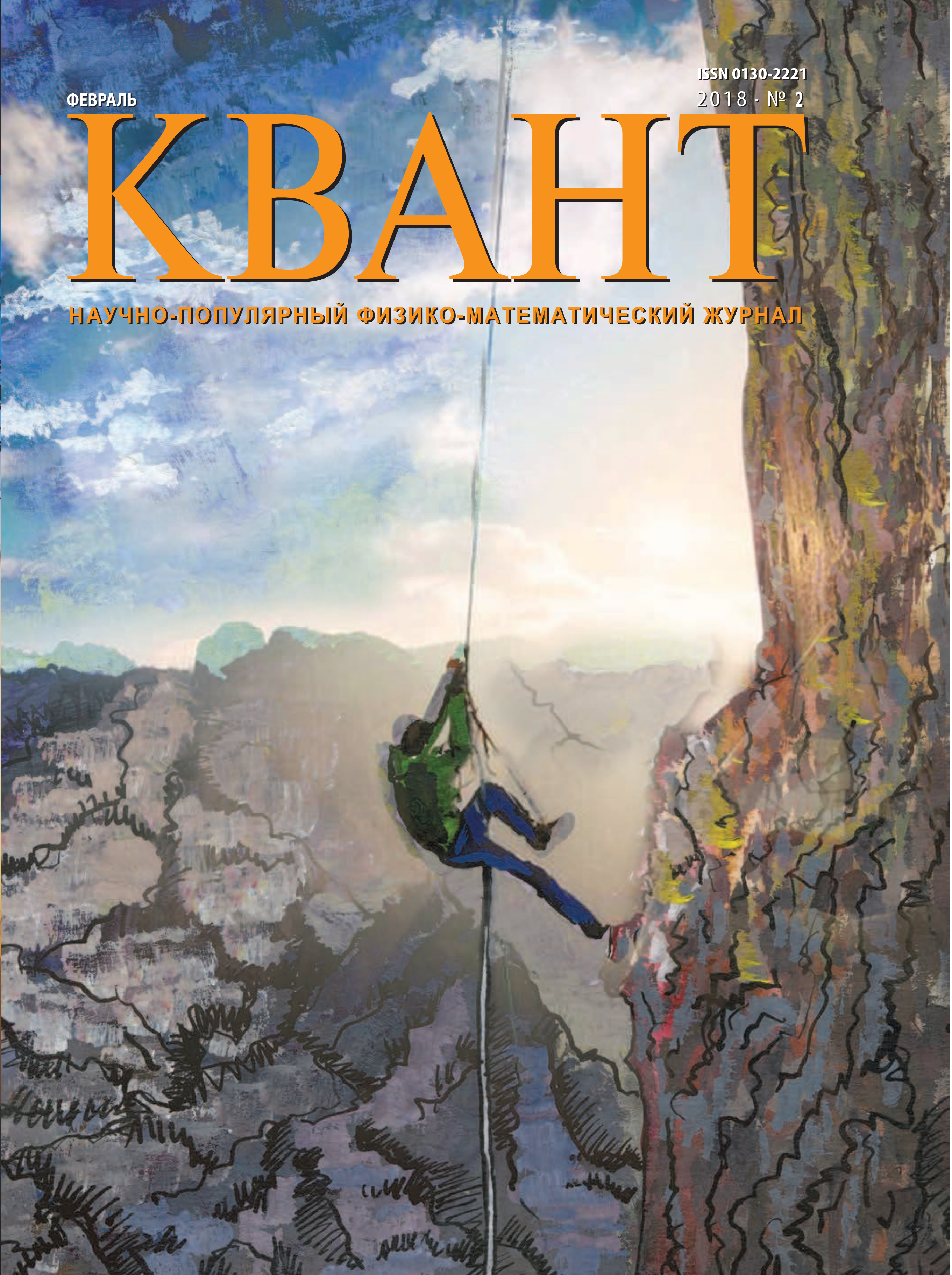
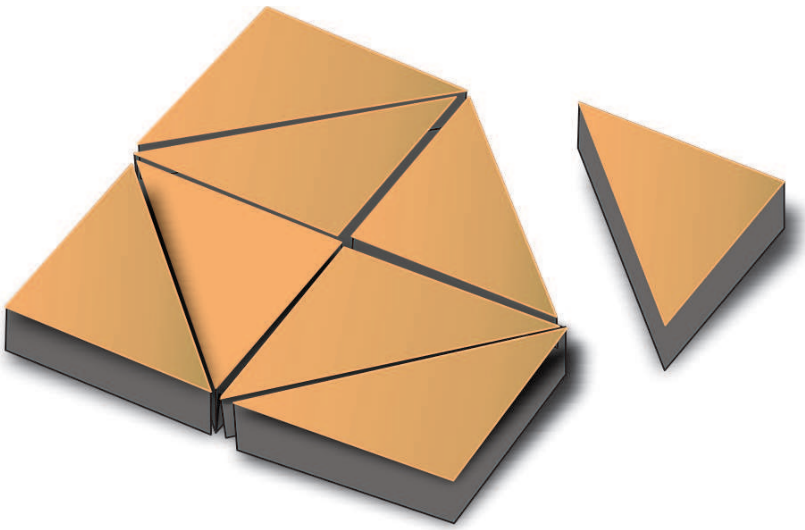
ISSN 0130-2221
ФЕВРАЛЬ
2018 · № 2

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



ВЫПУКЛЫЕ



ФОРМЫ

Эта головоломка испанского автора Примитиво Рамоса (Primitivo F. Ramos) устроена по принципу знаменитого «Танграма»: используя весь данный набор деталей, нужно складывать разные фигуры. Отличие в том, что контуры этих фигур (как это обычно бывает в других подобных головоломках) не даны, а сказано лишь, что они должны быть выпуклыми. Поэтому вам предстоит понять и то, какие выпуклые фигуры в принципе можно сложить из этих восьми равнобедренных прямоугольных треугольников, и то, как это сделать. Автор утверждает, что всего их одиннадцать.

Кстати, сам по себе интересен вопрос: как посчитать общее число выпуклых фигур, которые можно сложить из таких деталей? Есть ли более эффективный способ, чем перебор всех возможных конфигураций?

Е.Епифанов

КВАНТ ФЕВРАЛЬ 2018 №2

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Выход в пространство-2

В.ПРОТАСОВ

Симплекс. Каждые четыре вершины симплекса образуют трехмерную грань, имеющую форму тетраэдра. Всего трехмерных граней, таким образом, пять – сколько есть четверок из пяти вершин. Любые две вершины связаны ребром. Почему? Потому что две вершины лежат в трехмерной грани – тетраэдре (достаточно добавить к ним еще две вершины, и получим трехмерную грань), а у тетраэдра, как мы знаем, каждые две вершины образуют ребро. Таким образом, ребер всего 10 – количество пар, взятых из пяти вершин. Существует и правильный тетраэдр, у которого все ребра равны. Чтобы его построить, разместим в трехмерной плоскости из трех первых координат (т.е. плоскости, задаваемой уравнением $x_4 = 0$) правильный тетраэдр с единичным ребром и центром в начале координат – точке O. Таких тетраэдров бесконечно много – берем любой. Расстояние от центра правильного тетраэдра до вершины равно r – это радиус его описанной сферы. Он равен $\frac{\sqrt{6}}{4}$, но это даже не важно. Теперь мы добавляем к тетраэдру пятую вершину $M\left(0;0;0;\sqrt{1-r^2}\right)$ и получаем правильный симплекс. В самом деле, возьмем любую из четырех вершин тетраэдра $A=\left(x_1;x_2;x_3;0\right)$ (рис. 17). Как мы знаем, длина отрезка OA равна r, т.е. $\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}=r$. Тогда вектор MA имеет координаты $\left(x_1;x_2;x_3;-\sqrt{1-r^2}\right)$, поэтому длина ребра MA равна $x_1^2+x_2^2+x_3^2+1-r^2=1$. И так – со всеми остальными ребрами. Попутно мы нашли высоту симплекса $h=\sqrt{1-r^2}=\frac{\sqrt{10}}{4}$, а значит, можем найти его (четырехмерный!) объем – он равен одной четверти произведения трехмерного объема основания (единичного правильного тетраэдра) на высоту h.

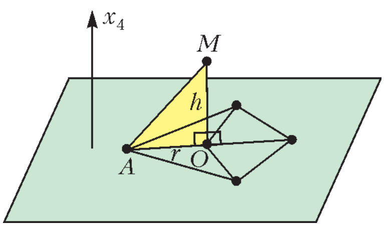


Рис. 17

Окончание. Начало – в «Кванте» №12 за 2017 год, продолжение – в предыдущем номере журнала.

Как мы видим, в рассуждениях с четырехмерным пространством чрезвычайно сложно опираться на картинку, а интуиция часто подводит. Поэтому все рассуждения надо проводить предельно строго и формально. В частности, нам придется формально определить понятия вершины и ребра многогранника, чтобы с ними можно было работать, опираясь на определения, а не только на интуицию. Сделаем это так.

Определение 1. *Выпуклым многогранником называется ограниченное множество, являющееся пересечением нескольких полупространств, или, что то же, являющееся множеством решений системы из нескольких линейных неравенств.*

В дальнейшем будем рассматривать только выпуклые многогранники, поэтому всегда можем пользоваться определением 1.

Определение 2. *Точка, принадлежащая многограннику, называется его **вершиной**, если через нее можно провести плоскость, которая не имеет других общих точек с многогранником. Отрезок, принадлежащий многограннику, является его **ребром**, если через него можно провести плоскость, которая не имеет других общих точек с многогранником.*

Можно использовать и более привычное нам определение ребра – это отрезок, соединяющий две вершины и лежащий на границе многогранника. Попробуйте доказать сами, что определение 2 равносильно ему.

Например, куб (обычный) можно определить как множество точек, удовлетворяющих системе линейных неравенств $x_i \geq 0$, $x_i \leq 1$, $i = 1, 2, 3$. Неравенств, таким образом, шесть – ровно столько, сколько граней у куба. А вершин восемь – это точки $(a_1; a_2; a_3)$, где каждая координата a_i равна либо 0, либо 1. Скажем, $(1; 1; 0)$ – вершина куба. На картинке это видно и так, но это можно доказать строго, согласно определению 2. Почему? Плоскость $x_1 + x_2 - x_3 = 2$ не имеет с кубом других общих точек, кроме этой вершины. В самом деле, для всех остальных вершин либо $x_1 + x_2 < 2$, либо $x_3 > 0$, поэтому $x_1 + x_2 - x_3 < 2$. Значит, все остальные вершины, а с ними и все остальные точки куба, лежат по одну сторону от этой плоскости, в открытом полупространстве $x_1 + x_2 - x_3 < 2$. Далее, вершины $(1; 1; 0)$ и $(1; 0; 0)$ соединены ребром (рис.18). Мы видим это на картинке, но

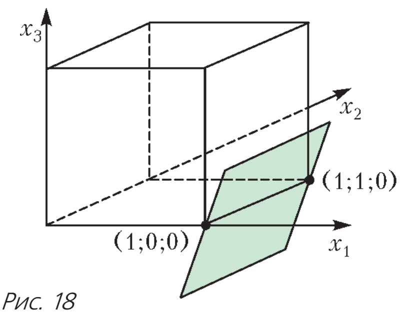


Рис. 18

мы и формально можем это проверить, по определению 2. Плоскость $x_1 - x_3 = 1$ содержит эти вершины, а для всех остальных вершин $x_1 - x_3 < 1$ (поскольку для них либо $x_1 < 1$, либо $x_3 > 0$). Значит, отрезок, соединяющий эти вершины, лежит в плоскости, а остальные вершины, и вместе с ними – все остальные точки куба, лежат в открытом полупространстве $x_1 - x_3 < 1$.

Теперь не составляет труда определить аналог куба в четырехмерном пространстве.

Четырехмерный куб. Это множество точек $\mathbb{R}^4$, удовлетворяющих системе линейных неравенств $x_i \geq 0$, $x_i \leq 1$, $i = 1, 2, 3, 4$. И все? Тройку переправили на четверку? Да. Граней (трехмерных) у него восемь – ровно столько, сколько неравенств. Каждая из них является единичным трехмерным кубом. А вершин шестнадцать – это точки $(a_1; a_2; a_3; a_4)$, где каждая координата a_i равна либо 0, либо 1. Например, $(1; 1; 0; 0)$ – вершина. Ни на какой картинке мы этого уже не увидим, но по определению 2 можем доказать. Плоскость $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2$ не имеет с кубом других общих точек, кроме этой вершины. Докажите сами, это совсем просто! На рисунке 19 показана проекция

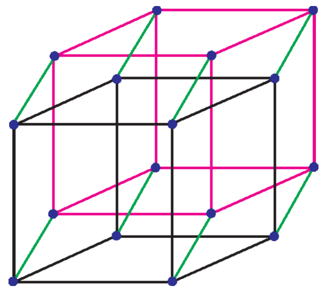


Рис. 19

четырехмерного куба на двумерную плоскость.

Также можно построить четырехмерный октаэдр (*кросс-политоп*), цилиндр, конус и другие фигуры. Однако есть в $\mathbb{R}^4$ и совсем неожиданные вещи, не имеющие аналогов в трехмерном пространстве. Зададим, например, такой вопрос.

Вопрос. *Для каких n в пространстве существует выпуклый многогранник с n вершинами, у которого каждые две вершины соединены ребром?*

На плоскости, т.е. в двумерном пространстве, ответ, конечно, $n = 3$. Это треугольник, и других примеров нет. В трехмерном пространстве тоже есть только один такой многогранник – тетраэдр, значит, $n = 4$. Для четырехмерного пространства напрашивается ответ $n = 5$ – симплекс. Как мы знаем, симплекс действительно этим свойством обладает. Но, оказывается, не только он! В четырехмерном пространстве такой многогранник существует с любым числом вершин n. Вот пример.

Многогранник моментов. Возьмем n различных положительных чисел $t_1,\ldots,t_n$ (считаем, что $n \geq 5$). Каждому числу t_k поставим в соответствие точку четырехмерного пространства $A_k = \left(t_k; t_k^2; t_k^3; t_k^4\right)$. Обозначим через P *выпуклую оболочку* множества точек $A_1,\ldots,A_n$, т.е. четырехмерный многогранник, для которого часть этих точек (возможно – все) являются вершинами, а остальные ему принадлежат, причем других вершин многогранник не имеет. Такой многогранник существует для любого конечного множества точек, доказывать этого мы не будем. Оказывается, что P имеет ровно n вершин и любые две из них соединены ребром! Не пугайтесь, мы не собирается рисовать этот многогранник, мы даже не в состоянии вообразить, как он выглядит. Но доказать, что любые две вершины в нем образуют ребро, мы сможем легко.

Возьмем любые две точки A_k, A_m и докажем, что они являются вершинами многогранника P, а отрезок $\left[A_k; A_m\right]$ – его ребром. Для этого рассмотрим многочлен $p(t) = \left(\frac{t}{t_k} - 1\right)^2 \left(\frac{t}{t_m} - 1\right)^2$. Это – многочлен четвертой степени, он неотрицательный при любом t, и только в двух точках он обращается в ноль: при $t = t_k$ и $t = t_m$. Раскроем скобки и запишем многочлен в виде $p(t) = a_1t^4 + a_2t^3 + a_3t^2 + a_4t + 1$. Коэффициенты $a_1,\ldots,a_4$ можно выразить через числа t_k, t_m, но нам это не нужно. Так как $p(t_k) = p(t_m) = 0$ и $p(t) > 0$ при всех остальных t, то плоскость $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 1$ содержит точки A_k, A_m, а все остальные вершины P лежат по одну сторону от этой плоскости, в полупространстве $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 > 1$. Следовательно, плоскость пересекает P по отрезку $\left[A_k; A_m\right]$, значит, этот отрезок – ребро, а его концы – вершины. Итак, любая пара вершин соединена ребром!

Множество точек $\left(t; t^2; t^3; t^4\right)$ для всех действительных t является непрерывной кривой, носящей название *кривая моментов*. Она важна не только в геометрии, но и в теории функций, теории вероятностей и т.д. В каждом пространстве есть своя кривая моментов: на рисунке 20 показана

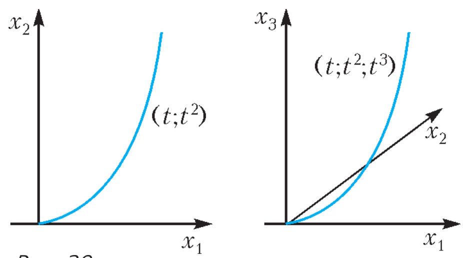


Рис. 20

двумерная кривая (это обычная парабола) и трехмерная кривая моментов. Любые n точек на ней являются вершинами *многогранника моментов*. Мы доказали, что в четырехмерном пространстве любой многогранник моментов обладает замечательным свойством: любая пара вершин соединена ребром. Но вот трехмерный многогранник моментов этим свойством не обладает. Попробуйте объяснить, почему.

