №4)

1. См. рис. 1.

2. Два яблока, которые уравновесили у Саши четыре других, назовем *спелыми*. Они составляют половину общего веса яблок и поэтому не могли оказаться на одной чаше весов у Тани. Значит, одна чаша весов у Тани – это одно спелое яблоко и два неспелых, и вместе они тоже составляют половину общего веса. Тогда эти два неспелых яблока весят столько же, сколько и второе спелое.

3. Через 40 минут.

За один час обе машины вместе проехали бы трижды сторону AD и трижды сторону AB , так как одна проезжает за час две стороны, равные AD , и одну, равную AB , а вторая проезжает за час две стороны, равные AB , и одну, равную AD . Значит, за треть часа, т.е. за 20 минут, машины вместе проедут одну сторону, равную AD , и одну – равную AB . А весь периметр прямоугольника они проедут за вдвое больший промежуток времени.

4. Больше всего барсуков.

Запишем данные задачи в виде таблицы:

	«Волки»	«Лисы»	«Зайцы»	«Барсуки»
Два года назад	28	12		
Год назад		10	15	15
В этом году		25	15	

Посмотрим на «зайцев». Последние два года в масках зайцев было 30 зверей. Все это разные звери, так как никто два года подряд маску зайца не наденет. И это не зайцы. Значит, в лесу есть по крайней мере 30 не-зайцев, т.е. зайцев не более $40 - 30 = 10$. Такое же рассуждение про зверей, которые два последних года были на празднике «лисами», показывает, что настоящих лис не более чем $40 - 10 - 25 = 5$. Два года назад на маскараде было 28 «волков», и все это были не настоящие волки, настоящих же не более $40 - 28 = 12$. Итак, волков, лис и зайцев вместе не более чем $12 + 5 + 10 = 27$. Это значит, что барсуков как минимум $40 - 27 = 13$, и это самый многочисленный вид животных в лесу.

Конкурс имени А.П.Савина

(см. «Квант» №3)

25. Пусть разбойникам удалось поделить алмазы на три части. Так как алмазов 5, одна из частей будет состоять из одного алмаза, назовем его *брусом*. Но

тогда алмазы можно было разделить и при первой попытке, так как брусок либо был исходной отмеренной третью, либо был среди оставшихся $\frac{2}{3}$ алмазов, которые, тем самым, делятся на две части по $\frac{1}{3}$. Противоречие.

26. 60° .

Покажем, что правильные треугольники, построенные на сторонах данного треугольника, полностью его накроют. Возьмем произвольный треугольник ABC и рассмотрим два случая.

Случай 1. В треугольнике ABC есть угол не меньше 120° , пусть это угол A . Тогда правильный треугольник $B'CD$, построенный на стороне BC , полностью его накроет (рис.2). Докажем это. Оба

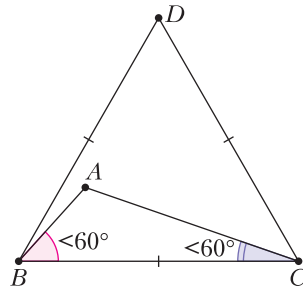


Рис. 2

угла B и C меньше 60° . Тогда лучи BA и CA проходят внутри треугольника $B'CD$, значит, внутри него лежит и точка A их пересечения.

Случай 2. В треугольнике ABC все углы меньше 120° . Тогда внутри $\triangle ABC$ найдется точка K такая, что отрезки, проведенные к ней из вершин, образуют со сторонами углы меньше 60° . В качестве такой точки можно взять точку пересечения биссектрис (рис.3). Теперь $\triangle ABC$ разбит на три треугольника,

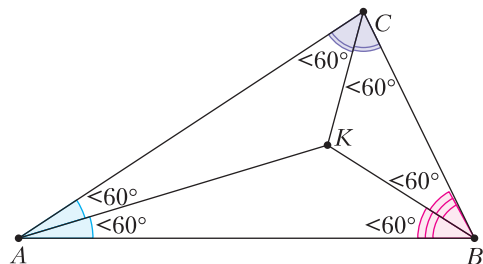


Рис. 3

каждый из которых полностью накрывается одним из правильных треугольников.

Теперь покажем, что если у равнобедренных треугольников угол при вершине больше 60° , то не всякий треугольник ими можно накрыть. Пусть их углы при вершине равны $60^\circ + 2\epsilon$, где $\epsilon > 0$, тогда

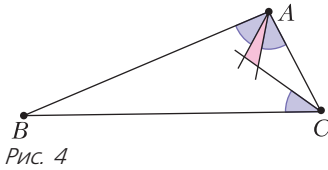


Рис. 4

углы при основаниях равны $60^\circ - \epsilon$. Покажем, что треугольник с углами $\angle A = 120^\circ$, $\angle B = \epsilon/2$, $\angle C = 60^\circ - \epsilon/2$ не покрывается такими равнобедренными треугольниками. На рисунке 4 показано, как проходят три стороны этих равнобедренных треугольников внутри $\triangle ABC$ (углы, отмеченные одной дугой, это углы при основаниях равнобедренных треугольников, они равны $60^\circ - \epsilon$). Красным цветом выделена область, которая останется не накрытой.

27. а) 2^n .

Пронумеруем лампочки. Если у кнопки номер k , то соединим ее со всеми лампочками с номерами от 1 до k . Тогда для любого t можно будет менять состояние лампочки под номером t , не поменяв состояния других: при $t > 1$ для этого надо нажать на кнопки t и $t - 1$, а при $t = 1$ — просто нажать на кнопку 1. Значит, можно менять состояние одной лампочки независимо от других; соответственно, можно получить любую комбинацию горящих и не горящих лампочек.

б) 2^{m+1} , где m — наибольшее натуральное число такое, что $2^m \leq n$.

Оценка. Количество возможных комбинаций горящих и не горящих лампочек, которые можно получить, нажимая на кнопки в некоторой конфигурации кнопок и лампочек, назовем *разнообразием* этой конфигурации. Рассмотрим n лампочек и теперь будем последовательно рассматривать кнопки в таком порядке: номер 1, номер 2, номер 4, 8, ..., 2^{m-1} , n . Такие кнопки назовем *важными*, их количество равно $m + 1$. Покажем, что при каждом добавлении важной кнопки разнообразие конфигурации увеличивается ровно в 2 раза.

Добавим очередную важную кнопку K . Так как номер очередной кнопки больше суммы номеров всех предыдущих подключенных кнопок, то найдется лампочка L , которая соединена только с новой кнопкой. Рассмотрим одну из старых комбинаций горящих и не горящих лампочек — она по-прежнему достижима. Нажав на кнопку K , получим комбинацию, которую до этого нельзя было получить, так как в ней горит лампочка L , чего раньше нельзя было достичь. (При этом понятно, что из двух разных старых комбинаций указанным образом не может получиться одна и та же новая.) Таким образом, достижимы все старые конфигурации и количество новых комбинаций равно количеству старых, т.е. количество достижимых конфигураций увеличилось в 2 раза.

Итак, после добавления важных кнопок разнообразие конфигурации станет равным 2^{m+1} . Добавим

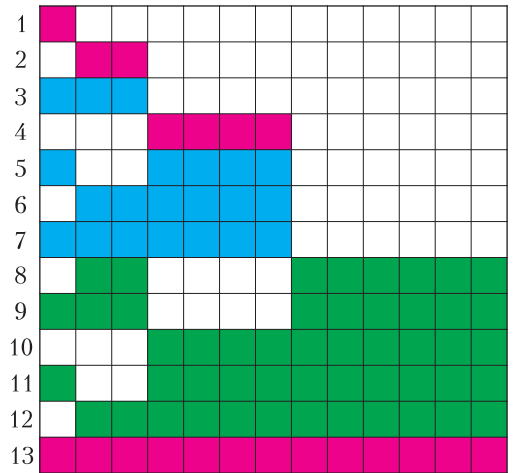


Рис. 5

теперь все остальные кнопки — они, очевидно, не понизят разнообразие.

Пример. Покажем, как соединять кнопки с лампочками, чтобы разнообразие было равно 2^{m+1} .

На рисунке 5 показан пример конфигурации для $n = 13$, тогда $m = 3$, разнообразие равно 2^4 . Строчки соответствуют кнопкам, столбцы — лампочкам; если клетка закрашена, то соответствующая кнопка и лампочка соединены. Построение примера разбито на три этапа. Кнопки, добавленные на первом этапе, отмечены красным (это важные кнопки), на втором — синим, на третьем — зеленым.

Первый этап. Подключим сначала важные кнопки с номерами 1, 2, ..., 2^{m-1} так, чтобы никакие две не соединялись с одной лампочкой. Это возможно сделать, так как общее количество лампочек n не меньше 2^m , что в свою очередь больше суммы номеров кнопок, которые мы сейчас подключаем. Теперь подключим последнюю важную кнопку с номером n . Как мы уже показывали, к этому моменту разнообразие равно 2^{m+1} . Покажем теперь, как добавлять остальные лампочки, чтобы оно не увеличилось.

Второй этап. Теперь подключим все неважные кнопки с номерами меньше 2^m следующим образом. Номер каждой такой кнопки представляется как сумма некоторых степеней двойки, меньших 2^m . Кнопки с номерами, равными этим степеням двойки, мы уже добавили; соединим рассматриваемую кнопку с теми же лампочками. Нажатие на новую кнопку можно заменить нажатием на несколько старых, так что ее добавление не повышает разнообразия.

