

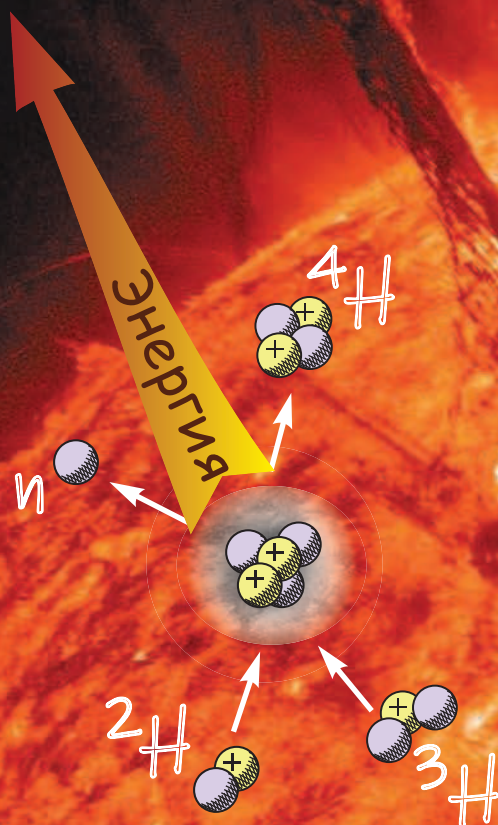
ISSN 0130-2221

2018 · № 8

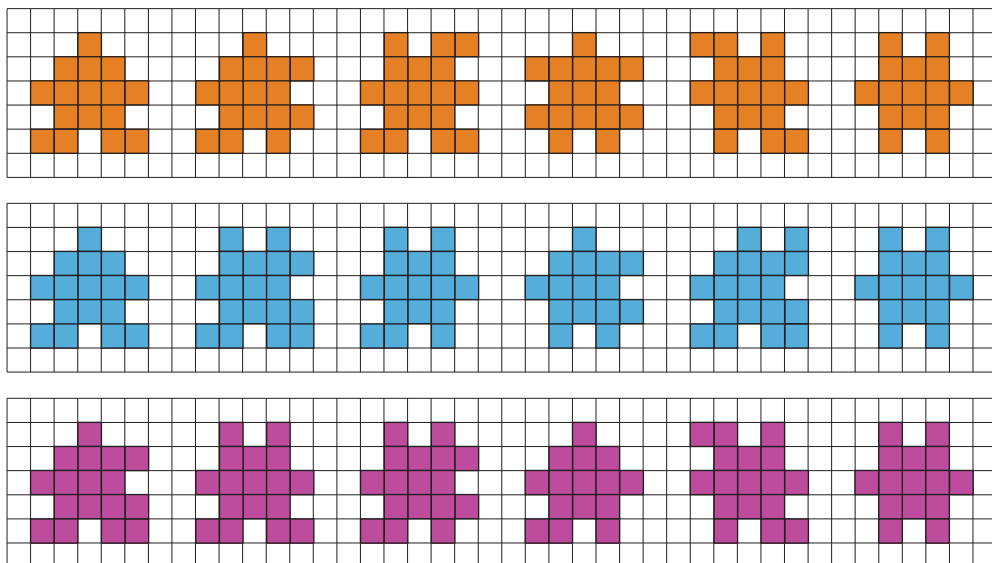
АВГУСТ

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



# КУБАЗЗЛЫ и ПАЗЗЛПИПЕДЫ



Впервые эти головоломки попали ко мне еще в конце 80-х годов прошлого века. Сейчас они продаются в магазинах, но при желании их несложно сделать самостоятельно. Для этого хорошо подойдет мелкопористый гибкий пластик толщиной около сантиметра. Для простоты примем эту толщину за единицу. Сначала удобно вырезать заготовки – квадраты  $5 \times 5$ , а затем удалить из них некоторые единичные квадратики по краям, как показано на рисунках. В итоге у вас получится три набора по шесть деталей в форме полимино, с помощью которых можно попытаться выполнить несколько заданий.

1. Из элементов каждого набора соберите куб.
2. Из любых двух наборов составьте параллелепипед  $5 \times 5 \times 9$  (напомню, что за единицу принята толщина детали). Две детали при этом останутся лишними.
3. Из всех трех наборов составьте параллелепипед  $5 \times 5 \times 13$ . Четыре детали при этом останутся лишними.
4. Придумайте еще три набора из шести деталей каждый, для которых задания 1–3 разрешимы (любые два набора должны различаться хотя бы по одной детали). Параллелепипеды каких размеров можно сложить, используя детали всех шести наборов?

## В номере:

## УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук  
Математический институт  
им. В.А.Стеклова РАН  
Физический институт  
им. П.Н.Лебедева РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР  
А.А.Гайфуллин

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,  
М.Н.Бондаров, Ю.М.Брук,  
А.А.Варламов, С.Д.Варламов,  
А.П.Веселов, А.Н.Виленкин, В.И.Голубев,  
Н.П.Долбилин, С.А.Дориченко,  
В.Н.Дубровский, А.А.Заславский,  
А.Я.Канель-Белов, П.А.Кожевников  
(заместитель главного редактора),  
С.П.Коновалов, К.П.Кохась, А.А.Леонович,  
Ю.П.Лысов, А.Б.Минеев, В.В.Произволов,  
В.Ю.Протасов, А.М.Райгородский,  
Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский,  
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,  
А.В.Устинов, А.И.Черноуцан  
(заместитель главного редактора)

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,  
В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, В.В.Козлов,  
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин,  
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,  
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
1970 ГОДАГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР  
И.К.КикоинПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА  
А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,  
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,  
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,  
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллиончиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,  
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,  
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

- 2 ИТЭР – земная звезда. *Л.Белопухов*  
12 Квадратичные отображения в картинках  
(окончание). *П.Панов*

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 17 Задачи М2522–М2525, Ф2529–Ф2532  
18 Решения задач М2510–М2513, Ф2517–Ф2520

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 23 Задачи  
24 XXIV Турнир математических боев имени  
А.П.Савина

## ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 27 Потенциальная яма и принцип чайной ложечки.  
*С.Дворянинов*  
30 Радиоактивный распад, банковский процент и  
другие. *А.Стасенко*

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Физика планет

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 34 Плюсы-минусы и игра Ним (окончание).  
*И.Копылов*

## НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

- 37 Вода в Америке не та. *М.Старшов*

## ОЛИМПИАДЫ

- 39 Заключительный этап XLIV Всероссийской  
олимпиады школьников по математике  
42 Заключительный этап LII Всероссийской  
олимпиады школьников по физике

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 47 Олимпиада «Покори Воробьевы горы!»  
53 Ответы, указания, решения  
Нам пишут (16, 38)

## НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье Л.Белопухова*  
II *Коллекция головоломок*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогулки с физикой*

# ИТЭР – земная звезда

Л. БЕЛОПУХОВ

ДВАДЦАТЬ ДЕВЯТОГО ЯНВАРЯ 2007 ГОДА был дан старт гигантской стройке двадцать первого века – проекту ИТЭР. Международная аббревиатура ITER расшифровывается как International Thermonuclear Experimental Reactor. Русское название проекта – международный термоядерный экспериментальный реактор. Возможно, этот день войдет в историю как начало новой энергетической эры человечества, эры термоядерной энергии – энергии звезд.

## Термоядерная реакция

Существование нашего мира определяют гравитация и термоядерный синтез. Гравитация создает сгустки водорода и других элементов, которые все более и более уплотняются и разогреваются. Когда температура в центре сгустка достигает  $10^7$  К, а давление становится  $10^{11}$  Па, вспыхивает ядерная реакция синтеза – превращение водорода в гелий. Температура еще больше повышается, и давление расширяющихся продуктов реакции уравнивает гравитационное давление. Устанавливается равновесие – образуется звезда. Температура ее центральной части – сотни миллионов градусов, а на поверхности – тысячи или десятки тысяч градусов. Энергию реакции синтеза в своих глубинах звезда излучает в пространство. Это и есть ее свечение – инфракрасное, видимое, ультрафиолетовое и рентгеновское.

Если около звезды существуют планеты, то есть вероятность того, что на планетах сможет возникнуть и будет развиваться жизнь. Для этого, кроме излучения звезды, сама планета должна иметь подходящий химический состав веществ на поверхности и такую температуру, чтобы вода находилась в жидком состоянии.

В середине прошлого века изучение энергетики ядерных реакций шло двумя путями. Один путь – исследование процессов деления тяжелых ядер, прежде всего изотопов урана. Этот путь дал человечеству атомную бомбу и атомные электростанции (во всем мире, кроме России, их уже довольно давно называют не атомными, а ядерными, что правильнее с научных позиций). Практически одновременно стал ясен и второй путь, связанный с выделением ядерной энергии в процессах синтеза легких ядер из более легких, главным образом – синтеза гелия из изотопов водорода. К 1940 году стало ясно, что именно эти процессы происходят в звездах и являются источниками их энергии. Стало ясно и то, что для возникновения такой реакции нужна огромная начальная температура, поэтому реакция синтеза и была названа «термоядерной».

Вначале казалось, что получить в земных условиях такую температуру невозможно. Ведь что такое температура? Температура – это мера средней кинетической энергии частиц, когда их огромное число находится в хаотическом движении. Частицы непрерывно сталкиваются друг с другом, теряя и приобретая энергию. Всегда есть набор самых различных скоростей. Но при этом обязательно существует вероятностное распределение кинетической энергии частиц. Эта вероятность максимальна в области некоторой средней кинетической энергии  $E$ . В термодинамических расчетах используют понятие абсолютной температуры  $T$ , которое и есть эта средняя кинетическая энергия, только выраженная не в джоулях, а в кельвинах:  $T = \alpha E$ , где  $\alpha = 0,5 \cdot 10^{23}$  К/Дж.

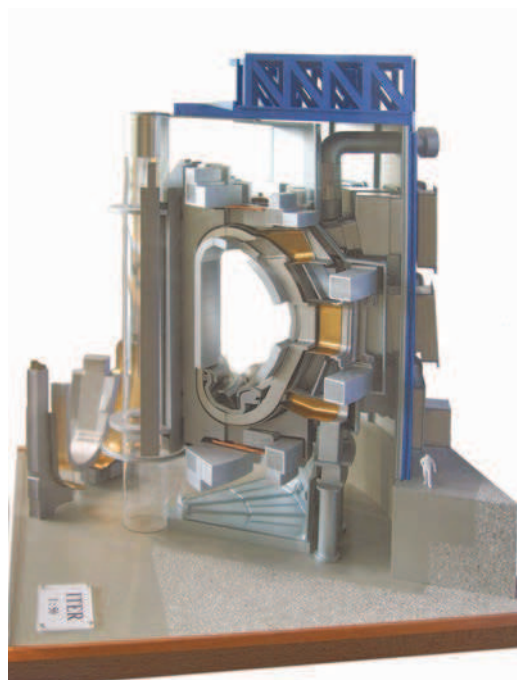
Понимание того, что для начала реакции синтеза необходима огромная начальная температура, пришлось благодаря выяснению строения атомного ядра и природы

сил, действующих между нуклонами – протонами и нейтронами. В атомном ядре действуют электрические силы отталкивания между протонами (кулоновские силы) и особые силы притяжения между нуклонами, получившие название ядерных сил. В современной физике соответствующие ядерным силам взаимодействия предпочитают называть сильными взаимодействиями. Они не имеют отношения к электрическому заряду частиц. Сильным взаимодействием обладают объекты, наделенные особым свойством – барионным зарядом. Он одинаков и для протонов, и для нейтронов и считается для них равным единице. Тем самым, суммарный барионный заряд ядра равен числу нуклонов в нем. Именно эта величина указывается в ядерных реакциях сверху перед символом элемента. Закон сохранения барионного заряда (числа ядерных частиц) наряду с законом сохранения электрического заряда определяют результат ядерной реакции.

Очень важной особенностью сильных взаимодействий является их близкодество. На расстояниях, меньших  $10^{-15}$  м, они проявляют себя как силы притяжения, примерно в 100 раз большие по величине, чем силы электрического отталкивания на таком расстоянии. Вот почему в ядрах необходимы нейтроны, и общие силы притяжения нуклонов уравнивают электрическое отталкивание протонов.

Два ядра, которым удалось преодолеть их взаимное отталкивание (преодолеть кулоновский барьер) и сблизиться на расстояние  $10^{-15}$  м, попадают в поле действия ядерных сил притяжения, устремляются друг к другу, сливаясь в одно целое. Образовавшийся комплекс сложен, это не просто несколько слипшихся шариков, а капля первозданного вещества Вселенной – кварко-глюонной плазмы.

Образовавшиеся в результате слияния объекты, например ядро атома гелия и нейтрон, обладают суммарной кинетической энергией большей, чем та энергия, которая была затрачена на преодоление кулоновского барьера. Налицо – выигрыш энергии. Никакого нарушения законов сохранения при этом нет, поскольку масса



*Макет термоядерного реактора (сечение)*

покоя ядра гелия и нейтрона в сумме меньше, чем сумма масс ядер двух первоначальных изотопов водорода.

Какую же среднюю кинетическую энергию нужно придать ядрам изотопов водорода для того, чтобы они смогли преодолеть кулоновский барьер? Простой расчет – приравнивание потенциальной энергии электрического отталкивания начальной кинетической энергии частиц – средней кинетической энергии частиц – дает температуру порядка  $10^9$  К. Тот факт, что при этом некоторая часть частиц имеет кинетическую энергию значительно большую, чем средняя, и наличие квантового туннельного эффекта делают возможным сближение водородных ядер при более низкой температуре – «всего лишь» при 20 миллионах градусов.

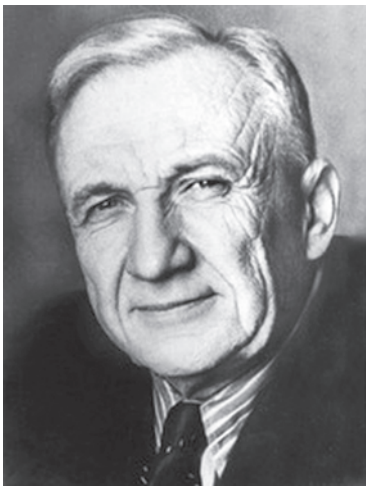
Казалось, что на Земле создать такую температуру нельзя. Но все изменилось ранним утром 16 июля 1945 года, когда в США на полигоне Аламогордо в штате Нью-Мексико состоялось испытание первого ядерного (уранового) взрывного устройства. Вспыхнувший на мгновение ослепительный свет был «ярче тысячи Солнц», по образному выражению Роберта Оппен-

геймера – американского физика, одного из создателей американского ядерного оружия. Спектральные измерения подтвердили предсказания теоретиков, что в момент взрыва бомбы температура будет порядка 20 миллионов градусов.

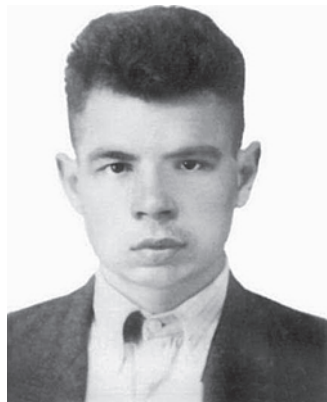
Почти одновременно в странах, где создавалось ядерное оружие (США, СССР и Великобритания), возникли проекты водородной бомбы – резервуара с изотопом водорода, внутри которого находилась урановая или плутониевая бомба. Вначале такие устройства были столь громоздкими, что их нельзя было использовать как бомбы. Но 22 ноября 1955 года водородная бомба с тротиловым эквивалентом 1,6 мегатонн была сброшена с самолета и взорвалась на высоте 1000 м над Семипалатинским ядерным полигоном в СССР. Вскоре аналогичные бомбы были сделаны и в США. И началась огромная по своим масштабам и страшная по своим возможным последствиям гонка вооружений между СССР и США. Кульминацией этой гонки стало испытание 30 октября 1961 года, когда на Новоземельском полигоне в СССР была взорвана «царь-бомба» с тротиловым эквивалентом 58 мегатонн.

### Управляемый синтез

Практически одновременно с созданием водородной бомбы встала задача осуществления на Земле контролируемого, «при-



*Игорь Евгеньевич Тамм*



*Олег Лаврентьев*

рученного» процесса термоядерного синтеза без ядерного взрыва. Был выдвинут ряд идей создания сверхвысокой начальной температуры – использование концентрации многих лазерных лучей или электронных пучков. Одно время даже обсуждалась идея «холодного» термоядерного синтеза. Но наиболее серьезные исследования были связаны с возможностью создания сверхвысокой температуры с помощью мощного электрического разряда в водородной плазме.

Одна из первых идей была выдвинута в 1950 году в СССР военнослужащим, сержантом Олегом Лаврентьевым (1926–2011). Он не имел в это время даже законченного среднего образования, но его мечтой было стать физиком. На свои скудные сержантские средства он выписывал научные и научно-популярные журналы и покупал учебники по физике. Лаврентьев послал в адрес правительства и Академии наук письма с изложением сво-



*Андрей Дмитриевич Сахаров*



*Лев Андреевич Арцимович*

ей идеи получения термоядерной энергии. Эта идея заключалась в создании кругового электрического разряда в водородной плазме, термоизоляция которого обеспечивалась бы электрическими силами отталкивания. Письма О.Лаврентьева были переданы в организации, занимавшиеся ядерными взрывами, и в конце концов попали к И.Е.Тамму и А.Д.Сахарову, которые в это время работали над созданием водородной бомбы. Они организовали демобилизацию О.Лаврентьева и его приезд в Москву, получение им среднего образования и поступление на физический факультет МГУ. Но сама идея Лаврентьева



*Игорь Николаевич Головин*

ева оказалась несостоятельной. Электрические поля не могли обеспечить устойчивое состояние кругового разряда. Лаврентьев и сам убедился в этом. Впоследствии, получив физическое образование, он работал в научных институтах, занимаясь ядерной физикой.

Тамм и Сахаров использовали рациональное зерно лаврентьевской идеи. В водородной плазме электрический ток действительно должен быть кольцевым, а сама плазма должна представлять собой тор (баранку). Но удерживать круговой ток в пространстве могло только магнитное поле особой конфигурации – линии индукции этого поля должны как бы обвивать плазменный тор. Ученые назвали такое поле тороидальным. Воплощение в жизнь этой идеи было связано с решением многих научных и инженерных задач. И в уже далеком 1951 году в созданном главным научным руководителем урановой проблемы в СССР И.В.Курчатовым секретном научном институте, называвшемся тогда Лаборатория №2 АН СССР или Лаборатория измерительных приборов, а попросту ЛИПАН или «двойка», появилось подразделение, которое начало воплощать в жизнь идею Тамма и Сахарова. Сегодня «двойка» превратилась в огромный Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», а подразделение, в котором начались работы по термояду, стало проектным центром ИТЭР, входящим в национальное агентство России по ИТЭР и в госкорпорацию «Росатом».

В 1951 году руководителями работ по осуществлению лабораторного термоядерного синтеза стали сотрудники И.В.Курчатова Л.А.Арцимович и И.Н.Головин – один из главных координаторов «мозгового штурма» проблемы. С 1973 года руководителем работы стал Б.Б.Кадамцев, а с 1975 года – Е.П.Велихов.

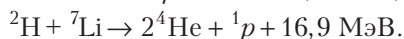
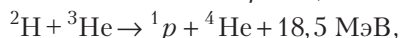
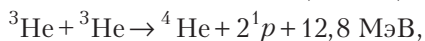
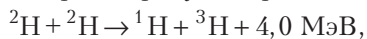
### Токамак

Для создаваемого устройства И.Н.Головин придумал название – токамак (**Т**ороидальная **К**амера с **М**агнитными **К**атушками). Токамак-1 (Т-1) и Токамак-2 (Т-2)

оказались неудачными – плазма разрушалась очень быстро. Наконец, в 1968 году на Т-3 был достигнут некоторый успех – плазма с температурой 10 миллионов градусов просуществовала почти секунду. При этом были зафиксированы нейтроны – продукты термоядерной реакции синтеза. Успех был повторен английскими физиками на их аналогичном устройстве. В мире начался настоящий бум сооружения подобных устройств – к 1986 году их общее число достигло 300. Этому способствовало полное рассекречивание работ по мирному использованию термоядерной энергии, которые велись в СССР.

В 1956 году И. В. Курчатов на конференции физиков-ядерщиков в английском ядерном центре Харуэлл сделал доклад, в котором рассказал об идее токамака и ее осуществлении в СССР. А в это время еще существовала во всех странах полная секретность работ по ядерной энергетике (о запуске в СССР ядерной электростанции в 1954 году было объявлено, но детали ее конструкции оставались строго секретными). Поэтому доклад Курчатова стал сенсацией. Мировое сообщество физиков-ядерщиков было поражено успехами советской физики и размахом работ по термоядерному синтезу. Сам термин «токамак» стал международным словом, не требующим перевода (несколько ранее так было со словом «спутник»).

В разных проектах использовались различные термоядерные реакции. Вот только некоторые из них (с указанием кинетической энергии продуктов реакции):



Внутри звезд, где кроме водорода, гелия и лития присутствуют и ядра других легких элементов, возможны и иные ядерные реакции синтеза. Но основное энерговыделение определяется превращением водорода в гелий. Кинетическая энергия про-

дуктов этих реакций синтеза в расчете на одну частицу оказалась в несколько раз больше, чем в реакциях деления тяжелых ядер.

Токамаки все больше увеличивались в размерах, создавались все более сильные магнитные поля, возрастала сила тока в плазме. При токах в тысячи ампер воздействующие на них магнитные поля должны иметь индукцию не менее 10 тесла – это в сотни тысяч раз больше магнитного поля Земли и в тысячи раз больше магнитных полей в электромагнитах подъемных кранах. Существование магнитного поля в катушке электромагнита определяется током в его обмотке. Для создания магнитных полей в десятки тесла сила тока в обмотке должна составлять десятки тысяч ампер. А это возможно только тогда, когда обмотки не будут иметь электрического сопротивления, т.е. будут сделаны из сверхпроводящего материала, и их температура не будет превышать 4 кельвинов. Единственным охладителем до таких температур может быть только жидкий гелий.

Технология создания сверхсильных магнитных полей создавалась для различных целей – для ускорителей заряженных частиц, для медицинских томографов. Но в этих случаях магнитное поле имело обычную соленоидальную форму. А в токамаке создание необычного тороидального поля требовало и необычных сердечников, и необычных их обмоток. Важнейшим воп-



*Борис Борисович Кадомцев*





*Евгений Павлович Велихов*

росом становилась и защита внутренних стенок реакционной камеры от случайных выбросов плазмы с ее многомиллионной температурой, и защита этих стенок от разрушающего действия быстрых нейтронов, и десятки других трудностей, которые нужно было преодолевать. Мечта о 5–10 годах для решения проблемы «приручения» термоядерной реакции так и осталась мечтой.

В 1985 году были построены Токамак-15 и Токамак-16. Это были совместные разработки СССР–Китай и СССР–Япония, поскольку в Советском Союзе уже не было возможности затратить на эти работы миллионы долларов. Зато научными руководителями проектов были российские ученые – академики Б.Б.Кадомцев и Е.П.Велихов (Е.П. даже был награжден японским «Орденом восходящего солнца»). Длительность устойчивого состояния плазмы в этих реакторах уже превышала секунду. Но главное, стало ясно, что для длительного устойчивого состояния плазмы необходимы реакторы значительно больших размеров – примерно в 10 раз больших, чем Токамак-16. Стоимость сооружения такого реактора оценивалась уже в несколько миллиардов долларов. И ни одна страна в мире (включая и США) не могла себе позволить такой научный эксперимент. Тем более, что предполагае-

мый реактор мог и не дать ожидаемого результата.

### **Будущее мировой энергетики**

В то же время, к концу двадцатого столетия стало отчетливо ясно, что человечество стоит перед угрозой всемирного энергетического голода. Тогда, двадцать лет назад, 80% мировой электроэнергии производилось на тепловых электростанциях, использующих в качестве источника энергии каменный уголь и природный газ, 15% приходилось на гидроэнергию, 10% – на ядерные (урановые) электростанции. Энергия солнечного излучения, ветра, морских приливов и тепла земных недр составляла в общем энергетическом балансе лишь сотые доли процента.

Работы ряда международных организаций позволили оценить мировые запасы природных источников электроэнергии и темпы нарастания ее потребления. По самым оптимистическим прогнозам, природного газа должно хватить на 100 лет, каменного угля – на 300 лет, урана – на 500 лет. Значительно расширить производство гидроэнергии не представляется возможным по экологическим соображениям. Мощные гидростанции требуют создания огромных водохранилищ, а это может нанести непоправимый вред природе. Так, например, при постройке крупнейшей в мире гидростанции «Три ущелья» на реке Янцзы (мощностью 22,5 ГВт) созданное искусственное озеро площадью в 630 км<sup>2</sup> потребовало переселения трех миллионов человек. А в несколько раз меньшие по мощности российские гидростанции Братская и Усть-Илимская «снабжены» водохранилищами площадью 5400 км<sup>2</sup> и 1830 км<sup>2</sup>. Это уже не озера, а целые моря.

Мы специально ничего не говорим о нефти, запасы которой, как известно, наиболее ограничены (максимум на 60–80 лет). В получении электроэнергии сама нефть не играет заметной роли. Она используется для транспорта – авиационного, автомобильного, водного и железнодорожного. Часть транспорта, конечно, можно будет перевести на электри-

ческие двигатели, как уже это сделано для железнодорожного транспорта. Но, во-первых, это даст еще большую нагрузку на сжигание газа и каменного угля и, во-вторых, довольно трудно представить авиацию на «электрической тяге». А главное, прекратить использование нефти в качестве топлива придется довольно скоро, ведь нефть – невозполнимый источник многих химических технологий. Перифразируя Д.И.Менделеева, скоро можно будет сказать, что дешевле сжигать в автомобилях ассигнации, чем бензин.

Что произошло в мировой энергетике за прошедшие 20 лет? Главное изменение – это значительное увеличение доли используемого в качестве источника энергии природного газа. Она увеличилась с 5 до 15%. Соответственно, доля каменного угля уменьшилась до 50%. Гидроэнергия обеспечивает 20%, а ядерная энергия – 12%. По-прежнему крайне незначительна роль в энергетическом балансе энергии солнечного излучения и ветровой энергии. Увеличение доли природного газа в энергетическом балансе безусловно снижает экологический вред от сжигания каменного угля, в продуктах горения которого содержится целый ряд вредных газов и микрочастиц тяжелых металлов. Улавливание этих примесей перед выбросом газов в атмосферу обходится очень дорого. Это смогли себе позволить США, где сжигание каменного угля дает 60% энергии. А вот экологическая обстановка в густонаселенных районах Китая катастрофически ухудшается. В этой стране, почти лишенной природного газа, 75% электроэнергии производится за счет сжигания каменного угля. Россия в этом отношении – благополучная страна. Уже только 20% электроэнергии производится на угольных электростанциях, а 55% дает природный газ. Суммарная доля использования гидроэнергии и ядерной энергии примерно соответствует среднемировому показателю – 32%.

### Атомная эра

По использованию в качестве источника энергии урана в мире существует резкая дифференциация. Всего сейчас работает

191 ядерная электростанция с 451 ядерным реактором (еще 60 реакторов находятся в стадии строительства). Из этого числа 100 реакторов построены в США и дают этой стране 20% электроэнергии. В России 36 реакторов дают почти пятую часть электроэнергии. Есть страны, в которых ядерная энергия – это треть энергии в ее общем балансе (Южная Корея, Финляндия). Имеются страны, где эта доля – почти половина всей энергии (Словакия, Украина). А вот в Китае и Индии доля ядерной энергии в общем балансе меньше 5%. Совсем не используется ядерная энергия в Австралии, в большинстве стран Южной и Центральной Америки и в многочисленных мелких государствах Океании. Опережает все страны по этому показателю Франция, в которой 58 ее ядерных реакторов производят 77% всей вырабатываемой в стране электроэнергии. Неслучайно статья в Википедии об экономике Франции начинается словами: «Франция – высокоразвитая страна, ядерная и космическая держава».

Отчасти это объясняется тем обстоятельством, что во Франции еще в 30-е годы прошлого века начали развиваться работы по ядерной физике. Ирен и Фредерик Жолио-Кюри (как и Энрико Ферми в Италии) стали нобелевскими лауреатами за получение новых изотопов («меченых атомов»). Но они не поняли, что в их опытах наблюдалась также реакция деления урана. Об этом догадались немецкие радиохимики и физики О.Ган, Ф.Штрассманн, Л.Мейтнер. Началась атомная эра. Энрико Ферми продолжал работы с ураном уже в США. Он изобрел и построил ядерный реактор, где в ноябре 1942 года впервые в мире была осуществлена цепная ядерная реакция деления урана. Но целью создания первых реакторов было не выработка электроэнергии, а получение плутония, искусственного трансуранового элемента, способного, как и уран, к взрывному осуществлению реакции деления.

После окончания войны и ужасных августовских событий 1945 года в Хиросиме и Нагасаки интересы многих физиков-ядерщиков сосредоточились на мирном ис-

пользовании энергии деления. Их вдохновлял и запуск в 1954 году первой в мире ядерной электростанции в СССР. В реакторостроении Франция вскоре стала мировым лидером. Возможно, в этом немалую роль сыграли и почти полное отсутствие во Франции секретности ядерных исследований, и большой интерес к этим исследованиям французского правительства. На юге Франции, в маленьком городке Кадараш в 60 километрах от Марселя был создан мощный научный центр ядерной физики.

И именно там, неподалеку от Кадараша, в 2006 году было намечено построить ИТЭР – международный термоядерный экспериментальный реактор. Огромную строительную площадку размером с 400 футбольных полей было решено создать в лесном массиве, поскольку вся безлесная сельскохозяйственная округа была арендована частными владельцами. Первое дерево было срублено 29 января 2007 года. Но перед этим несколько лет уточнялись научные предпосылки строительства реактора и почти пять лет разрабатывался технический проект сооружения. Много времени ушло и на организацию финансирования проекта и создание управляющих органов. Первоначально планировалось запустить реактор в 2022 году и затратить 5 миллиардов долларов. Но в 2012 году проект был пересмотрен, сроком окончания строительства был намечен 2025 год, а предполагаемая сумма затрат возросла до 20 миллиардов долларов. Сейчас пройденна половина дистанции, и панорама строительства поражает воображение.

Кто же затеял и осуществил проект этой грандиозной стройки, поистине «стройки XXI века»? Как возникла система финансирования и изготовления многочисленных узлов и агрегатов будущего реактора?