«Нульсторонний профессор»

Основная сложность в рассуждениях с четырехмерным пространством состоит в том, что человек пытается полностью перенести свой «трехмерный» опыт на $\mathbb{R}^4$. Получается это не всегда. Четырехмерное пространство имеет свои законы, часто трудно понимаемые, как в примере с многогранником моментов. Представим, что на плоскости живут двумерные существа, которые видят только эту плоскость. Тогда если им показать двумерную «коробку» в виде контура квадрата, то они увидят не всю коробку, а лишь участок ее границы, видимый их глазу (рис.21). Более того, внутренность коробки для них полностью невидима, поскольку любой луч света, исходящий из внутренней точки, столкнется с границей и до их глаза не дойдет. Только если проделать дырку в стороне квадрата, они смогут разглядеть внутренность через это отверстие. Для нас же, наблюдающих эту картину из пространства, виден сразу весь квадрат! То же произойдет, если смотреть на наш трех-

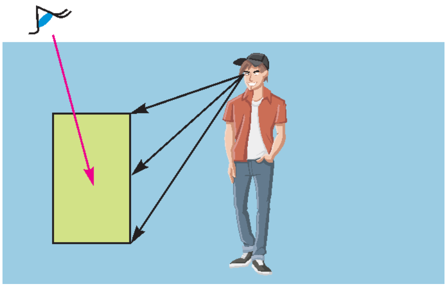


Рис. 21

мерный мир из любой точки четырехмерного пространства. Назовем эту точку Q. Из этой точки мы увидим все внутренности любого объекта, даже внутренние органы человека! В самом деле, прямая, соединяющая точку Q с любой точкой M нашего трехмерного пространства, не будет иметь с ним других общих точек (поскольку прямая, на лежащая в трехмерной плоскости, пересекает ее не более чем в одной точке). Следовательно, QM не пересечет никаких границ, а значит, M будет видна из точки Q.

Вернемся к двумерным существам, которые смотрят на квадратную коробку. Если мы чуть согнем эту коробку, сделав ее неплоской, то для двумерного наблюдателя она исчезнет! В рассказе американского ученого и фантаста Мартина Гарднера «Нульсторонний профессор» человек показывал фокус, складывая определенным образом лист бумаги так, что в один момент лист исчезал. Секрет был в том, что сложенная поверхность была «нульсторонней», что невозможно в трехмерном пространстве, поэтому она уходила в другие измерения. Нульсторонних поверхностей не существует, но фокус с исчезновением теоретически возможен, если согнуть лист так, что он перестанет лежать в трехмерном пространстве, подобно тому, что мы сделали с нашей двумерной коробкой.

В рассказе так потом сложили одного нехорошего профессора, и он исчез.

Упражнения

14. У четырехмерного симплекса – пять вершин. Две из них покрасили в белый цвет, остальные три – в красный. Докажите, что середины всех отрезков с разноцветными концами лежат в одной трехмерной плоскости. Какой трехмерный многогранник получается в сечении?

15. Докажите, что диагональ четырехмерного куба образует с каждым его ребром угол 30°. (Диагональ соединяет противоположные вершины куба.)

16. Какие углы могут образовывать между собой диагонали четырехмерного куба?

17. Как известно, в сечении правильного тетраэдра плоскостью можно получить квадрат (что это, кстати, за сечение?). А можно ли в сечении симплекса трехмерной плоскостью получить куб?

Указание. Постарайтесь определить, сколько вершин может быть у сечения симплекса.

18. Сколько кругов диаметра 1 поместится без пересечений в квадрате со стороной 2? Конечно, четыре! Нужно разбить квадрат на четыре единичных квадрата и в каждый вписать по кругу. А сколько шаров радиуса 1 поместится в куб со стороной 2? Восемь. Разбиваем куб на восемь единичных кубов и в каждый вписываем по шару. А каков ответ для четырехмерного куба со стороной 2? Шестнадцать? Оказывается, нет – семнадцать! Где расположится дополнительный шар?

Выходим в четвертое измерение

Теперь мы можем решить задачи 1 и 2, поставленные в самом начале статьи. Ответ в каждой – «да, но с выходом в четырехмерное пространство».

Решение задачи 1. Вы, конечно, уже поняли, как решать. У четырехмерного симплекса 10 ребер и 10 двумерных граней-треугольников, значит, надо составить симплекс из 10 спичек. Сначала составляем из 6 спичек тетраэдр, а затем выходим в четырехмерное пространство, где берем точку, удаленную от всех вершин нашего тетраэдра на расстояние, равное спичке (см. построение симплекса в предыдущем разделе). Соединив ее спичками со всеми четырьмя вершинами тетраэдра, получаем симплекс.

Обратимся к рисунку 1,*в*, где мы составили две пирамиды, после чего у нас оставалась одна спичка, которой нужно было соединить вершины A и C. Сделать этого нельзя, поскольку расстояние AC больше длины спички. А в четырехмерном пространстве длину отрезка AC можно менять, сделав равной длине спички. Фигура из двух пирамид не является жесткой в $\mathbb{R}^4$, подобно тому как фигура из двух треугольников на рисунке 1,*б*, будучи жесткой на плоскости, становится подвижной в пространстве.

Решение задачи 2. Прямоугольный лист бумаги можно свернуть в тор, если выйти в четырехмерное пространство (в трехмерном нельзя). Для того чтобы это сделать, рассмотрим сначала отображение отрезка $[0;\,2\pi]$ на единичную окружность: каждой точке x отрезка ставим в соответствие точку $M(x)$ плоскости с координатами $(\cos x;\,\sin x)$ (рис.22). Когда x пробегает

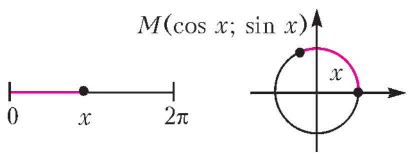


Рис. 22

отрезок, $M(x)$ пробегает окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Это – изометрия: любой промежуток, являющийся частью отрезка $[0;\,2\pi]$, переходит в дугу окружности той же длины.

Поднимемся на размерность выше и свернем квадратный лист в цилиндр с помощью отображения $(x;\,y)\mapsto(\cos x;\,\sin x, y)$. Каждой точке квадрата $[0;\,2\pi]\times[0;\,2\pi]$ ставится в соответствие точка пространства с координатами $(\cos x;\,\sin x, y)$. Она пробегает цилиндр когда точка $(x;\,y)$ пробегает квадрат (рис.23).

А теперь поднимемся еще на размерность выше и свернем квадратный лист в тор с помощью отображения

$$(x;\,y)\mapsto(\cos x;\,\sin x;\,\cos y;\,\sin y).$$

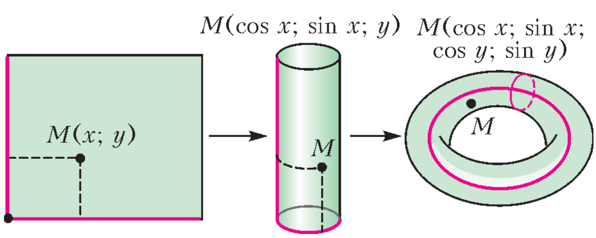


Рис. 23

Это отображение каждую образующую цилиндра (отрезок $[0;\,2\pi]$ для переменной y) свернуло в единичную окружность. Таким образом, весь цилиндр свернулся в тор, причем изометрично! Если бы мы проделали такое построение, то наш цилиндр исчез бы подобно «нульстороннему» профессору. Точнее, перестал бы быть нам виден, поскольку вышел бы из трехмерного пространства.

Упражнение 19. В пространстве даны два сцепленных круглых кольца. Расцепите их с помощью выхода в четырехмерное пространство.

Для каждого из следующих упражнений найдите как решение с выходом в четырехмерное пространство, так и обычное «трехмерное» решение.

Упражнения

20. У двух тетраэдров $A_1\ldots A_4$ и $B_1\ldots B_4$ четыре прямые $A_1B_1,\ldots,A_4B_4$ пересекаются в одной точке. Докажите, что шесть точек пересечения соответствующих сторон и две точки пересечения соответствующих диагоналей или их продолжений лежат в одной плоскости (предполагается, что среди этих прямых нет параллельных).

21. В пространстве даны четыре различных непересекающихся шара. Докажите, что если у каждой пары шаров отметить вершину, то все шесть вершин лежат в одной плоскости.

22. В пространстве даны два непересекающихся шара, а также дано число $k > 0$. Найдите геометрическое место точек, отношение длин касательных из которых к этим шарам равно k.

23. Три плоскости в пространстве пересекаются по одной прямой. Три трехгранных угла расположены так, что их вершины лежат на этой прямой, а ребра лежат в данных плоскостях. Докажите, что три точки пересечения соответствующих граней этих углов лежат на одной прямой.

Комментарий. Эта задача – одно из возможных обобщений теоремы Дезарга на трехмерное пространство. Ее решение с помощью выхода в четвертое измерение придумал И.Ф.Шарыгин. Ее можно также решить и не покидая трехмерного пространства.

Рекордные механические параметры

Л.АШКИНАЗИ

Если не будет прочности...

На вопрос, зачем нужна прочность, каждый скажет – чтобы дома не падали. Но прелесть ситуации в том, что даже при отсутствии гравитации прочность нужна. При ее отсутствии мы не сможем что-либо перемещать – второй закон Ньютона!

Основой определения механических параметров является следующая ситуация. Берем стержень известного сечения и, аккуратно держа его за концы – так, чтобы механические напряжения распределились по сечению равномерно, тянем. Пока он удлиняется пропорционально нагрузке и при снятии нагрузки возвращается к исходному размеру, его относительное удлинение обратно пропорционально величине, которая называется модулем Юнга. Иными словами, чем модуль Юнга больше, тем материал жестче. Линейную зависимость деформации от усилий называют законом Гука и обычно добавляют, что он нарушается при больших напряжениях. В более серьезных источниках говорится, что он нарушается при больших скоростях деформации – это называется «упругий гистерезис»; но и при малых усилиях он соблюдается не вполне точно. Аналогичный модулю Юнга, или модулю упругости, параметр для кручения стержня называется модулем сдвига.

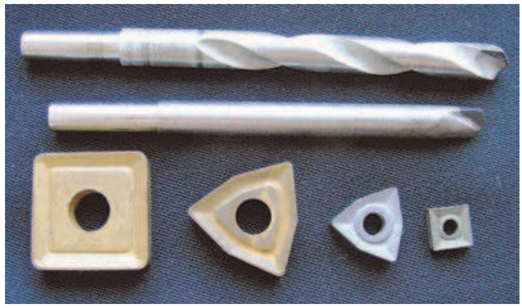
При удлинении материала обычно уменьшается поперечное сечение образца, причем относительное уменьшение сечения

меньше относительного увеличения длины, т.е. объем растет. Отношение относительного уменьшения поперечного размера, например диаметра, к относительному увеличению длины называется коэффициентом Пуассона. При дальнейшем удлинении образец рвется – при напряжениях, которые называются временно́й прочностью. Важное примечание: при вычислении и предела упругости, и временно́й прочности силу делят на исходное сечение, а не на то – меньшее! – которое образец обретает при соответствующей нагрузке. То, насколько удлинился стержень до разрыва, характеризует пластичность материала. Хрупкие материалы могут быть весьма прочными – они разрушаются при больших напряжениях, но не удлиняясь. А почему говорят «временна́я прочность», мы скоро узнаем.

Прочность и жесткость

Вопрос прочности интересовал людей всегда – начиная с первого каменного топора. Если говорить о материалах, реально выпускающихся и применяющихся в промышленных масштабах, причем только о массивных материалах, не пленках и не волокнах, то на первое место будут претендовать стали с максимальным пределом текучести 1,6 ГПа, чуть большей (1,7 ГПа) временно́й прочностью и модулем Юнга 200 ГПа. Конкретные цифры сильно зависят не только от состава, но и от сложной термомеханической обработки – последовательности нагревов, деформаций и охлаждений. Таких же значений прочности, но при вдвое меньшем модуле Юнга удается достигать для сплавов титана Ti с молибденом Mo, хромом Cr и алюминием Al. Эти сплавы вдвое легче ($4{,}5$ г/см^3 против 8 г/см^3), однако технология их изготовления еще сложнее и «строже» и они существенно дороже. Поэтому то, что стоит на земле, из них не делают почти никогда, а делают лишь то, что летает, плавает под водой или что человек носит на себе. У сталей есть конкурент – сплав алюминия Al, дюралюминий, или, как его фамильярно называют, дюраль. У этого сплава втрое меньше прочность и модуль Юнга, чем у лучших сталей, но и втрое меньше удельная плотность ($2{,}7$ г/см^3). Правда, у них свои проблемы, например меньшая устойчивость к коррозии.

Существуют еще так называемые твердые сплавы (видели такие пластиночки на



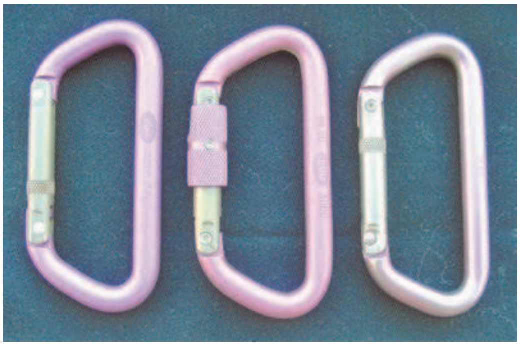
Твердосплавные пластиночки, надеваемые на резцы и сверла

резцах и сверлах?). Так это не сплавы, а композиты из порошков карбидов WC, TaC, TiC и кобальта Co. Смесь порошков прессуется и спекается, и то, что получается, имеет прочность 2,5 ГПа. Обрабатывать их весьма трудно, так что прессуют и спекают сразу то, что хотят получить.

«Последний штурм этой проблемы предприняли пару лет назад ушлые ребята из Арнорского центра высоких технологий, получившие под это дело специальный грант от Ангмарской аэрокосмической корпорации. Кончилось все опять пшиком: представили заказчику двухмиллиметровой толщины пластину из некого вещества (86,12 % серебра, 11,96 % никеля и далее по списку) – якобы это и есть самый настоящий мифрил, а все остальное не более чем легенды; ну и, как водится, потребовали новых денег на изучение этого своего творения. Главарь ракетчиков не моргнувши глазом извлек из-под стола заряженный музейный арбалет, навел его на руководителя проекта и предложил тому прикрыться своей пластиною: выдержит – получишь требуемые деньги, нет – они тебе все равно ни к чему. Проект, ясное дело, накрылся медным тазом…» (К.Еськов. Последний Кольценосец).

На практике требования по прочности и жесткости ставятся отдельно. Например, от стального троса требуется прочность, а с жесткостью особых проблем нет. Противоположный пример – крыло самолета или лыжная палка. Они пустые внутри, а если сделать их сплошными и несколько более меньшего внешнего размера – так, чтобы сохранилась жесткость, то прочность станет намного больше, чем нужно, и во много раз больше станет вес.

При решении вопроса о применимости материалов приходится, как и всегда, учитывать не какой-то один параметр и не два-три, а все. Точнее – все те, которые надо учесть, и тут нет инструкции, а есть знание физики, опыт и чутье инженера. У химиков есть близкое по смыслу выражение – «чувство вещества». Вот один, близкий мне, пример – альпинистские карабины. Сейчас их делают в основном из алюминиевых сплавов, раньше были стальные, позже появились титановые. Сейчас про



Альпинистский карабин из титана

стальные пишут, что они тяжелые; конечно, их можно было бы делать втрое меньшего сечения, но из «рекордных» сталей их делать не будут – себе дороже, а из обычных, действительно, получаются вдвое тяжелее. Про титан обычно пишут, что он хрупок, но странно: для корпуса подводной лодки и деталей самолета не хрупок, а для карабина хрупок. Заметим, что велосипедисты-рекордсмены, которые катаются на велосипедах с титановыми рамами, говорят, что они или ломаются в первый же год или служат вечно. Вот и ответ – строгость технологии. Если что-то сделано не так, то ломается, а дюраль не так строг и в реальных условиях производства оказывается надежнее. Есть и еще одна совершенно специфическая причина: у титана низкая теплопроводность, а у алюминия – высокая. И при быстром скольжении веревки по титановому карабину он может нагреться и испортить веревку.