Третий этап. Оставшиеся кнопки — с номерами от 2^m до $n - 1$ — подключим по следующему правилу. Кнопка с номером i должна соединяться с теми лампочками, с которыми не соединена «противоположная» ей кнопка с номером $n - i$. Все кнопки, «противоположные» к добавляемым на этом этапе,

мы уже добавили ранее, так как они имеют номера от 1 до $n - 2^m$, а $n - 2^m < 2^m$, поскольку $n < 2^{m+1}$. Нажатие на кнопку i даст тот же результат, что и нажатие на кнопки $n - i$ и n , поэтому добавление такой кнопки не повысит разнообразия.

Задача решена. В процессе ее решения можно было заметить, что разнообразие конфигурации всегда является степенью двойки. Это утверждение для любых систем кнопок и лампочек было первым пунктом в задаче М665 «Задачника «Кванта» (автор – десятиклассница Н. Гринберг):

Световое табло состоит из нескольких ламп, каждая из которых может находиться в двух состояниях (гореть или не гореть). На пульте несколько кнопок, при нажатии каждой из которых одновременно меняется состояние некоторого набора ламп (для каждой кнопки – своего). Вначале лампы не горят.

а) Докажите, что число различных узоров, которые можно получить на табло, – степень двойки.

б) Сколько различных узоров можно получить на табло, состоящем из tn лампочек, расположенных в форме прямоугольника размером $t \times n$, если кнопками можно переключить как любой горизонтальный, так и любой вертикальный ряд ламп? (Проверьте ваш ответ для небольших значений t и n .)

в) Придумайте другие примеры табло и наборов (переключаемых кнопками), в которых можно найти число узоров.

Решения задачи М665 можно прочитать в «Кванте» №9 за 1981 год. Заметим, что в задаче 27 получаются некоторые из таких конфигураций, которые требовалось найти в пункте в).

Конфигурации, родственные этой, обсуждаются также в статье «Переключения рядов» Е. Бакаева («Квант» №3 за 2017 г.); там рассматриваются, в частности, разные вопросы про конфигурации из пункта б) задачи М665. А в статье «Раскраски графов и линейные уравнения» В. Дорофеева и А. Спивака («Квант» №4 за 2011 г.) обсуждаются связи конфигураций кнопок и лампочек с темами, вынесенными в название статьи.

28. Первое решение. Идея решения в том, чтобы сначала сложить из данного прямоугольника такой прямоугольник, у которого отношение сторон равно 2. Из него уже легко складывается прямоугольный треугольник (рис.6).

Назовем исходный прямоугольник $ABCD$, пусть $AD = a$, $CD = b$. Напомним, что по условию задачи $b < a < 2b$. Стороны прямоугольника, который мы

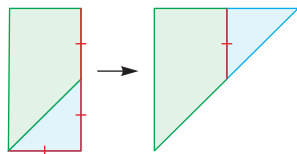


Рис. 6

собираем из него сложить, обозначим c и $2c$. Так как его площадь равна площади $ABCD$, то $2c^2 = ab$, откуда $c = \sqrt{ab}/2$.

Докажем, что $c < b < 2c$:

$$\frac{a}{2} < b < a \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{2}} < \sqrt{b} < \sqrt{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{\frac{ab}{2}} < b < \sqrt{ab} = \sqrt{2}c < 2c.$$

Отметим точку K на продолжении отрезка DC за точку C такую, что $DK = 2c$ (рис.7). Это возможно, так как $2c > b = CD$. Пусть AK

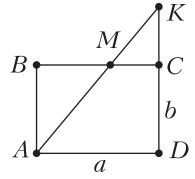


Рис. 7

пересекает BC в точке M . Так как $CD = b > 2c - b = CK$, то $MA > MK$. Значит, на отрезке MA можно отметить точку L такую, что $AL = MK$ (рис.8). Опустим перпендикуляр LP на AD и восставим перпендикуляр к DK из точки K , пусть они пересекаются в точке Q . Покажем, как разрезать $ABCD$ на три части и сложить из них прямоугольник $KDPQ$.

Треугольники ALP и MKS равны, так как их соответствующие стороны параллельны, а гипотенузы равны. Аналогично доказывается, что равны треугольники ABM и LQK . Итак, если переложить ABM на место LQK , а ALP на место MKS , то прямоугольник $ABCD$ перестроится в $KDPQ$. Для этого понадобится разрезать $ABCD$ на три части. Так как $KDPQ$ по площади равен $ABCD$ и его сторона DK равна $2c$, то другая его сторона DP равна c . Итак, мы показали, как из исходного прямоугольника сложить прямоугольник, отношение сторон которого равно 2.

Отметим точку T – середину KD (рис.9). Так как $CD = b > c = DT$, то T попадет на отрезок CD . Проведем разрез по отрезку PT , частью станет четырех. Повернув треугольник PDT вокруг точки T на 180° , получим равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, равными $2c$.

Второе решение. Конструкцию этого решения предложила участница конкурса Мария Дренчева из Болгарии.

Как и раньше, назовем исходный прямоугольник $ABCD$, $AD = a$, $CD = b$. Пусть M и N – середины

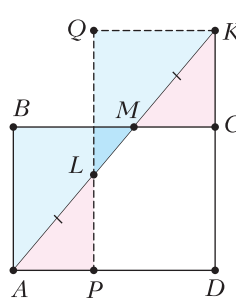


Рис. 8

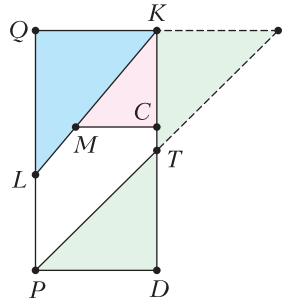


Рис. 9

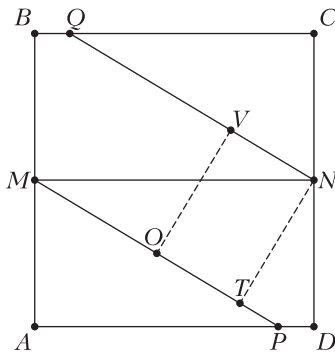


Рис. 10

AB и CD соответственно (рис. 10). Отметим на луче AD точку P такую, что $MP = \sqrt{ab}$. Такая точка существует, поскольку $MA < \sqrt{ab}$ ($\frac{b}{2} < \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{b}}{2} < \sqrt{a} \Leftrightarrow \frac{b}{4} < a$). По теореме Пифагора, $AP = \sqrt{MP^2 - AM^2} = \sqrt{ab - \frac{b^2}{4}}$. Так как $AP < AD$ ($AP < MP < MN \Leftrightarrow \sqrt{ab} < a \Leftrightarrow b < a$), то P лежит на отрезке AD.

Пусть Q – точка, симметричная P относительно центра прямоугольника ABCD. Тогда MPNQ – параллелограмм. Отметим середину O отрезка MP. Пусть перпендикуляр из O к MP пересекает прямую NQ в точке V. Докажем теперь, что V лежит на отрезке NQ.

Опустим перпендикуляр NT на луч MP. Из подобия треугольников MNT и PMA получим

$$MT = AP \cdot \frac{MN}{MP} = \sqrt{ab - \frac{b^2}{4}} \cdot \frac{a}{\sqrt{ab}} = \sqrt{a^2 - \frac{ab}{4}}$$

Чтобы показать, что V лежит на луче NQ, докажем неравенство $MO < MT$. Затем, чтобы показать, что V лежит на луче QN, докажем, что $NV < NQ$. Если учесть, что $NV = TO = MT - MO$ и $NQ = MP = 2MO$, то это неравенство преобразуется в равносильное ему $MT < 3MO$.

Итак, докажем, что $MO < MT < 3MO$:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{ab}}{2} < \sqrt{a^2 - \frac{ab}{4}} < \frac{3\sqrt{ab}}{2} &\Leftrightarrow \frac{ab}{4} < a^2 - \frac{ab}{4} < \frac{9}{4}ab \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{b}{4} < a - \frac{b}{4} < \frac{9}{4}b \Leftrightarrow \frac{b}{2} < b < a < 2b < \frac{10}{4}b. \end{aligned}$$

Следовательно, точка V лежит на отрезке NQ. Докажем теперь, что $VO = MO$:

$$VO = NT = \frac{2S_{MNP}}{MP} = \frac{S_{MNDA}}{MP} = \frac{\frac{1}{2}ab}{\sqrt{ab}} = \frac{1}{2}\sqrt{ab} = MO.$$

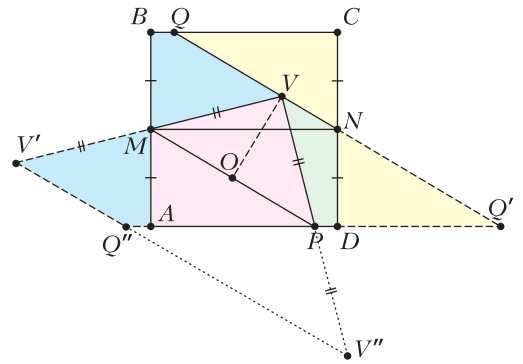


Рис. 11

Значит, треугольник MVP – равнобедренный прямоугольный.

На рисунке 11 разными цветами раскрашены части, на которые мы разрежем ABCD. Покажем, как из них сложить равнобедренный прямоугольный треугольник. Отразим NCQ относительно N (это то же, что поворот вокруг N на 180°), получим треугольник NDQ'. Отразим BQVM относительно M, получим AQ''V'M. Затем отразим получившийся треугольник VPQ', состоящий из двух частей, относительно P. При этом Q' перейдет в Q'', так как $PQ' = PD + CQ = PD + AP = AD$, и, аналогично, $PQ'' = AD$. Пусть V перешла в V''. Тогда $V''Q'' \parallel QQ' \parallel Q''V'$, значит, V', Q'' и V'' лежат на одной прямой. Итак, сложился равнобедренный прямоугольный треугольник VV'V'', что и требовалось.

