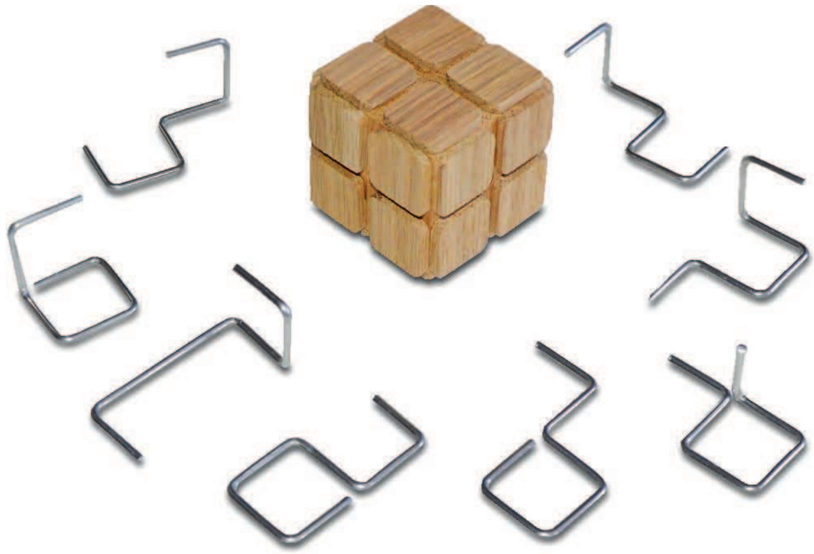
ISSN 0130-2221
ФЕВРАЛЬ
2019 · № 2

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Решетка на кубе



Эта головоломка состоит из кубика 2×2×2 и восьми проволочных деталей длины 6 каждая, показанных на фотографии. На кубике сделаны желобки для этих деталей. Цель головоломки — разместить все детали на поверхности кубика так, чтобы ничего не торчало наружу и все желобки были покрыты проволокой. В итоге кубик будет полностью заключен в металлическую сеть.

В домашних условиях вытачивать желобки на деревянном кубике непросто, но изготовить головоломку можно и без этого. Например, можно просто наклеить на поверхность кубика квадратные кусочки картона (по 4 на каждую грань) — промежутки между ними и будут желобками.

Эта головоломка служит своего рода «выходом в пространство» для головоломки «Квадратная сетка», которая, в свою очередь, основана на задаче М824 «Задачника "Кванта"». В задаче спрашивалось, можно ли представить квадратную сетку 4×4 в виде объединения: а) восьми ломаных длины 5; б) пяти ломаных длины 8.

Желаем успехов в решении и головоломки, и задачи!

Н.Авилов

КВАНТ

ФЕВРАЛЬ 2019 №2

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Объять необъятное, или Ее преПодобие Размерность

Ю.БРУК, А.СТАСЕНКО

...необъятный океан истины
простирается передо мною,
уводя в неведомые дали.

И.Ньютон

Предварительные размышления

О чем думает любознательный Пассажир авиалайнера, глядя через иллюминатор на изогнутое крыло самолета? Конечно же, о том, от каких параметров зависит подъемная сила, которая держит стотонную машину в воздухе. Прежде всего, Он может сообразить, что эта сила должна расти с увеличением размера авиалайнера l, его скорости v и плотности ρ воздуха. А если при этом Он знает, в каких единицах выражается каждая из перечисленных физических величин, т.е. их размерность, то получит соотношение, уточняющее *характер* этой зависимости:

$$F = l^2 v^2 \rho \cdot \mathrm{const} \quad \left([\mathrm{F}] = \mathrm{Н} = \frac{\mathrm{кг} \cdot \mathrm{м}}{\mathrm{с}^2} \right).$$

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190201

Иллюстрация В.Аткарской

Здесь const – безразмерный множитель, зависящий от формы тела, обтекаемого воздухом, и от других параметров, ради определения которых во всем мире построены тысячи аэродинамических труб.

Какая польза от этого соотношения? Очень большая. Оно позволяет надеяться, что для тела заданной формы уже не нужно экспериментально «нащупывать» зависимость силы от всех определяющих параметров, а произвести лишь одно измерение на уменьшенной модели, геометрически *подобной* «большому» авиалайнеру.

Но что это – самолет начало слегка трясти? Это потому, что он летит в переохлажденном облаке – началось обледенение. Вспоминается знаменитый чкаловский перелет в Америку (1936 г.): «Первый контакт со стихией начинается над Кольским полуостровом... Появляются первые признаки обледенения – стекла пилотской кабины становятся матовыми. Начинается тряска...»

Как можно смоделировать в лабораторных условиях обтекание самолета воздухом, несущим водяные капли радиусом a? Заставить эту каплю обтекать тело радиусом R, когда она приобретает центростремительное ускорение $\frac{v^2}{R}$, может только аэродинамическая сила порядка $a^2v^2\rho$. Но поскольку масса капли $m \sim \rho_0 a^3$, из равенства $\frac{mv^2}{R} \sim a^2v^2\rho$ следует

$$\frac{a}{R} \sim \frac{\rho}{\rho_0} \sim 10^{-3},$$

где ρ_0 – плотность воды. Это значит, что если в реальности $a = 1$ мм $= 10^{-3}$ м, $R = 1$ м, то на модели в сто раз меньших размеров нужно использовать капли в сто раз меньше, т.е. радиусом 10^{-5} м = 10 мкм. «Конечно, все сложнее, но тут уже указана некая путеводная мысль»,– подумал любознательный Пассажир авиалайнера.

Здесь видна связь метода размерностей с важным физическим принципом, называемым принципом подобия. Фактически об этом принципе мы уже говорили выше. Именно подобие позволяет нам моделировать различные физические явления.

В физике два явления называются подобными, если одинаковы безразмерные комбинации описывающих их величин. Перейти от описания одного явления к описанию другого, ему подобного, мы всегда можем простым пересчетом масштабов.

А о чем думали лилипуты, взирая на громаду Гулливера? Прежде всего – как ее прокормить. И придумали. Если считать, что тела лилипута и Гулливера не только геометрически подобны, но и одинаковы по своей структуре, то Гулливеру нужно пищи больше, чем лилипуту, во столько раз, во сколько раз отличаются объемы их тел, т.е. в $12^3 = 1728$ раз. Откуда взялось число 12? Надо отдать должное догадливости их ученых. Дело в том, что поверхность коры головного мозга лилипута в $12^2 = 144$ раза меньше; значит, и клеток серого вещества (ответственных за мышление) меньше во столько же раз (клетки не поддаются масштабированию). Впрочем, им помог сам Джонатан Свифт.

Но вот Гулливер попал в страну великанов, тоже в 12 раз больших ростом, чем он сам, по свидетельству автора, и столь же изящных. Возможно ли это? Ведь вес тела великана больше в 12^3 раз, а сечение костей – всего в 12^2 раз. А чтобы реализовать то же значение нагрузки на единицу площади поперечного сечения кости, диаметр сечения нужно увеличить еще в 12 раз! Тут уж не до изящества – вспомним слонов и мамонтов...

Еще Леонардо да Винчи «выводил из соображений подобия причину большого размера китов по сравнению со слонами: вес тела растет пропорционально *кубу* линейных размеров, прочность костей – пропорционально *квадрату*...» [1, с.73]. Он же «пытался понять законы газодинамики и турбулентности на основе степенны́х законов теории размерностей, явившихся предшественником колмогоровских».

А вот еще один пример оценки, относящейся к «живой природе». Биологи утверждают, что только одна из десяти охотничьих экспедиций стаи голодных волков заканчивается успехом. Если стая гонится за табуном диких лошадей, то в 90% случаев табун уходит от волков без потерь. А ведь в нем, кроме взрослых лошадей, есть и маленькие жеребята. Значит, они бегают так же быстро, как и взрослые?

Рассмотрим взрослую лошадь и жеребенка. Будем думать, что сделаны они «из одного и того же мяса», т.е. примем, что, несмотря на различие в размерах, плотности их тел одинаковы. Пусть, кроме того, сила мышц в расчете на единицу поперечного сечения одна и та же. Обозначим через M, L, и T массу, характерный размер и характерное время движения взрослого животного, а через m, l и t – те же величины для молодого. Тогда плотность и силу можно записать в соответствии с их размерностями в виде $\frac{M}{L^3}$ и $\frac{ML}{T^2}$ и, аналогично, $\frac{m}{l^3}$ и $\frac{ml}{t^2}$. Жеребенок и взрослая лошадь с достаточной точностью могут считаться геометрически подобными. Эти предположения дают теперь такие очевидные соотношения:

$$\frac{\left(\frac{M}{L^3}\right)}{\left(\frac{m}{l^3}\right)} \sim 1, \quad \frac{\left(\frac{ML}{T^2}\right) : L^2}{\left(\frac{ml}{t^2}\right) : l^2} \sim 1.$$

Отсюда получается, что скорости движения взрослой лошади и жеребенка одинаковы:

$$\frac{L}{T} \sim \frac{l}{t}.$$

Это объясняет, почему жеребенок в табуне лошадей, уходящих от волков, не отстает: он делает движения хотя и более мелкие, чем взрослая особь, но более частые.

Нехитрый метод теории размерности

Рассмотрим классическую задачу Рэлея. Пусть между точками A и B натянута струна, на середине которой находится шарик. Масса шарика M намного больше массы самой струны. Струну оттягивают и отпускают. Пусть максимальное расстояние x_0 от шарика до прямой AB мало по сравнению с длиной отрезка AB. Середину этого отрезка обозначим буквой C. Примем еще, что $AC = CB = a$, движение шарика будем считать гармоническими колебаниями. Как будет зависеть частота этих колебаний ω от натяжения струны F, массы шарика M и размера a?

Предположим, что величины ω, F, M и a связаны степенно́й зависимостью:

$$\omega \sim F^x M^y a^z.$$

Здесь x, y, z – некоторые числа, которые нам сейчас предстоит определить. Для этого выпишем размерности – наименования единиц, в которых измеряются интересующие нас величины в системе СИ:

$$[\omega] = \text{с}^{-1},\ [F] = Н = \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2},$$
$$[M] = \text{кг},\ [a] = \text{м}$$

(квадратные скобки как раз и обозначают размерность стоящей в них величины).

Мы не пишем в формулах, полученных таким методом, знак равенства, заменяя его волнистой чертой (знак пропорциональности). Следует иметь в виду, что метод размерностей не может помочь в вычислении численных коэффициентов в формулах.

Если написанная выше формула для ω выражает реальную физическую закономерность, то размерности правой и левой частей этой формулы должны совпадать. Поэтому можно записать такое равенство:

$$\text{с}^{-1} = \text{Н}^x \cdot \text{кг}^y \cdot \text{м}^z = \text{кг}^x \cdot \text{м}^x \cdot \text{с}^{-2x} \cdot \text{кг}^y \cdot \text{м}^z = \text{кг}^{x+y} \cdot \text{м}^{x+z} \cdot \text{с}^{-2x}.$$

Очевидно, что должны удовлетворяться следующие уравнения для x, y и z:

$$x + y = 0,\ x + z = 0,\ -2x = -1.$$

Отсюда получаем

$$x = 1/2,\ y = -1/2,\ z = -1/2,$$

а значит,

$$\omega \sim F^{1/2} M^{-1/2} a^{-1/2}.$$

Интересно отметить, что точная формула для частоты отличается от найденной нами всего в $\sqrt{2}$ раз $\left(\omega^2 = 2F/(Ma)\right)$. Другими словами, можно в данном случае считать, что оценка для ω получена не только качественная (в смысле зависимости от параметров F, M и a), но и количественная. По порядку величин найденная степенная комбинация F, M и a дает правильные значения частоты.

Нас и в дальнейшем часто будет интересовать оценка по порядку величины. В простых задачах обычно неопределяемые методом размерностей коэффициенты можно считать числами порядка единицы. Это, однако, не строгое правило. Окончательный вывод о величине численного коэффициента можно сделать, конечно, после сравнения с точной формулой либо из каких-то дополнительных соображений. Мы будем обсуждать подобные вопросы позже.

А сейчас стоит вернуться к задаче Рэлея и уточнить сделанные предположения. Во-первых, мы считали, что натяжение струны F приблизительно одинаково, когда струна вытянута вдоль линии AB и когда она оттянута перпендикулярно этой линии. Это предположение основано на том, что действительно существует связь между параметрами ω, F, M и a. Во-вторых, считалось, что формула, выражающая эту связь, имеет степенной вид: $\omega \sim F^x M^y a^z$.

Однако метод размерностей помогает находить функциональные зависимости между разными параметрами задачи не только для тех ситуаций, когда эти зависимости степенные. К счастью, таких зависимостей в природе довольно много, и метод размерностей становится хорошим помощником.

Правило $N - K = 1$

Понятие размерности физической величины вводится тогда, когда уже выбраны некоторые основные физические величины и установлены единицы для их измерения. Величины, не включенные в число основных, называются производными величинами. Выражение единиц измерения производной физической величины через единицы измерения основных величин и означает размерность.

В общем случае выбор основных величин и единиц для их измерения может производиться разными способами. Здесь, конечно, многое зависит от удобства, традиций и существующих стандартов и соглашений. В механике основными величинами являются масса, длина и время. Иногда говорят, что такие системы единиц принадлежат к классу MLT. Размерность силы в этом классе определяется выражением MLT^{-2}, размерность энергии – ML^2T^{-2} и т.д. Заменяя в этих выражениях M на кг, L на м, T на с, мы получим размерности силы и энергии в системе СИ. Если мы рассматриваем задачи, в которых фигурируют немеханические величины, например электрический заряд, ток, потенциал, то можно увеличить число основных величин и соответствующих основных единиц измерения. В системе СИ в число основных величин добавляют силу тока, которую измеряют в амперах (А). Точно так же в термодинамике в число основных величин можно включить температуру, ее единица измерения – кельвин (К).

Важно отметить, что пользоваться методом размерностей можно в любой системе единиц. Каждый раз, конечно, выражения для размерностей различных величин нужно писать в одной заранее выбранной системе.

Предположим, что в какой-то задаче мы отыскиваем функциональную связь между N величинами. Предполагая степенную зависимость одной из величин от других и выписывая размерности этих величин, мы можем пытаться построить интересующую нас формулу. Если все размерности выражаются через размерности K основных величин и если при этом $N - K = 1$, то можно утверждать, что искомая формула единственно возможная. Это правило наглядно иллюстрируется рассмотренным выше примером с колебаниями шарика на струне. Для этого случая у нас было четыре параметра: ω, T, M и a; размерности всех этих величин выражались через размерности основных величин, т.е. через кг, м, с. Другими словами, $N = 4$, $K = 3$ и $N - K = 1$. То, что формула $\omega \sim T^{1/2} M^{-1/2} a^{-1/2}$ – единственно возможная, следует из того, что система уравнений для определения показателей степеней x, y, z имеет единственное решение.

Рассмотрим теперь еще одну поучительную задачу – о колебаниях сферической капли. Простое решение этой задачи с помощью соображений размерности обсуждалось Рэлеем еще в 1915 году. К этой задаче сводится, по существу, и вопрос о колебаниях атомных ядер, которые можно считать каплями ядерного вещества. Здесь мы обсудим сначала простейшую ситуацию.

Пусть из круглого отверстия вытекает сферическая капля. Поверхностная энергия при этом минимальна, а всякая система стремится попасть в состояние с минимальной энергией. Даже очень малые деформации капли приведут к тому, что силы поверхностного натяжения «заставят» ее пульсировать с некоторой частотой. При этом под пульсациями понимаются периодические изменения формы капли. Отвлечемся сейчас от вопроса, сколь быстро затухают подобные колебания. Нас будет интересовать частота (или период) процесса, которая может зависеть, очевидно, от коэффициента поверхностного натяжения σ, плотности жидкости ρ и радиуса капли a. Запишем соотношение

$$\omega \sim \sigma^x \rho^y a^z$$

и попробуем найти числа x, y, z. Заметим, кстати, что под σ можно понимать и плотность поверхностной энергии с размерностью $\frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}$, и силу, отнесенную к единице длины, размерность которой $\frac{\text{Н}}{\text{м}}$. Выпишем размерности всех параметров:

$$[\omega] = \text{с}^{-1},\ [\sigma] = \text{кг}\cdot\text{с}^{-2},$$

$$[\rho] = \text{кг}\cdot\text{м}^{-3},\ [a] = \text{м}\ .$$

Уравнения для определения x, y, z получатся из равенства

$$\text{с}^{-1} = \text{кг}^x \cdot \text{с}^{-2x} \cdot \text{кг}^y \cdot \text{м}^{-3y} \cdot \text{м}^z .$$

Для трех неизвестных чисел есть три уравнения:

$$-1 = -2x,\ x + y = 0,\ -3y + z = 0.$$

Эта система уравнений имеет единственное решение:

$$x = 1/2,\ y = -1/2,\ z = -3/2,$$

что находится в полном соответствии с правилом $N - K = 1$.

Окончательно формула для частоты колебаний запишется так:

$$\omega \sim \left(\frac{\sigma}{\rho a^3}\right)^{1/2} .$$

Она подсказывает сразу же и принципиально возможный способ экспериментального определения величины σ. Для этого нужно знать плотность жидкости ρ, радиус капли a и определить на опыте частоту ω. То, что мы не знаем численного коэффициента в этой формуле, не должно быть серьезным препятствием. Можно, например, проделать опыт еще раз с жидкостью, для которой величина поверхностного натяжения известна, и после этого вычислить значения σ для рассматриваемой жидкости.

По существу, мы сталкиваемся сейчас с простым случаем *моделирования* – колебания капли исследуемой жидкости можно моделировать колебаниями капли жидкости с известными σ и ρ. В таких случаях и говорят о подобии физических явлений (в данном случае – колебаний формы капель) для двух разных жидкостей.

Еще одно любопытное замечание. Перепишем формулу для частоты колебаний так:

$$\frac{\sigma}{\rho} \sim a^3\omega^2 .$$

Учтем теперь, что частота обратно пропорциональна периоду колебаний. Параметры σ и ρ характеризуют жидкость и потому одинаковы для любых капель этой жидкости. Пусть T – период колебаний капельки, тогда $T^2 = \text{const}\cdot a^3$. Это важное утверждение. Если взять две капельки одной жидкости, но разных радиусов, то отношение квадратов периодов их колебаний будет равно отношению кубов их размеров. Как тут не вспомнить закон Кеплера для движения планет вокруг Солнца! Там, правда, нужно говорить не о радиусах шаров-планет, а о радиусах их орбит. Подумайте сами – нельзя ли извлечь что-нибудь полезное из этой *аналогии*?

А если $N - K > 1$?

Уже при выписывании системы параметров, связь между которыми мы хотим отыскать, нужно отдавать себе отчет в том, что существенно и что несущественно для конкретного физического явления. Если речь идет о динамике (например, о колебаниях), то в числе параметров должны быть силовая и массовая характеристики. Роль первой из них в предыдущем примере играла величина σ, роль второй – плотность жидкости ρ. В сущности, выше считалось, что колебания капли определяются поверхностным натяжением. Полученное решение, безусловно, годится, если капля колеблется в кабине космического корабля. А годится ли оно вблизи поверхности Земли? Не следует ли учесть еще и земное тяготение, другими словами вес капли?

Предположим, что мы захотели это сделать. Поступим сначала формально и запишем

$$\omega \sim \sigma^x \rho^y a^z g^t ,$$

где g – ускорение свободного падения, x, y, z и t – неизвестные числа. Выписывая размерности всех величин, приходим к соотношению

$$\text{с}^{-1} = \text{кг}^x \cdot \text{с}^{-2x} \cdot \text{кг}^y \cdot \text{м}^{-3y} \cdot \text{м}^z \cdot \text{м}^t \cdot \text{с}^{-2t}.$$

Отсюда можно составить всего три уравнения, а неизвестных у нас – четыре. Решение такой системы уже не единственное, и возникает вопрос: как же теперь поступить? Было бы досадно, если бы было невозможно «выпутаться» из этого затруднения.

Попробуем рассуждать так. Зафиксируем пока число x, т.е. оставим его неопределенным (безразмерным!) параметром. Остальные неизвестные выразим через него:

$$y = -x,\ z = -2x - \frac{1}{2},\ t = \frac{1}{2} - x.$$

Тогда

$$\omega \sim \left(\frac{g}{a}\right)^{1/2} \left(\frac{\sigma}{\rho a^2 g}\right)^x .$$

Именно для малых капель вес не должен быть определяющим параметром колебаний. Но тогда и ускорение g не должно входить в формулу для ω. Поэтому $x = 1/2$. (Написанные равенства верны, разумеется, с точностью «по порядку величин». Неучтенные численные коэффициенты в этой задаче также порядка единицы.)

Мы вернулись к формуле, полученной раньше. Остается, возможно, все же некоторая неудовлетворенность тем, что пришлось прибегнуть к дополнительным аргументам и ограничиться частным случаем достаточно малых капелек. Про колебания капель (или больших шаров), когда нужно учитывать гравитацию, речь еще пойдет в дальнейшем. Пока же стоит подчеркнуть, что метод размерностей вовсе не есть универсальный инструмент для получения формул в физике. Он многое может, но не так уж редки и такие задачи, кода его разумно комбинировать с тем или иным способом, с другими идеями и методами.

Метры «вдоль и поперек»

В некоторых случаях удобно различать продольные и поперечные размеры тел и вводить различные единицы для измерения длин в разных направлениях. Этот прием позволяет увеличить число основных величин и часто оказывается полезным. Попробуем, например, оценить с помощью метода размерностей длину свободного пробега молекул в газе. Молекулы имеют конечные размеры и могут сталкиваться друг с другом даже в достаточно разреженных газах. Среднее расстояние, пробегаемое молекулами между двумя последовательными соударениями, и называется длиной свободного пробега. Обозначим ее буквой l, размер (радиус или диаметр) молекулы – буквой a, а концентрацию молекул в газе – буквой n. Молекулы условно считаются шариками, а под плотностью понимается число частиц в единичном объеме.

Размерность n есть, очевидно, м^{-3}, размерности l и a – это м. Основная величина в данном случае одна – длина. Параметров, связь между которыми мы хотим найти, три: l, a и n. Разность $N - K = 2$. С точки зрения размерностей устраивают в качестве допустимых любые комбинации вида

$$l \sim a,\ l \sim n^{-1/3},\ l \sim \left(na^2\right)^{-1},\ l \sim a^3 n^{2/3},\ \ldots$$

Какую же из них выбрать? Неужели метод размерностей не поможет найти правильную формулу? Это было бы тем долее обидно, что задача-то ведь совсем простая, а метод размерностей «работает», как мы знаем, и в более сложных случаях. Вот здесь-то и поможет упомянутый в начале этого раздела прием.

Условимся следить за какой-нибудь одной молекулой. «Привяжем» к ней систему прямоугольных координат, причем одну из осей направим вдоль траектории молекулы. Предполагается, что в первом приближении между двумя последовательными столкновениями молекула летит по прямой линии. Длину пробега естественно измерять в «продольных» метрах – $м_{\parallel}$. Поперечные размеры молекул, мешающих движению нашей избранницы, будем измерять, соответственно, в «поперечных» метрах – $м_{\perp}$. А как быть с концентрацией? Какие метры выбрать здесь? Считая, что направления, поперечные по отношению к траектории молекулы, эквивалентны, легко сообразить, что объем произвольного, в том числе и единичного, кубика, построенного на наших координатных осях, естественно измерять в $м_{\parallel}м_{\perp}^2$. Но тогда размерность числа частиц в единичном объеме (n) будет $м_{\parallel}^{-1}м_{\perp}^{-2}$, а размерностью поперечных сечений молекул, мешающих интересующему нас движению, будет $\left[a_{\perp}^2\right] = м_{\perp}^2$.

После всех этих ухищрений из множества выписанных выше возможных зависимостей l от n и a совершенно однозначно остается единственная формула:

$$l \sim n^{-1}a^{-2}.$$

«Расслоив» метры на «параллельные» и «перпендикулярные», мы увеличили тем самым число основных величин, их стало две, и теперь разность $N - K$ снова равна единице.

Введенные единицы носят название направленных или векторных единиц длины. Чтобы получше освоиться с ними, вернемся к уже обсуждавшейся выше задаче о колебаниях капли. Предположим снова, что частота колебаний может быть связана с величиной поверхностного натяжения σ, плотностью ρ, размером капли a и ускорением свободного падения g. Выпишем размерности основных величин: кг, с, $м_{\parallel}$, $м_{\perp}$. В задаче есть выделенное направление – оно задается вектором $\vec{g}$, можно назвать его «продольным», тогда $[g] = м_{\parallel} \cdot с^{-2}$. Объем капли будет измеряться в единицах $м_{\parallel}м_{\perp}^2$, размерность радиуса капли a при этом будет $м_{\parallel}^{1/3}м_{\perp}^{2/3}$. Размерность же плотности ρ будет равна $кг \cdot м_{\parallel}^{-1}м_{\perp}^{-2}$, а размерность σ будет $\frac{кг \cdot м_{\parallel}}{с^2 \cdot м_{\parallel}} = кг \cdot с^{-2}$. То, что размерность σ содержит именно «продольные» метры $м_{\parallel}$, нетрудно понять, вспомнив, как определяется поверхностное натяжение. Рассмотрим мыльную пленку, натянутую на проволочную рамку. Пленка сопротивляется растяжению в том направлении, в котором ее тянут. Ускорение, как уже договорились, измеряем в $м_{\parallel} \cdot с^{-2}$, значит, размерность силы – это $кг \cdot м_{\parallel} \cdot с^{-2}$. Формула $\omega \sim \sigma^x\rho^y a^z g^t$ приводит теперь к равенству

$$с^{-1} = кг^x \cdot с^{-2x} \cdot кг^y \cdot м_{\parallel}^{-y} \cdot м_{\perp}^{-2y} \times$$
$$\times\, м_{\parallel}^{z/3} \cdot м_{\perp}^{2z/3} \cdot м_{\parallel}^{t} \cdot с^{-2t}.$$

Правило $N - K = 1$ выполняется: $N = 5$, $K = 4$. Система линейных уравнений для определения x, y, z и t такова:

$$-1 = -2x - 2t,\ 0 = x + y,\ 0 = -y + \frac{z}{3} + t,$$
$$0 = -2y + \frac{2z}{3}.$$

Единственное решение этой системы:

$$x = 1/2,\ y = -1/2,\ z = -3/2,\ t = 0.$$

Формула для частоты колебаний капли, конечно, прежняя:

$$\omega \sim \left(\frac{\sigma}{\rho a^3}\right)^{1/2}.$$

То, что из формулы «выпало» ускорение g, означает, что первоначальное предположение о возможной зависимости от g оказалось несправедливым. Метод размерностей позволяет, таким образом, исключать лишние параметры.

Но мы как будто не использовали сейчас предположение о малости капель? А ведь раньше говорилось о том, что полученная формула для ω годится только при описании достаточно малых капелек. И критерием малости было неравенство

$\sigma a \gg \rho a^3 g$. Перепишем его в виде

$$\left(\frac{a}{g}\right)^{1/2} > \left(\frac{\rho a^3}{\sigma}\right)^{1/2}$$

и заметим, что слева стоит время падения капли на расстояние порядка ее размеров, а справа – период колебаний ($\sim\omega^{-1}$). Это последнее неравенство означает, что колебания, обусловленные силами поверхностного натяжения, можно рассматривать на фоне относительно медленного падения капли. Разница характерного времени падения (на расстояние $\sim a$) и периода колебаний позволяет разделить эти два процесса и рассматривать их независимо. Поэтому в нашем примере период колебаний и на самом деле не зависит от g.

Сделаем еще несколько замечаний о векторных единицах длины. Во-первых, существуют задачи, в которых целесообразно вводить не только «продольные» и «поперечные» размеры, но и разные силы (одни, измеряемые в $\text{кг}\cdot\text{м}_{\parallel}\cdot\text{с}^{-2}$, другие – в $\text{кг}\cdot\text{м}_{\perp}\cdot\text{с}^{-2}$). Во-вторых, возможно естественное обобщение идеи о введении «своих единиц» для измерения продольных и поперечных размеров. В случае необходимости в какой-то конкретной задаче можно было бы ввести «свои метры» для каждого из трех взаимно-перпендикулярных направлений в пространстве. Число основных единиц, таким образом, увеличивается сразу на две. Третье замечание такое. Бывает так, что две существенно различные физические величины имеют в какой-то системе единиц одинаковые размерности. В системе СИ, например, такими величинами являются момент силы L и работа A. Обе величины имеют размерности $\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^{-2}$. Обычный метод размерностей не может эти величины различить. Но если мы снова применим нашу «маленькую хитрость», введя разные единицы длины вдоль траектории движения и перпендикулярно к ней, то L и A сразу станут различаться. При вычислении работы всегда проектируется сила на направление движения. В определении момента силы существенны «перпендикулярные» единицы длины. Другими словами, момент есть векторное, а работа – скалярное произведение: $\vec{L} = \vec{F}\times\vec{r}$, $A = \vec{F}\cdot\vec{r}$, где $\vec{F}$ – сила, $\vec{r}$ – радиус-вектор. Ясно еще, что размерность самой силы содержит «продольные» метры. Тогда получится, что L имеет размерность $\text{кг}\cdot\text{м}_{\parallel}\cdot\text{м}_{\perp}\cdot\text{с}^{-2}$, A – размерность $\text{кг}\cdot\text{м}_{\parallel}^2\cdot\text{с}^{-2}$.

Колебания формы капли

Из всего сказанного выше ясно, что колебания капли происходят в результате противодействий поверхностного натяжения, характеризуемого коэффициентом σ (жесткость), которое стремится восстановить шаровую форму, и инертности, измеряемой массой m, заставляющей проскакивать положение равновесия, так что

$$\omega_0 \sim \sqrt{\frac{\sigma}{m}} \sim \sqrt{\frac{\sigma}{\rho a^3}}\,.$$

Например, для капли дождя радиусом $a = 1$ мм получим оценку

$$\omega_0 \sim \sqrt{\frac{0,06}{10^3\cdot 10^{-9}}}\ \text{с}^{-1} \approx 250\ \text{с}^{-1}\,.$$

Колебания формы атомного ядра (капельная модель)

Ядро с атомным номером A содержит число протонов и нейтронов, в сумме равное A. Принимая энергию связи равной $E_1 = 8{,}5$ МэВ/нуклон, полную энергию связи оценим как AE_1 и, «приписывая» ее поверхностному натяжению, найдем коэффициент $\sigma = \dfrac{AE_1}{4\pi a^2}$, где $a = r_p\sqrt[1/3]{A}$ – радиус ядра-капли, r_p – радиус нуклона (протона). Тогда частота колебаний будет порядка

$$\omega_0 \sim \left(\frac{E_1}{4\pi a^2 m_p}\right)^{1/2} \sim \left(\frac{E_1}{4\pi A^{1/3} r_p^2 m_p}\right)^{1/2} \sim 4\cdot 10^{21}\ \text{с}^{-1}$$

(здесь принято $m_p = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ кг, $r_p \sim 10^{-15}$ м, $A = 235$ для ядра $^{235}_{92}\text{U}$). Такая частота характерна для γ-излучения.

Колебания формы Земли

Если Земной шар уподобить капле, то гравитационная энергия, «размазанная» по ее поверхности, будет порядка $\sigma \sim \frac{GM^2}{4R\pi R^2}$, откуда $\omega_0 \sim \sqrt{\frac{\sigma}{M}} \sim \sqrt{G\rho}$, где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² – постоянная всемирного тяготения. Считая $\rho \sim 5{,}5$ г/см³, получим

$$\omega_0 \sim 6 \cdot 10^{-4}\ \text{с}^{-1}, \text{ или } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \sim 3 \text{ часа}.$$

Колебания Вселенной

Принимая среднюю плотность Вселенной равной $\rho_{\text{ср}} \sim 5 \cdot 10^{-30}$ г/см³ (критическое значение, разделяющее колебательный и монотонный характеры ее динамики), для периода колебаний получим

$$T_0 \sim (G\rho)^{-1/2} \sim 10^{18}\ \text{с} \sim 3 \cdot 10^{10}\ \text{лет}.$$

(В настоящее время Вселенная расширяется, а ее дальнейшая судьба, согласно космологии, зависит от того, что больше: средняя или критическая плотность.)