### История проекта ИТЭР

Как уже было сказано, в 80-е годы прошлого столетия ученые разных стран, занимавшиеся проблемой «приручения» термоядерной энергии, пришли к единому мнению: необходима постройка экспериментальной установки такой мощности и таких размеров, что это недоступно от-

дельной стране, и поэтому необходима международная кооперация.

Некоторый опыт международного научного сотрудничества в Европе уже был. В 1954 году был создан ЦЕРН (русское произношение международной аббревиатуры CERN, от Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire – Европейский совет по ядерным исследованиям). Сегодня это крупнейшая коллаборация по физике высоких энергий, в которой принимают участие ученые 20 стран. Только на постоянной работе в ЦЕРНе заняты 2500 человек. За прошедшие годы там сооружено несколько ускорителей, в том числе крупнейший в мире Большой адронный коллайдер (БАК). На них совершено 11 крупных открытий в физике элементарных частиц. ЦЕРН награжден Большой золотой медалью ЮНЕСКО. Не менее важно и то, что именно в ЦЕРНе родилась «всемирная паутина», вначале как компьютерная сеть для распространения научной информации. Но в 1993 году эта сеть была открыта для всех пользователей – так родился интернет.

Идея создания ЦЕРНа была высказана в 1949 году Луи де Бройлем в Лозанне (Швейцария) на европейской конференции по культуре. Идея была горячо поддержана физиками, а энергия и авторитет Нильса Бора помогли претворить ее в жизнь. В разгаре холодной войны советские физики не могли участвовать в создании и работе ЦЕРНа – почти все исследования в ядерной физике тогда были строго засекречены. Россия и сейчас не является страной-участницей этой организации. Но уже в строительстве БАКа и в его работе финансовый вклад России составил 5%, а научный вклад – заметно больше.

Мечта физиков зажечь на Земле звездную реакцию синтеза совпала с крутым изменением политической обстановки в России в 1985 году. Генеральный секретарь ЦК КПСС М.С.Горбачев обозначил целью своей деятельности прекращение холодной войны («разрядку»), полное запрещение всех ядерных испытаний и начало решительного сокращения страшных арсеналов термоядерного оружия, накоп-

ленного двумя мировыми державами. Российские руководители программы мирного использования термоядерной энергии академики Б.Б.Кадомцев и Е.П.Велихов в 1986 году встретились с М.С.Горбачевым и увлекли его своей идеей мирового сотрудничества в этой области. М.С.Горбачев понял важность проблемы и включил этот вопрос в программы своих встреч с лидерами ведущих стран мира. Е.П.Велихов стал его советником по этому вопросу и принимал участие в международных встречах. Решающую роль сыграла встреча М.С.Горбачева с президентом США Дональдом Рейганом в конце 1986 года в Рейкьявике (Исландия), на полдороге между Москвой и Вашингтоном. Рейган был незаурядным политиком. Бывший знаменитый киноактер, он был образованным человеком и имел хороших советников. В одном из интервью на журналистский вопрос о том, чем он руководствуется в своей внешней и внутренней политике, Рейган ответил: «Принципом дополнительности Нильса Бора». И разъяснил журналистам этот принцип, основанный на квантовом соотношении неопределенностей.

Неизвестно, поняли ли Рейгана журналисты, но одним из результатов встречи руководителей двух стран стало создание под эгидой МАГАТЭ (Международного агентства по атомной энергии) группы ученых, разрабатывающих возможность создания нового крупного научного международного сотрудничества. Большое участие в этом принял и президент Франции Франсуа Миттеран. В 1987 году эта группа стала Международным консультативным комитетом проекта ИТЭР, а возглавил этот комитет академик Б.Б.Кадомцев.

Международный консультативный комитет подготовил заключение в Вашингтоне в июле 1992 года международного четырехстороннего соглашения о разработке инженерного проекта ИТЭР. Участниками этого соглашения были Россия, США, Япония и ЕС (Европейское содружество). Очень сложным вопросом было финансирование разработки проекта. Острой необходимостью стало создание полномочной международной организации по руковод-



*Бернард Биго*

ству всей этой работой. Необходим был международный договор. Трудно переоценить участие Е.П.Велихова в подготовке этого договора. Его личные контакты со всеми ведущими физиками-реакторщиками, его бесспорный научный авторитет в этой области обеспечили успешное, хоть и не очень быстрое решение проблемы.

Наконец, в мае 2006 года в Брюсселе состоялось соглашение о создании Международной организации по реализации проекта, которая будет обладать правами юридического лица, способного заключать договоры с государствами и международными организациями. В июне 2006 года в Москве первые шесть стран-участниц этого соглашения определили место сооружения реактора. В сентябре 2006 года правительство России приняло решение поддержать это соглашение, тем самым Россия стала страной-участницей. В декабре этого года уже было заключено несколько десятков контрактов с конкретными исполнителями проекта.

Был создан управляющий орган – совет ИТЭР. Его генеральными директорами вначале были японские физики-реакторщики – ведь именно в Японии был создан самый продвинутый реактор Токамак-16. Российский ученый, академик Е.П.Велихов стал главным научным руководителем проекта. В 2015 году генеральным директором совета ИТЭР был избран 65-летний

французский физик Бернард Биго, а 80-летний Е.П.Велихов стал почетным консультантом совета, он и сейчас продолжает принимать активное участие в его работе. Во всех странах-участницах были созданы национальные агентства ИТЭР. В России такое агентство входит в государственную корпорацию «Росатом».

Одной из важнейших задач совета ИТЭР является определение плана работ и сметы строительства на каждый год и, что особенно важно, распределение между странами-участницами работ по созданию отдельных узлов и агрегатов реактора. Полный расчетный объем финансирования составляет на 2018 год около 2 миллиардов евро. Он разделен на 11 частей, или паев. По одному паю имеют Россия, США, Китай, Южная Корея и Индия, 2 пая имеет Япония, Европейский Союз имеет 4 пая, которые уже сам распределяет по отдельным странам Европы (в общей сложности в проекте принимают участие 26 стран).

Участие этих стран заключается не только в финансировании работ по самому строительству реактора. Они финансируют также научные разработки, инженерные проекты и изготовление по этим проектам тех элементов конструкции, которые советом ИТЭР и национальными агентствами ИТЭР им поручено выполнить и доставить на строительную площадку.

Почему мы выделили отдельно вопрос доставки? Вот небольшой штрих, характеризующий грандиозные масштабы стройки. Отдельные детали и установки имеют массу в десятки и сотни тонн. Так, некоторые детали, изготовленные в России, имели массу по 50 тонн. Морем они доставлялись в немецкий порт Киль, а оттуда по автобанам на многотонных трейлерах – на юг Франции. Но были и будут «детали», имеющие массу по 300 тонн и более. Как их доставить? В 2017 году в Южной Корее были изготовлены газгольдеры для хранения охлажденного гелия. Масса каждого газгольдера 300 тонн, диаметр 6 метров, высота 30 метров. С Дальнего Востока они были доставлены морем во внутренний порт Средиземного моря около Канн и погружены на специальные платформы-

трейлеры. Но чтобы выдерживать такую массу, трейлеру нужно иметь 354 колеса! По модернизированной 100-километровой дороге трейлеры со скоростью 5 километров в час передвигались в сопровождении конвоя по ночам, когда останавливалось все движение. Теперь эти газгольдеры, установленные огромными кранами, гордо красуются на предназначенных им по проекту местах. И краны, и платформы-трейлеры были изготовлены во Франции специально для этой стройки.

На строительстве сейчас занято свыше 2000 инженеров, техников и рабочих, а в штабе стройки и в научном руководстве задействовано больше 400 сотрудников. Есть небольшой жилой поселок, общежития гостиничного типа, медицинские и детские учреждения. Предусмотрен транспорт для детей школьного возраста в город Кадараш. Общее число всех, кто занят в проекте ИТЭР в 26 странах мира, оценивается в 200000 человек. Невероятно трудно координировать работу этого грандиозного коллектива. Очень важно соблюдение сроков выполнения отдельных узлов для обеспечения непрерывности работы на стройке. Нынешний генеральный директор совета ИТЭР Бернард Биго регулярно посещает все страны-участницы, наблюдая и контролируя работы в них.

В России национальное агентство по ИТЭР привлекло к работе 10 научно-исследовательских и конструкторских центров, 5 крупных заводов с общим числом работников порядка 20000 человек. Генеральный директор совета ИТЭР на недавнем заседании назвал российское участие в проекте самым надежным и по срокам, и по качеству выполнения работ.

Чтобы составить представление о том, что же там, во Франции, строится, нужно немного подробнее остановиться на принципах работы и конструкции этого термоядерного реактора. Но об этом – в следующий раз.

# Квадратичные отображения в картинках

П. ПАНОВ

## Бифуркационная диаграмма

Не так уж просто разобраться в многообразии типов долгосрочного поведения, которое демонстрирует квадратичное семейство  $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$ . Но существует удобный способ одновременного представления динамики семейства  $f_\lambda$  на одной картинке – это *бифуркационная диаграмма*.

Возьмем диапазон изменения  $\lambda$ , в нашем случае отрезок  $[0; 4]$ , и равномерно расположим на нем большое количество точек  $\lambda_i = 4i/I$ ,  $i = 0, \dots, I$ . Для каждого  $i$  случайным образом выберем начальную точку  $x_0 \in [0; 1]$  и произведем большое количество  $N$  итераций

$$x_{n+1} = \lambda_i x_n (1 - x_n).$$

Затем на координатной плоскости отметим точки  $(\lambda_i; x_n)$ , где  $n$  меняется от 100 до  $N$ . Все они будут лежать на одном вертикальном отрезке с абсциссой  $\lambda_i$ . Обратите внимание, поскольку нас интересует установившееся (долгосрочное) поведение точек  $x_n$ , первые 100 из них были отброшены. Пределаем это для каждого  $i$ .

Полученная таким образом бифуркационная диаграмма изображена на рисунке 3 ( $0 \leq \lambda \leq 4$ ). Тут можно четко различить те типы поведения, которые мы зафиксировали раньше. Например, то, что при  $0 \leq \lambda \leq 1$  точки  $x_n$  стремятся к 0, а при  $1 < \lambda \leq 3$  – к некоторому ненулевому значению, а именно к корню  $x_\lambda = (1-\lambda)/\lambda$ . Видно появление цикла длины 2 при переходе  $\lambda$  через значение 3, а также виден цикл длины 4 при  $\lambda = 3,5$ . Для тех  $\lambda_i$ , для которых заполнены целые отрезки, харак-

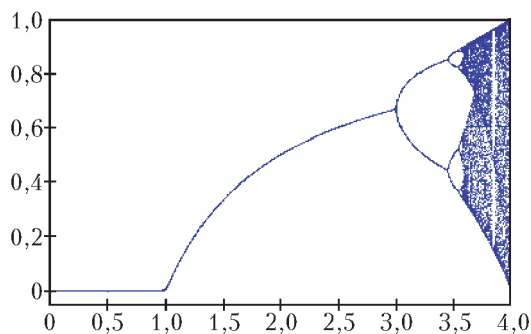


Рис. 3

терна хаотическая динамика. Где-то в районе  $\lambda = 3,8$  наблюдается цикл длины 3. Разглядывая бифуркационную диаграмму при большем увеличении, можно обнаружить другие подробности.

Мы не можем продвинуться вдоль бифуркационной диаграммы в сторону значений  $\lambda > 4$ , так как там при итерациях точки начинают уходить на бесконечность, но продвижение в сторону отрицательных значений возможно (рис.4;  $-2 \leq \lambda \leq 4$ ).

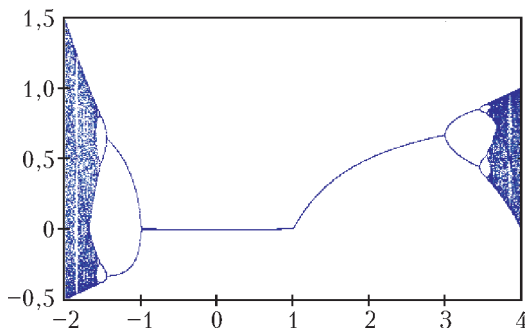


Рис. 4

Дальше мы попробуем расширить диапазон изменения параметра  $\lambda$  «вправо», научившись работать с точками, уходящими при итерациях на бесконечность, и

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20180802>

Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.

построим новые бифуркационные диаграммы.

**Квадратичные отображения плоскости и отображения окружности, семейства и диаграммы**

Квадратичным отображением плоскости назовем преобразование, при котором точка с координатами  $(x; y)$  переходит в точку  $A(x; y)$  с координатами

$$A(x; y) = (a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2; a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2),$$

где  $a_i$  – некоторые фиксированные числа. Дальше при задании квадратичного отображения  $A(x; y)$  мы иногда будем пользоваться короткой записью  $A(a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6)$ , оставляя лишь его коэффициенты  $a_i$ .

С каждым преобразованием плоскости  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  можно связать преобразование окружности, которое на координатном языке выглядит как

$$(x; y) \mapsto \frac{A(x; y)}{|A(x; y)|}.$$

Здесь  $(x; y)$  – точка на единичной окружности (т.е.  $x^2 + y^2 = 1$ ). Результат применения к ней преобразования,  $A(x; y)$ , делится на расстояние до начала координат (*нормируется*), и новая точка возвращается на единичную окружность.

Итак, преобразование плоскости  $A(x; y)$  порождает преобразование окружности, и мы можем наблюдать его динамику, как это делали раньше для отрезка. Но давайте сразу перейдем к семействам и к их бифуркационным диаграммам.

Пусть имеются два квадратичных отображения  $A$  и  $B$ . Они порождают естественное семейство квадратичных отображений

$$C_\lambda = \lambda A + B, \quad -\infty < \lambda < \infty.$$

Чтобы избавиться от бесконечного диапазона изменения  $\lambda$ , сделаем еще замену  $\lambda = \sin \theta / \cos \theta$  и распределим  $\sin \theta$  и  $\cos \theta$  между  $A$  и  $B$ :

$$C_\theta = A \sin \theta + B \cos \theta, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi.$$

Вот для таких семейств мы и построим сейчас несколько бифуркационных диаграмм. Первая из них, для семейства, порожденного  $A = (-0,43; 0,06; 0,67; -0,53; -0,54; -0,47)$  и  $B = (-0,57; 1,32, -0,29; 0; -0,94; -034)$ , изображена на рисунке 5.

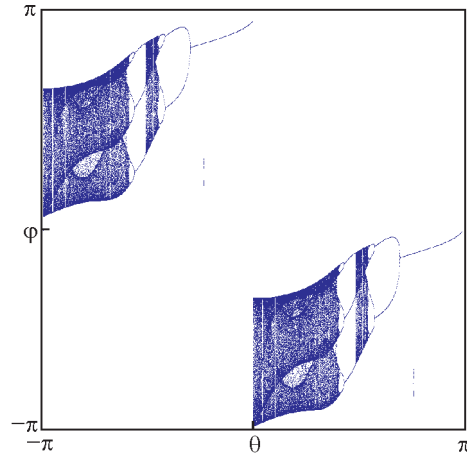


Рис. 5

На этом рисунке, как и на следующих, вдоль горизонтали откладывается параметр  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ , а вдоль вертикали – угловые координаты  $-\pi \leq \phi \leq \pi$  точек окружности, с которых стартует итерация (угловая координата  $\phi$  – это угол между осью  $x$  и направлением на точку окружности).

На рисунке 5 опять наблюдаются бифуркации удвоения периода, видно периодическое и хаотическое поведение.

На окружности углом, отличающимся друг от друга на  $2\pi$ , отвечает одна и та же точка, поэтому мы можем отождествить вертикальные стороны граничного квадрата, соответствующие углам  $\theta = \pm\pi$ . Точно так же можно отождествить и горизонтальные стороны, соответствующие  $\phi = \pm\pi$ . Но на рисунке 5 имеется и еще одна дополнительная симметрия, которая заключается в том, что бифуркационная диаграмма переходит сама в себя при сдвиге на векторы  $(\pi/2; \pm\pi/2)$ . Это следствие квадратичности отображений  $A$  и  $B$ .

На рисунке 6 ( $A = (-0,67; 0; 0,63; 0,07; 0,14; 0,73)$  и  $B = (0,58; 0,86; -0,01; -0,52; -0,08; -0,2)$ ) мы видим новые элементы –

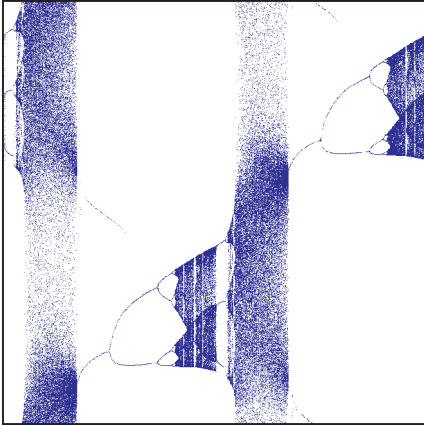


Рис. 6

вертикальные полосы. Они соответствуют тем значениям параметра  $\theta$ , для которых при отображении  $C_\theta = A \sin \theta + B \cos \theta$  единичная окружность дважды наматывается сама на себя.

На рисунке 7 ( $A = (0,41; -1,12; 0,2; 1,06; 0,94; 0,48)$  и  $B = (0,86; -0,01; 1,07; 0; 0,22; 0,14)$ ) – еще одна бифуркационная диа-

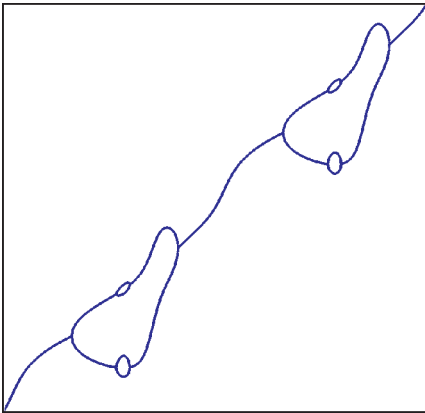


Рис. 7

грамма, на этот раз без какой бы то ни было хаотической компоненты. В наличии только неподвижные точки, циклы длины 2 и 4.

И наконец, возвращаемся к логистическому семейству. Оказывается, что оно напрямую связано с семейством, порожденным квадратичными отображениями

$$A(x; y) = (0; xy - y^2) \text{ и } B(x; y) = (x^2; 0).$$

Соответствующая диаграмма изображена

на рисунке 8 ( $A = (0; 0; 0; 0; 1; -1)$  и  $B = (1; 0; 0; 0; 0; 0)$ ). Сравнение с рисунками 3 и 4 показывает, что в центре рисунка 8 фактически присутствует логистическая бифуркационная диаграмма.

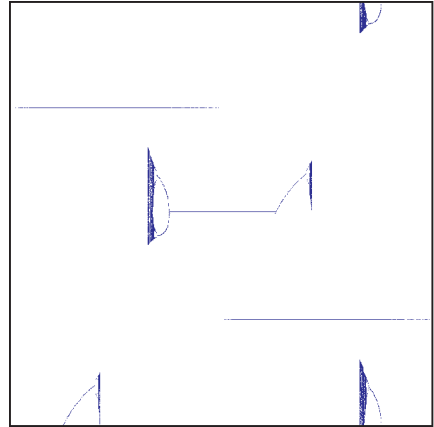


Рис. 8

Переход от координат  $\theta, \varphi$  к координатам  $x = \operatorname{tg} \theta, y = \operatorname{tg} \varphi$  дает точное соответствие между центральной частью рисунка 8 и рисунком 4.

### Отображения сферы

Тот самый фокус по превращению квадратичного преобразования плоскости в преобразование окружности мы повторим для пространства и сферы.

Квадратичным отображением трехмерного пространства назовем отображение  $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  вида

$$\begin{aligned} A(x; y; z) = & (a_1x^2 + a_2xy + a_3xz + a_4y^2 + a_5yz + a_6z^2; \\ & a_7x^2 + a_8xy + a_9xz + a_{10}y^2 + a_{11}yz + a_{12}z^2; \\ & a_{13}x^2 + a_{14}xy + a_{15}xz + a_{16}y^2 + a_{17}yz + a_{18}z^2). \end{aligned}$$

Пусть точка  $(x; y; z)$  лежит на единичной сфере с центром в начале координат, заданной уравнением  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Тогда точка  $A(x; y; z)/|A(x; y; z)|$  тоже лежит этой сфере, и мы получаем отображение единичной сферы в себя:

$$(x; y; z) \mapsto \frac{A(x; y; z)}{|A(x; y; z)|}.$$



Опять можно взять точку на сфере и посмотреть, что с ней происходит при многократном применении этого отображения, т.е. проследить за динамикой точек  $(x_n; y_n; z_n)$ .

Ограничимся одним примером. Рассмотрим квадратичное преобразование  $A$ , показанное на рисунке 9.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0879 & 0,9162 & 1,0522 & -0,1219 & 0,0408 & -1,0186 \\ 0,5917 & -0,0210 & -0,3582 & 0,4880 & -0,6976 & -0,4976 \\ -0,5585 & 0,4328 & 0,1542 & -1,0366 & 0,6024 & -0,1356 \end{pmatrix}$$

Рис. 9

Рисунок 10, напоминающий танцующую пару рыб, получен в результате 450000 итераций отображения единичной сферы,



Рис. 10

порожденного  $A$ . Каждая из последовательно полученных точек сферы  $(x_n; y_n; z_n)$  была спроецирована на плоскость:  $(x_n; y_n; z_n) \mapsto (x_n; y_n)$ . Все точки  $(x_n; y_n)$  лежат внутри единичного круга.

**Заключение**

Итак, на нескольких примерах мы увидели, что системы с очень простым описанием могут демонстрировать весьма нетривиальное поведение и «рисовать» сложные и красивые изображения со множеством деталей. Разумеется, в этой статье приведено лишь небольшое число таких картинок. Некоторое усложнение таких систем позволяет, например, рисовать *фракталы* – изображения, малые части которых, будучи рассмотрены под увели-

чительным стеклом, повторяют все изображение.<sup>4</sup>

В заключение скажем, что исследование поведения последовательности  $x_n$  в методе простых итераций  $(x_{n+1} = f(x_n))$  служит не только для создания эстетически приятных рисунков. Даже если мы оказа-

лись в ситуации, когда этот метод не сходится к точному решению уравнения  $f(x) = x$ , бывает важно понять, что все-таки происходит.

Один из примеров такой задачи, проходящей из экономики, связан с *паутинообразной моделью ценообразования*.<sup>5</sup> Вкратце, речь идет вот о чем. В капиталистическом обществе цены устанавливаются самими участниками рынка. Начнем с действующих в данное время цен  $x_0$ . Исходя из этих цен, производители и продавцы товаров стараются оптимизировать свою деятельность, после чего цены, выставяемые ими на товары, меняются:  $x_1 = f(x_0)$ , и этот процесс продолжается дальше:  $x_2 = f(x_1)$ ,  $x_3 = f(x_2)$ , ...<sup>6</sup> В «хорошем» случае итерационный процесс сойдется к уровню цен  $x$ , удовлетворяющему уравнению  $x = f(x)$ . Такие цены называются *равновесными*: даже если они кому-то покажутся несправедливыми, ни одному из участников рынка не выгодно их менять.

<sup>4</sup> О том, как поведение динамических систем порождает фракталы, см. в книге: Х.О.Пайтген, П.Х.Рихтер. Красота фракталов. – М.: Мир, 1993.

<sup>5</sup> Более подробно см., например: В.М.Гальперин, С.М.Игнатьев, В.И.Моргунов. Микроэкономика. – СПб.: Экономическая школа, 2004.

<sup>6</sup> Для простоты модели мы предполагаем, что экономическая деятельность осуществляется дискретно, по шагам, как в некоторых компьютерных играх-стратегиях.

В реальности, как мы видели в этой статье, так происходит не всегда, даже если наша экономическая модель (т.е. функция  $f$ ) описана простой и понятной формулой. Может возникнуть и периодическое, и хаотическое поведение.

Более классические примеры связаны с динамическими системами в механике. Уравнения, описывающие поведение ме-

ханических систем, довольно простые (грубо говоря, они получаются из законов Ньютона), однако поведение может оказаться очень сложным. Основы теории динамических систем заложил выдающийся французский математик А. Пуанкаре; впоследствии большой вклад в нее внесли А.Н. Колмогоров, В.И. Арнольд и другие.

## НАМ ПИШУТ

### Сечение с наименьшей площадью

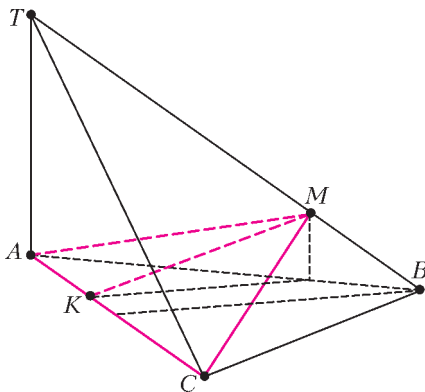
В последних номерах «Кванта» было опубликовано несколько статей под общим заглавием «Где ошибка?». Нам кажется очень важным и полезным тренироваться отличать правильные рассуждения от правдоподобных. Продолжая эту тему, наш постоянный автор и читатель С. Дворянинов предлагает протестировать на правильность решение следующей задачи.

**Задача.** Координаты вершин треугольной пирамиды  $TABC$  таковы:

$$T(2;1;0), A(0;0;1), B(1;1;0), C(0;0;2).$$

Пусть  $S$  – это площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания  $AC$  и пересекающей боковое ребро  $TB$ . Найдите наименьшее значение величины  $S$ .

**Решение.** Рассмотрим сечение  $AMC$  (см. рисунок). Пусть  $MK$  – высота треугольника



$AMC$ . Площадь треугольника окажется наименьшей, когда будет наименьшей длина отрезка  $MK$ . В свою очередь, эта длина является наименьшей из всех возможных, если она равна расстоянию между скрещивающимися прямыми  $AC$  и  $TB$ . Найдём это расстояние.

Прямая  $AC$  задается уравнениями  $x = 0, y = 0, z = t$ , прямая  $TB$  задается уравнениями  $x = s, y = 1, z = 0$ . Квадрат расстояния между точками этих двух прямых равен

$$d^2 = s^2 + 1^2 + t^2 \geq 1.$$

Равенство достигается при  $s = 0$  и  $t = 0$ . Отсюда следует, что расстояние между прямыми  $AC$  и  $TB$  равно 1. Длина ребра  $AC$  тоже равна 1. Следовательно, наименьшее значение  $S$  равно  $\frac{1}{2}$ .

Все ли верно в этом решении?

В приведенном рассуждении имеется пробел, связанный с тем, что одно из оснований общего перпендикуляра к прямым  $AC$  и  $TB$  может находиться не на отрезке  $TB$ , а на его продолжении. Можно проверить, что при данных в условии задачи числовых значениях именно так и происходит.

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru) и [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru) соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Автор задач Ф2529–Ф2532 – С.Крюков.

## Задачи М2522–М2525, Ф2529–Ф2532

**М2522.** Найдите все натуральные числа  $n$ , для которых существует перестановка  $a_1, \dots, a_n$  чисел  $1, \dots, n$  такая, что все числа  $|a_1 - 1|, |a_2 - 2|, \dots, |a_n - n|$  попарно различны.

Фольклор

**М2523.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $AB = AC$ ) точка  $M$  – середина высоты  $CH$  (рис. 1). Прямая, проходящая

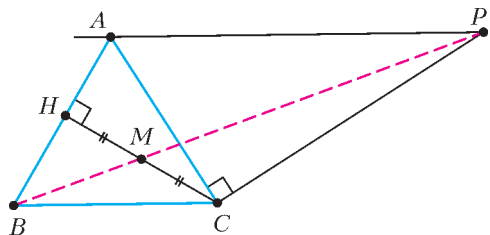


Рис. 1

через  $C$  и перпендикулярная прямой  $AC$ , пересекает прямую, проходящую через  $A$  и параллельную прямой  $BC$ , в точке  $P$ . Докажите, что точки  $B, M$  и  $P$  лежат на одной прямой.

Д.Пашуткин

**М2524.** Для каждой пары различных действительных чисел  $a, b$  найдите все функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  (т.е. функции, определенные на множестве всех действительных чисел и принимающие положительные значения) такие, что при всех  $x \in \mathbb{R}$ ,

$y \in \mathbb{R}$  выполнено равенство

$$f(xy) = (f(x))^{ay} (f(y))^{bx}.$$

Я.Алиев

**М2525.** Даны натуральные числа  $m, n, k, a, b, c$ . Прямоугольный параллелепипед  $m \times n \times k$  удалось разрезать на несколько «кирпичей» трех видов:  $a \times 1 \times 1, 1 \times b \times 1$  и  $1 \times 1 \times c$ . (Размеры указаны в заданном порядке – длина, ширина, высота; например,  $1 \times 1 \times 2$  и  $1 \times 2 \times 1$  – кирпичи разного вида.) Докажите, что верно хотя бы одно из следующих утверждений:  $m$  делится на  $a$ ;  $n$  делится на  $b$ ;  $k$  делится на  $c$ .

Т.Зиманов (Казахстан)

**Ф2529.** В аквариум в форме куба с длиной ребра  $2R$  «вписан» конус (ширина аквариума равна диаметру основания конуса, высота конуса равна высоте аквариума). Аквариум с находящимся в нем конусом полностью залит водой. Определите минимальную работу, которую следует совершить, чтобы «осушить» конус (вынуть его из воды). Плотность воды  $\rho_0$ , плотность материала конуса  $\rho$ .

**Ф2530.** На дне пустого колодца лежит груз массой  $m$ , к которому привязан невесомый упругий шнур длиной  $L$ , а второй конец шнура привязан к барабану на уровне его оси (рис. 2). На шнуре на высоте  $9/10 L$  от дна колодца находится «метка».

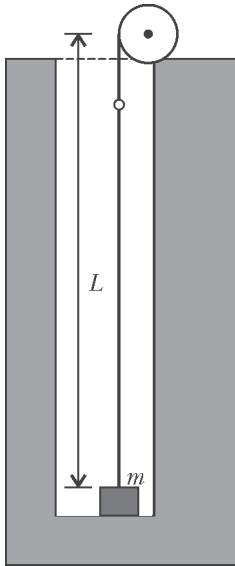


Рис. 2

воротом специального шаблона в этом ящике можно открывать выводы (точки

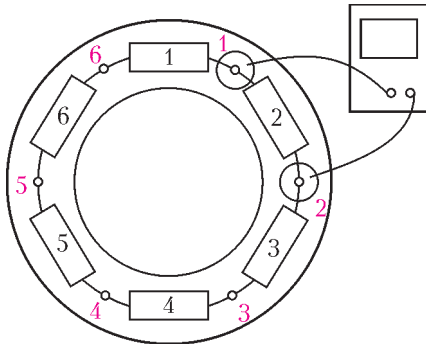


Рис. 3

соединения) только одного резистора и измерять прибором (омметром) сопротивление между этими точками. В ходе эксперимента были измерены значения шести величин:  $R_{12}, R_{23}, R_{34}, R_{45}, R_{56}, R_{61}$  (второй индекс соответствует номеру резистора). Определите по этим данным истинные значения сопротивлений всех шести резисторов.