Числовые фриз

1. Таких фриз пять; вторая строка у них получается из последовательности (1, 2, 2, 1, 3) всевозможными циклическими сдвигами.
2. Все элементы второй и третьей строк этого фриз равны τ . См. также упражнение 3.
3. Все элементы k-й строки будут равны между собой и равны длине диагонали, соединяющей вершины с номерами i и i + k.
6. Рассмотрим все треугольники, сходящиеся в первой вершине, и расставим в их вершинах значения поочередно, начиная со второй вершины.
7. Будем расставлять значения в вершинах поочередно, двигаясь вдоль зигзага. Каждое следующее из них будет равно сумме двух предыдущих.
8. Пусть v – вершина степени 4. Поставим в ней 1, а в смежной с ней вершине 0 и расставим значения в вершинах треугольника, как описано в последнем разделе статьи.

Работа над ошибками

1. Это задача с избыточными данными. При вычислении оказывается, что хорда BE длиннее диаметра.
2. а) Из рисунка 12 видно, что искомая площадь равна $16 + 32 - 20 = 28$.

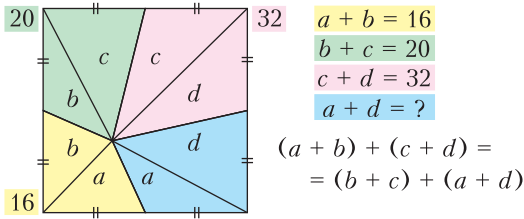


Рис. 12

б) Как следует из п. а), должно быть выполнено неравенство $S_2 \leq S_1 + S_3$. При более глубоком рассмотрении видно, что также должны выполняться неравенства $S_1 - S_3 < 2S_2 < 3S_1 + S_3$ и $S_3 - S_1 < 2S_2 < S_1 + 3S_3$.

Таким образом, условие задачи корректно не всегда.

3. Задачу можно решать векторным методом. Из рисунка 13,а имеем $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} = \vec{v} - \vec{u}$. В силу

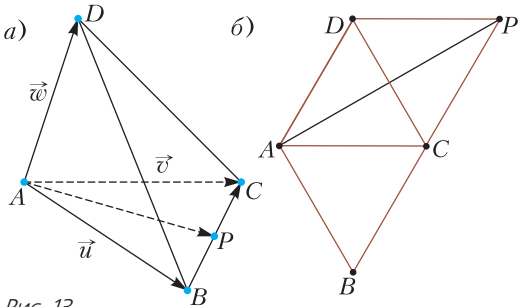


Рис. 13

условия и коллинеарности векторов запишем $\vec{BP} = t\vec{BC}$. Тогда

$$\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BP} = \vec{u} + t(\vec{v} - \vec{u}) = (1-t)\vec{u} + t\vec{v}.$$

Обозначим $\beta = \angle(\vec{AP}, \vec{AD})$, $\varphi = \angle(\vec{AP}, \vec{AC})$. Используя свойства скалярного произведения векторов, найдем

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{(\vec{AP}, \vec{AD})}{|\vec{AP}| \cdot |\vec{AD}|} = \frac{((1-t)\vec{u} + t\vec{v}, \vec{w})}{|\vec{AP}| \cdot |\vec{w}|} = \\ &= \frac{(1-t)(\vec{u}, \vec{w}) + t(\vec{v}, \vec{w})}{|\vec{AP}|} = \frac{t-1/2}{|\vec{AP}|}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{(\vec{AP}, \vec{AC})}{|\vec{AP}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{((1-t)\vec{u} + t\vec{v}, \vec{v})}{|\vec{AP}| \cdot |\vec{v}|} = \\ &= \frac{(1-t)(\vec{u}, \vec{v}) + t(\vec{v}, \vec{v})}{|\vec{AP}|} = \frac{t/2 + 1/2}{|\vec{AP}|}. \end{aligned}$$

Поскольку мы ищем значение параметра, при котором $\beta = \varphi$, то тогда $\cos \beta = \cos \varphi$ и получаем уравнение $t - 1/2 = t/2 + 1/2$. Отсюда $t = 2$.

В то же время условие задачи не вполне корректно. На самом деле при заданных условиях пирамиды не существует! В трехгранном угле пирамиды величина

на плоского угла должна быть меньше суммы двух других величин плоских углов. В условиях нашей задачи получается равенство

$$\angle BAD = 120^\circ = 60^\circ + 60^\circ = \angle BAC + \angle CAD.$$

Следовательно, мы получаем плоскую задачу (рис.13,б).

Для решения плоской задачи можно обойтись без применения векторов. (Однако решение с помощью векторов подходит и для плоского случая.) В плоской задаче получается, что прямая AP должна быть биссектрисой угла DAC. При этом треугольники DAC и BAC являются равносторонними с длиной стороны 1. Отсюда $BC = CP = 1$ и, следовательно, $t = 2$.

Примеры и контрпримеры

(см. «Квант» №4)

1. 1899.

2. Признаки делимости на 3 и 9 основаны на том, что основание системы счисления – число 10 – дает остаток 1 при делении на 3 и 9. Аналогично, признак делимости на 27 по сумме цифр верен в n -ичной системе счисления при $n = 27k+1$, где k – любое натуральное число.

3. Треугольник ABC восстанавливается, вообще говоря, двумя способами по сторонам AB, BC и углу A. Действительно, пусть на одной из сторон угла A отложен отрезок AB. Проведем окружность с центром B радиуса BC. Она пересекает вторую сторону угла не более чем в двух точках. Если это точки C' и C'', то углы AC'B и AC''B дают в сумме 180° (рис.14), поэтому треугольники AC'B и AC''B можно приложить друг к другу равными сторонами BC' = BC'', чтобы эти углы были смежными. В результате получится равнобедренный треугольник.

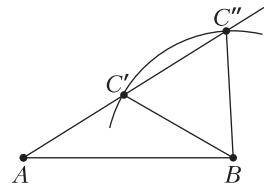


Рис. 14

4. $\overline{abc36}$, $\overline{abc76}$, где a, b, c – остальные цифры (всего 12 вариантов).

5. 17 минут. Указание. Докажите, что сын и бабушка должны идти вместе.

Московская олимпиада школьников по физике 2020 года

(см. «Квант» №4)

Второй тур

7 класс

1. На основе данных Гeши можно получить только интервал возможных значений плотности:

$$\rho_{\min} = 2000 \text{ кг/м}^3, \rho_{\max} = 3250 \text{ кг/м}^3.$$

2. 1) $t_1 = 400$ с и $t_2 = 420$ с; 2) $T = 0$ либо $T = 72,5$ с.

3. 1) Уровень воды в верхнем сосуде не изменяется;
 2) $u_1 = 2$ мм/с, $u_2 = 1$ мм/с;
 3) $v_{\text{кон}} = v \cdot \frac{4}{5} = 1,6$ м/с.
 4. 1) Влажность равна 20%; 2) коэффициент k на прямолинейном участке будет постоянным и равным $1,1875 \approx 1,19$.

8 класс

1. $\rho \approx 6,8 \cdot 10^{-5}$ кг/м³.
 2. 1) На рисунке 15 показаны силы, действующие на погрузчик в момент, когда он поднимает контейнер из первой стопки. Записав уравнение моментов относительно оси, проходящей через точку, в которой задние колеса касаются земли, найдем максимальное изменение силы давления передних колес: $\Delta F_1 = \Delta N_1 = mg \cdot \frac{8800}{6000}$ и $\Delta F_1^{(\text{max})} = 660$ кН.
 2) Сначала выясним, что сила давления задних колес изменяется сильнее всего, когда ричстакер приподнимает контейнер из второй стопки, и что для безопасности центр тяжести погрузчика должен располагаться правее середины расстояния между осями: $y \leq 3$ м. Аналогичное рассмотрение передних колес дает $y \leq 5$ м. Из соображений симметрии, $y \geq 1$ м. В результате получаем $1 \text{ м} \leq y \leq 3 \text{ м}$.
 3. 1) В момент достижения нижней критической глубины сила тяжести уравнивается силой Архимеда, зависящей от глубины погружения, и силой сопротивления воды, зависящей от скорости: $mg = F_A(h_{\text{н}}) + F(v)$. В момент достижения верхней критической глубины $F_A(h_{\text{в}}) = mg + F(v)$. Отсюда

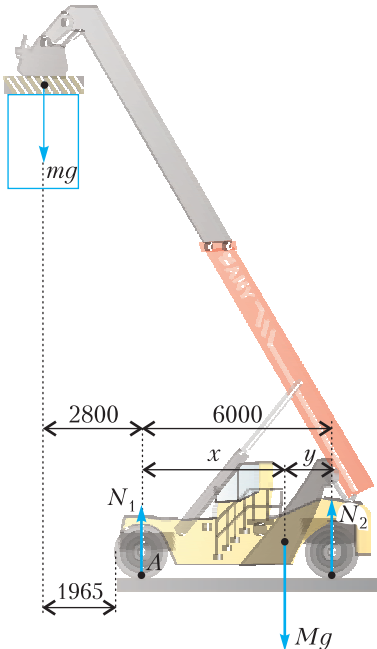


Рис. 15

легко получаем

$$V_r(h_{\text{в}}) + V_r(h_{\text{н}}) = 2 \cdot 0,02 \cdot V_T.$$

Чтобы найти объем газовых полостей внутри тела дельфина, воспользуемся газовым законом, данным в условии. В итоге получим

$$\frac{V_T}{V_r(0)} = \frac{3}{16} \cdot 100 = \frac{75}{4} = 18,75.$$

2) Несовершенство модели в том, что газовые полости рассматриваются как герметичный пакет с газом, а на самом деле это не так. Кроме того, сила сопротивления может зависеть не только от скорости, но и от глубины.