Астрономические наблюдения смещения линий излучения показали, что галактики удаляются от нас со скоростью, пропорциональной расстоянию: $V = Hr$ (чем дальше наблюдаемая галактика, тем она «краснее»). Эта ситуация аналогична распределению скоростей в случае точечного взрыва. Коэффициент пропорциональности – это постоянная Хаббла $H = 2{,}2 \cdot 10^{-18}$ с (но обычно она выражается в км/с на млн световых лет). Интересно отметить, что обратная величина $\tau = \frac{1}{H} > 10$ млрд лет имеет смысл периода колебаний Вселенной, а величина $\frac{c}{H} \sim 10^{26}$ м – размеров Вселенной.

В частности, третий закон Кеплера можно считать одним из примеров подобия. Действительно, записав закон всемирного тяготения Ньютона в безразмерном виде, отнеся расстояние r планеты от Солнца к большой полуоси a ее эллиптической траектории, а соответствующий момент времени t – к периоду ее обращения T, получим

$$\frac{d^2\left(\frac{r}{a}\right)}{d\left(\frac{t}{T}\right)^2}\left(\frac{r}{a}\right)^2 = GM_\text{С}\frac{T^2}{a^3}.$$

Так как G и $M_\text{С}$ (масса Солнца) – постоянные, следует, что $T^2 \sim a^3$ для всех планет нашей системы.

Гравитационная постоянная и скорость света

Продолжим обсуждение вопроса о том, в каких случаях следует ожидать появления в формулах размерных постоянных. В этом разделе речь пойдет о гравитационной постоянной G и скорости света c.

Естественно, что G появляется в задачах, описывающих гравитационное взаимодействие, а c – в задачах, где речь идет о движении частиц со скоростями, близкими к скорости света. Присутствует скорость света и в задачах, относящихся к распространению света и электромагнитного излучения – такое излучение есть просто поток фотонов, а они всегда, конечно, движутся со скоростью света.

Пример, который мы теперь рассмотрим, требует одновременного включения в число определяющих параметров обеих констант G и c. Сейчас хорошо известно, что луч света, идущий из далекой галактики и проходящий вблизи края солнечного диска, отклоняется на малый угол $\varphi_\text{С} \approx 2 \cdot 10^{-6}$ рад. Известны масса Солнца $M_\text{С} \simeq 2 \cdot 10^{30}$ кг и его радиус $R_\text{С} \simeq 7 \cdot 10^5$ км. Гравитационное поле Солнца служит причиной отклонения светового луча, само же это поле определяется параметрами G, $M_\text{С}$ и $R_\text{С}$. Интересно получить формулу, связывающую угол $\varphi_\text{С}$ с параметрами G, $M_\text{С}$, $R_\text{С}$ и c. Никаких других параметров в задаче нет. Говоря, что луч света проходит вблизи звезды, мы пренебрегаем, конечно, разницей между радиусом звезды и расстоянием от ее центра до ближайшей точки луча. Запишем, как обычно, формулу

$$\varphi_\text{С} \sim M_\text{С}^x R_\text{С}^y G^z c^t.$$

Размерность гравитационной постоянной

проще всего получить из закона всемирного тяготения:

$$[G] = \frac{[F]\left[r^2\right]}{\left[m^2\right]} = \text{Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2} = \text{кг}^{-1} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{с}^{-2}.$$

Угол же $\varphi_\text{С}$ – величина безразмерная, поэтому мы получим три таких уравнения:

$$x - z = 0,\ y + 3z + t = 0,\ -2z - t = 0.$$

Неизвестных же чисел – четыре, правило $N - K = 1$ не выполнено. Но с подобной ситуацией мы уже сталкивались и знаем, что теперь нужна какая-то дополнительная информация. Зафиксируем число x, тогда $y = -x$, $z = x$, $t = -2x$. Интересующая нас формула может быть представлена в виде

$$\varphi_\text{С} \sim \left(\frac{GM_\text{С}}{R_\text{С} c^2}\right)^x.$$

Для определения числа x можно использовать теперь известное из наблюдений и приведенное выше численное значение $\varphi_\text{С}$. Учитывая, что $G \simeq 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2, а скорость света $c \simeq 3 \cdot 10^8$ м/с, легко проверить, что написанная формула правильна при $x = 1$.

Соображения подобия позволяют считать, что угол отклонения светового луча в гравитационном поле любой звезды с массой M и радиусом R определяется аналогичным образом и равен $\varphi \sim \dfrac{GM}{Rc^2}$.

В этих рассуждениях появились два новых соображения. Прежде всего, мы не можем утверждать только на основании сказанного выше, что $x = 1$. Формулы выписаны только по порядку величины, и, казалось бы, ничто не мешает нам считать, что $x = 0{,}99$ или $x = 1{,}02$. Уверенность в том, что $x = 1$ основана не на приведенных формальных вычислениях, да и к тому же с неизвестным численным коэффициентом и с приближенными значениями всех параметров, а на опыте и на соображениях уже не размерности, а «разумности». Опыт говорит нам, что показатели степеней в формулах бывают обычно целыми числами или простыми дробями. В то же время не видно каких-либо оснований для того, чтобы считать, например, $x = 8/9$ или $x = 19/21$. «Разумность» и желание видеть формулы возможно более изящными играют вовсе не последнюю роль в физике! Нельзя, конечно, целиком отдаваться эмоциям, но ничего другого без точного решения обсуждаемой задачи мы все равно сказать не смогли бы. Точное же решение на самом деле приводит к $x = 1$.

Второе обстоятельство заключается в том, что безразмерная комбинация параметров M, R, G и c приводит для большого числа звезд к значению $\varphi \ll 1$. Обратите внимание на то, что φ сейчас не является безразмерным постоянным коэффициентом, это – функция других параметров, функция безразмерная, но вовсе не обязанная быть универсальной константой! Неопределяемая же из соображений размерности константа в правой части формулы $\varphi \sim \dfrac{GM}{Rc^2}$, конечно, тоже есть, и вот она-то порядка единицы.

Малость значения функции φ для Солнца вовсе не означает, что эта функция всегда мала. Пользуясь полученной для нее формулой, можно оценить отклонение луча света, проходящего вблизи нейтронных звезд. Так называют звезды, плотность которых примерно такая же, как плотность вещества внутриатомных ядер. Их массы по порядку величины совпадают с массой нашего Солнца, а радиусы составляют всего лишь десятки километров. Гравитационное поле нейтронных звезд намного «сильнее» поля Солнца, поэтому неудивительно, что типичное значение угла φ для них достигает уже десятых долей радиана! Читатель легко проверит это сам.

Три фундаментальные константы

Фундаментальными (или мировыми) константами часто называют гравитационную постоянную G, скорость света c и постоянную Планка h, входящую в формулы, описывающие квантовые явления.

Наш читатель уже знает, вероятно, что излучаемая (или поглощаемая) атомами энергия квантуется. В простейшей квантовой модели атом рассматривается по аналогии с планетной системой. Электроны вращаются вокруг ядра по орбитам вполне определенных радиусов, переход же электрона с одной орбиты на другую должен сопровождаться излучением или поглощением кванта энергии величиной $h\nu$. Здесь ν – частота излучения, определяемая разностью энергий электрона на соответствующих орбитах. Отсюда ясно, что размерность h в системе СИ определяется так:

$$[h] = \text{Дж} \cdot \text{с} = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}.$$

Теперь можно обсудить, например, вопрос об излучении энергии нагретым телом. Такое тело излучает обычно энергию в разных диапазонах. Потоки тепла, света и рентгеновского излучения можно рассматривать, конечно, как потоки квантов соответствующих частот.

Пусть температура излучающей поверхности равна T. Обозначим буквой q энергию, излучаемую с единицы поверхности за единицу времени. Эта величина имеет смысл плотности потока энергии, ее размерность в системе СИ есть $[q] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} = \text{кг} \cdot \text{с}^{-3}$. Кванты электромагнитного излучения движутся со скоростью c. Отвечающая температуре T характерная энергия есть, очевидно, kT, где k – постоянная Больцмана. Естественно предположить, что функционально могут быть связаны четыре величины: q, (kT), c и h. Из соображений размерности тогда легко получить формулу $q \sim (kT)^4 c^{-2} h^{-3}$. Часто этот закон записывают в виде $q = \sigma T^4$ и называют законом Стефана–Больцмана. Коэффициент σ называется, соответственно, постоянной Стефана–Больцмана. Ясно, что в системе СИ $[\sigma] = \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$. Приведем еще для полноты численные значения констант, входящих в написанные формулы:

$$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \text{Дж/К},$$

$$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}.$$

Таким образом, мы познакомились с несколькими размерными константами. Формулы для q и σ содержат две фундаментальные константы: c и h. Это есть прямое указание на то, что строгое решение задачи об излучении нужно строить на основе квантовой и одновременно релятивистской теорий. Постоянная Стефана–Больцмана, вычисляемая в такой теории, равна $\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 h^3 c^2} = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$. Зная этот закон, можно довольно просто оценить температуру $T_\text{С}$ «поверхности» Солнца площадью $4\pi R_\text{С}^2$, используя уравнение баланса тепла, поглощаемого диаметральным сечением Земли $\pi R_\text{З}^2$ и излучаемого с ее поверхности $4\pi R_\text{З}^2$ при известной средней температуре $T_\text{З} \approx 300$ К:

$$\frac{4\pi R_\text{С}^2 \sigma T_\text{С}^4}{4\pi l_\text{СЗ}^2} \pi R_\text{З}^2 = 4\pi R_\text{З}^2 \sigma T_\text{З}^4,$$

откуда

$$T_\text{С} = T_\text{З} \cdot (4 \cdot 4)^{1/4} \cdot \left(\frac{l_\text{СЗ}}{2R_\text{С}}\right)^{1/2} = 20 T_\text{З} = 6000\ \text{К}.$$

Здесь $l_\text{СЗ}$ – расстояние от Земли до Солнца, а $\frac{2R_\text{С}}{l_\text{СЗ}} \approx 10^{-2}$ рад – угол, под которым диаметр Солнца виден с Земли. При этом нам не пришлось лететь к Солнцу с термометром. Более того, оказалось необязательно знать и σ, а нужно знать только температурную зависимость плотности потока излучения.

Не случайно академик Н.Н.Боголюбов «всегда ценил умение быстро прикинуть ответ на трамвайном билете» [1, с.196].

А вот исторический факт. «Капица был великим инженером и замечательным физиком… я помню то впечатление, которое произвела на нас сделанная им оценка мощности взрыва первой бомбы в Хиросиме… Какой-то… журналист… заметил, что на некоей железнодорожной станции… невдалеке от Хиросимы… аккуратно вывалились написанные черной тушью иероглифы… Белая часть бумажной поверхности объявления никак не пострадала… Исходя из того, что окрашенная часть мишени поглощает все, а белая отражает, Петр Леонидович… вычислил равновесную температуру в области взрыва, что и позволило оценить его мощность… П.Л.Капица показал нам… всю мощь метода оценок порядка величин исходя из здравого смысла и простых физических соображений (что на самом деле, заметим в скобках, одно и то же)» [2, с.230].

Отметим, кстати, что численный коэффициент $\frac{\pi^2}{60}$ в приведенной выше формуле для σ тоже можно считать при грубых оценках числом порядка единицы.

Зададим теперь такой вопрос: в каком случае в формулах могут содержаться все три фундаментальные константы? Очевидно, что для этого существенными должны быть одновременно гравитация, релятивизм и квантование. Любопытно, что из G, c и h можно сконструировать величины с размерностями массы, длины и времени. Из соображений размерности такие соотношения строятся сразу же и однозначно и имеют такой вид:

$$m_P \sim \left(\frac{hc}{G}\right)^{1/2}, \; l_P \sim \left(\frac{Gh}{c^3}\right)^{1/2},$$

$$t_P \sim \left(\frac{Gh}{c^5}\right)^{1/2}.$$

Если принять неопределенные численные коэффициенты в этих формулах равными единице, то получаются «естественные» масштабы для измерения масс, длин и времени. Эти масштабы впервые ввел М.Планк, и они называются планковскими единицами. Нетрудно проверить, что

$$m_P \sim 2\cdot 10^{-8} \text{ кг}, \; l_P \sim 2\cdot 10^{-35} \text{ м}$$

$$\text{и } t_P \sim 5\cdot 10^{-44} \text{ с}.$$

Для практических задач, возникающих в повседневной жизни, это слишком малые масштабы. Современная физическая теория, однако, не может пренебрегать и такими масштабами. В космологии – науке, описывающей эволюцию Вселенной, планковский период играет очень важную роль, именно планковские масштабы определяют самую раннюю историю нашего Мира. Строгой теории физических процессов, происходивших на начальных стадиях жизни Вселенной, пока еще не существует. Никаких экспериментов со Вселенной (кроме, быть может, мысленных) мы проводить тоже не можем. Но уже сама возможность построения планковских единиц показывает нам, что будущая теория ранней Вселенной должна быть, во всяком случае, квантовой гравитационной теорией.

Чтобы лишний раз проиллюстрировать, сколь непросто построить такую теорию, вычислим еще планковские единицы плотности и температуры:

$$\rho_P \sim \frac{m_P}{l_P^3} \sim \frac{c^5}{G^2h} = 5\cdot 10^{96} \text{ кг/м}^3,$$

$$T_P \sim \frac{1}{k}\left(\frac{hc^5}{G}\right)^{1/2} = 10^{12} \text{ К}.$$

Вероятно, эти грандиозные численные значения должны заставить читателя окончательно поверить в то, что свойства вещества или излучения, характеризующиеся такими параметрами, не могут быть простыми и, скорее всего, вовсе не похожи на все то, к чему мы привыкли.

Итак, рассмотренные примеры использования метода размерностей и подобия позволяют определить характер зависимости между величинами с точностью до безразмерных множителей, но зато какой диапазон – от атомного ядра до Вселенной!

Завершим словами замечательных ученых об удивительно плодотворном физико-математическом синтезе:

«...слияние математики и физики заставляет... вспоминать о том времени, когда представители точных наук именовались просто натурфилософами» [3, с.34].

«Это более мощный инструмент познания, чем все остальное, что дала нам человеческая деятельность... рассматривается либо порядок, либо мера и совершенно несущественно, будут ли это числа, фигуры, звезды, звуки или что-нибудь другое» [4, с.58].

Литература

1. *В.И.Арнольд.* К восьмидесятилетию. – М.: МЦНМО, 2018.

2. *Н.В.Карлов.* Книга о Московском Физтехе. –М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.

3. *Н.Н.Боголюбов.* Собрание научных трудов. Т.1. – М.: Наука, 2005.

4. *Р.Декарт.* Правила для руководства ума. – М.–Л.: Соцэкгиз, 1936.

Задачи о фокусниках и теоремы Холла и Шпернера

А.ЭВНИН

Теорема Холла

В популярной математической литературе широкую известность получила следующая задача.

Задача о свадьбах. *Имеется множество юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. При каких условиях можно одновременно поженить всех юношей так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке?*

Ответ таков: задача разрешима тогда и только тогда, когда любые k юношей из данного множества знакомы в совокупности не менее чем с k девушками.

Заметим, что необходимость здесь очевидна. Действительно, если для каких-то k юношей число потенциальных невест меньше k, то уже этих k юношей одновременно поженить не удастся. Достаточность доказывается не так просто!

Для того чтобы сформулировать задачу о свадьбах на математическом языке, приведем некоторые определения из теории графов [1].

Вершины графа – смежные, если они соединяются ребром. Ребра графа называются смежными, если у них есть общая вершина, и несмежными в противном случае. Попарно несмежные ребра графа образуют *паросочетание*. Например, в графе на рисунке 1 можно указать несколько паросочетаний из четырех ребер. Одно из них $\{aa_1, bb_1, cc_1, dd_1\}$.

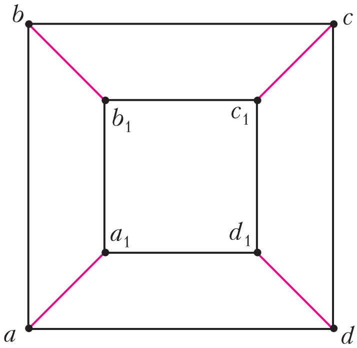


Рис. 1

Пусть $G(V_1, V_2)$ – двудольный граф с долями V_1 и V_2 (в этом графе любое ребро соединяет некоторую вершину из V_1 с некоторой вершиной из V_2). *Совершенным паросочетанием* из V_1 в V_2 называется паросочетание в этом графе, покрывающее V_1 (т.е. для всякой вершины из V_1 в паросочетании найдется выходящее из нее ребро). Например, на рисунке 2 изображен граф с долями $V_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$ и

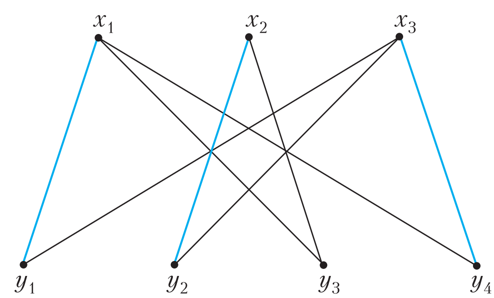


Рис. 2

$V_2 = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. Ребра x_1y_1, x_2y_2 и x_3y_4 образуют совершенное паросочетание из V_1 в V_2.

Пусть G – граф с множеством вершин V, а A – подмножество V. *Окружением* множества A называют множество

$$\Gamma(A) = \bigcup_{v \in A} \Gamma(v),$$

где $\Gamma(v)$ – множество вершин, смежных с v.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190202

Напомним также, что *мощность* конечного множества – это число его элементов.

Теперь решение задачи о свадьбах может быть сформулировано следующим образом.

Теорема 1 (Ф.Холл, 1935 г.). *Совершенное паросочетание из V_1 в V_2 в двудольном графе $G(V_1, V_2)$ существует тогда и только тогда, когда для любого множества $A \subset V_1$ мощность его окружения не меньше мощности A, т.е. $|\Gamma(A)| \geq |A|$.*

Четыре разных способа доказательства теоремы Холла можно найти в книге [2].

Достаточное условие

В данной статье речь пойдет об одном (простом, но малоизвестном) достаточном условии существования совершенного паросочетания в двудольном графе.

Теорема 2. *Пусть в непустом (т.е. имеющем хотя бы одно ребро) двудольном графе $G(V_1, V_2)$ степень любой вершины из доли V_1 не меньше степени любой вершины из доли V_2. Тогда в этом графе существует совершенное паросочетание из V_1 в V_2.*

Доказательство. Пусть q – число, которое не больше степени любой вершины из V_1 и не меньше степени любой вершины из V_2. Возьмем произвольные k вершин первой доли $b_1, b_2, \ldots, b_k$ и смежные с ними вершины $g_1, g_2, \ldots, g_l$ второй доли. Рассмотрим порожденный этими $k + l$ вершинами подграф G' исходного графа (в G' входят указанные вершины и все ребра между ними, имеющиеся в исходном графе). Ясно, что в графе G' степень любой вершины из первой доли не меньше q, а из второй не больше q. Число ребер двудольного графа равно сумме степеней вершин любой из его долей. Поэтому

$$kq \leq \sum_{i=1}^{k} \deg(b_i) = \sum_{j=1}^{l} \deg(g_j) \leq lq,$$

откуда $k \leq l$. Таким образом, выполнены условия теоремы Холла о существовании совершенного паросочетания в двудольном графе.

Граф называется *регулярным*, если степени всех его вершин равны между собой. Назовем двудольный граф *полурегулярным*, если в каждой доле степени всех ее вершин равны между собой. Извлечем из теоремы 2 следующие следствия.

Следствие 1. *В любом непустом регулярном двудольном графе существует совершенное паросочетание.*

Следствие 2. *В непустом полурегулярном двудольном графе $G(V_1, V_2)$ совершенное паросочетание существует тогда и только тогда, когда в доле V_1 вершин не больше, чем в V_2.*

Доказательство. *Необходимость* очевидна.

Достаточность. Пусть в V_1 и V_2 степени вершин равны a и b соответственно. Подсчитав двумя способами количество ребер в двудольном графе, получим $a|V_1| = b|V_2|$. Учитывая неравенство $|V_1| \leq |V_2|$, отсюда получаем, что $a \geq b$. Осталось воспользоваться теоремой 2.

Задачи о фокусниках

Имеется ряд задач, которые легко решаются с помощью теоремы 2 и следствий из нее. Фабула этих задач такова. Зрители предъявляют ассистенту фокусника некоторый случайным образом выбранный объект (например, несколько игральных карт), после чего ассистент по своему выбору как-то изменяет этот объект. Далее фокусник по новому объекту восстанавливает исходный.

Построим двудольный граф $G(V_1, V_2)$ следующим образом. Пусть вершины из V_1 – это всевозможные конфигурации, которые зрители могут предъявить ассистенту фокусника, а вершины из V_2 – те конфигурации, которые может получить ассистент. Если из конфигурации $a \in V_1$ может быть получена конфигурация $b \in V_2$, то в графе должно быть ребро ab; других ребер в графе нет.

Если в данном графе существует совершенное паросочетание из V_1 в V_2, то фокусник с ассистентом, используя его, смогут осуществить фокус: фокусник по конфигурации b однозначно определит конфигурацию a.

Рассмотрим конкретные задачи.

Для решения некоторых из них нужно знать формулы для числа сочетаний $C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$ (это количество способов выбрать k элементов из n имеющихся, если порядок выбора не важен) и для числа размещений $A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$ (это количество способов выбрать k элементов из n имеющихся, если порядок выбора важен).

Задача 1. *Имеются 27 карточек с числами от 1 до 27. Двое показывают следующий фокус. Первый получает четыре карточки, выбранные случайным образом. Одну из них он убирает, а три оставшиеся выкладывает в ряд. Второй должен назвать спрятанную карточку. Могут ли участники договориться так, чтобы по выложенным карточкам можно было определить спрятанную?*

Ответ: да, могут.

Решение. Рассмотрим двудольный граф, в одной доле которого сочетания из 27 по 4, в другой размещения из 27 по 3 и ребро соединяет размещение с сочетанием, если все элементы размещения входят в сочетание.

Очевидно, граф полурегулярный (на самом деле, даже регулярный). Поскольку $C_{27}^4 = A_{27}^3 = 27 \cdot 26 \cdot 25$, к графу можно применить следствие 2. В рассматриваемом двудольном графе существует совершенное паросочетание. Фокусникам осталось договориться о том, какое совершенное паросочетание им использовать.

Задача 2. *Фокусник и его помощник показывают следующий фокус. Фокусник выкладывает колоду из 36 карт и просит двух зрителей – мальчика и девочку – выбрать по две карты. Видя, кто какие карты выбрал, помощник тоже берет две карты из оставшихся и отдает их зрителям. Зрители перемешивают все 6 карт и отдают их фокуснику. Тот объявляет, кто какие карты брал из колоды. Докажите, что такой фокус действительно возможен.*

Решение. Здесь в первой доле графа – упорядоченные пары неупорядоченных пар. Например, вершина $(\{1,2\}, \{3,4\})$ соответствует случаю, когда мальчик выбрал карты с номерами 1 и 2 (можно считать, что карты пронумерованы числами от 1 до 36), а девочка – карты с номерами 3 и 4. Во второй доле графа – неупорядоченные шестерки карт. Ребро проводится в случае, когда шестерка получается из четверки добавлением двух карт. В первой доле построенного двудольного полурегулярного графа $C_{36}^2 \cdot C_{34}^2$ вершин, а во второй C_{36}^6. Очевидно, $|V_1| < |V_2|$. Выполнены условия следствия 2, гарантирующего существование совершенного паросочетания – фокус возможен.

Задача 3. *Зритель пишет на доске слева направо 10 цифр. Помощник фокусника закрывает одну из цифр карточкой. После этого входит фокусник и называет закрытую цифру. Докажите, что такой фокус действительно возможен.*

Решение. Пусть V_1 и V_2 – множества тех «картинок», которые могут увидеть помощник и фокусник соответственно. Рассмотрим двудольный граф $G(V_1, V_2)$, ребра которого описывают возможные переходы от картинок из V_1 к картинкам из V_2. Требуется доказать, что в этом графе существует совершенное паросочетание.

Если $u \in V_1$, то $\deg(u) = 10$, поскольку помощник может закрыть любую из 10 записанных зрителем цифр. Если $v \in V_2$, то $\deg(v) = 10$, поскольку карточка может закрывать любую из цифр от 0 до 9. Согласно следствию 1, в $G(V_1, V_2)$ существует совершенное паросочетание.

Заметим, что в графе довольно много вершин – по 10^{10} в каждой доле. Покажем, что фокус осуществим не только теоретически, но и практически.

Пусть места, где записаны цифры, пронумерованы слева направо: 1, 2, …, 9, 0. Помощник подсчитывает сумму S всех записанных зрителем цифр и закрывает карточкой место, номер которого является последней цифрой числа S. Фокусник вычисляет сумму девяти открытых цифр и, (по положению карточки) зная последнюю цифру суммы десяти цифр, легко определяет закрытую цифру.

Задача 4. *Зритель пишет на доске слева направо n цифр. Помощник фокусника закрывает одну из цифр красной карточкой, другую синей, еще одну зеленой. После этого входит фокусник и называет закрытые цифры. При каком наименьшем n такой фокус возможен?*

Ответ: при $n = 12$.

Решение. Пусть V_1 и V_2 – множества тех «картинок», которые могут увидеть помощник и фокусник соответственно. Рассмотрим двудольный граф $G(V_1, V_2)$, ребра которого описывают возможные переходы от картинок из V_1 к картинкам из V_2. Граф полурегулярный, $|V_1| = 10^n$, $|V_2| = n(n-1)(n-2)\cdot 10^{n-3}$. По следствию 2, для существования совершенного паросочетания из V_1 в V_2 необходимо и достаточно, чтобы в доле V_2 вершин было не меньше, чем в V_1. Отсюда $n(n-1)(n-2) \geq$ $\geq 10^3$, что равносильно неравенству $n \geq 12$. Таким образом, наименьшее значение n равно 12.

Покажем, как фокус осуществить практически при $n \geq 12$. Места, где записаны первые 12 цифр, пронумеруем слева направо: 1, 2, …, 9, 0, 11, 12 (остальные места, если они есть, не нумеруем!). Пусть S – сумма всех записанных зрителем цифр. Будем действовать за помощника следующим образом. Закроем красной карточкой место, номер которого является последней цифрой числа S, после чего мысленно удалим это место, а синей карточкой закроем место с номером, равным цифре, которая спрятана под красной карточкой. Затем зеленой карточкой закроем место, номер которого (вычисленный после «удаления» цифр, находящихся под красной и синей карточками) спрятан под синей карточкой.

Теперь фокусник по положению зеленой карточки поймет, какая цифра под синей, а по положению синей карточки – какая цифра под красной. Все цифры, кроме той, которая под зеленой карточкой, уже известны фокуснику, а положение красной карточки говорит о последней цифре суммы всех цифр, записанных зрителем. Поэтому фокусник сможет определить цифру и под зеленой карточкой.

Задачи для самостоятельного решения

Приведем подборку задач [1], при решении которых возможно применение теоремы Холла. Некоторые задачи совсем простые (решаются простой ссылкой, например, на следствие 1; нужно лишь увидеть соответствующий двудольный граф!), некоторые предлагались на школьных и студенческих олимпиадах различного уровня. Задачи 11–15 посвящены доказательству и применениям теоремы Шпернера.

1. Имеется бесконечное множество юношей и бесконечное множество девушек. Для любого натурального числа k верно, что любые k юношей знакомы в совокупности не менее чем с k девушками. Верно ли, что всех юношей удастся одновременно поженить на знакомых им девушках? Другими словами, справедлива ли теорема Холла в случае бесконечного графа?

2. Решите задачу 1 в предположении счетности [2] множеств юношей и девушек.

3. В некотором районе, состоящем из нескольких деревень, число женихов равно числу невест. В каждой деревне общее число женихов и невест не больше половины общего их числа. Докажите, что можно всех переженить так, чтобы в каждой паре жених и невеста были из разных деревень.

4. Однокруговой волейбольный турнир $2n$ команд продолжался $2n-1$ дней. Каждый день проходило n игр, каждая команда в один день проводила ровно одну игру. По окончании турнира организаторы решили наградить тортами некоторые команды: за каждый игровой

[1] Задача 3 предлагалась на III этапе Российской олимпиады школьников 1995 года, задача 4 – на Putnam Competition 2012 года, задача 14 – на Московской олимпиаде 2017 года, задача 15 – на Открытой олимпиаде ФМЛ 239 в 2004 году. Остальные задачи взяты из сборников [3, 4].

[2] Множество называется счетным, если существует взаимно однозначное соответствие между ним и множеством натуральных чисел (другими словами, элементы данного бесконечного множества можно пронумеровать натуральными числами). Счетными являются множества натуральных чисел, неотрицательных целых чисел, целых чисел, рациональных чисел.

день торт вручается какой-то команде, победившей в этот день. Всегда ли организаторы смогут осуществить свой выбор таким образом, чтобы только одна команда осталась без торта?

5. На танцевальном вечере каждый юноша знаком с k девушками, а каждая девушка знакома с k юношами. Докажите, что можно провести k (медленных) танцев так, чтобы каждый участник вечера станцевал со всеми своими знакомыми (противоположного пола).

6. На шахматной доске пометили 16 из 64 клеток так, что на каждой вертикали и каждой горизонтали оказалось по две помеченные клетки. Докажите, что на помеченных клетках можно расставить 8 черных и 8 белых фигур так, чтобы на каждой вертикали и каждой горизонтали стояло по одной белой и одной черной фигуре.

7. Карточная колода из 36 карт раздается на 9 человек по 4 карты каждому. Докажите, чтобы каждый может выложить по одной карте так, что все эти карты были разного достоинства.

8. Выполняя домашнее задание, каждый студент группы решил по 4 задачи. Известно, что каждая задача была решена четырьмя студентами. Докажите, что можно организовать разбор задач так, чтобы каждый студент рассказал решение ровно одной задачи и чтобы все задачи были разобраны (по одному разу).

9. Пусть $G(V_1, V_2)$ – двудольный граф; для любого подмножества A доли V_1 выполняется неравенство $|\Gamma(A)| \geq |A| - d$. Докажите, что максимальная мощность паросочетания в графе G не меньше $|V_1| - d$.

Для дальнейшего нам понадобятся следующие термины. Пусть имеется некоторый набор различных множеств. Говорят, что они образуют *цепь*, если для любых двух из них одно является подмножеством другого, и *антицепь*, если для любых двух из них ни одно не является подмножеством другого. Например, множества $\{1\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 3, 4\}$ образуют цепь, а множества $\{1\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$ образуют антицепь. Будем считать, что если у нас всего одно множество, то оно одновременно и цепь, и антицепь. Очевидно, что цепь и антицепь не могут пересекаться более чем по одному множеству. *Булеан* множества – это множество всех его подмножеств.

10. Докажите, что существует разбиение булеана n-элементного множества на цепи, каждая из которых содержит множество мощности $[n/2]$.

11. Докажите **теорему Шпернера**: максимальная длина антицепи в булеане n-элементного множества равна $C_n^{[n/2]}$.

12. Среди 250 сотрудников международной фирмы в любой паре сотрудников каждый знает язык, который не знает другой сотрудник из этой пары. Какое наименьшее возможное число языков знают (в совокупности) сотрудники фирмы?

13. В деревне живут 250 хоббитов. Каждый хоббит живет в отдельном домике. По вечерам они ходят друг к другу в гости. За один вечер каждый хоббит посещает всех, кого можно застать дома, причем если он идет в гости, то у себя дома в этот вечер уже не появляется. За какое наименьшее число вечеров может случиться так, что каждый житель деревни побывает в гостях у всех остальных?