Это все – о компактных материалах, но есть еще волокна и «усы». Волокна – это что-то длинное и тонкое, причем либо имеющее отличную от массивного материала структуру, либо состоящее из материала, который может быть только волокном. Интерес для нас оно представляет, если оказывается существенно прочнее «массивных» рекордсменов. Но поскольку оно тонкое, оно оказывается гибким. Поэтому волокна с особо высокой прочностью или с особо высоким модулем Юнга могут применяться либо когда не нужна жесткость, либо как компонент композиционного материала. Известно несколько высокопрочных и высокомодульных волокон, но конкретные данные имеют большой разброс, ибо сильно зависят от технологии. В общем можно считать, что на титул самых прочных могут претендовать: стекловолокно – прочность 4,7 ГПа, модуль Юнга 90 ГПа; кевлар и сверхвысокомолекулярный полиэтилен (СВМП) – прочность 5 ГПа, модуль 180 ГПа; углеродное волокно – прочность 3,6 ГПа, модуль 600 ГПа (в литературе встречаются и большие значения). При этом надо учесть, что довольно часто волокна предельно высокой прочности имеют меньший модуль Юнга. Утверждение, противоположное обратному, также правильно (как вы его сформулируете?)

«Усы» – это нечто еще более тонкое, но если волокна могут иметь неограниченную длину, то монокристаллические усы пока что удается получать только очень короткие. Их прочность для Al_2O_3 и углерода C достигает 20 ГПа при модуле Юнга 400 ГПа и 700 ГПа соответственно; для BN и SiC – 40 ГПа при модуле 1000 ГПа; для углеродных нанотрубок (по сути, тоже усов) – 150 ГПа при модуле 1000 ГПа. Если бы такую прочность удалось получить для массивных материалов, то на канцелярской скрепочке можно было бы подвесить большой лифт с пассажирами. Но пока что эту задачу решить не удалось, и конца-края не видать. Возможных решений несколько. Например, усы могут в процессе роста срастаться, образовывать плетенку, сеть, которая потом пропитывается каким-либо материалом, образующим матрицу. И можно попытаться обеспечить сращение уже готовых усов, инициировав таковое нагревом или примесью, ускоряющей спекание. Но в обоих случаях возможно возникновение дефектов поверхности, ослабляющих ус.

Про плотность

Во многих случаях прочность и жесткость важны не сами по себе, а вместе с весом, точнее – с плотностью. Посмотрим, в каких пределах она может изменяться у твердых веществ. На одном конце шкалы – осмий и иридий с плотностью $22{,}6-22{,}5$ г/см^3; шансов получить материал с большей плотностью нет. Это при нормальном давлении, т.е. 10^5 Па, при бóльших давлениях плотность выше, но даже на дне Марианской впадины, при давлении 1000 атмосфер, или 10^8 Па, плотность возрастает не более чем на десятые доли процента. Из не слишком дорогих и не слишком радиоактивных элементов высокую плотность имеют вольфрам: $19{,}2$ г/см^3 и уран: $18{,}9$ г/см^3. Их и используют, когда нужна именно максимальная плотность.

Насчет малой плотности ситуация сложна. Среди элементов самый легкий – литий, его плотность $0{,}5$ г/см^3. В таких случаях обычно пишут «он бы плавал в воде» – но он делал бы это не очень долго. Определить самое легкое соединение невозможно, скорее всего, это кто-то из «супрамолекулярных соединений» с относительно рыхлой структурой. Они весьма разнообразны, характерные значения их плотности $0{,}7-0{,}9$ г/см^3.

Еще легче – двухфазные структуры, когда одна из фаз это воздух. Природный рекордсмен – бальсовое дерево с плотностью $0{,}11-0{,}14$ г/см^3 (вообще-то для многофазных материалов было бы правильнее говорить не «плотность», а «средняя плотность»). Среди искусственных двухфазных структур рекордсмен – аэрогель с плотностью $0{,}03-0{,}3$ г/см^3. Это структура на основе оксида кремния SiO_2 или алюминия Al_2O_3, но с пористостью 90–99 %. Чем больше пустоты в материале, тем у него меньше плотность и тем меньше вес при взвешивании на воздухе, несмотря на то что при этом пустоты заполнены воздухом. Если же сделать материал с «закрытыми порами» и при изготовлении откачать из них воздух (или изготовить материал в вакууме), то сами сообразите, что сделает с таким материалом атмосферное давление. (А что сделает вакуум с материалом, содержащим воздух в закрытых порах?)

Для суперпористых материалов предельно малая величина плотности материала определяется необходимой прочностью, и в принципе она может быть сколь угодно малой. Если это материал с закрытыми порами, то прочность должна обеспечить поддержание формы при наличии разности давлений между порами и окружающей материал средой. Если эта разность – обычное атмосферное давление, то простой расчет (попробуйте его сделать) показывает, что если «собственно материал» этого материала имеет прочность от 5 до 150 ГПа, то достижимая средняя плотность составит $0{,}2-0{,}007$ г/см^3 соответственно. Иными словами, побить рекорд природы ($0{,}11$ г/см^3) в принципе можно, но сделать это будет сложно. А вот создать материал «легче воздуха» ($0{,}001$ г/см^3) – похоже, нельзя в принципе.

Среди газов и жидкостей ситуация такова. Самый легкий газ – водород, его плотность при нормальных условиях 0,09 г/л. Еще легче был бы атомарный водород, но для заметной диссоциации водород надо нагреть: например, при 4000 °С он диссоциирует на 60%, при 6000 °С на – 99%. Самый тяжелый газ при нормальных условиях – гексафторид вольфрама WF_6, его плотность 12,6 г/л. Самая легкая жидкость – жидкий водород, его плотность 70 г/л, но это при очень холодной погоде. При нормальных условиях самые легкие жидкости – наверное, пентаборан B_5H_9 и неопентан C_5H_{12} с плотностями 0,62–0,61 г/л, а самая тяжелая – ртуть Hg, ее плотность 13,5 кг/л.

Пластичность и ее братец Пуассон

Пластичность металлов и сплавов обычно составляет единицы процентов, и она интересует в основном технологов – именно за счет нее производятся гибка, вытягивание, штамповка и тому подобное. Но есть такое чудо – сверхпластичность, когда металлический стержень спокойно удлиняется в несколько раз, но не рвется. Например, цинк Zn удлиняется в 10 раз, сплавы алюминия Al с медью Cu или тем же цинком Zn – в 6 раз. Причем такое поведение бывает двух типов. Первый – когда металл состоит из сверхмелких (микрон и менее) кристалликов и вязких прослоек между ними, по которым и скользят кристаллики. Второй – когда металл деформируют при температуре, при которой в нем происходит фазовый переход и атомы легко, не создавая вакансий, занимают новые места в решетке. Скажем, так ведут себя некоторые стали (с марганцем Mn, кобальтом Co и ванадием V) в области 900 °С. Когда это явление было открыто, журналисты кинулись расписывать, как завтра изменится вся промышленность, прессы пойдут на свалку и так далее. Увы, быстро выяснилось, что явление имеет место только у некоторых металлов и сплавов, а промышленность использует сотни других и совершенно не готова от них отказываться. Кроме того, требуется нагрев до определенных температур, а возможная скорость деформации мала, и промышленность опять же это не очень устраивает. Так что метод применяется, но ограниченно; революции не произошло. Вообще, если промышленность освоила применение какого-либо материала, она неохотно переходит на другой, а упрощением технологии ее легко не сманить – преимущества должны быть уж очень большими.

Что касается коэффициента Пуассона, который характеризует относительное изменение поперечных размеров при растяжении, тут нас ждут сильные неожиданности. Обычно пишут, что он должен находиться в пределах от 0 до 0,5. Значение 0 – растягиваем, а материал не сжимается, это свойство пробки. (Кстати, не используется ли это свойство на практике?) В некоторых источниках пишут, что значение 0 свойственно хрупким материалам – так это неверно. Значение 0,5 – это сохранение объема при деформации, так ведут себя некоторые каучуки. У большинства изотропных материалов этот коэффициент принимает значение от 0,2 до 0,5, у металлов – от 0,23 для урана U до 0,45 для свинца Pb. Исключение – бериллий Be с коэффициентом 0,024–0,034 в зависимости от технологии, причем иногда указывают и более широкие пределы. Но это все для изотропных материалов, поликристаллов.

Существуют материалы с коэффициентом Пуассона более 1, т.е. уменьшающие объем при растягивании, и с коэффициентом отрицательным, т.е. при растягивании распухающие. И похоже, что для некоторых монокристаллов, причем при деформации вдоль определенных направлений, могут достигаться значения −3 и +4. Это страшно себе представить – мы растягиваем материал на 1%, а он увеличивается в диаметре на 3% или сжимается на 4%! (Кстати, на сколько процентов при этом изменяется объем?) А для искусственно полученных пористых материалов сжатие может быть и еще больше.

Условия жизни

Рассуждая о параметрах, мы ни разу не упомянули, однократно или многократно прикладываются к нашему многострадальному образцу-стержню усилия, делается это медленно или быстро и при каких внешних условиях (например, при какой температуре).

Параметры, которые обычно приводятся в справочниках, относятся к однократному нагружению – взяли покрепче, потянули... потянули... потянули... порвали! Записали все параметры и ставим следующий образец. В реальной жизни бывает и так, и не так. Если это предохранительный клапан, который должен сработать один раз, а потом будет заменен, или если это мембрана в топливном баке ракеты, которая изгибается или разрывается раз в ее жизни, – то действительно важны параметры при однократном нагружении. Или если вообще это нормально работающее устройство, но нас интересует его устойчивость при чем-то однократном, катастрофическом: зданий – при землетрясении, антенны – при экстремальном порыве ветра. Но если это рессоры автомобилей, непрерывный поток которых идет по мосту, то ситуация иная.

С временем нагружения ситуация такова. Обычные данные относятся к обычным условиям – вставили образец, нагрузили, порвали, записали, вставили, нагрузили… Короче говоря, характерные времена – это секунды и часы. Если речь идет о существенно более коротких временах, тысячных долях секунды и менее, это называется ударом. Способность работать в таких условиях естественно назвать ударопрочностью. Если же речь идет о существенно больших временах – о часах, годах и веках, мы сможем заметить изменение размеров многострадального стержня при постоянной нагрузке. Этот эффект называется крипом или ползучестью. Естественно, для того чтобы его избежать, надо уменьшать нагрузки – и мы пришли к понятию долговременной прочности.

Еще одно условие – это температура: если хорошо нагреть, то вопрос о механических параметрах существенно изменяет смысл. Все плавится – как бы не ступить в лужу! С ростом температуры изменяются все характеристики веществ, причем во множестве случаев это изменение определяет работоспособность устройств. Максимальный КПД тепловых машин и тяга двигателей растут с температурой, поэтому техника все время пытается продвигаться в область высоких температур. Но множество физических процессов (химические реакции, диффузия) требуют наличия у взаимодействующих частиц определенной энергии, а доля частиц, имеющих эту энергию, экспоненциально растет с температурой. Поэтому с продвижением в область высоких температур ускоряется взаимодействие материалов и ухудшаются их механические параметры, т.е., попросту говоря, все корродирует, горит, ползет и разваливается. Поэтому для материалов, если это важно, отдельно оговариваются жаропрочность, высокотемпературная прочность и прочие высокотемпературные параметры. Более того, иногда отдельно оговариваются жаропрочность и жаростойкость: жароПрочность – это способность сохранять прочность при высокой температуре, т.е. работать при нагреве, а жароСтойкость – это способность выстоять при этой температуре без нагрузки, а работать с нагрузкой потом, после охлаждения. Например, сталь не будет окисляться при нагреве, если ее легировать Cr, Al, Si, которые создадут на поверхности защитные оксидные пленки, а для жаропрочности ее надо легировать Cr, V и Nb.

Характеризовать жаропрочность или жаростойкость каким-либо точным числом нельзя – жаропрочность невозможно описать каким-либо одним параметром; впрочем, даже для жаростойкости это невозможно, поскольку в разных средах жаростойкость будет разной. Про жаропрочность и говорить нечего, пока не определен критерий. Но сравнивать материалы людям надо, и ситуация оказалась привязана к практике, т.е. к доминирующему реальному применению. Таковым оказались элементы двигателей, в частности турбин самолетных двигателей, где сочетаются высокая рабочая температура, большие механические нагрузки и большой срок службы. А критерием оказалось сохранение формы, т.е. сочетание прочности, низкой ползучести и низкой скорости окисления при высокой температуре и в среде продуктов сгорания топлива. По этому не вполне четкому комбинированному критерию наиболее жаростойкими оказались сплавы на основе никеля Ni и хрома Cr с разнообразными добавками: алюминий Al, титан Ti, молибден Mo, вольфрам W, ниобий Nb, тантал Ta, гафний Hf, рений Re. Многие из этих легирующих элементов применяются одновременно, а если учесть, что режим термической и механической обработки тоже варьируется, то можно (а вам, наверное, и нельзя) себе представить, работа какого объема была проделана физиками и инженерами, чтобы поднять жаростойкость этих сплавов для $1000-1100\ ^\circ C$. И эти сплавы при нагрузках 0,85–0,9 ГПа способны работать тысячи часов.

Правда, тут возникает естественный вопрос, не забыли ли мы про вольфрам W и его младших братьев молибден Mo, рений Re и тантал Ta – они способны выдержать много больше! Да, но эти замечательные металлы прекрасно окисляются, и их надо защищать какими-то специальными покрытиями, а это усложняет технологию, причем покрытия в этих условиях не долговечны.

Очень коротко и очень долго

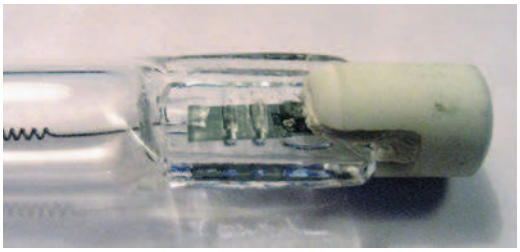
«Очень коротко» – это ударопрочность, т.е. способность материала выдерживать нагрузки, которые приложены на очень малое время, короче – держать удар. Измеряют эту способность, грубо говоря, так. По бруску из испытуемого материала наносится определенным образом удар, который его разрушает, и вычисляется, какая часть энергии ударившего тела израсходовалась на разрушение. Отношение этой энергии к сечению разрушаемого бруска называется ударной вязкостью. Ее наименьшие значения мало кого интересуют, разве что в ситуациях, когда нам надо сделать какой-то механический предохранитель или разрушаемую перегородку, чтобы смешались какие-то два вещества. Сказать, у кого самая малая ударная вязкость, т.е. какой материал легче всего разрушить ударом, трудно – скорее всего, это стекло ($0{,}2$ кДж$/$м^2). Конструкторов по понятным причинам интересуют максимальные значения. У лучших по этому параметру сталей ударная вязкость 3 МДж$/$м^2 , у композитов на основе кевлара – $0{,}75$ МДж$/$м^2 , но они в 6 раз легче стали. По некоторым данным, сверхвысокомолекулярный полиэтилен, СВМП, слегка превосходит кевлар, и в литературе есть данные о разработке композиционных волокон с еще более высокими параметрами.

Что касается многократных нагрузок, то классические примеры – нагрузки при колебаниях, например, крыльев самолета, или при вибрации всего на свете. А ось колесной пары по пути из Москвы во Владивосток изгибается туда-сюда 3 миллиона раз. (Как вы думаете, а сколько раз она изгибается на обратном пути?)

При многократном циклическом нагружении прочность меньше, чем при однократном, причем чем циклов больше, тем прочность меньше (есть несколько сплавов, которые при первых деформациях упрочняются, но такие ситуации редки, они называются циклическим упрочнением). Принято разделять две ситуации – малоцикловый режим, когда нагрузки превосходят предел текучести и разрушение происходит обычно менее чем за 1–10 тыс. циклов, и многоцикловый, когда нагрузки не превосходят предела текучести и образец выдерживает более 10–100 тыс. циклов. Пределы режимов в разных источниках указываются по-разному, а во многих говорится о существовании «переходной» зоны или промежуточного режима. Данных по работе материалов в таких режимах много, но в единую картину они не складываются по стандартной причине – слишком много переменных (например, важна скорость нагружения) и слишком много одновременно идущих процессов. Ориентировочно можно считать, что при симметричном цикле нагружения, когда максимальные нагрузки имеют разные знаки, но одинаковую амплитуду, предельные нагрузки при многоцикловом (10–100 млн циклов) нагружении уменьшаются в 2–2,5 раза для сталей и в 2–4 раза для цветных металлов. Причем для самых прочных сталей и сплавов это отношение может быть и больше, т.е. увеличивая прочность при однократном нагружении, мы не увеличиваем во столько же раз многоцикловую прочность. А жаль.