- 4.1) $m_0 \approx 560$ г; 2) $\varphi = 45^\circ$; 3) $Q_{\text{max}} \approx 112$ г/с.

9 класс

1. В третьем случае действующая сила должна быть перпендикулярна отрезку AB (рис. 16). Записав уравнение моментов, находим $F_3 = \frac{21}{75} \cdot mg \approx 13,4$ Н, где $m = 4,8$ кг (получается из первых двух случаев).

2. Из уравнения теплового баланса для резистора

$$I^2 R_0 (1 + \alpha(T - T_0)) = k(T - T_0)$$

выразим его температуру:

$$T = \frac{I^2 R_0 (1 - \alpha T_0) + k T_0}{k - \alpha I^2 R_0}.$$

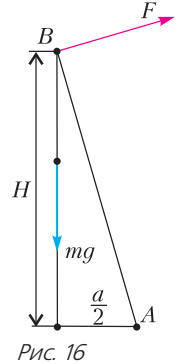


Рис. 16

Когда знаменатель этой дроби стремится к нулю, температура должна стремиться к бесконечности. С физической точки зрения это означает, что при заданном токе мощность теплоотвода растет с увеличением температуры медленнее, чем мощность тепла, выделяющегося на резисторе. Очевидно, что это и есть данный в условии ток I_{max} . Отсюда получаем $I_{\text{max}}^2 = \frac{k}{\alpha R_0}$. Далее легко находим сопротивление резистора, когда ток равен $I = 0,8 I_{\text{max}}$:

$$R = R_0 (1 + \alpha(T - T_0)) = R_0 \left(1 + \frac{16}{9}\right) \approx 27,8 \text{ Ом}$$

и напряжение на нем:

$$U = 0,8 I_{\text{max}} R \approx 30 \text{ В}.$$

3. 1) Минимальная скорость мяча достигается, когда мяч после броска движется вдоль прямой a , параллельной линии ворот, и равна 8 м/с. Тогда

$$\omega_{\text{min}}^{(\text{отн})} = \sqrt{8^2 + 2^2} \text{ м/с} \approx 8,2 \text{ м/с}.$$

2) После броска игрока A мяч теоретически может оказаться в любой точке области, закрашенной на

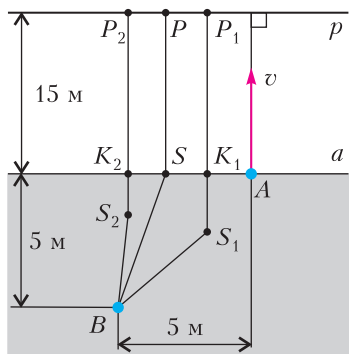


Рис. 17

рисунке 17 серым цветом. Из условия минимальности времени, за которое игрок B должен достичь линии ворот p , следует, что после приема мяча он должен двигаться перпендикулярно прямой p . На рисунке показаны возможные траектории движения игрока B – ломаные BSP , BS_1P_1 и BS_2P_2 , где точка S соответствует приему передачи, отданной с относительной скоростью 6 м/с. Минимальное время достигается на траектории BSP , скорость мяча относительно земли при этом равна $w = \sqrt{6^2 - 2^2}$ м/с = $4\sqrt{2}$ м/с.

3) Рассмотрим треугольник ABS , запишем для него теорему синусов и найдем $t_{\min} = \frac{5}{8 \cos 15^\circ} c + \frac{15}{8} c \approx 2,5$ с.

4. Будем считать, что вращающееся колесо фотографируют с пренебрежимо малой выдержкой тридцать раз в секунду. Для того чтобы на соседних кадрах колесо выглядело одинаково, оно должно совершать $\frac{n}{5}$ (n – натуральное число) оборотов за время $\frac{1}{30}$ с, т.е. $6n$ оборотов в секунду. Медленное вращение изображения колеса вперед или назад обусловлено тем, что колесо совершает не ровно $6n$ оборотов в секунду, а чуть больше или меньше. Поскольку частота медленного вращения составляет не более 1 оборота в 10 секунд, колесо должно совершать $6n \pm \frac{1}{10}$ оборотов в секунду. При одном обороте колеса его ось проходит расстояние $s = \pi D = 2,26$ м. Для скорости джипа получаем

$$v = \left(6n \pm \frac{1}{10} \right) \cdot 2,26 \cdot 3,6 \text{ км/ч.}$$

Сделав расчет для $n = 1, 2, 3$, можно убедиться в том, что в интервал скоростей от 80 км/ч до 110 км/ч попадает только одна скорость, соответствующая $n = 2$. Таким образом,

$$96,8 \text{ км/ч} < v < 98,4 \text{ км/ч.}$$

5. В первом случае ответ следует из рисунка 18, на котором размер источника D и расстояние d увели-

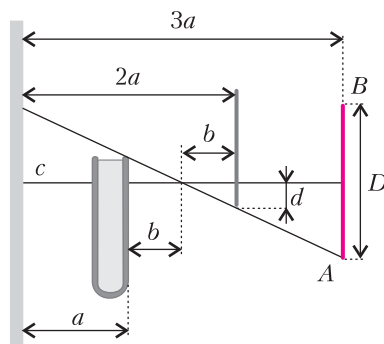


Рис. 18

чены для удобства (с нарушением масштаба). Между областями полной тени книжки и линейки может наблюдаться полутень только в том случае, если лучи света, испускаемые некоторыми точками источника, будут попадать на стену. На рисунке изображен предельный случай: прямая, проведенная из крайней точки A источника, касается книжки и линейки. Из геометрических соображений следует, что $d < 1$ см.

Если лучи, испускаемые источником, составляют с осевой линией угол не больше α , то должно выполняться неравенство $\frac{d}{b} < \text{tg } \alpha$, из которого для второго случая получаем $d < 7,5$ мм.

10 класс

1. 1) Очевидно, что в процессе калибровки сопротивление переменного резистора устанавливается равным сопротивлению терморезистора при температуре T_0 . Обозначим это сопротивление R_t . Легко видеть, что при изменении сопротивления терморезистора на величину ΔR_t вольтметр показывает напряжение

$$U = \frac{U_0}{2} - \frac{U_0 R_t}{2R_t + \Delta R_t}, \text{ или } U = U_0 \cdot \frac{\Delta R_t}{4R_t(T_0)}.$$

Зависимость сопротивления от температуры вблизи исходной точки $T_0 = 50^\circ\text{C}$ можно считать линейной. Коэффициент пропорциональности k из соотношения $\Delta R_t = -k\Delta T$ определяется по графику: $k \approx 10$ Ом/ $^\circ\text{C}$. Таким образом,

$$U(\Delta T) = \frac{U_0 k}{4R_t(T_0)} \cdot \Delta T = \Delta T \cdot 50 \text{ мВ}/^\circ\text{C}.$$

Заметим, что при уменьшении температуры T_0 численный коэффициент в этой формуле увеличивается, что означает повышение чувствительности прибора. Поскольку U и ΔT пропорциональны при любой температуре T_0 , относительные погрешности измерения разности температур и напряжения равны. Относительная погрешность измерения напряжения с ростом напряжения уменьшается, поэтому

в области низких температур измеритель обеспечивает лучшую точность.

2) Температурный диапазон ограничен максимально возможным сопротивлением терморезистора, которое должно быть не более 900 Ом. По графику получаем нижнюю границу диапазона температур: $T_{\min} = 23^\circ\text{C}$. Поскольку после калибровки измерителя выполняется равенство $R_t = R_1$, на терморезисторе выделяется мощность, приближенно равная $P = \frac{U_0^2}{4R_t}$. Отсюда получаем значение минимально возможного сопротивления терморезистора:

$$R_t^{(\min)} = \frac{U_0^2}{4P_0} = 60 \text{ Ом.}$$

График не позволяет точно указать температуру, при которой достигается это значение сопротивления. Тем не менее, можно с уверенностью сказать, что искомая максимальная температура лежит в интервале от 95°C до 105°C , поэтому разумно выбрать в качестве верхней границы среднее значение: $T_{\max} = 100^\circ\text{C}$.