14. Детектив Ниро Вульф расследует преступление. В деле замешаны 80 человек, среди которых один – преступник, еще один – свидетель преступления (но неизвестно, кто это). Каждый день детектив может пригласить к себе одного или нескольких из этих 80 человек, и если среди приглашенных есть свидетель, но нет преступника, то свидетель сообщит, кто преступник. Может ли детектив заведомо раскрыть дело за 12 дней?

15. Пусть G – граф с множеством вершин V. Известно, что для любого множества $A \subset V$ мощность его окружения не меньше мощности A. Докажите, что в графе G найдется паросочетание, в котором не меньше $|V|/3$ ребер.

Литература

1. *М.Л.Краснов.* Вся высшая математика: учебник. Т.7 / М.Л.Краснов, А.И.Киселев, Г.И.Макаренко, Е.В.Шикин, В.И.Заляпин, А.Ю.Эвнин. – М.: URSS, 2017.

2. *А.Ю.Эвнин.* Вокруг теоремы Холла. – М.: URSS, 2019.

3. *А.Ю.Эвнин.* Задачник по дискретной математике. 6-е изд. – М.: URSS, 2016.

4. Всероссийские студенческие турниры математических боев. Тула, 2002–2015 г. Ч. II. – Тула: Изд-во ТПГУ им. Л.Н.Толстого, 2017.

Первоначальный вариант статьи опубликован в журнале «Математика в школе» (2019, №2).

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи М2546–М2549, Ф2553–Ф2556

М2546. Сумма чисел a, b и c равна 0. Докажите, что:

а) $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}\cdot\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}=\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}$;

б) $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}\cdot\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}=\dfrac{a^7+b^7+c^7}{7}$.

Фольклор

М2547. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке T (рис.1). Окружность Ω_3 (с центром O_3) касается внешним образом окружностей Ω_1 и Ω_2, а также касается общей касательной AB, проведенной к Ω_1 и Ω_2, в точке D. Прямая TD вторично пересекает окружность Ω_1 в точке C. Докажите, что $O_1C \parallel AB$.

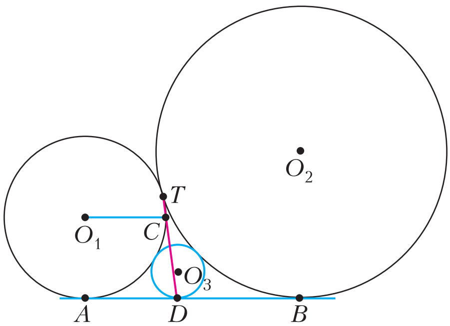


Рис. 1

В.Расторгуев

М2548*. Натуральное число n называется *избыточным*, если сумма всех его собственных делителей (т.е. натуральных делителей, отличных от самого n) больше n. Докажите, что для любого натурального N существует N подряд идущих избыточных чисел.

В.Брагин

М2549. Для каждого натурального n найдите сумму всех n-значных чисел, у которых последовательность цифр в десятичной записи неубывающая.

П.Кожевников

Ф2553. Основанием тетраэдра из скользкого льда, стоящего на горизонтальном столе, является равносторонний треугольник с ребром $a = 1$ м. Остальные грани тетраэдра представляют собой равнобедренные треугольники, причем одинаковые углы в этих треугольниках равны 75°. На тетраэдр поместили тонкую легкую нерастяжимую цепочку длиной $L = \sqrt{2}a$, замкнутую в кольцо. Цепочка в положении равновесия расположилась в горизонтальной плоскости и образовала правильный треугольник. К середине одной из сторон получившегося из цепочки треугольника приложили силу, направленную вниз вдоль грани, на которой находилась эта сторона треугольника (в направлении наискорейшего спуска). Цепочка пришла к новому положению равновесия. На каком расстоянии s от самой верхней вершины тетраэдра находится теперь точка приложения силы?

Фольклор

Ф2554. Невесомый жесткий стержень длиной $2l$ с помощью шарнира прикреплен к потолку так, что может совершать колебания только в вертикальной плоскости (рис.2). В середине стержня и на свободном его конце закреплены шарики массой m каждый, размеры которых много меньше l. Стержень отводят из положения равновесия на угол $90°$ (угол отсчитывается от вертикали) и аккуратно отпускают (без начальной скорости). Найдите мощность силы реакции стержня, действующей на средний шарик, в зависимости от угла α. Диссипации механической энергии в системе нет.

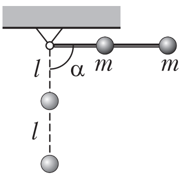


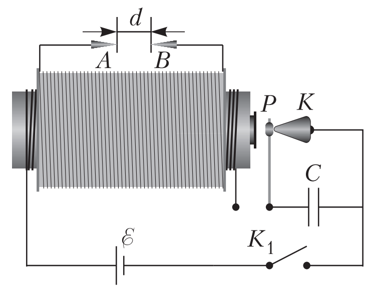
Рис. 2

И.Макаров

Ф2555. Вода в аквариуме для рыбок из южных стран имеет температуру выше, чем комнатная, и мощность тепловых потерь аквариума пропорциональна разнице температур воды и воздуха в комнате, который обдувает аквариум, обеспечивая эти тепловые потери. Коэффициент пропорциональности для тепловых потерь равен 5 Вт/°С. Вплотную к середине одной из стенок аквариума установлена маленькая по размерам лампочка накаливания с потребляемой от сети мощностью 25 Вт, работающая непрерывно. Свет от лампочки, идущий равномерно во все стороны, и освещает аквариум и греет воду в нем. Поскольку видны и рыбки и водоросли, то свет от лампочки, попавший в аквариум, частично выходит наружу в виде излучения. Эти потери составляют всего 1% от излучения, попадающего от лампочки в аквариум. Зимой хозяин аквариума поставил плоское зеркало параллельно стенке аквариума вплотную к лампочке, и лампочка оказалась «зажатой» между стенкой аквариума и зеркалом. Коэффициент отражения света зеркалом равен 90%. В комнате зимой температура воздуха равна 18 °С. Какова зимой температура воды в аквариуме?

З.Рыбка

Ф2556. На рисунке 3 схематично изображено устройство, называемое катушкой Румкорфа. На сердечник с большой маг-



$L_1 = 10^{-3}$ Гн, $N_1 = 30$
$L_2 = 10$ Гн, $N_2 = 3000$
$C = 0{,}1$ мкФ, $d = 3$ см, $R_0 \approx 1$ Ом

Рис. 3

нитной проницаемостью намотаны две обмотки: первичная обмотка из толстого провода и поверх нее вторичная обмотка из тонкого провода. Размыкатель (P) предварительно регулируют, замкнув накоротко конденсатор (C), так, чтобы размыкатель срабатывал в тот момент, когда ток в первичной обмотке достигает 90% от максимального значения тока при выбранном источнике питания. После регулировки ключ K_1 переводят в разомкнутое положение и «закоротку» конденсатора убирают. Теперь установка готова к работе. В исходном положении размыкатель P замкнут на контакт K. После замыкания ключа K_1 ток через первичную обмотку начинает увеличиваться, и в какой-то момент размыкатель срабатывает. Между выводами A и B вторичной обмотки возникает большое напряжение. Если средняя напряженность поля в промежутке AB превысит значение 30 кВ/см, в промежутке возникнет искровой разряд. Вне зависимости от того, возник или нет искровой разряд, энергия, запасенная в виде магнитного поля, после размыкания цепи постепенно переходит в тепло и при ее уменьшении почти до нуля размыкатель перестает притягиваться к сердечнику и снова замыкает цепь. Сколько одинаковых автомобильных аккумуляторов с ЭДС $\mathscr{E}_0 = 12$ В и внутренним сопротивлением $r_0 = 0{,}5$ Ом нужно соединить последовательно друг с другом и использовать в качестве источника питания в устройстве, чтобы воздушный промежуток гарантированно «пробивался»? Значения других параметров установки указаны на рисунке.

П.Крюков

Решения задач М2534–М2537, Ф2541–Ф2544

М2534. *На острове живут рыцари, лжецы и подпевалы; каждый знает про всех, кто из них кто. В ряд построили всех 2018 жителей острова и попросили каждого ответить «Да» или «Нет» на вопрос: «На острове рыцарей больше, чем лжецов?» Жители отвечали по очереди и так, что их слышали остальные. Рыцари отвечали правду, лжецы лгали. Каждый подпевала отвечал так же, как большинство ответивших до него, а если ответов «Да» и «Нет» было поровну, давал любой из этих ответов. Оказалось, что ответов «Да» было ровно 1009. Какое наибольшее число подпевал могло быть среди жителей острова?*

Ответ: 1009 подпевал.

Оценка. По мере получения ответов будем следить за минимумом из количеств ответов «Да» и «Нет». Обозначим этот минимум m. Вначале $m = 0$, а после того, как все жители ответили, $m = 1009$ (по условию, ответов «Да» было 1009, значит, и ответов «Нет» – тоже). Заметим, что ответ подпевалы не мог увеличивать m, а ответ рыцаря или лжеца мог увеличить m не более чем на единицу. Значит, вместе рыцарей и лжецов не менее 1009, а подпевал не более 1009.

Пример. 1009 подпевал могло быть. Например, пусть на острове живут 1009 подпевал и 1009 рыцарей и сначала все подпевалы по очереди сказали «Нет», а затем 1009 рыцарей сказали «Да». (Нетрудно доказать, что пример можно построить многими способами, поставив предварительно в ряд произвольным образом 1009 рыцарей и лжецов, а затем добавив между ними подходящим образом подпевал.)

М.Кузнецов

М2535. *Требуется записать число вида 77…7, используя только семерки (их можно писать и по одной, и по нескольку штук подряд), причем разрешены только сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень, а также скобки. Для числа 77 самая короткая запись – это просто 77. А существует ли число вида 77…7, которое можно записать по этим правилам, используя меньшее количество семерок, чем в его десятичной записи?*

Ответ: существует.

Одна из возможных идей, как придумать конструкцию, – записать с помощью достаточно малого количества семерок число $99999\ldots9 = 10^n - 1$ (где число n достаточно большое и записывается с помощью небольшого количества семерок), а затем получить и число $77777\ldots7 = 7\left(10^n - 1\right)/9$. Реализуем эту идею:

$$\underbrace{7\ldots7}_{n} = \frac{10^n - 1}{9}\cdot 7 = \frac{7\cdot 10^n - 7}{9},$$

где число 10 можно записать как $(77 - 7):7$ или как $7 + (7 + 7 + 7):7$ (в последнем случае мы обошлись даже без использования двузначных чисел), а число 9 запишем как $7 + (7 + 7):7$. В качестве n можно взять 77 или $14 = 7 + 7$.

Конечно, есть и другие примеры. Вот такую конструкцию предложил участник Турнира городов из Дагестана Будун Будунов:

$$\underbrace{7\ldots7}_{14}\cdot\left(\left(\frac{77-7}{7}\right)^{7+7} + \frac{7}{7}\right) = \underbrace{7\ldots7}_{28}.$$

Здесь основная идея – использование множителя вида 1000…01, удваивающего количество семерок в десятичной записи числа.

А.Семенов

М2536*. *Изначально на белой клетчатой плоскости конечное число клеток окрашено в черный цвет. На плоскости лежит бумажный клетчатый многоугольник М, в котором больше одной клетки. Его можно сдвигать, не поворачивая, в любом направлении на любое расстояние, но так, чтобы после сдвига он лежал «по клеткам». Если после очередного сдви-

га ровно одна клетка у М лежит на белой клетке плоскости, эту белую клетку окрашивают в черный цвет и делают следующий сдвиг. Докажите, что существует такая белая клетка, которая никогда не будет окрашена в черный цвет, сколько бы раз мы ни сдвигали М по описанным правилам.

Вместо клеток будем рассматривать их центры, которые назовем *узлами*. Таким образом, у нас есть конечное множество изначально черных узлов и *шаблон* – множество центров клеток бумажного многоугольника M. В задаче происходит следующий процесс: если удается положить шаблон так, что из его узлов ровно один узел белый, то этот узел мы можем перекрасить в черный цвет.

Зафиксируем некоторое положение шаблона K_0 и проведем вертикальную прямую через самой левый узел, принадлежащий K_0 (рис.1). (Поскольку мы не знаем,

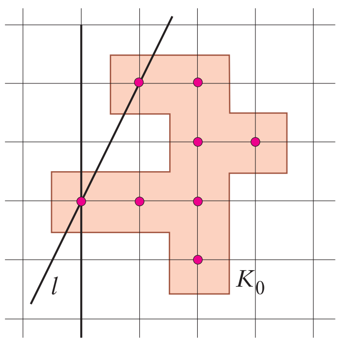


Рис. 1

черные или белые узлы попали в K_0, на рисунке 1 они изображены третьим цветом – красным.) Если эта прямая не содержит других узлов шаблона, то будем поворачивать прямую по часовой стрелке до тех пор, пока на нее не попадет еще один узел, принадлежащий K_0. Мы нашли для нашего шаблона так называемую *опорную прямую* l, содержащую не менее двух узлов шаблона, такую, что все узлы шаблона лежат в одной полуплоскости L относительно прямой l.

Теперь перенесем параллельно прямую l вместе с полуплоскостью L так, чтобы полуплоскость накрыла все изначально

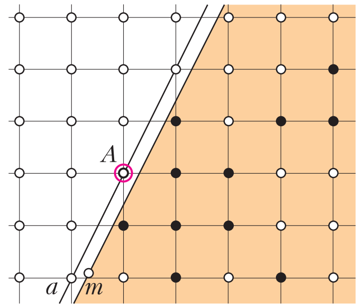


Рис. 2

черные узлы (рис.2). При этом прямая l перешла в некоторую прямую m, параллельную прямой l. Докажем, что все изначально белые узлы, лежащие в противоположной полуплоскости относительно m, всегда будут оставаться белыми.

Предположим противное и рассмотрим момент, когда первый такой узел A стал черным. Значит, он накрыт сдвигом K нашего шаблона. Проведем через A прямую a, параллельную прямой l. По одну сторону от a все узлы по-прежнему белые (так как A – единственный перекрашиваемый узел), значит, a – опорная прямая для K. Но тогда сдвиг, переводящий K в K_0, переводит прямую a в l, следовательно, на прямой a помимо A лежит еще хотя бы один узел, принадлежащий K. Как мы видим, в момент перекраски узла A шаблон K накрывает хотя бы два белых узла. Получаем противоречие, завершающее решение задачи.

Замечание. Как видим из решения, шаблон может быть произвольным, поэтому связность многоугольника M из условия задачи не важна. Также из решения задачи несложно вывести, что если шаблон не помещается ни в горизонтальный, ни в вертикальный ряд, то процесс перекраски будет конечным (т.е. в итоге на плоскости будет конечное число клеток). Отметим, что задача имеет естественное обобщение на пространственную решетку (в аналогичном процессе разрешается перекрасить два белых узла) или решетку конечномерного пространства.

Д.Захаров

M2537*. *На числовой оси отмечено бесконечно много точек с натуральными коор-*

динатами. Когда по оси катится колесо, каждая отмеченная точка, по которой проехало колесо, оставляет на нем точечный след. Докажите, что можно выбрать такое действительное R, что если прокатить по оси, начиная из нуля, колесо радиуса R, то на каждой дуге колеса величиной в 1° будет след хотя бы одной отмеченной точки.

Разделим окружность колеса на $n = 720$ дуг величиной $0{,}5°$ и покрасим каждую дугу в свой цвет (концы дуг не красим). Прокатим колесо по прямой так, чтобы ноль соответствовал границе между 1-м и n-м цветами. Считаем, что каждая точка прямой окрашивается в цвет дуги, которая по точке проезжает. Тогда прямая разобьется на интервалы n разных цветов, соответствующих дугам. Нам надо найти такой радиус R, или такую длину колеса $S = 2\pi R$, чтобы для каждого из n цветов нашлась отмеченная точка этого цвета.

Допустим, мы уже подобрали такое S, что для некоторого $k < n$ выполнено следующее k-условие:

для 1-го, 2-го, … , k-го цветов имеется отмеченная точка этого цвета.

Для выполнения 1-условия возьмем такое достаточно большое S, чтобы первый отрезок 1-го цвета покрыл отмеченную точку. Покажем, что, сохраняя k-условие, можно немного изменить длину колеса так, чтобы некоторая отмеченная точка оказалась окрашенной в $(k+1)$-й цвет, т.е. чтобы стало выполнено $(k+1)$-условие. Повторяя эту процедуру, мы в конце концов добьемся выполнения n-условия, что нам и требуется.

Итак, пусть для некоторой длины колеса S выполнено k-условие при некотором $k < n$. Зафиксируем по отмеченной точке каждого из цветов 1, 2, …, k. Небольшое изменение длины колеса соответствует гомотетии прямой с центром в точке 0 и коэффициентом, близким к 1. Понятно, что можно выбрать коэффициент гомотетии настолько близким к 1, что картина для наших зафиксированных k отмеченных точек не изменится: все они останутся внутри «растянутых» интервалов того же цвета. Итак, найдется такое $\varepsilon > 0$, что при длине колеса, принадлежащей интервалу $(S;\, S(1+\varepsilon))$ для 1-го, 2-го, … , k-го цветов, по-прежнему найдется отмеченная точка этого цвета.

Теперь рассмотрим «достаточно далекую» отмеченную точку Z, нам будет подходить $Z > S(1+\varepsilon)/\varepsilon$. Рассмотрим раскраску прямой после того, как прокатили колесо длины S. На интервале $(Z-S;\, Z)$ колесо сделало полный круг, поэтому на нем обязательно найдется точка T $(k+1)$-го цвета. Теперь увеличим длину колеса в Z/T раз. Если прокатить колесо новой длины ZS/T, то точка Z станет $(k+1)$-го цвета. Поскольку

$$1 < Z/T < Z/(Z-S) = 1 + S/(Z-S) < 1+\varepsilon,$$

k-условие сохранится. Этим завершается решение.

Замечание. Как видно из решения, условие, что отмеченные точки имеют натуральные координаты, может быть ослаблено. Достаточно лишь, чтобы множество отмеченных точек было неограниченным сверху.

И.Митрофанов, П.Кожевников

Ф2541. *С вершины горизонтального цилиндра без начальной скорости скатывается небольшой обруч (отношение радиуса обруча к радиусу цилиндра – малая величина). Коэффициент трения между поверхностями цилиндра и обруча $\mu = 1$. При каком угле между вертикалью и линией, проходящей через центр обруча и ось цилиндра (рис.1), начнется проскальзывание обруча по цилиндру? При каком угле между теми же линиями произойдет отрыв обруча от цилиндра?*

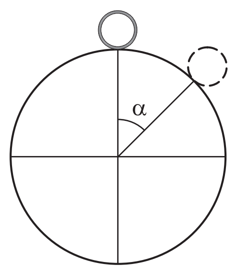


Рис. 1

Движение обруча разделяется на два этапа: без проскальзывания и с проскальзыванием, когда вращение обруча отстает от поступательного движения центра масс.

Рассмотрим сначала первый этап движения. Чтобы найти зависимость нормальной составляющей силы реакции от угла α, используем уравнение динамики и закон сохранения энергии:

$$mg\cos\alpha - N_\text{р} = m\frac{V^2}{R},$$

$$mgR(1-\cos\alpha) = 2m\frac{V^2}{2}.$$

Делим на mg и вводим безразмерные переменные $N = \frac{N_\text{р}}{mg}$ и $v^2 = \frac{V^2}{gR}$. Получаем

$$\cos\alpha - N = v^2,$$

$$1-\cos\alpha = v^2,$$

откуда находим

$$N = 2\cos\alpha - 1.$$

Точку начала скольжения, т.е. угол α_0, определяем, приравнивая поступательное и вращательное ускорения обруча:

$$\mu(2\cos\alpha_0 - 1) = \sin\alpha_0.$$

Обозначим $x = \cos\alpha_0$ и учтем, что $\mu = 1$. Тогда

$$2x - 1 = \sqrt{1-x^2},$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 1 - x^2,$$

$$\cos\alpha_0 = \frac{4}{5},\ \sin\alpha_0 = \frac{3}{5},\ v_0^2 = \frac{1}{5},$$

$$\alpha_0 = \arccos 0{,}8 = 0{,}644 \text{ рад} \approx 37°,$$

$$N_0 = \frac{3}{5}.$$

Теперь рассмотрим второй этап движения. Запишем уравнение движения после начала скольжения:

$$mg\sin\alpha - \mu N_\text{р} = m\frac{dV}{dt},$$

или в безразмерных переменных –

$$\sin\alpha - \mu N = \frac{dv}{dt}.$$

При этом силу реакции записываем в виде

$$N = \cos\alpha - v^2.$$

Уравнение динамики принимает вид

$$\sin\alpha - \mu\left(\cos\alpha - v^2\right) = \frac{dv}{dt},$$

или $\sin\alpha - \mu\cos\alpha = -\mu v^2 + \frac{dv}{dt}$.

Получили неявное дифференциальное уравнение, которое не интегрируется. Попробуем решить его приближенно. Записываем уравнение динамики в виде

$$\frac{dv}{dt} = \sin\alpha - \mu\cos\alpha + \mu v^2.$$

Преобразовываем производную:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dl}\cdot\frac{dl}{dt} = \frac{V}{R}\cdot\frac{dV}{d\alpha} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + \mu\frac{V^2}{R},$$

или при единичных величинах

$$v\frac{dv}{d\alpha} = \sin\alpha - \mu\cos\alpha + \mu v^2.$$

Дифференцируем по углу уравнение силы реакции $N = \cos\alpha - v^2$:

$$\frac{dN}{d\alpha} = -\sin\alpha - 2v\frac{dv}{d\alpha}.$$

Используем предыдущее выражение:

$$\frac{dN}{d\alpha} = -\sin\alpha - 2\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha + \mu v^2\right) = -3\sin\alpha + 2\mu\cos\alpha - 2\mu v^2.$$

Берем вторую производную:

$$\frac{d^2N}{d\alpha^2} = -3\cos\alpha - 2\mu\sin\alpha - 4\mu v\frac{dv}{d\alpha}.$$

Опять используем готовое значение производной:

$$\frac{d^2N}{d\alpha^2} = -3\cos\alpha - 2\mu\sin\alpha - 4\mu\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha + \mu v^2\right) = \left(4\mu^2 - 3\right)\cos\alpha - 6\mu\sin\alpha - 4\mu^2 v^2.$$

Для третьей производной получаем

$$\frac{d^3N}{d\alpha^3} = \left(3 - 4\mu^2\right)\sin\alpha - 6\mu\cos\alpha - 8\mu^2\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha + \mu v^2\right) = \left(3 - 12\mu^2\right)\sin\alpha + \left(8\mu^3 - 6\mu\right)\cos\alpha - 8\mu^3 v^2.$$

При $\mu = 1$ в точке отрыва

$$N_0 = \frac{3}{5},\ \frac{dN}{d\alpha} = -\frac{3}{5},\ \frac{d^2N}{d\alpha^2} = -\frac{18}{5},$$

$$\frac{d^3N}{d\alpha^3} = -\frac{27}{5}.$$

Знание функции и ее производных в точке отрыва позволяет записать функцию силы реакции (в безразмерных величинах) в виде полинома третьей степени:

$$N\left(\delta = \alpha - \alpha_0\right) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\delta - \frac{9}{5}\delta^2 - \frac{4,5}{5}\delta^3 .$$

Теперь можно подсчитать работу сил трения

$$A = \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \mu \cdot N(\alpha) \cdot R d\alpha .$$

В безразмерном виде эта работа равна

$$\frac{3}{5}\delta - \frac{3}{10}\delta^2 - \frac{3}{5}\delta^3 - \frac{9}{40}\delta^4 ,$$

а энергетическое уравнение принимает вид

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = \cos\alpha_0 - \cos\alpha - \left(\frac{3}{5}\delta - \frac{3}{10}\delta^2 - \frac{3}{5}\delta^3 - \frac{9}{40}\delta^4\right).$$

В точке отрыва

$$v^2 = \cos\alpha ,$$

$$\cos\alpha - \frac{1}{5} = 2\left(\frac{4}{5} - \cos\alpha - \frac{3}{5}\delta + \frac{3}{10}\delta^2 + \frac{3}{5}\delta^3 + \frac{9}{40}\delta^4\right),$$

$$15\cos\alpha = 9 - 6\delta + 3\delta^2 + 6\delta^3 + \frac{18}{8}\delta^4 .$$

Последнее уравнение решаем приближенно. Косинус преобразовываем (и считаем δ малой величиной):

$$\cos\alpha = \cos\left(\alpha_0 + \delta\right) = \cos\alpha_0\cos\delta - \sin\alpha_0\sin\delta = \frac{4}{5}\left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right) - \frac{3}{5}\delta,$$

$$15\left(\frac{4}{5}\left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right) - \frac{3}{5}\delta\right) = 9 - 6\delta + 3\delta^2 + 6\delta^3 + \frac{18}{8}\delta^4 .$$

Отбрасываем малое слагаемое с четвертой степенью и получаем уравнение

$$2\delta^3 + 3\delta^2 + \delta - 1 = 0 .$$

Первое приближение находим, решая квадратное уравнение

$$3\delta^2 + \delta - 1 = 0 .$$

Его положительное решение:

$$\delta = \frac{\sqrt{13} - 1}{6} = 0,434 \approx 0,4 .$$

Решение кубического уравнения уточняем итерационным методом:

$$\delta = \frac{1}{1 + \delta(3 + 2\delta)} .$$

После нескольких итераций получаем точное (до 3 знаков) значение $\delta = 0,398$. Таким образом, угол отрыва равен

$$\alpha = 0,644 \text{ рад} + 0,398 \text{ рад} = 1,042 \text{ рад} \approx 59,7° .$$

Данный результат интересно сравнить с точным результатом компьютерного моделирования. На рисунке 2 синяя линия – график зависимости нормальной составляющей силы реакции поверхности цилиндра от угла в области отсутствия проскальзывания; две черные линии – аппроксимация в области проскальзывания полиномами второй и третьей степени; красная линия из символов – точный результат компьютерного моделирования, который совпадает с полиномом третьей степени. Рассчитанный угол отрыва равен $\alpha = 1,048$ рад. Что очень хорошо согласуется с результатом, полученным приближенным методом.

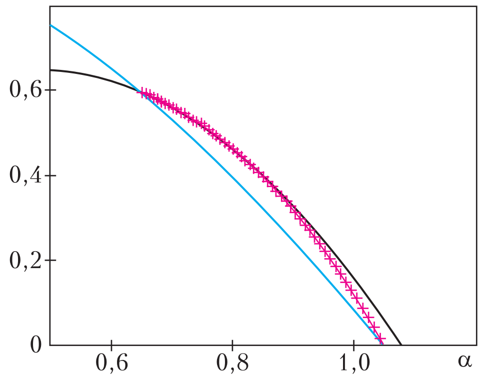


Рис. 2

А.Власов

Ф2542. *Тепловой двигатель ракеты обеспечивает вылет продуктов реакции горения из сопла двигателя со скоростью $v = 3$ км/с. Через $\Delta t = 5$ с после включения главного двигателя (в момент вклю-*

чения скорость ракеты равна нулю) ракета поднималась вверх со скоростью u = 100 м/с. К этому моменту масса ракеты была M = 10 т. Считая КПД преобразования тепловой энергии в механическую равным 30%, оцените тепловую мощность химической реакции в двигателе и найдите долю этой мощности, которая достается ракете в этот момент времени. Какой была стартовая масса ракеты M_0 (до запуска главного двигателя)?

Для начала проведем оценку мощности, считая, что нет силы тяжести и отсутствует сопротивление воздуха при движении ракеты относительно него. Предположим, что на промежутке времени Δt изменение массы ракеты m мало в сравнении с ее стартовой массой M_0. Тогда изменение импульса оставшейся части ракеты равно импульсу выброшенных вниз продуктов реакции: $Mu = mv$. Отсюда следует, что через сопло двигателя вылетела масса, равная примерно $m = Mu/v = 333$ кг. Таким образом, стартовая масса ракеты M_0 была примерно 10333 кг.

Массе продуктов сгорания достались приблизительно 97% от тех самых 30% от полной тепловой мощности химической реакции, равной $mv^2/2$, поскольку на долю ракеты осталось только $Mu^2/2$. Отношение этих величин равно $\left(mv^2/2\right)/\left(Mu^2/2\right) \approx$ $\approx M/m = 30$. Отсюда находим тепловую мощность, развиваемую двигателем:

$$W_{\text{т}} = \frac{mv^2}{2\Delta t \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}3} \approx 1{,}03 \text{ ГВт}.$$

Расход массы равен $(333 \text{ кг})/(5 \text{ с}) =$ $= 67$ кг/с. Реактивная сила равна произведению скорости вылета продуктов сгорания на массовый расход, а скорость изменения механической энергии ракеты равна произведению ее скорости на реактивную силу. Отсюда находим мощность, достающуюся ракете в интересующий нас момент (через 5 секунд после старта):

$$W_{\text{р}} = \frac{m}{\Delta t} vu = 20 \text{ МВт}.$$

Следовательно, доля мощности, достающаяся ракете в этот момент, равна

$$\frac{W_{\text{р}}}{W_{\text{т}}} \cdot 100\% = \frac{20 \cdot 10^6 \text{ Вт}}{1{,}03 \cdot 10^9 \text{ Вт}} \cdot 100\% \approx 1{,}94\%.$$

Теперь учтем наличие силы тяжести. За время Δt сила тяжести сообщила ракете импульс $Mg\Delta t$, направленный вниз, а ракета приобрела импульс Mu, направленный вверх. Следовательно, продукты сгорания получили от ракеты импульс $Mu + Mg\Delta t$, направленный вниз. Значит, масса продуктов сгорания за время Δt равна

$$m = \frac{Mu + Mg\Delta t}{v} = 500 \text{ кг}.$$

Можно считать, что это малая доля от 10 тонн, т.е. стартовая масса ракеты была примерно 10500 кг.

Масса продуктов сгорания стала в 1,5 раза больше (чем 333 кг), поэтому и реактивная сила, и мощность двигателя должны тоже стать больше в 1,5 раза. Таким образом, оценка для тепловой мощности такая: $W_{\text{т}} \approx 1{,}4$ ГВт. Сила, действующая на ракету со стороны продуктов сгорания, тоже увеличилась в 1,5 раза, поэтому доля мощности двигателя, достающаяся ракете, не изменилась, т.е. осталась равной примерно 1,94%.

Ракета с такой массой имеет поперечное сечение порядка $S \approx 2$ м^2. При скорости движения $u = 100$ м/с в воздухе, имеющем плотность $\rho = 1{,}3$ кг/м^3, ракета испытывает силу сопротивления воздуха, равную по порядку величины $F_{\text{сопр}} \approx \rho u^2 S =$ $= 26$ кН. Это гораздо меньше, чем 300 кН (реактивная сила), т.е. силой сопротивления воздуха можно смело пренебречь.

С.Королёв

Ф2543. *Сплошной шар радиусом r = 4 см, сделанный из вольфрама, нагрет до температуры $t_{\text{в}}$ = 1000 °С. Его опустили на поверхность круглого цилиндра из свинца, торцы которого горизонтальны. Свинец имеет комнатную температуру t_0 = 27 °С. В цилиндре имеется множество одинаковых вертикальных сквозных отверстий, распределенных равномерно по площади горизонтального сече-*

ния, так что общая площадь поперечного сечения отверстий равна половине площади круга радиусом 2r. Внешний радиус горизонтального сечения цилиндра равен 2r, цилиндр закреплен на краях, а шар опущен на центр верхнего горизонтального торца. Оцените максимальную высоту цилиндра, при которой вольфрамовый шар сможет «пройти» сквозь цилиндр (см. видео https:/ www.youtube.com/watch?v=P–uuKuhBO0). Молярные теплоемкости свинца и вольфрама примерно одинаковы и близки к значению $3R = 25$ *Дж/(моль·К). Температура плавления свинца* $t_{пл} = 600$ *К, его молярная теплота плавления* $L = 4{,}77$ *кДж/моль. Теплопроводностью свинца, равной* $35{,}3$ *Вт/(м·К), можно пренебречь в сравнении с теплопроводностью вольфрама* 163 *Вт/(м·К). Молярные массы и плотности в твердом состоянии этих элементов равны, соответственно,* $M_{св} = 207$ *г/моль и* $\rho_{св} = 11{,}3$ *г/см*^{3}, $M_{в} = 184$ *г/моль и* $\rho_{в} = 19{,}3$ *г/см*^{3}.