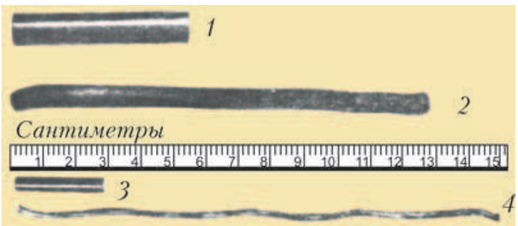
Размер тоже бывает важен

Размер – это тоже механический параметр, и часто он важен. Например, многометровые зеркала телескопов должны сохранять свои размеры с точностью около $1/20$ длины волны излучения, с которым они работают. Так, для оптического диапазона точность должна быть около 20 нм. Хорошо хоть размеры изменяют-



Галогеновая лампа «в разрезе»

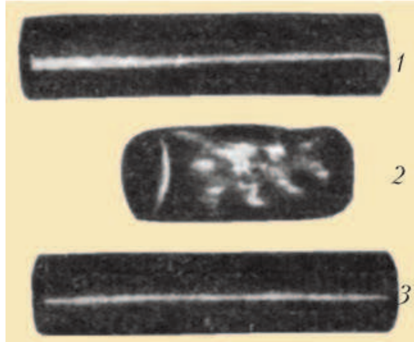
ся при изменении температуры не экспоненциально, а приблизительно линейно. Изменение относительного размера при изменении температуры на один градус называется коэффициентом линейного расширения. Понятно, что есть и коэф-



Влияние циклического нагрева 50 – 550 – – 50°С на стержень из урана (U): 1 – исходный стержень, 2 – он же после 1300 циклов; 3 – исходный, 4 – он же после 3000 циклов

фициент объемного расширения, он важен для жидкостных термометров. Не используется в технике и даже не вводится понятие коэффициента «площадного» расширения (хотя он мог бы быть полезен при точном учете площади съеденных блинов).

С линейным расширением связаны интересные странности – например, некоторые кристаллы при нагреве (правда, лишь в узком температурном интервале и вдоль некоторых двух осей) не расширяются, а совсем наоборот, сжимаются (гипс, кальцит, изумруд). В широком диапазоне температур сжимаются при нагреве $BaTiO_3$, $PbTiO_3$ и некоторые другие. Сжимается графит в направлении, параллельном плоскостям, при температурах до 427 °С и, соответственно, сжимаются нанотрубки – и вдоль оси, и по диаметру. Но при этом вдоль третьей оси гипс, кальцит и



Влияние 200 циклов нагрева в окрестности фазового перехода 668°С: 1 – от 580 до 630°С, 2 – от 630 до 680 °С, 3 – от 680 до 730 °С

изумруд при нагреве расширяются так, что объем увеличивается.

Однако есть вещества, которые при нагреве уменьшаются и в объеме, например оксиды меди CuO и Cu_2O и иодид серебра AgI при низких температурах, кварцевое стекло и алмаз конкретно в области отрицательных температур (менее – 80 и – 40 °С соответственно), а плутоний Pu – в диапазоне 320 – 440 °С . Что касается максимального расширения, то на него претендует фторопласт-4, он же тефлон, с коэффициентом теплового расширения 0,0001–0,0002 – примерно в 15 раз больше, чем у стали.

Влияние циклического нагрева, охватывающего два фазовых перехода 668 °С и 775 °С: 1 – исходный образец, 2 – после 50 циклов, 3 – 100 циклов, 4 – 187 циклов, 5 – 250 циклов

Для техники представляют наибольший интерес две задачи – получение низких коэффициентов расширения для метал-

(Продолжение см. на с. 20)

Андрей Анатольевич Зализняк

А.ПИПЕРСКИ

Лингвистические задачи

В 1963 году Зализняк опубликовал статью под названием «Лингвистические задачи». В ней он продемонстрировал, что можно анализировать факты неизвестных языков, опираясь на строгую логику в сочетании с самыми базовыми представлениями о том, как устроены тексты на человеческом языке. Так, мы вправе ожидать, что порядок слов в языке не случаен, а подчиняется каким-то закономерностям: например, определение всегда стоит после определяемого слова или всегда перед ним, связанные друг с другом слова располагаются рядом, а не раскиданы в разные концы предложения и т.п. – и тогда применение логических операций позволит нам понять, что есть что в непонятном тексте.

Специальных знаний не нужно: например, в статье Зализняка приводится задача, в которой даются 14 фраз на баскском с переводами на венгерский, а дальше читателю предлагается самому перевести три фразы с венгерского на баскский. Автор специально подчеркивает, что это задача для тех, кто не знает ни того, ни другого языка и, таким образом, даже не понимает, что эти фразы значат. Тем не менее, после тщательного анализа примеров задача оказывается разрешимой. Чтобы продемонстрировать, как работает логика в лингвистических задачах, приведем одну из задач Зализняка (1968).

Задача 1. Даны три словосочетания таджикского языка с русскими переводами:

а) *дӯсти хуби ҳамсояи шумо* – хороший друг вашего соседа;

б) *ҳамсояи дӯсти хуби шумо* – сосед вашего хорошего друга;

в) *ҳамсояи хуби дӯсти шумо* – хороший сосед вашего друга.

Задание. Определите, какому русскому слову соответствует по значению каждое из четырех встречающихся здесь таджикских слов.

Решение. Прежде всего замечаем, что различие между русскими именительным и родительным падежами (например: *сосед* и *соседа*, *хороший* и *хорошего*) не отражается в таджикском тексте каким-либо различием в формах слов (поскольку каждое из четырех таджикских слов выступает везде в одной и той же форме).

Сравним словосочетания а) и в). Русские переводы здесь имеют вид *хороший* Z *вашего* Y-*а* и различаются только тем, что существительные ‘друг’ и ‘сосед’ поменялись синтаксическими ролями. В таджикском же языке различие только в том, что поменялись местами слова *дӯсти* и *ҳамсояи*. Отсюда можно заключить, что эти два таджикских слова соответствуют русским существительным.

Сравним теперь б) и в). Русские переводы различаются здесь только тем, к какому из двух существительных относится определение ‘хороший’: Z *вашего хорошего* Y-*а* и *хороший* Z *вашего* Y-*а*. Опишем переход от б) к в) так: слово ‘хороший’ изменило свое место, из-за чего другие слова автоматически переехали (‘сосед’ – с первого на второе место, ‘вашего’ – со второго на третье). В таджикском же тексте изменение коснулось только слов *дӯсти* и *хуби*. Нам надо определить, как описать этот переход: сказать ли, что переставилось слово *дӯсти* (и это автоматически повлекло за собой передвижение слова *хуби*), или наоборот. Мы должны передвинуть аналог слова ‘хороший’, но мы уже знаем, что *дӯсти* – существительное; следовательно, изменение порядка слов вызвано перемещением слова *хуби*, которое и значит ‘хороший’; тогда *шумо* – ‘ваш’.

Остается установить значение существительных. Возможны две гипотезы. Проверим первую из них: пусть *дӯсти* – ‘друг’, а *ҳамсояи* – ‘сосед’. Тогда таджикские словосочетания устроены так:

а) друг хороший соседа вашего, б) сосед

Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.

друга хорошего вашего, в) сосед хороший друга вашего.

Для объяснения всего, что мы видим, достаточно двух правил:

– всякое определение стоит после определяемого (например, *сосед хороший*, *сосед друга*);

– определение, выраженное прилагательным, ставится раньше определения, выраженного существительным (*сосед хороший друга вашего*).

При противоположной гипотезе (*дӯсти* – 'сосед', а *ҳамсояи* – 'друг') получается такой порядок слов:

а) соседа хороший друг вашего, б) друга сосед хорошего вашего, в) друга хороший сосед вашего.

Тогда нам придется считать, что слово 'вашего' ставится в противоположный конец предложения от слова, к которому оно относится ('соседа ... вашего', 'друга ... вашего'), а порядок существительного и прилагательного неодинаковый в разных примерах ('хороший друг' и 'друга ... хорошего'). Таким образом, вторая гипотеза неубедительна, и следует принять первую гипотезу.

Ответ. *дӯсти* – 'друг', *хуби* – 'хороший', *ҳамсояи* – 'сосед', *шумо* – 'ваш'.

Если вы хотите потренироваться, вот еще одна задача, сочиненная Зализняком (1974).

Задача 2. Даны словосочетания на албанском языке с переводом на русский язык:

burrë i bëshëm – крепкий мужчина;

mbretëreshë e lavdishme – знаменитая царица;

dajë i vajzës – дядя девочки;

kalë i gjyshit – конь деда;

lopë e fqinjit të hereshëm – корова прежнего соседа;

djalë i plakës së hajthme – сын слабой старухи;

mbesë e motrës së vierrit të ardhshëm – племянница сестры будущего свекра.

Задание 1. Переведите на албанский язык:

конь племянницы царицы;
слабая девочка.

Задание 2. Изложите кратко свои соображения по следующим вопросам:

1. Есть ли в албанском языке падежи?

2. Различаются ли в нем грамматические роды?

3. Какую роль играют слова *i*, *e*, *të*, *së* и в чем различие между ними?

Такие задачи впервые были предложены школьникам на Первой традиционной олимпиаде по языковедению и математике, которая прошла в 1965 году. Некоторые смеялись: «Что это такое – первая традиционная?» А она действительно стала традиционной, как того и хотел В.А.Успенский, включивший это слово в название. В 2017/18 учебном году олимпиада проходит в 48-й раз и посвящается памяти Зализняка – создателя первых самодостаточных задач на стыке языка и логики. А с 2003 года проводится и Международная олимпиада по лингвистике, в которой участвуют уже три десятка стран: от Швеции до Бразилии.

История русского ударения

В 1970-е годы Зализняк обратился к истории русского языка, которой плодотворно занимался более 40 лет. Изучение схем ударения в современном русском языке привело его к тому, что он решил разобраться, откуда они взялись, и построил строгую формальную модель, которая позволяет по составу древнерусского слова определить, какое в нем было ударение.

Рассмотрим современные русские слова *бы́ли* и *ры́ли*. В них обоих ударение падает на первый слог – но и в этом случае, как и в примере про *фонарь*, все сложнее, чем кажется. Добавим отрицание и получим: *не́ были* и *не ры́ли*. У слова *ры́ли* – свое собственное, «настоящее» ударение, которое оно никому не отдает. А вот у слова *бы́ли* ударение «ненастоящее»; скажем, что у него как бы нет ударения, а просто автоматически усиливается первый слог; если же первым слогом становится частица *не*, она и получает это автоматическое усиление. Для нас это неожиданно: ведь ударение в *бы́ли* звучит так же, как в *ры́ли*, но Зализняк установил, что в древнерусском языке около 1000 года это различие было вполне живым. Имелось два типа ударения, различающихся по звучанию и совпавших только к XIV веку: автономное (самостоятельное, «настоящее») ударение, которое могло падать на любой слог слова, и автоматическое («ненастоящее»). Автоматическое ударение – это и есть то самое усиление на первом слоге. Условно будем обозначать автономное ударение в древнерусских словах привычным способом (*бы́ли*), а автоматическое – черточкой перед словом (*‾были*).

Возьмем три тройки существительных (возможно, с предлогом), которые до наших дней сохранили древнерусское ударение: *гру́ша – гру́шу – за гру́шу*, *жена́ – жену́ – за жену́* и *нога́ – но́гу – за́ ногу*. Вспоминается что-то знакомое: ударение всегда на основе, ударение всегда на окончании и подвижное ударение – это те же самые схемы, которые мы уже видели в работах Зализняка про современный русский язык. В своей книге «От праславянской акцентуации к русской» (1985) он наглядно объяснил, откуда и как эти схемы произошли.

Припишем каждой морфеме (корню, окончанию и т.п., а также предлогам, союзам и частицам) одну из трех маркировок: ↓, → или –. Договоримся, что ударение определяется самой левой стрелкой. Если это ↓, то автономное («настоящее») ударение падает на отмеченный ею слог; если это →, то автономное («настоящее») ударение падает на слог правее нее; если же стрелок в слове нет, а есть только минусы, слово имеет автоматическое («ненастоящее») ударение. Для того чтобы описать все приведенные выше примеры, достаточно разметить морфемы так: *за* –, *груш* ↓, *жен* →, *ног* –, *а* ↓, *у* –. После этого получаем все реально наблюдаемые ударения:

гру́ш-а ↓ ↓	*гру́ш-у* ↓ –	*за гру́ш-у* – ↓ –
жен-а́ → ↓	*жен-у́* → –	*за жен-у́* – → –
ног-а́ – ↓	*‾ног-у* – –	*‾за ног-у* – – –

Этот простой алгоритм (с некоторыми добавлениями, которые, разумеется, изложены в работах Зализняка) позволяет полностью описать древнерусское ударение. А чтобы потренироваться, сделайте небольшое упражнение.

Упражнение 1. Даны пять глаголов в двух формах прошедшего времени: *могла́*, *могли́*; *мы́ла*, *мы́ли*; *жила́*, *жи́ли*; *вы́мыла*, *вы́мыли*; *вы́жила*, *вы́жили*. Известно, что место современного ударения во всех этих формах совпадает с древнерусским.

Задание. Для каждой морфемы, содержащей хотя бы один гласный (приставка *вы*-; корни -*мог*-, -*мы*-, -*жи*-; окончания -*а*, -*и*), укажите ее древнерусскую маркировку (↓, → или –) так, чтобы получить правильное ударение во всех формах.

Примечание. Поскольку суффикс прошедшего времени -*л*- не содержит гласного, ему можно не приписывать маркировку или приписать маркировку –.

Как определить ударение по рукописи

Схема, представленная выше, описывает древнерусскую ситуацию, которая затем заметно изменилась. Мы и сами это замечаем: например, сейчас вполне можно сказать *за но́гу*. В своих работах Зализняк очень подробно описал, как изменялось древнерусское ударение. Для этого он проанализировал 89 старинных рукописей и печатных книг с проставленными ударениями. Ударения ставились в текстах далеко не всегда – но иногда получить информацию об ударении можно даже в случае, если ударение не проставлено.

Возьмем, например, такую фразу из «Золотого теленка» Ильи Ильфа и Евгения Петрова: *На заходе солнца Остап роздал обещанные гостинцы.* С каким ударением в ней читается глагол? Ответ следует из знания правил русской орфографии: *ро́здал*, потому что иначе было бы написано *раздал*. Похожую задачу на материале одной древнерусской рукописи и решил Зализняк – только, конечно, гораздо сложнее, потому что правила ему пришлось сначала открыть.

Сделаем небольшой экскурс в историю русского языка. Наряду с «обычными» гласными, в древнерусском языке около 1000 года встречались два «особых» сверхкратких гласных: *ъ* (как *ы*, но короче) и *ь* (как *и*, но короче). Например, слова *столъ*, *годъ* и *мъхъ* ‘мох’ были двусложными (*сто-лъ*, *го-дъ*, *мъ-хъ*), слова *голубь*, *нужьно* 'нужно', *польза*, *тьмьно* 'темно', *шьвьць* 'швец' – трехсложными (*го-лу-бь*, *ну-жь-но*, *по-ль-за*, *ть-мь-но*, *шь-вь-ць*). В XI–XIV веках с ъ и ь происходило изменение, которое можно описать так:[4]

1) в конце слова гласные ъ и ь выпадают;[5]

2) далее движемся по слову справа налево; если мы находим ъ или ь, то смотрим на ближайший гласный справа от него:

а) если это выпавший ъ или ь, то рассматриваемый на данном шаге ъ или ь проясняется, т.е. превращается в *о* или *е* соответственно;

б) в любом другом случае (т.е. если справа стоит «обычный» гласный или прояснившийся ъ или ь) ъ и ь выпадают.

В таблице 6 продемонстрировано, как эти правила работают (каждую строку следует читать справа налево).[6]

Видно, что в результате этого процесса появилось много слогов, которые оканчиваются на согласный: *мох*, первый слог в *польза* и т.п.

Упражнение 2. Проверьте себя: какие слова (не обязательно в начальной форме) получились из древнерусских слов *дьнь*, *львъ*, *сънъ*, *пьшено*, *лъжька*, *почьсть*, *льстимъ*, *льсть*, *чьтьць*, *Смольньску*?

Таблица 6

Стало	3-й слог с конца	2-й слог с конца	1-й слог с конца	Было
стол		*сто*	*лъ* выпадает (1)	*столъ*
год		*го*	*дъ* выпадает (1)	*годъ*
мох		*мъ* проясняется в *о* (2а: справа выпавший ъ)	*хъ* выпадает (1)	*мъхъ*
голубь	*го*	*лу*	*бь* выпадает (1)	*голубь*
нужно	*ну*	*жь* выпадает (2б: справа «обычный» гласный *о*)	*но*	*нужьно*
польза	*по*	*ль* выпадает (2б: справа «обычный» гласный *а*)	*за*	*польза*
темно	*ть* проясняется в *е* (2а: справа выпавший *ь*)	*мь* выпадает (2б: справа «обычный» гласный *о*)	*но*	*тьмьно*
швец	*шь* выпадает (2б: справа прояснившийся *ь*)	*вь* проясняется в *е* (2а: справа выпавший *ь*)	*ць*	*шьвьць*

А теперь, после этого экскурса, перенесемся в XIV век. Именно тогда была написана

[4] Эта закономерность была открыта еще до Зализняка и часто называется законом Гавлика в честь чешского лингвиста Антонина Гавлика (1855–1925).