**Ф2532.** Каково соотношение между высотой горы  $h$  и глубиной шахты  $H$  (рис.4), если периоды малых колебаний математического маятника на вершине горы и на

В начальный момент времени шнур не деформирован. Какую работу необходимо совершить для того, чтобы оторвать груз от дна колодца? Шнур при наматывании не проскальзывает относительно барабана (как бы прилипает к нему). Известно, что при отрыве груза метка оказывается на высоте оси барабана.

**Ф2531.** В «сером» ящике находится кольцо из шести резисторов (рис.3). По

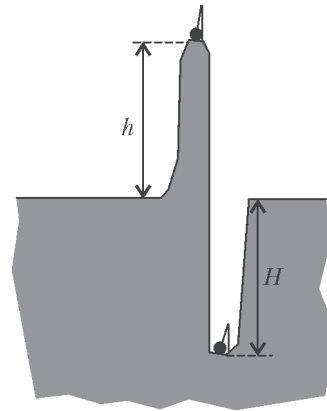


Рис. 4

дне шахты одинаковы? (Считайте, что Земля – однородный не вращающийся шар.)

**Решения задач M2510–M2513, Ф2517–Ф2520**

**M2510.** Точка  $O$  – центр описанной окружности остроугольного треугольника  $ABC$ ,  $AH$  – его

высота (рис.1). Точка  $P$  – основание перпендикуляра, опущенного из точки  $A$  на прямую  $CO$ . Докажите, что прямая  $HP$  проходит через середину стороны  $AB$ .

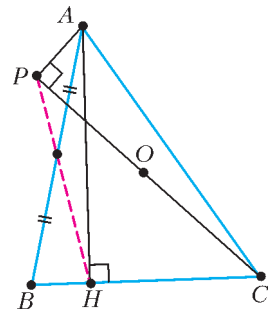


Рис. 1

Заметим, что  $\angle ACO = 90^\circ - \angle ABC$ . Действительно, центральный угол  $AOC$  равен двум углам  $BAC$ , и из равнобедренного треугольника  $AOC$  получаем  $\angle ACO = 90^\circ - \angle ABC$ . Поскольку  $AP \perp PC$  и  $AH \perp HC$ , четырехугольник  $APHC$  – вписанный (рис.2). Отсюда  $\angle ANP = \angle ACO = 90^\circ - \angle ABC$ . Пусть  $M$  – середина  $AB$ . В прямоугольном треугольнике  $ABH$ :  $MA = MB = MH$ , откуда  $\angle ANM = \angle MAN = 90^\circ - \angle ABC$ . Итак,  $\angle ANM = \angle ANP$ , т.е. прямые  $NM$  и  $NP$  совпадают, что и требовалось. Задача решена.

Другое решение можно получить, заметив, что  $PH$  – это прямая Симсона для

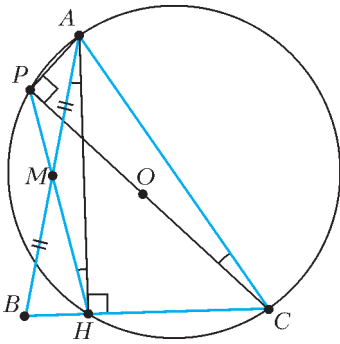


Рис. 2

точки  $A$  и прямоугольного треугольника  $BCD$ , где  $CD$  – диаметр описанной окружности треугольника  $ABC$  (рис.3). Тогда

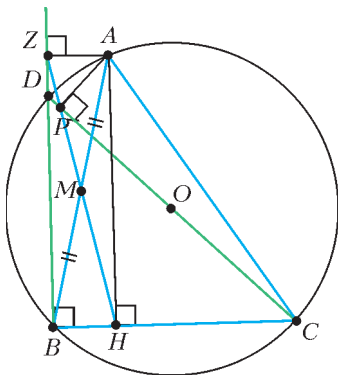


Рис. 3

прямая  $PH$  проходит через проекцию  $Z$  точки  $A$  на прямую  $BD$ . Тем самым, прямая  $PH$  – диагональ прямоугольника  $AHBZ$ , а значит, она делит пополам его диагональ  $AB$ .

Е.Бакаев

**M2511.** Существуют ли такие 2018 несократимых дробей с натуральными числителями и различными натуральными знаменателями, что знаменатель разности любых двух из них после приведения к несократимому виду окажется меньше знаменателя любой из исходных 2018 дробей?

**Ответ:** существуют.

Опишем один из возможных примеров. Вначале рассмотрим произвольные дроби

$\frac{1}{q_1}, \dots, \frac{1}{q_{2018}}$ , где  $q_1, \dots, q_{2018}$  – различные

простые числа. Разность  $\frac{1}{q_i} - \frac{1}{q_j}$  равна  $\frac{q_j - q_i}{q_i q_j}$ . Это несократимая дробь (при  $i \neq j$ ), так как  $q_j - q_i$  не делится ни на  $q_i$ , ни на  $q_j$ . Теперь прибавим к каждой дроби  $\frac{1}{q_i}$  дробь  $\frac{1}{q}$ , где  $q$  – простое число, большее каждого  $q_i^2$ . От этого прибавления множество разностей не изменилось. В результате получим дроби вида  $\frac{1}{q_i} + \frac{1}{q} = \frac{q_i + q}{q_i q}$  – это несократимые дроби (так как  $q_i + q$  не делится ни на  $q_i$ , ни на  $q$ ). Пусть дроби  $\frac{q_i + q}{q_i q}$  ( $i = 1, \dots, 2018$ ) – это и будут наши данные несократимые дроби. Знаменатель каждой из них больше  $q$ , а знаменатель разности любых двух из них меньше  $q$ .

М.Дидин

**M2512.** Дано натуральное число  $n > 1$ . Что больше: количество способов разрезать клетчатый квадрат  $3n \times 3n$  на клетчатые прямоугольники  $1 \times 3$  или количество способов разрезать клетчатый квадрат  $2n \times 2n$  на клетчатые прямоугольники  $1 \times 2$ ?

**Ответ:** больше количество разбиений квадрата  $3n \times 3n$  на триминошки  $1 \times 3$ .

Опишем процедуру, которая сопоставляет каждому разбиению квадрата  $2n \times 2n$  на доминошки  $1 \times 2$  разбиение квадрата  $3n \times 3n$  на триминошки.

Предположим, что задано некоторое разбиение квадрата  $2n \times 2n$  на доминошки. Сделаем  $n$  дополнительных горизонтальных разрезов: разрежем каждый второй горизонтальный ряд (рис.1). Аналогично сделаем  $n$  дополнительных вертикальных разрезов. Теперь мы получили квадрат

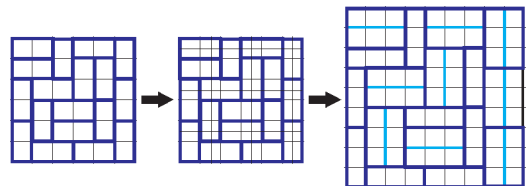


Рис. 1

$3n \times 3n$ , разбитый на прямоугольные «клетки» неравных размеров. Увеличим ширину каждого «узкого» вертикального и горизонтального ряда так, чтобы получился квадрат  $3n \times 3n$ , разбитый на единичные клетки. Далее будем называть этот квадрат  $3n \times 3n$  *новым* квадратом, а исходный квадрат  $2n \times 2n$  – *старым*. Каждая отдельная клетка старого квадрата либо осталась клеткой, либо стала прямоугольником  $1 \times 2$ , либо  $2 \times 1$ , либо  $2 \times 2$  в новом квадрате.

Посмотрим, что произошло с доминошками при переходе от старого квадрата к новому. Каждая доминошка становится либо триминошкой, либо прямоугольником  $2 \times 3$  или  $3 \times 2$ . Разрезав дополнительно каждый из этих прямоугольников на две триминошки, мы по данному разбиению старого квадрата на доминошки получим некоторое разбиение нового квадрата  $3n \times 3n$  на триминошки.

Докажем, что описанная процедура переводит разные разбиения старого квадрата в разные разбиения нового квадрата. Предположим, что два различных разбиения на доминошки квадрата  $2n \times 2n$  после выполнения процедуры становятся одним и тем же разбиением на триминошки квадрата  $3n \times 3n$ . Поскольку разбиения на доминошки различны, существует клетка в квадрате  $2n \times 2n$ , накрытая в этих разбиениях доминошками по-разному. Но тогда и после выполнения процедуры образ этой клетки (т.е. прямоугольник  $1 \times 1$ , либо  $1 \times 2$ , либо  $2 \times 1$ , либо  $2 \times 2$ ) будет накрыт триминошками по-разному. Значит, разбиения на триминошки разные – противоречие.

Построенное соответствие уже доказывает, что разбиений квадрата  $3n \times 3n$  на триминошки не меньше, чем разбиений квадрата  $2n \times 2n$  на доминошки. Осталось предъявить хотя бы одно разбиение квадрата  $3n \times 3n$  на триминошки, которое не получается описанной выше процедурой из разрезания старого квадрата  $2n \times 2n$  на доминошки. Подойдет любое разбиение на триминошки, в

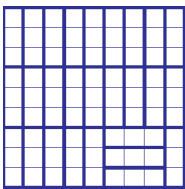


Рис. 2

котором к правому нижнему углу (т.е. образованному последними строкой и столбцом) примыкает вертикальная триминошка, а слева к ней примыкают три горизонтальные триминошки (рис.2).

В.Брагин

**M2513.** В некотором государстве сложение и вычитание обозначаются знаками «!» и «?», но вам неизвестно, какой знак какой операции соответствует. Каждая операция применяется к двум числам, но про вычитание вам неизвестно, вычитается левое число из правого или правое из левого. К примеру, выражение  $a?b$  обозначает одно из следующих:  $a - b$ ,  $b - a$  или  $a + b$ . Вам неизвестно, как записываются числа в этом государстве, но переменные  $a$ ,  $b$  и скобки есть и используются, как обычно. Объясните, как с помощью них и знаков «!», «?» записать выражение, которое гарантированно равно  $20a - 18b$ .

Сначала изготовим ноль:

$$(a?a)!(a?a).$$

Легко видеть, что это выражение равно нулю вне зависимости от того, какой из знаков «!», «?» означает «+», а какой означает «-». Далее мы сокращенно обозначаем это выражение как  $O$ .

Теперь изготовим сложение:

$$(a?O)?(O?b).$$

Это выражение в любом случае равно  $a + b$ .

Затем сделаем вычитание. Выражение

$$(a?O)!(O?b)$$

равно либо  $a - b$ , либо  $b - a$ , в зависимости от значения «!» и «?». Сокращенно обозначим его как  $a ; b$ .

Наконец, реализуем обычное вычитание:

$$(a;b);O.$$

Это выражение в любом случае равно  $a - b$ .

После того как мы сумели сделать сложение и вычитание, мы можем записать  $20a - 18b$  так:

$$(a + (a + (...))) - (b + (b + (...))),$$

где  $a$  появляется 20 раз и  $b$  появляется 18 раз.

Н.Белухов

**Ф2517.**<sup>1</sup> Тело бросили под углом  $\alpha$  к горизонту. Найдите угол  $\beta$ , образуемый с горизонтом радиусом-вектором этого тела, проведенным из точки бросания, к тому моменту, когда скорость тела будет перпендикулярна начальной. Сопротивлением воздуха пренебречь.

При описании движения тела, брошенного под углом к горизонту, часто бывает удобно использовать векторную форму записи для скорости тела  $\vec{v}(t)$  и его радиуса-вектора  $\vec{r}(t)$ :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t,$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.$$

Соответствующие (иллюстрирующие) построения приведены на рисунках 1, а и 1, б (при  $r_0 = 0$ ).

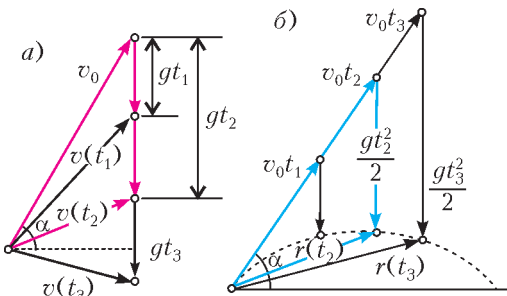


Рис. 1

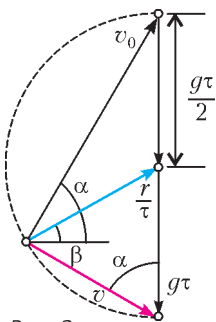


Рис. 2

Для решения задачи наложим друг на друга векторные треугольники

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}\tau$$

$$\vec{r} = \vec{v}_0\tau + \frac{\vec{g}\tau^2}{2}$$

после сокращения последнего на  $\tau$  (рис.2). Из рисунка 2 явствует, что верхний и нижний

треугольники равнобедренные, ибо по условию  $\vec{v}_0 \perp \vec{v}$ , и, стало быть, скорости эти образуют вписанный угол, опирающийся на диаметр  $g\tau$ . Отсюда находим

$$\beta = \alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2\alpha - \frac{\pi}{2}.$$

**Ф2518.** При накачивании автомобильной шины ручным насосом каждая порция атмосферного воздуха, оказавшаяся в нем, сжимается поршнем до уровня давления в шине, после чего вкачивается внутрь. Определите теплоемкость газа в процессе сжатия, если подкачка производится при нормальных условиях, температура поступающего в шину воздуха  $t = 40^\circ\text{C}$ , объем насоса  $V = 0,55$  л, а произведенная над газом работа  $A = 60$  Дж. Молярную теплоемкость воздуха при постоянном объеме принять равной  $C_V = 2,5R$ .

Согласно первому началу термодинамики, полученное термодинамической системой, в нашем случае газом, количество теплоты равно

$$Q = \Delta U + A_r,$$

где  $A_r$  – работа газа, а  $\Delta U$  – приращение его внутренней энергии. По определению теплоемкость газа в процессе сжатия равна

$$C = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U + A_r}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{A_r}{\Delta T} =$$

$$= \nu C_V - \frac{A}{\Delta T} = \frac{V}{V_M} C_V - \frac{A}{t} = -1,0 \text{ Дж/К},$$

где  $\nu C_V$  – теплоемкость при постоянном объеме данной порции газа,  $\nu$  – число молей,  $V_M = 22,4$  л – молярный объем воздуха при нормальных условиях,  $\Delta T = t - 0^\circ\text{C}$  – изменение температуры. Теплоемкость получилась отрицательной, что вполне понятно: при сжатии газа за счет большой совершенной работы он нагревается, отдавая при этом некоторое количество теплоты (ведь температура насоса явно выше температуры окружающей среды). Таким образом, «полученное» количество теплоты оказывается меньше нуля, а числитель и знаменатель в определении теплоемкости имеют разные знаки.

<sup>1</sup> Автор решений задач Ф2517–Ф2520 – С.Крюков.

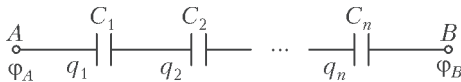
**Ф2519.** Конденсаторы емкостями  $C_1, C_2, \dots, C_n$  заряжают до напряжений  $U_1, U_2, \dots, U_n$  соответственно (при этом суммарный заряд пластин каждого конденсатора, естественно, равен нулю). Затем из конденсаторов образуют последовательную цепочку, свободные концы которой соединяют друг с другом. Найдите заряд  $q$ , прошедший по цепи.

Единственное условие, которому подчиняется распределение зарядов на поверхности системы проводников, – это равенство нулю напряженности поля в каждой точке внутри каждого проводника. Теорема единственности утверждает, что такое распределение всегда существует и оно единственно, т.е. других распределений, удовлетворяющих данному условию, нет. Это обстоятельство позволяет в ряде ситуаций представить искомую систему зарядов в виде суперпозиции двух или нескольких более простых подсистем, каждая из которых (в отдельности) не создает поля ни в одном из имеющихся проводников. Попробуем использовать эту методику при решении данной задачи.

Пусть  $q_i$  – алгебраическая величина заряда на левой обкладке  $i$ -го конденсатора (см. рисунок). Тогда

$$U = \varphi_A - \varphi_B = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{C_i},$$

причем система зарядов  $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  не



создает поля ни в одном из проводников рассматриваемой схемы. Возьмем такую же цепочку незаряженных конденсаторов и зарядим ее до такого же, но противоположного по знаку напряжения  $-U = \varphi_B - \varphi_A$ . При этом, очевидно, на правой обкладке каждого конденсатора окажется заряд

$$q = UC_{\text{экв}} = \frac{U}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}},$$

и ни в одном из проводников нашей схемы

также не возникнет электрического поля. Наложим теперь эти два распределения друг на друга. Поскольку каждое из них порознь не создает поля ни в одном из проводников, простая их суперпозиция (без взаимного искажения) его там тоже не создаст. Поля в каждой точке и напряжения на каждом участке, очевидно, сложатся, и потенциалы точек  $A$  и  $B$  сравняются. Но эта картина и есть конечное состояние системы. Стало быть, по цепи в направлении от  $B$  к  $A$  протечет заряд

$$q = \frac{\sum_{i=1}^n U_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}}.$$

**Ф2520.** На сферическую границу раздела двух сред падает произвольный (приосевое) луч. На рисунке 1 граница раздела

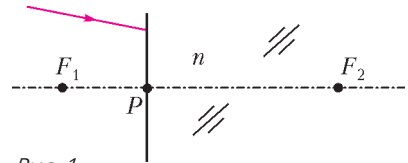


Рис. 1

сред аппроксимирована (приосевое приближение) плоскостью, пересекающей ось системы в точке  $P$ . Постройте дальнейший ход луча, если заданы передний  $F_1$  и задний  $F_2$  фокусы системы для выбранной оси.

При решении аналогичной задачи с линзой можно было использовать в качестве вспомогательного любой из двух параллельных заданному базовых лучей: либо идущий через оптический центр, либо – через передний фокус. Аналогом первого луча в

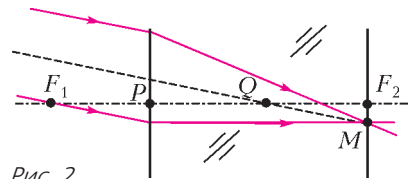


Рис. 2

нашем случае является луч, проходящий через центр  $O$  сферической границы раз-

(Продолжение см. на с. 26)

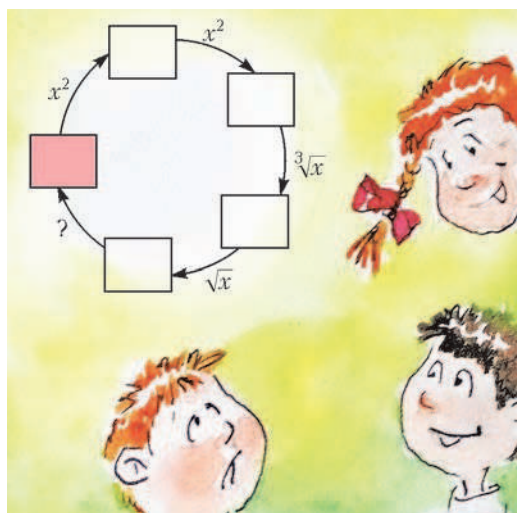


## Задачи

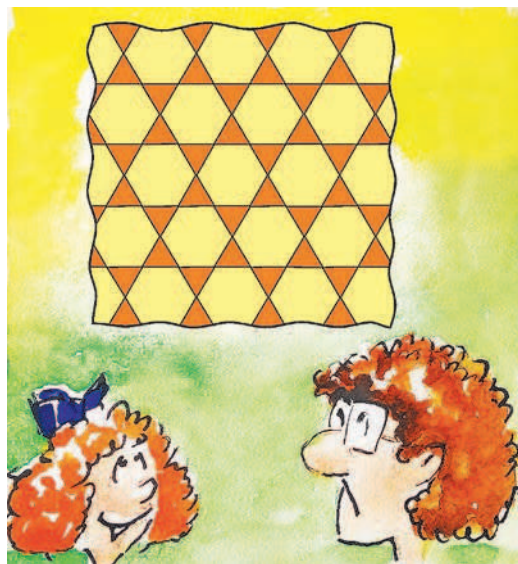
1. Сидор — сын брата жены Петра. Кем приходится Петр Сидору?



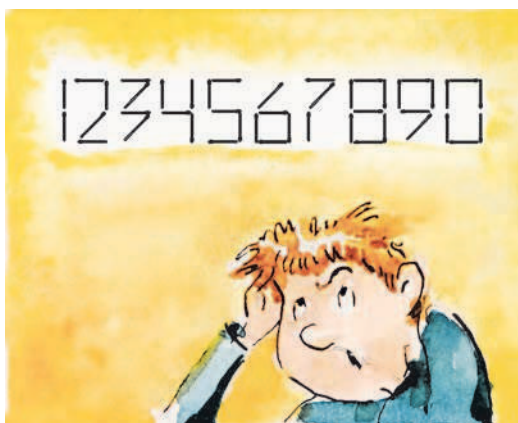
2. Какую операцию нужно добавить, чтобы схему на рисунке можно было правильно заполнить числами, поставив в закрашенную клетку любое положительное число?



3. На рисунке показан фрагмент мозаики, сложенной из одинаковых деталей. Как может выглядеть одна такая деталь?



4. Дима узнал способ выкладывать цифры спичками (см. рисунок). Какое наибольшее число он может составить, используя 17 спичек?



Иллюстрации Д. Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Эти задачи предлагались на Международном математическом конкурсе-игре «Кенгуру» в 2018 году.

# XXIV Турнир математических боев имени А.П. Савина

XXIV Турнир математических боев имени А.П.Савина прошел с 26 июня по 2 июля 2018 года в Костромской области на базе отдыха «Берендевы Поляны».

В турнире приняли участие 34 команды школьников, окончивших 5–9 классы, из Москвы, Санкт-Петербурга, Ярославля, Иванова, Вологды и Жуковского.

Задачи были составлены и подобраны жюри под руководством А.Грибалко и старших по лигам: М.Хачатурян – 5 классы, Е.Бакаева – 6 классы, А.Пешнина – 7 классы, М.Артемяева – 8 классы. По результатам командной олимпиады команды шестых классов были разбиты на две лиги: высшую и первую.

Победителями и призерами турнира стали следующие команды (в скобках указан руководитель команды на турнире).

## Лига 5 классов

диплом I степени: Вологодский математический лицей-1 (А.Чегодаев),

диплом II степени: Москва-1543-5-1 (И.Раскина),

диплом III степени: Москва-1543-5-2 (И.Раскина).

## Высшая лига 6 классов

диплом I степени: Москва-ЦДО-6Б (К.Скопцов),

дипломы II степени: Москва-2007-6-1 (Р.Христолюбов) и Жуковский-5-6 (И.Иванов-Погодаев),

дипломы III степени: Жуковский-6 (Е.Рудакова) и Москва-1514-6-2 (О.Морозова).

## Первая лига 6 классов

диплом I степени: Ярославль-6 (И.Преображенский),

диплом II степени: Москва-1514-6-1 (О.Морозова),

диплом III степени: Москва-Новая школа-6 (Н.Мартынова).

## Лига 7 классов

диплом I степени: Ярославль-7 (И.Преображенский),

диплом II степени: Москва-1329-7 (Е.Бакаев),

диплом III степени: Москва-2007-7-1 (О.Агаханова).

## Лига 8 классов

диплом I степени: Москва-2007-8 (О.Деркач),

диплом II степени: Ярославль-8 (И.Преображенский),

дипломы III степени: Санкт-Петербург-30 (А.Садчиков) и Москва-1543-8 (О.Заславский).

Победителями личной олимпиады 5 класса стали Бурмистров Владислав (Москва, школа 444) и Мордакин Антон (Москва, школа 1543). Абсолютные победители (школьники, набравшие наибольшее количество баллов) олимпиады 6 класса: Або Полина (Санкт-Петербург, школа 369), Кондаков Илья (Москва, школа 1514), Тихонов Григорий (Москва, школа 1543). В 7 классе победителем стала Кобышева Екатерина (Москва, школа 1329), а в 8 классе – Дюдин Тимофей (Москва, школа 2007).

Подробную информацию о турнире можно найти на сайте [tursavin.ru](http://tursavin.ru)

## Избранные задачи

1. (8)<sup>1</sup> Назовем натуральное число *суперпростым*, если сумма его цифр – простое число. Назовем натуральное число *суперсуперпростым*, если сумма его цифр – суперпростое число. Какое наибольшее количество суперсуперпростых чисел могут стоять подряд в натуральном ряду?

Д.Шноль

2. (8) На доске размером  $100 \times 100$  расставлено 100 ладей, не бьющих друг друга. Для каждой из них подсчитали, какой наименьший суммарный путь должны пройти остальные ладьи, чтобы попасть на ту клетку, где находится эта ладья. Докажите, что если для каких-то двух ладей полученные величины равны, то центры клеток, в которых стоят эти ладьи, равноудалены от центра доски.

А.Грибалко

3. (6–8) Трус, Балбес и Бывалый раздобыли три бутылки самогона. Они знают, что в какой-то из бутылей его крепость равна 45%, в какой-то – 65%, а в какой-то – 70%. Они могут отмерять любое количество самогона. Выпив стакан, каждый самогонщик роняет его в том и только в том случае, если его содержимое было крепче

<sup>1</sup> В скобках после номера задачи указан класс, в котором она предлагалась.



60%. Как всем трем наполнить стаканы и, выпив их одновременно, определить крепость в каждой бутылки?

*С.Токарев*

4. (8) Все натуральные числа от 1 до  $n^2$  требуется расставить в таблице размером  $n \times n$  так, чтобы в каждом «уголке» из трех клеток сумма чисел не делилась на 3. При каких  $n$  это возможно?

*А.Грибалко*

5. (8) Из шестнадцати монет две фальшивые, более легкие. Если на чашечные весы положить фальшивую и настоящую монеты, то весы останутся в равновесии, но две настоящие монеты перевешивают две фальшивые. Можно ли найти обе фальшивые монеты, сделав не более шести взвешиваний?

*А.Заславский, К.Кноп*

6. (8) Петя и Вася играют в игру на полоске  $1 \times N$  клеток. Первым ходит Петя, ставя фишку на любую клетку. Далее Вася передвигает ее на 3 или на 4 клетки в любую сторону, затем таким же образом фишку двигает Петя и так далее. Дважды ставить фишку на одно и то же поле нельзя. Тот, кто не сможет сделать ход, проигрывает. Кто из игроков сможет гарантировать себе победу вне зависимости от ходов противника?

*Е.Бакаев*

7. (8) У шаха есть  $N$  камней массой 1, 2, ...,  $N$  карат ( $N > 2$ ). Он хочет сделать из некоторых из них ожерелье так, чтобы массы любых двух соседних камней в ожерелье отличались хотя бы вдвое. Какое наибольшее количество камней может быть

в ожерелье? (Ожерелье сцеплено в кольцо.)

*Е.Горская*

8. (7–8) В угловой клетке доски размером  $100 \times 100$  клеток стоит шахматный король. Петя и Вася по очереди делают им ходы так, чтобы расстояние от центра начальной клетки до центра той, в которой находится король, после каждого хода увеличивалось. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто сможет выиграть, независимо от ходов соперника?

*А.Грибалко*

9. (8) В волейбольном турнире меньше всех очков набрала команда с положительной разностью выигранных и проигранных партий. Какое наименьшее количество команд могло участвовать в этом турнире? (Каждая команда сыграла с каждой один матч, который состоит из нескольких партий до трех побед одной из команд. Если счет партий 3 : 0 или 3 : 1, то за победу дается 3 очка, за поражение – 0; если счет партий 3 : 2, за победу – 2 очка, за поражение – 1 очко.)

*А.Заславский*

10. (7–8) Назовем семиугольник *прямоугольным*, если у него есть четыре прямых угла. Докажите, что любой прямоугольный семиугольник можно разрезать на семь прямоугольных семиугольников.

*А.Пешнин*

11. Дан прямоугольник  $ABCD$ . На стороне  $BC$  отмечена точка  $K$ , а на стороне  $CD$  – точка  $L$  так, что  $CK = DL$  и  $\angle DAL = \angle LAK$ .



- а) (7) Найдите  $\angle KLA$ .  
 б) (8) Докажите, что биссектрисы углов  $C$  и  $D$  прямоугольника пересекаются на прямой  $AL$ .

*Е.Бакаев*

**12.** (8) Олег и Миша играют с 27 одинаковыми белыми кубиками. Олег каждым своим ходом склеивает любые два многогранника (кубики можно склеивать только целыми гранями), а Миша красит поверхность любого многогранника красным фломастером. Начинает Олег. Игра продолжается, пока все кубики не будут склеены в один многогранник, который будет покрашен. Олег хочет, чтобы по крайней мере у 20 кубиков количество красных граней с учетом «спрятанных» внутри многогранника оказалось четным. Сможет ли Миша ему помешать?

*Н.Наконечный*

**13.** (7–8) Даны числа от 1 до 64. Одним действием можно стереть ровно три числа:

(Начало см. на с. 17)

дела (показан пунктиром на рисунке 2), но центр этот нам не задан. Луч, пересекающий границу в точке  $P$ , не может быть использован для построений, ибо он «ломается» в этой точке. Остается только луч, идущий через передний фокус. После преломления он пойдет параллельно выбранной главной оптической оси  $F_1F_2$ . Проведем заднюю фокальную плоскость и найдем точку  $M$  ее пересечения с этим лучом. Через нее и пройдет преломленный заданный падающий луч.

*Замечание 1.* В рассуждениях использовался факт существования задней фокальной плоскости сферической границы раздела, хотя при выводе формулы преломления на сферической поверхности понятие фокальной плоскости обычно вообще не вводится. Однако ситуация тут тривиальная. Совершенно очевидно, что фокальными поверхностями здесь будут сферы радиусами  $OF_1$  и  $OF_2$ , которые в паракиальном приближении аппроксимируются

какое-нибудь число  $X$ ; одно из чисел, отличающихся от  $X$  на 1; одно из чисел, отличающихся от  $X$  на 8. После нескольких действий осталось ровно одно число. Найдите все варианты, каким оно могло быть.

*Е.Бакаев*

**14.** (7–8) На катетах  $AC$  и  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники  $ACP$  и  $BCQ$ . Найдите отношение длины отрезка  $BP$  к длине отрезка, соединяющего середины  $AB$  и  $PQ$ .