Шар из вольфрама должен «проплавить» в свинце дырку и превратить в жидкость свинец в объеме $\pi r^2 h/2$ (делитель 2 обусловлен наличием отверстий). Жидкий свинец стекает вниз по отверстиям и не нагревается выше 600 К. Если пренебречь потерями тепла, связанными с теплопроводностью свинца, то количество теплоты, которое требуется для расплавления такого количества свинца, равно

$$Q_{св} = \rho_{св}\cdot\frac{\pi r^2 h}{2}\cdot\frac{L + 3R\left(t_{пл} - t_0\right)}{M_{св}}.$$

После прохода через свинцовую пластину у вольфрамового шара температура должна быть больше, чем температура плавления свинца, следовательно, должно выполняться соотношение $Q_{св} < Q_{в}$, или

$$\rho_{св}\cdot\frac{\pi r^2 h}{2}\cdot\frac{L + 3R\left(t_{пл} - t_0\right)}{M_{св}} < \rho_{в}\cdot\frac{4\pi r^3}{3}\cdot\frac{3R\left(t_{в} - t_{пл}\right)}{M_{в}}.$$

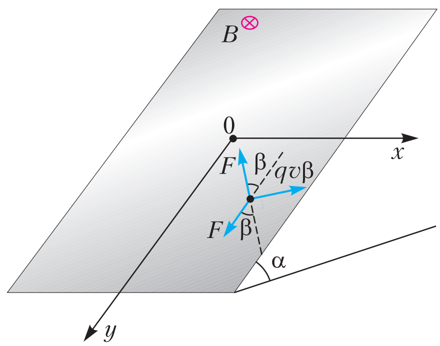
Отсюда оцениваем высоту дырявого цилиндра:

$$h < \frac{8}{3} r\cdot\frac{\rho_{в}}{\rho_{св}}\cdot\frac{M_{св}}{M_{в}}\cdot\frac{3R\left(t_{в} - t_{пл}\right)}{L + 3R\left(t_{пл} - t_0\right)} \approx 7r = 28\ \text{см}.$$

А.Свинцов-Вольфрамов

Ф2544. *По бесконечно длинной наклонной плоскости шириной 2L с углом наклона к горизонту* α *движется маленькая шайба с зарядом q и массой m. Коэффициент трения шайбы о наклонную плоскость* $\mu = \operatorname{tg}\alpha$. *Перпендикулярно плоскости действует магнитное поле с индукцией B. В начальный момент шайба находится на расстоянии L от края наклонной плоскости. Какую минимальную начальную скорость нужно сообщить шайбе, чтобы она могла слететь с этой наклонной плоскости?*

Пусть начало координат 0 совпадает с начальным положением шайбы (см. рисунок). Направим ось x горизонтально и



ось y вниз вдоль наклонной плоскости. Обозначим $F = mg\sin\alpha$. Сила трения, действующая на шайбу, равна $F_{тр} = \mu mg\cos\alpha = F$. Обозначим скорость шайбы через v и угол между вектором скорости шайбы и осью y через β. Магнитное поле действует на шайбу с силой $F_{м} = qvB$. Считая, что шайба все время находится на наклонной плоскости, найдем наибольшее удаление шайбы x_m от начала координат по оси x. Условие того, что шайба слетит с наклонной плоскости шириной L, будет тогда иметь вид $x_m > L$. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось y:

$$mv_y' = F - F\cos\beta - qBv_x$$

и в проекции на направление движения шайбы:

$$mv' = F\cos\beta - F .$$

Складывая одно уравнение с другим, получаем

$$m\left(v_y' + v'\right) = -qBv_x .$$

Это уравнение легко интегрируется:

$$m\left(v_y + v\right) = -qBx + \text{const} .$$

В начальный момент шайба находится в точке с координатой $x = 0$, и пусть начальная скорость равна v_0 и направлена под углом θ к оси y. Тогда

$$\text{const} = mv_0\left(1 + \cos\theta\right) .$$

В итоге получаем уравнение

$$v_0\left(1 + \cos\theta\right) = v_y + v + \frac{qB}{m}x .$$

Ясно, что скорость шайбы стремится к нулю при $t \to \infty$. Отсюда находим, что в точке остановки, где $v = v_y = 0$,

$$x = x_m = \frac{mv_0}{qB}\left(1 + \cos\theta\right) .$$

Очевидно, что x_m есть максимальное удаление шайбы от начала координат по оси x, так как для всех моментов времени $v_y + v \geq 0$. Следовательно, минимальная начальная скорость шайбы, при которой она слетит с наклонной плоскости, соответствует углу $\theta = 0$ и равна

$$v_{\min} = \frac{qBL}{2m} .$$

Видно, что эта скорость не зависит ни от величины ускорения свободного падения g, ни от угла наклона плоскости к горизонту α.

М.Николсон

НАМ ПИШУТ

Немного о школьной кинематике

Как известно, прямолинейное равноускоренное движение описывается простыми формулами для скорости:

$$v = v_0 + at$$

и для пройденного пути:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 .$$

Из них можно исключить время t и получить исключительно полезную формулу

$$v^2 = v_0^2 + 2as .$$

Ее использование в ряде случаев существенно упрощает решение некоторых задач. А иногда и позволяет сразу увидеть некорректность условия задачи. Вот два примера.

Задача 1. Автомобиль двигается равноускоренно ($v_0 = 0$). На первом километре его скорость возрастает на 10 м/с, на втором – на 5 м/с. Сколько времени затрачено на прохождение первого километра? Второго километра?

Задача 2. Поезд начинает движение из состояния покоя и равномерно увеличивает свою скорость. На первом километре она возросла на 10 м/с. На сколько возрастет она на втором километре?

Рассмотрим третий, «обобщенный» вариант этой задачи.

Задача 3. Определите приращение скорости материальной точки, движущейся с постоянным ускорением, на сотом километре, если на первом километре ее скорость изменилась на 10 м/с.

Для начала вычислим приращения скорости на сравнительном небольшом числе одинаковых последовательных отрезков пути длиной s каждый. Для конца первого отрезка запишем

$$v_1^2 = 2as ,$$

для конца второго отрезка –

$$v_2^2 = v_1^2 + 2as = 2v_1^2 ,$$

третьего отрезка –

$$v_3^2 = v_2^2 + 2as = 3v_1^2 ,$$

…

девятого –

$$v_9^2 = 9v_1^2 ,$$

десятого –

$$v_{10}^2 = 10v_1^2 .$$

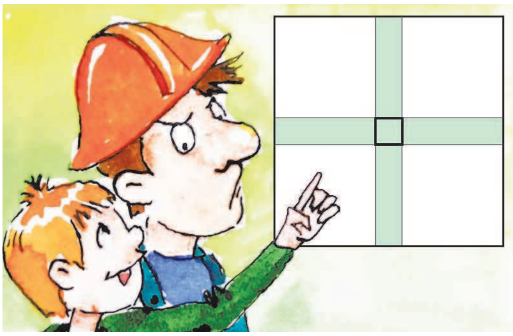
Тогда если на первом отрезке скорость возросла на

$$\Delta v_1 = v_1 ,$$

(Продолжение см. на с. 31)

Задачи

1. Прямые, параллельные сторонам квадрата, образуют квадратик, центр которого совпадает с центром исходного квадрата. Известно, что площадь креста, образованного квадратиком (см. рисунок), в



17 раз больше площади квадратика. А во сколько раз площадь исходного квадрата больше площади квадратика?

Н.Агаханов

2. Мальчики принесли в класс конфеты и раздали их девочкам. Петя сказал, что он принес ровно половину общего числа конфет. Коля сказал, что он принес ровно треть общего числа конфет и отдал свои конфеты только Маше и Тане, причем

Маше досталось на 3 конфеты больше, чем Тане. Докажите, что кто-то из ребят ошибся.

Н.Агаханов

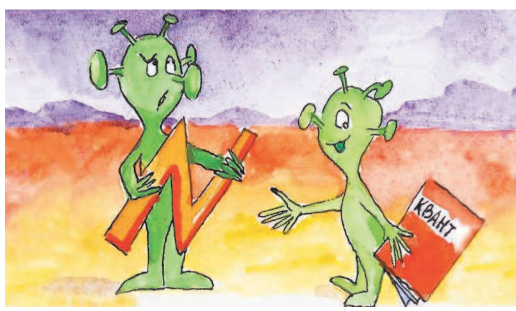
3. В комнате 10 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, а рыцари

всегда говорят правду). Первый сказал: «В этой комнате по крайней мере 1 лжец». Второй сказал: «В этой комнате по крайней мере 2 лжеца». Третий сказал: «В этой комнате по крайней мере 3 лжеца». И так далее до десятого, который сказал: «В этой комнате все лжецы». Сколько лжецов могло быть среди этих 10 человек?

О.Подлипский

4. В десятичной записи 13 чисел используется одна и та же цифра N и не используются никакие другие цифры. Может ли сумма этих чисел равняться 8900098?

Н.Агаханов, О.Подлипский



Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Эти задачи предлагались на муниципальном этапе XLV Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области.

Что такое теплопроводность

С.ДВОРЯНИНОВ

Вспомним одну старую задачу. Есть автобус, трамвай, троллейбус. Что здесь лишнее? Лишний тут автобус, поскольку он работает на бензине, а не на электричестве, как трамвай и троллейбус. А можно считать лишним трамвай, потому что его колеса не «обуты» в резиновые шины.

А теперь новая задача. Из трех словосочетаний – теплый осенний день, теплое море, теплая одежда – какое лишнее? Мы называем день теплым согласно показаниям термометра, измеряющего температуру воздуха. И температуру воды в море мы также измеряем. Но называя пальто или куртку теплой, мы никак не связываем это качество одежды с ее температурой. Следовательно, лишней здесь является теплая одежда.

А какая же физическая характеристика позволяет нам называть одежду теплой? Оказывается, это теплопроводность, точнее – коэффициент теплопроводности. Но – обо всем по порядку.

Наступила зима. В квартире батареи центрального отопления нагревают воздух. Почему же температура повышается только до определенного уровня? Да потому, что тепло через стены отводится наружу, на улицу. Свойство материала проводить тепло от более нагретого тела к менее нагретому называют теплопроводностью.

Рассмотрим кусок кирпичной стены площадью S и толщиной h. Пусть температура в квартире T_1, а снаружи T_2 и пусть за промежуток времени Δt через этот участок стены наружу прошло количество теплоты Q. Естественно считать, что величина Q прямо пропорциональна площади S, разности температур $T_1 - T_2$, промежутку времени Δt и обратно пропорциональна толщине h. Иными словами,

$$Q = k\frac{S(T_1 - T_2)\Delta t}{h}.$$

Коэффициент k и называется коэффициентом теплопроводности (иногда его называют просто теплопроводностью), его размерность есть

$$[k] = \frac{[Q][h]}{[S][T_1 - T_2][\Delta t]} = \frac{\text{Дж}\cdot\text{м}}{\text{м}^2\cdot\text{К}\cdot\text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}\cdot\text{К}\cdot\text{с}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}.$$

У силикатного (иногда говорят белого) кирпича $k = 0{,}810\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$. Это означает, что при разнице температур в доме и на улице в 1 градус каждую секунду через 1 квадратный метр стены, толщина которой 1 метр, проходит 0,810 джоуля тепловой энергии. Если же толщина стены 10 см, то потери тепла составят 8,1 Вт. У дерева $k = 0{,}200\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$, и потому можно сказать, что деревянный дом теплее кирпичного примерно в четыре раза.

Вспомним детский стишок:

Ох, беда, беда, беда,
Наступили холода.

На стекле горюет муха:
«Выпал снег белее пуха!
Если бы мне валенки,
Пусть подшиты, стареньки,
Да суконные штаны –
Дожила бы до весны!..»

Дело в том, что у шерстяного войлока, а значит у тех же валенок, k = 0,045 соответствующих единиц (впредь не будем выписывать полное наименование, т.е. размерность). Зимой в валенках намного теплее, чем в кожаных ботинках. Конечно, валенки ноги не греют в буквальном смысле, они лишь препятствуют большим потерям тепла.

У хлопковой ваты k = 0,055. Потому испокон веков ватные халаты защищали жителей Средней Азии от нестерпимой летней жары. Температура тела человека 36,7 °С, температура воздуха 40–45 °С. В этом случае ватный халат в минимальной степени способствует подводу тепла к телу, предохраняя человека от перегрева. Точно так же меховые рукавицы защищали руки кузнеца, державшего раскаленную заготовку. У минеральной ваты k = = 0,045–0,055. Ее используют для термоизоляции труб отопления.

Газы – плохие проводники тепла, у них коэффициент теплопроводности мал. Поэтому оконные рамы делают двойными: можно сказать, что тепло в доме сохраняет не стекло, а воздух между стеклами внутри рамы. По этой же причине пористые материалы обладают хорошими теплоизоляционными свойствами.

Многие птицы зимой во время сильных морозов зарываются в снег. В снегу сохраняется постоянная температура, тогда как воздух в стужу может быть очень холодным. Так спасаться от морозов да и от хищников научились глухари, тетерева, куропатки, рябчики. Птицы способны проводить под снегом без движения несколько дней, при этом их потери энергии минимальны. Да и медведи спят в берлогах, занесенных снегом, словно покрытых теплым одеялом.

Среди металлов рекордсменом по теплопроводности можно считать серебро – у него k = 430, а у железа, например, k = 92. Если столовую серебряную ложку опустить в кипящую воду, то удержать ложку в руках, пожалуй, не удастся: она очень быстро станет нестерпимо горячей.

Напоследок такая, тоже старая, задача. Два полярника вышли из палатки на лед. Падающий снег на комбинезоне одного потихоньку таял, а у другого – нет, делая человека похожим на снеговика. У кого одежда теплее: у первого или у второго?

(Начало см. на с. 28)

то на втором отрезке скорость изменится на

$$\Delta v_2 = \sqrt{2v_1^2} - \sqrt{v_1^2} = 0,41v_1,$$

а на десятом отрезке – на

$$\Delta v_{10} = \sqrt{10v_1^2} - \sqrt{9v_1^2} = 0,16v_1.$$

И это самое интересное: движение равноускоренное, а скорость растет все меньше и меньше!

Парадокс разрешается легко. В обсуждаемых задачах ускорение постоянно и равно $0,05\ \text{м/с}^2$, на прохождение первого километра требуется 200 с, на втором километре скорость увеличивается на 4,1 м/с (а не на 5 м/с, как в задаче 1!) и это происходит примерно за 82 с. Но если учесть, что на десятом километре скорость изменится на 1,6 м/с, то времени на это потребуется уже 32 с и т.д. При постоянном ускорении $0,05\ \text{м/с}^2$ в конце сотого километра скорость дошла бы до 100 м/с, но поскольку скорость на этом отрезке пути увеличивается незначительно, то столь же малое время нужно, чтобы преодолеть этот отрезок. Все-таки помним, что $\Delta v = at$, т.е. чем меньше изменение скорости, тем меньшее время для этого необходимо. Итак, на сотом километре скорость изменится на

$$\Delta v_{100} = \sqrt{100v_1^2} - \sqrt{99v_1^2} = 0,05v_1 = 0,5\ \text{м/с}.$$

Между прочим, при вычислении прироста скорости на сотом километре разумно использовать способ приближенного вычисления квадратного корня из числа 99, представив его как $100 - 1 = 10^2(1 - 0,01)$. Если в скобках прибавить и отнять малую величину $0,005^2$, то увидим там квадрат разности $(1 - 0,005)^2$.

М.Старшов

Если построенный архитектором дом развалится и при этом погибнет его владелец, архитектор подлежит смертной казни.
Закон вавилонского царя Хаммурапи

(18 в. до н.э.)

...любая линейка или призма, ширина которой больше ее толщины, окажет большее сопротивление излому, когда она поставлена на ребро, чем когда она лежит плашмя...

Галилео Галилей

...тело птицы непропорционально легче, чем у человека или у любого четвероногого..., так как кости у птиц пористые, полые с истонченной до предела стенкой.

Джованни Борелли

Именно на стеблях узнали мы целый ряд поразительных фактов, доказывающих, что они построены по всем правилам строительного искусства.

Климент Тимирязев

Хотя от древних остались гигантские по размерам и изумительные по красоте и пропорциональности здания и сооружения, но совершенно не известно, каким образом они разрабатывали проекты этих сооружений...

Алексей Крылов

...знание, широкое, полное знание физики для инженера не роскошь, а необходимость...

Леонид Мандельштам

А так ли хорошо знакомы вам физика+техника?

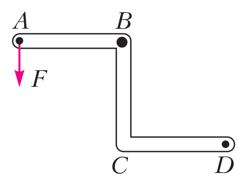
Одна из самых востребованных сегодня профессий – инженер. Причем инженер инновационный, специалист особой формации, вооруженный знаниями XXI века, разбирающийся в новой технике и создающий технику завтрашнего дня. Что необходимо для его выучки, что он должен получить в школе? Конечно, прежде всего – базовую подготовку по точным наукам, где, естественно, не последнее место занимает физика. Вот о связи этой науки с техникой и пойдет речь в ближайших выпусках «Калейдоскопа». Наивно думать, что нам удастся затронуть хотя бы малую часть огромного и разнообразного мира их контактов. Но как раз школьный курс физики подсказывает, на что именно стоит обратить внимание, какие темы дают возможность выбрать интересные и полезные сюжеты, отражающие их взаимодействие. Сейчас мы сосредоточимся на СТРОИТЕЛЬСТВЕ – одной из древнейших областей технической деятельности человека.

Разумеется, явное влияние науки на зодчество стало заметным лишь в последние несколько веков. До этого тысячелетиями люди накапливали знания, развивали техническую сметку и проявляли изобретательность, опираясь на опыт предков и собственную интуицию. Однако нам, даже получившим доступ к гигантским объемам современной информации, не стоит пренебрегать этим «золотым фондом». Ведь зачастую мы только удивляемся тому, насколько и сегодня работоспособны давнишние технические находки. Например, простые механизмы или инструменты для обустройства и ремонта наших жилищ.

Вопросы и задачи

1. Почему подъемный кран не опрокидывается в сторону поднимаемого груза? Почему без груза кран не опрокидывается в сторону противовеса?

2. Рычаг изогнут так, как показано на рисунке. Ось рычага находится в точке B, $AB = BC = CD$. Перпендикулярно плечу AB приложена сила F. Какую минимальную силу, нужно приложить в точке D, чтобы рычаг был в равновесии? Массой рычага пренебречь.



3. Рабочие иногда применяют неподвижный блок, поднимая сами себя по веревке. Получается ли при этом выигрыш в силе?

4. Предложите вариант соединения идеальных подвижных и неподвижных блоков, чтобы удерживать груз массой 40 кг силой 50 Н.

5. Можно ли забить гвоздь в дерево легкими постукиваниями молотка?

6. Почему при вбивании гвоздя в деревянную доску его шляпка нагревается слабо, а когда гвоздь уже вбит, то достаточно нескольких ударов, чтобы сильно нагреть шляпку?

7. Почему стенки шлюзов, плотин, резервуаров для хранения топлива делают более толстыми в нижней части?

8. Известные с глубокой древности арочные конструкции до сих пор активно используются в строительстве. В чем их достоинство?

9. Спичку или соломинку довольно трудно разорвать, растягивая их вдоль оси, и очень легко сломать, изогнув их. Почему?

10. Каковы конструктивные особенности стебля злака и трубы? Какие они дают преимущества?

11. Прав ли Галилей (см. эпиграф), или когда и почему доска выдержит большую нагрузку: если ее положить плашмя или на ребро?

12. Для чего в строительстве используют такие пористые материалы, как пенопласт, поролон, керамзит, а также кирпичи с внутренними пустотами?

13. Почему фундаменты зданий должны быть отделены от стен слоем водонепроницаемой изоляции?

14. Подземные кабели, по которым подается электричество в жилые дома, не разрешают прокладывать вблизи газовых, водопроводных и теплофикационных труб. С чем это связано?

Микроопыт

Положите тетрадный листок краями на две стопки книг. Заметьте его прогиб. Затем тот же листок сверните трубкой и обмотайте ниткой, чтобы он не развертывался, и вновь положите на книги. Как теперь он себя поведет?

Любопытно, что...

...многовековой опыт строителей позволил найти верную форму высокого сооружения. Так, уже в 18 веке до новой эры древнеегипетский жрец и зодчий Имхотеп воздвиг первую ступенчатую пирамиду в Саккаре.

...древние египтяне, как недавно было показано с помощью физических экспериментов, могли перевозить гигантские камни для пирамид, увлажняя песок. Вода связывает отдельные песчинки, образуя жесткую корку, по которой даже тяжело нагруженные полозья относительно легко передвигаются, не поднимая клубов пыли.

... в сочинении 3 века до новой эры «Механические проблемы», приписываемом Аристотелю, исследовались простые механизмы, действие которых сводилось к свойствам рычага. Использование же блоков в Ассирии датируется 7 веком до новой эры.

...по-видимому, древние строители знали об опасностях деформаций, возникающих в нагруженных колоннах, поскольку и в Египте и в Греции они возводились высотой не более девяти диаметров.

...самое раннее упоминание о подъемном кране встречается в книге римского архитектора и инженера Витрувия в 1 веке до новой эры. Кран представлял собой поддерживаемое канатами бревно с блоком на конце, через который перебрасывался прочный трос.

...быстрое развитие железнодорожного строительства в середине XIX века выдвинуло на первый план сооружение мостов. Для замены в них опасных деформаций изгиба на деформации растяжения-сжатия большепролетные мосты стали делать из относительно легких металлических стержней, соединенных системой шарниров, – из строительных ферм. Когда же в практику стал внедряться железобетон, изделия из которого работали в основном на изгиб, то с 30-х годов XX века вместо ферм вновь появились арки.

...обращение к физическим идеям, касающимся распространения волн, привело к созданию домов, «невидимых» для землетрясений. Окружая жилой квартал чередующимися цилиндрическими ямами, инженеры сумели на практике добиться рассеяния значительной доли энергии сейсмических волн.

Что читать в «Кванте» о строительстве

(публикации последних лет)

1. «Удивительная конструкция, или Рассказ о гофре» – 2013, №3, с.31;
2. «Какие бывают рычаги» – 2014, №2, с.30;
3. «Висячие мосты» – 2016, №1, с.29;
4. «Мосты и парашюты» – 2016, Приложение №2, с.58;
5. «Какие бывают опоры» – 2017, №3, с.28.

Материал подготовил А.Леонович

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач. Они рассчитаны в первую очередь на учащихся 7–9 классов, но мы будем рады участию школьников всех возрастов. Конкурс проводится совместно с журналом «Квантик».

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы. Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest

Желаем успеха!

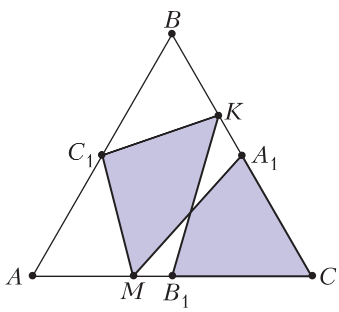
21. Можно ли на некоторые клетки шахматной доски 8×8 поставить по фишке так, чтобы количества фишек в любых двух соседних вертикалях и в любых двух соседних горизонталях были ненулевыми и отличались: а) в 5 раз; б) в 6 раз?

И.Акулич

22. Можно ли раскрасить все точки бесконечной плоскости в: а) 3; б) 4 цвета так, чтобы все цвета присутствовали, но нельзя было провести окружность, на которой есть точки всех цветов? (Кисточка, которой красится плоскость, настолько тонкая, что можно любую точку покрасить в любой цвет, не запачкав никакие другие точки.)

Е.Бакаев

23. Точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон равностороннего треугольника ABC. Также на его сторонах отмечены точки M и K, как показано на рисунке. Докажите,



что площади двух закрашенных четырехугольников равны.

В.Расторгуев

24. Известно, что уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{N}$ (где N – некоторое фиксированное натуральное число) имеет в натуральных числах x, y ровно 777 решений. Сколько решений в натуральных числах x, y имеет уравнение $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{N}$?

С.Костин

Алгоритм вычисления остатков

В.ГОЛУБЕВ

В этой статье мы расскажем о простом и эффективном алгоритме нахождения остатков от деления натурального числа на простые числа.

Чтобы мгновенно овладеть вашим вниманием, покажем решение двух примеров. В обоих примерах надо найти остаток от деления на 7 некоторого довольно большого числа. Можно, конечно, взять и поделить уголком. Однако мы знаем, что, например, если мы вычисляем остаток от деления не на 7, а на 3 или на 9, то объем вычислений можно сократить, заменив исходное число на сумму его цифр. При делении на 11 работает та же идея, но суммировать нужно с переменой знака: цифры на четных местах прибавлять, на нечетных вычитать. Оказывается, для вычисления остатка при делении на 7 можно применить похожий метод – однако цифры исходного числа перед суммированием нужно домножить на числа из специально подобранной последовательности, которую мы назовем «ключом». О том, как найти ключ и почему предлагаемый алгоритм дает правильный ответ, мы расскажем чуть позже. Пока же просто посмотрите.

Пример 1. Найдите остаток от деления на 7 числа

$$n = 385034034.$$

Решение. Берем ключ $\boxed{-2;-3;-1;\ 2;\ 3;\ 1}$ и надписываем его над цифрами числа n **справа налево** столько раз, сколько нужно:

$$\overset{2}{3}\,\overset{3}{8}\,\overset{1}{5}\,\overset{-2}{0}\,\overset{-3}{3}\,\overset{-1}{4}\,\overset{2}{0}\,\overset{3}{3}\,\overset{1}{4}\,.$$

Умножаем цифры нашего числа на соответствующие числа ключа и находим сумму полученных произведений:

$$3\cdot2+8\cdot3+5\cdot1+$$
$$+0\cdot(-2)+3\cdot(-3)+4\cdot(-1)+0\cdot2+3\cdot3+4\cdot1=$$
$$=6+24+5+0-9-4+0+9+4=35.$$

Делим 35 на 7 и находим остаток. Он равен 0, следовательно, n делится на 7.

Проверяем результат стандартным способом – делением уголком:

```
 _385034034 | 7
  35        |----------
  --         55004862
  _35
   35
   --
    _34
     28
     --
     _60
      56
      --
      _43
       42
       --
       _14
        14
        --
         0
```

Ответ: остаток равен 0.

Пример 2. Найдите остаток от деления на 7 числа

$$n = 19421948213546978.$$

Решение. Берем ключ $\boxed{-2;-3;-1;\ 2;\ 3;\ 1}$ и выстраиваем справа налево периодическую последовательность:

$$\ldots-2;-3;-1;2;3;1;\ \ -2;-3;-1;2;3;1;$$
$$-2;-3;-1;2;3;1.\ (*)$$

Надпишем эту последовательность – опять же справа налево – над цифрами нашего числа:

$$\overset{-3}{1}\,\overset{-1}{9}\,\overset{2}{4}\,\overset{3}{2}\,\overset{1}{1}\,\overset{-2}{9}\,\overset{-3}{4}\,\overset{-1}{8}\,\overset{2}{2}\,\overset{3}{1}\,\overset{1}{3}\,\overset{-2}{5}\,\overset{-3}{4}\,\overset{-1}{6}\,\overset{2}{9}\,\overset{3}{7}\,\overset{1}{8}\,.$$

Находим сумму произведений цифр числа n на соответствующие им члены последовательности $(*)$:

$$1\cdot(-3)+9\cdot(-1)+4\cdot2+$$
$$+2\cdot3+1\cdot1+9\cdot(-2)+4\cdot(-3)+8\cdot(-1)+2\cdot2+$$
$$+1\cdot3+3\cdot1+5\cdot(-2)+4\cdot(-3)+$$
$$+6\cdot(-1)+9\cdot2+7\cdot3+8\cdot1=-3-9+8+6+$$
$$+1-18-12-8+4+3+3-10-12-$$
$$-6+18+21+8=-6.$$

Остаток от деления -6 на 7 равен 1.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190203

Проверка делением уголком подтверждает правильность нашего решения.

Ответ: остаток равен 1.

Чтобы приступить к дальнейшему изложению, давайте познакомимся с признаками делимости из книги А.П.Рязановского «Математика. Подготовка к ОГЭ и ЕГЭ» (М.: Русский фонд содействия образованию и науке, 2015).

Если число $n < 1000$, то удобно использовать следующий признак делимости числа $n = 10a + b$ на 7 и 13, где число a получено отбрасыванием последней цифры числа n:

Число $n = 10a + b$ делится на 7 тогда и только тогда, когда сумма $3a + b$ делится на 7. Число $n = 10a + b$ делится на 13 тогда и только тогда, когда разность $3a - b$ делится на 13.

Доказательство каждого из указанных признаков следует из тождеств

$$n = 10a + b = 7a + (3a + b) = 13a - (3a - b).$$

Для чисел $n > 1000$ удобно использовать такой признак:

Число $n = 1000a + b$ делится на 7 (на 13) тогда и только тогда, когда разность между числом a, представляющим число n без последних трех цифр, и числом b, записанным последними тремя цифрами числа n (в том же порядке), делится на 7 (соответственно, на 13).

Доказательство основано на том, что 1001 делится на 7, на 11, на 13, и на тождестве

$$n = 1000a + b = 1001a - (a - b).$$

Пример 3. Поместите вместо x такую цифру, чтобы число $\overline{1234x5}$ делилось на 7.

Решение. Составим разность $a - b$:

$$123 - \overline{4x5} = 123 - 405 - 10x = -282 - 10x.$$

Далее запишем:

$$282 + 10x = (280 + 7x) + (2 + 3x).$$

Число в первой скобке делится на 7 при любом x. Число во второй скобке делится на 7 только при $x = 4$. Итак, искомое число 123445.

А теперь посмотрите решение по предлагаемому алгоритму с использованием «ключа»:

$$\overset{-2}{1}\,\overset{-3}{2}\,\overset{-1}{3}\,\overset{2}{4}\,\overset{3}{x}\,\overset{1}{5}\,\vdots\,7 \Leftrightarrow \big(1\cdot(-2) + 2\cdot(-3) + 3\cdot(-1) + 4\cdot 2 + x\cdot 3 + 5\cdot 1\big)\,\vdots\,7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-2 - 6 - 3 + 8 + 3x + 5)\,\vdots\,7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2 + 3x)\,\vdots\,7 \Leftrightarrow x = 4.$$

Ответ: $x = 4$.

Согласитесь, что это решение веселее и быстрее.

Одако как узнать ключ и что делать, если вы его забыли?

Восстановить ключ довольно просто. Над первой справа цифрой данного числа пишем 1. Далее 1 умножаем на 10, делим на 7 и полученный остаток 3 пишем над второй справа цифрой. То же самое делаем дальше.

3 умножаем на 10, делим на 7 и остаток 2 пишем над третьей справа цифрой.

2 умножаем на 10, делим на 7 и остаток 6 пишем над четвертой справа цифрой. Если вам когда-нибудь объясняли, что остаток 6 – это то же самое, что и остаток (−1) (поскольку $6 = 7 + (-1)$), то можете писать и (−1).

6 (или (−1)) умножаем на 10, делим на 7 и остаток 4 (или (−3)) пишем над пятой справа цифрой.

4 (или (−3)) умножаем на 10, делим на 7 и остаток 5 (или (−2)) пишем над шестой справа цифрой.