2. Обозначим через R радиусы окружностей, по которым движутся разные концы нитей (точки A и B на рисунке 19), через m – массу шарика и через v – скорость его движения. Согласно условию

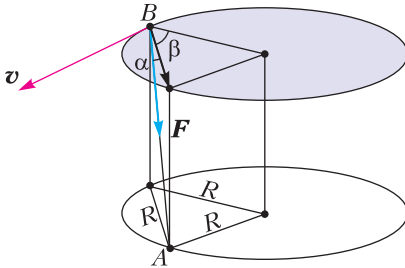


Рис. 19

задачи угол между нитью и вертикалью равен $\alpha = 45^\circ$. Если смотреть сверху и видеть проекцию всех тел на горизонтальную плоскость, то центры окружностей (которые совпадают) и проекции точек, соответствующих концам нити, находятся в вершинах треугольника, у которого все стороны равны $R = 2$ м. Получается, что между скоростью шарика и горизонтальной проекцией силы натяжения нити $\frac{F}{\sqrt{2}}$ угол β равен 60° . Сумма всех сил, действующих на шарик, обеспечивает движение шарика по окружности, поэтому она равна $\frac{mv^2}{R}$ и направлена к центру верхней окружности, по которой движется шарик. Эта сила равна проекции силы натяжения нити на горизонтальное направление, перпендикулярное скорости шарика:

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{F}{\sqrt{2}} \cdot \cos 60^\circ.$$

Проекция скорости шарика на вертикальное направление равна нулю, а это значит, что вертикаль-

ная проекция силы натяжения нити вместе с силой тяжести компенсируются выталкивающей силой Архимеда F_A :

$$F_A - mg = \frac{F}{\sqrt{2}}.$$

Скорость шарика при движении по окружности не меняется по величине, поэтому продольная (вдоль скорости) составляющая силы натяжения нити компенсирует силу трения, действующую на шарик со стороны воздуха, которая по условию пропорциональна квадрату скорости. Иными словами,

$$\frac{F}{\sqrt{2}} \cdot \sin 60^\circ = kv^2, \text{ или } \frac{F\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = kv^2,$$

где k – это коэффициент пропорциональности. Когда нить отпустят и шарик будет двигаться вверх с установившейся скоростью u , сумма всех сил, действующих на шарик, станет равной нулю, т.е.

$$F_A - mg = ku^2.$$

Комбинируя все равенства, получаем

$$\frac{u^2}{v^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \text{ откуда } u = v\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}.$$

Из условия находим, что $v = 2$ м/с, поэтому установившаяся скорость шарика равна $u \approx 2,1$ м/с.

3. 1) По условию из сопла выходит насыщенный пар, следовательно, его температура $T_0 = 373$ К, а плотность $\rho = \frac{p_0 M}{RT_0} = 0,58$ кг/м³. Пусть u – скорость выходящего из сопла пара. Реактивную силу, действующую на один патрубков с соплом со стороны пара, можно найти как отношение импульса Δp порции пара массой Δm ко времени Δt , за которое вышла эта порция: $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = u \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho S u^2$. С другой стороны, $2 \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{P}{L}$ (коэффициент 2 возникает из-за того, что пар выходит через два патрубка), где $\Delta m = 2\rho u S$. Отсюда получаем

$$u = \frac{P}{2L\rho S}, \text{ и } F = \frac{P^2 RT_0}{4S\rho_0 M L^2}.$$

Суммарный момент сил, действующих на шар со стороны пара, выходящего через оба сопла, равен

$$M = \frac{P^2 RT_0 d}{2S\rho_0 M L^2} \approx 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

2) Рассмотрим режим, когда эллипс вращается с максимальной угловой скоростью. Тогда суммарный момент сил, действующих на шар, равен нулю. Поэтому скорость пара относительно земли сразу после выхода близка к нулю. А это означает, что линейная скорость концов патрубков равна u , угловая скорость вращения шара равна $\omega_{\max} = \frac{u}{d}$

$= \frac{P}{2L\rho Sd}$, а максимальное количество оборотов в минуту равно

$$n_{\max} = \frac{60}{2\pi} \omega_{\max} = \frac{15PRT_0}{\pi\rho_0MLSd} \approx 3700 \text{ об/мин.}$$

4. 1) При падении на переднюю грань призмы 4% света сразу отразится назад под углом $2\varphi = 0,12$ рад к горизонтали. Эти лучи сформируют пятно вблизи верхнего края экрана. Используя малость угла φ , можно найти расстояние от верхнего края экрана до этого пятна:

$$x_0 = H - h - L \cdot 2\varphi = 3 \text{ см.}$$

Имеет смысл качественно изобразить ход лучей, выходящих из призмы и распространяющихся внутри нее. После первого преломления на границе раздела воздух–стекло луч пойдет под углом $\theta = \varphi - \frac{\varphi}{n} = 0,02$ рад к горизонтали. С другой стороны, θ – это угол падения луча на зеркало. Поскольку лучи в призме многократно преломляются и отражаются, имеет смысл последовательность, образованную значениями углов падения лучей на зеркало, обозначить $\{\alpha_i\}$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Последовательность, образованную углами падения отраженных лучей на границу раздела стекло–воздух, обозначим $\{\beta_j\}$, $j = 1, 2, \dots$. Очевидно, что для нулевого члена последовательности $\{\alpha_i\}$ справедливо равенство

$$\alpha_0 = \theta = \varphi - \frac{\varphi}{n} = 0,02 \text{ рад.}$$

Рассмотрим отражение лучей в клине. Ломаная ABD на рисунке 20 – фрагмент траектории луча, распространяющегося внутри клина. Используя теорему о сумме углов для треугольников ABC и BDE , можно убедиться в том, что $\beta_{k+1} = \alpha_k + \varphi$, $\alpha_{k+1} = \beta_k + \varphi$, откуда легко выводятся рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} \beta_{k+1} &= \beta_k + 2\varphi, \\ \alpha_{k+1} &= \alpha_k + 2\varphi. \end{aligned}$$

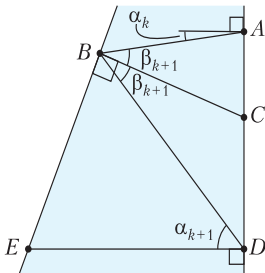


Рис. 20

Теперь можно получить формулу

$$\beta_k = 2k\varphi - \frac{\varphi}{n}.$$

Подсчитаем несколько первых членов последовательности $\{\beta_i\}$:

$$\beta_1 = 0,08 \text{ рад, } \beta_2 = 0,20 \text{ рад, } \beta_3 = 0,32 \text{ рад.}$$

Лучу, падающему на границу раздела под углом β_k с нормалью, соответствует расстояние x_k от верхнего края экрана до пятна. Определим эти расстояния.

После преломления лучи, формирующие пятно с номером k ($k = 1, 2, 3$), составляют с горизонталью угол

$$\gamma_k = n\beta_k - \varphi = 2\varphi(nk - 1).$$

Подставляя числа, находим

$$\gamma_1 = 0,06 \text{ рад, } \gamma_2 = 0,24 \text{ рад, } \gamma_3 = 0,42 \text{ рад.}$$

Можно показать, сделав численные оценки, что расстоянием по вертикали между точкой выхода лучей из клина и точкой падения можно пренебречь (углы очень маленькие). Применяя приближенную формулу $\text{tg } \gamma_k \approx \gamma_k$, получаем для расстояния от верхнего края экрана до пятна формулу

$$x_k = H - h + L\gamma_k,$$

подставляя в которую числовые значения, находим

$$x_1 = 21 \text{ см, } x_2 = 39 \text{ см.}$$

Как видим, расчет для угла γ_3 , который уже нельзя считать малым, не требуется, поскольку очевидно, что лучи, идущие под таким углом, на экран не попадут.

Итак, на экране будет видно три пятна. На второе пятно приходится доля света, равная $N_1 = 0,96 \cdot 0,96 \approx 92\%$, а на третье – доля $N_2 = 0,96 \cdot 0,04 \cdot 0,96 \approx 0,037 \approx 4\%$.

2) Для того чтобы на месте самого яркого пятна оказалось следующее по яркости пятно, которое располагается выше него на экране и обозначается индексом «0», призму с зеркалом следует повернуть на угол $\varphi + \frac{\gamma_1}{2} = 0,09$ рад против часовой стрелки.

3) В дневном режиме лучи, формирующие самое яркое изображение ($N_1 = 92\%$), распространяются в направлении лица водителя. В ночном режиме к водителю попадает свет, формирующий одно из двух «приглушенных» отражений (с индексами «0» и «2»), в то время как лучи, формирующие яркое изображение, будут направлены либо в потолок, либо в пол. Водителя такое излучение не слепит, так как оно примерно в 24 раза слабее яркого излучения.

5. Из комнаты в морозильник за время Δt поступает количество теплоты

$$P_1 \Delta t = k_1 \cdot (T_R - T_C),$$

где k_1 – коэффициент, описывающий теплопроводные свойства теплоизоляции. За то же время от задней стенки отводится в комнату количество теплоты

$$P_2 \Delta t = k_2 \cdot (T_S - T_R),$$

где коэффициент k_2 количественно характеризует теплообмен между воздухом в комнате и задней стенкой. Легко видеть, что холодильная машина работает по обратному циклу Карно с изотермами при температурах T_S и T_C . Для прямого цикла Карно справедливо соотношение

$$\frac{A}{Q_{II}} = \frac{T_S - T_C}{T_S}.$$

В случае холодильной машины A – это работа, совершаемая компрессором над рабочим телом (хладагентом), поэтому за время Δt она равна $P\Delta t$. А $Q_{\text{н}}$ – это количество теплоты, отдаваемое хладагентом в трубках конденсатора на задней стенке, которое в стационарном режиме равно количеству теплоты, которое отводится в комнату от задней стенки. Поэтому можно записать

$$\frac{P}{k_2 \cdot (T_S - T_R)} = \frac{T_S - T_C}{T_S}.$$

С другой стороны, $Q_{\text{н}} = A + |Q_{\text{х}}|$, где $|Q_{\text{х}}|$ – это количество теплоты, отводимое в процессе работы холодильной машины от содержимого морозильника, равное в стационарном режиме количеству теплоты, поступающему в него извне. Отсюда имеем равенство

$$\frac{P}{P + k_1 \cdot (T_R - T_C)} = \frac{T_S - T_C}{T_S}.$$

Два последних уравнения образуют систему, на основе которой решается задача. Преодолев все технические трудности, найдем искомую температуру:

$$T_S^{(1)} \approx 32,3 \text{ }^\circ\text{C}.$$

11 класс

1. Пусть труба вращается против часовой стрелки. Положение равновесия тела определяется углом α между радиусом, проведенным в точку, где располагается тело, и вертикалью. Этот угол удовлетворяет соотношению $\text{tg } \alpha = \mu$ (из условия следует, что $\cos \alpha = 0,8$). Запишем второй закон Ньютона в проекциях на радиальное и тангенциальное направления при отклонении тела от положения равновесия на малый угол φ :

$$mg \cos(\alpha + \varphi) = N, \quad -mg \sin(\alpha + \varphi) + \mu N = mR\varphi'',$$