*А.Пешнин*

**15.** (7–8) Барон Мюнхгаузен говорит, что перегнул некоторый бумажный треугольник по прямой, сделал ножницами прямой разрез, получил три части, согнутые части разогнул – и все три оказались равными неравносторонними треугольниками. Могут ли слова барона быть правдой?

*А.Шаповалов*

*Публикацию подготовил А.Блинков*

перпендикулярными главной оптической оси плоскостями.

*Замечание 2.* Хотя центр границы раздела нам не задан, он легко находится. В самом деле, полагая в формуле преломления на сферической поверхности

$$\frac{1}{d} + \frac{n}{f} = \frac{(n-1)}{R}$$

( $d$  – расстояние до источника,  $f$  – до изображения) сначала  $d \rightarrow \infty$ , а затем  $f \rightarrow \infty$ , найдем, соответственно,

$$F_2 = \frac{n}{n-1}R, \quad F_1 = \frac{1}{n-1}R,$$

откуда для любого  $n$  получим

$$F_2 - F_1 = R.$$

Стало быть, центр  $O$  данной сферической поверхности лежит на расстоянии  $F_2 - F_1$  от точки  $P$ . Луч, параллельный заданному и проходящий через этот центр (проведен пунктиром на рисунке 2), не испытывает преломления, как идущий вдоль радиуса, и потому может также быть использован для нахождения точки  $M$ .

# Потенциальная яма и принцип чайной ложечки

С.ДВОРЯНИНОВ

**П**ОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЯМА – ЭТО, КОНЕЧНО, выражение образное. Вспомним подобные выражения: не вешать носа, развесить уши, дать прикурить, говорить под руку, искать ветра в поле. Ясно, что повесить нос можно только в переносном смысле, а вот загрузить, впасть в уныние – это бывает.

Вводя понятие потенциальной ямы, в учебниках физики обычно рисуют шарик, который катается по кривой, представляющей собой график функции, имеющей две точки минимума и точку максимума между ними (рис.1). Функция выражает значение потен-

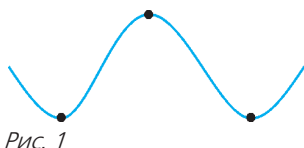


Рис. 1

циальной энергии шарика. Точке минимума соответствует потенциальная яма, точке максимума – потенциальный барьер. Таким образом, потенциальной ямой физики называют состояние рассматриваемой системы с минимумом ее потенциальной энергии. Сам по себе из одной ямы в другую шарик перекатиться не может. Для его перемещения требуется приложить внешнюю силу и совершить достаточную для преодоления потенциального барьера работу. (Правда, имеются ситуации, когда частица, не макроскопический шарик, с некоторой вероятностью может преодолеть такой барьер без всякой «внешней» помощи. Этим объясняется, например, явление альфа-распада тяжелых ядер.)

Потенциальную яму каждый из нас наблюдает чуть ли не ежедневно. Представьте, например, что на столе стоит стакан чая с чайной ложечкой внутри и блюдце. Размешав чай, вы хотите положить ложечку на блюдце. Для этого надо совершить работу – поднять ложечку выше стакана, преодолеть потенциальный барьер. Положение ложечки и в стакане, и на блюдце – устойчиво. Если чаепитие происходит, скажем, в вагоне движущегося поезда, то небольшие толчки или сотрясения оставят ложечку на месте и в стакане, и на блюдце. В этой простейшей ситуации дно стакана и блюдце – это две потенциальные ямы, а ложечка – перекатываемый из одной ямы в другую шарик.

Оказывается, подобная абстрактная «ложечка» присутствует во многих окружающих нас конструкциях, где вместо потенциальной энергии гравитационного взаимодействия с Землей надо рассматривать потенциальную энергию деформируемой пружины.

**Электрический выключатель.** На рисунке 2 изображена схема электрического вы-

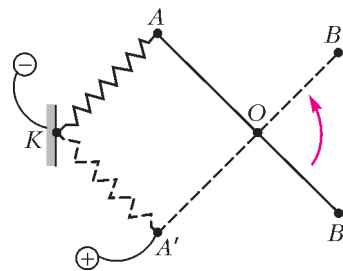


Рис. 2

ключателя, когда электрическая цепь разомкнута. При повороте пластмассового рычажка  $AB$  вокруг точки  $O$  против часовой стрелки пружина из положения  $KA$  переходит в положение  $KA'$  и замыкает цепь. На этом пути пружина сначала сжимается (ее потенциальная энергия увеличивается), потом разжимается. Почему? Да потому, что в треугольнике  $AOK$  сумма длин двух сторон  $AO$  и  $AK$  больше длины стороны  $KO$ . Когда пружина и отрезок  $AO$  располагаются на отрезке  $KO$ , пружина неизбежно оказывается сжатой. Крайние положения пружины – это потенциальные ямы. Оба эти положения пружины (и рычажка  $AB$ ) устойчивы.

Проведем простой эксперимент. Если слегка нажать на клавишу настенного выключателя и затем отпустить ее, то клавиша, щелк-

нув, вернется в исходное положение. Это и есть явное проявление устойчивости. Никакие слабые случайные возмущения этого устройства (т.е. несильные толчки или сотрясения) не нарушат состояние системы: электрическая цепь останется либо замкнутой, либо разомкнутой, т.е. будет функционировать устойчиво.

На рисунке 2 представлена, как говорят, принципиальная схема выключателя, в каждом конкретном случае она реализуется разными технологическими решениями.

**Велосипедная подножка.** Теперь обратим свое внимание на велосипед, а точнее – на атрибут современных велосипедов, называемый подножкой (рис.3). Это устройство призвано удерживать неподвижный велосипед от падения.



Рис. 3

Снова рассмотрим лишь принципиальную схему устройства, т.е. будем говорить только о важнейших его элементах, не вдаваясь во все детали. Таких элементов здесь всего два – собственно подножка и пружина. Они вместе играют роль чайной ложечки. Пусть один конец пружины закреплен в точке  $K$ , в положении  $OA$  подножка убрана, а в положении  $OA'$  она удерживает велосипед от падения (рис.4).

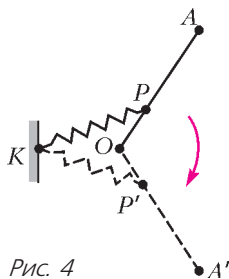


Рис. 4

Если мы переводим подножку из одного положения в другое, то пружину мы вначале растягиваем. Про достижения на пути из  $OP$  в  $OP'$  серединного положения пружина начинает сжиматься и подножка с ударом переходит в новое устой-

чивое положение. Потенциальный барьер соответствует неустойчивому положению пружины (и подножки). Малейшее отклонение подножки от этого положения или же придание ей скорости мгновенно переводит систему в одно из устойчивых положений. На деле одно из этих устойчивых положений соответствует убранной подножке, и оно востребовано при движении велосипеда. Другое устойчивое положение подножки, опирающейся на землю, используют для покоящегося велосипеда.

Обратите внимание: на практике важны именно устойчивые положения равновесия! Использование же неустойчивых точек покоя – явления редкие, можно сказать, экзотические. Вот поэтому и демонстрируют их цирковые эквилибристы или же переходящие через горные ущелья канатоходцы.

**Устойчивость и неустойчивость положений равновесия.** Устойчивость – понятие универсальное. В наши дни часто говорят о принципах устойчивого природопользования и устойчивого развития человечества, о социальной стабильности в обществе. Иными словами, термины «устойчивость» и «неустойчивость» сегодня являются широко распространенными и многозначными. Заметим, что в математике есть целое направление – математическая теория устойчивости; многочлены, все корни которых имеют отрицательные вещественные части, называются устойчивыми. В школе учащиеся впервые знакомятся с устойчивостью и равновесием на уроках физики. А в жизни, конечно, намного раньше: когда качаются на детских качелях или сооружают из кубиков падающие башни.

Напомним, что положение равновесия называют неустойчивым, если всякое малое отклонение системы от этого положения приводит к появлению силы, которая это отклонение увеличивает. Самый популярный и наглядный пример таков. Шарик находится на вершине холма и неподвижен – можно рассматривать маленький шарик, находящийся на «северном полюсе» большого шара. Всякое малое смещение малого шарика или же придание ему сколь угодно малой скорости приведет к появлению скатывающей силы, удаляющей его от исходного положения равновесия или исходного положения покоя. Значит, и равновесие, и

покой в этом случае неустойчивы. Другой пример – карточный домик.

Если же при отклонении системы от положения равновесия появляется сила, возвращающая систему в исходное состояние, то это положение равновесия называют устойчивым. Примером служит шарик, находящийся в ямке (или ложбине).

Для сжатия или растяжения пружины требуется совершить некоторую работу. Эта работа приводит к увеличению потенциальной энергии, накопленной пружиной. Деформированная пружина стремится вернуться в исходное недеформированное состояние, которому соответствует минимум потенциальной энергии. Недеформированное состояние пружины является устойчивым потому, что ее растяжение или сжатие вызывает появление силы упругости, которая стремится вернуть пружину (и связанную с ней систему) в исходное состояние.

**Где еще применяют такие пружины.** Существует очень много механических реализаций рассмотренных принципиальных схем и их модификаций. Даже на фотоаппарате, которым были сделаны снимки, представленные далее на рисунках 5 – 7, прикрывающая контакты крышка в положениях *открыто/закрыто* фиксируется подобным запирающим устройством.

Так, в трамвае крышка аварийного люка находится в состоянии устойчивого покоя (см. рис. 5). Для того чтобы в случае опасности открыть люк, пружину следует сжать и провести ее через состояние неустойчивого равновесия. Отметим, что при растяжении пружина всегда остается прямолинейной, а вот сжатие длинной пружины иногда приво-

дит к ее «выпучиванию». Во избежание этого пружину, работающую на сжатие, помещают внутрь обоймы или патрона.

Механизм, удерживающий форточку в трамвае в состоянии *открыто/закрыто* (см. рис.6), фактически описан в статье.



Рис. 6



Рис. 7

А теперь – конструкторская задача. На рисунке 7 показаны две банки для чая. Их замки действуют согласно изложенному в нашей статье принципу. А где же здесь пружина? Оказывается, роль пружины выполняет эластичная резиновая прокладка, укрепленная по периметру крышки (одновременно эта прокладка обеспечивает герметичность банки). При закрывании банки крышка вначале прижимается к ней, а потом чуть-чуть (примерно на миллиметр) поднимается вверх. Оба рычага столь жесткие, что практически не деформируются. Прокладка, будучи деформированной и потом освобожденной от внешнего воздействия, легко приподнимает крышку. Если удалить прокладку, система перестает действовать.



Рис. 5

# Радиоактивный распад, банковский процент и другие

*А. СТАСЕНКО*

**КАК ИЗВЕСТНО**, ЯДРА РАДИОАКТИВНО-го вещества рано или поздно распадаются с учетом всех законов физики – сохранения массы–энергии, импульса, момента импульса, суммарного электрического заряда, четности... На то они и радиоактивные. Но что значит «рано или поздно»? Для ответа на этот вопрос физиками введена специальная величина – период полураспада  $\tau_{1/2}$ . Уже сам индекс говорит о том, что за это время испытывает превращение половина ядер.

При этом физики записывают вполне разумное выражение того факта, что изменение количества ядер  $\Delta n$  за время  $\Delta t$  пропорционально их количеству до распада:

$$\Delta n = -\alpha n \Delta t. \quad (1)$$

Здесь  $\alpha$  – коэффициент пропорциональности, имеющий размерность  $1/c$ , как легко видеть. А знак «минус» свидетельствует об уменьшении прежнего количества рассматриваемого вещества. Считается, что формулировка (1) закона радиоактивного распада принадлежит Фредерику Содди (1877–1956) и Эрнесту Резерфорду (1871–1937).

Решение уравнения (1) известно:

$$n = n_0 e^{-\alpha t}, \quad (2)$$

где  $e = 2,73...$  – основание натуральных логарифмов, фундаментальная физико-математическая константа. Видно, что в течение отрезка времени  $\frac{1}{\alpha} = \tau_e$  концентрация ядер уменьшается в  $e$  раз (см. рисунок). Легко установить связь между  $\tau_{1/2}$  и  $\tau_e$ :

$$\tau_e = \frac{\tau_{1/2}}{\ln 2} \approx \frac{\tau_{1/2}}{0,7}.$$

Ясно, что это величины одного порядка. Их значение изменяется от  $10^{-9}$  до многих миллиардов лет – сравните с современным значением возраста Вселенной 13,7 миллиардов лет.

Интересно, что такой же зависимостью (1) описывается изменение денежного вклада в банк (на начальном этапе), только вместо «минус  $\alpha$ » нужно поставить «плюс альфа», где  $\alpha$  – теперь уже банковский процент (например,  $\alpha = 10\% = 0,1$ ). Почему «на начальном этапе»? Потому, что существует время, за которое любой скромный вклад  $n_0$  вырастает до значения, превышающего все богатства Земли, так что уравнение (1) нужно будет заблаговременно дополнить другими слагаемыми, описывающими обратную связь с обществом.

Еще более интересно, что такой же зависимостью (1) описывается и рост числа бактерий или амёб, размножающихся в стеклянной банке делением пополам. Опять же на начальном этапе – ибо объем банки не бесконечен.

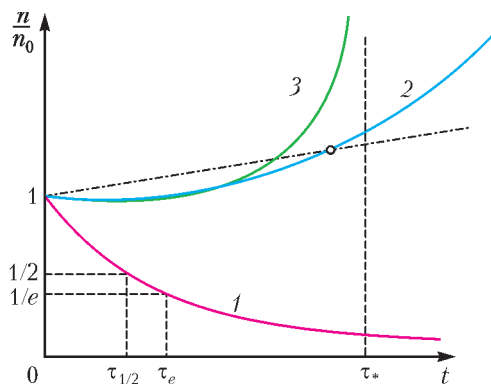
Лет двести тому назад подобным фактом был встревожен английский ученый и священник Томас Роберт Мальтус (1766–1834). По его мнению, рост численности человечества должен описываться законом  $n = n_0 e^{t/\tau}$ , где  $\tau$  есть характерное время порядка 25 лет – это время удвоения численности населения в идеальных условиях. А встревожило его то, что количество продуктов питания растет в арифметической прогрессии (т.е. пропорционально времени), а народонаселение – в геометрической прогрессии, и рано или поздно две соответствующие линии пересекутся (см. рисунок – кружок на штрих-пунктирной кривой) и наступит глобальный голод. Да и просто места на Земле может не хватить!

Дальше еще интереснее. Представим себе микрокапли, падающие в облаке и сливающиеся друг с другом Их концентрация должна убывать по закону

$$\Delta n = -\beta n(n-1)\Delta t. \quad (3)$$

Множитель  $(n-1)$  учитывает тот факт, что при  $n=1$   $\Delta n=0$  – сливаться не с кем. (Это напоминает историю о встрече группы старых одноклассников, каждый из которых пожал руку другу. Если одноклассников было  $N$ , любой из них пожал  $N-1$  рук,





Качественное описание временной эволюции различных «сообществ»:

1 — закон радиоактивного распада или убыль вещества в химической реакции первого порядка;

2 — рост банковского вклада, числа делящихся бактерий или амёб, закон Мальтуса роста народонаселения;

3 — рост числа участников парного взаимодействия, химическая реакция второго порядка. Штрих-пунктирная линия — рост средств потребления, по Мальтусу

исключая самого себя. И это произошло с каждым, поэтому общее число рукопожатий было  $(N - 1) \cdot N = 99 \cdot 100 = 9,9 \cdot 10^3$ .) Но при  $n \gg 1$  получим  $n(n - 1) = n^2$ , что облегчает интегрирование уравнения (3):

$$\frac{n}{n_0} = \frac{1}{1 + n_0 \beta t}. \quad (4)$$

Видно, что с течением времени коагуляция капель падает и при  $\tau_{1/2} = \frac{1}{n_0 \beta}$  увеличивается в два раза — процесс, обратный полураспаду ядер.

Очевидно, тем же выражением (3) можно описать уменьшение числа пауков в банке, пожирающих друг друга, или убыль числа автомобилей (если прекратить их выпуск) за счет парных столкновений. Или рост концентрации нейтральных частиц в плазме за счет рекомбинации — соединения электронов и положительных ионов:

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} \sim n_+ \cdot n_-.$$

Так как в квазинейтральной плазме концентрации частиц обоих знаков одинаковы:  $n_+ = \frac{n}{2}$ ,  $n_- = \frac{n}{2}$ , или  $\frac{\Delta n}{\Delta t} \sim n^2$ , в решении (4) нужно лишь заменить знак  $\beta$  на противоположный.

А что же народонаселение? Конечно, эволюцию правильнее описывать уравнениями (3) и (4) (а не (1, 2)), в которых нужно не забыть изменить знак  $\beta$ . Но тогда в знаменателе выражения (4) появится знак «минус» и при стремлении времени к значению  $\tau_* = \frac{1}{n_0 \beta}$  наступит то, что математики называют страшными словами «градиентная ка-

тастрофа»: значение  $\frac{n}{n_0}$  устремляется к бесконечности еще резче, чем в законе Мальтуса!

Разумеется, в современной теоретической демографии в рассмотренных здесь уравнениях появляются дополнительные слагаемые, учитывающие многие факторы (обратное влияние истощения ресурсов, естественную смену поколений...).

Упомянем еще, что законы (1) и (3) используются и в физической химии для описания реакций первого, второго порядков. А еще... Но и сказанного достаточно, чтобы вспомнить вдохновляющие слова средневекового ученого о необозримости физики:

«К физике принадлежит учение о небесах, о стихиях (элементах) и их движении, о возникновении и уничтожении, о влиянии небес на погоду (метеорология), о минералах, растениях, животных, о душе и ее способностях. Медицина, астрология, учение о талисманах, алхимия, толкование снов и волшебства представляют собой разновидности прикладной физики» (В.В. Соколов. Средневековая философия. — М.: Высшая школа, 1979).

Не случайны и в гимне МФТИ такие слова: «Только в физике соль...»!

*... на небе имеется материя того же сорта, что и в подлунных предметах, поскольку множественность никогда не следует полагать без необходимости...*

Уильям Оккам

*Своеобразный тусклый свет, наблюдаемый на Луне, в особенности когда она серпообразна, вызван отражением света Солнца от поверхности земли и моря...*

Галилео Галилей

*Одни и те же законы господствуют как в великих небесных светилах и в планетных системах, так и в мельчайших молекулах...*

Владимир Вернадский

*Сходство между Марсом и Землей, быть может, наибольшее сравнительно со всеми другими членами Солнечной системы.*

Уильям Гершель

*Если на темной стороне Луны воздух затвердевает, то почти весь воздух должен перейти от светлой стороны в темную и там также замерзнуть.*

Орест Хвольсон

## А так ли хорошо знакома вам физика планет?

Сначала человек научился отличать планеты от звезд, затем открыл законы их движения, а вот что они представляют собой, насколько схожи или отличны от Земли, до XX века он мог лишь строить догадки. Каких только смелых предположений и буйных фантазий не появилось, пока, наконец, талант ученых и инженеров не позволил создать невероятно сложные средства доставки и сами приборы, способные передать нам из окрестностей планет, а то и непосредственно с их поверхности достоверную информацию.

Физика планет – часть целого комплекса наук, называемого планетологией, – совершила гигантский скачок в последние десятилетия, многократно обогатив багаж наших знаний о Солнечной системе. Вооружившись этими знаниями, люди уже смогли побывать на Луне, готовятся к пилотируемому полету на Марс, оценивают возможности освоения спутников планет и астероидов. Но более всего надеются обнаружить наличие каких-либо форм жизни на ближайших к нам планетах. А, быть может, и на экзопланетах, обращающихся вокруг иных, кроме Солнца, звезд...

Пока же отправимся в мини-экскурсию по планетам, рассчитывая, что она послужит еще одним вступлением в курс астрономии, который ждет вас в новом учебном году.

### Вопросы и задачи

1. Чем вызваны резкие перепады температуры лунной поверхности в дневное и ночное время?
2. Можно ли наблюдать на Луне солнечные затмения, метеоры, кометы, полярные сияния, радугу, серебристые облака, искусственные спутники?
3. Из-за наличия молекул, движущихся со скоростями, большими скорости «убегания», все планеты теряют свои атмосферы. Почему же все-таки атмосферы существуют? У всех ли планет они есть?
4. На Меркурии существуют области, где постоянно лежит лед. Как это согласуется с высокой температурой этой планеты?
5. Какое явление доказывает, что Венера, Меркурий и другие планеты, подобно Луне, лишь отражают солнечный свет, а сами – сравнительно холодные тела?
6. Как, наблюдая за покрытием звезд Венерой и Марсом, доказать, что эти планеты имеют атмосферы?
7. Может ли на поверхности Венеры существовать жидкая вода?
8. Что произойдет с водой, помещенной в открытом сосуде на поверхность Марса?
9. На Венере столь плотная облачность, что с ее поверхности никогда не видны звезды и Солнце. Как же там отличить день от ночи?

10. На какой планете и почему Солнце восходит на западе и заходит на востоке? Направления сторон горизонта считать такими же, как на Земле.

11. Происходит ли смена времен года на Марсе?

12. На каких планетах и почему нет смены времен года?

13. Отчего Сатурн при меньшей скорости вращения вокруг своей оси более сжат у полюсов, чем Юпитер?

14. Известно, что средняя плотность планет-гигантов Сатурна и Юпитера мала – от 687 до 1326 кг/м<sup>3</sup>. Что можно сказать о химическом составе этих планет?

15. Наблюдая за покрытием Ураном звезды, астрономы обнаружили, что она несколько раз «исчезала» до и после этого события. Как это объяснить?

16. В чем причина синего цвета Нептуна?

### Микроопыт

Рядом с молодым (или очень старым) месяцем вы можете увидеть неосвещенную Солнцем часть лунного диска – так называемый пепельный свет Луны. Как доказать, что он вызван солнечным излучением, отраженным от Земли? Когда этот свет особенно ярок?

### Любопытно, что...

...древнегреческий ученый Анаксагор, основавший около 460 года до новой эры первую школу естественных наук, верно угадал природу крупнейших небесных светил: Солнце – раскаленный шар, а Луна – холодный шар, освещенный Солнцем.

...семь планет, а в древности к ним причисляли Луну и Солнце, считались богами, и эта идея проходила красной нитью через всю средневековую астрологию. Благодаря им, число семь получило священный характер в Библии, в алхимии было семь основных металлов, в октаве – семь нот, в спектре – семь цветов.

...у древних греков для Венеры существовало не одно, а два имени; с одним они связывали планету, демонстрирующую утреннюю видимость, с другим – вечернюю.

...можно считать, что Леонардо да Винчи был предшественником изобретателей зрительных труб, поскольку интересовался, как применить очки для того, чтобы «видеть

Луну большой». Но и без оптических приборов он первым догадался, что пепельный свет Луны – отраженный свет, идущий от Земли.

...первый научно-фантастический рассказ с изображением поверхности Луны был написан Иоганном Кеплером. А знаменитый фантаст Герберт Уэллс в романе «Первые люди на Луне» допускал наличие на ней атмосферы, замерзавшей ночью, а днем таявшей и испарявшейся.

...первые детали на поверхности Марса различил еще Христиан Гюйгенс в 1660-е годы. Первая полная карта светлых областей («пустынь») и темных («морей») была составлена в 1830-е годы, а в 1870-е годы итальянский астроном Джованни Скиапарелли добавил в нее «каналы», оказавшиеся впоследствии оптической иллюзией.

...на сегодня известен состав не только планетных атмосфер, например Марса и Венеры, состоящих почти из чистого углекислого газа, но и спутников планет – например, спутника Сатурна Титана, окруженного плотной атмосферой из азота со следами метана и водорода.

... Юпитер – единственная планета Солнечной системы, магнитосфера которой была обнаружена до полетов космических аппаратов. «Выдало» ее излучение электронов, движущихся по спиральным траекториям вдоль линий магнитного поля планеты.

... расчеты планетологов показали, что будь Земля на 5% ближе к Солнцу, испарение океанов вызвало бы сильнейший парниковый эффект, который привел бы к полному исчезновению всей воды на планете. Возможно, так оно и произошло на Венере.

### Что читать в «Кванте» о физике планет

*(публикации последних лет)*

1. «Тайна лунных недр» – 2014, №1, с.39;
2. «Астрономия вернулась в школу» – 2017, №12, с.2; 2018, №1, с.2;
3. «Астрофизика в ЕГЭ по физике» – 2018, №1, с.42;
4. Калейдоскоп «Кванта» – 2018, №2, с.32;
5. «Будут ли на Марсе яблоны цвести» – 2018, №4, с.27;
6. «Через тернии к звездам» – 2018, №6, с. 34.

*Материал подготовил А.Леонович*

# Плюсы-минусы и игра Ним

И. КОПЫЛОВ

## Исследование функции $F$

Напомним, что через  $F(a, b)$  мы условились обозначать то единственное значение  $c$ , для которого кучки из  $a, b, c$  камней образуют в игре Ним «минусовое» состояние. Исследуем некоторые закономерности. Для начала изучим четность значений функции  $F$ . На рисунке 3 приведена таблица значений функции  $F$ , в которой цветом выделены все

Количество камней во второй кучке	10	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0
	9	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3
	8	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2
	7	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13
	6	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12
	5	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15
	4	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14
	3	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9
	2	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8
	1	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11
	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Количество камней в первой кучке

Рис. 3

клетки с нечетными значениями  $c = F(a, b)$ , а также нечетными  $a, b$  (по краям таблицы). Бросается в глаза, что клетки с нечетными значениями функции  $F(a, b)$  располагаются в шахматном порядке. Замечаем также, что в тройке чисел  $a, b$  и  $c$  нечетных чисел либо 0, либо 2, т.е. всегда четное количество.

Таким образом, у нас появилась правдоподобная гипотеза о том, как определять четность числа  $c = F(a, b)$  по четности чисел  $a$  и  $b$ . Пойдем далее, вычтем из всех нечетных

чисел на рисунке 3 по единице. Все числа станут четными. Разделим их на 2 и проследим, какие числа теперь окажутся нечетными. Видно, что выделенные на рисунке 4 клетки располагаются в шахматном поряд-

Количество камней во второй кучке	5	5	5	4	4	7	7	6	6	1	1	0
	4	4	4	5	5	6	6	7	7	0	0	1
	4	4	4	5	5	6	6	7	7	0	0	1
	3	3	3	2	2	1	1	0	0	7	7	6
	3	3	3	2	2	1	1	0	0	7	7	6
	2	2	2	3	3	0	0	1	1	6	6	7
	2	2	2	3	3	0	0	1	1	6	6	7
	1	1	1	0	0	3	3	2	2	5	5	4
	1	1	1	0	0	3	3	2	2	5	5	4
	0	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
	0	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	

Рис. 4 Количество камней в первой кучке

ке, но теперь каждую клетку образуют 4 числа. И опять наблюдаем, что четность числа  $c = F(a, b)$  в таблице определяется четностью чисел  $a$  и  $b$ . Если четность чисел  $a$  и  $b$  совпадает, то  $c$  четно, а если четности у  $a$  и  $b$  различны, то  $c$  нечетно. Как и раньше, в тройке чисел  $a, b$  и  $c$  нечетных чисел всегда четное количество.

Сделаем аналогичное преобразование с числами таблицы на рисунке 4 еще раз. Вычтем из нечетных чисел по 1 и, получив в таблице все четные числа, разделим их на 2. Снова цветом выделим все нечетные числа в полученной таблице (рис.5). Наблюдаем шахматную раскраску, размер клеток в которой стал еще в 2 раза больше, и аналогичные свойства четности для тройки чисел  $a, b$  и  $c = F(a, b)$ : среди чисел  $a, b$  и  $c$  четное количество нечетных.

Проводимые операции с числами – вычитание единицы, если число нечетно, и деление на два – это в точности исключение последней цифры из двоичной записи числа. Наблюдаемые нами свойства чисел в таблице значений функции  $F$  говорят о том, что, просуммировав в каждом из трех младших разрядов двоичной записи чисел  $a, b$  и  $c = F(a, b)$  количество единиц, получим четное число. Обобщим это соображение и сформулируем его в виде леммы.

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20180805>

Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.

Количество камней во второй кучке	2	2	2	2	2	3	3	3	3	0	0	0
	2	2	2	2	2	3	3	3	3	0	0	0
	2	2	2	2	2	3	3	3	3	0	0	0
	1	1	1	1	1	0	0	0	0	3	3	3
	1	1	1	1	1	0	0	0	0	3	3	3
	1	1	1	1	1	0	0	0	0	3	3	3
	1	1	1	1	1	0	0	0	0	3	3	3
	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2
	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2
	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2
	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2

Рис. 5 Количество камней в первой кучке

**Лемма 2.** Если в каждом разряде двоичной записи чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  суммарно содержится четное количество единиц, то выполняется соотношение  $c = F(a, b)$ .

Например, в двоичной записи тройки чисел 3, 9, 10 суммарно в каждом отдельном разряде количество единиц равно 0 или 2, т.е. четно (рис.6). Тогда, согласно лемме 2, выполняется соотношение  $10 = F(3, 9)$ .

3:	1	1
9:	1	0 0 1
10:	1	0 1 0
Количество единиц в разряде:	2	0 2 2

Рис. 6

Перед доказательством леммы 2 напомним, что если три числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  связаны соотношением  $c = F(a, b)$ , то состоянию  $(a, b, c)$  в игре Ним с 3 кучками приписывается знак «-». Таким образом, эта лемма даст ключ к нахождению «минусовых» состояний, т.е. выигрышной стратегии, в игре Ним.

Состоянию  $(0, 0, 0)$  приписан знак «-», и в каждом двоичном разряде нуля содержится нулевое (четное) количество единиц. Пусть числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что для каждого разряда их двоичных записей суммарное количество единиц четно. Тогда если из состояния  $(a, b, c)$  в игре Ним сделать ход, то уменьшится ровно одно число из трех. Не исключая общности, считаем, что уменьши-

лось число  $a$ . Тогда хотя бы в одном из разрядов его двоичной записи единица сменится нулем. В этом-то разряде у чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  количество единиц и станет нечетным.

Осталось доказать, что если хотя бы в одном из разрядов двоичных записей чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  суммарное количество единиц нечетно, то уменьшением одного из этих трех чисел можно добиться того, чтобы в каждом двоичном разряде суммарно у трех чисел количество единиц стало четным.

Рассмотрим самый старший двоичный разряд, в котором суммарное количество единиц у чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  нечетно. Хотя бы у одного из трех чисел в этом разряде двоичной записи стоит цифра 1. Пусть, для определенности, рассматриваемый разряд имеет номер  $k$  и двоичная запись числа  $a$  в  $k$ -м разряде содержит 1. Уменьшим число  $a$ . Двоичные разряды старше  $k$ -го в записи числа  $a$  оставим без изменения, в  $k$ -м разряде заменим 1 на 0. В разрядах, младших  $k$ -го, цифру в двоичной записи числа  $a$  выберем таким образом, чтобы вместе с соответствующими цифрами в двоичной записи  $b$  и  $c$  получилось четное число единиц. Доказательство леммы 2 завершено.