5 (или (−2) умножаем на 10, делим на 7 и остаток 1 пишем над седьмой справа цифрой.

Круг замкнулся.

Вы прекрасно знаете, что при делении на 7 получается ровно 6 ненулевых остатков. Именно поэтому ключ уложился в 6 чисел.

Наконец, продемонстрируем читателю, каким образом возник обсуждаемый в статье алгоритм, на примере определения остатка от деления на 13 двенадцатизначного числа.

Во-первых, вычислим остатки от деления на 13 степеней числа 10:

$$10^1 = 13 + (-3);$$
$$10^2 = 13\cdot K_2 + (-4);$$
$$10^3 = 13\cdot K_3 + (-1);$$
$$10^4 = 13\cdot K_4 + 3;$$
$$10^5 = 13\cdot K_5 + 4;$$
$$10^6 = 13\cdot K_6 + 1;$$
$$10^7 = 13\cdot K_7 + (-3);$$
$$10^8 = 13\cdot K_8 + (-4);$$
$$10^9 = 13\cdot K_9 + (-1);$$
$$10^{10} = 13\cdot K_{10} + 3;$$

$$10^{11} = 13 \cdot K_{11} + 4;$$
$$10^{12} = 13 \cdot K_{12} + 1.$$

Мы видим, что эти остатки образуют повторяющиеся числа. Это и есть ключ

Во-вторых, для двенадцатизначного числа имеем следующие тождества:

$$n = \overline{a_{11}a_{10}a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0} =$$
$$= a_{11} \cdot 10^{11} + a_{10} \cdot 10^{10} + a_9 \cdot 10^9 + a_8 \cdot 10^8 +$$
$$+ a_7 \cdot 10^7 + a_6 \cdot 10^6 + a_5 \cdot 10^5 + a_4 \cdot 10^4 + a_3 \cdot 10^3 +$$
$$+ a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 = a_{11}(13 \cdot K_{11} + 4) +$$
$$+ a_{10}(13 \cdot K_{10} + 3) + a_9(13 \cdot K_9 + (-1)) +$$
$$+ a_8(13 \cdot K_8 + (-4)) + a_7(13 \cdot K_7 + (-3)) +$$
$$+ a_6(13 \cdot K_6 + 1) + a_5(13 \cdot K_5 + 4) +$$
$$+ a_4(13 \cdot K_4 + 3) + a_3(13 \cdot K_3 + (-1)) +$$
$$+ a_2(13 \cdot K_2 + (-4)) + a_1(13 + (-3)) + a_0 =$$
$$= 13(a_{11} \cdot K_{11} + a_{10} \cdot K_{10} + a_9 \cdot K_9 +$$
$$+ a_8 \cdot K_8 + a_7 \cdot K_7 + a_6 \cdot K_6 + a_5 \cdot K_5 +$$
$$+ a_4 \cdot K_4 + a_3 \cdot K_3 + a_2 \cdot K_2 + a_1) +$$
$$+(4a_{11} + 3a_{10} - a_9 - 4a_8 - 3a_7 + a_6 + 4a_5 + 3a_4 -$$
$$- a_3 - 4a_2 - 3a_1 + a_0).$$

Первое слагаемое очевидно делится на 13. Следовательно, остаток от деления на 13 числа n равен остатку от деления на 13 второго слагаемого.

Отсюда получаем признак делимости на 13 двенадцатизначного числа:

Число $n = \overline{a_{11}a_{10}a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$ *делится на 13 тогда и только тогда, когда на 13 делится следующая сумма:*

$$4a_{11} + 3a_{10} - a_9 - 4a_8 - 3a_7 + a_6 + 4a_5 + 3a_4 -$$
$$- a_3 - 4a_2 - 3a_1 + a_0.$$

Поскольку уже 10^6 дает при делении на 13 остаток 1, далее остатки «зацикливаются», и можно получить алгоритм вычисления остатка при делении на 13 числа с произвольным количеством разрядов. Ключ этого алгоритма будет такой: $\boxed{1; 4; 3; -1; -4; -3}$. В примере для 12-значного числа ключ повторился два раза.

Изложенный в статье алгоритм обобщается до метода вычисления остатков при делении на произвольное простое число. О похожих признаках делимости более подробно рассказывалось в статье В.Абрамовича «Признаки делимости на l» («Квант» №10 за 1978 г.).

Автор выражает огромную благодарность Л.А.Емельянову, натолкнувшему его на возможность нахождения алгоритма, и С.Л.Кузнецову, который подсказал, как можно изложить материал существенно короче.

Изогональное сопряжение в четырехугольнике

А.УТКИН

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ *ИЗОГОНАЛЬНОЕ СОПРЯЖЕНИЕ* – важный инструмент в геометрии. Из недавних материалов в «Кванте» упомянем статьи [1], [2]. В этой статье мы расскажем об изогональном сопряжении в четырехугольнике и покажем, что оно может оказаться полезным при решении задач. В частности, мы изложим решение задачи М2529 из «Задачника «Кванта».

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190204

Для начала дадим определение.

Определение. Говорят, что точки P и P' (отличные от A, B, C, D) *изогонально сопряжены в четырехугольнике* $ABCD$ (или относительно четырехугольника $ABCD$), если прямые, соединяющие любую вершину четырехугольника с точками P и P', симметричны относительно соответствующей биссектрисы угла четырехугольника (т.е. AP и AP' симметричны относительно угла DAB, BP и BP' – относительно угла ABC, CP и CP' – относительно угла BCD, а DP и DP' – относительно угла CDA).

Мы видим, что изогонально сопряженные точки P и P' относительно четырехугольника $ABCD$ должны являться изогонально сопряженными и в треугольнике, образованном тремя из четырех прямых AB, BC, CD, DA. А из этого соображения вытекает, что если в четырехугольнике изогонали к AP, BP, CP относительно соответствующих углов пересеклись в одной точке Q, то и в четвертом угле, $\angle D$, прямые DP и DQ будут изогоналями.

Конечно, не для любой точки P имеется соответствующая (изогонально сопряженная) точка. Известен следующий критерий наличия изогонально сопряженной точки.

Теорема. *Пусть P – точка, лежащая внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$. Для точки P существует точка, изогонально сопряженная относительно $ABCD$, тогда и только тогда, когда*

$$\angle APB + \angle CPD = 180^\circ . \qquad (*)$$

Отложив обсуждение доказательства теоремы и некоторые замечания о ее обобщениях напоследок, сейчас мы покажем возможную схему применения теоремы. Пусть, например, перед нами следующая конструкция: внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ находятся точки P и Q такие, что $\angle BAP = \angle DAQ$, $\angle ABP = \angle CBQ$ и для точки P выполнено условие $(*)$ (рис.1). Тогда отсюда сразу следуют равенства $\angle CDP = \angle ADQ$ и $\angle DCP = \angle BCQ$, а также

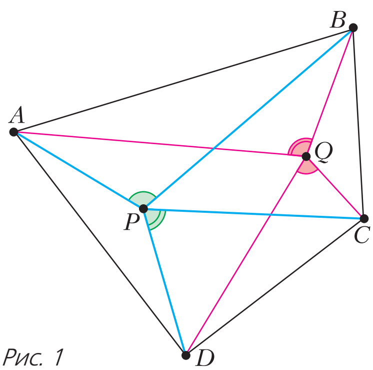


Рис. 1

$\angle AQB + \angle CQD = 180^\circ$. В самом деле, из $(*)$ следует, что для точки P есть точка P', изогонально сопряженная относительно $ABCD$. Поэтому $\angle BAP = \angle DAP'$, $\angle ABP = \angle CBP'$. Но эти равенства определяют точку единственным образом, значит, $P' = Q$. Равенства $\angle CDP = \angle ADQ$ и $\angle DCP = \angle BCQ$ следуют теперь из того, что P и Q изогонально сопряжены, а равенство $\angle AQB + \angle CQD = 180^\circ$ – это условие $(*)$ для точки Q.

Теперь перейдем к обсуждению решения задач с помощью изогонального сопряжения в четырехугольнике (конечно, задачи допускают решения и без этого соображения).

Начнем с такой задачи.

Задача 1 (М2007, Л.Емельянов). *Выпуклый четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I (рис.2). На отрезках AI и CI выбраны точки P и Q*

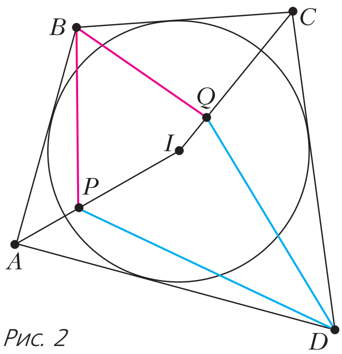


Рис. 2

соответственно так, что $\angle PBQ = \frac{1}{2}\angle ABC$. Докажите, что $\angle PDQ = \frac{1}{2}\angle ADC$.

Решение. Из условия следует, что $\angle PBQ = \angle IBC$, а для решения достаточно доказать, что $\angle PDQ = \angle IDC$.

Для описанного четырехугольника $ABCD$ выполнено равенство $\angle AIB + \angle CID = 180^\circ$ или $\angle PIB + \angle CID = 180^\circ$. Последнее равенство означает, что точка I имеет изогонально сопряженную точку относительно четырехугольника $BCDP$. А равенства $\angle PBQ = \angle CBI$ и $\angle BCQ = \angle DCI$ означают, что эта точка – Q. Отсюда получаем *изогональность* точек I и Q относительно угла PCD, т.е. $\angle PDQ = \angle IDC$, что и требуется.

Упражнение 1 (И.Шарыгин). В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D. Окружности с центрами J_1 и J_2 вписаны в треугольники ABD и ACD. Пусть M – точка касания вписанной окружности ABC со стороной BC. Докажите, что тогда $\angle J_1MJ_2 = 90^\circ$.

Указание. Фактически это частный (вырожденный) случай задачи 1.

Задача 1 уже обсуждалась ранее – например, в статье [3]. Оказывается, она естественно связана с разными конструкциями, в которых участвуют окружности и касательные. И не случайно способ рассуждений, похожий на наше решение этой задачи, поможет нам в решении следующей задачи.

Задача 2 (М2529, А.Уткин). *Дан описанный четырехугольник $ABCD$. На стороне BC выбраны точки M и N так, что N лежит между B и M (рис.3). В треугольники MNX, ADX, ABM и DCN вписаны*

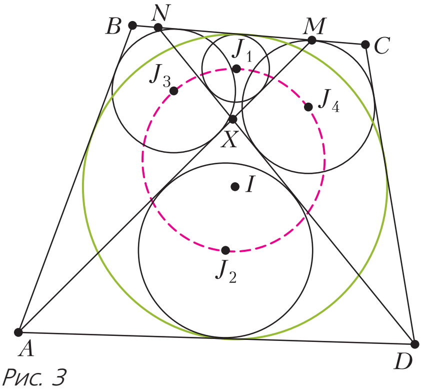


Рис. 3

окружности с центрами J_1, J_2, J_3 и J_4 соответственно. Докажите, что их центры лежат на одной окружности.

Решение. Для решения задачи достаточно установить, что $\angle J_3J_1J_4 + \angle J_3J_2J_4 = 180°$. Заметим, что поскольку MJ_1 и NJ_1 – биссектрисы треугольника MXN, то J_1J_3 и J_1J_4 – биссектрисы углов M и N,

$$\angle J_3J_1J_4 = \angle MJ_1N = 90° + \frac{1}{2}\angle MXN.$$

Из треугольника AXD получаем, что

$$\angle AJ_2D = 90° + \frac{1}{2}\angle AXD = 90° + \frac{1}{2}\angle MXN = \angle J_3J_1J_4 .$$

Таким образом, нам достаточно понять, что $\angle AJ_2D + \angle J_3J_2J_4 = 180°$, или, иными словами, что точка J_2 имеет изогонально сопряженную точку относительно четырехугольника AJ_3J_4D.

Пусть I – центр описанного четырехугольника $ABCD$. Имеем $\angle AIB + \angle CID = 180°$, или $\angle MIJ_3 + \angle J_4ID = 180°$. Последнее равенство означает, что точка I имеет изогонально сопряженную точку относительно четырехугольника AJ_3J_4D. Далее,

$$\angle J_2AD = \frac{1}{2}\angle MAD = \frac{1}{2}\angle BAD - \frac{1}{2}\angle BAM = \angle BAI - \angle BAJ_3 = \angle IAJ_3 .$$

Аналогично устанавливаем равенство $\angle J_2DA = \angle IDJ_4$. Значит, изогонально сопряженная точка для точки I относительно четырехугольника AJ_3J_4D – это точка J_2 и, наоборот, для J_2 нашлась искомая изогонально сопряженная точка относительно четырехугольника AJ_3J_4D – точка I.

Решим еще одну популярную задачу нашим методом.

Задача 3. *Выпуклый четырехугольник разрезан на девять выпуклых четырехугольников двумя прямыми, соединяющими AB и CD, и двумя прямыми, соединяющими BC и AD (рис.4). Угловые и центральный четырехугольники описанные. Докажите, что исходный четырехугольник описанный.*

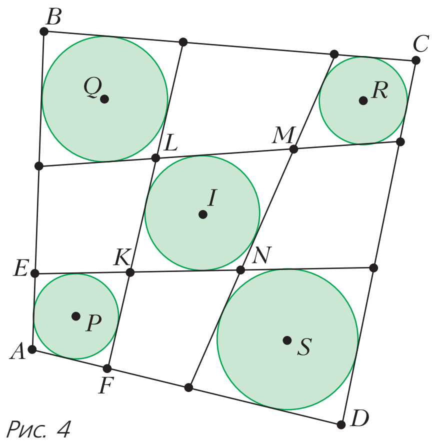


Рис. 4

Решение. Рассмотрим четырехугольник $PQRS$ с вершинами в центрах окружностей. Пусть I – центр окружности, вписанной в центральный четырехугольник $KLMN$. Точки P, K, I лежат на одной прямой – биссектрисе угла LKN, то же верно для аналогичных троек точек. Имеем

$$\angle PIQ + \angle RIS = \angle KIL + \angle MIN = 180° .$$

Значит, у точки I имеется изогонально сопряженная точка относительно четырехугольника $PQRS$. Покажем, что в четырехугольнике $PQRS$ изогонали к прямым PKI, QLI, RMI, SNI – это прямые AP, BQ, CR, DS, т.е. биссектрисы углов $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$. Отсюда последует, что эти биссектрисы пересекаются в одной точке (изогональной точке I относительно $PQRS$), что нам и нужно для доказательства описанности четырехугольника $ABCD$.

Покажем, например, что $\angle QPK = 180° - \angle SPA$ (это будет означать, что PK и PA изогональны относительно угла QPS). Пусть U – точка пересечения AD и KN, а V – точка пересечения AB и KL. Используя то, что PQ – биссектриса угла между прямыми AE и KF, а PS – биссектриса угла между прямыми AF и KE, сделаем нужный подсчет углов:

$$\angle KPS = \frac{1}{2}\angle(AD, KN) + \frac{1}{2}\angle UKF = 90° - \frac{1}{2}\angle AFK,$$

$$\angle APQ = \angle PAV + \angle AVP = \left(180° - \frac{1}{2}\angle EAF\right) + \frac{1}{2}\angle(AB, KL) = 180° - \frac{1}{2}\angle AFV = 90° + \frac{1}{2}\angle AFK.$$

Таким образом, $\angle APQ + \angle SPK = 180°$, значит, AP и KP изогональны в $\angle SPQ$, что и требовалось. Мы принимали, что U лежит на луче FA, а V – на луче EA. Остальные случаи аналогичны.

Задача 3 решена. Заметим, что более «стандартное» решение задачи 3 использует «перекидывание» равных отрезков касательных (см., например, [1]). По сути, в решении задачи М2529 («Квант» №12 за 2018 г.) мы использовали вырожденный вариант задачи 3 (а точнее, утверждения, обратного к ней) – когда окружности с центрами P и S являются точками (окружностями нулевого радиуса).

Задача 3 отражает довольно общий факт. К нему можно свести и утверждение предыдущей задачи. Устремив радиусы двух окружностей к нулю, можно получить другое решение задачи 2 (рис.5).

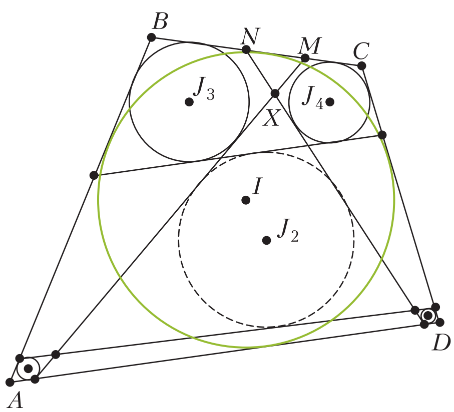


Рис. 5

Задача 4 (Олимпиада имени И.Ф.Шарыгина, 2017, А.Соколов). *Пусть в остроугольном треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности, H – ортоцентр (рис.6). Если E и F – точки пересечения срединного перпендикуляра к BH с боковыми сторонами, то OB – биссектриса $\angle EOF$.*

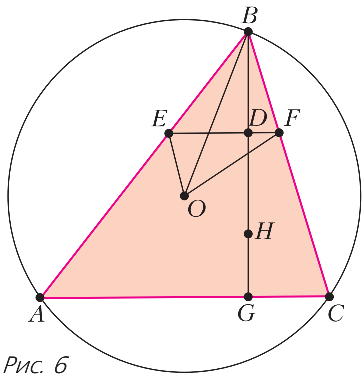


Рис. 6

Решение. Рассмотрим трапецию $AEFC$. Из симметрии треугольников BEF и HEF относительно прямой EF имеем $\angle EHF = \angle ABC$, а, как известно, $\angle AHC + \angle ABC = 180°$. Значит, для точки H в четырехугольнике $AEFC$ существует изогонально сопряженная точка, и эта точка – O (поскольку в треугольнике ABC точки O и H изогонально сопряжены). Отсюда получаем $\angle AEO = \angle FEH$. Из симметрии $\angle FEH = \angle FEB$, значит, $\angle AEO = \angle FEB$, т.е. AB – внешняя биссектриса угла OEF. Аналогично, CB – внешняя биссектриса угла OFE, поэтому B является центром вневписанной окружности треугольника EOF и поэтому OB – биссектриса $\angle EOF$.

Упражнение 2. В условиях задачи 4:

а) выразите $\angle EOF$ через $\angle ABC$;

б) докажите, что центр описанной окружности треугольника EBF лежит на прямой OB и на окружности (EOF);

в) из б) выведите другое решение задачи 1.

Задача 5 (IV Иранская геометрическая олимпиада). *Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC. Прямая CO пересекает высоту, проведенную из вершины A, в точке K (рис.7,а). Пусть P и M – середины отрезков AK и AC соответственно. Пусть прямые PO и BC пересека-*

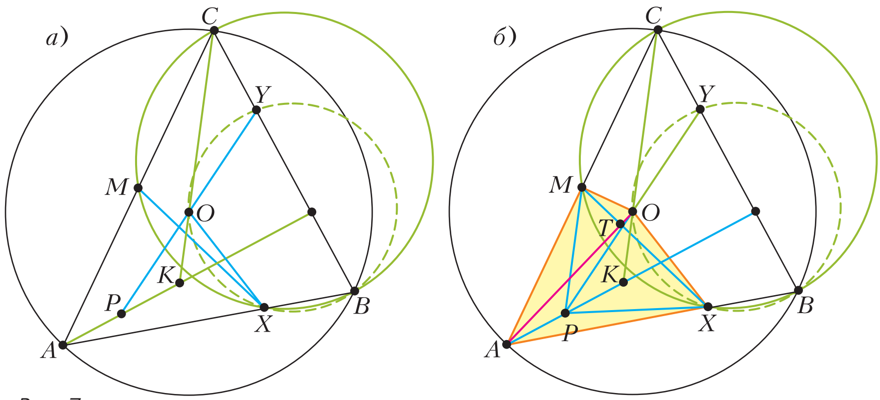


Рис. 7

ются в точке Y , а описанная окружность треугольника BCM вторично пересекает прямую AB в точке X. Докажите, что четырехугольник BXOY вписанный.

Решение. Решим задачу для остроугольного треугольника. Тогда $\angle CMX$ тупой, значит, четырехугольник $AMOX$ выпуклый. При гомотетии относительно точки A и затем симметрии относительно биссектрисы угла A, переводящей ΔABC в ΔAMX, прямая AK перейдет в изогональ AO, поэтому $MX \perp AO$.

Тогда пересечение T прямых MX и AO имеет изогонально сопряженную точку относительно четырехугольника $AMOX$ (так как $\angle ATM + \angle OTX = 90° + 90° = 180°$). При этом эта изогонально сопряженная точка – это точка P, поскольку AO и AP – изогонали в угле A, а

$$\angle OMX = 90° - \angle MOA = \angle OAM =$$

$$= \angle OAM = \angle ACO = \angle AMP \quad (CK \parallel MP).$$

Значит, A и P изогональны относительно угла MOX, т.е. $\angle MOA = \angle POX \ (= \angle ABC)$. Тогда четырехугольник $BXOY$ вписанный.

Упражнение 3. Решите задачу 5 для других конфигураций точек.

Мы увидели, как теорема может помочь в решении задач: из одних соотношений на углы мы быстро получали другие неочевидные равенства (минуя многочисленные промежуточные шаги). Как обещано, обсудим теперь саму теорему.

Доказательство теоремы. Проведем вначале доказательство в одну сторону. Предположим, что внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ (рис.8) есть пара изогонально сопряженных точек P и Q. Тогда

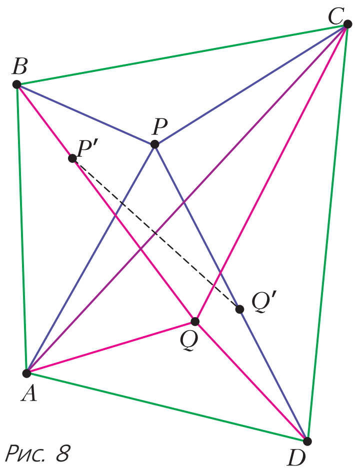


Рис. 8

докажем равенство (∗). Пусть P' – точка, изогонально сопряженная P в треугольнике ABC, Q' – точка, изогонально сопряженная Q в треугольнике ADC. Тогда $\angle P'AC = \angle BAP = \angle QAD = \angle CAQ'$. Аналогично, $\angle P'CA = \angle ACQ'$. Значит, точки P' и Q' симметричны относительно AC. Далее, P' лежит на BQ, Q' лежит на DP. В треугольнике APC точки B и Q' изогонально сопряжены, значит, BP и DP – изогонали в угле APC. Следовательно, $\angle APB + \angle CPD = 180°$, что и требовалось.

Оказывается, что другие случаи расположения точек (вырожденный четырехугольник, точки P и Q лежат вне четырехугольника или на его сторонах и т.д.) рассматриваются аналогично. Сразу доказать теорему для всех случаев можно, считая в этом доказательстве, что для любых точек X, Y, Z $\angle XYZ$ означает ориентированный угол $\angle(XY, YZ)$. Это обобщение будет полезно при доказательстве теоремы в обратную сторону.

Для доказательства в обратную сторону достаточно построить точку Q как точку пересечения изогонали AQ к прямой AP и изогонали CQ к прямой CP. Рассмотрим четырехугольник $APCQ$. По условию даны равенства $\angle PAB = \angle DAQ$ и $\angle PCB = \angle DCQ$. Тем самым точки B и D – кандидаты в пару изогонально сопряженных точек относительно $APCQ$. Заметим, что PB и PD – изогонали в угле APC, а QB и QD – изогонали в угле AQC. Поэтому B и D действительно изогонально сопряжены.

Осталось воспользоваться прямой теоремой для четырехугольника $APCQ$ и пары точек B, D. Сумма ориентированных углов $\angle(AB, BP)$ и $\angle(CB, BQ)$ равна 0, т.е. кратна 180°. Получаем, что BP и BQ – изогонали в угле B. Аналогично получается, что DP и DQ – изогонали в угле D. Окончательно, P и Q изогонально сопряжены в четырехугольнике $ABCD$. «Скользким» местом является существование точки пересечения AQ и CQ. В этом случае будем считать, что точке P изогонально сопряжена бесконечно удаленная точка.

Имеется и другой подход к доказательству, основанный на том, что изогонально сопряженные точки внутри четырехугольника $ABCD$ – это в точности фокусы вписанных в него эллипсов (рис.9), а что отрезки

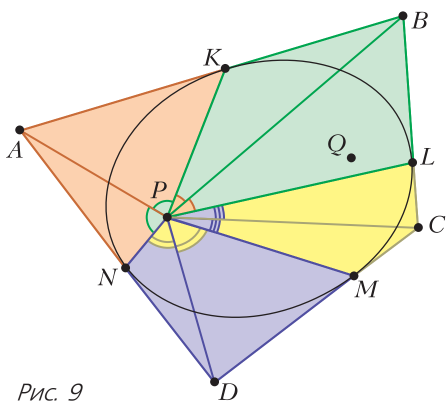


Рис. 9

касательных, проведенных из одной точки, видны из фокуса под равными углами (см., например, книгу [4]).

Условие (∗) можно переформулировать разными способами, например как равенство направленных углов APB и DPC (или, эквивалентно, как равенство направленных углов BPC и APD). По-другому: (∗) эквивалентно тому, что PA и PC изогональны относительно пары прямых PB и PD. Или так: угол APC и угол BPD имеют одну и ту же пару биссектрис (внутренняя и внешняя биссектрисы).

Изогональное сопряжение обладает в некотором смысле симметричностью. Предлагаем читателю глубже понять конструкцию изогонального сопряжения, решив следующее упражнение.

Упражнение 4. Пусть $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ – три пары точек (все точки – общего положения). Докажите такие утверждения.

а) Если C_1 и C_2 изогонально сопряжены относительно $A_1B_1A_2B_2$, то B_1, B_2 изогонально сопряжены относительно $A_1C_1A_2C_2$.

б) Пусть известно, что (A_1B_1, A_1B_2) и (A_1C_1, A_1C_2) – изогонали относительно A_1, (B_1A_1, B_1A_2) и (B_1C_1, B_1C_2) – изогонали относительно B_1, (C_1A_1, C_1A_2) и (C_1B_1, C_1B_2) – изогонали относительно C_1. Тогда (A_2B_1, A_2B_2) и (A_2C_1, A_2C_2) – изогонали относительно A_2, (B_2A_1, B_2A_2) и (B_2C_1, B_2C_2) – изогонали относительно B_2, (C_2A_1, C_2A_2) и (C_2B_1, C_2B_2) – изогонали относительно C_2.

В заключение отметим, что эта статья была написана на основе работы, с которой автор выступал на Московской математической конференции школьников в декабре 2018 года (https://www.mccme.ru/circles/oim/mmks/works2018/utkin5.pdf). В этой работе с использованием изогонального сопряжения дополнительно были получены некоторые свойства описанного четырехугольника.

Автор благодарит П.А.Кожевникова за внимание и помощь при написании статьи.

Литература

1. *П.Кожевников.* Изогонально сопряженные точки. – «Квант», 2016, №1.

2. *Д.Прокопенко.* Изогональное сопряжение и педальные треугольники. – «Квант», 2017, №9.

3. *Н.Белухов, П.Кожевников.* Описанные четырехугольники и ломаные. – «Квант», 2010, №1.

4. *А.В.Акопян, А.А.Заславский.* Геометрические свойства кривых второго порядка. – М.: МЦНМО, 2007.

Относительность движения в задачах кинематики

А.ЧЕРНОУЦАН

При решении задач механики полезно владеть умением переходить в движущиеся системы отсчета (СО). Выбор удачной СО может привести к заметному упрощению решения, сделать трудные моменты наглядными и очевидными. В некоторых задачах условие сразу содержит данные, относящиеся к различным СО, и использование формул перехода от одной СО к другой становится неизбежным. Это относится, например, к движению летательных аппаратов (самолетов) при наличии ветра или к движению плавательных средств (лодок, катеров) при наличии течения. Летчик управляет скоростью самолета относительно воздуха (в СО, связанной с движущемся воздухом): в режиме прямолинейного движения она направлена вдоль линии корпуса самолета, а ее величина определяется выбранной летчиком мощностью. Точно так же капитан управляет движением катера относительно воды. Для расчета движения самолета относительно земли (в этой СО он должен лететь в заданном направлении, от пункта отправления к пункту назначения, а от модуля скорости относительно земли зависит время полета) или катера относительно берега нужно применить закон сложения скоростей.

Закон сложения скоростей связывает между собой скорость $\vec{v}_2$ тела относительно земли (неподвижной СО), его скорость $\vec{v}_{21}$ относительно движущегося тела (т.е. относительно поступательно движущейся СО, связанной с движущимся телом 1) и скорость $\vec{v}_1$ самой СО (скорость тела 1):

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{21} + \vec{v}_1 . \qquad (1)$$

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190205

(В задачах удобно применять не численные, а «говорящие» буквенные индексы.) Отметим, что поскольку речь пока идет о *поступательно* движущихся СО, то можно говорить о скорости СО, не указывая, о какой ее точке идет речь. В случае вращающихся СО под $\vec{v}_1$ будет подразумеваться скорость той точки СО, где в данный момент находится тело (ее называют *переносной* скоростью). Аналогично записываются формулы для сложения перемещений и сложения ускорений (для поступательно движущихся СО):

$$\vec{s}_2 = \vec{s}_{21} + \vec{s}_1 , \ \vec{a}_2 = \vec{a}_{21} + \vec{a}_1 . \qquad (2)$$

Во многих задачах формулы (1), (2) удобно применять в виде, сразу выражающем относительную скорость (перемещение, ускорение) одного движущегося тела относительно другого (относительно поступательно движущейся СО, связанной с этим другим телом):

$$\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 , \ \vec{s}_{21} = \vec{s}_2 - \vec{s}_1 , \ \vec{a}_{21} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 . \qquad (3)$$

(Формулы в таком виде удобны для запоминания ввиду повторения индексов в правой и левой частях).

При решении математических задач на движение, например катера по воде, формула (1) используется уже в младших классах в виде простого правила: при движении вниз по течению скорость течения надо прибавлять, против течения – вычитать. Объясняют это правило интуитивно просто: сначала катер перемещается относительно воды, а потом вместе с водой. Результат такой же, как если бы все происходило одновременно. Но такое же рассуждение годится для объяснения и общей векторной формулы (1): сначала тело 2 перемещается относительно $СО_1$ на $\vec{v}_{21}\Delta t$ (тело 1 при этом неподвижно), а затем вместе с телом 1 и $СО_1$ – на $\vec{v}_1\Delta t$. В итоге все на своих местах – и тело 2 и $СО_1$!

В случае движения всех тел вдоль одной прямой формулы (1)–(3) удобно сразу применять в проекции на выбранную ось.

Задача 1. *Скорость мотоциклиста $v_м = 54$ км/ч, а скорость встречного ветра $v_в = 3$ км/с. Какова скорость ветра в системе отсчета, связанной с мотоциклистом? В ответе дайте модуль скорости.*

Решение. Удобно воспользоваться формулой (3):

$$\vec{v}_{вм} = \vec{v}_в - \vec{v}_м$$

и записать ее в проекции на ось x, направленную вдоль скорости мотоциклиста:

$$v_{\text{вм}x} = v_{\text{в}x} - v_{\text{м}x} = \left(-v_{\text{в}}\right) - v_{\text{м}} = -18 \text{ м/с}.$$

Если выбрать ось «по ветру», то проекция получится положительной:

$$v_{\text{вм}x} = v_{\text{в}} - \left(-v_{\text{м}}\right) = 18 \text{ м/с}.$$

Следующие несколько задач относятся к упомянутым выше задачам навигации – управлением летательными или плавательными аппаратами в движущихся средах.