где N – сила реакции опоры, а штрихами сверху обозначается дифференцирование по времени. Используя приближенные равенства из условия, получим дифференциальное уравнение колебаний:

$$\varphi'' + \frac{g}{R \cos \alpha} \varphi = 0,$$

из которого следует ответ:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R \cos \alpha}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{4R}{5g}}.$$

2. Из второго закона Ньютона, записанного для стола и гири, следует равенство

$$\Delta F_1 + \Delta F_2 + \Delta F_3 + \Delta F_4 = mg,$$

где m – масса гири. Далее запишем уравнение моментов для стола относительно оси, проходящей через точку A параллельно короткой стороне столешницы:

$$\Delta F_1 + \Delta F_2 = 2(\Delta F_3 + \Delta F_4)$$

и параллельно длинной стороне столешницы:

$$\Delta F_1 + \Delta F_4 = 2(\Delta F_2 + \Delta F_3).$$

После того как на стол поставили гирю, центр столешницы опустится на величину $\Delta x = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_3}{2}$, где Δx_1 и Δx_3 – вертикальные деформации ножек 1 и 3 соответственно. Похожее соотношение $\Delta x = \frac{\Delta x_2 + \Delta x_4}{2}$ можно получить, рассмотрев ножки 2 и 4. Поскольку ножки подчиняются закону Гука, справедливы равенства $\Delta F_i = k\Delta x_i$. Отсюда следует уравнение

$$\frac{\Delta F_1 + \Delta F_3}{2k} = \frac{\Delta F_2 + \Delta F_4}{2k},$$

где k – коэффициент упругости ножки. Решая систему полученных уравнений, приходим к ответу: $\Delta F_1 = \frac{5mg}{12} = 100 \text{ Н}$, $\Delta F_2 = \frac{mg}{4} = 60 \text{ Н}$, $\Delta F_3 = \frac{mg}{12} = 20 \text{ Н}$, $\Delta F_4 = \frac{mg}{4} = 60 \text{ Н}$.

3. Используя первый закон термодинамики для адиабатического процесса: $3R\nu\Delta T + p\Delta V = 0$, а также уравнение состояния идеального газа, записанное для малых изменений параметров: $p\Delta V + V\Delta p = \nu R\Delta T$, получаем

$$4 \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta p}{p}.$$

Чтобы найти температуру, при которой происходит конденсация пара, положим в этом уравнении $p = p_1$, $T = T_1$, $\Delta T = T - T_1$, $\Delta p = p - p_1$ и преобразуем его к уравнению прямой $p(T)$:

$$p(T) = \frac{4p_1}{T_1} T - 3p_1.$$

Далее есть две возможности. Можно найти две точки этой прямой, построить ее и получить точку пересечения с графиком давления насыщенного пара. С другой стороны, можно обратить внимание на то, что приведенный на рисунке в условии график очень близок к прямой, линеаризовать его, получив уравнение прямой, и далее решить систему двух линейных уравнений для определения точки пересечения двух прямых. В первом случае для искомой температуры получим $T_2 \approx 97,5 \text{ }^\circ\text{C}$, а во втором случае получим $T_2 \approx 96,8 \text{ }^\circ\text{C}$.

При нахождении работы можно обратить внимание на то, что, судя по графику в условии, превращение жидкости в пар происходит не при $100 \text{ }^\circ\text{C}$, а при $T_{\text{н}} \approx 99,5 \text{ }^\circ\text{C}$. Эти полградуса, конечно, погоды не делают, но их в принципе можно учесть. Суммарная работа будет равна

$$A = \nu R(T_1 - T_{\text{н}}) + 3\nu R(T_1 - T_2) \approx 2,32 \text{ кДж}.$$

Если бы полградуса не учитывались, получилось бы значение $2,28 \text{ кДж}$. Отличие составляет пример-

но 2,5%, поэтому половиной градуса можно было и пренебречь.

4. 1) Анализ рисунка в условии дает основания считать, что вершину каустики формируют лучи, идущие после отражения от цилиндрической поверхности под малым углом к оптической оси OO' . При этом положение вершины совпадает с положением фокуса цилиндрического зеркала радиусом R , который, как известно, располагается на расстоя-

нии $\frac{R}{2}$ от центра основания цилиндра. Поэтому $OA = \frac{R}{2}$. Из рисунка также следует, что точка P –

это точка пересечения оптической оси и касательной к каустике, перпендикулярной оси. Поэтому через точки касания P_1 и P_2 должны проходить лучи, пересекающие оптическую ось под прямым углом, т.е. которые после отражении от поверхности цилиндра поворачивают на 90° . В точках отражения таких лучей касательные к окружности направлены под углом 45° к оптической оси. После нетрудных вычислений получаем $PA = R \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right)$.

2) В этом случае вершина каустики располагается там же, где находится изображение источника в сферическом зеркале радиусом R . Соответствующий расчет дает $OA = \frac{4R}{9}$.

3) Каустики (их две), наблюдаемые на фотографии, это каустики лучей, отраженных внутренней поверхностью стакана. В пространственном случае каустика представляет собой поверхность, а линии, которые мы наблюдаем (например, на столе или стене), являющиеся сечениями каустической поверхности. В рассматриваемом примере нас интересуют горизонтальные сечения, которые расположены внутри цилиндрического стакана.

Любой луч, испущенный источником, лежит в вертикальной плоскости, параллельной оси стакана и содержащей источник. Все лучи, лежащие в одной такой вертикальной плоскости, дают одну и ту же проекцию на горизонтальную плоскость стола. После отражения от поверхности стакана эти лучи дают также одинаковую проекцию на плоскость стола. Таким образом, можно перейти от пространственной картины к плоской. Очевидно, что при изменении высоты точечного источника проективная картина не поменяется, а значит, и каустика на столе не будет менять своей формы. Поэтому с пространственной точки зрения можно сказать, что вершину левой каустики пронизывает перпендикулярно столу «фиктивная светящаяся нить», излучающая свет, который затем падает на внутреннюю поверхность правой половины стакана. Причем эта «нить» расположена не только выше дна стакана, но и ниже, поскольку некоторые лучи

предварительно отражаются от дна стакана. Лучи, испускаемые этим фиктивным источником, отражаются от поверхности стакана, формируя вторую каустику. Поскольку в отраженных лучах распространяется меньше световой энергии, чем в падающих, вторая каустика менее яркая.

4) Для того чтобы сделать оценку продольного размера каустики, рассмотрим следующую модель. Пусть на цилиндр с показателем преломления $n = 1,33$ и радиусом R падает свет от точечного источника, расположенного на расстоянии $a = 10R - R = 9R$ от цилиндра. Оценим расстояние, на котором сфокусируются лучи, выходящие из цилиндра. Как было замечено в п. 1 и п. 2, вершину каустики формируют параксиальные пучки лучей, поэтому расстояние до вершины в данном случае – это расстояние до изображения предмета в цилиндрической «толстой» линзе. Найти это расстояние s можно двумя способами: представить линзу в виде двух плоско-выпуклых тонких линз с фокусным расстоянием $F = \frac{R}{n-1} = 3R$, разделенных плоскопараллельной пластиной толщиной $2R$, или рассмотреть преломление лучей фонаря, падающих на цилиндр. Любой способ дает $s = 1,5R = 6$ см.

5. 1) Поведение системы описывается двумя уравнениями:

$$L \frac{dI}{dt} = \alpha(T - T_r), \quad C \frac{dT}{dt} = -\alpha TI.$$

Отсюда находим ответы на поставленные вопросы:

1а. $LCI'' + \alpha^2 T_r I + \alpha LI' = 0;$

1б. $\omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha^2 T_r}{CL}};$

1в. $T(t) = (T_0 - T_r) \cos \omega_0 t + T_r.$

2) В этом случае поведение системы описывается следующими уравнениями:

$$LI' + RI = \alpha(T - T_r),$$

$$CT' = -\alpha TI + \frac{I^2 R}{2} - k(T - T_r).$$

2а. $LCI'' + (RC + kL)I' + (kR + \alpha^2 T_r)I + \alpha LI' + \alpha \frac{I^2 R}{2} = 0.$

2б. Коэффициент γ – это декремент затухания, он описывает уменьшение амплитуды колебаний со временем, а коэффициент ω – это частота колебаний в системе с нулевым затуханием. Эти коэффициенты равны, соответственно,

$$\gamma = \frac{R}{2L} + \frac{k}{2C}, \quad \omega = \sqrt{\frac{kR}{LC} + \frac{\alpha^2 T_r}{LC}}.$$

2в. Относительное изменение амплитуды тока равно

$$\frac{\Delta I_{\max}}{I_{\max}} = 2\pi \frac{\gamma}{\omega}.$$

3) Следует поставить эксперимент, в котором можно было бы измерить частоту или декремент затухания. Поскольку напряжение на катушке пропорционально производной тока, резонанс напряжения на катушке будет наблюдаться на частоте ω , найденной в п.2). Поэтому очевидной кажется следующая схема эксперимента: в цепь включают генератор, осциллограф подключают к катушке и измеряют резонансную частоту.