Лемма 2 позволяет находить число  $c = F(a, b)$  по двум произвольным числам  $a$  и  $b$ . Для нахождения двоичной записи числа  $c$  следует сложить поразрядно двоичные записи чисел  $a$  и  $b$ . Если единиц в разряде у  $a$  и  $b$  вместе окажется 0 или 2, то в соответствующем разряде числа  $c$  ставим цифру 0, а если единица всего одна, то ставим цифру 1. Например, складывая указанным способом двоичные записи чисел 11 и 23 (в двоичной системе 1101 и 10111), получаем двоичную запись числа 26 (в двоичной системе 11010), как показано на рисунке 7.

$a$	11:	1	1	0	1
$b$	23:	1	0	1	1 1
$c = F(a, b)$	26:	1	1	0	1 0

Рис.7

Лемма 1 и лемма 2 дают удобный алгоритм для определения минусовых состояний в игре Ним с 3 кучками камней. Операцию получения числа  $c = F(a, b)$  по числам  $a$  и  $b$  будем называть *Ним-суммированием* и обо-

значать знаком  $\oplus$  :

$$c = a \oplus b .$$

**Стратегия игры Ним с произвольным количеством кучек**

Приведенные выше две леммы легко обобщаются на случай с  $m$  кучками. В формулировках и доказательствах лемм число 3 заменяется на  $m$ , а число 2 – на  $m - 1$ . Для того чтобы определить, какой знак («+» или «-») приписан состоянию с  $a_1, a_2, \dots, a_m$  камнями, следует представить числа  $a_1, a_2, \dots, a_m$  в двоичной системе счисления, записать их столбиком и найти поразрядную сумму. Если в разряде количество единиц четно, то в результирующей сумме в соответствующем разряде следует поставить цифру 0, а если количество единиц в разряде оказалось нечетным, то соответствующий двоичный разряд суммы следует заполнить цифрой 1. Другими словами, пользуясь введенной ранее операцией Ним-суммирования, следует вычислить Ним-сумму слагаемых  $a_1, a_2, \dots, a_m$  :

$$S_m = a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_m .$$

Если Ним-сумма  $S_m$  окажется нулевой, т.е. содержащей нули во всех двоичных разрядах, то состоянию  $a_1, a_2, \dots, a_m$  следует приписать знак «-», иначе – знак «+». Для гарантированного выигрыша игрок после каждого своего хода должен оставлять минусовое состояние («Ставь на минус!»).

Приведем пример хода по стратегии. Пусть  $m = 7$  и в кучках находятся 5, 9, 6, 4, 6, 3 и 12 камней. Тогда Ним-сумма вычисляется так, как показано на рисунке 8, и равна 7 (в двоичной записи 111).

Старшим ненулевым разрядом Ним-суммы является второй (нумерацию разрядов, как обычно, ведем справа налево, самый младший разряд – нулевой). Пять из семи слагаемых во втором двоичном разряде содержат 1. Выберем, например, первое слагаемое, равное 5, и уменьшим его: в разряде 2 единицу заменим на 0, в разряде 1 единиц у остальных слагаемых равно 3, т.е. нечетно, поэтому во втором разряде ставим 1, в нулевом разряде у всех остальных слагаемых 2 единицы, поэтому ставим 0. В результате число  $5 = 101_2$  превратится в число  $10_2 = 2$ . Следовательно, в рассматриваемом примере для обнуления Ним-суммы достаточно из

Кучка 1	5:	1	0	1	
Кучка 2	9:	1	0	0	1
Кучка 3	6:	1	1	0	
Кучка 4	4:	1	0	0	
Кучка 5	6:	1	1	0	
Кучка 6	3:	1	1		
Кучка 7	12:	1	1	0	0
Ним-сумма:		0	1	1	1

Рис. 8

кучки с 5 камнями забрать 3 и оставить 2 камня.

Сделаем два заключительных замечания. Если Ним-сумма для  $m$  кучек отлична от 0, то добавим к ним  $(m + 1)$ -ю кучку, количество камней в которой возьмем равным Ним-сумме для  $m$  кучек. Тогда Ним-сумма для  $m + 1$  кучек равна 0. В рассматриваемом примере при добавлении восьмой кучки, в которой  $111_2 = 7$  камней, получится минусовое состояние игры Ним с 8 кучками.

Результат Ним-суммирования зависит только от четности суммарного количества единиц в каждом разряде у всех слагаемых. Ним-сумма не изменится при произвольной перестановке слагаемых и расстановке скобок.

**Упражнения**

Предлагаем читателю подумать, как изменится изложенная стратегия Нима при модификациях игры, приведенных в следующих упражнениях.

**1.** Игра ведется по правилам Нима, но, напротив, проигрывает игрок, взявший из кучек последний камень.

**2.** Имеется  $m$  кучек камней, количество камней в них равно числам  $a_1, a_2, \dots, a_m$ . Два игрока ходят по очереди. Каждый игрок при своем ходе выбирает одну из кучек и берет из нее любое ненулевое количество камней, не большее некоторого фиксированного числа  $k$ . Игрок, забравший последний камень, считается победителем.

**3.** Имеется  $m$  кучек камней, количество камней в них равно числам  $a_1, a_2, \dots, a_m$ . Два игрока ходят по очереди. Каждый игрок при своем ходе выбирает одну или две кучки и берет из них камни. Из каждой из выбранных кучек разрешается взять любое ненулевое количество камней. Игрок, забравший последний камень, считается победителем.

# Вода в Америке не та

*М. СТАРШОВ*

**М**НОГО ЛЕТ ПОЛЬЗУЮСЬ ПРЕКРАСНОЙ книгой американского физика, нобелевского лауреата Леона Купера «Физика для всех» (М.: Мир, 1973), слово «пользуюсь» даже не подходит для выражения моего отношения к ней. Но, как говорит старая поговорка, и на старуху бывает проруха.

Как умные профессионалы пишут книги? Легко! А вот с иллюстрациями почти у всех возникают проблемы. Тогда на сцене появляется художник. Автор дает указания: надо нарисовать так и так. А уж этот специалист свое дело знает! И на странице 107 первого тома упомянутой замечательной книги мы видим дивный рисунок (рис.1). При этом читаем абсолютно правильный текст: «Когда мы опускаем весло в воду, мы видим его надломленным. Наши глаза и мозг предпочитают видеть его надломленным, нежели допустить, что свет в этом случае не распространяется по прямой». (К сожалению, этот же рисунок повторяется в книге и на странице 213.)

Вот такая таинственная «Мария Целеста», (Mary Celeste, «Мария Небесная», бывшая «Амазонка») с пропавшим бесследно экипажем.

А возможно, художник представил себе челнок Гекльберри Финна после мощной ночной грозы на Миссисипи.

Все красиво, но вот весло... немного сломано, и отчасти не туда. Что делать, такая вода в Америке!

Совсем иначе видит эту физическую проблему фотоаппарат в модельном опыте с нашей водой (рис.2). Конечно, это шутка – на фотографии всего лишь игрушечка, физика тут вообще не причем. Хотя для школьника это

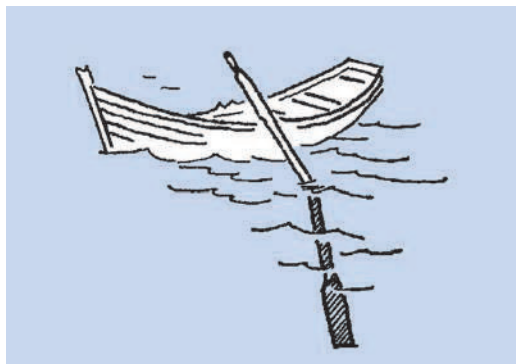


Рис. 1

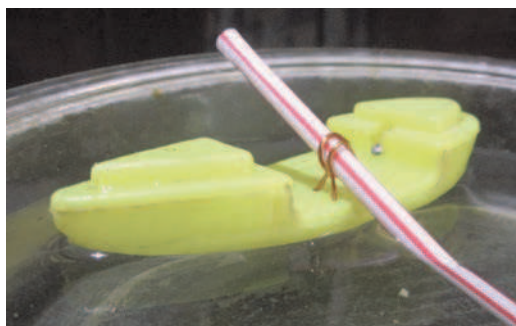
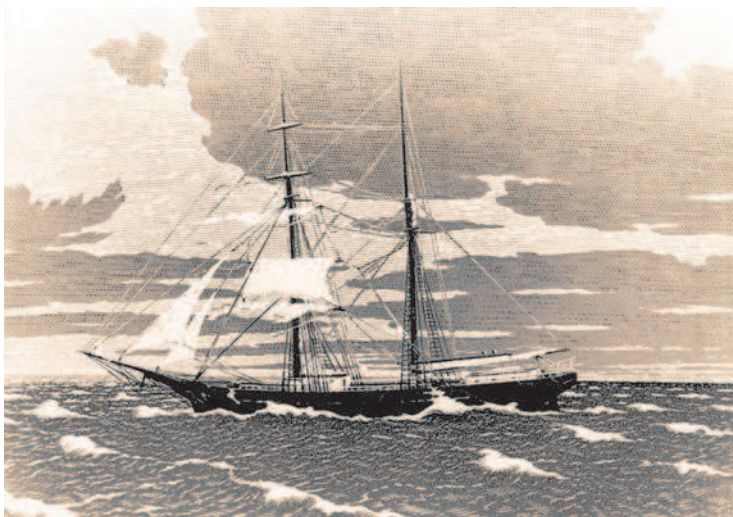


Рис. 2

может быть полезно; по крайней мере, приучает читать и смотреть внимательно. Что-нибудь интересное и полезное может многие годы мозолить глаза многим профессионалам, и никто в упор не видит ничего странного.

Правда, надо признаться, что в другом учебнике физики из той же Америки («Фи-



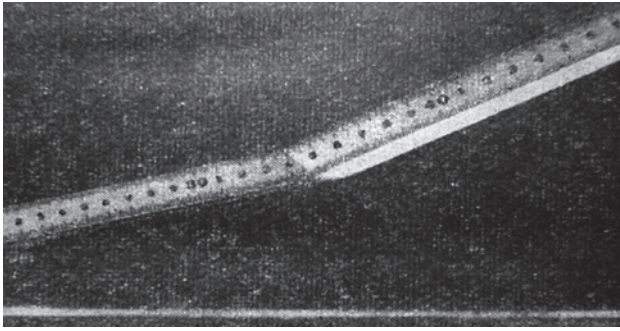


Рис. 3

зика». Перевод с английского под редакцией А.С.Ахматова. Часть II. – М.: Наука, 1973, с. 9 и 10) можно найти точный рисунок, очень похожий на фотографию (рис. 3). В тексте на странице 9 говорится: «На рисунке показана масштабная линейка, один конец которой погружен в чистую воду. Кажущийся излом линейки в месте пересечения поверхности воды может объясняться только тем, что здесь что-то происходит со светом, идущим от линейки в фотоаппарат».

Но зато там, в Америке, вода имеет другую странность: она заметно, процентов на двадцать, увеличивает монету, лежащую на дне (рис.4). Вызывает удивление и соответствующий текст на странице 10: «Справа сфотографирована монета, лежащая на дне пустого стакана. Слева мы видим фотоснимок такой же монеты, лежащей на дне сосуда, запол-

ненного водой. Обе монеты были сфотографированы одновременно на одной пластинке в фотоаппарате. Монета, покрытая водой, выглядит более крупной и более близкой к фотоаппарату, чем другая монета. Это кажущееся “всплывание” монеты, так же, как и иллюзия “перелома” линейки, объясняется изменением направления распространения света из одной среды в другую».

Трюк с монетами понять невозможно, особенно приглядываясь к цифрам 30 и 40 на изломанной водой линейке. Правда, отметка 40 несколько ближе к фотокаме-

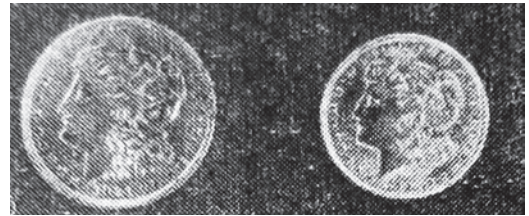


Рис. 4

ре и потому кажется чуть больше, чем отметка 30.

Между нами, эффект сломанной палки озадачивал людей еще в глубокой древности, а правильное построение хода лучей вызывает сложности до сих пор.

## НАМ ПИШУТ

### Еще о квадратах из спичек

Напомним задачу из «Кванта» №12 за 2017 год. На рисунке 1 – число 73, выложенное

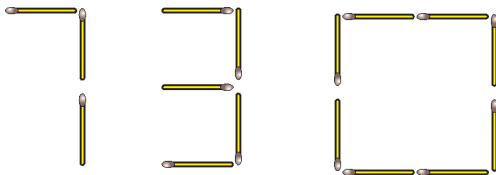


Рис. 1

Рис. 2

спичками. Предлагалось переложить две спички так, чтобы получился квадрат.



Рис. 3

Рис. 4

На рисунках 2 и 3 изображены два способа, которые мы уже приводили ранее.

Автор задачи Сергей Костин сообщил нам еще один способ, который он придумал со своими учениками (рис.4).

Вот такими разными бывают квадраты!



# Заключительный этап XLIV Всероссийской олимпиады школьников по математике

Заключительный этап Всероссийской математической олимпиады школьников в этом году проводился в Екатеринбурге с 23 по 28 апреля. По сравнению с прошлым годом олимпиада еще немного выросла: в ней приняли участие 378 школьников из более 60 регионов России. Также в олимпиаде приняли участие гости – команда из шести юных математиков Болгарии.

Олимпиада запомнилась прекрасным проведением (организатор – Дворец молодежи Екатеринбурга) и экстремальными погодными условиями: в эти апрельские дни в Екатеринбурге выпал 15-сантиметровый слой снега. На сайте <https://olympmathem2018.dm-centre.ru/> олимпиада представлена с разных сторон. Кроме официальной информации размещена замечательная подборка фото и видео.

Большинство задач олимпиады понравились участникам, а лучшими по итогам традиционного голосования ими были признаны: в 9 классе – задачи 4 (I место), 3, 6, 7 (поделили II место), в 10 классе – 3 (I место), 6 (II место), 2 (III место), в 11 классе – 3 (I место), 8 (II место), 2 (III место). Самыми сложными задачами оказались 8 для 9 класса (ее решили 16 участников), 8 (4) и 4 (11) для 10 класса, 8 (5) и 4 (11) для 11 класса.

Ниже публикуем условия задач и список победителей заключительного этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике.

## Условия задач

### 9 класс

1. Пусть  $a_1, a_2, a_3, \dots$  – бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел, а  $p_1, p_2, p_3, \dots$  – последовательность простых чисел такая, что при каждом натуральном  $n$  число  $a_n$  делится на  $p_n$ . Оказалось, что при всех натуральных  $n$  и  $k$  верно

равенство  $a_n - a_k = p_n - p_k$ . Докажите, что все числа  $a_1, a_2, \dots$  простые.

*А. Голованов*

2. Окружность  $\omega$  касается сторон  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$ . Окружность  $\Omega$  касается стороны  $AC$  и продолжения стороны  $AB$  за точку  $B$ , а также касается  $\omega$  в точке  $L$ , лежащей на стороне  $BC$ . Прямая  $AL$  вторично пересекает  $\omega$  и  $\Omega$  в точках  $K$  и  $M$  соответственно. Оказалось, что  $KB \parallel CM$ . Докажите, что треугольник  $LCM$  равнобедренный.

*И. Богданов*

3. Пусть  $a_1, \dots, a_{25}$  – целые неотрицательные числа, а  $k$  – наименьшее из них. Докажите, что

$$\begin{aligned} \left[ \sqrt{a_1} \right] + \left[ \sqrt{a_2} \right] + \dots + \left[ \sqrt{a_{25}} \right] &\geq \\ &\geq \left[ \sqrt{a_1 + \dots + a_{25} + 200k} \right]. \end{aligned}$$

(Как обычно, через  $[x]$  обозначается целая часть числа  $x$ , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ .)

*С. Берлов, А. Храбров*

4. На клетчатой доске  $n \times n$  отметили несколько клеток таким образом, что левый нижний  $L$  и правый верхний  $R$  углы доски не отмечены и любой путь коня из  $L$  в  $R$  обязательно содержит отмеченную клетку. При каких  $n > 3$  можно заведомо утверждать, что найдутся три клетки, идущие подряд по диагонали, среди которых отмечены хотя бы две?

*С. Берлов, А. Сафиуллина*

5. На окружности отмечено 99 точек, делящих эту окружность на 99 равных дуг. Петя и Вася играют в игру, делая ходы по

очереди. Первым ходит Петя; своим первым ходом он окрашивает в красный или синий цвет любую отмеченную точку. Затем каждый из игроков своим ходом может окрасить в красный или синий цвет любую неокрашенную отмеченную точку, соседнюю с уже окрашенной. Вася выигрывает, если после окрашивания всех точек найдется равносторонний треугольник, все три вершины которого окрашены, причем в один и тот же цвет. Может ли Петя ему помешать?

*С.Берлов*

**6.** См. задачу M2514 «Задачника «Кванта»».

**7.** См. задачу M2515 «Задачника «Кванта»».

**8.** В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  углы  $A$  и  $C$  равны. На сторонах  $AB$  и  $BC$  нашлись соответственно точки  $M$  и  $N$  такие, что  $MN \parallel AD$  и  $MN = 2AD$ . Пусть  $K$  – середина отрезка  $MN$ , а  $H$  – точка пересечения высот треугольника  $ABC$ . Докажите, что прямые  $KH$  и  $CD$  перпендикулярны.

*Б.Обухов*

*10 класс*

**1.** Найдите количество корней уравнения  $|x| + |x + 1| + \dots + |x + 2018| = x^2 + 2018x - 2019$ .

*В.Дубинская*

**2.** Дан остроугольный треугольник  $ABC$ , в котором  $AB < AC$ . Пусть  $M$  и  $N$  – середины сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно, а  $D$  – основание высоты, проведенной из  $A$ . На отрезке  $MN$  нашлась точка  $K$  такая, что  $BK = CK$ . Луч  $KD$  пересекает окружность  $\Omega$ , описанную около треугольника  $ABC$ , в точке  $Q$ . Докажите, что точки  $C$ ,  $N$ ,  $K$  и  $Q$  лежат на одной окружности.

*К.Иванов*

**3.** Дано натуральное число  $k$ . На клетчатой плоскости изначально отмечено  $N$  клеток. Назовем *крестом* клетки  $A$  множество всех клеток, находящихся в одной вертикали или горизонтали с  $A$ . Если в кресте неотмеченной клетки  $A$  отмечено хотя бы  $k$

других клеток, то клетку  $A$  также можно отметить. Оказалось, что цепочкой таких действий можно отметить любую клетку плоскости. При каком наименьшем  $N$  это могло случиться?

*Г.Челноков*

**4.** См. задачу M2516 «Задачника «Кванта»».

**5.** В таблицу  $10 \times 10$  записаны положительные числа так, что в любой строке числа образуют арифметическую прогрессию (в порядке следования слева направо), а в любом столбце – геометрическую прогрессию (в порядке следования сверху вниз). Докажите, что знаменатели всех этих геометрических прогрессий равны.

*П.Кожевников*

**6.** См. задачу 6 для 9 класса.

**7.** См. задачу 8 для 9 класса.

**8.** Доска для игры состоит из левой и правой частей. В каждой части есть несколько полей; между ними проведено несколько отрезков, каждый соединяет два поля из разных частей. При этом с любого поля можно по отрезкам добраться до любого другого. Изначально на одном поле левой части стоит лиловая фишка, а на одном поле правой – пурпурная. Леша и Паша ходят по очереди; начинает Паша. За ход игрок перемещает свою фишку (Леша – лиловую, а Паша – пурпурную) по отрезку на поле, на котором нет другой фишки. При этом запрещено создавать позицию, которая уже встречалась в игре. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Существуют ли доска и начальное расположение фишек, при которых у Паши есть выигрышная стратегия?

*И.Богданов, М.Дидин*

*11 класс*

**1.** Многочлен  $P(x)$  таков, что многочлены  $P(P(x))$  и  $P(P(P(x)))$  строго монотонны на всей вещественной оси. Докажите, что  $P(x)$  тоже строго монотонен на всей вещественной оси.

*К.Сухов*

2. Даны положительные числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , где  $n \geq 2$ . Докажите, что

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2} + \frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3} + \dots + \frac{1+x_{n-1}^2}{1+x_{n-1}x_n} + \frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1} \geq n.$$

Ф.Петров

3. См. задачу 3 для 10 класса.

4. См. задачу M2517 «Задачника «Кванта»».

5. На столе по кругу разложены 1000 карточек, на каждой написано по натуральному числу; все эти числа различны. Сначала Вася выбирает одну из карточек и снимает ее со стола. Далее он повторяет следующую операцию. Если на последней снятой карточке было написано число  $k$ , то Вася отсчитывает от нее по часовой стрелке  $k$ -ю не снятую со стола карточку и тоже снимает ее. Это происходит до тех пор, пока на столе не останется одна карточка. Могло ли оказаться, что в начальном расположении есть такая карточка  $A$ , что если снять первой любую другую карточку, то в конце останется обязательно карточка  $A$ ?

О.Подлипский

6. Три диагонали правильной  $n$ -угольной призмы пересекаются в одной внутренней точке  $O$ . Докажите, что точка  $O$  – центр призмы.

М.Дидин

7. Определим последовательность  $a_1, a_2, a_3, \dots$  формулой  $a_n = \left\lfloor n^{\frac{2018}{2017}} \right\rfloor$ . Докажите, что существует такое натуральное число  $N$ , что среди любых  $N$  подряд идущих членов последовательности есть такой, десятичная запись которого содержит цифру 5. (Как обычно, через  $[x]$  обозначается наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ .)

С.Кудря, И.Рубанов

8. Изначально в левом нижнем и правом нижнем углах доски  $2018 \times 2018$  стоят два скакуна – красный и синий соответственно. Коля и Саша ходят по очереди; начинает Коля. За ход игрок перемещает своего скакуна (Коля – красного, а Саша – синего), сдвигая его одновременно на 20 клеток по одной из координат и на 17 по другой; при этом скакун не может вставать на клетку, занятую другим скакуном. Запрещено создавать позицию, которая уже встречалась в игре. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

И.Богданов, М.Дидин

## ПОБЕДИТЕЛИ ОЛИМПИАДЫ

### 9 класс

Захаров Г. – Курганская обл.,  
Солнышкин Г. – Санкт-Петербург,  
Сибгатуллин Д. – Татарстан,  
Васильев И. – Санкт-Петербург,  
Демин Д. – Краснодарский край,  
Каиров К. – Курганская обл.,  
Жаворонков Д. – Санкт-Петербург,  
Садовничий А. – Москва;

### 10 класс

Мишура П. – Санкт-Петербург,  
Мищенко А. – Москва,

Глазков М. – Ярославская обл.,  
Кристов А. – Москва,  
Мельников И. – Москва;

### 11 класс

Абдрахманов М. – Челябинская обл.,  
Соколов Г. – Москва,  
Захаров Д. – Москва,  
Крымский С. – Санкт-Петербург,  
Ложкин М. – Удмуртская Республика,  
Рябов Е. – Москва,  
Герасименко А. – Москва,  
Петров В. – Санкт-Петербург.

Публикацию подготовили

Н.Агаханов, И.Богданов, А.Гайфуллин,  
П.Кожевников, О.Подлипский

# Заключительный этап III Всероссийской олимпиады школьников по физике

В этом году заключительный этап Всероссийской физической олимпиады проходил с 9 по 14 апреля 2018 года в городе Тюмени. В олимпиаде приняли участие 286 школьников (93 девятиклассника, 105 десятиклассников и 88 одиннадцатиклассников).

Олимпиада состояла из двух туров: первый – экспериментальный, второй – теоретический. Продолжительность каждого тура составляла 5 астрономических часов. Олимпиада проводилась для каждой из возрастных параллелей 9-х, 10-х и 11-х классов. На экспериментальном туре в каждом классе предлагалось выполнить 2 задания, а на теоретическом – решить 5 задач. Задания экспериментального тура олимпиады охватывали основные разделы школьной программы по физике: механика, термодинамика и молекулярная физика, электродинамика, колебания и волны. В этом же порядке формировались и задачи теоретического тура олимпиады.

Традиционно сложными оказались экспериментальные задачи для 10 и 11 классов. Но в целом участники олимпиады успешно справились со всеми заданиями. Перед апелляцией для участников олимпиады был проведен разбор заданий и были уточнены критерии оценивания заданий.

В итоге Жюри приняло решение наградить дипломами Победителя олимпиады 22 участника и дипломами Призера – 104 участника (9 класс – 8 Победителей и 34 Призера, 10 класс – 6 Победителей и 39 Призеров, 11 класс – 8 Победителей и 31 Призер).

По результатам олимпиады была сформирована группа кандидатов Российской Федерации для участия в Международной олимпиаде по физике в 2019 году и группа кандидатов Российской Федерации для участия в Международной естественно-научной олимпиаде юниоров в 2018 году.

Ниже приводятся задачи теоретического тура заключительного этапа и список Победителей III Всероссийской физической олимпиады.

## Теоретический тур

9 класс

### Задача 1. Паровоз

При проведении аэрофотосъемки местности в кадр попал шлейф дыма от паровоза, начавшего свое движение из состояния покоя с постоянным ускорением  $a = 0,05 \text{ м/с}^2$  по прямому участку железной дороги. На фотографии (рис.1) виден весь шлейф от

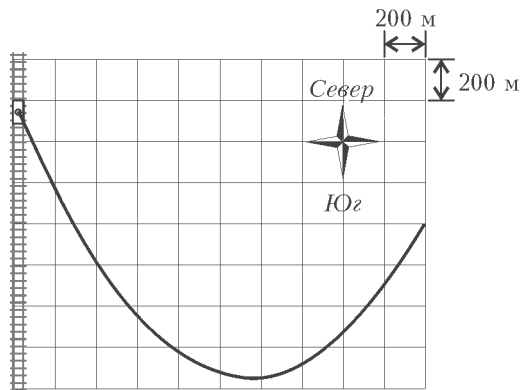


Рис. 1

самого начала движения. Одной клетке соответствует расстояние 200 м. Считая скорость ветра постоянной, определите:

- 1) В каком направлении двигался паровоз?
- 2) Под каким углом  $\alpha$  к железной дороге дул ветер?
- 3) Скорость ветра  $v_0$ .
- 4) Минимальную скорость ветра  $v_{\min}$  относительно паровоза.
- 5) Время движения паровоза  $\tau$  от начала движения до момента съемки.
- 6) Расстояние  $s$ , которое прошел паровоз от начала движения до момента съемки.

*М.Замятин*

### Задача 2. Блоки и цилиндры

В двух сообщающихся сосудах, площади сечения которых  $S_1$  и  $S_2$ , находится жид-

кость плотностью  $\rho$  (рис.2). Сосуды герметично закрыты поршнями, которые могут перемещаться под действием системы блоков и нерастяжимых нитей, связанных с рыча-

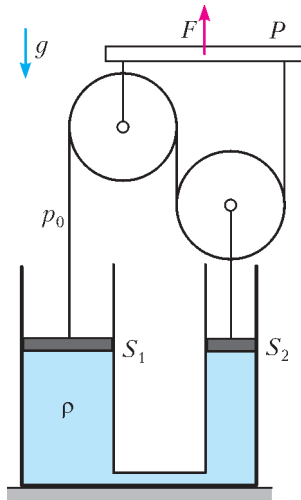


Рис. 2

гом  $P$ . Вначале нити не натянуты и не провисают, а поршни соприкасаются с жидкостью. Рычаг медленно смещают вверх на небольшое расстояние  $h$  так, что он остается горизонтальным, а нити остаются вертикальными.

1) В предположении, что  $S_1 > S_2$ , определите, в каких направлениях и на какие расстояния сместятся поршни. Какую силу  $F_1$  необходимо прикладывать к рычагу, чтобы удерживать его после смещения на расстояние  $h$ ?

2) Какая сила  $F_2$  потребуется для перемещения рычага вверх на расстояние  $h$  при  $S_2 = 2S_1$ ?

Массами рычага, блоков, нитей и поршней можно пренебречь. Трения нет. Сосуды от подставки не отрываются. Давление паров жидкости гораздо меньше атмосферного давления  $p_0$ . Ускорение свободного падения равно  $g$ .

*А.Аполонский*

### Задача 3. Прилетевший пластилин

Кусок пластилина массой  $m$ , упав без начальной скорости с некоторой высоты, прилип к бруску такой же массы, движущемуся по горизонтальной поверхности с постоянной скоростью  $v_0 = 4$  м/с под действием постоянной горизонтальной силы. Коэффициент трения между бруском и поверхно-

стью  $\mu = 0,2$ . Определите скорость  $v_1$  бруска через время  $t_1 = 1$  с после начала падения пластилина. Постройте график зависимости скорости бруска  $v$  от времени  $t$  после начала падения пластилина: а) с высоты  $h_1 = 10$  м; б) с высоты  $h_2 = 25$  м, указав на нем координаты характерных точек. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Сопротивлением воздуха пренебречь.

*М.Замятнин*

### Задача 4. Струйное нагревание

В пустой теплоизолированный сосуд наливают воду при температуре  $t_0 = 20$  °С струйкой с массовым расходом  $\mu = 2,0$  г/с. Когда в сосуде оказывается  $m = 100$  г воды, в нем включается нагреватель мощностью  $N = 200$  Вт. Температура содержимого сосуда измеряется помещенным в него ртутным термометром. Через какое время  $\tau_1$  с момента включения нагревателя температура воды в сосуде увеличится до  $t_1 = 30$  °С? До какой максимальной температуры  $t_{\max}$  сможет нагреться содержимое сосуда? Выведите зависимость скорости  $v$  подъема столбика ртути термометра от времени  $\tau$  с момента включения нагревателя, если на его шкале расстояние между отметками  $t_0$  и  $t_1$  равно  $l = 2,0$  см. Определите скорость подъема столбика при температуре  $t_1$ . Удельная теплоемкость воды  $c = 4200$  Дж/(кг · °С). Процессы теплообмена происходят быстро, теплоемкости термометра и сосуда малы.