[5] ъ продолжает сохраняться на письме до 1918 года, а ь во многих случаях и до сих пор, обозначая мягкость согласного.

[6] Согласный, который стоял перед выпавшим ь, иногда сохраняет мягкость (*голу<u>бь</u>*, *по<u>ль</u>за*), а иногда нет (*ну<u>ж</u>но*, *те<u>м</u>но*, *<u>шв</u>ец*). Для нашего изложения этот вопрос несущественен.

рукопись, которая благодаря Зализняку стала известна как ценный источник знаний об ударении, – справочник для судей под названием «Мерило праведное» (это значит «Весы правосудия»). Знаков ударения в рукописи нет, но зато различаются два типа *о*: «закрытое *о*», которое обозначалось буквой *w* («омега») и звучало как нечто среднее между *о* и *у*, и «открытое *о*», которое обозначалось буквой *о* («он») и звучало как нечто среднее между *о* и *а*. Закрытое *о* возникло из раннедревнерусского *о* (причем только из «обычного» *о*, а не из *ъ*) в трех случаях:

1) в начальном слоге, который ранее оканчивался на гласный, а после выпадения *ъ* и *ь* стал оканчиваться на согласный: *гwдъ* (было двусложное *¯го-дъ*, которое превратилось в односложное *год*), *тwч-но* (было *то́-чь-но*); назовем такой слог перестроенным;

2) под автономным ударением: *злw* (*зъло́*), *поклwнъ* (*покло́нъ*);

3) на два слога правее автономного ударения (по счету слогов уже после выпадения *ъ* и *ь*): *обладаемwе* (*облада́емое*), *вwинствw* (*во́иньство*).

В остальных случаях в «Мериле» раннедревнерусское *о* дает открытое *о*: *году*, *золото* (*¯году*, *¯золото* – автоматическое ударение, начальные слоги оканчиваются на гласный), *молода* (*молода́* – оба *о* безударные, начальный слог оканчивается на гласный). Если *ъ* превратился в *о*, это всегда открытое *о*: *мохъ* (*мъ́хъ*) – не помогает ни то, что начальный слог перестроенный, ни автоматическое ударение.

Зная все это, как нам понять ударение по написанию в «Мериле праведном», при том что знаков ударения там нет? Например, мы видим в «Мериле» слово *теплwтою* (из раннедревнерусского *теплотою*). Могло ли там быть автоматическое ударение (*¯теплотою*)? Нет, потому что тогда во втором слоге не появилась бы *w*. А могло ли там быть автономное ударение на 1-м, 3-м или 4-м слоге: *те́плотою*, *теплото́ю* или *теплотою́*? И опять-таки нет, потому что не появилась бы *w* в нужном месте: *те́плотою* и *теплото́ю* дали бы *теплотwю* (проверьте, понимаете ли вы, почему в этих двух случаях написание совпадет), а *теплотою́* вовсе не дало бы буквы *w*. Значит, это слово имело ударение *тепло́тою*, непривычное для нас сегодня.

А какое было ударение в слове *старость* (из раннедревнерусского *старость*)? Точно определить не удается, но у нас есть основания сказать, что там могло быть автоматическое ударение (*¯старость*) или автономное ударение на 1-м слоге (*ста́рость*)[7], но только не автономное ударение на 2-м слоге: из *старо́сть* в «Мериле» получилось бы *старwсть*. В слове *золоту* (из *золоту*) могло быть автоматическое ударение (*¯золоту*) или автономное ударение на 3-м слоге (*золоту́*), но не автономное ударение на 1-м или 2-м слоге (*зо́лоту* дало бы *зwлоту*, а *золо́ту* – *золwту*). В слове *пwпъ* (из *попъ*) может быть любое ударение: если там было *¯попъ*, то *w* получится по правилу про перестроенный слог, а если было *по́пъ*, то сразу по двум правилам – про перестроенный слог и про автономное ударение.

Зализняку было труднее, чем вам: ему пришлось выявить все эти правила, читая рукопись. Но и вы можете попробовать повторить заключительную часть его открытия и решить такую задачу.

Задача 3. Пусть вам известно написание слова в «Мериле праведном» (XIV в.) и его раннедревнерусское написание, отражающее произношение около 1000 года. Постройте алгоритм, который позволяет определить, каким могло, а каким не могло быть древнерусское ударение в этом слове. Иначе говоря, для слова, которое в «Мериле праведном» является n-сложным, вам надо сказать, могло ли в нем быть: автоматическое ударение; автономное ударение на 1-м, 2-м, …, n-м слоге.

Чтобы вы могли решать эту задачу не чисто умозрительно, а на реальном материале, вот несколько слов в обоих видах: *истиненъ* (*истиненъ*), *мwжемъ* (*можемъ*), *живwтъ* (*животъ*), *подwбалw* (*подобало*),

[7] Разумеется, если для какого-то слова у нас получилось несколько вариантов ударения, это не значит, что все они реально встречались: скорее всего, использовался только один из них, но мы не можем по написанию надежно определить, какой именно.

свободенъ (*свободьнъ*), *свободнѡму* (*свободьному*), *золото* (*золото*), *мѡрьскую* (*морьскую*), *погребенѡ* (*погребено*), *свитокъ* (*съвитъкъ*), *полезно* (*пользьно*), *золъ* (*зълъ*).

Указание. Помните, что ко времени написания «Мерила праведного» буквы ъ и ь уже не читаются как гласные и о них при определении ударения думать не надо.

Подсказка 1. Ровно для пяти из данных слов вы точно можете определить древнерусское ударение (т.е. доказать, что все варианты ударения, кроме одного, невозможны).

Подсказка 2. Ровно про три из данных слов вы точно можете сказать, что место ударения в них не такое же, как в современном русском языке.

* * *

Вот уже почти десять лет я бережно храню один листок бумаги. В 2008/09 году Зализняк читал в МГУ имени М.В.Ломоносова курс по истории русского ударения и дал на дом задание – то, что я только что предложил вам как задачу 3. Проверив мою работу, он исправил одну опечатку и написал:

Превосходно. Безукоризненно.
А.З.

С тех пор, читая книги и статьи самого Андрея Анатольевича и слушая его лекции, я всегда думал и продолжаю думать, что эти слова в первую очередь характеризуют не мое домашнее задание, а его самого и все то, что он делал. Превосходно. Безукоризненно.

Рекордные механические параметры

(Начало см. на с. 7)

лов и получение вполне определенных значений. Второе важно, если мы соединяем, например, стекло с металлом – а такое соединение есть в любой лампе (и накаливания, и газоразрядной). Это повлекло в свое время разработку стекол и сплавов металлов, имеющих одинаковые или близкие коэффициенты расширения. Для галогеновой лампы это вообще проблема, ибо у нее баллон кварцевый, а расширение кварца на порядок меньше, чем у металлов, которые нам хочется с ним спаять (например, у молибдена Mo). Решается эта проблема так – то место, где ввод спаян с кварцем, сделано из тонкой фольги. В этом случае спай не разрушается при изменении температуры на 1000 °C – при охлаждении от температуры затвердевания кварца до комнатной, хотя при этом должны были бы возникать большие механические напряжения. Но они почему-то не возникают… (Почему?)

Материалы с низким тепловым расширением нужны для метрологии (штангенциркули, микрометры, мерные проволоки) и для других ситуаций – скажем, для маятников часов. Причем кварц для этих целей неудобен. Такие сплавы есть – например, инвар (Fe 64%, Ni 36%).

Но размер зависит не только и не просто от температуры. Детали из некоторых материалов при термоциклировании – нагрев-охлаждение-нагрев и т.д. – делают нечто чудовищное. А именно, они изменяют свои размеры, и как (см. рисунки на с.14)! Изучено это явление не слишком хорошо, надежно известно лишь, что для возникновения этих страстей нужно, чтобы либо нагрев, либо охлаждение были быстрыми или же чтобы диапазон изменения температуры захватывал точку фазового перехода. Подробно происходящее при этом рассмотрено, например, в книге В.Коваленко «Теплофизические процессы и электровакуумные приборы» (она есть в Сети). Прочтите эту книгу.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи М2498–М2501, Ф2505–Ф2508

М2498. На доске написаны 100 попарно различных положительных чисел. Для каждой пары написанных чисел вычислили их сумму. У какого наибольшего количества пар эта сумма может найтись среди написанных на доске чисел?

Фольклор (по мотивам олимпиад Чехии и Словакии)

М2499. Верно ли, что у любого тетраэдра есть сечение, являющееся равнобокой трапецией?

В.Лецко

М2500*. Клетки таблицы $n \times n$ нумеруются (в произвольном порядке) числами 1, 2, …, n^2. Найдите наименьшее натуральное число k со следующим свойством: для любой нумерации найдутся две соседние по стороне клетки, номера которых отличаются не более чем на k.

Н.Седракян

М2501. Пусть даны натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющие условию: для любых $1 \le i < j \le n$ число $j - i$ делится на $\text{НОД}\left(a_i, a_j\right)$. Докажите, что найдется натуральное N такое, что $N + i$ делится на a_i для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

П.Кожевников, А.Толпыго

Ф2505. На рисунке 1 изображена висящая неподвижно однородная цепочка длиной $L = 3$ м. Один ее конец закреплен на стене,

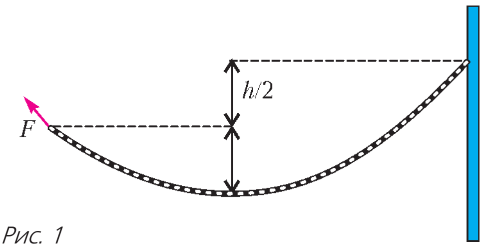


Рис. 1

а на другой конец действует сила $F = 50$ Н. Нижняя точка цепочки находится ниже места крепления к стене на $h = 1$ м и ниже второго конца цепочки на $h/2 = 0,5$ м. Какова масса цепочки? С какой силой натянута цепочка в самой нижней точке?

Ц.Почкин

Ф2506. По поверхности стоящего неподвижно небольшого школьного глобуса радиусом $R = 9$ см бежит маленький таракан с постоянной по величине скоростью $v = 3$ см/с. По отношению к разметке глобуса его скорость все время направлена на северо-восток. Каково по величине ускорение таракана в тот момент, когда он наступает на кружочек, соответствующий положению Санкт-Петербурга ($\varphi = 60°$ северной широты)?

Т.Глобусов

Ф2507. На три одинаковых сердечника намотали одинаковое количество витков провода $4N$, которые по-разному распределены между первичными и вторичными

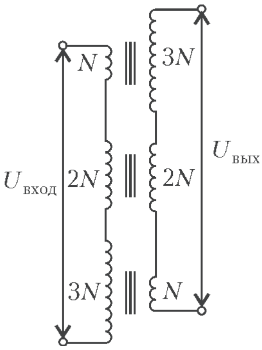


Рис. 2

обмотками. Все три трансформатора соединили в цепь, показанную на рисунке 2. Никакой нагрузки во вторичной цепи нет. Каким по модулю может быть отношение выходного напряжения $U_{вых}$ к входному напряжению $U_{вход}$?

С.Варламов

Ф2508. На рисунке 3 показано начальное положение двух одинаковых постоянных

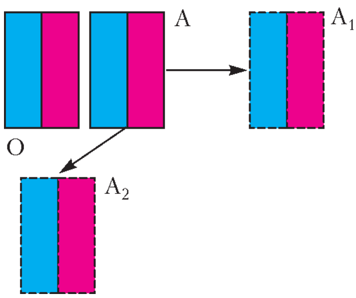


Рис. 3

магнитов O и A, а также различные конечные положения A_1 и A_2 магнита A. Магнит O закреплен неподвижно. Магнит A медленно переместили в положение A_1, затем его вернули на прежнее место и медленно переместили в положение A_2. При каком перемещении магнита A: в положение A_1 или A_2 работа внешних сил больше? Величины перемещений одинаковы и значительно больше размеров магнитов. Красный цвет соответствует южному полюсу магнита, а синий цвет – северному полюсу.

В.Магнитов

Решения задач М2486–М2489, Ф2493–Ф2496

М2486. *Аналитик сделал прогноз изменения курса доллара на каждый из 12 ближайших месяцев: на сколько процентов (число, большее 0% и меньшее 100%) изменится курс за октябрь, на сколько – за ноябрь, …, на сколько – за сентябрь. Оказалось, что про каждый месяц он верно предсказал, на сколько процентов изменится курс, но ошибся с направлением изменения (т.е. если он предсказывал, что курс увеличится на x%, то курс падал на x%, и наоборот). При этом через 12 месяцев курс совпал с прогнозом. В какую сторону в итоге изменился курс?*

Ответ: уменьшился.

Будем вместо процентов использовать доли: если курс увеличился на x $(0 < |x| < 1)$, то он стал равным $1 + x$. При этом x может быть отрицательным (например, если курс возрос на 20%, то $x = 0{,}2$, а если уменьшился на 20%, то $x = -0{,}2$). Пусть аналитик предсказывал ежемесячные изменения курса x, y, …, z. Тогда общее изменение курса, исходя из прогноза, равно $(1+x)(1+y)\ldots(1+z)$. По условию задачи, реальное изменение курса равно $(1-x)(1-y)\ldots(1-z)$, причем

$$(1+x)(1+y)\ldots(1+z) = (1-x)(1-y)\ldots(1-z).$$

Отсюда

$$\left((1+x)(1+y)\ldots(1+z)\right)^2 =$$
$$=(1+x)(1+y)\ldots(1+z)(1-x)(1-y)\ldots(1-z) =$$
$$=\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)\ldots\left(1-z^2\right) < 1,$$

откуда $(1+x)(1+y)\ldots(1+z) < 1$, т.е. курс уменьшился.

А.Заславский

М2487. *Вписанная окружность касается сторон AB, BC и AC треугольника ABC в точках N, K и M соответственно (рис.1). Прямые MN и MK пересекают биссектрису внешнего угла B в точках R*

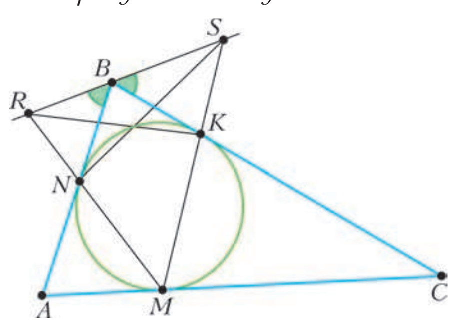


Рис. 1

и S соответственно. Докажите, что прямые RK и SN пересекаются на вписанной окружности треугольника ABC.

Пусть X – точка пересечения RK и SN (рис.2). Прямые NK и RS параллельны, поскольку перпендикулярны биссектрисе BI. Угол NMK равен углу NKB между касательной и хордой, а последний – углу SBK по доказанной параллельности. Следовательно, четырехугольник $RBKM$ – вписанный. Поэтому $\angle RKM = \angle RBM$. Аналогично, $\angle SNM = \angle SBM$. Но углы RBM и SBM дают в сумме 180°, значит, и углы XKM и XNM – тоже. Следовательно, четырехугольник $NMKX$ – вписанный, что и требовалось.

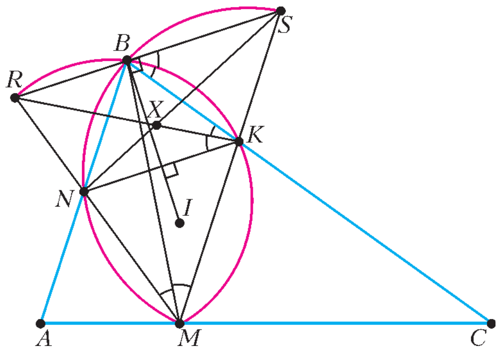


Рис. 2

Замечание. Утверждение верно не только для биссектрисы внешнего угла, но и для любой прямой, проходящей через точку B. Дело в том, что для любой точки X вписанной окружности точка пересечения прямых MK и NX, точка пересечения MN и KX и точка B пересечения касательных в точках K и N лежат на одной прямой (это частный случай теоремы Паскаля для вписанной шестизвенной замкнутой ломаной $MKKXNN$).