Региональный этап LIV Всероссийской олимпиады школьников по физике

(см. «Квант» №3)

7 класс

- $a_1 = 3,6$ м, $a_2 = 1,8$ м, $v_1 = 0,18$ м/с, $v_2 = 0,12$ м/с.
- $\Delta\tau = 24$ мин; 1 у.е. = 1 м/мин.
- №4; $V_k = 50$ см³; $m_k = 35$ г.
- $\rho_A = 0,5$ г/см³; $\rho_B = 8,0$ г/см³; $\rho_{cp} = 8,0$ г/см³, если похищен верхний блок, и $\rho_{cp} = 5,5$ г/см³, если похищен нижний блок.

8 класс

- $v_T = 1$ км/ч, $v_n = 3$ км/ч, $T = 9$ ч, $X = 12$ км, $\Delta\tau = 1,5$ ч, $t = 18$ ч, №18, №6 (см. рис.21).

2. $H = \frac{22}{7}h$ (сначала из правого сосуда в левый будет перетекать жидкость плотностью ρ , вытесняя жидкость плотностью $0,8\rho$, затем начнет перетекать жидкость плотностью $0,7\rho$, но она будет всплывать в левом сосуде и выливаться из него, пока не наступит равновесие).

3. $t_n = -32$ °С, $t_b \approx 83,81$ °С, см. рис.22.

4. Из графика зависимости средней плотности ρ газированной жидкости от концентрации пузырьков n (рис.23) найдем

$$\rho_A = \frac{2}{3}\rho_b, \quad n_n = \frac{5}{2}n_A.$$

9 класс

1. $x_3 = 0,2$.

2. $F = \frac{a_1 b_2}{a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1} (M_0 - m)g = 148$ Н (рассмотрите условия равновесия каждого элемента тренажера).

3. $\mu = 0,4$ (убедитесь в том, что к моменту 2τ шайба еще не остановилась).

4. Время движения по этим маршрутам одинаковое.

$$5. \quad I_1 = \frac{I_x^2 + I_y^2}{2I_x}, \quad I_2 = \frac{I_x^2 - I_y^2}{2I_x}, \quad I_3 = \frac{(I_x - I_y)^2}{2I_x},$$

$$I_4 = \frac{I_x^2 - I_y^2 + 2I_x I_y}{2I_x} \quad (\text{см. рис.24}).$$

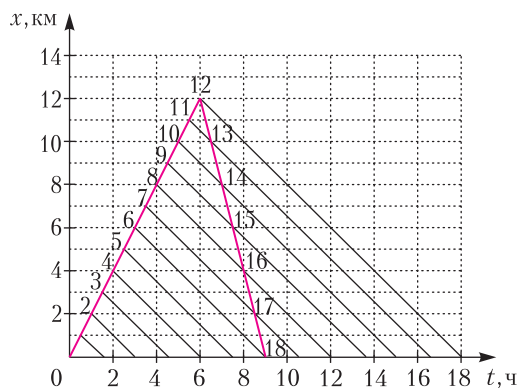


Рис. 21

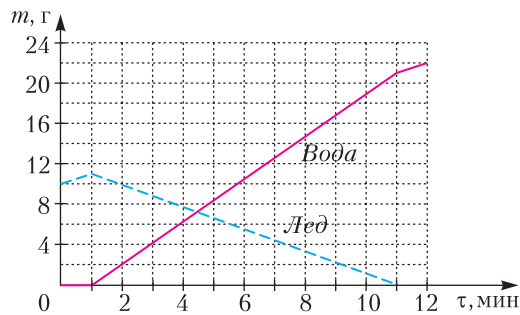


Рис. 22

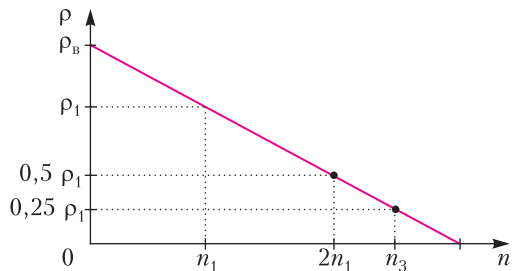


Рис. 23

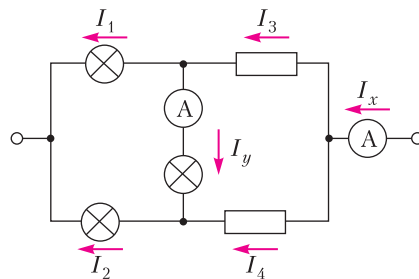


Рис. 24

10 класс

1. $\varphi = \text{ctg } \alpha$.

2. Траектория налетающей шайбы – b;

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\cos^2 75^\circ}{\cos^2 45^\circ} \approx 0,13;$$

$$\frac{Q}{E_{\text{II}}} = 2 \frac{\sin 15^\circ \sin 45^\circ \cos 60^\circ}{\sin^2 120^\circ} \approx 0,24.$$

3. $m_0 = \frac{\Delta p S}{g} = 2 \text{ кг}; m_2 = 7,5 \text{ кг}.$

4. $T = \frac{T_0}{\cos \alpha}; \omega = \sqrt{\frac{g \text{tg } \alpha}{R - l \sin \alpha}}.$

5. Диод и резистор соединены параллельно и последовательно к ним присоединен нелинейный элемент. ВАХ всей цепи получается сложением вдоль оси напряжений ВАХ участка резистор–диод и ВАХ нелинейного элемента. Понятно, что напряжение открытия диода не может превышать 5В. Если открытие диода происходит при напряжении $U < 4 \text{ В}$, то вид ВАХ элемента X окажется таким, как на рисунке 25,a (для $U_0 = 2 \text{ В}$). Черной пунктирной линией изображена ВАХ участка диод–резистор, а красной – ВАХ неизвестного нелинейного элемента. Если же открытие диода происходит

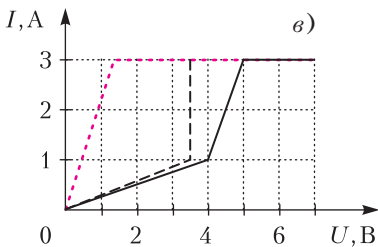
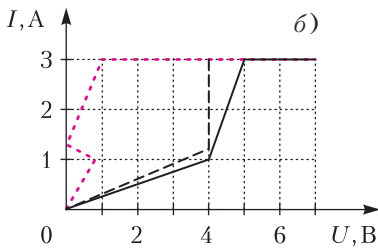
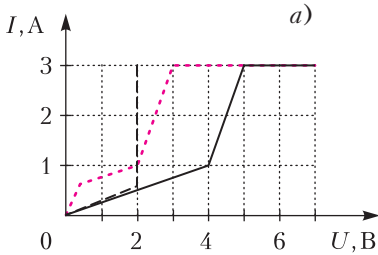


Рис. 25

при $U > 4 \text{ В}$ (рис. 25,б для $U_0 = 4 \text{ В}$), то ВАХ элемента X имеет участок, на котором сила тока возрастает с уменьшением напряжения, что противоречит условию задачи. При $U \leq 4 \text{ В}$ напряжение $U_0 = 7/8 U$, значит, $U_{\text{max}} = 3,5 \text{ В}$. Соответствующая этому случаю ВАХ элемента X представлена на рисунке 25,в.

11 класс

1. $l = d \left(\frac{2 t_{\text{ш}}}{\pi t_{\text{д}}} \right)^2$; ближний к шару заряд диполя

положительный; заряд шарика отрицательный.

2. В состоянии равновесия провод состоит из двух одинаковых полукружностей с диаметром x и двух одинаковых линейных участков, прижатых к стенке и грани куба. Следовательно, длина линейного участка провода, соприкасающегося с гранью куба, равна $l(x) = (L - \pi x)/2$. Куб разгоняется за счет давления этого участка, которое возникает из-за силы Ампера $F_A = IB l(x) = IB(L - \pi x)/2$. Поэтому разгон, начинающийся при $x = x_0$, заканчивается при $x = L/\pi$, когда провод перестает соприкасаться с гранью куба. Поведение разгоняющей силы в точности совпадает с поведением силы упругости пружины длиной L/π с жесткостью $k = \pi IB/2$. Поэтому движение в процессе разгона соответствует четверти периода гармонических колебаний на пружине от начальной деформации $y_0 = L/\pi - x_0$ до положения равновесия. Максимальная скорость разгона равна

$$v_{\text{max}} = \omega y_0 = y_0 \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\pi IB}{2m}} \left(\frac{L}{\pi} - x_0 \right).$$

Время разгона равно четверти периода колебаний:

$$t = \frac{\pi}{2\omega} = \sqrt{\frac{\pi m}{2IB}}.$$

3. См. рис.26.