*Г.Зикрацкий*

### Задача 5. Что покажет омметр?

При подключении омметра к нелинейному элементу  $Z$ , вольт-амперная характеристика которого представлена на рисунке 3, он показывает сопротивление  $R_Z = 0,8$  кОм. Если параллельно к нелинейному элементу  $Z$  подключить резистор сопротивлением  $R = 1$  кОм, то показания омметра будут  $R_1 = 0,4$  кОм. Определите ЭДС  $U_0$  источника омметра и его внутреннее сопротивление  $r$ . Каковы будут показания омметра  $R_2$  при подключении к нему последовательного соединения нелинейного элемента  $Z$  и резистора сопротивлением  $R$ ?

*Примечание.* Считайте, что омметр состоит из соединенных последовательно идеального источника постоянного напряжения  $U_0$ , резистора сопротивлением  $r$  и идеального амперметра (рис. 4). При подключении к

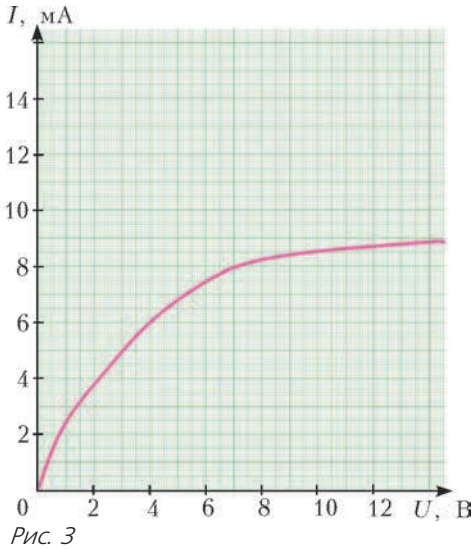


Рис. 3

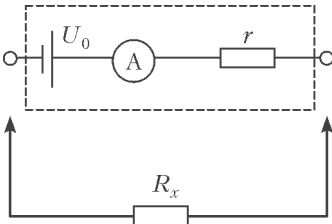


Рис. 4

омметру резистора сопротивлением  $R_x$  показания амперметра, встроенного в омметр, автоматически пересчитываются так, что на цифровом табло прибора отражается значение сопротивления подключенного резистора.

*А.Киреев*

10 класс

**Задача 1. Шайбы и стенка**

Две шайбы находятся на гладкой горизонтальной поверхности (рис.5). Малая шайба радиусом  $r$  движется со скоростью  $v$  вдоль вертикальной стенки при малом зазоре с ней. Большая шайба радиусом  $R = 7r$  касается

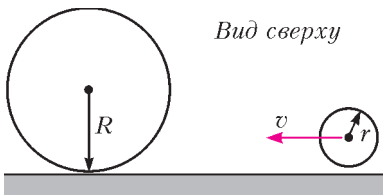


Рис. 5

стенки. Какую скорость  $u$  приобретет большая шайба после всех столкновений, если массы шайб одинаковы? Трения в системе нет, столкновения шайб друг с другом и со стенкой абсолютно упругие.

*И.Воробьев*

**Задача 2. Автомобиль на конвейере**

Автомобиль движется по горизонтальному неподвижному конвейеру со скоростью  $v_0 = 20$  м/с в безветренную погоду. При этом половина мощности двигателя затрачивается на преодоление сопротивления воздуха, другая половина – на преодоление трения качения.

1) Навстречу автомобилю подул ветер со скоростью  $v_0 = 20$  м/с (относительно земли). С какой установившейся скоростью  $v_1$  относительно земли будет двигаться автомобиль, если развиваемая двигателем мощность не изменилась, а конвейер неподвижен?

2) В некоторый момент ветер утих, а конвейер стал двигаться с постоянной скоростью  $v_0 = 20$  м/с в сторону, противоположную движению автомобиля. С какой установившейся скоростью  $v_2$  относительно земли будет двигаться автомобиль, если развиваемая двигателем мощность не изменилась?

*Примечание 1.* Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату относительной скорости, сила трения качения постоянна.

*Примечание 2.* Во всех случаях проскальзывания колес не возникает.

*Примечание 3.* Уравнение третьей степени можно решить методом подбора.

*В.Петров*

**Задача 3. Трубка на центрифуге**

На центрифуге, которая может вращаться только вокруг вертикальной оси, закреплен в горизонтальном положении герметичный легкий цилиндр (рис.6). Ось ци-

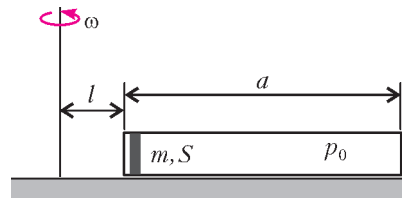


Рис. 6

линдра проходит через ось вращения. Внутри цилиндра находится тонкий поршень, который может перемещаться без трения. Цилиндр заполнен идеальным газом, давлением которого поршень прижат к торцу цилиндра, ближнему к оси вращения. Длина цилиндра  $a = 0,5$  м, площадь поршня  $S = 5$  см<sup>2</sup>, его масса  $m = 10$  г, давление газа в цилиндре  $p_0 = 1,0$  кПа. Расстояние от оси вращения до ближнего торца цилиндра  $l = 0,1$  м. Центрифуга начинает вращаться, причем угловая скорость вращения  $\omega$  очень медленно увеличивается. Температура газа поддерживается постоянной.

1) При каком значении  $\omega_1$  угловой скорости начальное положение равновесия поршня перестанет быть устойчивым?

2) На каком расстоянии  $x_1$  от начального положения установится поршень при неизменной угловой скорости  $\omega_1$ ?

3) Теперь частоту вращения начали медленно уменьшать. При каком значении  $\omega_2$  поршень вернется в исходное положение?

*Примечание.* Считайте, что в ходе эксперимента воздух остается однородным.

*А.Аполонский*

**Задача 4. Заряженный шар (классика)**

Проводящий шар радиусом  $R$  имеет сферическую полость радиусом  $r$ , касающуюся наружной поверхности шара (рис.7). Заряд

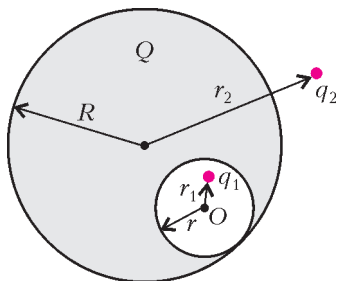


Рис. 7

шара равен  $Q$ . В полости, на расстоянии  $r_1$  от ее центра, находится точечный заряд  $q_1$ . Вне шара, на расстоянии  $r_2$  от его центра, находится точечный заряд  $q_2$ .

1) Найдите потенциал  $\phi_{ш}$  шара.

2) Найдите потенциал  $\phi_O$  в центре  $O$  полости.

Потенциал бесконечно удаленных точек примите равным нулю.

*В.Чивилёв*

**Задача 5. Нелинейность**

Нелинейный элемент  $Z$  имеет вольт-амперную характеристику  $I_Z = \alpha U^2$ , где  $\alpha = 0,07$  А/В<sup>2</sup>. Получите формулу зависимости силы тока  $I$  от напряжения в цепи, составленной из бесконечного числа нелинейных элементов  $Z$  (рис.8).

*А.Куреев*

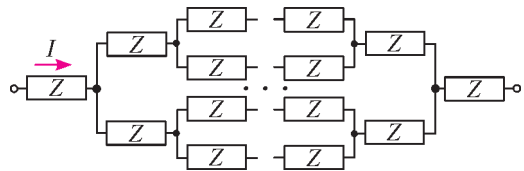


Рис. 8

11 класс

**Задача 1. Цилиндр на наклонной плоскости**

Верхняя часть наклонной плоскости гладкая, нижняя – шероховатая (рис.9). На

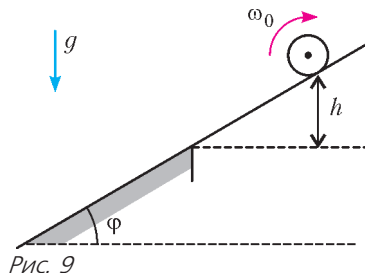


Рис. 9

верхнюю часть кладут тонкостенную цилиндрическую трубу, вращающуюся вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega_0$ , и отпускают. В начальный момент ось цилиндра неподвижна, а линия касания трубы с плоскостью находится на высоте  $h = 10$  см над границей раздела гладкого и шероховатого участков. Коэффициент трения между трубой и шероховатой поверхностью  $\mu = 0,1$ . Радиус цилиндра  $R = 5$  см. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

1) Считайте, что  $\omega_0$  велико. При каком угле  $\varphi = \varphi_m$  труба вернется в начальное положение за минимальное время?

2) Найдите это минимальное время  $t_{min}$ .

3) Пусть  $\varphi = \varphi_m$ . При каких  $\omega_0$  труба вернется в начальное положение?

*М.Дидин*

**Задача 2. Совпадающие теплоемкости**

В архиве лорда Кельвина нашли цилиндр с одним молем идеального одноатомного

газа. Лорд Кельвин проводил с ним два процесса и изобразил их на  $pV$ -диаграмме. Чернила, разумеется, выцвели. От первого процесса уцелела часть графика – отрезок прямой, а от графика второго процесса, как обычно, сохранилась единственная точка  $A$  (рис.10). Из поясняющих записей сле-

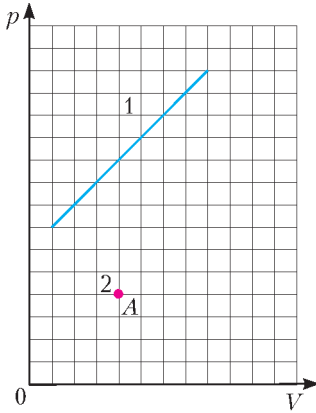


Рис. 10

довало, что в этих процессах при равных температурах теплоемкости совпадали. Восстановите график зависимости давления  $p$  от объема  $V$  для второго процесса.

*И.Воробьев*

**Задача 3. В пузыре**

В далеком космосе есть планета, состоящая полностью из воды. Известно, что глубоководные обитатели изнутри могут обозревать все пространство вокруг тогда и только тогда, когда находятся на расстоянии не более чем  $x = 3000$  км от центра планеты. Местные жители решили запустить спутник. С какой скоростью он должен двигаться на самой низкой возможной орбите? Показатель преломления воды  $n = 4/3$ , плотность воды  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, гравитационная постоянная  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  Н · м<sup>2</sup>/кг<sup>2</sup>. Планета не вращается вокруг своей оси, волн на ее поверхности не бывает, воду можно считать несжимаемой.

*К.Кутелев*

**Задача 4. Столкновения в магнитном поле**

По двум горизонтальным проводящим рельсам может скользить без трения металлическая перемычка массой  $m$  (рис.11). Расстояние между рельсами  $l$ . Движение перемычки ограничено двумя непроводящими жестки-

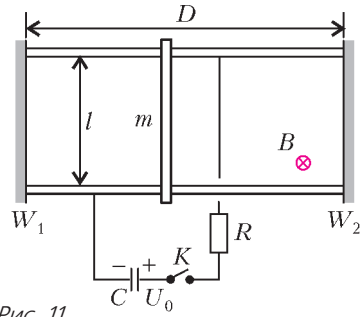


Рис. 11

ми вертикальными стенками  $W_1$  и  $W_2$ , находящимися на расстоянии  $D$  друг от друга. Рельсам через ключ  $K$  последовательно подключены заряженный до напряжения  $U_0$  конденсатор емкостью  $C$  и резистор сопротивлением  $R$ . Перпендикулярно плоскости рельсов включено вертикальное однородное магнитное поле с индукцией  $B$  такое, что  $m > B^2 l^2 C$  и  $DBl \gg RCU_0$ . В момент, когда ключ замкнули, перемычка покоилась посередине между стенками. Определите:

- 1) с какой стенкой произойдет первое столкновение перемычки;
  - 2) скорость  $v_1$  перед первым столкновением;
  - 3) скорость  $v_n$  перед  $n$ -м столкновением.
- Все столкновения перемычки со стенками абсолютно упругие.

*А.Аполонский*

**Задача 5. Уронили в речку шарик**

Из точки  $O$  на поверхности воды в реку бросают одинаковые маленькие металлические шарики (рис.12). Отпущенный без начальной скорости шарик упал на дно в точке

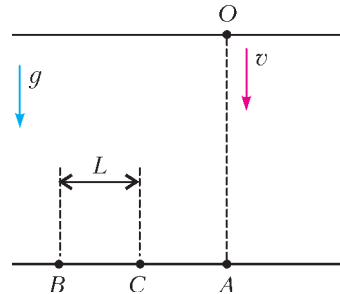


Рис. 12

$B$ , а шарик, запущенный вертикально вниз с известной скоростью  $v$ , упал в точку  $C$ . Расстояние  $BC = L$ . Найдите горизонтальную составляющую скорости второго шарика  $u_x$  при ударе о дно. Считайте, что при



движении на шарик со стороны воды действует сила, прямо пропорциональная скорости движения шарика относительно воды и направленная против этой скорости. Ско-

рость течения не зависит от глубины, а дно горизонтально. Силу Архимеда не учитывать.

*А.Аполонский*

## ПОБЕДИТЕЛИ ОЛИМПИАДЫ

*9 класс*

*Иван Харичкин* – Санкт-Петербург,  
*Алексей Кадыхов* – Республика Мордовия,  
*Данила Завизион* – Санкт-Петербург,  
*Александр Зенькович* – Республика Мордо-

*вия,*  
*Алиса Бугрова* – Московская область,  
*Валерий Хегай* – Москва,  
*Сергей Савельев* – Москва,  
*Егор Васенин* – Вологодская область;

*10 класс*

*Владимир Малиновский* – Санкт-Петербург,  
*Андрей Панферов* – Москва,

*Елисей Судаков* – Вологодская область,  
*Арина Кузнецова* – Московская область,  
*Владислав Поляков* – Санкт-Петербург,  
*Олег Смирнов* – Москва;

*11 класс*

*Григорий Бобков* – Москва,  
*Дмитрий Мельников* – Москва,  
*Станислав Цапаев* – Москва,  
*Никита Романов* – Республика Мордовия,  
*Андрей Николаев* – Республика Мордовия,  
*Даниил Павлов* – Санкт-Петербург,  
*Алексей Шишкин* – Москва,  
*Захар Яковлев* – Санкт-Петербург.

*Публикацию подготовил В.Слободянин*

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

# Олимпиада «Покори воробьевы горы!»

### МАТЕМАТИКА

Олимпиада «Покори Воробьевы горы!» по математике в 2017/18 учебном году состояла из двух этапов: отборочного и заключительного. Отборочный этап проводился в ноябре – декабре 2017 года и состоял из блиц-тура (5 задач онлайн, 3 часа на решение) и творческой части (5 задач, на решение отводилась неделя). Победители и призеры отборочного этапа приглашались к участию в заключительном (очном) этапе, который проводился в феврале–марте 2018 года в Москве и ряде других городов России.

#### Отборочный этап

*Блиц-тур*

Каждый участник отборочного этапа получал свой набор задач, отличающийся от

наборов задач других участников. Ниже приведен типичный набор из пяти задач.

1. Решите неравенство  $\sqrt{x(x+24)} \geq x(x-10)$ . В ответе укажите сумму всех целых корней данного неравенства.

2. Решите уравнение  $\sin 2x - \sin 4x = (1 + \cos 2x) \cos 3x$ . В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку  $\left[8\pi; \frac{17\pi}{2}\right]$ , при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

3. В треугольнике  $ABC$  проведены медианы  $AA_1 = 12$ ,  $BB_1 = 14$ ,  $CC_1 = 16$ , которые пересекаются в точке  $O$ . Найдите площадь треугольника  $B_1OC$ . В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

4. Решите систему

$$\begin{cases} \log_{x+5}(y^2 - 20y + 100) + \\ \quad + \log_{y-10}(x^2 + 10x + 25) = 4, \\ \log_{x+5}(-2y + 23) + \log_{y-10}(2x + 9) = 2. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения  $x_k \cdot y_k$  для каждого решения  $(x_k; y_k)$  системы и найдите среди них минимальное. В ответе укажите найденное минимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

5. Владелец библиотеки решил подарить на Новый год своим брату и сестре по одной книге. Он составил список из 87 книг, подходящих для брата, и список из 93 книг, подходящих для сестры. Внутри каждого списка все книги попарно различны. При этом имеется ровно одна книга, попавшая в оба списка. Сколькими способами он может сделать свой подарок так, чтобы брат и сестра получили разные книги?

#### Творческое задание

1. Дано 2018 множеств, каждое из которых состоит из 45 элементов. Объединение любых двух из этих множеств содержит 89 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех 2018 множеств?

2. Найдите количество натуральных чисел  $n$ , не превышающих 500, для которых уравнение  $x^{[x]} = n$  имеет решение. Здесь  $[x]$  – наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ .

3. Решите неравенство

$$\frac{4^{-|x-2|}}{\sqrt{x^2 - x - 2} + 2} \leq \frac{2^{1-|x|}}{\sqrt{x^2 + 6x + 4}}.$$

В ответ запишите сумму длин интервалов решения, принадлежащих множеству  $[-2018; 2018]$ .

4. В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $BH$ , точка  $O$  – центр описанной около него окружности, длина ее радиуса равна  $R$ . Найдите наибольший из углов  $BAC$  и  $ACB$ , выраженный в радианах, если известно, что  $R = \frac{6}{5}BH = 4OH$ . При необходимости округлите найденное значение до двух знаков после запятой.

5. Летний отдых жители Цветочного города Знайка и Незнайка проводили в боль-

шом 15-этажном отеле на берегу моря. Знайка заметил, что все номера комнат от первой до его собственной включительно в сумме в два раза больше суммы всех номеров комнат от первой до той, в которой поселили Незнайку, включительно. Все номера в отеле занумерованы подряд от 1 до 1599, и Знайка живет в комнате с номером, большим 200. Определите, в каком номере живет Знайка. Если получится несколько значений номеров, то в ответе напишите их сумму.

#### Заключительный этап

Варианты, предлагавшиеся участникам заключительного этапа в разных городах России, отличались друг от друга. Здесь приводятся один из вариантов полностью и избранные задачи из других вариантов.

#### Вариант 1

1. Найдите такое наименьшее натуральное число, что его половина есть пятая степень некоторого целого числа, а пятая часть есть квадрат некоторого целого числа.

2. Найдите сумму  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ , если известно, что три различных действительных числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} x^3 + 1009 &= 2018x, & y^3 + 1009 &= 2018y, \\ z^3 + 1009 &= 2018z. \end{aligned}$$

3. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} 3\sqrt{x} - 3^2\sqrt{y} \geq 2\sqrt{y} - \sqrt{x}, \\ x^2 + y^2 \leq 9 + 2xy. \end{cases}$$

4. Вычислите

$$\operatorname{tg} \left( \operatorname{arctg} \frac{2-1}{2^3-1} + \operatorname{arctg} \frac{3-1}{3^3-1} + \dots \dots + \operatorname{arctg} \frac{100-1}{100^3-1} \right).$$

5. Развертка боковой поверхности усеченного конуса с образующей, равной 12, представляет собой часть кругового кольца с центральным углом  $\frac{2\pi}{3}$ . Найдите радиусы оснований этого усеченного конуса, если площадь его поверхности равна площади полного кругового кольца.

*Избранные задачи других вариантов*

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 - 4x + 5} + \sqrt{3x^2 - 12x + 13} \leq 4x - x^2 - 2.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x-2}-3} \geq \frac{1}{\sqrt{x-1}-2}.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}-2} \leq \frac{2}{\sqrt{x^2+14x+40}-4}.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{ctg}^2 x \leq 2 \cos^3 3x.$$

5. Незнайка собирается приготовить ко дню своего рождения три бочки малинового морса, смешивая малину с водой, причем процентное содержание малины в бочках будет таково, что если смешать содержимое бочек в пропорции 1:2:3, то получится 10-процентный морс, а если в пропорции 5:4:3, то получится 25-процентный морс. Каким будет процентное содержание малины в морсе при смешивании равных количеств исходных трех растворов? Каким планируется содержание малины в третьей бочке?

6. Однажды два друга вложили деньги в общее дело: каждый вложил свою сумму, а вместе – 1 млн руб. За ночь один из них вложил в то же дело дополнительную сумму. Сколько всего денег он вложил в итоге, если его новая доля в общем деле оказалась в 7 раз больше прежней, тогда как доля другого – в 3 раза меньше прежней?

7. Число в семеричной системе счисления является трехзначным. В системе счисления с основанием 11 оно записывается теми же тремя цифрами, но в обратном порядке. Какова его запись в десятичной системе счисления (найдите все возможные значения)?

8. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение  $16^x - 6 \cdot 8^x + 8 \cdot 4^x + (2 - 2a)2^x - a^2 + 2a - 1 = 0$  имеет ровно три различных корня.

9. Найдите наименьшее значение  $|x - y|$  при условии

$$(\cos^4 x + 1)(4 \cos^4 y + 1) = 8 \cos^3 x \cos^2 y,$$

$$x \in [\pi; 2\pi], y \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right].$$

10. Для функции  $f(x) = -\frac{x^2}{1+x^2}$  найдите сумму

$$f\left(\frac{1}{2018}\right) + f\left(\frac{1}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f(2) + \dots + f(2017) + f(2018).$$

11. Найдите площадь треугольника  $ABC$ , в котором  $\cos(\angle ABC - \angle ACB) = \frac{11}{16}$ ,  $AB = 4$ ,  $AC = 5$ .

12. Внутри треугольника  $ABC$  взята такая точка  $D$ , что  $\angle ABD = \angle CBD = 40^\circ$ ,  $\angle ACD = 20^\circ$ ,  $\angle CAD = 30^\circ$ . Найдите:

а) углы  $BAD$  и  $BCD$ ;

б) расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников  $ABC$  и  $BCD$ , если  $BC = 3$ .

*Публикацию подготовили Б.Будак, Д.Горяшин, А.Зеленский, А.Козко, Л.Крицков, В.Панфёров, А.Разборов, И.Сергеев, И.Шейтак, М.Юмашев*

**ФИЗИКА**

Олимпиада «Покори Воробьевы Горы!» проходит с 2005 года. С самого начала она возникла как социальный проект, направленный на поиск талантливых школьников во всех регионах России. В 2017/18 учебном году олимпиада по физике проводилась для двух категорий школьников: «младшие» (7, 8 и 9 классы) и «старшие» (10 и 11 классы). Отборочный этап олимпиады проходил дистанционно: каждому участнику после получения заданий давалась неделя (168 часов) на выполнение задания. Заключительный этап проводился в очной форме в пяти городах РФ: Железноводск, Кемерово, Москва, Саратов, Уфа. В олимпиаде традиционно используются оригинальные задачи достаточно высокого уровня сложности. Наиболее сложные и интересные задачи присутствуют в творческой части отборочного этапа. У некоторых из них не бывает «единственно правильного» решения, так как участник может использовать различные модели рассматриваемых явлений, а оценка его решения зависит и от адекватности и уровня точности используемой модели, и от корректности решения в рамках выбранной модели.

Ниже приводятся примеры заданий обоих этапов олимпиады для «старших» школьников.

**Отборочный этап**

Задание отборочного тура состояло из тестовой части (проверялись только ответы) и творческой части (проверялись и оценивались решения).

**Часть I (тестовое задание)**

**1** (8 баллов). Маленький мальчик катается на карусели, сидя почти неподвижно в кресле, которое вращается вокруг вертикальной оси карусели с угловой скоростью  $2 \text{ рад/с}$  по окружности радиусом  $2 \text{ м}$ . Его отец едет на велосипеде со скоростью  $10 \text{ м/с}$  по дорожке, проходящей мимо карусели. В момент, когда он проезжает точку дорожки, наиболее близкую к карусели, его сын тоже проходит наиболее близкую к дорожке точку своей траектории, при этом расстояние между ними равно  $3 \text{ м}$  и их скорости относительно земли сонаправлены. Найдите скорость отца в системе отсчета, связанной с сыном, в этот момент времени. Ответ запишите в  $\text{м/с}$ .

**2** (8 баллов). Один моль гелия нагревают таким образом, что его давление растет прямо пропорционально объему, увеличиваясь в  $1,3$  раза. Найдите количество теплоты, подведенное к гелию в ходе этого процесса, если известно, что его начальная температура равнялась  $200 \text{ К}$ . Универсальная газовая постоянная  $R = 8,31 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$ . Ответ запишите в джоулях, округлив до ближайшего целого.

**3** (9 баллов). В схеме, показанной на рисунке 1,а, диод не является идеальным – его вольт-амперная характеристика (зависимость силы тока от приложенного напряжения) показана на рисунке 1,б. Как видно, у диода есть некоторое пороговое напряжение, ниже которого он заперт даже при прямом включении, а при его превышении он пропускает любой ток (считаем, что это справедливо для токов, характерных для этой схемы). Известно, что величина ЭДС источника в  $6$  раз больше порогового напряжения диода, а внутреннее сопротивление источни-

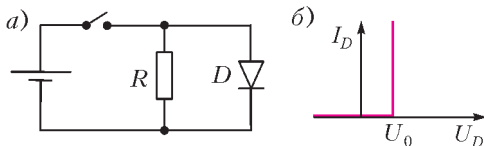


Рис. 1

ка во столько же раз меньше сопротивления резистора. Найдите отношение мощности, выделяемой на диоде, к мощности, выделяемой на резисторе. Ответ запишите в виде числа.

**Часть II (творческое задание)**

**Архивы профессора Челленджера**

**1. Подводная оптика**

Однажды профессор Челленджер производил наблюдения за обитателями пруда с чистой водой. При этом он использовал плосковыпуклую тонкую линзу, фокусное расстояние которой в воздухе  $F = 30 \text{ см}$ . Линза размещалась на поверхности воды (рис. 2). Профессор рассматривал мелкий

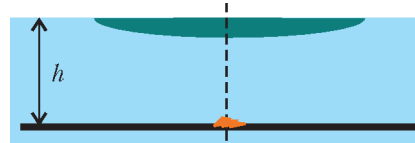


Рис. 2

объект, находившийся точно под центром линзы на глубине  $h = 63 \text{ см}$ . С каким поперечным увеличением был виден объект? Известно, что показатель преломления стекла, из которого изготовлена линза,  $n_{\text{ст}} = 2$ , показатель преломления воды  $n = \sqrt{2} = 1,414$ .

**2. Термомеханическое реле**

В одном из опытов профессора Челленджера было необходимо, чтобы при достижении в установке определенной температуры подавался сигнал. Нужный датчик удалось изготовить на основе биметаллической пластины, т.е. двух длинных тонких пластин одинаковых размеров: длина  $L$ , ширина  $D$ , толщина  $d$ , причем  $L \gg D \gg d$ , изготовленных из разных металлов и по всей поверхности соприкосновения прочно сваренных друг с другом (рис. 3,а). Металлы имеют

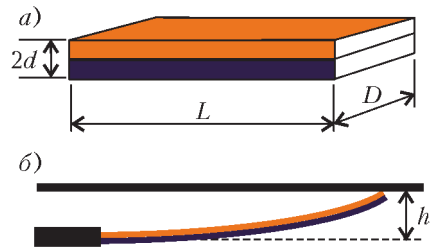


Рис. 3

разные коэффициенты теплового расширения  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  и разные модули Юнга  $E_1 \neq E_2$ . При температуре  $t_0 = 0^\circ\text{C}$  пластина ровная, а при изменении температуры она изгибается по дуге окружности и при достижении необходимой температуры  $t$  касается контакта и замыкает цепь подачи сигнала. Для правильной регулировки датчика нужно подобрать расстояние  $h$  между плоскостью недеформированной пластины и поверхностью контакта (рис. 3,б). Выведите формулу «калибровочной зависимости» датчика  $h(t)$ .

### 3. Поиски нуля

В одной из записных книжек профессора Челленджера найдено упоминание об «особенном четырехугольнике». Плоский четырехугольный каркас  $ABCD$  (рис.4) был изготовлен из непроводящего жесткого стержня и имел стороны с длинами  $AB = 3\text{ см}$ ,  $BC = 2\text{ см}$ ,  $CD = 4\text{ см}$  и  $DA = 5\text{ см}$ . Площадь четырехугольника  $S \approx 10,78\text{ см}^2$ . На каркас по всему периметру был равномерно нанесен заряд. В записной книжке утверждалось, что у этого четырехугольника есть точка, в которой напряженность электрического поля равна нулю. Найдите эту точку, определите расстояние от нее до каждой из сторон четырехугольника и укажите еще хотя бы один пример равномерно заряженного четырехугольника, имеющего такую точку.

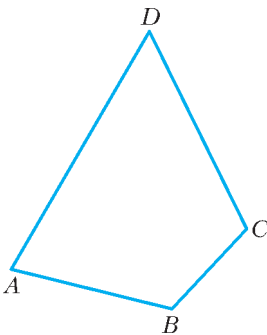


Рис. 4

### 4. Гравитационная волна

Судя по записям в архивах, профессор Челленджер много внимания уделял поиску гравитационных волн. Для этой цели он создал детектор в виде тяжелого груза и пружины, которые были помещены в вакуумную камеру. Крепление камеры было снабжено специальными устройствами, изолирующими ее от колебаний здания. В состоянии покоя груз растягивал пружину на  $\Delta l_0 = (7,000 \pm 0,005)\text{ см}$  (здесь и далее указаны погрешности, с которыми известны данные эксперимента). Профессору уда-

лось обеспечить очень слабое затухание колебаний груза: после выведения его из равновесия в процессе свободных колебаний амплитуда убывала в 2 раза примерно за 1000 периодов колебания. Однажды детектор зарегистрировал почти периодический сигнал продолжительностью около 900 с, в течение которых груз колебался практически вертикально (угол отклонения оси колебаний от вертикали не превышал  $0,1^\circ$ ). На графике (рис. 5) представлена временная

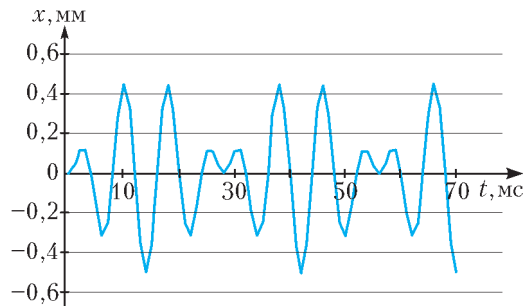


Рис. 5

зависимость отклонений груза  $x(t)$  от положения равновесия на участке длительностью 70 мс, взятом из средней части сигнала (на других аналогичных участках картина с высокой точностью повторялась). Анализ показал, что эту кривую можно (с отклонениями, не превышающими 0,01 мм) описать формулой

$$\bar{x}(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \sin\left(\frac{2\pi}{7T}t\right),$$

где  $A = (0,50 \pm 0,01)\text{ мм}$ ,  $T = (8,00 \pm 0,01)\text{ мс}$ . Предположим, что этот сигнал был вызван гравитационным излучением, которое является наложением гармонических колебаний вида  $\delta\vec{g}(t) = \vec{g}_m \cos(\omega t + \varphi)$ . Здесь  $\delta\vec{g}$  – изменение ускорения свободного падения, вызванное волной. В рамках этого предположения найдите:

- \* спектр сигнала (т.е. набор частот гармонических колебаний, из которых он состоит);

- \* амплитуду ( $g_m$ ) каждого из гармонических колебаний.