Задача 2. *Катер, переправляясь через реку шириной $L = 800$ м, двигался со скоростью $v_{\text{кв}} = 4$ м/с перпендикулярно течению реки в системе отсчета, связанной с водой. На сколько будет снесен катер течением, если скорость течения реки $v_{\text{в}} = 1{,}5$ м/с?*

Решение. Если векторы скоростей не параллельны, то надо начать с векторной записи закона сложения скоростей, затем сделать рисунок, соответствующий этому векторному равенству, и только потом, опираясь на этот рисунок, проводить вычисления. В данной задаче, согласно формуле (1),

$$\vec{v}_{\text{к}} = \vec{v}_{\text{кв}} + \vec{v}_{\text{в}}.$$

Соответствующий этому равенству векторный треугольник изображен на рисунке 1 с

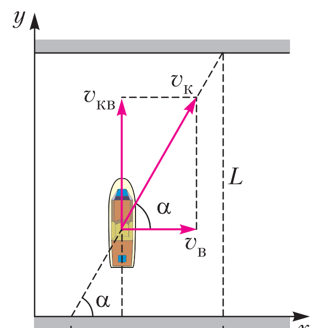


Рис. 1

учетом того, что скорость воды $\vec{v}_{\text{в}}$ параллельна берегу, а скорость катера относительно воды $\vec{v}_{\text{кв}}$ перпендикулярна берегу. Угол α, который траектория катера составляет с берегом, равен углу в треугольнике скоростей. Для искомого расстояния s получаем

$$s = L \operatorname{ctg} \alpha = L \frac{v_{\text{в}}}{v_{\text{кв}}} = 300 \text{ м}.$$

Можно было не вводить угол α и воспользоваться подобием треугольников. А еще можно, как при рассмотрении броска под углом, записать закон движения в проекциях на оси x и y. Из закона сложения скоростей следует, что $v_{\text{к}x} = v_{\text{в}}$, а $v_{\text{к}y} = v_{\text{кв}}$. Получаем два равномерных движения:

$$s = v_{\text{в}} t, \quad L = v_{\text{кв}} t.$$

Исключая t, находим s.

Задача 3. *Самолет летел на север со скоростью $v_{\text{с}1} = 48$ м/с относительно земли. С какой скоростью относительно земли будет лететь самолет, если подует западный ветер со скоростью $v_{\text{в}} = 14$ м/с?*

Решение. Пока самолет летел в отсутствие ветра, его скорости относительно земли и относительно воздуха совпадали и были направлены на север: $\vec{v}_{\text{с}1} = \vec{v}_{\text{св}}$. Что же изменилось после того, как подул западный ветер? Судя по условию задачи, летчик пока не знает, что подул ветер, и ничего не сделал для корректировки полета. Это значит, что корпус самолета все так же направлен на север и мотор работает с прежней мощностью. Это, в свою очередь, означает, что относительно воздуха самолет движется с той же скоростью $\vec{v}_{\text{св}}$, равной 48 м/с и направленной на север. А вот новую скорость самолета относительно земли найдем из закона сложения скоростей:

$$\vec{v}_{\text{с}2} = \vec{v}_{\text{св}} + \vec{v}_{\text{в}}.$$

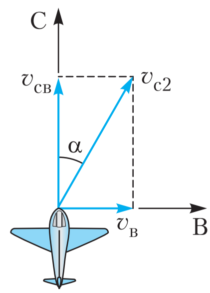


Рис. 2

Изобразив треугольник скоростей (рис.2), для величины искомой скорости получим

$$v_{\text{с}2} = \sqrt{v_{\text{св}}^2 + v_{\text{в}}^2} = 50 \text{ м/с}.$$

Нетрудно также найти угол отклонения самолета от курса на север:

$$\sin\alpha = \frac{v_{\text{в}}}{v_{\text{с}2}} = 0{,}28, \text{ и } \alpha \approx 16^\circ.$$

Задача 4. *При переправе через реку шириной $L = 80$ м надо попасть в точку, лежащую на $s = 60$ м выше по течению, чем точка старта. Лодочник управляет моторной лодкой так, что она движется точно к цели со скоростью $v_{\text{л}} = 4{,}5$ м/с относительно берега. Какова при этом скорость лодки относительно воды, если скорость течения реки $v_{\text{в}} = 2{,}1$ м/с?*

Решение. Скорость лодки относительно берега $\vec{v}_{л}$ направлена вдоль указанной в условии линии движения (рис.3), а скорость

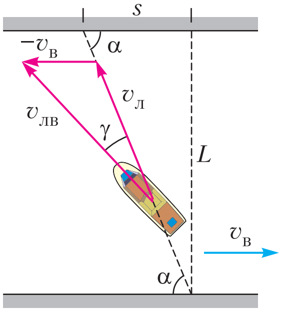


Рис. 3

воды равна скорости течения и направлена параллельно берегу. Скорость лодки, которой управляет лодочник, относительно воды выражается формулой (3):

$$\vec{v}_{лв} = \vec{v}_{л} - \vec{v}_{в} = \vec{v}_{л} + (-\vec{v}_{в}).$$

Это векторное равенство изображено на рисунке 3. Величину этой относительной скорости найдем с помощью теоремы косинусов:

$$v_{лв} = \sqrt{v_{л}^2 + v_{в}^2 - 2v_{л}v_{в}\cos(180° - \alpha)} =$$

$$= \sqrt{v_{л}^2 + v_{в}^2 + 2v_{л}v_{в}\cos\alpha},$$

где α – угол между траекторией лодки и берегом. Косинус этого угла найдем из треугольника расстояний:

$$\cos\alpha = \frac{s}{\sqrt{s^2 + L^2}} = 0{,}6.$$

Подставляя числа, получаем

$$v_{лв} = 6 \text{ м/с}.$$

Можем также найти угол γ, на который лодочник должен отклонить нос лодки от заданной траектории. Для этого придется воспользоваться теоремой синусов:

$$\frac{\sin\gamma}{v_{в}} = \frac{\sin\alpha}{v_{лв}}, \text{ откуда } \sin\gamma = 0{,}28, \text{ и } \gamma \approx 16°.$$

Задача 5. *В безветренную погоду самолет затрачивает на перелет между городами $t_1 = 6$ ч. На сколько минут увеличится время полета, если будет дуть боковой ветер со скоростью $v_{в} = 20$ м/с перпендикулярно линии полета? Скорость самолета относительно воздуха равна $v_{св} = 328$ км/ч.*

Решение. В первом случае самолет перемещается относительно земли со скоростью $\vec{v}_{св}$, т.е. расстояние между городами связано с временем полета формулой

$$s = v_{св}t_1.$$

Если дует боковой ветер, то, для того чтобы сохранить движение по прежней прямой линии, соединяющей города A и B, летчику надо отклонить нос самолета в сторону ветра (рис.4; вид сверху). Вдоль оси самолета

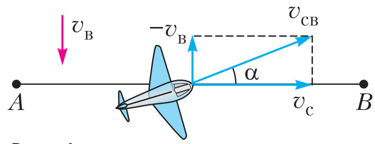


Рис. 4

будет направлена скорость самолета относительно воздуха, которая связана со скоростью самолета относительно земли и скоростью воздуха (ветра) формулой (3):

$$\vec{v}_{св} = \vec{v}_{с} - \vec{v}_{в} = \vec{v}_{с} + (-\vec{v}_{в}).$$

Из рисунка 4, на котором изображено это векторное равенство, находим величину скорости самолета относительно земли:

$$v_{с} = \sqrt{v_{св}^2 - v_{в}^2},$$

после чего получаем новое время полета:

$$t_2 = \frac{s}{v_{с}} = \frac{v_{св}t_1}{\sqrt{v_{св}^2 - v_{в}^2}} = 369 \text{ мин}.$$

Это на 9 минут больше, чем в отсутствие ветра. Напоследок поможем летчику вычислить необходимый угол α отклонения корпуса самолета от линии полета:

$$\sin\alpha = \frac{v_{в}}{v_{св}} = 0{,}22, \text{ и } \alpha = 12{,}7°.$$

Следующая задача демонстрирует, как можно с помощью закона сложения скоростей графически решать задачи, связанные с нахождением экстремума.

Задача 6. *Скорость течения реки $v_{в} = 5$ м/с, ее ширина $L = 32$ м. Переправляясь через реку на лодке, скорость которой относительно воды $v_{лв} = 4$ м/с, рулевой обеспечил наименьший возможный снос лодки течением. Чему равен этот снос?*

Решение. Расширим рамки задачи – найдем минимальный снос для различных значений скорости лодки относительно воды.

Если $v_{лв} > v_в$, то лодочник может выбрать такой курс (т.е. так направить $\vec{v}_{лв}$), что снос лодки будет равен нулю. На рисунке 5,*а* изображен закон сложения скоростей

$$\vec{v}_л = \vec{v}_{лв} + \vec{v}_в$$

для случая, когда $\vec{v}_л$ перпендикулярна ли-

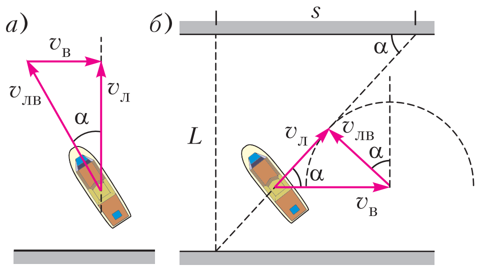


Рис. 5

нии берега. Корпус лодки должен при этом составлять с перпендикулярным направлением угол, синус которого равен

$$\sin\alpha = \frac{v_в}{v_{лв}}.$$

Если же $v_{лв} < v_в$ (как в нашем случае), то снос нельзя сделать равным нулю и надо выбрать такое направление скорости $\vec{v}_{лв}$, при котором скорость $\vec{v}_л$ будет составлять максимальный угол с линией берега. На рисунке 5,*б* изображен закон сложения скоростей для этого случая. К концу постоянного вектора $\vec{v}_в$ приставляется вектор меньшей длины $\vec{v}_{лв}$, который может принимать все возможные направления «от берега». Концы всех этих векторов описывают полуокружность радиусом $v_{лв}$, а наибольший угол α, который вектор $\vec{v}_л$ может составлять с линией берега, соответствует случаю, когда линия скорости $\vec{v}_л$ проходит по касательной к окружности. Из рисунка находим

$$\sin\alpha = \frac{v_{лв}}{v_в} = 0{,}8.$$

(Такой же угол составляет при этом $\vec{v}_{лв}$, т.е. направление корпуса лодки, с перпендикуляром к линии берега. Отметим, что корпус лодки при этом направлен перпендикулярно вектору $\vec{v}_л$, т.е. линии движения лодки.) Минимальный снос при этом равен

$$s = L\operatorname{ctg}\alpha = 24 \text{ м}.$$

В следующих двух задачах мы будем наблюдать за падением капель дождя.

Задача 7. *Когда автобус стоит на остановке, капли дождя оставляют на боковом стекле вертикальные следы, а когда он едет со скоростью $v_а = 72$ км/ч, следы капель наклонены к вертикали под углом $\alpha = 30°$. С какой скоростью падают капли дождя?*

Решение. Когда в задаче идет речь о падении капель, у учеников часто возникает вопрос: как можно говорить о скорости падения капель, когда все они падают с *ускорением g* и достигают земли с разной скоростью? Это не так. Каждая капля достигает поверхности земли уже в режиме установившегося движения, падая с такой скоростью, при которой сила сопротивления воздуха уравновешивает силу тяжести (в отсутствие ветра). Как показывает анализ, крупные капли падают с большей скоростью, чем мелкие. В задачах обычно предполагается, что все капли данного дождя имеют одинаковую массу («монодождь»), т.е. падают с одной и той же скоростью.

Первая фраза условия означает, что ветер отсутствует (об учете ветра речь пойдет в следующей задаче). В СО, связанной с движущимся автобусом, капли дождя падают под углом α к вертикали. Запишем закон сложения скоростей в форме (3):

$$\vec{v}_{ка} = \vec{v}_к - \vec{v}_а$$

и учтем (рис.6), что скорость капель направлена вертикально, а скорость автобуса – горизонтально. Получим

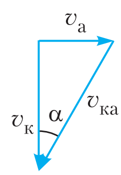


Рис. 6

$$v_к = v_а \operatorname{ctg}\alpha \approx 34 \text{ м/с}.$$

Задача 8. *При скорости ветра, равной $v_{в1} = 10$ м/с, капли дождя падают под углом $\alpha_1 = 30°$ к вертикали. При какой скорости ветра капли будут падать под углом $\alpha_2 = 60°$ к вертикали?*

Решение. В СО, движущейся со скоростью ветра, воздух неподвижен, т.е. капли дождя падают вертикально вниз. Скорость $v_{кв}$ падения капель в этой СО зависит только от размеров капель и не зависит от скорости ветра. Записав и нарисовав (рис.7) закон сложения скоростей для первого ветра:

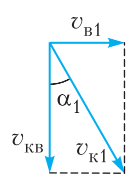


Рис. 7

$$\vec{v}_{к1} = \vec{v}_{кв} + \vec{v}_{в1},$$

придем к соотношению

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{v_{\text{в}1}}{v_{\text{кв}}}.$$

Аналогичное соотношение получается для второго ветра. Исключив $v_{\text{кв}}$, получим

$$v_{\text{в}2} = v_{\text{в}1}\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} = 30 \text{ м/с}.$$

В следующей задаче удается учесть взаимодействие мяча с движущимся воздухом с помощью перехода в другую СО.

Задача 9. *После удара футболиста мяч полетел в сторону ворот, находящихся на расстоянии $L = 32$ м, со скоростью $v_0 = 25$ м/с под углом α к горизонту таким, что $\cos\alpha = 0{,}8$. Из-за бокового ветра, дующего вдоль ворот перпендикулярно начальной скорости мяча, горизонтальное смещение мяча в плоскости ворот оказалось равным $s = 2$ м. Найдите время полета мяча до плоскости ворот. Мяч не вращается, скорость ветра $u = 10$ м/с.*

Решение. В СО земли траектория мяча – сложная пространственная кривая (рис.8,*а*; вид сверху; буква «*Ц*» обозначает центр ворот). В результате воздействия бокового

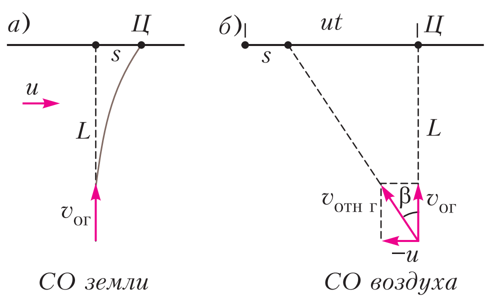


Рис. 8

ветра место пересечения мячом линии ворот смещено на s вправо, в сторону ветра. Однако в СО, связанной с воздухом, сила сопротивления направлена против скорости и движение происходит в вертикальной плоскости, направление которой задается горизонтальной составляющей начальной относительной скорости (рис.8,*б*; вид сверху)

$$\vec{v}_{\text{отн г}} = \vec{v}_{0\text{г}} - \vec{u} = \vec{v}_{0\text{г}} + (-\vec{u}).$$

Перемещаясь в этой плоскости, мяч сместится влево на

$$L\operatorname{tg}\beta = L\frac{u}{v_{0\text{г}}} = L\frac{u}{v_0\cos\alpha}.$$

Все время полета центр ворот двигался в этой СО влево со скоростью u, переместившись на расстояние ut. Однако в момент пересечения мячом линии ворот он должен находиться на s правее центра ворот (см. рис.8,*а*). Получаем

$$s = ut - \frac{Lu}{v_0\cos\alpha},$$

откуда

$$t = \frac{s}{u} + \frac{L}{v_0\cos\alpha} = 1{,}8 \text{ с}.$$

В рамках кинематики можно на равных правах использовать СО, движущиеся не только равномерно, но и ускоренно (в динамике необходимо различать инерциальные и неинерциальные СО). Проиллюстрируем это следующим примером.

Задача 10. *Скоростной лифт опускается с ускорением $a = 5$ м/с^2 относительно земли. В некоторый момент времени с потолка лифта начинает падать болт. Высота лифта $h = 2{,}5$ м. Определите время падения болта.*

Решение. Можно, конечно, решать эту задачу в СО земли. Надо записать законы движения болта и дна лифта (с учетом их скорости в момент отрыва) и приравнять их координаты (условие падения). Однако в СО лифта болт падает с нулевой начальной скоростью с ускорением

$$a_{\text{бл}} = a_{\text{б}} - a_{\text{л}} = g - a$$

(ось направлена вниз) и пролетает расстояние h. Получаем

$$h = \frac{(g-a)t^2}{2}, \text{ и } t = \sqrt{\frac{2h}{g-a}} = 1 \text{ с}.$$

Следующую задачу удобно решать переходом в СО одного из тел, которое движется с ускорением.

Задача 11. *Два тела начинают одновременно двигаться по прямой навстречу друг другу с начальными скоростями $v_{10} = 10$ м/с и $v_{20} = 20$ м/с и с постоянными ускорениями $a_1 = 2$ м/с^2 и $a_2 = 1$ м/с^2, направленными противоположно соответствующим начальным скоростям. Начальное расстояние между телами $s_0 = 200$ м. Определите минимальное расстояние между телами.*

Решение. Стандартное решение этой задачи выглядит несложно: надо записать законы движения двух тел, выразить расстояние между ними в зависимости от времени и найти минимум полученного выражения. Однако если перейти в СО одного из тел, то другое тело будет приближаться к нему с начальной скоростью $v_0 = v_{10} + v_{20}$ и с постоянным ускорением $a = a_1 + a_2$, направленным против начальной скорости. Из стандартной формулы кинематики

$$0 - v_0^2 = -2as$$

находим, что это другое тело пройдет до разворота расстояние

$$s = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{\left(v_{10} + v_{20}\right)^2}{2\left(a_1 + a_2\right)} = 150 \text{ м},$$

т.е. минимальное расстояние между телами составляет

$$l_{\min} = s_0 - s = 50 \text{ м}.$$

Следующие три задачи возвращают нас к теме графического нахождения экстремума.

Задача 12. *На ленту транспортера, ползущую со скоростью $v_{\text{л}} = 4$ м/с, сбоку сталкивают коробку. Скорость коробки сразу после попадания на ленту равна $v_{\text{к}0} = 3$ м/с и перпендикулярна скорости ленты. Какую минимальную скорость относительно земли будет иметь коробка во время движения? Сила трения достаточна велика, так что коробка не соскальзывает с ленты.*

Решение. В СО, связанной с землей, движение коробки выглядит сложно. Ясно, что начальная скорость коробки равна $v_{\text{к}}$, а конечная равна $v_{\text{л}}$. В процессе движения скорость изменяет величину и направление, поворачиваясь на $90°$. Но как при этом меняется скорость коробки – непонятно. Однако в СО, связанной с движущейся лентой транспортера, движение коробки выглядит совсем просто. По неподвижной ленте начинает двигаться коробка с начальной скоростью

$$\vec{v}_{\text{кл}0} = \vec{v}_{\text{к}0} - \vec{v}_{\text{л}}$$

и продолжает двигаться по этой прямой с уменьшающейся (за счет трения) скоростью. Чтобы найти скорость коробки относительно земли в произвольный момент времени, надо еще раз применить закон сложения скоростей (рис.9):

$$\vec{v}_{\text{к}} = \vec{v}_{\text{кл}} + \vec{v}_{\text{л}}.$$

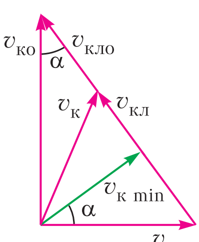


Рис. 9

Как видно из рисунка, скорость коробки принимает наименьшее значение в тот момент, когда вектор $\vec{v}_{\text{к}}$ проходит по высоте треугольника скоростей. Получаем

$$v_{\text{к min}} = v_{\text{к}0} \sin\alpha = v_{\text{к}0} \frac{v_{\text{л}}}{\sqrt{v_{\text{к}0}^2 + v_{\text{л}}^2}} = 2{,}4 \text{ м/с}.$$

Задача 13. *Автомобиль приближается к пункту А со скоростью $v_{\text{а}} = 80$ км/ч. В тот момент, когда ему оставалось проехать $s_0 = 10$ км, из пункта А в перпендикулярном направлении выезжает грузовик со скоростью $v_{\text{г}} = 60$ км/ч. Чему равно наименьшее расстояние (в км) между автомобилем и грузовиком?*

Решение. Конечно, эту задачу можно решить «в лоб» чисто алгебраически, не переходя в другую СО. Для этого надо выразить расстояние между автомобилем и грузовиком как функцию времени и исследовать полученное выражение на минимум. Проделайте эти вычисления и сравните с тем решением, которое предлагаем мы.

Когда речь идет об изучении взаимного расположения двух движущихся тел, задача, как правило, существенно упрощается при переходе в СО, связанную с одним из этих тел. (В этой СО надо рассматривать только одно движущееся тело.) Перейдем в СО автомобиля. В этой СО грузовик движется с постоянной скоростью

$$\vec{v}_{\text{га}} = \vec{v}_{\text{г}} - \vec{v}_{\text{а}} = \vec{v}_{\text{г}} + \left(-\vec{v}_{\text{а}}\right)$$

по прямой линии мимо неподвижного автомобиля (рис.10). Наименьшее расстояние между ними находится построением – оно равно длине перпендикуляра, опущенного на эту линию:

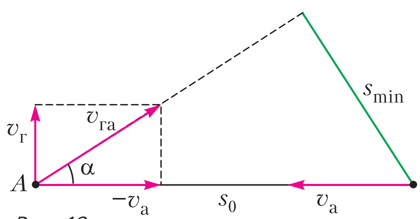


Рис. 10

$$s_{\min} = s_0 \sin\alpha = s_0 \frac{v_{\text{г}}}{v_{\text{га}}} = s_0 \frac{v_{\text{г}}}{\sqrt{v_{\text{г}}^2 + v_{\text{а}}^2}} = 6 \text{ км}.$$

Аналогичные рассуждения проходят и в случае свободного движения двух тел в поле тяжести, хотя движение каждого тела в отдельности выглядит сложнее.

Задача 14. *Два камня расположены на одной горизонтали на расстоянии* $s_0 = 42$ *м друг от друга. Один камень бросают вертикально вверх со скоростью* $v_{10} = 5$ *м/с, а второй одновременно бросают под углом* $\alpha = 30°$ *к горизонту по направлению к первому камню со скоростью* $v_{20} = 8$ *м/с. Чему равно наименьшее расстояние между камнями в процессе движения?*

Решение. Перейдем в СО первого камня. Ускорение второго камня в этой СО находим по формуле (3):

$$\vec{a}_{21} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \vec{g} - \vec{g} = 0 .$$

Значит, движение второго камня в СО первого камня происходит равномерно и прямолинейно со скоростью

$$\vec{v}_{21} = \vec{v}_{20} - \vec{v}_{10} = \vec{v}_{20} + (-\vec{v}_{10}) .$$

(Это свойство относительного движения иногда называют принципом барона Мюнхгаузена. Барон, как известно, любил кататься верхом на пушечном ядре.) Линия движения второго тела в СО первого тела построена на рисунке 11. Наименьшее расстояние между

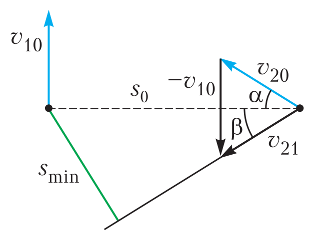


Рис. 11

камнями равно, как и в предыдущей задаче, длине перпендикуляра:

$$s_{min} = s_0 \sin\beta .$$

А вот с нахождением синуса угла β придется повозиться:

$$\sin\beta = \frac{|v_{10} - v_{20}\sin\alpha|}{\sqrt{(v_{10} - v_{20}\sin\alpha)^2 + (v_{20}\cos\alpha)^2}} .$$

Подставляя числа, получаем

$$\sin\beta = \frac{1}{7}, \text{ и } s_{min} = 6 \text{ м} .$$

Принцип барона Мюнхгаузена используется и в следующей задаче.

Задача 15. *Из некоторой точки одновременно бросают два камня: один в северном направлении под углом* $\alpha_1 = 60°$ *к горизонту со скоростью* $v_0 = 18$ *м/с, другой в южном направлении под углом* $\alpha_2 = 60°$ *к горизонту со скоростью* $v_{20} = 48$ *м/с. Найдите расстояние между камнями через* $t = 1{,}5$ *с.*

Решение. Перейдем в СО первого камня. Поскольку относительное ускорение равно нулю:

$$\vec{a}_{21} = \vec{g} - \vec{g} = 0 ,$$

то в этой СО второй камень удаляется от первого равномерно и прямолинейно со скоростью

$$\vec{v}_{21} = \vec{v}_{20} - \vec{v}_{10} ,$$

а расстояние между камнями через время t оказывается равным $s = v_{21}t$. Модуль относительной скорости найдем с помощью теоремы косинусов (против относительной скорости лежит угол $\beta = 180° - \alpha_1 - \alpha_2 = 60°$;

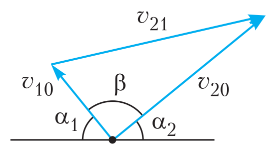


Рис. 12

рис.12):

$$v_{21} = \sqrt{v_{20}^2 + v_{10}^2 - 2v_{20}v_{10}\cos\beta} = 42 \text{ м/с} .$$

Тогда

$$s = v_{21}t = 63 \text{ м} .$$

Конечно, эту задачу можно решить «в лоб», записав координаты камней через время t и найдя расстояние между этими точками. Но в нашем подходе важно понимание, что ответ зависит не от углов α_1 и α_2, а от угла β. Если изменить условие, задав, например, $\alpha_1 = 50°$ и $\alpha_2 = 70°$, то решение «в лоб» сильно усложнится (придется повозиться с тригонометрией), а в нашем подходе сразу видно, что ответ не изменится.

Упражнения

1. Эскалатор метрополитена, двигаясь равномерно, поднимает неподвижно стоящего на нем пассажира в течение одной минуты. По неподвижному эскалатору пассажир, двигаясь равномерно, поднимается за три минуты. Сколько секунд будет подниматься пассажир по движущемуся вверх эскалатору?

2. В безветренную погоду для перелета из города *А* в город *Б* и обратно самолет затрачивает 8 часов полетного времени. На сколько минут увеличится это время, если во время полета будет дуть ветер со скоростью 20 м/с в направлении от *А* к *Б*? Скорость самолета относительно воздуха 312 км/ч.

3. Из пункта *А* по взаимно перпендикулярным дорогам одновременно выехали два автомобиля: один со скоростью 80 км/ч, другой со скоростью 60 км/ч. С какой скоростью (в км/ч) они удаляются друг от друга?

4. При скорости ветра 20 м/с скорость капель дождя 40 м/с. Какой будет скорость капель при скорости ветра 5 м/с?

5. Самолет, совершающий перелеты из города *А* в город *Б* и обратно, развивает в полете скорость 328 км/ч относительно воздуха. При боковом ветре, перпендикулярном линии полета, перелет туда и обратно занял 6 часов полетного времени. На сколько минут больше займет этот перелет, если ветер будет все время дуть в направлении от *А* к *Б*? Скорость ветра в обоих случаях 20 м/с.

6. При переправе через реку шириной 60 м надо попасть в точку, лежащую на 80 м ниже по течению, чем точка старта. Лодочник управляет моторной лодкой так, что она движется точно к цели со скоростью 8 м/с относительно берега. Какова при этом скорость лодки относительно воды, если скорость течения реки 2,8 м/с?

7. Когда пассажиру осталось дойти до двери вагона 25 м, поезд тронулся с места и стал разгоняться с ускорением 0,5 м/с^2. Пассажир побежал с постоянной скоростью. При какой минимальной скорости он догонит свой вагон?

8. Из одной точки одновременно бросают два тела: одно горизонтально со скоростью 6 м/с, другое вертикально со скоростью 8 м/с. На каком расстоянии друг от друга будут находиться тела через 2 с?

9. Два камня расположены на одной горизонтали на расстоянии 30 м друг от друга. Один камень бросают вертикально вверх со скоростью 9 м/с, а второй одновременно бросают горизонтально по направлению к первому камню со скоростью 12 м/с. Чему равно наименьшее расстояние между камнями в процессе движения?

10. Через блок перекинули нерастяжимую нить, к концам которой прикрепили два груза. В некоторый момент ось блока поднимается вертикально вверх со скоростью 2 м/с, а один из грузов опускается со скоростью 3 м/с. С какой скоростью движется в этот момент другой груз?

ОЛИМПИАДЫ

Муниципальный этап LIII Всероссийской олимпиады школьников по физике

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

7 класс

Задача 1. Забывчивый Баг

Теоретик Баг измерил массу и объем кирпича. Они оказались равны, соответственно, m = 5400 (…) и V = 1800 (…). Затем он вычислил плотность кирпича ρ = 0,000000003 (…). Однако Баг забыл указать, в каких единицах записаны эти величины. Приведя рассуждения, основанные на вашем жизненном опыте, восстановите единицы, в которых выражены масса, объем и плотность кирпича. Известно, что масса измеряется в граммах, килограммах или тоннах, объем измеряется в мм^3, см^3, дм^3 или м^3.

С.Кармазин

Задача 2. Два участка пути

На первом участке дороги автомобиль ехал со скоростью v_1 = 45 км/ч, на втором – со скоростью v_2 = 60 км/ч. Средняя скорость движения на всем пути оказалась равной $v_{ср}$ = 50 км/ч. Какой из участков длиннее и во сколько раз?

В.Слободянин

Задача 3. На карусели

Экспериментатор Глюк установил, что он совершает полный круг, проходя по краю неподвижной карусели, за 8 с. Когда карусель подключили к электрической сети, она стала совершать один оборот за 12 с. За какое время Глюк сделает один оборот относительно неподвижного наблюдателя (теоретика Бага), если пойдет против направления вращения карусели? Скорость Глюка относительно карусели в обоих экспериментах одинакова.

В.Слободянин

Задача 4. Кубики в сиропе

Семиклассник Петя поместил кубик плотностью $\rho_1 = 1{,}9\ \text{г}/\text{см}^3$ в кастрюлю, заполненную доверху сиропом, после чего аккуратно поставил ее на весы и измерил массу. Затем он повторил эксперимент с кубиком вдвое больших линейных размеров и плотностью $\rho_2 = 1200\ \text{кг}/\text{м}^3$, предварительно вынув первый кубик из кастрюли. К удивлению экспериментатора, масса кастрюли с содержимым не изменилась. Определите плотность сиропа, если известно, что во время эксперимента кубики погружались в него полностью.

М.Замятин

8 класс

Задача 1. На карусели

См. задачу 3 для 7 класса, только теперь Глюк идет по направлению вращения карасели.

Задача 2. Подвешенный шарнир

Одинаковые однородные стержни AB и BC соединены шарнирно в точке B (рис.1).

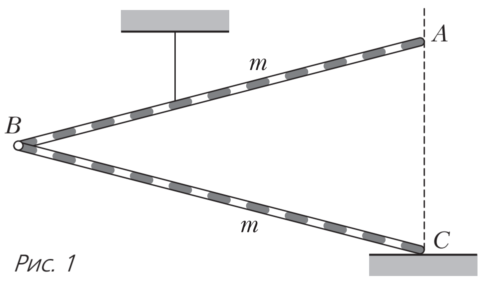


Рис. 1

Стержень AB удерживается вертикальной нитью. Стержень BC концом C опирается на гладкую горизонтальную поверхность. Точки A и C лежат на одной вертикали. В каком отношении нить делит стержень AB? Место крепления нити к стержню на рисунке показано условно.

М.Замятнин

Задача 3. Сообщающиеся сосуды (1)

В сообщающихся сосудах высотой $2h$ и площадью сечения S находится жидкость плотностью ρ (рис.2). В левом сосуде

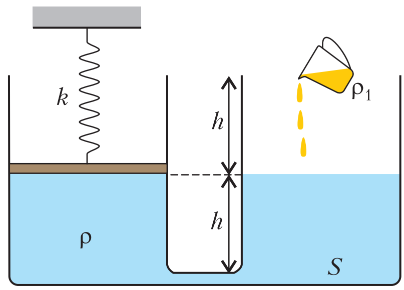


Рис. 2

жидкость закрыта невесомым поршнем, который подвешен на невесомой пружине жесткостью k. В начальный момент оба сосуда заполнены наполовину. В правый сосуд доливают столько жидкости плотностью ρ_1 ($\rho_1 < \rho$), что сосуд оказывается заполнен доверху. Определите смещение поршня. Жидкости не смешиваются.