М.Евдокимов

М2488. *Город представляет из себя клетчатый прямоугольник, в каждой клетке стоит пятиэтажный дом. Закон о реновации позволяет выбрать две соседние по стороне клетки, в которых стоят дома, и снести тот дом, где меньше этажей (либо столько же). При этом над вторым домом надстраивается столько этажей, сколько было в снесенном доме. Какое наименьшее число домов можно оставить в городе, пользуясь законом о реновации, если город имеет размеры:*
а) 20×20 клеток; б) 50×90 клеток?

Ответ: а) 25; б) 282.

Оценка. Рассмотрим клетку, которая осталась непустой. Изначально в ней был один дом. Каждым поглощением количество исходных домов в ней увеличивалось максимум вдвое. Ею было сделано не более четырех поглощений, поскольку у нее не более четырех соседей. Следовательно, в одной клетке могло собраться не более 16 исходных домов. Поэтому количество оставшихся домов не меньше площади прямоугольника, деленной на 16.

Пример. а) Квадрат 20×20 разобьем на 25 квадратов 4×4, в каждом из которых можно оставить по одному дому. Действительно, в квадрате 2×2 легко собрать все дома в одной клетке. Соберем их сначала в отмеченных клетках (рис.1). Аналогично, дома в отмеченных четырех клетках соберем в один дом.

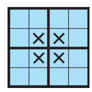


Рис. 1

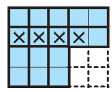


Рис. 2

б) Поскольку 4500 при делении на 16 дает остаток 4, то достаточно разбить прямоугольник 50×90 на 16-клеточные фигуры и одну четырехклеточную, в каждой из которых можно собрать все дома. Кроме квадрата 4×4, есть и другие подходящие 16-клеточные фигуры. Одна из них и порядок сбора домов в ней изображены на рисунке 2. Из подходящих 16-клеточных фигур можно сложить прямоугольник 8×10 (рис.3).

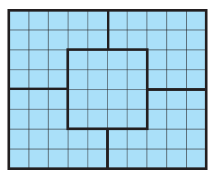


Рис. 3

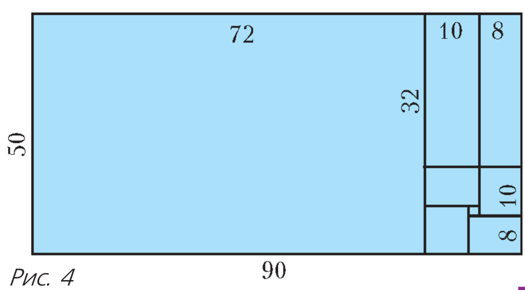


Рис. 4

Прямоугольник 50×90 разобьем на четыре прямоугольника: 50×72, 32×10, 32×8 и 18×18 (рис.4). Первые два из них разбиваются на прямоугольники 8×10, третий – на квадраты 4×4, а последний – на четыре прямоугольника 8×10 и квадрат 2×2 (в центре). Что и требовалось.

З.Ашурбеков (ученик 11 кл.)

М2489. *Покажите, что для любой последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, состоящей из единиц и минус единиц, найдутся такие n и k, что*

$$\left|a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_k + a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{k+1} + \ldots + a_n \cdot a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{n+k}\right| = 2017.$$

Достаточно найти сумму указанного вида, чей модуль не меньше 2017: так как все слагаемые по модулю равны 1, в ней есть подсумма нужного вида с модулем ровно 2017 (эту подсумму можно отыскивать, отбрасывая одно за другим последние слагаемые, при каждом таком действии сумма изменяется на 1).

Заметим, что если $a_i = a_j$ $(i < j)$, то $a_i a_{i+1} \ldots a_{j-1} = a_{i+1} a_{i+2} \ldots a_j$.

Рассмотрим все наборы вида $(a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+4031})$. Поскольку их бесконечное число, среди них найдутся два одинаковых. Пусть это наборы, начинающиеся с a_i и a_j $(i < j)$. Тогда

$$a_i a_{i+1} \ldots a_{j-1} = a_{i+1} a_{i+2} \ldots a_j = \ldots = a_{i+4032} a_{i+4033} \ldots a_{j+4031}.$$

Разберем случай, когда все эти 4033 произведения равны 1 (случай, когда все эти суммы равны – 1, разбирается аналогично).

Положим $k = j - i - 1$, $S_n = a_0 a_1 \ldots a_k + a_1 a_2 \ldots a_{k+1} + \ldots + a_n a_{n+1} \ldots a_{n+k}$. Если $S_{i-1} \le -2017$, то S_{i-1} – искомая сумма. В противном случае $S_{i+4032} \ge 2017$ и S_{i+4032} – искомая сумма.

И.Митрофанов

Ф2493.[1] *На протяженной гладкой горизонтальной поверхности вдоль вертикальной оси скачет небольшой абсолютно упругий гладкий шарик. Максимальная скорость его равна v. На той же горизонтальной поверхности на расстоянии от места ударов этого шарика, равном максимальной высоте его полета, расположен второй такой же шарик. Ему сообщают горизонтальную скорость v в направлении первого. Шарики столкнулись так, что в момент соударения линия, проходящая через их центры, была горизонтальна и совпадала по направлению со скоростью второго шарика до удара.*

1) Найдите максимальную высоту полета первого шарика.

2) Найдите период движения первого шарика до удара со вторым.

3) На какой высоте находился первый шарик в момент старта второго?

4) Найдите скорость первого шарика сразу после удара со вторым.

5) На каком расстоянии от места удара можно поставить вертикальную стенку так, чтобы после отражения от нее первый шарик вновь ударился о второй? Временем ударов можно пренебречь.

1) Согласно закону сохранения энергии,

$$mgH = \frac{mv^2}{2}.$$

Отсюда находим максимальную высоту полета первого шарика над поверхностью:

$$H = \frac{v^2}{2g}.$$

2) Выберем систему отсчета, связанную с местом удара. Пусть в момент удара первого шарика о горизонтальную поверхность время равно нулю. Запишем закон равноускоренного движения шарика вдоль вертикальной оси:

$$0 = vT - \frac{gT^2}{2}, \text{ откуда } T = \frac{2v}{g}$$

– это период движения первого шарика до удара со вторым.

3) Так как второй шарик движется равномерно, то его время движения до удара

$$t = \frac{H}{v} = \frac{v}{2g} < \frac{T}{2} = \frac{v}{g}.$$

[1] Автор решений задач Ф2493–Ф2496 – А.Сеитов.

Значит, в момент старта второго шарика первый шарик движется вниз. Учитывая симметричность равнопеременного движения, удобнее рассмотреть движение первого шарика от поверхности до искомой высоты. Запишем для этого полета закон равнопеременного движения шарика вдоль вертикальной оси и найдем искомую высоту первого шарика:

$$h = vt - \frac{gt^2}{2} = \frac{v^2}{2g} - \frac{gv^2}{2\cdot 4g^2} = \frac{3v^2}{8g} = \frac{3}{4}H .$$

4) Из условия следует, что удар шариков совпал по времени с моментом столкновения первого шарика с поверхностью. Поскольку удары абсолютно упругие и шарики одинаковые по массе, то после столкновения второй шарик остановится, а первый будет иметь и горизонтальную и вертикальную (одинаковые по величине) составляющие импульса (рис.1). Сразу после отскока от поверхности и одновременного столкновения со вторым шариком первый шарик получил импульс

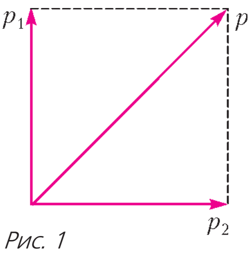


Рис. 1

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 ,$$

откуда следует

$$mu = \sqrt{(mv)^2 + (mv)^2} .$$

Вектор скорости шарика $\vec{u}$ имеет величину $u = v\sqrt{2}$ и направлен под углом 45° к горизонту.

5) Чтобы вернуться после отражения от стенки в первоначальную точку встречи, где покоится второй шарик, первый в обратном направлении должен двигаться по той же траектории – по повторяющимся параболам (рис.2). Значит, при ударе о стенку скорость первого шарика должна измениться на противоположно направленную. Это возможно в верхней точке параболы, где скорость шарика горизонтальна, а также в углу между стенкой и горизонтальной поверхностью.

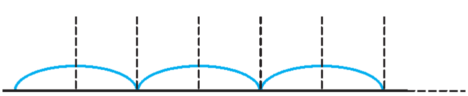
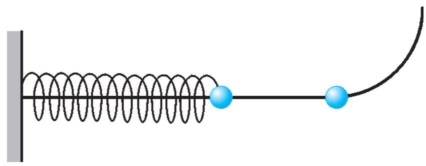


Рис. 2

Для ответа на вопрос определим дальность полета шарика. Так как вдоль горизонтальной оси его движение равномерное, то $L = vT$. Тогда возможные положения стенки, при которых шарики вновь столкнутся, определяются следующей формулой:

$$x = k\frac{L}{2} = k\frac{vT}{2} = k\frac{v^2}{g}, \text{ где } k = 1, 2, 3, 4\ldots$$

Ф2494. *В системе, изображенной на рисунке, трения нет, пружина упругая и*



невесомая, небольшие шары одинаковые и упругие. Правая часть стержня плавно переходит в дугу окружности радиусом R, расположенную в вертикальной плоскости, а в месте перехода находится правый шар. Расстояние между шарами равно R. Если, не снимая шаров и не удерживая их внешними силами, систему расположить так, что прямолинейная часть стержня примет вертикальное положение, то в состоянии равновесия пружина сожмется на величину R. Из положения, показанного на рисунке, правый шар отклоняют так, что его угловое смещение вдоль дуги невелико и равно β ($\beta \ll 1$).

1) Найдите время, в течение которого правый шар первый раз вернется в указанное на рисунке начальное положение.

2) Найдите модуль скорости правого шара на горизонтальном участке.

3) Найдите максимальную величину сжатия пружины после удара шаров.

4) Найдите время движения левого шара между первыми двумя ударами шаров.

5) Найдите период колебаний этой системы.

1) Если рассмотреть силы, действующие

на шар на дуге окружности, то можно обнаружить их аналогию с силами, действующими на математический маятник с точкой крепления в центре окружности. Значит, движение этого шара описывается законами математического маятника. Тогда время спуска составляет четверть периода колебаний маятника:

$$t_1 = \frac{1}{4}\cdot 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}} .$$

2) Согласно закону сохранения энергии,

$$mgh = \frac{mv^2}{2} ,$$

откуда

$$v = \sqrt{2gh} .$$

Для определения высоты подъема шара запишем определение косинуса острого угла:

$$\cos\beta = \frac{R-h}{R} , \text{ и } h = R(1-\cos\beta) .$$

Тогда

$$v = \sqrt{2gR(1-\cos\beta)} \approx \beta\sqrt{gR} .$$

3) Рассмотрим равновесие системы в вертикальном положении. Условие равновесия запишется так:

$$2mg - F_{\text{упр}} = 0 , \text{ или } 2mg = kR ,$$

откуда

$$\frac{m}{k} = \frac{R}{2g} .$$

В соответствии с законом сохранения энергии,

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{kx_m^2}{2} , \text{ или } \frac{m}{k} = \frac{x_m^2}{v^2} .$$

Теперь можно найти максимальную величину сжатия пружины, т.е. амплитуду колебаний:

$$x_m = v\sqrt{\frac{R}{2g}} .$$

4) Время движения левого шара равно половине периода колебаний пружинного маятника:

$$t_2 = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \pi\sqrt{\frac{R}{2g}} .$$

5) Период колебаний системы складывается из трех промежутков времени:

$$T = 2t_1 + \frac{2R}{v} + t_2 = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{2R}{v} .$$

Ф2495. *В горизонтальной трубке длиной L постоянного сечения S, запаянной с одного конца, заперт жидкостью плотностью ρ столб воздуха при абсолютной*

температуре T_0 (см. рисунок). Если воздух в трубке нагреть до абсолютной температуры T, то вся жидкость вытечет из трубки. Трубку поворачивают на $90°$ открытым концом вверх, жидкость при этом вниз не протекает и температура поддерживается постоянной. Атмосферное давление $p = \rho g H_0$, где $H_0 > L$.

1) Найдите длину воздушного столба в горизонтальной трубке.

2) Сколько молекул газа находится в трубке?

3) Найдите давление воздуха в трубке в вертикальном положении.

4) Найдите длину воздушного столба в вертикальной трубке.

5) Найдите максимальную длину столба жидкости, которую можно получить после добавления жидкости в вертикальную трубку.

Капиллярные эффекты не учитывать.

1) Давление в горизонтальной трубке постоянно и равно атмосферному:

$$\frac{L_1S}{T_0} = \frac{LS}{T} .$$

Отсюда находим длину воздушного столба в горизонтальной трубке:

$$L_1 = L\frac{T_0}{T} .$$

2) Поскольку

$$p = nkT_0 = \frac{N}{L_1S}kT_0 ,$$

получаем

$$N = \frac{pL_1S}{kT_0} .$$

3) Длина столба жидкости в трубке равна $h = L - L_1$. Тогда давление воздуха в трубке будет

$$p_2 = p + \rho g h = p + \rho g (L - L_1).$$

4) Так как процесс изотермический, то

$$pL_1 S = p_2 L_3 S,$$

откуда

$$L_3 = L_1 \frac{p}{p_2}.$$

5) Для максимальной длины H столба жидкости в вертикальной трубке имеем:

$$pL_1 S = (p + \rho g H)(L - H) S,$$

$$pL_1 = pL - pH + \rho g H L - \rho g H^2,$$

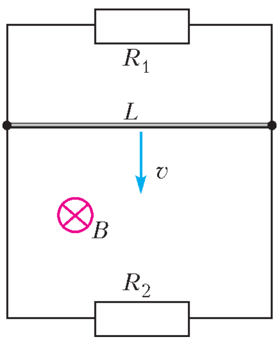
$$\rho g H^2 + (\rho g H_0 - \rho g L) H + \rho g H_0 (L_1 - L) = 0,$$

$$H^2 + (H_0 - L) H + H_0 (L_1 - L) = 0.$$

Решая полученное квадратное уравнение, находим его положительный корень:

$$H = 0{,}5\left(\sqrt{(H_0 + L)^2 - 4L_1 H_0} - (H_0 - L)\right).$$

Ф2496. *В однородном магнитном поле с индукцией, равной B и направленной от нас (см. рисунок), покоится вертикальный контур с двумя резисторами сопротивлениями R_1 и R_2. Вертикальные стороны контура соединены горизонтальной перемычкой длиной L малого сопротивления, способной скользить по сторонам контура без трения, сохраняя с ними хороший электрический контакт. Перемычку отпускают, и она через некоторое время движется равномерно вниз. За время T равномерного движения в первом резисторе выделяется количество теплоты Q_1.*



1) Укажите направления токов, протекающих через первый и второй резисторы при движении перемычки.
2) Какое количество теплоты Q_2 выделилось за время T во втором резисторе?
3) Найдите установившуюся скорость движения перемычки.
4) Найдите силу тока в перемычке при ее равномерном падении.
5) Найдите массу перемычки.

1) По правилу левой руки токи в обоих резисторах направлены влево.
2) Так как резисторы соединены параллельно, напряжения на них одинаковые. Согласно закону Джоуля–Ленца (с учетом закона Ома),

$$Q_1 = I_1^2 R_1 t = \frac{U^2}{R_1} t.$$

Отношение количеств теплоты равно обратному отношению сопротивлений, поэтому

$$Q_2 = \frac{R_1}{R_2} Q_1.$$

3) Запишем второе правило Кирхгофа для контура, состоящего из резистора сопротивлением R_1 и перемычки, и найдем ток в нем:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = I_1 R_1, \text{ и } I_1 = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R_1} = \frac{BLv}{R_1}.$$

Соответственно, ток через второй резистор равен

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R_2} = \frac{BLv}{R_2}.$$

Подставим I_1 в формулу для Q_1 и получим искомую скорость перемычки:

$$Q_1 = \frac{(BLv)^2 T}{R_1}, \text{ и } v = \frac{1}{BL}\sqrt{\frac{Q_1 R_1}{T}}.$$

4) Ток в перемычке равен сумме токов, протекающих по резисторам:

$$I = \frac{BLv(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_2}\sqrt{\frac{Q_1}{R_1 T}}.$$

5) На перемычку действуют две силы: сила тяжести, направленная вниз, и сила Ампера, направленная вверх. Из равномерности движения следует

$$F_{\text{А}} = mg, \text{ или } BIL = mg.$$

Отсюда получаем

$$m = \frac{BIL}{g} = \frac{BL(R_1 + R_2)}{gR_2}\sqrt{\frac{Q_1}{R_1 T}}.$$

Задачи

1. Сколько существует четырехзначных чисел, у которых сумма первых трех цифр равна 3, а последних трех цифр равна 9?

Фольклор

2. Крестиком назовем фигуру из пяти клеток (см. рисунок). Покажите, как отметить на доске 7×7 семь клеток так, чтобы какой бы крестик ни был выбран, в него обязательно попадет закрашенная клетка.