Насколько реалистично это предположение? При ответе на этот вопрос учтите, что сигнал, зарегистрированный 14.09.2015 детекторами LIGO, вносил в ускорение свободного падения искажения порядка  $10^{-12}g$ .

**Заключительный этап**

*Вариант 1*

Задание 1

**Вопрос.** Гантель, состоящая из двух маленьких шариков массой  $m$  каждый и легкого жесткого стержня длиной  $L$ , движется в плоскости таким образом, что скорость ее центра масс  $v$ , а угловая скорость  $\omega$ . Чему равна ее кинетическая энергия?

**Задача.** Гантель, состоящая из двух массивных маленьких шариков и легкого жесткого стержня длиной  $L$ , покоилась на гладкой горизонтальной поверхности. В один из ее шариков врезается третий (такой же), скорость которого  $\vec{v}_0$  направлена под углом  $\alpha = 30^\circ$  к стержню (рис.6). Происходит ло-

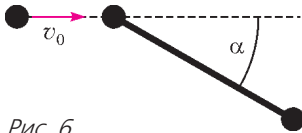


Рис. 6

бовое абсолютно упругое соударение. Найдите угловую скорость вращения гантели после удара.

Задание 2

**Вопрос.** Точка  $K$  – это точка на  $pV$ -диаграмме, описывающая состояние постоянного количества одноатомного идеального газа. Угол наклона изотермы в этой точке к оси  $V$  равен  $\alpha$ . Каков угол наклона адиабаты в этой же точке к оси  $V$ ? Ответ надо обосновать.

**Задача.** На рисунке 7 показана диаграмма циклического процесса над постоянным количеством гелия, являющимся рабочим телом тепловой машины. Цикл состоит из изохоры, адиабаты и процесса с линейной зависимостью давления от объема, в котором объем увеличивается в 2,5 раза. Пунктирная кривая – участок адиабаты, касающийся диаграммы этого процесса в точке 2. Найдите КПД цикла. Уравнение адиабаты для одноатомного идеального газа имеет вид  $pV^{5/3} = \text{const}$ .

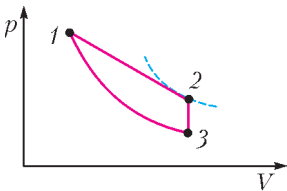


Рис. 7

объем увеличивается в 2,5 раза. Пунктирная кривая – участок адиабаты, касающийся диаграммы этого процесса в точке 2. Найдите КПД цикла. Уравнение адиабаты для одноатомного идеального газа имеет вид  $pV^{5/3} = \text{const}$ .

Задание 3

**Вопрос.** Плоский воздушный конденсатор заряжен и отключен от источника. В него частично вставили диэлектрическую пластинку, толщина которой чуть меньше расстояния между пластинами конденсатора, и отпустили ее, не подталкивая. Что произойдет с пластинкой после этого? Трение между пластинкой и пластинами конденсатора очень мало.

**Задача.** В схеме, показанной на рисунке 8, конденсаторы изначально разряжены.

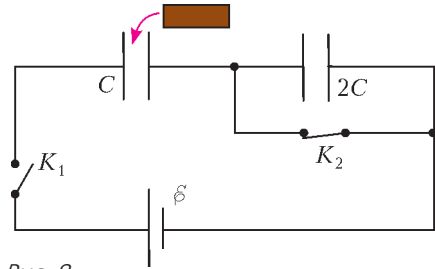


Рис. 8

После замыкания ключа  $K_1$  заряд конденсатора емкостью  $C$  стал равным  $q = 5 \text{ мкКл}$ . Затем ключ  $K_2$  разомкнули, а конденсатор емкостью  $C$  полностью заполнили диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon = 3$ . Какой заряд после этого будет на конденсаторе емкостью  $2C$ ?

Задание 4

**Вопрос.** Пучок параллельных световых лучей падает на линзу с оптической силой  $D_1 = +2$  дптр. На каком расстоянии за ней нужно соосно поставить линзу с оптической силой  $D_2 = -5$  дптр, чтобы из второй линзы лучи пучка вышли параллельно?

**Задача.** Две тонкие линзы, одна из которых собирающая, а другая рассеивающая, расположены на общей оптической оси на расстоянии  $L$  друг от друга. На той же оси на расстоянии  $3L$  от ближней из линз расположен точечный источник света. Если ближе к источнику размещена собирающая линза, то изображение источника находится на расстоянии  $L$  за рассеивающей линзой. Если, не перемещая источник, переставить линзы, то изображение будет находиться на расстоянии  $7L/3$  за собирающей линзой. Найдите фокусные расстояния обеих линз.

*Публикацию подготовил К.Парфенов*

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

### ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №7)



Рис. 1

1. Ответ – на рисунке 1.
2. Одной кошкой обойтись не получится, так как из каждого дома выходит не больше трех дорог, значит, каждая кошка отпугивает мышей не больше чем из четырех домов.

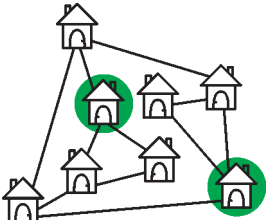


Рис. 2

На рисунке 2 выделены дома, куда можно поселить двух кошек.

3.  $11^\circ$ .

Рассмотрим треугольники, выделенные на рисунке 3 зеленым цветом. Один угол в каждом треугольнике

известен, другой угол прямой. Из того, что сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ , находим

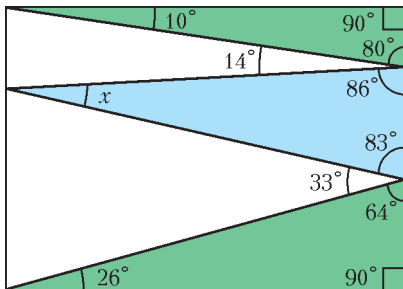


Рис. 3

третьи углы:  $180^\circ - 90^\circ - 10^\circ = 80^\circ$ ,  $180^\circ - 90^\circ - 26^\circ = 64^\circ$ . Зная их, можно найти два угла синего треугольника, ведь они образуют развернутые углы вместе с уже известными углами:  $180^\circ - 80^\circ - 14^\circ = 86^\circ$ ,  $180^\circ - 64^\circ - 33^\circ = 83^\circ$ . Теперь, зная два угла синего треугольника, находим третий:  $x = 180^\circ - 86^\circ - 83^\circ = 11^\circ$ .

4. 4 способа.

Предположим, что после добавления гирьки в  $x$  кг гири можно разбить на три группы равной массы. Группы, состоящие только из исходных гирек, будут весить целое число килограммов, поэтому и  $x$  – целое. Суммарная масса всех гирек в три раза больше массы одной группы, значит,  $20 + x$  делится на 3, т.е.  $x$  дает остаток 1 при делении на 3.

Теперь учтем, что масса новой гирьки не должна превосходить массу одной группы, т.е.

$$x \leq \frac{20+x}{3}, \text{ откуда получаем, что } x \leq 10.$$

Покажем, что при всех  $x$ , для которых выполняются эти два условия, гири можно разбить на три группы равной массы.

- При  $x = 1$ :  $1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$ ;  
 при  $x = 4$ :  $2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4$ ;  
 при  $x = 7$ :  $2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$ ;  
 при  $x = 10$ :  $2 + 3 + 5 = 4 + 6 = 10$ .

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

### ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Отсутствием атмосферы и продолжительностью лунной ночи, равной двум земным неделям.
2. Метеоры, полярные сияния, радуга и серебристые облака – атмосферные явления, на Луне их не может быть. А вот затмения Солнца Земли, искусственные спутники и кометы на Луне наблюдаются даже лучше, чем на Земле, поскольку не мешает атмосфера.
3. Время рассеяния атмосферы у крупных планет – Венеры, Земли, Юпитера и так далее – очень велико и существенно превышает их возраст. У Меркурия же из-за малой скорости «убегания» и высокой температуры поверхности время рассеяния очень мало, так что его атмосфера давно утеряна.
4. Ось вращения Меркурия почти перпендикулярна к плоскости орбиты. Поэтому высокая температура днем там только в низких широтах, в полярных же районах планеты Солнце стоит низко над горизонтом и температура там крайне мала – около 60 кельвинов. А в глубоких метеоритных кратерах, куда солнечные лучи совсем не попадают, она еще ниже.
5. Этим доказательством является смена фаз – изменение вида планеты от полного диска до узкого серпа.
6. По постепенному уменьшению блеска звезды. При покрытии же звезды Лунной, у которой отсутствует атмосфера, блеск остается постоянным вплоть до почти моментального исчезновения.
7. Температура на поверхности Венеры, измеренная космическими аппаратами, оказалась много больше критической температуры для воды, выше которой она не может существовать в жидкой фазе ни при каком давлении.
8. В условиях малого атмосферного давления часть воды выкипит, а оставшаяся часть замерзнет.
9. Рассеянный атмосферой Венеры свет все же частично доходит до ее поверхности, поэтому днем на Венере довольно светло, примерно как на Земле в пасмурную погоду, ночью же там совсем темно.

10. На Венере. Причина этого – в противоположном направлении вращения планеты.

11. Марс обращается вокруг Солнца, ось его вращения наклонена к плоскости орбиты и сохраняет свое направление в пространстве – по этим причинам на нем происходит смена времен года.

12. На Венере и Юпитере – так как оси вращения этих планет почти перпендикулярны плоскостям орбит, а сами орбиты близки к круговым.

13. Возможная причина этого – меньшая плотность Сатурна по сравнению с Юпитером.

14. В основном они состоят из водорода и гелия.

15. Наличием у Урана нескольких колец, разделенных, подобно кольцам Сатурна, щелями.

16. Входящий в состав атмосферы Нептуна метан поглощает излучение красной части его спектра.

#### МИКРООПЫТ

Ответ – в продолжении приведенной в эпиграфе фразы Галилео Галилея: «...Чем тоньше серп Луны и чем соответственно больше ее затемненная часть, тем больше освещенная часть Земли, видимая с Луны, и тем сильнее отражение света». Этот свет наиболее ярок, когда соответствующая часть Земли ( по отношению к Европейской части России – это Тихий океан) закрыта облаками. У них коэффициент отражения выше, чем у суши или у воды.

#### XXIV ТУРНИР МАТЕМАТИЧЕСКИХ БОЕВ ИМЕНИ А.П.САВИНА

1. 5.

*Оценка.* Докажем, что суперпуперпростых чисел, стоящих подряд, не более пяти. Предположим, что их хотя бы шесть. Среди шести последовательных натуральных чисел есть два числа, кратные трем, и хотя бы одно из них дает остаток 0 или 6 при делении на 9. Покажем, что оно не может быть суперпуперпростым. Его сумма цифр, а значит, и сумма цифр суммы цифр дают такой же остаток при делении на 9, что и само число, т.е. 0 или 6. Значит, она делится на 3, но не равна 3, а такое число не может быть простым. Противоречие.

*Пример.* Первое число: 9...939...97 (всего 23 цифры – сначала 5 девяток, затем тройка, 16 девяток и семерка). Его сумма цифр равна  $9 \cdot 21 + 3 + 7 = 199$ , у следующих двух чисел она равна 200 и 201 соответственно. Следующим идет число 9999940...0 с суммой цифр 49, а у следующего числа она равна 50. Эти числа также суперпростые.

Отметим, что последовательных суперпростых чисел не может быть более трех, причем 199,

200, 201 – первая из таких троек в натуральном ряду.

2. Введем прямоугольную систему координат, начало которой – в центре левой нижней клетки, оси направлены параллельно краям доски, а единичный отрезок равен длине стороны одной клетки. Рассмотрим произвольную ладью, которая стоит в клетке с центром  $(x; y)$ , и вычислим суммарную длину пути остальных ладей до этой клетки.

По горизонтали ладьи, стоящие левее рассматриваемой, должны сделать ходы длины 1, 2, ...,  $x$ , а ладьи, стоящие правее нее, – ходы 1, 2, ...,  $99 - x$ . Таким образом, суммарная длина их пути по горизонтали равна

$$(1 + 2 + \dots + x) + (1 + 2 + \dots + (99 - x)) = \\ = \frac{x(x+1)}{2} + \frac{(99-x)(100-x)}{2} = x^2 - 99x + 99 \cdot 50.$$

Аналогично, суммарная длина пути этих же ладей по вертикали равна  $y^2 - 99y + 99 \cdot 50$ . Общая длина пути ладей равна  $S_1 = x^2 + y^2 - 99x - 99y + 99 \cdot 100$ . Так как центр доски имеет координаты  $(\frac{99}{2}; \frac{99}{2})$ , то квадрат расстояния от него до клетки, в которой стоит выбранная ладья, равен

$$S_2 = \left(x - \frac{99}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{99}{2}\right)^2 = \\ = x^2 + y^2 - 99x - 99y + \frac{99^2}{2}.$$

Таким образом, для всех ладей величины  $S_1$  и  $S_2$  отличаются на одну и ту же константу, откуда и следует утверждение задачи.

3. Жидкостями из бутылей, помеченных  $A, B$  и  $C$  соответственно (рис.4), можно наполнить в отношении 3 : 2 : 1 стакан Труса, в отношении 1 : 3 : 2 стакан Балбеса и в отношении 2 : 1 : 3 стакан Бывалого. Шесть строк таблицы соответствуют шести случаям распределения жидкостей по бутылям. Синим выделены крепости в стаканах, не превосходящие 60 градусов, а красным – превосходящие. По таблице видно, как установить, какова крепость самогона в бутылках, по тому, кто уронил стаканы.

Существуют и другие способы решения, в частности, можно сделать три смеси, используя в каждом случае две бутылки из трех.

4. При  $n$ , кратных трем, и  $n = 1$ .

Пусть удалось записать числа так, что указанных уголков не нашлось. Покрасим клетки следующим образом: если в ней стоит число вида  $3k$ , то красим белым цветом, если стоит число вида  $3k - 2$ , то синим цветом, а если стоит число



Бутыли			Трус (3:2:1)	Балбес (1:3:2)	Бывалый (2:1:3)
А	В	С			
45	65	70	55 $\frac{5}{6}$	63 $\frac{1}{3}$	60 $\frac{5}{6}$
70	45	65	60 $\frac{5}{6}$	55 $\frac{5}{6}$	63 $\frac{1}{3}$
65	70	45	63 $\frac{1}{3}$	60 $\frac{5}{6}$	55 $\frac{5}{6}$
70	65	45	64 $\frac{1}{6}$	59 $\frac{1}{6}$	56 $\frac{2}{3}$
65	45	70	59 $\frac{1}{6}$	56 $\frac{2}{3}$	64 $\frac{1}{6}$
45	70	65	56 $\frac{2}{3}$	64 $\frac{1}{6}$	59 $\frac{1}{6}$

Рис. 4

вида  $3k - 1$ , то красным. Рассмотрим квадрат размером  $2 \times 2$ . В нем два цвета присутствуют по два раза, а одного цвета нет. В самом деле, если есть все три цвета, то есть и разноцветный уголок, а его быть не должно. Если один цвет присутствует трижды, то он также образует запрещенный уголок.

Нетрудно заметить, что если вдоль вертикальной стороны квадрата  $2 \times 2$  клетки разного цвета, то во всей горизонтальной полосе, содержащей этот квадрат, третьего цвета нет. То же самое можно утверждать и про два разных цвета по горизонтали и соответствующую вертикальную полосу. Так как хотя бы одна из этих полос должна пересекать полосу с клетками третьего цвета, т.е. должна содержать клетки третьего цвета, то никакой квадрат  $2 \times 2$  не может быть покрашен в шахматном порядке.

Пусть левый нижний квадрат  $2 \times 2$  имеет, например, горизонтальную раскраску. Тогда каждая из двух нижних строк покрашена одним цветом. Переходя к следующим строкам, легко понять, что все они являются одноцветными. Поэтому либо количество клеток каждого цвета одинаковое (и тогда количество строк кратно трем), либо найдутся такие два цвета, что количество клеток одного из них как минимум на  $n$  больше, чем количество клеток другого. В действительности же количества клеток разных цветов отличаются не более чем на 1.

Как устроены примеры для  $n$ , указанные в ответе, легко понять из доказательства оценки.

**5.** Можно.

Так как  $16 = 2^4$ , то монеты можно закодировать последовательностями из нулей и единиц длины 4. При первых четырех взвешиваниях будем

класть на левую чашу весов все монеты, у которых на соответствующих местах стоит 0, а на правую чашу – все монеты, у которых на этих местах стоит 1.

Если в результате каждого такого взвешивания весы останутся в равновесии, то у фальшивых монет на всех четырех местах стоят разные цифры. Разобьем монеты на 8 пар так, чтобы в каждой паре коды монет отличались по всем разрядам. Тогда в какой-то одной паре обе монеты фальшивые. Каждую пару можно считать новой монетой, тогда задача сводится к известной: двумя взвешиваниями определить более легкую фальшивую монету из не более чем девяти монет.

Если же в каком-то из первых четырех взвешиваний одна из чаш перевесит, то мы узнаем соответствующую цифру у обеих фальшивых монет. Тем самым, один или несколько разрядов фальшивых монет станут известны. Разобьем подозрительные монеты (их уже будет меньше 8) на пары так, чтобы в каждой паре неизвестные разряды были разными. Далее действуем аналогично.

**6.** При всех нечетных  $N$ , а также при  $N = 2, 4, 10$  победит Петя, а в остальных случаях победит Вася.

Будем нумеровать клетки числами от 1 до  $N$  слева направо. Очевидно, что при  $N \leq 5$  победит Петя.

Рассмотрим  $N = 6$ . Тогда все клетки можно разбить на пары: (1; 4), (2; 5) и (3; 6). При любом ходе Пети Вася может поставить фишку на второе число из пары. Тем самым у Васи всегда будет ход, и он не проиграет. Аналогичная выигрешная стратегия для Васи работает и для  $N = 8$ , если рассматривать пары (1; 5), (2; 6), (3; 7) и (4; 8). Для четных  $N \geq 12$  аналогичная стратегия также работает, так как полосу можно разбить на группы по 6 и 8 клеток и провести рассуждение по индукции. Переход от  $N$  к  $N + 2$ : если есть группа из шести клеток, то она заменяется на группу из восьми клеток, а если ее нет, то две группы по восемь клеток заменяются на три группы по шесть клеток.

При  $N = 7, N = 9$  и при нечетных  $N > 12$  побеждает Петя, так как, поставив первым ходом фишку на последнюю клетку, он обеспечивает передачу хода и использует стратегию Васи, описанную выше.

При  $N = 10$  побеждает Петя, ставя фишку на 3. У Васи есть две возможности для ответного хода, но после следующего хода Пети ходы Васи определяются однозначно, т.е. возникают две цепочки ходов: ПЗ – В7 – П10 – В6 – П9 – В5 – П2 и

ПЗ – В6 – П2 – В5 – П1 – В4 – П8. В обоих случаях у Васи нет хода.

При  $N = 11$  также побеждает Петя, ставя фишку на 3. Оставшиеся клетки можно разбить на пары (1; 4), (2; 5), (6; 9), (7; 10) и (8; 11). При любом ходе Васи Петя может поставить фишку на второе число из пары, и у него всегда будет ход.

**7.  $N - 1$  камень.**

Будем использовать для обозначения камней их массы.

*Оценка.* Предположим, что есть способ сделать ожерелье из всех  $N$  камней.

Если  $N = 2m - 1$ , то рассмотрим  $m$  таких камней:  $m, m + 1, \dots, 2m - 1$ . Их больше половины, поэтому какие-то два из них окажутся соседними. Но массы каждых двух камней из этого набора отличаются менее чем в 2 раза. Противоречие.

Если  $N = 2m$ , то рассмотрим  $m$  таких камней:  $m + 1, m + 2, \dots, 2m$ . Массы каждых двух камней из этого набора отличаются менее чем в 2 раза. Значит, никакие два из них не могут быть соседними, поэтому они расположены в ожерелье через один. Тогда два из них являются соседними с камнем  $m$ , однако это может быть только камень  $2m$ . Противоречие.

*Пример.* Если  $N = 2m - 1$ , то можно не использовать камень  $m$ , а остальные камни можно расположить в ожерелье следующим образом:  $1, m + 1, 2, m + 2, \dots, m - 2, 2m - 2, m - 1, 2m - 1$ . Тогда для каждого  $k$  от 2 до  $m - 1$  между камнями  $k - 1$  и  $k$  расположен камень  $m + k - 1$ . Так как  $k \leq m - 1$ , то  $m + k - 1 \geq 2k > 2(k - 1)$ . Еще соседними являются камни 1 и  $2m - 1$ , для которых условие также выполняется.

Если  $N = 2m$ , то можно не использовать камень  $m + 1$ , а остальные камни можно расположить в ожерелье следующим образом:  $1, m + 2, 2, m + 3, \dots, m - 1, 2m, m$ . Аналогично случаю нечетного  $N$  легко проверить, что массы каждых двух соседних камней в таком ожерелье отличаются хотя бы вдвое.

**8. Петя.**

Можно считать, что сначала король стоит в левом нижнем углу. Занумеруем числами от 1 до 100 строки снизу вверх, а столбцы – слева направо. Закрасим все клетки, у которых обе «координаты» четные (рис.5). Первым ходом Петя двигает короля в клетку (2; 2). Тогда при любом ходе Васи король попадет в клетку, которая не закрашена, а ответным ходом Петя сможет поставить короля в одну из закрашенных клеток. Эта ситуация будет повторяться до тех пор, пока король не попадет в клетку с «координатами» (100; 100), а это произойдет с ходом Пети.

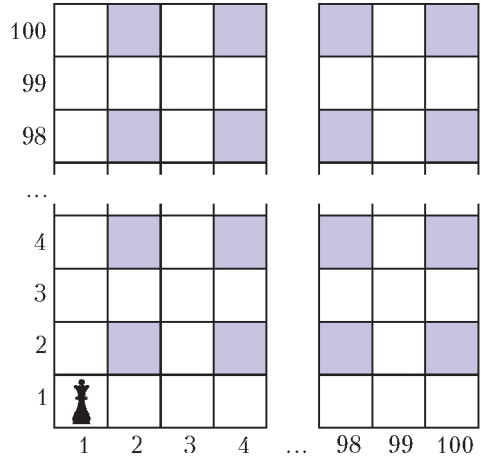


Рис. 5

**9. 7 команд.**

Наибольшее количество очков, которая может набрать одна команда, – это утроенное количество сыгранных ею матчей. Заметим, что команда, ставшая последней и имеющая положительную разность сыгранных партий, должна набрать меньше половины от этого количества очков. Для этого у нее должны быть поражения. Отметим, что при поражении со счетом 2 : 3 положительная разность достигается либо победой со счетом 3 : 0, либо двумя победами со счетом 3 : 2, но в обоих случаях будет набрано больше половины возможных очков. Следовательно, последняя команда должна хотя бы раз проиграть со счетом 1 : 3, а выиграть со счетом 3 : 0. В этом случае команда все равно наберет половину от возможного количества очков. Два поражения со счетом 1 : 3 не компенсируются никакими двумя победами, если требовать одновременного выполнения двух условий: меньше половины набранных очков и положительная разность.

Таким образом, последняя команда должна хотя бы три раза проиграть с таким счетом, что компенсируется двумя победами со счетом 3 : 0 и одной победой со счетом 3 : 2. Тогда оба требуемых условия будут выполняться, а количество сыгранных ею матчей будет не меньше шести. Следовательно, в турнире должно участвовать не меньше 7 команд.

Пример для турнира семи команд – см. таблицу (рис.6).

*Замечание.* Оценка можно получить и по-другому. Если в турнире участвовало 6 команд, то общее количество сыгранных матчей равно  $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ , тогда сумма набранных командами очков равна 45. В этом случае последняя коман-

Ком.	1	2	3	4	5	6	7	Очки
1		3:0	0:3	3:0	0:3	3:0	2:3	10
2	0:3		3:0	0:3	3:0	0:3	3:1	9
3	3:0	0:3		0:3	3:0	0:3	3:1	9
4	0:3	3:0	3:0		0:3	0:3	3:1	9
5	3:0	0:3	0:3	3:0		3:0	0:3	9
6	0:3	3:0	3:0	3:0	0:3		0:3	9
7	3:2	1:3	1:3	1:3	3:0	3:0		8

Рис. 6

да не могла набрать больше шести очков. Действительно, если она набрала хотя бы 7 очков, а остальные пять – хотя бы по 8, то  $7 + 5 \cdot 8 = 47 > 45$ .

Заметим, что следующие операции сохраняют количество набранных командой очков, но улучшают разность выигранных и проигранных партий:

- 1) замена двух поражений со счетом 2 : 3 на победу 3 : 2 и поражение 1 : 3;
- 2) замена победы 3 : 2 и поражения 2 : 3 на победу 3 : 0 и поражение 1 : 3;
- 3) замена трех побед со счетом 3 : 2 на две победы со счетом 3 : 0 и поражение 1 : 3.

При шести набранных очках, применяя, пока возможно, эти операции, в итоге получим две победы со счетом 3 : 0 и три поражения со счетом 1 : 3. Следовательно, разность партий не может стать положительной. Значит, команд больше шести.

**10.** Заметим, что у прямоугольного семиугольника есть хотя бы два соседних прямых угла. Следовательно, от него можно отрезать прямоугольник и оставшаяся часть будет опять же прямоугольным семиугольником. Прямоугольник можно разрезать на три прямоугольника, а каждый прямоугольник разрезать на два прямоугольных семиугольника, например, как показано на рисунке 7.

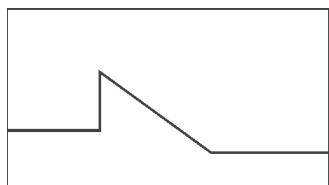


Рис. 7

**11. а)**  $45^\circ$ .

Пусть прямые  $AK$  и  $DC$  пересекаются в точке  $E$  (рис.8). Из точки  $L$  опустим перпендикуляр  $LG$  на  $AE$ . Так как  $L$  лежит на биссектрисе угла

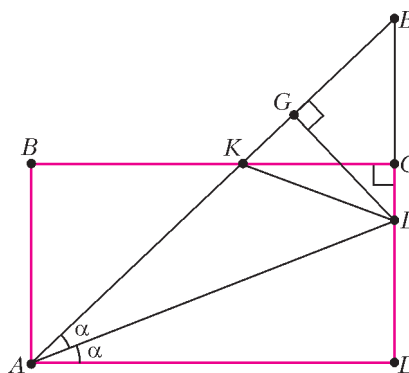


Рис. 8

$KAD$ , то  $LG = LD = KC$ . Тогда в треугольнике  $KEL$  две высоты равны, поэтому этот треугольник равнобедренный с основанием  $KL$ .

а) Пусть  $\angle KAL = \angle DAL = \alpha$ , тогда  $\angle KEL = 90^\circ - 2\alpha$ ,  $\angle EKL = 45^\circ + \alpha$ . Так как угол  $EKL$  – внешний для треугольника  $KAL$ , то  $\angle KLA = 45^\circ$ . б) Так как треугольник  $KEL$  равнобедренный, то  $KG = LC$ . Тогда  $AD + KC = AG + KC = AK + KC + KC = AK + LC + DL = AK + CD$ , т.е. в четырехугольнике  $ADCK$  можно вписать окружность. Ее центр является пересечением биссектрис углов  $A$ ,  $C$  и  $D$  четырехугольника  $ADCK$ , что равносильно утверждению задачи.

**12.** Не сможет.

Пусть Олег сначала сложит «ежа» из семи кубиков: выберет центральный кубик с координатами  $(0; 0; 0)$  и к каждой его грани приклеит по кубику. Далее он будет приклеивать к этому большому многограннику по одному кубику. Если какой-то из отдельных (никуда не приклеенных) кубиков целиком покрашен, то он приклеит его на место вида  $(0; 0; k)$ . Если отдельных покрашенных кубиков нет, значит, последним ходом Миша красил большой многогранник. В таком случае Олег приклеит к большому многограннику новый кубик на позицию, которая является первой не занятой в следующем списке:  $(1; 1; 0)$ ,  $(1; -1; 0)$ ,  $(-1; 1; 0)$ ,  $(-1; -1; 0)$ ,  $(1; 0; 1)$ ,  $(-1; 0; 1)$ ,  $(1; 0; -1)$ ,  $(-1; 0; -1)$ ,  $(1; 1; 1)$ ,  $(-1; 1; 1)$ ,  $(1; -1; 1)$ ,  $(-1; -1; 1)$ ,  $(1; 1; -1)$ ,  $(-1; 1; -1)$ ,  $(1; -1; -1)$ ,  $(-1; -1; -1)$ ,  $(0; 1; 1)$ ,  $(0; -1; 1)$ ,  $(0; 1; -1)$ ,  $(0; -1; -1)$ . В этом списке каждый новый кубик, будучи приклеенным после всех предыдущих, будет иметь четное количество открытых граней, которые будут покрашены, так как рано или поздно Миша покрасит большой многогранник. Пока этого не произойдет, Олег будет приклеивать покрашенные кубики на места вида  $(0; 0; k)$ ; позиции такого вида не имеют общих граней с позициями из списка.

В итоге все кубики, кроме семи, образующих «ежа», будут либо приклеены в соответствии со списком и рано или поздно их открытые грани будут покрашены, либо окажутся приклеены уже будучи целиком покрашенными на места вида  $(0; 0; k)$ . Значит, у них будет четное количество покрашенных граней.

**13.** Любим.

Запишем числа построчно на клетках шахматной доски. Заметим, что удаление с доски любого трехклеточного уголка соответствует стиранию трех чисел, согласно условию задачи. С другой стороны, хорошо известно, что на шахматную доску можно положить 21 трехклеточный уголок так, что любая наперед заданная клетка будет свободна.