К.Кутелев

Задача 4. Выравнивание температур

В калориметр поместили два стальных шарика с разными начальными температурами. Полученные в результате теплообмена зависимости температур шариков от времени приведены на рисунке 3. Определите

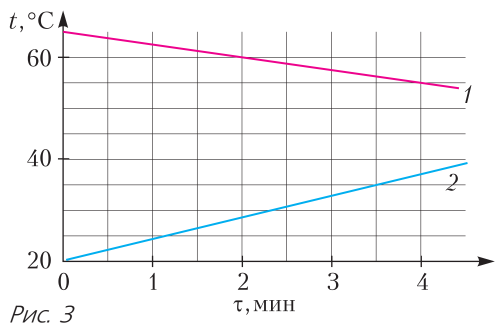


Рис. 3

конечную температуру шариков и отношение их объемов.

М.Замятнин

9 класс

Задача 1. От дуба до березы...

Автомобиль и мотоцикл (одновременно с линии старта) начинают равноускоренное движение из состояния покоя по прямой дороге. Через некоторое время автомобиль проезжает мимо дуба, разогнавшись до скорости v_1. Мотоцикл, достигнув скорости $v_2 = 10$ м/с, поравнялся с тем же дубом, когда автомобиль уже находился у березы и двигался со скоростью $v_3 = 40$ м/с. Определите, с какой скоростью v_4 мотоцикл проедет мимо березы. Чему равна скорость v_1?

М.Замятнин

Задача 2. Сообщающиеся сосуды (2)

В сообщающихся сосудах высотой $2h$ и площадью горизонтального сечения S находится жидкость плотностью ρ (см. рис.2). Справа жидкость закрыта тонким легким поршнем, а слева такой же поршень подвешен на легкой пружине жесткостью k. В начальный момент оба сосуда заполнены наполовину. В правый сосуд доливают жидкость плотностью ρ_1 до его заполнения. Определите смещения поршней.

К.Кутелев

Задача 3. Теплоотдача

Замкнутая цепь состоит из последовательно включенных идеального источника тока с напряжением U, резистора с сопротивлением r и провода, длина которого L_1 и диаметр d, изготовленного из материала с удельным сопротивлением ρ. При протекании тока по проводу он нагревается до температуры t_1. Какой длины L_2 должен быть провод из того же материала с тем же диаметром, чтобы разность между температурой провода t_2 и температурой t_0 окружающей среды стала в $n = 4$ раза меньше, чем в первом случае?

Примечание. Закон Ньютона–Рихмана: поток тепла через единицу поверхности (выражается в Вт/м^2) на границе двух сред пропорционален разности их температур, т.е. $q = \alpha\Delta t$, где α – коэффициент пропорциональности.

С.Кармазин

Задача 4. Источник тока

Идеальный источник постоянного тока поддерживает силу тока I_0 через любой подключенный к нему резистор независимо от его сопротивления. Подключенный к такому источнику вольтметр (рис.4,*а*) показывает напряжение $U_1 = 12$ В. В каком диапазоне будут изменяться показания вольтметра при смещении ползунка реостата в цепи, схема которой приведена на рисунке 4,*б*? Сопротивление вольтметра равно R.

М.Замятнин

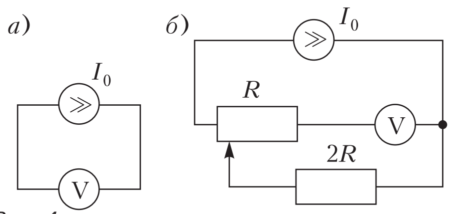


Рис. 4

Задача 5. В камере...

Вдоль квадратной камеры-обскуры со стороной a на расстоянии l от нее движется человек со скоростью v (рис.5). С какой скоростью движется изображение человека на экране камеры (ее задней стенке), если сама камера движется во встречном направлении со скоростью u?

М.Замятнин

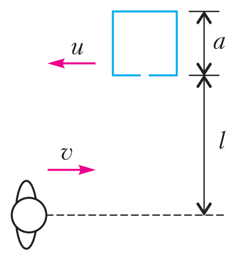


Рис. 5

10 класс

Задача 1. Правильный нагрев

Последовательная электрическая цепь состоит из идеального источника с напряжением U, резистора с сопротивлением R_0 и провода круглого сечения радиусом r и длиной L. До какой максимальной температуры может нагреться провод при правильном выборе материала, из которого он изготовлен? Температура в помещении T_0. Мощность теплоотдачи пропорциональна разности температур $\Delta T = T - T_0$, где T – температура провода, и площади его боковой поверхности. Коэффициент пропорциональности α известен. Температурным изменением сопротивления и теплоотдачей с торцов провода можно пренебречь.

С.Кармазин

Задача 2. Глюк на автомобиле

Экспериментатор Глюк ехал на автомобиле. В момент проезда мимо дома своего друга теоретика Бага Глюк решил измерить зависимость своей *средней* скорости от времени. Получившиеся результаты он свел в таблицу. Скорость изменялась монотонно. Известно, что Глюк достаточно точ-

t, мин	2	4	6	8	10
v, км/ч	56	52	49	43	39

но измеряет время, а скорость он определяет с погрешностью ± 1 км/ч. Найдите максимальное удаление экспериментатора от дома Бага. В какой момент времени это произойдет? Чему будет равна в этот момент средняя скорость перемещения? Найдите путь, пройденный экспериментатором к 20-й минуте движения.

Л.Колдунов

Задача 3. Горизонтальные силы

На наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол $\varphi = 45°$, расположено тело массой $m = 1$ кг (рис.6). Коэффициент трения между плоскостью и телом $\mu = 0{,}5$. В первом случае на тело действуют горизонтальной силой $F_1 = 5$ Н, направленной влево, во втором случае действуют горизонтальной силой $F_2 = 5$ Н, направленной вправо. Чему равно отношение α сил трения в первом и во втором случаях?

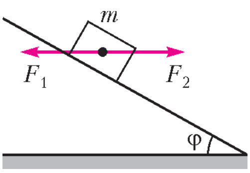


Рис. 6

Л.Колдунов

Задача 4. Сообщающиеся сосуды (3)

В двух высоких сообщающихся сосудах одинакового сечения находится небольшое количество жидкости неизвестной плотностью ρ. В левом сосуде жидкость закрыта удерживаемым пружиной поршнем. Если начать наливать жидкость в правый сосуд (рис.7,*а*), то ее уровень в нем будет расти на 10% быстрее, чем в левом. Если же в левый

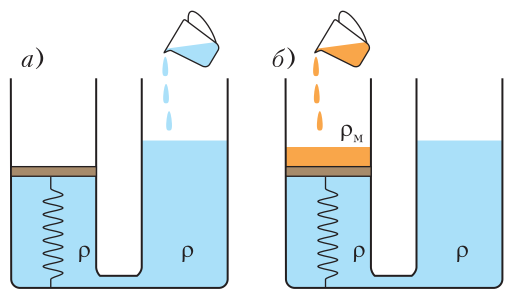


Рис. 7

сосуд на поршень наливать мед плотностью $\rho_м = 1{,}6$ г/см^3 (рис.7,*б*), то некоторое время верхняя граница меда будет оставаться на одной высоте. Определите плотность ρ неизвестной жидкости.

К.Кутелев

Задача 5. Шайба в коробке

Шайба массой m находится внутри коробки длиной l и массой $2m$ (рис.8). Шайбе сообщают скорость v. Известно, что, когда коробка ударилась стороной AB о стену, в тот же момент шайба ударилась о стенку коробки AB. При каких L это возможно?

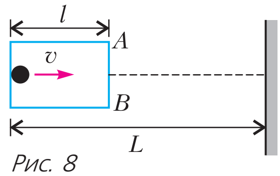


Рис. 8

Примечание. Удары шайбы о стенку коробки считайте абсолютно упругими, трения в системе нет, движение происходит в горизонтальной плоскости.

Л.Колдунов

11 класс

Задача 1. Двойная комета

В 2016 году с помощью космического телескопа Hubble астрономы обнаружили в поясе астероидов между орбитами Марса и Юпитера необычный объект 288P (рис.9):

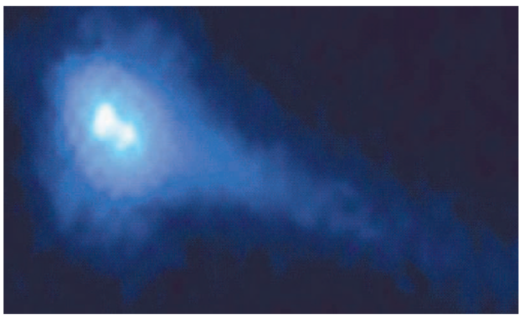


Рис. 9

два астероида примерно одинаковой массы на орбите друг у друга и при этом обладающие свойствами комет (яркое ядро и длинный хвост). Расстояние между центрами астероидов $L = 100$ км, период их обращения друг относительно друга $T = 3$ сут, средняя плотность вещества, из которого состоят астероиды, $\rho = 0{,}6$ г/см^3. Определите диаметр D каждого из астероидов, считая, что астероиды – это два шара одинаковой массы.

Примечание. Гравитационная постоянная $G \approx 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2 $\cdot$ кг$^{-2}$.

В.Слободянин

Задача 2. Два шарика и пружина

На легкой пружине закреплен небольшой по размерам шарик, как показано на рисунке

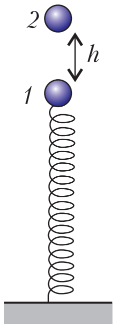


Рис. 10

10. Другой конец пружины прикреплен к горизонтальному столу. С высоты h без начальной скорости отпускают второй точно такой же шарик. Известно, что после первого центрального упругого удара следующее столкновение шариков происходит, когда первый шарик оказывается в нижней точке своей траектории. Чему равно время между первым и вторым столкновениями шариков?

И.Иоголевич

Задача 3. *RC*-мост

Из трех одинаковых резисторов сопротивлением R и двух одинаковых конденсаторов электрической емкостью C собрана электрическая цепь (мостовая схема) и через ключ подключена к идеальной батарейке (рис.11). Первоначально конденсаторы не заряжены.

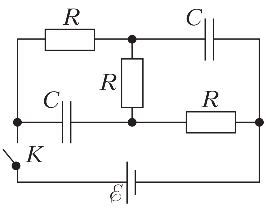


Рис. 11

1) Определите силу тока и его направление в каждом из резисторов сразу после замыкания ключа. Сделайте поясняющий рисунок.

2) Определите силу тока и его направление в каждом из резисторов по истечении продолжительного времени, прошедшего после замыкания ключа. Сделайте поясняющий рисунок.

3) Какие заряды (укажите величину и полярность) установятся на конденсаторах спустя длительное время после замыкания ключа? Знаки зарядов пластин конденсаторов укажите на рисунке.

И.Иоголевич

Задача 4. Трубка Торричелли

Летом в горной местности с резко континентальным климатом экспериментатор Глюк решил повторить опыт Торричелли и соорудил водяной барометр. Первоначально он удивился, обнаружив существенные изменения в показаниях барометра в течение дня, несмотря на то, что находящийся рядом барометр портативной метеостанции постоянно показывал давление $p_0 = 700$ мм рт.ст. Но потом он понял, что причина этих изменений связана с тем, что трубка Торричелли расположена на солнечной стороне горного склона и показания находящегося рядом с ней термометра изменяются в течение суток от 0 °С до 40 °С. Зависимость высоты столба воды в трубке h от температуры t, полученная в эксперименте, приведена в таблице.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t, °С	0	5	10	15	20	25	30	35	40
h, м	9,46	9,43	9,40	9,35	9,29	9,20	9,10	8,96	8,78

Используя эти данные, определите плотность насыщенных водяных паров $\rho_{нп}$ для 9 различных температур, заполните пустой столбец таблицы и постройте график зависимости $\rho_{нп}(t\ °\text{С})$. Плотность ртути $\rho_{рт} = 13600\ \text{кг/м}^3$.

С.Кармазин

Задача 5. В поле

В область однородного магнитного поля с индукцией B (рис.12) (правее пунктирной линии) влетает со скоростью v положительно заряженный шарик с удельным зарядом $\gamma = \frac{q}{m}$. На расстоянии b от места входа шарика в область магнитного поля расположена непроводящая стенка. Направление скорости шарика параллельно стенке и перпендикулярно линиям магнитной индукции. Найдите, при каких значениях b шарик не вылетит обратно в область, где нет магнитного поля. Удар шарика о стенку считать абсолютно упругим. Силами сопротивления и силой тяжести пренебречь.

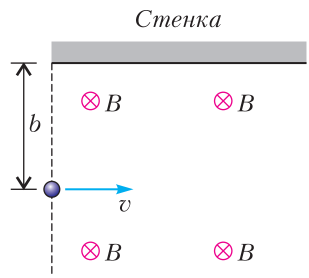


Рис. 12

Л.Колдунов

Публикацию подготовил В.Слободянин

Очередной набор в ВЗМШ

Всероссийская заочная многопредметная школа (ВЗМШ) – структурное подразделение лицея «Вторая школа» – объявляет прием школьников 5–11 классов на 2019/20 учебный год.

ВЗМШ – старейшее заочное среднее учебное заведение России – существует с 1964 года. ВЗМШ дает дополнительное образование по математике, физике, биологии, истории и обществознанию, готовит к ОГЭ, ЕГЭ, дополнительным вступительным экзаменам в вузы.

Занятия ведут опытнейшие преподаватели: доктора и кандидаты наук, авторы учебных пособий.

Обучение в ВЗМШ как индивидуальное, так и в группах «Коллективный ученик». В последнем случае при школах создаются группы под руководством учителей, работающих по программам ВЗМШ.

На индивидуальное обучение прием происходит по результатам выполнения вступительной работы. Группы «Коллективный ученик» принимаются по заявлению руководителя группы, без выполнения вступительной работы.

Срок отправки вступительной работы – *до 25 июня 2019 года.*

Ответы отправляйте любым удобным способом: электронной почтой, простым письмом или с помощью обратной связи на нашем сайте. Требуются лишь базовые знания – не беспокойтесь, если решили не все задачи.

Не забудьте представиться и указать свой адрес и возраст!

Сайт: https://vzms.ru
E-mail: 2015vzms@mail.ru
Телефоны: 8-495-939-39-30,
8-926-280-28-20
Адрес: 119234 Москва, Воробьевы горы, МГУ, ВЗМШ

ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Отделение математики

Принимаем учеников 5–11 классов.

Если вы хотите учиться индивидуально, выполните вступительную работу, условия задач которой приведены ниже.

Решения задач, с которыми удалось справиться, можно записать в обычной ученической тетради и выслать в виде скана или фотографии вместе с заявлением о приеме на адрес priem@math-vzms.org или на почтовый адрес школы.

Заявление о приеме пишется в свободной форме. Сообщите фамилию, имя, отчество, год рождения, базовое образование (нам было бы удобно прочесть: «С 1-го сентября 2019 года я буду учиться в ... классе»), полный почтовый адрес с индексом, откуда узнали о ВЗМШ (из интернета, из журналов «Квант», «Наука и жизнь», от учителя, родителей, друзей или из других источников).

Во вступительном задании рядом с порядковым номером задачи в скобках указано, ученикам какого класса (имеется в виду тот класс, в котором вы предполагаете учиться с 1 сентября 2019 года) эта задача предназначается. Вы можете, если хотите, дополнительно решать задачи, адресованные старшим классам.

Не торопитесь, а если задачи не получаются, возвращайтесь к ним несколько раз. До 25 июня времени еще достаточно. Возможно, вы не сможете решить все задачи своего класса, тогда присылайте решения тех, которые сделать удалось. Не забудьте обосновать свои решения, «голый» ответ к задаче решением не считается.

Наш сайт: http://www.math-vzms.org/
Наш телефон: +7 495-939-39-30

Задачи

1 (5–6). Джон говорит, что Джастин врет. Джастин говорит, что врет Том. Том говорит, что врут и Джастин и Джон. Исходя из того, что все трое либо всегда говорят правду, либо всегда врут, кто из них говорит правду?

2 (5–6). Поверхность куба со стороной 6 см покрасили снаружи в красный цвет. После этого его распилили на кубики со стороной 1 см. У каждого из получившихся кубиков посчитали количество красных граней. У скольких кубиков это количество не равно двум?

3 (5–7). Два квадратных ковра внесли в квадратную комнату. Сторона одного из ковров в два раза больше стороны другого. Оказалось, что если положить ковры в противоположные углы комнаты, то они покроют в два слоя участок пола площадью $9\ м^2$. А если положить ковры в соседние углы комнаты, то в два слоя окажется покрыт участок площадью $15\ м^2$. Чему равна сторона комнаты?

4 (6–7). Великан бросился в погоню за лилипутом, когда расстояние между ними было равно 8 шагам великана. Пока великан делает 1 шаг, лилипут пробегает 7 шагов, но 1 шаг великана равен 11 шагам лилипута. Сколько шагов пробежал лилипут до момента, когда великан его догнал?

5 (7–10). Шесть мальчиков и четыре девочки организовали турнир в крестики-нолики. Каждый участник сыграл с каждым по одной партии. За выигрыш присуждали 2 очка, за ничью – 1 очко, за проигрыш – 0 очков. Девочки вместе набрали 40 очков. На сколько игр, в которых выиграла девочка у мальчика, больше, чем игр, в которых выиграл мальчик у девочки?

6 (8–9). Известно, что $x+\dfrac{1}{x}$ – целое число. Докажите, что тогда $x^8+\dfrac{1}{x^8}$ – тоже целое число.

7 (8–9). В вершинах нескольких одинаковых по размеру правильных картонных треугольников в произвольном порядке написаны числа 1, 2, 3 (в каждом треугольнике встречаются все три числа). Треугольники сложили в стопку так, что их вершины совпали. Могут ли суммы чисел, написанных в каждой вершине стопки, быть равны: а) 2019; б) 2020?

8 (8–10). Пусть $\overline{abc}$ – некоторое трехзначное число, записанное цифрами a, b, c слева направо. Может ли число $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ быть полным квадратом?

9 (9–11). Квадратная площадь размером 100×100 м выложена квадратными плитами со сторонами 1×1 м четырех цветов: белого, красного, черного и серого так, что никакие две плиты одинакового цвета не соприкасаются друг с другом (не имеют ни общей стороны, ни общей вершины). Сколько может быть красных плит?

10 (9–11). Докажите, что если в треугольнике совпадают какие-нибудь две точки из трех: 1) центр вписанной окружности, 2) центр описанной окружности, 3) точка пересечения медиан, то треугольник равносторонний.

11 (10–11). В выпуклом четырехугольнике последовательно соединены середины его сторон. Какие значения может принимать отношение площади полученного четырехугольника к площади исходного?

12 (10–11). а) Сколько корней имеет уравнение $x^2-3|x|+1=0$?

б) Нарисуйте график функции $y=x^2-3|x|+1$.

Отделение физики

Обучение на отделении одно-, двух- и трехгодичное. На трехгодичный поток (курс Ф3) принимаются оканчивающие в 2019 году 8 классов средней школы, на двухгодичный (курс Ф2) – оканчивающие 9 классов и на одногодичный (курс Ф1) – 10 классов. Учащиеся, оканчивающие 10-й класс, могут пройти ускоренно всю программу за один год (курс Ф0). Для поступления на курс Ф3 нужно решить задачи 1–5 приведенной ниже вступительной работы, на курс Ф2 – задачи 4–9, на курс Ф1 – задачи 5–10, на курс Ф0 – задачи 4–10. На обложке тетради следует указать фамилию, имя и отчество, код курса (Ф0, Ф1, Ф2 или Ф3), сколько классов будет закончено к 1 сентября 2019 года, полный почтовый адрес (с индексом), адрес e-mail (если есть), телефон. Группы «Коллективный учении» принимаются на курсы Ф1, Ф2, Ф3 без вступительной работы.

E-mail: olphys@ phys.problems.ru

Интернет-сайт: http://phys.problems.ru

Задачи

1. На станцию метро ведут лестница и эскалаторы. Пассажир спускается по лестнице в полтора раза быстрее, чем поднимается. Когда он таким же образом идет по эскалаторам, то экономит в сумме на спуске и подъеме 30% времени. Однажды пассажир воспользовался эскалаторами, двигаясь против их хода. Во сколько раз он в сумме дольше спускался и поднимался, чем при движении по лестнице?

2. Брусок сливочного масла массой $m = 500$ г опустили в кастрюлю с горячим молоком. Найдите, на сколько изменится уровень жидкости в кастрюле, когда масло растает. Площадь сечения кастрюли $S = 200\ см^2$. Плотность растопленного масла $\rho_1 = 0{,}9\ г/см^3$, молока $\rho_2 = 1{,}0\ г/см^3$.

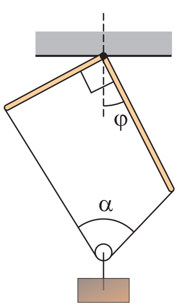
3. В бункер снегоплавильной машины загружают снег при температуре $-10\ ^\circ C$, который затем нагревают и плавят за счет теплоты, выделяющейся при сгорании топлива. Во сколько раз отличается масса чистого снега от массы снега с примесью песка (10% по массе), если на процесс плавления снега в обоих случаях ушло одинаковое время?

4. В гирлянде, состоящей из последовательно соединенных одинаковых ламп, одну из них заменили на лампу с тем же номинальным напряжением, но большей номинальной мощностью. Будет она светить сильнее или слабее прежней?

5. На плоскую сторону стеклянного полушария радиусом R с показателем преломления $n = 1{,}3$ перпендикулярно падает пучок параллельных лучей круглого сечениия того же радиуса. За полушарием на расстоянии R установлен экран, параллельный его плоской стороне. Найдите радиус светового пятна на экране. Где оно будет освещено сильнее: в центре или по краям?

6. Мишень вылетает от земли со скоростью $v = 120$ м/с, направленной под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. Через время Δt с того же места производится выстрел. Начальная скорость снаряда $u = 400$ м/с. Найдите диапазон значений Δt, при котором мишень может быть поражена в полете. Снаряд и мишень считайте материальными точками.

7. Две палочки равной длины, но разных масс m_1 и m_2 жестко соединены под прямым углом и подвешены, как показано на рисунке. К свободным концам палочек привязана нить, по которой без трения может двигаться блок с грузом. Известно, что в равновесии угол $\varphi = \mathrm{arctg}(m_1/m_2)$. Найдите угол α.



8. Груз, подвешенный на нити, совершает круговое движение с постоянной скоростью. Длину нити медленно уменьшают. Как изменяется при этом угол, который нить составляет с вертикалью? Ответ поясните.

9. В сосуде, имеющем форму куба объемом $V = 1$ л, находится гелий при температуре $T = 300$ К. Оцените количество соударений со стенками сосуда, которое в среднем совершает одна молекула гелия за промежуток времени $\Delta t = 1$ ч.

10. Два резистора подключены последовательно к источнику постоянного тока. Вольтметр сопротивлением $R = 6$ кОм показывает, что падение напряжения на участке цепи, содержащем эти резисторы, равно $U = 6$ В. Если измерять этим же вольтметром падения напряжения на каждом из резисторов, то получится $U_1 = 2$ В и $U_2 = 3$ В. Найдите сопротивления резисторов. Внутренним сопротивлением источника тока можно пренебречь.

Отделение биологии

Учащимся 8 классов необходимо решить приведенные ниже задачи 1–3 и одну из задач 4, 5, а учащимся 9–10 классов – задачи 2, 3 и две из задач 4–6.

В ответах можно использовать и факты, найденные в литературе, и собственные идеи. Просим для сведений, почерпнутых из книг, приводить ссылки на источники (для сведений, взятых из интернета, – точный адрес соответствующей страницы).

Задачи

1. Представьте себе, что вам для ваших исследований нужно содержать животных в неволе. Ваша задача – свести к минимуму ущерб животным, который они будут получать от такого содержания, и обеспечить им максимально комфортное проживание. Также ваши животные должны находиться в таких условиях, чтобы они могли размножаться.

В каких условиях вы бы содержали следующих животных: виноградная улитка, морской ангел, осьминог, аксолотль, среднеазиатская черепаха, зебровая амадина, перепелка, крыса, кролики, норки, макаки а) в условиях лабораторного вивария и б) в условиях зоопарка? Учтите, что в условиях зоопарка вы должны размещать животных таким образом, чтобы они были доступны для обзора посетителей.

2. Как вы думаете, зачем человеку нужны молочные зубы? Или это бессмысленный атавизм?

3. Какие свойства микроорганизмов можно изучать без микроскопа?

4. Как вы понимаете – за что присудили Нобелевскую премию по физиологии и медицине осенью 2015 года? Изложите своими словами суть открытия и его значение для дальнейшего развития медицины.

5. Известно, что организмы бывают одноклеточные, многоклеточные и колониальные. Приведите как можно больше различий между этими организмами. Как отличить колониальность от истинной многоклеточности?

6. Какое открытие в области биологии кажется вам наиболее ожидаемым в настоящий момент? Попробуйте объяснить, почему именно выбранное вами открытие важно, какие перспективы оно открывает и почему оно не сделано до сих пор.

Отделение истории

Вопросы

1. Сколько правительниц государства насчитывает история России?

2. Какой сборник законов из ниже перечисленных был первым, изданным массовым тиражом?

а) Судебник Ивана III.
б) Судебник Ивана IV.
в) Соборное Уложение.
г) Воинский артикул Петра I.

3. Почему в совхозе был директор, а в колхозе председатель?

Отделение обществознания

Вопросы

1. Какая республика – субъект Российской Федерации – имеет территориальную основу?

2. Какая форма правления существовала в России с апреля 1906 по март 1917 года?

а) Абсолютная монархия.
б) Дуалистическая монархия.
в) Сословно-представительная монархия.
г) Теократическая монархия.
д) Традиционная монархия.

3. В стране Ухляндии в 2016 году фирма «Грейдер», используя экскаватор и прочую технику, вырыла, во исполнение контрактных обязательств, канаву длиной в один километр и шириной в один метр, за что получила от заказчика оплату в размере 2000 рыжиков (рыжики – ухляндская валюта). В 2017 году также по заданию заказчика она эту канаву зарыла, на чем заработала 3000 рыжиков. На сколько изменился в результате этих двух операций валовой внутренний продукт Ухляндии, если учесть, что он изменяется по состоянию на конец каждого года?

а) Вырос на 2000 рыжиков.
б) Вырос на 3000 рыжиков.
в) Упал на 1000 рыжиков.
г) Не изменился.
д) Вырос на 5000 рыжиков.

Вопросы по экономике

(спецкурс в рамках курса «Обществознание»)

1. Деньги служат в качестве

а) единицы счета,
б) средства платежа,
в) средства накопления,
г) всего вышеперечисленного.

2. Прямой обмен товара на товар без использования денег в экономике называется

а) бартер,
б) безналичный расчет,
в) демпинг,
г) дефолт.

3. Пристально изучив собственную бороду, старик Хоттабыч обнаружил, что после того, как он вырывает волоски для исполнения своих желаний, они немедленно отрастают вновь. Нужно ли Хоттабычу изучать экономику?

а) Нужно, поскольку изучение экономики позволит ему получать максимальную прибыль.

б) Не нужно, поскольку для него не существует проблемы ограниченности ресурсов.

в) Нужно, поскольку тогда он сможет наилучшим образом экономить.

г) Не нужно, поскольку он очень не любит учиться.

4. Емеля сумел голыми руками поймать волшебную щуку в проруби. С той поры Емеля, который и раньше был чрезвычайно ленив, не работает. Как это сказывается на безработице в Тридевятом царстве?

а) Увеличивает структурную безработицу.
б) Увеличивает циклическую безработицу.
в) Увеличивает фрикционную безработицу.
г) Никак не сказывается на безработице.

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №1)

1. 0.

При сложении вторая цифра первого слагаемого АБВ изменилась (Д вместо Б). Это могло быть только в том случае, когда из разряда единиц при сложении была перенесена 1 в разряд десятков. Но и первая цифра при сложении изменилась (Г вместо А). Значит, при сложении из разряда десятков в разряд сотен тоже перенесена единица. Это возможно, только когда Б + 1 = = 10. Значит, Б = 9, а тогда Д = 0.

Замечание. У ребуса есть решения, например 194 + 9 = 203.

2. Например, 4, 2, 8, 6, 8, 2.

Существуют и другие примеры.

3. Можно.

Один из примеров разрезания показан на рисунке 1.

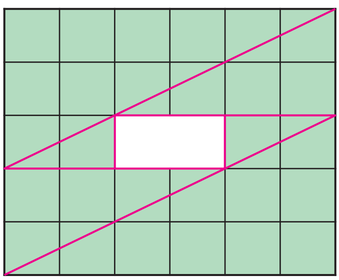


Рис. 1

4. Верно.

Например,

$$99\cdot100+100\cdot101=100(99+101)=$$
$$=100\cdot200=20000.$$

Замечание. Еще возможны только три примера:

$$54\cdot55+130\cdot131,\ 40\cdot41+135\cdot136,$$
$$89\cdot90+109\cdot110.$$

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

(см. «Квант» №12 за 2018 г.)

13. а) Нет; б) да.

Два молчуна не могут сидеть рядом, иначе противоположные им болтуны оказались бы соседями. Значит, болтуны и молчуны должны чередоваться. В пункте а) всего 40 человек – 20 молчунов и 20 болтунов. Но тогда напротив молчуна сидит тот, кто сидит через 19 человек через него. Это нечетное число, поэтому напротив него сидит молчун – противоречие. Аналогично, в пункте б) напротив каждого молчуна сидит тот, кто сидит через 18 человек через него, а это болтун. Значит, в пункте б) пример, когда болтуны и молчуны чередуются, подходит.

14. Пусть O – центр окружности (рис.2).

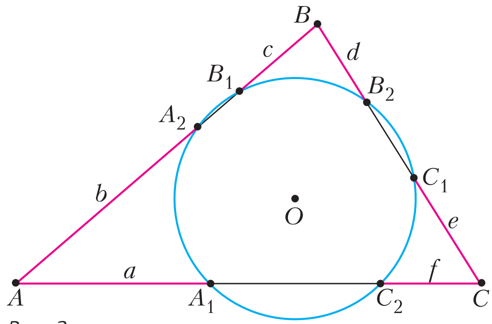


Рис. 2

а) Раз $a = b$, то $\Delta OAA_1 = \Delta OAA_2$ (по третьему признаку равенства треугольников), и раз $c = d$, то $\Delta OBB_1 = \Delta OBB_2$. Тогда O – точка пересечения биссектрис углов A и B треугольника ABC, значит, она лежит и на биссектрисе угла C. Следовательно, стороны угла C симметричны относительно CO и окружность симметрична относительно CO. Поэтому треугольники OCC_1 и OCC_2 симметричны относительно CO, а значит, и равны. Тогда $e = f$.

б) Центр O окружности лежит на серединном перпендикуляре к хорде A_2B_1, а раз $b = c$, то это и серединный перпендикуляр к AB. Аналогично, раз $d = e$, то O лежит на серединном перпендикуляре к BC. Тогда O – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам AB и BC треугольника ABC, а значит, лежит и на серединном перпендикуляре к AC. Так как A_1C_2 – это хорда окружности, то O лежит и на серединном перпендикуляре к A_1C_2. Следовательно, они совпадают и $f = a$.

15. Пусть $C = 99999999 - A$. Число C является восьмизначным, в его записи присутствует каждая из цифр 1, 2, …, 8 и $C \,\vdots\, 137$ (поскольку $99999999 \,\vdots\, 137$). Число B – наибольшее из чисел с теми же свойствами, значит, $B \ge C$, т.е. $A + B \ge$ ≥ 99999999.