О.Нечаева

3. Мама дала троим своим детям мелочь – монеты достоинствами в 2, 5 и 10 рублей. Двоим младшим она

дала поровну, а старшему – в три раза больше, чем каждому из младших, поручив ему сходить в магазин. Докажите, что либо двухрублевых монет среди выданной суммы не было, либо их было не меньше пяти.

Фольклор

4. По кругу стоят 300 ящиков, вмещающих по два шара. Известно, что имеется по 200 шаров красного, синего и зеленого цвета. Шары разложили так, что в любых двух соседних ящиках нет шаров одного цвета. Какое наибольшее количество ящиков может содержать шары разных цветов?

О.Нечаева

Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Эти задачи предлагались на Олимпиаде имени Е.Н.Анисимовой.

Многогранники из трубочек

Д.ПАНОВ, А.ПУШКАРЬ, Д.ЧЕБАСОВ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ РАССКАЗЫВАЕТСЯ, КАК трубочки и маленькие резиновые колечки можно использовать для геометрических построений.

Подходящие для наших экспериментов трубочки продаются в магазине «Веселая затея» и называются там палочками для воздушных шаров. Они достаточно длинные – 37,5 см и при этом одновременно жесткие и упругие. Маленькие резиновые колечки для плетения продаются практически в любом магазине.

Сначала мы взяли три трубочки и попарно скрепили их концы резиновыми колечками. Получился равносторонний треугольник (рис.1). А почему бы не собрать из тех же трубочек квадрат? И вот тут нас ожидал сюрприз. Мы соединили как надо четыре одинаковые трубочки, но это был не совсем квадрат или даже совсем не квадрат. Если положить эту конструкцию на стол, она мгновенно превращается в ромб, а если приподнять за вершину, то и вовсе перестает быть плоской фигурой (рис.2). Мы назвали этот квадрат или этот четырехугольник непослушным квадратом.

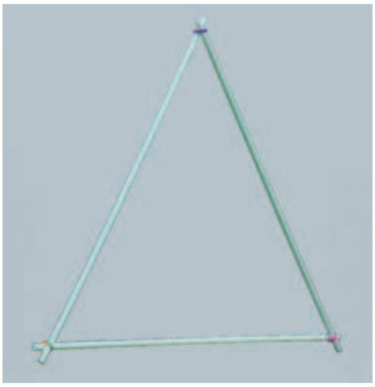


Рис. 1. Равносторонний треугольник

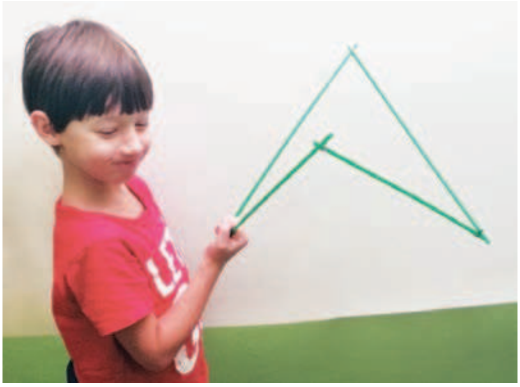


Рис. 2. Непослушный квадрат

Математики называют фигуры, которые легко меняют свою форму, *изгибаемыми*. Так вот, треугольник, состоящий из трех отрезков, жесткий – *неизгибаемый*, а квадрат и любой другой четырехугольник, и пятиугольник, и шестиугольник и т.д. – *изгибаемы*. Это хорошо известный факт, и мы смогли убедиться в нем с помощью трубочек и резиночек.

А почему бы теперь не собрать что-нибудь пространственное? И мы легко собрали из трубочек самый простой многогранник – треугольную пирамиду (рис.3).

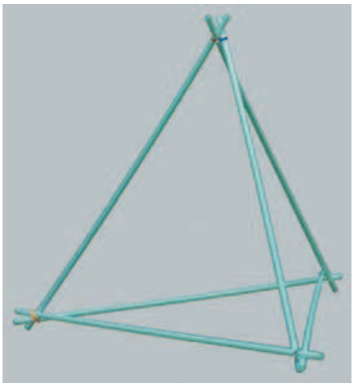


Рис. 3. Каркас пирамиды

Эта статья (с небольшими изменениями) перепечатана из журнала «Квантик» №3 за 2018 год. Там она называется «Брызгалки и многогранники».

Рис. 4. Настоящая пирамида

Правда, в математике многогранником называют другой объект – каркас вместе с гранями-многоугольниками (рис.4). При этом общие отрезки соседних граней называются ребрами – они соответствуют нашим трубочкам. А точки, где сходятся несколько ребер, называются вершинами – можно сказать, что это наши резиночки.

Вот еще два замечательных многогранника: из 12 трубочек собирается октаэдр, у него 8 граней, а из 30 трубочек – икосаэдр, у него 20 граней (рис.5).

У всех трех собранных многогранников все грани треугольные, и эти многогранники неизгибаемые.

Теперь попробуем собрать из трубочек куб. Посмотрите на рисунок 6: этот куб совсем не держит форму – он изгибаем, и изгибаем совершенно чудовищным образом. Мы назвали его «разболтанным» кубом.

А если без шуток, то тут возникает

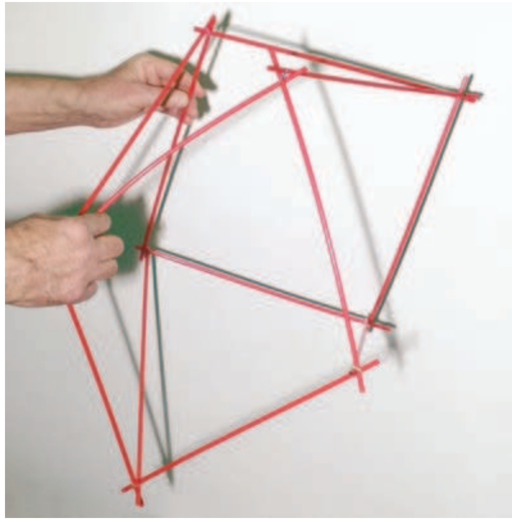


Рис. 6. «Разболтанный» куб

серьезный математический вопрос: какие многогранники, собранные из трубочек, изгибаемы, а какие нет? Конечно, трубочки и резиночки могут что-то подсказать, но различных многогранников слишком много, чтобы без строгого доказательства доверять этим подсказкам. У нас появились кое-какие предположения, но мы не были уверены в них.

К счастью, сейчас в интернете есть места, где на трудный математический вопрос можно получить квалифицированный ответ. Самое известное из них – блог профессиональных математиков MathOverflow. Там обсуждаются многие вопросы, связанные с современными математическими исследованиями, а также нерешенные математические проблемы, но совсем не приветствуются вопросы непрофессиональные или вопросы типа домашних заданий. Поэтому мы с опаской обратились туда. Мы спросили: если взять выпуклый многогранник, т.е. многогранник без впадин (рис.7), и убрать из него все грани, а оставить только ребра (тогда как раз получится что-то вроде нашего многогранника из

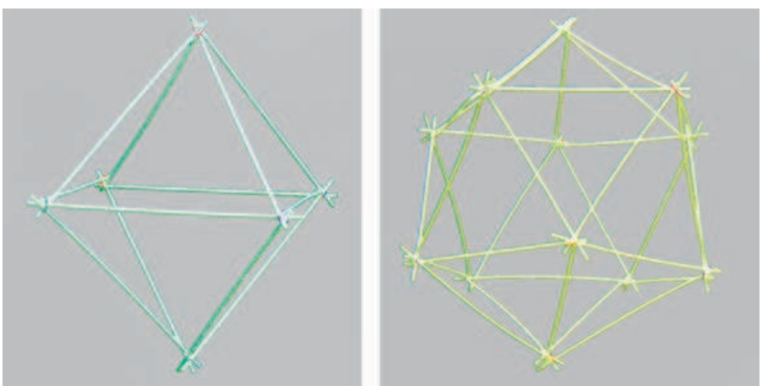


Рис. 5. Трубчатые октаэдр и икосаэдр

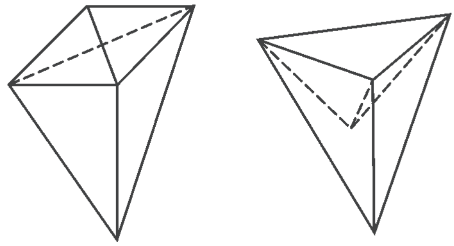


Рис. 7. Выпуклый многогранник – без впадин, а у невыпуклого впадины имеются

трубочек), то в каком случае он будет изгибаемым, в каком – нет?

Нас порадовало, что ответ был получен, и довольно быстро. Как мы и предполагали, если в многограннике есть хоть одна не треугольная грань, он будет изгибаемым, а если все грани треугольные, он – жесткий.

Обсуждение нашего вопроса на MathOverflow было очень интересным.[1] В самом начале было сказано, что из теоремы Коши следует неизгибаемость трубчатого выпуклого многогранника. После этого Дж.О'Рурк[2] привел пример многогранника с квадратной гранью, который, как он считал, неизгибаем (рис.8). Мы собрали этот многогранник из трубочек (рис.9),

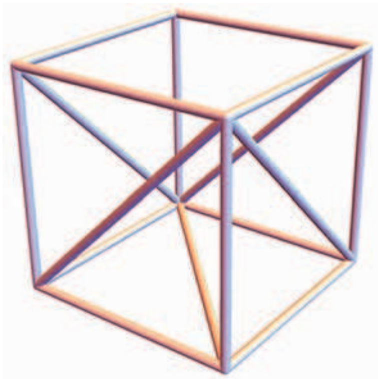


Рис. 8. Многогранник О'Рурка

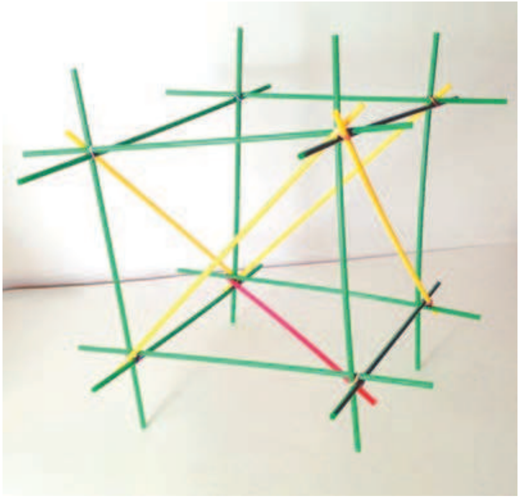


Рис. 9. Многогранник О'Рурка изгибаем

и оказалось, что О'Рурк ошибся – многогранник прекрасно изгибался.

А затем А.Петрунин привел простое доказательство изгибаемости трубчатого многогранника, у которого есть хотя бы одна не треугольная грань. В своем доказательстве он использовал теорему А.Д.Александрова. Вот так был получен ответ на наш вопрос.

Упомянутые здесь теоремы Коши и Александрова – самые знаменитые в теории многогранников. Их формулировки достаточно просты, а доказательства доступны старшим школьникам. Советуем почитать книжку Н.П.Долбилина «Жемчужины теории многогранников» (М.: МЦНМО, 2012), посвященную доказательствам этих теорем и рассчитанную на школьников.

Несколько слов в заключение. Важным классическим вопросом является вопрос о жесткости и изгибаемости настоящих многогранников – многогранников с гранями. Здесь есть красивая теория с большой историей и с неожиданными открытиями, частично доступная школьникам. Советуем прежде всего посмотреть в интернете популярную лекцию «Изгибаемые многогранники и кузнечные мехи», год назад прочитанную А.Гайфуллиным на XXVIII Математическом празднике в Москве.

[1] Если вы знаете английский, можете посмотреть это обсуждение, набрав в Google: «Rigidity of convex polyhedron in R3 with faces removed».

[2] В MathOverflow каждому участнику добавляют очки за популярные вопросы и популярные ответы. Среди 64000 участников О'Рурк по популярности идет на третьем месте, у него 80000 баллов.

Облако – туман в высоте.

Владимир Даль

...то, что мы видим, есть не свет, а бесчисленные частицы пыли или тумана, отражающие небольшую часть света...

Джон Гершель

Тяжесть не оказывает никакого влияния на распределение температуры в столбце воздуха.

Джеймс Максвелл

Все земное вещество – под влиянием свойственных воде частных сил, ее парообразного состояния, ее вездесущности в верхней части планеты – ею проникнуто и охвачено.

Владимир Вернадский

...метеорология снабжена приборами благодаря развитию экспериментальной физики... Иное дело теория метеорологии, она никогда не была удовлетворительно разработана никем из физиков.

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакома вам физика атмосферы?

Следующий наш шаг по пути к небесным – астрономическим – сферам проходит через воздушную оболочку Земли. Ее изучает метеорология, главное содержание которой и представляет физика атмосферы.

Стоит ли говорить о постоянном интересе человечества к атмосферным явлениям, о колоссальной зависимости от происходящих в атмосфере процессах? Грозы, ветра и ураганы – как уберечься от них? Засухи или нескончаемые дожди – как они отразятся на урожаях? Что происходит с климатом, угрожает ли нам глобальное потепление? Эти и множество иных вопросов жизненно важны и требуют от нас активных действий, осмыслить которые способна наука.

За несколько последних столетий были созданы точнейшие приборы, с помощью которых отслеживаются параметры атмосферы – давление, температура, влажность, количество осадков, скорость и направление ветра. Вслед за этим Землю усеяла обширная сеть синоптических станций, собирающая данные с огромных площадей. А сегодня действует целая «эскадра» кружащихся вокруг планеты метеорологических спутников. Получаемые ими сведения обрабатывают мощнейшие компьютеры и ежеминутно выдают нам прогноз погоды.

Легче нам от этого стало? Безусловно, да! Решены ли волнующие нас задачи? Разумеется, нет! Может быть, это удастся вам?

Вопросы и задачи

1. Почему дневной бриз дует с моря на сушу, а ночной, наоборот, дует с суши на море?

2. Отчего провода гудят на ветру?

3. Как объяснить, что климат островов гораздо умереннее и ровнее, чем климат больших материков?

4. Не влияют ли ветры и течения водных масс на вращение Земли, не тормозят ли его?

5. Почему в атмосфере Земли почти нет водорода, тогда как Солнце и большие планеты состоят в основном из него?

6. В горах барометр предсказывал бурю, но она так и не случилась. Отчего?

7. Обильный снегопад сопровождается заметным потеплением. Как это объяснить?

8. Иней на деревьях иногда исчезает без ветра и оттепели. С чем это связано?

9. Сосульки образуются при замерзании воды, стекающей с крыши при таянии снега. Но для того чтобы растаял снег, температура должна быть выше нуля, а чтобы замерзла вода – ниже нуля. Как это согласовать?

10. Почему обычно не бывает росы под густым деревом?

11. Отчего вечером роса бывает теплее, чем утром?

12. Может ли нам казаться теплее в сырую погоду, чем в сухую (при той же температуре воздуха)?

13. Почему капли дождя падают, а облака

– нет, хотя они тоже состоят из капелек воды?

14. Чистая вода прозрачна для света. Отчего же непрозрачен туман, представляющий собой мелкие капли воды?

15. Почему средняя равновесная температура поверхности Земли на 40 градусов выше той, которую она должна была бы иметь изза солнечной радиации?

16. Как объяснить, почему зимой редко бывают грозы?

17. Отчего молния чаще ударяет в землю в сырых местах, например у берегов рек и озер?

18. Почему особенно хорошо загорать высоко в горах?

19. В средних широтах после заката Солнца темнеет не сразу, а сначала наступают сумерки. С чем это связано?

Микроопыт

Посмотрите на небо ясной морозной ночью. Какие звезды мерцают более заметно: находящиеся высоко над горизонтом или низко?

Любопытно, что...

...понятие о климате как усреднении данных о погоде прошлого было введено еще учеными Древней Греции. Само слово «климат», означающее «наклон», свидетельствовало о том, что греки связывали климат местности со средним наклоном солнечных лучей.

...ввести метеорологию в ранг точных наук пытался ученик Галилея Торричелли. Им, в том числе, была создана первая, правильная в общих чертах, теория образования ветров как следствия циркуляции атмосферных масс.

...английскому физику Джону Тиндалю, изучавшему рассеяние солнечного света атмосферой, удалось объяснить голубой цвет неба. Большое значение для метеорологии имели его опыты с тепловыми лучами: сухой воздух поглощал их слабо, а водяной пар, напротив, сильно.

...на больших высотах под действием ультрафиолетового излучения Солнца молекулы водяного пара распадаются на водород и кислород. Легкий водород улетучивается в космос, что приводит к убыли воды на Земле и к возрастанию содержания кислорода в атмосфере.