**14.** 2 : 1.

Пусть  $M$  и  $K$  – середины  $AB$  и  $PQ$  соответственно (рис.9). Так как  $PA = PC$  и  $QB = QC$ , то  $MP$

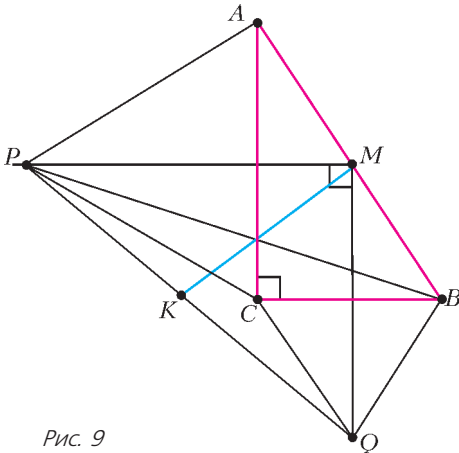


Рис. 9

и  $MQ$  – серединные перпендикуляры к катетам треугольника  $ABC$ . Следовательно,  $\angle PMQ = \angle ACB = 90^\circ$ . Тогда  $MK$  – медиана прямоугольного треугольника  $PMQ$ , проведенная к гипотенузе, поэтому  $MK = \frac{1}{2}PQ$ .

Докажем теперь, что  $PB = PQ$ . Действительно,  $\angle PCB = \angle PCA + \angle BCA = 150^\circ$  и  $\angle PCQ = 360^\circ - (\angle PCA + \angle BCA + \angle BCQ) = 150^\circ$ . Следовательно,  $\triangle PCB = \triangle PCQ$  (по двум сторонам и углу между ними), откуда и следует требуемое равенство. Таким образом,  $MK = \frac{1}{2}PB$ .

**15.** Могут.

Рассмотрим треугольник  $ABC$ , в котором  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = 60^\circ$ , и проведем биссектрису  $AD$  и перпендикуляр  $DE$  к катету  $BC$  (рис.10,а). Перегнем треугольник по прямой  $DE$ , тогда точка  $A$  займет положение  $A'$ , после чего сделаем разрез по прямой  $DA'$  (рис.10,б).

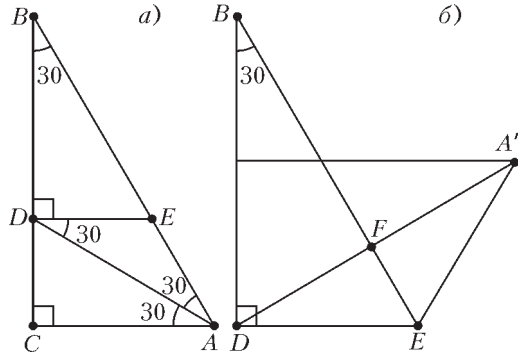


Рис. 10

При таком разрезании и последующем разгибании образуются три треугольника:  $ACD$ ,  $AFD$  и  $BFD$ , где  $F$  – точка пересечения прямых  $DA'$  и  $AB$ .

Докажем, что эти треугольники равны. Для этого достаточно доказать, что  $DF \perp AB$ , так как в этом случае равенство треугольников  $ACD$  и  $AFD$  будут следовать из их симметрии относительно биссектрисы  $AD$ , а равенство треугольников  $AFD$  и  $BFD$  – из равенства соответствующих острых углов и наличия общей стороны  $DF$ . Так как  $DE \parallel CA$ , то  $\angle DEF = \angle CAB = 60^\circ$ ,  $\angle ADE = \angle CAD = 30^\circ$ . Из симметрии относительно прямой  $DE$  следует, что  $\angle FED = \angle ADE = 30^\circ$ , значит,  $\angle AFD = 90^\circ$ , что и требовалось.

**ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП XLIV  
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ  
ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ**

9 класс

**1.** Обозначим  $c = a_1 - p_1 \geq 0$ . По условию, при любом  $n$  имеем  $a_n - a_1 = p_n - p_1$ , или  $a_n - p_n = a_1 - p_1 = c$ .

Предположим, что  $c > 0$ . Найдется индекс  $n$  такой, что  $a_n > 2c$ . Тогда  $a_n > p_n = a_n - c > a_n - \frac{a_n}{2} = \frac{a_n}{2}$ , т.е.  $2p_n > a_n > p_n$ . Значит,  $a_n$  не делится на  $p_n$ ; это противоречит условию.

Итак,  $c = 0$  и, следовательно,  $a_n = p_n$  – простое число при всех  $n$ .

**2.** Из симметрии, прямая  $AL$  является биссектрисой угла  $BAC$  и проходит через центры окружностей  $\omega$  и  $\Omega$ .

Поскольку соответственные стороны треугольников  $KBL$  и  $MCL$  параллельны, существует гомотетия с центром  $L$ , переводящая первый треугольник во второй. Эта гомотетия переводит окружность  $\omega$  с диаметром  $KL$  в окружность с диаметром  $LM$ , т.е. в  $\Omega$ . Отрезок  $AB$ , касающийся  $\omega$ , перейдет в параллельный ему отрезок  $CA'$ , касающийся  $\Omega$ ; при этом, поскольку



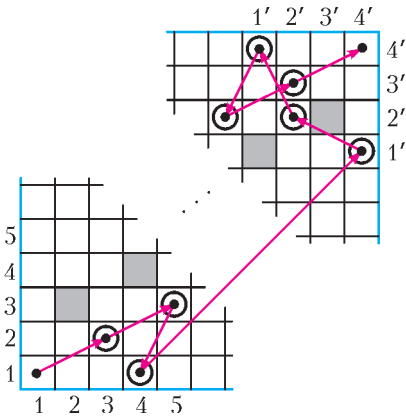


Рис. 14

Из предположения получаем, что клетки с кружками на рисунке 14 не отмечены. Тогда, как мы видим, конь может пройти из  $L$  в  $(4, 1)$ , оттуда (по предположению индукции) в  $(4', 1')$ , а оттуда в  $R$ . Это противоречие завершает переход индукции.

**5.** Нет.

Приведем стратегию, позволяющую Васе гарантированно выиграть. Первые ходы он делает произвольно, пока перед его очередным ходом не будут окрашены 33 точки. Пусть  $A$  – одна из крайних окрашенных точек, а  $B$  – неокрашенная точка, соседняя с другой крайней. Тогда существует отмеченная точка  $C$  такая, что  $ABC$  – равносторонний треугольник.

На этом ходе Вася красит точку  $B$  в тот же цвет, что и  $A$ , без ограничения общности – в красный. Далее он действует так. Если Петя красит точку, соседнюю с  $C$ , то Вася красит  $C$  в красный цвет и выигрывает, получив одноцветный треугольник  $ABC$ . Если же Петя красит точку, несоседнюю с  $C$ , то и Вася тоже красит несоседнюю с  $C$ . Если Вася сможет так действовать, то в результате точку  $C$  окрасит именно он и выигрывает.

Предположим, что он не смог сходить согласно стратегии. Это значит, что Петя окрасил несоседнюю с  $C$  точку, а Вася не имеет такой возможности. Это значит, что остались неокрашенными ровно три точки:  $C$  и два ее соседа. Но тогда окрашено 96 точек, и ход должен делать Петя. Полученное противоречие завершает решение.

**8.** Достаточно показать, что точка  $H'$  пересечения высот треугольника  $CDK$  совпадает с  $H$ . Поскольку  $AMKD$  – параллелограмм, имеем  $KD \parallel AB$ , а так как  $CH' \perp KD$ , то  $CH' \perp AB$ . Остается показать, что  $AH' \perp CN$ .

Заметим, что  $\angle DCN = \angle DAM = \angle DKM$ , поэтому четырехугольник  $CNKD$  вписан в некоторую окружность. Пусть  $CX$  – диаметр этой окруж-

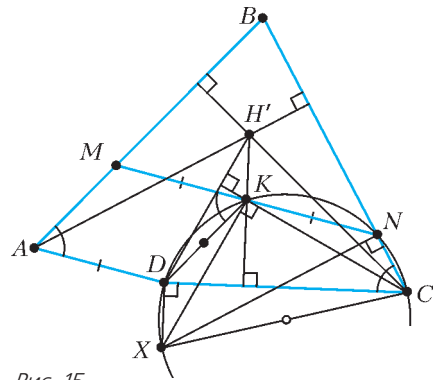


Рис. 15

ности (рис.15). Тогда  $CK \perp KX$ , значит,  $KX \parallel DH'$ . Аналогично,  $DX \parallel KH'$ , поэтому  $KH'DX$  – параллелограмм. Значит, при центральной симметрии относительно середины отрезка  $DK$  точка  $H'$  переходит в  $X$ . Поскольку  $AKND$  – тоже параллелограмм, при этой же симметрии точка  $N$  переходит в  $A$ . Отсюда  $AH' \parallel XN$ ; поскольку  $\angle XNC = 90^\circ$  (как опирающийся на диаметр), получаем  $AH' \perp CN$ .

10 класс

**1. 2.**

При  $x \in (-2019; 1)$  корней нет, так как на указанном интервале левая часть неотрицательна, а правая – отрицательна.

При  $x \in [1; +\infty)$  все модули раскрываются со знаком «+», поэтому уравнение примет вид  $g(x) = 0$ , где  $g(x) = x^2 - x - 2009 + (1 + 2 + \dots + 2018)$ . Так как  $g(1) < 0$ , это квадратное уравнение имеет единственный корень на промежутке  $[1; +\infty)$ .

Поскольку графики функций в левой и правой частях симметричны относительно прямой  $x = -1009$  (т.е.  $f(x) = f(-2018 - x)$ ), то на промежутке  $(-\infty; -2019]$  столько же корней, сколько и на промежутке  $[1; +\infty)$ , т.е. ровно один корень.

Итого, у данного уравнения два корня.

**2.** Пусть  $l$  – серединный перпендикуляр к  $BC$  (рис.16). Заметим, что  $l$  проходит через  $K$ . Пусть точка  $A'$  симметрична точке  $A$  относительно  $l$ . Очевидно,  $A' \in \Omega$ , а дуги  $AB$  и  $A'C$  равны. Так как точка  $D$  симметрична точке  $A$  относительно прямой  $MN$ , то  $D$  и  $A'$  симметричны относительно  $K$ . Это означает, в частности, что  $D, K$  и  $A'$  лежат на одной прямой, т.е. прямая  $QD$  проходит через  $A'$ . Тогда

$$\angle KQC = \angle A'QC = \frac{1}{2} \overset{\cup}{A'C} = \frac{1}{2} \overset{\cup}{AB} = \angle ACB.$$

Поскольку  $MN \parallel BC$ , имеем  $\angle ACB = \angle ANK$ .

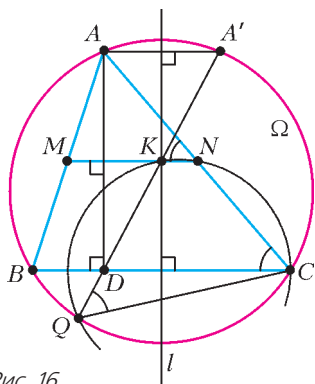


Рис. 16

Отсюда  $\angle KQC = \angle ANK$ , т.е. четырехугольник  $CNKQ$  – вписанный.

3.  $N = \left[ \frac{k+1}{2} \right] \cdot \left[ \frac{k+2}{2} \right]$ .

Обозначим через  $N(k)$  ответ в задаче; положим

$$f(k) = \left[ \frac{k+1}{2} \right] \cdot \left[ \frac{k+2}{2} \right].$$

Докажем сначала, что

$$N(k) \geq N(k-1) + \left[ \frac{k+1}{2} \right] \text{ при } k \geq 2. \quad (*)$$

После отмечания исходных  $N(k)$  клеток можно отметить хотя бы одну клетку  $A$ ; это значит, что либо в столбце, либо в строке этой клетки уже отмечено  $\left[ \frac{k+1}{2} \right]$  других клеток – пусть, для определенности, в строке  $l$ .

Мысленно отметим все клетки строки  $l$ . Ясно, что любую клетку по-прежнему можно отметить. Удалим из клетчатой плоскости строку  $l$  и сдвинем вместе две получившиеся полуплоскости так, чтобы снова получилась клетчатая плоскость. Теперь мы можем отметить любую клетку этой новой плоскости, отмечая на каждом шагу клетку, в кресте которой уже есть не менее  $k-1$  отмеченных клеток (поскольку из этого креста удалена одна клетка строки  $l$ ). Следовательно, изначально на этой плоскости должно быть отмечено не менее  $N(k-1)$  клеток. Значит, на исходной плоскости сначала должно быть хотя бы  $N(k-1)$  отмеченных клеток не из  $l$ ; отсюда и следует (\*).

Поскольку  $N(1) = 1$ , из (\*) следует, что

$$N(k) \geq \underbrace{1+1+2+2+3+3+4+\dots}_{k \text{ слагаемых}} = f(k).$$

Осталось показать, как отметить  $f(k)$  клеток так, чтобы затем можно было отметить любую другую клетку плоскости. По индукции несложно доказать, что подходит пример, приведенный на рисунке 17, состоящий из двух «лесенок»

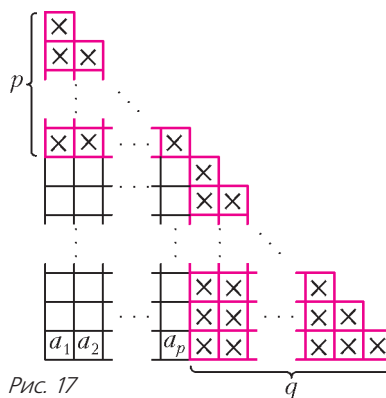


Рис. 17

высот  $p = \left[ \frac{k}{2} \right]$  и  $q = \left[ \frac{k+1}{2} \right]$ ; нетрудно понять, что в нем как раз  $f(k)$  клеток.

5. Достаточно решить задачу для квадрата  $3 \times 3$ . Отсюда будет следовать, что знаменатели прогрессий в любых двух соседних столбцах равны, а значит, они равны и во всех столбцах. Из того, что в средней строке квадрата записана арифметическая прогрессия, а во всех столбцах – геометрические прогрессии, следует, что расстановка выглядит, как на рисунке 18. Теперь из

$\frac{a-d}{p}$	$\frac{a}{q}$	$\frac{a+d}{r}$
$a-d$	$a$	$a+d$
$(a-d)p$	$aq$	$(a+d)r$

Рис. 18

условия на остальные строки получаем

$$\frac{a-d}{p} + \frac{a+d}{r} = 2\frac{a}{q} \text{ и } (a-d)p + (a+d)r = 2aq.$$

Положим  $x = \frac{p}{q}$  и  $y = \frac{r}{q}$ . Тогда из равенств выше имеем  $(a-d)y + (a+d)x = 2axy$  и  $(a-d)x + (a+d)y = 2a$ .

Складывая и сокращая на  $2a$ , получаем  $x+y = xy+1$ , или  $(x-1)(y-1) = 0$ . Пусть, например,  $x = 1$  (случай  $y = 1$  аналогичен). Тогда  $(a-d) + (a+d)y = 2a$ ,  $(a+d)y = a+d$ , откуда и  $y = 1$ . Итого,  $p = q = r$ , что и требовалось.

8. Нет.

Приведем стратегию, позволяющую Леше выигрывать. Пусть  $L$  и  $P$  – поля, на которых исходно стоят лиловая  $l$  и пурпурная  $p$  фишки соответственно. По условию, от  $L$  до  $P$  можно пройти по отрезкам; пусть Леша выберет один такой путь  $L = L_1, P_1, L_2, P_2, \dots, L_n, P_n = P$ , в котором поля не повторяются. Позицию в игре будем обозначать парой  $(A, B)$ , где  $A$  и  $B$  – поля, на которых стоят  $l$  и  $p$  соответственно.

Леша будет действовать следующим образом.

Если его фишка  $l$  стоит на  $L_i$ , он всегда перемещает ее на  $P_i$ . Если  $l$  стоит на  $P_i$ , то его ход зависит от положения  $p$ : если та стоит на  $P$ , то Леша ходит на  $L_{i+1}$ , иначе – на  $L_i$ .

Заметим сразу, что количество позиций в игре конечно, так что игра рано или поздно закончится. Значит, если Леша всегда может сходить согласно стратегии, то рано или поздно не сможет сделать ход Паша. Осталось показать, что Леша всегда сможет так сходить. После хода Паши фишки находятся в одной и той же части, так что стратегия не может предписывать идти на поле, занятое  $p$ .

Пусть до некоторого момента Леша ходил согласно стратегии и пусть перед очередным его ходом  $l$  стоит на одном из полей  $L_i$  или  $P_i$ , а  $p$  – на некотором поле  $U$ . Опишем множество уже встречавшихся позиций, в которых  $l$  стояла на  $L_i$  или  $P_i$ . Впервые  $l$  появилась на  $L_i$  в позиции  $(L_i, P)$  перед Пашиным ходом (возможно, это было начало игры). Затем после каждой пары ходов Паши и Лешы были использованы (в некотором порядке) позиции  $(L_i, X)$  и  $(P_i, X)$  при некотором поле  $X \neq P$ .

Итак, если перед ходом Лешы  $l$  стоит на  $L_i$ , а  $p$  – на поле  $U$ , то позиция  $(P_i, U)$  не встречалась раньше. Если  $l$  стоит на  $P_i$ , а  $p$  – на поле  $U \neq P$ , то позиция  $(L_i, U)$  также не встречалась раньше. Значит, в обоих случаях Леша может сделать ход согласно стратегии. Наконец, если  $l$  стоит на  $P_i$ , а  $p$  – на поле  $U = P$ , то  $i < n$  (иначе фишки бы стояли на одном поле), так что поле  $L_{i+1}$  существует и  $l$  на нем еще не была. Поэтому Леша может сходить туда. Доказательство окончено.

11 класс

1. Предположим, что многочлен  $P(x)$  не является монотонным. Тогда найдутся такие  $a \neq b$ , что  $P(a) = P(b)$ , а значит, и  $P(P(a)) = P(P(b))$ , т.е.  $P(P(x))$  не монотонен.

2. Считаем, что нумерация переменных циклическая, т.е.  $x_{n+1} = x_1$ ,  $x_{n+2} = x_2$  и т.д. Заметим, что при всех  $i = 1, 2, \dots, n$  верно неравенство  $(1 + x_i^2)(1 + x_{i+1}^2) \geq (1 + x_i x_{i+1})^2$ , так как

$$(1 + x_i^2)(1 + x_{i+1}^2) - (1 + x_i x_{i+1})^2 = (x_i - x_{i+1})^2 \geq 0.$$

Перемножая все такие неравенства, получим

$$(1 + x_1^2)^2 (1 + x_2^2)^2 \dots (1 + x_n^2)^2 \geq (1 + x_1 x_2)^2 (1 + x_2 x_3)^2 \dots (1 + x_n x_1)^2,$$

или

$$\frac{1 + x_1^2}{1 + x_1 x_2} \cdot \frac{1 + x_2^2}{1 + x_2 x_3} \cdot \dots \cdot \frac{1 + x_n^2}{1 + x_n x_1} \geq 1.$$

Для доказательства исходного неравенства теперь достаточно применить неравенство о сред-

них арифметическом и геометрическом:

$$\begin{aligned} \frac{1 + x_1^2}{1 + x_1 x_2} + \frac{1 + x_2^2}{1 + x_2 x_3} + \dots + \frac{1 + x_n^2}{1 + x_n x_1} &\geq \\ &\geq n \sqrt{\frac{1 + x_1^2}{1 + x_1 x_2} \cdot \frac{1 + x_2^2}{1 + x_2 x_3} \cdot \dots \cdot \frac{1 + x_n^2}{1 + x_n x_1}} \geq n. \end{aligned}$$

5. Могло.

Временно откажемся от условия различности чисел на карточках. Пусть  $A$  и  $B$  – две соседние карточки ( $A$  лежит после  $B$  по часовой стрелке). Напишем на карточке  $A$  произвольное число, на карточке  $B$  – число 2, а на всех остальных карточках – единицы. Если Вася снимет первой какую-либо карточку, отличную от  $A$ , то дальше он будет снимать карточки подряд по часовой стрелке, «перескочив» через  $A$  (так как на  $B$  написана двойка). Значит,  $A$  останется последней.

Осталось сделать числа на карточках попарно различными. Для этого достаточно ко всем числам на карточках прибавить различные натуральные числа, делящиеся на  $1000!$ . Действительно, если при выкидывании карточки  $x$  на столе остается  $d$  карточек, то результат процесса не изменится, если к  $x$  прибавить число, кратное  $d$  (Вася просто отсчитает несколько дополнительных полных кругов). Значит, если к числу на карточке прибавить число, делящееся на  $1000!$ , то результат процесса не изменится при любом выборе изначальной карточки.

6. Пусть диагонали  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $O$ , причем вершины  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на одном основании призмы, а вершины  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  – на противоположной (рис. 19). Тогда

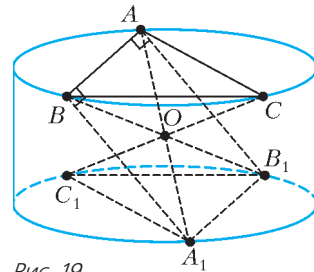


Рис. 19

точки  $A$ ,  $A_1$ ,  $B$  и  $B_1$  лежат в одной плоскости  $\alpha$ , пересекающей параллельные основания призмы по параллельным отрезкам  $AB$  и  $A_1B_1$ . Аналогично,  $AC \parallel A_1C_1$  и  $BC \parallel B_1C_1$ . Тогда треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  подобны по двум углам. Поскольку их описанные окружности равны, эти треугольники также равны.

Впишем призму в сферу  $S$ . Плоскость  $\alpha$  пересекает сферу  $S$  по окружности, на которой лежат точки  $A$ ,  $B$ ,  $A_1$  и  $B_1$ . Поскольку  $AB$  и  $A_1B_1$  параллельны и равны,  $ABA_1B_1$  – прямоуголь-



ник, а  $O$  – его центр, откуда  $OA = OB = OA_1 = OB_1$ . Аналогично,  $OA = OC = OA_1 = OC_1$ . Значит,  $O$  – центр сферы  $S$ , а следовательно, и центр призмы.

7. Обозначим  $\beta = \frac{1}{2017}$ . Напомним, что частный случай неравенства Бернулли  $(1+x)^{2017} \geq 1+2017x$  (при  $x \geq -\beta$ ) можно переписать в виде  $1+\beta y \geq (1+y)^\beta$  (при  $y = 2017x \geq -1$ ).

**Лемма 1.** Для любого натурального  $n$  верны неравенства  $\frac{n+1+\beta}{n+1} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta \leq \frac{n+\beta}{n}$ .

**Доказательство.** Правое неравенство сразу следует из упомянутого неравенства Бернулли. Для доказательства левого, применяя то же неравенство, получаем

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^\beta = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^\beta \leq 1-\frac{\beta}{n+1} = \frac{n+1-\beta}{n+1},$$

откуда

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-\beta} \geq \frac{n+1}{n+1-\beta} \geq \frac{n+1+\beta}{n+1}.$$

**Лемма 2.** Для любого натурального  $n$  верны неравенства  $n^\beta - 1 \leq a_{n+1} - a_n \leq 2n^\beta + 1$ .

**Доказательство.** Поскольку  $n^{1+\beta} - 1 < a_n \leq n^{1+\beta}$ , достаточно доказать, что  $n^\beta \leq (n+1)^{1+\beta} - n^{1+\beta} \leq 2n^\beta$ , или

$$1 \leq (n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta - n \leq 2. \quad (*)$$

Применяя лемму 1, получаем

$$(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta - n \geq (n+1)\frac{n+1+\beta}{n+1} - n = 1+\beta > 1,$$

что доказывает левое неравенство (\*). Аналогично, для правого имеем

$$(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta - n \leq \frac{(n+1)(n+\beta)}{n} - n = \frac{n(1+\beta)+\beta}{n} < 2.$$

Перейдем к решению задачи. Покажем, что число  $N = 2^{2017} + 1000$  подходит. Для этого достаточно доказать, что при любом натуральном  $n \geq 2^{2017}$  число с пятеркой в десятичной записи найдется даже среди чисел  $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+1000}$ . Поскольку  $n \geq 2^{2017}$ , найдется натуральное  $k$  такое, что  $10^{k-1} \leq n^\beta/2 < 10^k$ . Покажем, что даже среди  $(k+2)$ -х с конца цифр чисел  $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+1000}$  встретится пятерка, откуда и будет следовать требуемое.

По лемме 2, при каждом  $d = n, n+1, \dots, n+999$  имеем

$$a_{d+1} - a_d \leq 2d^\beta + 1 \leq 2 \cdot (2n)^\beta + 1 < 4 \cdot n^\beta + 1 < 9 \cdot 10^k;$$

это означает, что  $(k+2)$ -я цифра при переходе от  $a_d$  к  $a_{d+1}$  либо не изменяется, либо увеличивается на 1 (при этом 9 переходит в 0).

С другой стороны, по той же лемме,

$$a_{d+100} - a_d \geq 100(n^\beta - 1) \geq 2 \cdot 10^{k+1} - 100 \geq 100^{k+1};$$

это значит, за 100 таких переходов  $(k+2)$ -я цифра обязана хотя бы раз изменить свое значение (на следующее по циклу). Значит, за 1000 переходов она примет все 10 возможных значений, в частности побывает и пятеркой.

8. Саша.

Если раскрасить всю доску шахматным образом, то мы окажемся в условии задачи 8 для 10 класса: частями игрового поля будут клетки разных цветов. Значит, Саша может применить выигрышную стратегию из решения этой задачи.

### ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП III ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

9 класс

1. Паровоз двигался с юга на север; ветер дул от железной дороги в северо-восточном направлении под углом примерно  $30^\circ$  к меридиану;  $v_0 = 10$  м/с;  $v_{\min} = 5$  м/с;  $\tau = 400$  с;  $s = 4000$  м.

2. 1) Правый поршень поднялся на  $x = \frac{3hS_1}{2S_1 - S_2}$ ,

а левый опустился на  $y = \frac{3hS_2}{2S_1 - S_2}$ , при этом  $F_1 = 3\rho gh \frac{S_1 S_2 (S_1 + S_2)}{(2S_1 - S_2)^2}$ ;

2) в этом случае смещение поршней возможно лишь при их отрыве от поверхности жидкости и  $F_2 = 3p_0 S_1$ .

3.  $v_1 = 4$  м/с ; см. рис.20.

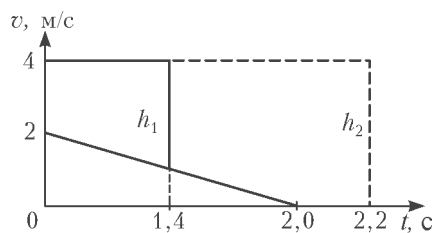


Рис. 20

4.  $\tau_1 = \frac{mc(t_1 - t_0)}{N - \mu c(t_1 - t_0)} = 36$  с ;

$t_{\max} = \frac{N}{\mu c} + t_0 = 44$  °С ;  $v = \frac{Nml}{c(t_1 - t_0)(m + \mu\tau)^2}$  ;  
 $v_1 = 0,32$  мм/с .

5.  $U_0 = 12$  В ,  $r = 0,8$  кОм,  $R_2 = 1,6$  кОм .

10 класс

- $u = 2v \sin^2 \alpha \cos \alpha = 0,74v$ , где  $\sin \alpha = \frac{R-r}{R+r} = \frac{3}{4}$  (произойдет два столкновения шайб).
- $v_1 \approx 0,575 v_0 \approx 11,5 \text{ м/с}$ ,  
 $v_2 \approx 0,544 v_0 \approx 10,9 \text{ м/с}$ .
- 1)  $\omega_1 = \sqrt{\frac{p_0 S}{ml}} = 22,4 \text{ с}^{-1}$ ; 2)  $x_1 = a - l = 0,4 \text{ м}$ ;  
3)  $\omega_2 = \frac{2\sqrt{al}}{a+l} \omega_1 = 16,7 \text{ с}^{-1}$ .
- 1)  $\varphi_m = k \left( \frac{Q+q_1}{R} + \frac{q_2}{r_2} \right)$ ;  
2)  $\varphi_O = k \left( \frac{Q+q_1}{R} + \frac{q_2}{r_2} + q_1 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) \right)$ .
- $I = \frac{\alpha(\sqrt{2}-1)^2}{8} U^2 = \beta U^2$ , где  
 $\beta = 0,0015 \text{ А/В}^2$ .

11 класс

- 1)  $\varphi_m = 0,05 \text{ рад}$ ; 2)  $t_{\min} = 11,3 \text{ с}$ ;  
3)  $\omega_0 = 140 \text{ с}^{-1}$ .
- См. рис.21, график 2 можно восстановить лишь от точки (2; 3,5) до точки (16; 7).

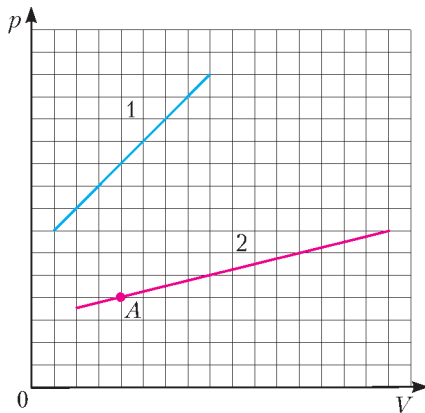


Рис. 21

- $v = nx \sqrt{\frac{4}{3} \pi \rho G} = 2,1 \text{ км/с}$ .
- 1) Со стенкой  $W_2$ ; 2)  $v_1 = \frac{CU_0 Bl}{m \left( 1 + \frac{B^2 l^2 C}{m} \right)}$ ;  
3)  $v_n = \frac{CU_0 Bl \left( 1 - \frac{B^2 l^2 C}{m} \right)^{n-1}}{m \left( 1 + \frac{B^2 l^2 C}{m} \right)^n}$ .
- $u_x = \frac{gL}{v}$ .

### ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ И АВТОРОВ НАШЕГО ЖУРНАЛА!

Начиная с этого номера журнала «Квант», некоторым статьям будет присваиваться принятый в научной среде способ идентификации публикаций – DOI (Digital Object Identifier). По присвоенному (раз и навсегда) данной статье идентификатору можно получить информацию о ней в базах данных, в частности – в интернете.

Посылая в редакцию нашего журнала статью, просим авторов сообщать о себе, кроме фамилии, имени и отчества, также место работы, занимаемую должность и электронный адрес (e-mail).

# КВАНТ 12+

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,  
А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов,  
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

**НОМЕР ОФОРМИЛИ  
М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,  
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

**ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ  
РЕДАКТОР**

**Е.В.Морозова**

**КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА**

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован  
в Комитете РФ по печати.**

**Рег. св-во ПИ №ФС77–54256**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,  
«Квант»**

**Тел.: +7 916 168-64-74**

**E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru**

**Отпечатано**

**в соответствии с предоставленными  
материалами  
в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8»**

**Телефон: +7 495 363-48-86,**

**http://capitalpress.ru**



# Уроки с физикой



не верь глазам своим



На каждом из двух рисунков изображено "сломанное водой" весло. Какому рисунку верить?

(Подробнее – на с. 37 внутри журнала)