4. Рассмотрим момент времени сразу после удара. Из закона сохранения энергии следует

$$v_1^2 + v_2^2 = v_0^2,$$

где индексы 1 и 2 обозначают нижний и верхний шарики соответственно. Поскольку поверхность гладкая, сразу после удара скорость центра масс

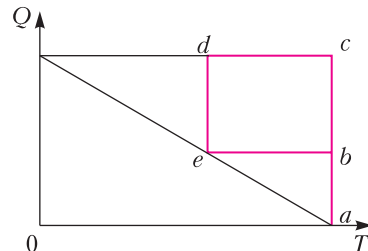


Рис. 26

направлена вертикально вверх и равна

$$v_{ц} = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{2} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}.$$

Из закона сложения скоростей $\vec{v}_{отн} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ имеем

$$v_{отн} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = v_0\sqrt{2}.$$

Угловая скорость вращения стержня равна

$$\omega = \frac{v_{отн}}{L} = \frac{v_0\sqrt{2}}{L}.$$

Ответ на второй вопрос можно получить, используя тот факт, что для верхнего шарика выполняется закон сохранения импульса в проекции на ось, перпендикулярную стержню. Это следует из того, что единственная сила, действие которой на верхний шарик за бесконечно малое время соударения существенно, это сила реакции стержня, направленная строго вдоль стержня. До удара проекция скорости шарика на эту ось равна $v_x = v_0 \sin \varphi$, после удара она равна $v_x = \frac{\omega L}{2} - v_{ц} \sin \varphi$. Из этих двух уравнений, используя ранее полученные выражения для $v_{ц}$ и ω , находим

$$\sin \varphi = \frac{\omega L}{2(v_0 + v_{ц})} = \sqrt{2} - 1,$$

$$\varphi = \arcsin(\sqrt{2} - 1) \approx 24,5^\circ.$$

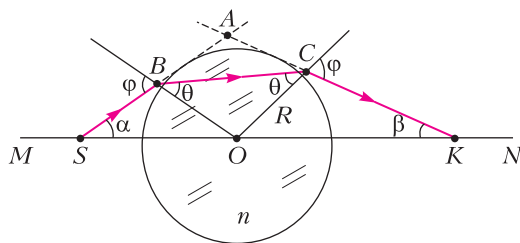


Рис. 27

5. С помощью рисунка 27 и законов преломления находим

$$SO = l \frac{\sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} = 3,66 \text{ см};$$

$$R = SO \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} = l \frac{\sqrt{n^2 - 2n \cos \gamma + 1} \sin \alpha \sin \beta}{(\sin \alpha + \sin \beta) n \sin \gamma} = 3,30 \text{ см}$$

(здесь $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$).

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

**Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во ПИ №ФС77-54256**

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ № 201600

**Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»**

**Тел.: +7 916 168-64-74
E-mail: math@kvant.ras.ru,
phys@kvant.ras.ru**

Отпечатано

**в соответствии с предоставленными
материалами
в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, кор. 8
Телефон: (831) 216-40-40**



БИБЛИО-ГЛОБУС
ВАШ ГЛАВНЫЙ КНИЖНЫЙ

МЫ ПРЕДЛАГАЕМ
БОЛЬШОЙ ВЫБОР ТОВАРОВ И УСЛУГ

<p>УСЛУГИ</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Интернет-магазин www.bgshop.ru ■ Кафе ■ Клубные (дисконтные) карты и акции ■ Подарочные карты ■ Предварительные заказы на книги ■ Встречи с авторами ■ Читательские клубы по интересам ■ Индивидуальное обслуживание ■ Подарочная упаковка ■ Доставка книг из-за рубежа ■ Выставки-продажи 	<p>АССОРТИМЕНТ</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Книги ■ Аудиокниги ■ Антиквариат и предметы коллекционирования ■ Фильмы, музыка, игры, софт ■ Канцелярские и офисные товары ■ Цветы ■ Сувениры
---	--

г. Москва,
м. Лубянка,
м. Китай-город
ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1
8 (495) 781-19-00
www.biblio-globus.ru
пн – пт 9:00 - 22:00
сб – вс 10:00 - 21:00
без перерыва на обед

Плоды МАШИННОГО ПРОСВЕЩЕНИЯ

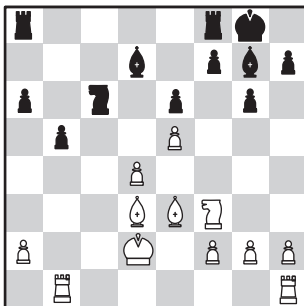
В условиях пандемии шахматисты, как и представители других профессий, были вынуждены перейти «на удаленку». В связи с этим резко увеличилось количество онлайн-турниров по рапиду и блицу с участием ведущих гроссмейстеров, однако качество игры в них уступает классическим партиям. Поэтому, пользуясь таким перерывом, мы хотим предложить читателям серию выпусков, посвященных обзору особенностей игры программы AlphaZero, представляющей собой искусственный интеллект, о принципах работы которой мы подробно писали в «Кванте» №3 за 2018 год. После двух матчей, сыгранных AlphaZero против сильнейшей «счетной» программы Stockfish в 2017 и 2018 годах, многие гроссмейстеры взяли на вооружение приемы, которые особенно любит использовать в своей игре AlphaZero, а чемпион мира М.Карлсен признался, что иногда во время игры старается представить, как на его месте сыграл бы искусственный интеллект. Сегодняшний выпуск мы посвятим маневру, ставшему очень популярным среди шахматных профессионалов благодаря AlphaZero, – продвижению крайней пешки h.

AlphaZero – Stockfish Лондон, 2018

1. d4 ♖f6 2. c4 g6 3. ♘c3 d5 4. cd ♗d5 5. ♘f3 ♙g7 6. e4 ♗c3 7. bc c5 8. ♙e3 ♜a5 9. ♜d2 ♗c6 10. ♖b1 a6 11. ♖c1 cd 12. cd ♜d2+ 13. ♘d2 e6 14. ♙d3 ♙d7 15. e5 0-0 16. ♖b1 b5.

На первый взгляд, предпоследний ход белых может показаться странным – белые осла-

били контроль над полями d5 и f5, однако их идея заключается в фиксации центра, ограничении чернополюного слона и в создании в отдаленной перспективе форпостов для своих фигур для f6 и h6. Стабилизировав ситуацию в центре и ограничив легкие фигуры соперника, AlphaZero приступает к любимому маневру.

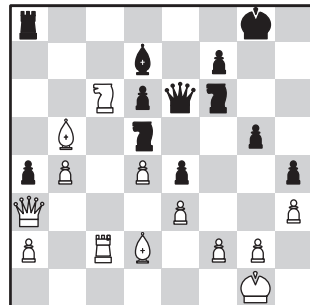


17. h4! ♙e7 18. h5 ♙c6 19. h6 ♙h8 20. ♙g5! Белые жертвуют пешку, чтобы предотвратить подрыв центра путем f7-f6. 20... ♙g2 21. ♖hc1 ♙d5 22. ♖c7 ♗f5 23. ♙e4! Белые жертвуют вторую пешку... 23... ♜fc8 24. ♖bc1 ♜c7 25. ♖c7 ♙a2 26. ♘c5 ♙d5 27. ♙d7 ♗e3 28. ♙b6 ♜b8 29. fe ♜e8 30. ♙d7 ♙f3 31. e4 ♜a8 32. ♖b7 ♙g4 33. ♙b1 ♙h3 34. ♜e2 g5 35. ♙d3 ♙g4+ 36. ♜e3 ♙d1 37. d5 ed 38. ed ♜e8 39. ♙e4. Пешка на e5 неприкосновенна из-за угрозы мата по восьмой горизонтали. 39... ♙g4 40. ♙f6+ ♙f6 41. ef b4 42. d6 b3 43. ♜d4 ♜d8 44. ♜e5 ♜e8+ 45. ♖e7 ♜f8 46. ♙d5 b2 47. ♖b7 ♜e8+ 48. ♜d4. Красноречивая позиция. У черных две лишние пешки, но они бессильны перед активными белыми фигурами. Проходная пешка d6 будет стоять черным слона, а провести свои пешки они не в состоянии, поэтому черные сдались.

Эта партия может служить модельным примером игры за белых в защите Грюнфельда.

Stockfish – AlphaZero Лондон, 2018

1. c4 e5 2. ♘c3 ♗f6 3. ♘f3 ♗c6 (В дебюте AlphaZero предпочитает симметричную игру с борьбой за центр, лишь в ответ на 1. d4 она избирает несимметричный ответ 1. ♗f6.) 4. e3 ♙b4 5. ♜c2 ♙c3 6. ♜c3 ♜e7 7. ♙e2 0-0 8. d4 e4 9. ♘e5 ♗d8 10. h3 h5! Не только начиная атаку на королевском фланге, но и создавая угрозу выигрыша коня после 11...d6. 11. c5 d6 12. cd cd 13. ♘c4 b5! Начало неочевидного плана – черные планируют развить коня не на c6, а перевести его на d5 по маршруту d8-e6-c7. 14. ♙a5 ♙d7 15. 0-0 ♙e6 16. ♙d2 ♜fc8 17. ♜b3 h4! Фиксируя пешку на h3, черные захватывают пространство для подготовки будущей атаки. 18. ♖fc1 ♗c7 19. ♖c2 ♗cd5 20. ♖ac1 ♜c2 21. ♖c2 a6 22. ♜a3 ♜e6 23. ♙c6 a5 24. b4 a2 25. ♙b5 g5!



Торжество стратегии черных – у белых лишняя пешка на ферзевом фланге, однако они не создают никаких угроз, в то время как черные развивают стремительную атаку на королевском фланге, отбить которую белые не успевают. 26. ♜c1 g4 27. hg ♜g4 28. ♜f1 ♜g5 29. ♖c1 ♜h8 30. ♙a5 ♙g4 31. ♙e2 ♙f3 32. ♜h1 ♙e2 33. ♜e2 ♙h5 34. ♜h2 ♜g8 35. f4 ♜g3+ 36. ♜g1 ♜f3 37. ♜f3 ef 38. g4 ♙g3 39. ♜f2 ♙e4+, ввиду материальных потерь белые сдались.

А. Русанов



Уроки с физикой

Оказывается, бриллианты – лучшие друзья не только девушек...

АЛМАЗНАЯ НАКОВАЛЬНЯ

(Подробнее – на с. 2 внутри журнала)

ISSN 0130-2221 20005



9 770130 222207