Пусть $D = 99999999 - B$. Аналогично, число D является восьмизначным, в его записи присутствует каждая из цифр 1, 2, …, 8 и $D \,\vdots\, 137$. Число A – наименьшее из чисел с теми же свойствами, значит, $A \le D$, т.е. $A + B \le 99999999$.

Из полученных двух неравенств заключаем, что $A + B = 99999999 \,\vdots\, 73$.

16. Будем обозначать через C_n^k число способов выбрать из n различных предметов k предметов (о числах сочетаний в «Кванте» см., например, статью Н.Виленкина «Комбинаторика» в №1 за

1971 г.). При $0 \le k \le n$ это число натуральное, а для всех остальных целых пар n и k оно равно 0. Обозначим через $C_n^{\equiv r}$ сумму C_n^k для всех $k \equiv r \pmod 3$. Так как в этой сумме конечное количество ненулевых слагаемых, то определение корректно. Тогда разность $Q_N - P_N$, про которую в задаче требуется доказать, что она по модулю не превосходит 1, представляется как $C_N^{\equiv 2} - C_N^{\equiv 1}$. Воспользуемся формулой $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ при $n > 0$. Зафиксируем n и r и сложим все равенства такого вида для всех $k \equiv r \pmod 3$. Получим $C_n^{\equiv r} = C_{n-1}^{\equiv r-1} + C_{n-1}^{\equiv r}$. Запишем аналогичное разложение на слагаемые для $C_n^{\equiv r-1}$ и вычтем одно из другого:

$$C_n^{\equiv r} - C_n^{\equiv r-1} = \left(C_{n-1}^{\equiv r-1} + C_{n-1}^{\equiv r}\right) - \left(C_{n-1}^{\equiv r-2} + C_{n-1}^{\equiv r-1}\right) = C_{n-1}^{\equiv r} - C_{n-1}^{\equiv r-2}.$$

Так как $r-2 \equiv r+1 \pmod 3$, то полученная сумма равна

$$C_{n-1}^{\equiv r} - C_{n-1}^{\equiv r+1} = -\left(C_{n-1}^{\equiv r+1} - C_{n-1}^{\equiv r}\right).$$

Таким образом, доказано тождество $C_n^{\equiv r} - C_n^{\equiv r-1} = -\left(C_{n-1}^{\equiv r+1} - C_{n-1}^{\equiv r}\right)$. Применим его n раз:

$$C_n^{\equiv r} - C_n^{\equiv r-1} = -\left(C_{n-1}^{\equiv r+1} - C_{n-1}^{\equiv r}\right) = C_{n-2}^{\equiv r+2} - C_{n-2}^{\equiv r+1} = \ldots$$
$$\ldots = (-1)^n \left(C_0^{\equiv r+n} - C_0^{\equiv r+n-1}\right).$$

Поймем, чему может равняться разность $C_0^{\equiv t} - C_0^{\equiv t-1}$. Так как $C_0^0 = 1$ и $C_0^k = 0$ при $k \ne 0$, то $C_0^{\equiv 0} = 1$, $C_0^{\equiv 1} = 0$, $C_0^{\equiv 2} = 0$. Тогда $C_0^{\equiv t} - C_0^{\equiv t-1}$ по модулю не больше 1, а значит, $\left|C_0^{\equiv r+n} - C_0^{\equiv r+n-1}\right| \le 1$ для всех n и r, в том числе $\left|Q_N - P_N\right| = \left|C_N^{\equiv 2} - C_N^{\equiv 1}\right| \le 1$.

Задача решена. Отметим, что теперь несложно вывести формулу для $C_n^{\equiv r}$. Не будем приводить полное доказательство, лишь наметим путь. Сложив три равенства

$$C_n^{\equiv r} = C_n^{\equiv r-1} + \left(C_n^{\equiv r} - C_n^{\equiv r-1}\right),$$
$$C_n^{\equiv r} = C_n^{\equiv r+1} - \left(C_n^{\equiv r+1} - C_n^{\equiv r}\right),$$
$$C_n^{\equiv r} = C_n^{\equiv r}$$

и поделив на 3, выразим $C_n^{\equiv r}$. В сумме $C_n^{\equiv r-1}$, $C_n^{\equiv r+1}$ и $C_n^{\equiv r}$ дадут 2^n, потому что в совокупности это все способы выбрать несколько предметов из n различных. А разности вида $\left(C_n^{\equiv r} - C_n^{\equiv r-1}\right)$ для всех n и r выражаются через разности вида $\left(C_0^{\equiv t} - C_0^{\equiv t-1}\right)$, которые легко выразить через t.

Также $C_n^{\equiv r}$ можно найти с помощью комплексных чисел. Коротко решение изложено, например, на сайте problems.ru, задача 61128. Подробно эта идея обсуждается в статье А.Канунникова «Магия комплексных чисел» («Квант» №6 за 2017 г.).

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Вертикаль, проведенная через центр тяжести крана, в обоих случаях проходит через площадь его опоры.

2. Для равновесия рычага приложенная в точке D сила должна создать момент, равный $F \cdot AB$. Сила будет минимальной при максимальном плече, равном BD. Следовательно, она равна $F_{\min} = F \cdot \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{F}{\sqrt{2}}$ и направлена перпендикулярно BD.

3. Максимальный выигрыш в силе, равный двум, можно получить, используя блок так, как показано на рисунке 3 (если блок легкий и трение мало).

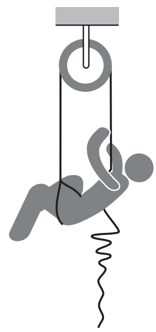


Рис. 3

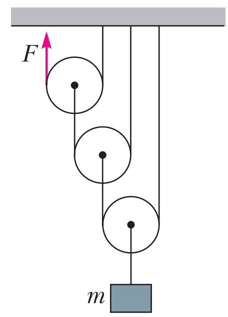


Рис. 4

4. Подвижный блок дает выигрыш в силе в два раза. Вес груза больше приложенной силы в 8 раз. Значит, можно использовать четыре подвижных блока, дающих нужный выигрыш в силе, и еще три неподвижных блока. Однако, используя минимальное число блоков, получим при том же выигрыше в силе схему, изображенную на рисунке 4.

5. Нельзя. Чтобы гвоздь входил в дерево, а не пружинил, энергия молотка должна превосходить определенную «пороговую» энергию.

6. При вбивании гвоздя в доску энергия молотка расходуется в основном на преодоление сопротивления доски. Когда же гвоздь вбит, вся кинетическая энергия молотка превращается во внутреннюю энергию шляпки гвоздя.

7. С увеличением глубины жидкости увеличивается ее давление, поэтому для повышения прочности сооружения его стенки в нижней части должны быть толще.

8. В арочных конструкциях (рис.5) вертикальные нагрузки трансформируются в боковые дав-

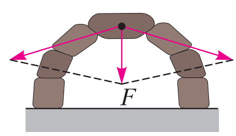


Рис. 5

ления арочной дуги, которые передаются на основание арки.

9. Прочность на растяжение спички или соломинки, как и большинства строительных элементов, многократно превышает их прочность на изгиб.

10. Обе конструкции – полые. Заполняющее сердцевину вещество увеличивало бы общую массу и повышало бы изгибающие и сжимающие силы. Полый длинный цилиндр лучше сплошного с точки зрения сопротивляемости нагрузкам.

11. Когда доска лежит на ребре, основной деформируемый материал располагается дальше сердцевины и жесткость конструкции увеличивается.

12. В порах и пустотах таких материалов содержатся газы, в том числе воздух, обладающие плохой теплопроводностью, что позволяет использовать их для теплоизоляции.

13. Для того чтобы влага не могла просачиваться из земли через фундамент в толщу стен.

14. Переменное магнитное поле кабеля наводит в трубах индукционные токи, на что тратится энергия. Также эти токи снижают срок службы труб.

Микроопыт

Во втором случае прогиб будет практически незаметен, что свидетельствует о значительно большей жесткости полой конструкции.

ЗАДАЧИ О ФОКУСНИКАХ И ТЕОРЕМЫ ХОЛЛА И ШПЕРНЕРА

1. Если множество юношей континуально, а девушек счетно, то девушек на всех юношей не хватит!

2. Пронумеруем юношей числами 0, 1, 2, ..., а девушек – числами 1, 2,... Пусть нулевой юноша, назовем его Зеро, знаком со всеми девушками, а для $i \in \mathbb{N}$ i-й юноша знаком только с i-й девушкой. Возьмем произвольную группу из k юношей. Если среди них есть Зеро, то общее число знакомых этим юношам девушек бесконечно, иначе количество знакомых девушек равно k. В любом случае на k юношей приходится не меньшее число девушек. Тем не менее, всех юношей поженить не удастся, поскольку если обеспечить судьбу всех юношей, кроме Зеро, то они «разберут» всех девушек, и Зеро, несмотря на то, что у него больше всего знакомых девушек, останется не у дел.

3. Пусть всего s деревень, а в i-й деревне m_i женихов и n_i невест ($i = 1,\dots, s$). Пусть также N – общее количество женихов (а также невест). По условию, для любого i справедливо неравенство $m_i + n_i \le N$. Возьмем произвольных k юношей. Если среди них есть представители разных деревень, то количество потенциальных невест для них равно N. Если же эти k юношей из одной деревни, например i-й, то количество потенциальных невест равно $N - n_i$. Тогда $k \le m_i \le N - n_i$. В обоих случаях выполнено условие теоремы Холла.

4. Рассмотрим двудольный граф $G(V_1,V_2)$, в котором V_1 – множество дней, V_2 – множество команд, $|V_1| = 2n-1$, $|V_2| = 2n$. Проведем ребра от каждой команды к дням, в которые она выигрывала. Требуется доказать, что в этом графе существует совершенное паросочетание из V_1 в V_2. Чтобы применить теорему Холла, нужно показать, что в течение любых k дней не менее k команд одерживали победы. Действительно, если не все $2n$ команд выигрывали в эти дни, то какая-то команда потерпела k поражений. Ее соперники – это уже k команд, побеждавших в указанные дни. Все доказано!

5–8. Примените следствие 1.

9. Добавим во вторую долю графа d новых вершин, соединив каждую из них ребрами со всеми вершинами первой доли. Для нового графа будет выполнено условие теоремы Холла, в силу чего в нем существует совершенное паросочетание. Теперь удалим из этого паросочетания «новые» ребра. Их количество не больше d.

10. Пусть V_i – множество i-элементных подмножеств n-элементного множества. Рассмотрим двудольные графы $G(V_i,V_{i+1})$ при $i < n/2$ и $G(V_i,V_{i-1})$ при $i > (n+1)/2$ (в каждом из этих графов вершины X и Y, взятые из разных долей, смежны тогда и только тогда, когда одно из них – подмножество другого). Эти графы удовлетворяют условию следствия 2, в силу чего в них существуют совершенные паросочетания. Из ребер этих паросочетаний образуются цепи в булеане n-элементного множества. Если какое-то $[n/2]$-элементное множество A не входит ни в одну из этих цепей, добавим одноэлементную цепь, состоящую из множества A. В результате получим разбиение булеана на цепи, каждая из которых содержит множество мощности $[n/2]$. Количество таких цепей равно $C_n^{[n/2]}$.

Для иллюстрации рассмотрим случай $n = 4$. На рисунке 6 выделены совершенные паросочетания в соответствующих двудольных графах.

Вот соответствующее разбиение на цепи:

1) $\varnothing \subset \{1\} \subset \{1,3\} \subset \{1,2,3\}$;
2) $\{2\} \subset \{1,2\} \subset \{1,2,4\}$;
3) $\{3\} \subset \{2,3\}$;
4) $\{4\} \subset \{1,4\} \subset \{1,3,4\}$;
5) $\{2,4\} \subset \{2,3,4\} \subset \{1,2,3,4\}$;
6) $\{3,4\}$.

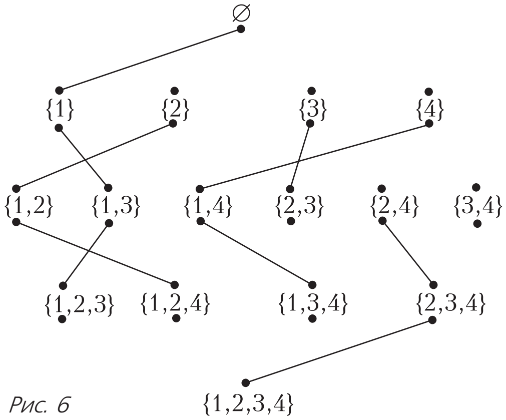


Рис. 6

11. С одной стороны, множества мощности $[n/2]$ образуют антицепь, в которой $C_n^{[n/2]}$ элементов. Сдругой стороны, любая антицепь пересекается с каждой из $C_n^{[n/2]}$ цепей, на которые разбивается булеан n-элементного множества, не более чем по одному элементу; поэтому ее длина не более $C_n^{[n/2]}$.

12. Каждый из сотрудников нас интересует лишь как знающий какие-то языки. Поэтому его можно рассматривать как подмножество множества языков, которыми владеют сотрудники фирмы. Из условия задачи следует, что сотрудники образуют антицепь в булеане множества языков. Если языков n, то должно выполняться неравенство $C_n^{[n/2]} \ge 250$. Число 10 – наименьшее n, удовлетворяющее неравенству.

13. Свяжем с каждым хоббитом множество тех вечеров, когда он ходит по гостям. Соответствующие множества должны образовывать антицепь.

14. Детектив может справиться и за 9 дней, если воспользуется теоремой Шпернера. Ему нужно добиться того, чтобы для любой пары подозреваемых A и B в какой-то день на беседу был приглашен A и не приглашен B, а в другой день, наоборот, был приглашен B и не приглашен A. Вновь идет речь об антицепи, если каждого подозреваемого отождествить с тем множеством дней, когда он приглашен на беседу с детективом.

15. Пусть M – максимальное по мощности паросочетание в графе G, а B – множество остальных вершин графа. Вершины из B попарно не смежны (иначе к паросочетанию M можно было бы добавить ребро). Рассмотрим двудольный граф $G(B,C)$, где C – множество вершин, покрытых ребрами паросочетания M. Из условия задачи следует, что к нему можно применить теорему Холла. В этом графе существует совершенное паросочетание. Если в исходном графе n вершин, а паросочетание M содержит m ребер, то, сравнивая мощности двух паросочетаний, получаем $n - 2m \le m$, откуда $m \ge n/3$, что и требовалось доказать.

ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ДВИЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ КИНЕМАТИКИ

1. $t = 45$ с.
2. $\Delta t = 27$ мин.
3. $v_{\text{уд}} = 100$ км/ч.
4. $v_{\text{к2}} = 35$ м/с.
5. $\Delta t = 9$ мин.
6. $v_{\text{лв}} = 6$ м/с.
7. $v_{\min} = 5$ м/с.
8. $l = 20$ м.
9. $l_{\min} = 18$ м.
10. $v_2 = 7$ м/с.

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП LIII ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

7 класс

1. $m = 5400$ г, $V = 1800\ \text{см}^3$, $\rho = 0{,}000000003\ \text{т}/\text{мм}^3$.

2. Первый участок длиннее в 1,5 раза.

3. $t_3 = \dfrac{t_1 t_2}{t_2 - t_1} = 24$ с. **4.** $\rho_{\text{с}} = \dfrac{8\rho_2 - \rho_1}{7} = 1{,}1\ \text{г}/\text{см}^3$.

8 класс

1. $t_3 = \dfrac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = 4{,}8$ с.

2. В отношении 1 : 2 (считая от точки B).

3. $x = h\dfrac{\rho_1 g}{2\rho g - \rho_1 g + k/S}$. **4.** $t_{\text{к}} \approx 48{,}5$ °С, $\dfrac{V_1}{V_2} \approx 1{,}7$.

9 класс

1. $v_1 = \sqrt{v_2 v_3} = 20$ м/с; $v_4 = \dfrac{v_3 v_2}{v_1} = 20$ м/с.

2. $x = \dfrac{\rho_1 g h}{2\rho g - \rho_1 g + k/S}$ при $\rho_1 < \rho + \dfrac{k}{2gS}$; $x = h$ при $\rho_1 \ge \rho + \dfrac{k}{2gS}$.

3. $L_2 = 2L_1 + \dfrac{\pi d^2 r}{4\rho}$. **4.** $\left[\dfrac{1}{2}U_1 = 6\ \text{В};\ \dfrac{2}{3}U_1 = 8\ \text{В}\right]$.

5. $v_{\text{из}} = (v + u)\dfrac{a}{l}$.

10 класс

1. Тепловое равновесие наступит при равенстве количества теплоты, выделяемого в единицу времени в проводе при прохождении по нему электрического тока, и количества теплоты, отдаваемого проводом в окружающее пространство:

$$\frac{U^2 \rho L}{\pi r^2 \left(R_0 + \dfrac{\rho L}{\pi r^2}\right)^2} = 2\pi r L \alpha \Delta T.$$

Отсюда находим

$$\Delta T = \frac{U^2 \rho r}{2\alpha\left(\pi r^2 R_0 + \rho L\right)^2}.$$

Это квадратное относительно ρ уравнение имеет только одно решение, если его дискриминант равен нулю. Окончательно находим

$$\Delta T_{\max} = \frac{U^2}{8\pi\alpha L r R_0}, \quad T_{\max} = T_0 + \frac{U^2}{8\pi\alpha L r R_0}.$$

2. Построим график зависимости средней скорости перемещения от времени (рис.7). Зависи-

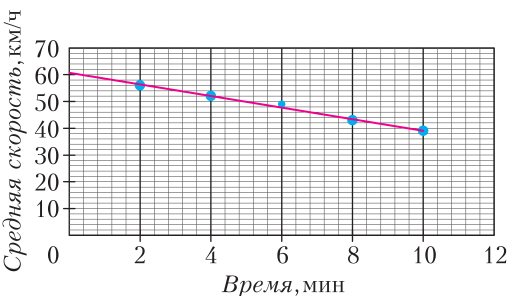


Рис. 7

мость линейная и ее можно записать в виде

$$\langle v\rangle = v_0 - \frac{v_0}{t_0} t,$$

где $v_0 = 60$ км/ч, а $t_0 = 30$ мин. Средняя скорость перемещения равна $\langle v\rangle = \frac{x}{t}$, следовательно,

$$x = v_0 t - \frac{v_0}{t_0} t^2.$$

Зависимость $x(t)$ – парабола, ветви которой направлены вниз. Вершина параболы соответствует моменту времени, когда Глюк максимально удалился от дома Бага:

$$t_{\max} = \frac{t_0}{2} = 15 \text{ мин} = \frac{1}{4} \text{ ч}.$$

Величина средней скорости в этот момент будет равна 30 км/ч, а удаление от дома теоретика Бага составит 7,5 км. Путь, который проедет Глюк к 20-й минуте движения, равен 8,3 км.

3. $F_{\text{тр}1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(mg - F_1)$, $F_{\text{тр}2} = \frac{\mu}{\sqrt{2}}(mg - F_2)$,

$$\alpha = \frac{F_{\text{тр}1}}{F_{\text{тр}2}} = \frac{1}{\mu} = 2.$$

4. Записав условие равновесия для каждого из трех случаев, найдем

$$\rho = \frac{\rho_{\text{м}}}{2{,}1} \approx 0{,}76 \text{ г/см}^3.$$

5. Вначале центр масс коробки с шайбой находится на расстоянии $l/3$ от линии старта, а в момент столкновения со стеной он будет находиться на расстояние $l/3$ левее стены. Таким образом, центру масс необходимо пройти расстояние $L - 2l/3$. Скорость центра масс $v_{\text{ц}} = v/3$. Время, за которое стенка AB доедет до стены, равно $T = \frac{3L - 2l}{v}$. Скорость движения шайбы относительно коробки не изменяется. Время между ударами $\Delta t = l/v$. Чтобы удовлетворить условию задачи, необходимо, чтобы $T = n\Delta t$, где n – любое нечетное натуральное число. Отсюда находим

$$L = \frac{2+n}{3} l.$$

11 класс

1. $D = L\left(\frac{12\pi}{\rho G T^2}\right)^{1/3} \approx 24$ км.

2. Энергия упругой деформации пружины с лежащим не ней шариком равна

$$U_1 = \frac{1}{2}k(\Delta L)^2, \text{ где } k\Delta L = mg.$$

Пусть после столкновения шариков длина пружины уменьшилась еще на L. Теперь энергия пружины равна

$$U_2 = \frac{1}{2}k(L + \Delta L)^2,$$

а изменение энергии составляет

$$\Delta U = \frac{1}{2}k(L+\Delta L)^2 - \frac{1}{2}k(\Delta L)^2 = \frac{1}{2}kL^2 + kL\Delta L.$$

Так как столкновение шариков абсолютно упругое, шарики обмениваются импульсами. Из закона сохранения энергии следует

$$mg(h + L) = \frac{1}{2}kL^2 + kL\Delta L, \text{ или } mgh = \frac{1}{2}kL^2.$$

Для пружинного маятника $\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{k}{m}$. Тогда последнее уравнение примет вид

$$gh = \frac{1}{2}\omega^2 L^2 = \frac{2\pi^2}{T^2} L^2.$$

Падение первого шарика опишем уравнением

$$L = \frac{g\tau^2}{2}, \text{ где } \tau = \frac{T}{4}.$$

Окончательно получим

$$\frac{ghT^2}{2\pi^2} = L^2 = \left(\frac{g}{2}\left(\frac{T}{4}\right)^2\right)^2, \text{ и } \tau = \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

3. Сразу после замыкания ключа напряжение на конденсаторах равно нулю. Поэтому точки, между которыми подключены конденсаторы, в начальный момент времени имеют равные потенциалы (рис.8). Сила тока, текущего через каждый из резисторов, равна $I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R}$. Направления токов указаны на рисунке 8.

Когда конденсаторы зарядятся, ток в цепи будет течь только через резисторы. Эквивалентное со-

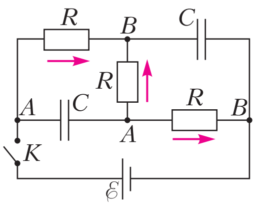


Рис. 8

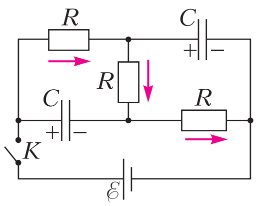


Рис. 9

противление цепи равно $3R$ (рис.9). Сила тока, текущего через резисторы, равна $I_2 = \dfrac{\mathcal{E}}{3R}$. Направление тока указано на рисунке 9.

Напряжения на конденсаторах определяются падением напряжения на резисторах:

$$U_C = 2RI_2 = \frac{2}{3}\mathcal{E},\quad q = U_C C = \frac{2}{3}\mathcal{E}C.$$

Полярность каждого конденсатора указана на рисунке 9.

4. $\rho_{\text{нп}} = \dfrac{Mg\left(\rho_{\text{рт}} h_0 - \rho_B h\right)}{R\left(T_0 - t\right)}$,

где h_0 – атмосферное давление, выраженное в мм рт.ст., а M – молярная масса воды; результаты вычисления по этой формуле приведены в таблице.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\rho_{\text{нп}}$, г/м^3	4,8	7,0	9,2	12,8	17,0	23,3	30,0	39,4	51,2

5. Шарик будет двигаться по окружности радиусом $R = \dfrac{v}{\gamma B}$ до тех пор, пока не столкнется со стенкой или не вылетит из области магнитного поля.

Если $b > 2R$, то шарик покинет область магнитного поля, не столкнувшись со стенкой. Если $b < R$, то шарик, столкнувшись со стенкой, продолжит движение внутри магнитного поля. Если $R < b < 2R$, то шарик столкнется со стенкой и далее возможны две ситуации: или шарик вылетает из области магнитного поля, или не вылетает и двигается по траектории, показанной на рисунке 10,*а*.

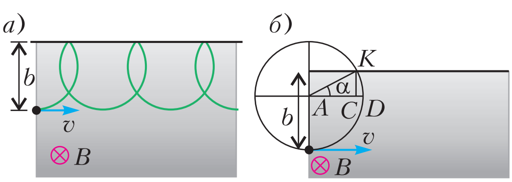


Рис. 10

Из рисунка 10,*б* следует, что шарик не вылетит из области магнитного поля, если

$$R\cos\alpha \ge R\left(1 - \cos\alpha\right),\ \text{или}\ \cos\alpha \ge 1/2.$$

Из рисунка находим

$$\sin\alpha = \frac{b - R}{R},\quad \sin^2\alpha = \frac{b^2}{R^2} - \frac{2b}{R} + 1.$$

Учитывая, что $\cos\alpha \ge 1/2$, получаем

$$\frac{b^2}{R^2} - \frac{2b}{R} + \frac{1}{4} \le 0,\ \text{откуда}\ 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \le \frac{b}{R} \le 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

В нашем случае $R < b < 2R$, поэтому окончательно находим

$$b \le R\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \le \frac{v}{\gamma B}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

КВАНТ 12+

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.Н.Аткарская, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8»

Телефон: +7 495 363-48-86,

htpp: //capitalpress.ru

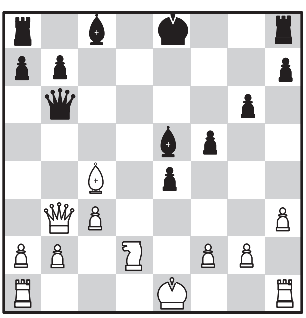
ПобеГ КОРОЛЯ

В сегодняшнем выпуске шахматной странички мы продолжим тему необычных рейдов короля, начатую еще в 2017 году. Открывает выпуск партия ярких шахматистов начала XX века, Р.Шпильмана и С.Тартаковера, в которой игравший черными гроссмейстер одним из первых в истории применил план с дерзким побегом короля из своего лагеря. Неслучайно, что это сделал именно С.Тартаковер, ведь именно ему принадлежит авторство термина «гипермодернизм» применительно к шахматам, и именно он часто старался отойти от классических канонов игры, экспериментируя с дебютами и придумывая необычные планы за шахматной доской.

Р.Шпильман – С.Тартаковер

Копенгаген, 1923

1. e4 c6 2. d4 d5 3. ed cd 4. c3. Обычно здесь играют 4. c4, что ведет к атаке Панова. **4... ♞c6 5. ♗f4 ♞f6 6. ♘d2 g6 7. ♘gf3 ♝g7 8. h3 ♞e4 9. ♘e4 de 10. ♘d2 f5 11. ♗c4 e5 12. de ♞e5 13. ♗e5 ♝e5 14. ♕b3 ♛b6.** В случае размена ферзей черные будут владеть открытыми линиями, а в ответ на шах слоном они заготовили необычный побег короля.



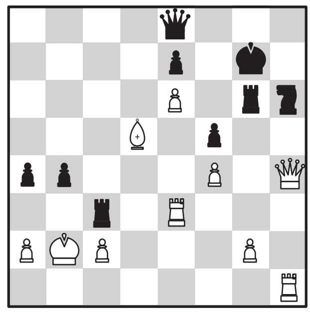
15. ♗b5+ ♚e7!? 16. ♘c4 ♛c5 17. ♘e5 ♛e5 18. 0-0-0 ♝e6 19. ♗c4 ♝c4 20. ♕c4 ♜hd8 21. ♕b4+ ♚f6 22. ♕b7 ♛f4+ 23. ♔b1 ♛f2 24. ♕c6+ ♚g5 25. h4+. Белые недооценивают активность черного короля, лучше смотрелось ♕c7, беря на прицел пешку h7. **25...♚g4 26. ♖df1 ♛b6!** Внезапно выясняется, что белые не могут меняться ферзями, так как активная позиция короля обеспечивает черным решающее преимущество в эндшпиле. **27. ♕c4 ♜d2 28. b4 ♛e3.** Сохранение на доске всех тяжелых фигур позволяет черным организовать атаку на белого короля. **29. ♖h3 ♛b6 30. ♖hf3 ♜g2 31. ♖f4+ ♚g3 32. ♕d5 ♜c8?** Ошибка, которая могла стоить черным пол-очка. Необходимо было защитить пешку e4 посредством ♜e8. **33. ♕d7?** Встречная неточность. Белые могли форсировать вечный шах, пожертвовав ладью: 33. ♖f5 gf 34. ♕e5+ ♚h3 35. ♕f4 ♜g3 36. ♕f5+ ♚h2 37. ♕f2+ ♜g2 38. ♕f4+ ♜g3. **33... ♛a6.** Вторую горизонталь не защитить, поэтому **белые сдались**.

За 100 лет шахматы сильно изменились, и в настоящее время модернистские варианты не менее популярны, чем классические линии. Тем не менее, планы с побегом короля встречаются все так же редко. Ниже приведен пример такой партии, сыгранной современными молодыми гроссмейстерами в дебюте, который так и называется – современная защита.

Д.Антон Гихарро – Т.Л.Петросян

Севан, 2015

1. d4 d6 2. e4 g6 3. ♗e3 ♝g7 4. ♘c3 a6 5. ♘f3 ♞f6 6. ♕d2 b5 7. ♗h6 0-0 8. ♗d3 ♝b7 9. ♗g7 ♚g7 10. e5 ♞g8 11. 0-0-0 c5 12. h4 h5 13. e6! Комбинация пешечного наступления на королевском фланге и тычка на e6 – один из наиболее эффективных и популярных способов игры против современной защиты. **13...f5** (взятие пешки после 13...fe 14. ♘g5 ♜f6 15. dc ведет черных к тяжелой позиции). **14. dc dc 15. ♕g5 ♛e8 16. ♘e5 ♜f6 17. f4 c4 18. ♗e2 b4 19. ♘d5 ♝d5 20. ♖d5 c3 21. ♗h5 ♞c6 22. ♗f3.** Сильнее 22. g4!?, максимально атакуя королевский фланг черных. **22...♞e5 23. ♖e5 cb 24. ♔b2 ♜c8 25. ♗d5 a5 26. h5 ♞h6 27. hg ♜g6 28. ♕h4 a4 29. ♖e3 ♜c3.**



30. ♖c3 bc+ 31. ♔c3 ♛d8 32. ♔c4! Точно рассчитав последствия, белые ведут короля прямо в лагерь противника. **32...♛d6 33. ♕f2 ♞g4 34. ♕c5 ♛f4+ 35. ♔b5 ♛b8+ 36. ♔a4 ♛d8 37. c4 ♞f6 38. ♖b1 ♜g4 39. ♖b4?** Цейтнотная ошибка, которая могла стоить белым победы (необходимо было предварительно отвести слона: 39. ♗f3 ♜d4 40. ♖b5). **39...♛e8+?** Ответная любезность. Размен легких фигур после 39...♞d5 40. cd ♛a8+ позволял черным достигнуть равенства, не давая белому королю проникнуть на свою половину. **40. ♔a5!** Теперь путь к победе открыт. **40...♔g6 41. ♗f3 ♜g5 42. ♖b5 ♛d8+ 43. ♔a6 ♞e8 44. ♖b7 f4 45. ♗e4+ ♚h6 46. ♗d5 ♞d6 47. ♖d7 ♛f8 48. ♕c7 ♜d5 49. cd ♛a8+ 50. ♔b6 ♛d5 51. ♖d6 ed 52. e7!** Остальное для гроссмейстера – дело техники. **52...♛e4 53. ♕d7 ♛d4+ 54. ♔b7 ♛b4+ 55. ♔c8 ♛c5+ 56. ♕c7 ♛e5 57. a4 ♚g6 58. ♔d8 ♛f6 59. ♕c2+ ♚f7 60. ♕h7+ ♚e6 61. ♕e4+ ♚f7 62. ♔d7. Выигрыш белых.**

А.Русанов

Индекс 90964

Прогулки с физикой

Известные с глубокой древности арочные конструкции активно используются и сегодня. В чем их достоинство?

ФИЗИКА + СТРОИТЕЛЬСТВО

ISSN 0130-2221 19002
9 770130 222191

(Подробнее – на с. 32 внутри журнала)