...вся вода земного шара по массе превосходит атмосферный воздух примерно в 270 раз (подумайте, как бы вы могли провести такой расчет).

...действие кориолисовых сил проявляется в движении гигантских атмосферных вихрей. Так, если смотреть из космоса, в северном полушарии циклоны вращаются против часовой стрелки, в южном – по часовой. У антициклонов эти направления меняются на противоположные.

...грамм воды, налитой на дно стакана, образует поверхность в несколько квадратных сантиметров. Тот же грамм воды в виде дождевых капель обладает в десятки раз большей поверхностью. А у одного грамма капелек тумана она разрастается до нескольких сот квадратных метров.

...удар молнии способен расщепить дерево, поскольку влага, находящаяся в его клетках, мгновенно закипает – и пар разрывает его ствол.

...на высоте примерно 50 километров воздух, вследствие ионизации космическими лучами, становится хорошим проводником. Между этим слоем атмосферы и поверхностью Земли, как между обкладками гигантского конденсатора, имеется разность потенциалов порядка 400000 вольт. Земля при этом обладает отрицательным зарядом более 500000 кулонов.

...в последнее время интенсивно развивается палеометеорология, позволяющая воссоздать климат Земли за тысячи лет назад. По ее данным, оказывается, можно предсказать, где находятся залежи полезных ископаемых.

Что читать в «Кванте» о физике атмосферы

(публикации последних лет)

1. «Вихри враждебные...» – 2013, №1, с.42;
2. «Сиреневый туман...» – 2014, №3, с.36;
3. «Что может электростатика» – 2015, Приложение №1, с.216;
4. «А что это холод на землю упал...» – 2015, №3, с.28;
5. «От точки росы до точки кипения» – 2016, Приложение №4, с.98;
6. «Июльский град» – 2017, №3, с.25;
7. «День-сумерки-ночь...» – 2017, №5, с.2;
8. «Физика града» – 2017, №5, с.34.

Материал подготовил А. Леонович

324x208

360x251

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Мы продолжаем конкурс по решению математических задач. Они рассчитаны в первую очередь на учащихся 7–9 классов, но мы будем рады участию школьников всех возрастов. Конкурс проводится совместно с журналом «Квантик».

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы. Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest

21. Выпишем по возрастанию все положительные несократимые дроби, меньшие 1, знаменатели которых меняются от 2 до 2018. Чему равно среднее арифметическое этих дробей?

Г.Гальперин

22. Дан произвольный остроугольный треугольник.

а) Покажите, как разрезать его на шесть треугольников с одинаковыми радиусами описанных окружностей.

б) Докажите, что есть несколько способов это сделать.

Е.Бакаев

23. *Треугольным* называют число, равное сумме всех натуральных чисел от 1 до какого-то натурального числа включительно. Вот первые несколько треугольных чисел: 1, $1+2=3$, $1+2+3=6$, $1+2+$ $+3+4=10$ и т.д. Петя, исследуя их свойства, сформулировал две теоремы:

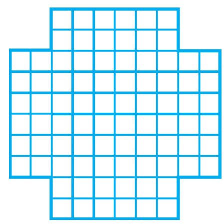
I. Если сумма двух треугольных чисел является степенью двойки, то и их разность является степенью двойки.

II. Если разность двух треугольных чисел является степенью двойки, то и их сумма является степенью двойки.

Верна ли хотя бы одна из этих теорем? А может быть, верны обе?

И.Акулич

24. Поле для игры «Морской бой» представляет собой квадрат 10×10, во всех углах которого вырезаны квадраты 2×2. Какое наибольшее количество трехпалубных кораблей (т.е. прямоугольников из трех клеток) можно разместить на данном поле так, чтобы никакие два корабля не соприкасались даже углами? Прямоугольники разрешается размещать только по линиям сетки.



С.Костин

Вниманию наших читателей!

Начиная с 2018 года математическое отделение ВЗМШ открывает прием **пятиклассников**. Обучение будет проходить на электронной платформе.

Дополняем список задач вступительной работы задачами **для учеников 5 класса**.

13. (5) Эми, Бен и Крис выстроились в ряд. Если известно, что Эми стоит слева от Бена, а Крис справа от Эми, какое из следующих утверждений точно правдиво?

1. Бен крайний слева. 2. Крис крайний справа. 3. Эми стоит в середине. 4. Эми крайняя слева. 5. Ни одно из утверждений выше не является верным.

14. (5) Мистер и миссис Смит поженились 18 лет назад. Тогда мистер Смит был в три раза старше своей жены. Но сегодня он всего в два раза старше ее. Сколько лет было миссис Смит, когда она выходила замуж?

15. (5) Альберт Эйнштейн экспериментирует с двумя необычными часами. У обоих часов 24-часовой циферблат. Одни часы идут вдвое быстрее нормальной скорости. Другие часы идут с нормальной скоростью, но назад. При этом и те, и другие показывают верное время в 13.00. В какое еще время показания этих часов совпадают?

Где ошибка?

(Алгебра и начала анализа)

В предлагаемых текстах могут быть ошибки (как в условиях задач, так и в ответах и решениях). Попытайтесь их найти там, где они есть.

Задача 1. *Найдите значение выражения:*

а) $\sqrt{74-a^4}-\sqrt{10-a^4}$, *если* $\sqrt{74-a^4}+\sqrt{10-a^4}=4$;

б) $\sqrt{24-t^2}+\sqrt{8-t^2}$, *если* $\sqrt{24-t^2}-\sqrt{8-t^2}=2$.

Ответ: а) 16; б) 8.

Решение. а) Используя формулу $a-b=\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$, получим

$$\sqrt{74-a^4}-\sqrt{10-a^4}=\frac{74-10}{4}=16.$$

б) Аналогично, так как $a+b=\dfrac{a^2-b^2}{a-b}$, то

$$\sqrt{24-t^2}+\sqrt{8-t^2}=\frac{24-8}{2}=8.$$

Простые задачи, изящные решения. Но в пункте а) странный ответ: разность корней больше их суммы. Да и в пункте б) ответ сомнителен: $24-t^2\le 24$ и $8-t^2\le 8$, следовательно,

$$\sqrt{24-t^2}+\sqrt{8-t^2}\le\sqrt{24}+\sqrt{8}<5+3=8.$$

В чем же дело?

Задача 2. *У Миши было квадратное уравнение с одной переменной x. Он заменил в нем x на* $\dfrac{3x+1}{2x+1}$ *и получил другое уравнение. Могло ли оказаться так, что первое уравнение имеет хотя бы один корень, а второе уравнение корней не имеет?*

Ответ: нет, не могло.

Решение. Пусть исходное уравнение имело вид $x^2+px+q=0$ (или сводилось к нему делением на первый коэффициент, что не изменяет корней уравнения). Так как оно имеет корни, то $D=p^2-4q\ge 0$. После замены x на $\dfrac{3x+1}{2x+1}$ получим уравнение

$$\left(\frac{3x+1}{2x+1}\right)^2+p\frac{3x+1}{2x+1}+q=0.$$

Умножив обе части уравнения на общий знаменатель, получим уравнение

$$(3x+1)^2+p(3x+1)(2x+1)+q(2x+1)^2=0, \qquad (*)$$

которое после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых приводится к виду

$$(6p+4q+9)x^2+(5p+4q+6)x+(p+q+1)=0.$$

Его дискриминант равен

$$(5p+4q+6)^2-4(6p+4q+9)(p+q+1)=p^2-4q\ge 0,$$

поэтому оно имеет решения.

Сразу бросается в глаза типичная ошибка: умножая обе части уравнения на общий знаменатель, мы получили следствие, поэтому требуется еще проверить, что решением уравнения (*) является не $x=-0{,}5$, которое окажется посторонним. Для этого надо было подставить $x=-0{,}5$ в уравнение (*) и убедиться, что равенство не будет верным. Но эта ошибка на ответ не повлияла, т.е. он верный?

Задача 3. *Решите уравнение*

$$\left(1+x+\ldots+x^9\right)\left(1+x+\ldots+x^{11}\right)=\left(1+x+\ldots+x^{10}\right)^2.$$

Ответ: 0.

Решение. По формуле для вычисления суммы первых n членов геометрической прогрессии получим

$$\frac{x^{10}-1}{x-1}\cdot\frac{x^{12}-1}{x-1}=\frac{\left(x^{11}-1\right)^2}{(x-1)^2}.$$

Избавившись от знаменателя и раскрыв скобки, получим, что $x^{22}-x^{12}-x^0+1=x^{22}-2x^{11}+1$, т.е. $x^{10}(x-1)^2=0$. Корни этого уравнения: $x=0$ или $x=1$, но второй корень – посторонний, так как при $x=1$ знаменатели дробей обращаются в ноль.

Ну здесь, кажется, все в порядке: в отличие от предыдущей задачи, обращение знаменателя в ноль учтено. Или все-таки есть ошибки?

Задача 4. *Решите уравнение*

$$\sqrt{x^2-1}=(x+5)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Ответ: -1.

Решение. Перепишем данное уравнение в виде

$$\sqrt{(x-1)(x+1)} = (x+5)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Тогда $x = -1$ – корень уравнения. Кроме того,

$$\sqrt{x-1} = (x+5)\sqrt{\frac{1}{x-1}} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x-1}\right)^2 = x+5, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Полученная система решений не имеет.

А число –2 не будет корнем данного уравнения?

Задача 5. *Решите уравнение*

$$\log_{x^3+x}\left(x^2-4\right) = \log_{4x^2-6}\left(x^2-4\right).$$

Ответ: 3.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-4>0, \\ x^3+x>0, \\ x^3+x \neq 1, \\ x^3+x = 4x^2-6. \end{cases}$$

Уравнение $x^3-4x^2+x+6=0$ имеет три корня: –1, 2 и 3, из которых каждому неравенству системы удовлетворяет только $x = 3$.

Ничего не упущено?

Задача 6. *Решите уравнение*

$$\left(x^2+2x-5\right)^2 + 2\left(x^2+2x-5\right) - 5 = x.$$

Ответ: $\dfrac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$.

Решение. Пусть $f(x) = x^2+2x-5$, тогда уравнение имеет вид $f(f(x)) = x$ или, что то же самое, $f(x) = f^{-1}(x)$. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$, поэтому, если они пересекаются, то точка пересечения графиков лежит на этой прямой.

Таким образом, если число x_0 – корень данного уравнения, то оно является и корнем уравнения $f(x) = x$. Решая уравнение $x^2+2x-5 = x$, получим, что

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

Подозрительно простое решение, стоит его обдумать.

Задача 7. *Положительные числа x, y и z таковы, что* $\dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{z+x} + \dfrac{z}{x+y} = 1$. *Какие значения может принимать выражение* $\dfrac{x^2}{y+z} + \dfrac{y^2}{z+x} + \dfrac{z^2}{x+y}$?

Ответ: 0.

Решение. Заметим, что

$$\frac{x^2}{y+z} + x = \frac{x^2+xy+xz}{y+z} = \frac{x}{y+z}(x+y+z).$$

Аналогично,

$$\frac{y^2}{z+x} + y = \frac{y}{z+x}(x+y+z) \text{ и}$$

$$\frac{z^2}{x+y} + z = \frac{z}{x+y}(x+y+z).$$

Сложим почленно три полученных равенства, введя следующие обозначения:

$$A = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y},$$

$$B = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$$

и вынося за скобки в правой части выражение $x + y + z$. Тогда $B + (x+y+z) = (x+y+z)A$. По условию $A = 1$, поэтому $B = 0$.

Но полученный ответ не может быть верным, так как при положительных значениях x, y и z выполняется неравенство $\dfrac{x^2}{y+z} + \dfrac{y^2}{z+x} + \dfrac{z^2}{x+y} > 0$. Где ошибка?

Задача 8. *Решите уравнение*

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(-2) = \operatorname{arcctg}(-2).$$

Ответ: 0,75.

Решение. Так как

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arcctg}(-2),$$

то

$$x = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arcctg}(-2)\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2) + \operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}(-2)\right)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2)\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}(-2)\right)} =$$

$$= \frac{2 - 1/2}{1 - 2\cdot(-1/2)} = 0{,}75.$$

Попробуем проверить этот ответ. Не сходится даже приближенно. В чем дело?

Задача 9. *При каких значениях параметра а система уравнений*

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ x^2 + y^2 + a^2 = 2x + 2ay \end{cases}$$

имеет ровно одно решение?

Ответ: при $a = 0{,}25$.

Решение. Подставив значение $x^2 - 2x$ из первого уравнения во второе, получим $y^2 + a^2 - 2ay + y = 0$. Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно y, тогда $y^2 + y(1-2a) + a^2 = 0$. Для того чтобы решение было единственным, потребуем равенства нулю дискриминанта: $D = 1 - 4a + 4a^2 - 4a^2 = 1 - 4a = 0$, откуда $a = 0{,}25$.

Попробуйте и здесь проверить полученный ответ.

Задача 10. *Составьте уравнение касательной к графику функции* $y = \sin 2x$, *для которой существует параллельная ей касательная к графику функции* $y = x^3 + 2x$.

Ответ: $y = 2x$.

Решение. Запишем уравнение касательной в общем виде: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Тогда уравнение касательной к графику функции $y = \sin 2x$ имеет вид

$$y = \sin 2x_0 + 2\cos 2x_0 (x - x_0).$$

А уравнение касательной к графику функции $y = x^3 + 2x$ имеет вид

$$y = x_0^3 + 2x_0 + \left(3x_0^2 + 2\right)(x - x_0).$$

Для того чтобы касательные были параллельны, их угловые коэффициенты должны быть равными, т.е. должно выполняться такое условие: $2\cos 2x_0 = 3x_0^2 + 2$.

Решим полученное уравнение. Учитывая, что $2\cos 2x_0 \le 2$ и $3x_0^2 + 2 \ge 0$, получим, что равенство может выполняться только в случае, когда $2\cos 2x_0 = 3x_0^2 + 2 = 2$. Поэтому единственным решением уравнения является $x_0 = 0$. Подставим найденное значение $x_0 = 0$ в уравнение касательной $y = \sin 2x_0 + 2\cos 2x_0 (x - x_0)$. Получим искомое уравнение $y = 2x$.

Попробуйте нарисовать графики обеих функций и найденную касательную в одной системе координат.

Задача 11. *Докажите, что если функция* $f(x)$ *непрерывна на множестве* $\mathbb{R}$ *и не является постоянной ни на каком из промежутков, то функция* $f(f(x))$ *возрастает на* $\mathbb{R}$.

Решение. Если у функции $f(x)$ нет экстремумов, то она либо возрастает, либо убывает на $\mathbb{R}$. Поскольку композиция как двух возрастающих, так и двух убывающих функций есть функция возрастающая, то в этом случае $f(f(x))$ возрастает на $\mathbb{R}$.

Пусть теперь функция $f(x)$ имеет экстремумы в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда, в силу непрерывности, эта функция строго монотонна на $(-\infty; x_1]$, на каждом промежутке вида $[x_k; x_{k+1}]$ (где k принимает все натуральные значения от 1 до $n-1$) и на $[x_n; +\infty)$.

Действительно, если бы на каком-то из указанных промежутков это было не так, то «при переходе слева направо» через некоторую внутреннюю точку x_0 этого промежутка вид монотонности должен был измениться, например с убывания на возрастание (из условия следует, что промежутков, на которых функция постоянна, нет). Тогда, по определению, x_0 – еще одна точка экстремума (в нашем случае – точка минимума), но эта точка отлична от $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Таким образом, числовая прямая разбивается на промежутки, которые пересекаются только граничными точками, на каждом из которых функция $f(x)$ либо возрастает, либо убывает. Но композиция как двух возрастающих, так и двух убывающих функций есть функция возрастающая. Поэтому $f(f(x))$ – возрастающая функция, что и требовалось доказать.

А как быть, например, с функцией $f(x) = x^2$?

Статья написана по материалам Творческих конкурсов учителей математики, Московских математических регат и пособий для подготовки к ЕГЭ.

Публикацию подготовил А.Блинков

Почему ЛЭП гудят на частоте 100 Гц?

С.ВАРЛАМОВ

Разные линии электропередач – ЛЭП – отличаются по напряжению, под которым находятся их провода по отношению к земле. Высоковольтные ЛЭП с напряжением больше 100 кВ создают звук, похожий на громкий шелест или потрескивание. Он возникает при коронном разряде воздуха вблизи мест крепления проводов к опорам через изоляторы. Не эти звуки нас интересуют. В нашей стране огромная протяженность ЛЭП между деревнями и небольшими поселками, они передают электроэнергию при напряжениях порядка 10 кВ. А к домам в таких поселках ЛЭП несут энергию при напряжениях 220–380 В. Вот к их-то гудению чаще всего и прислушиваются жители этих поселений и городские отдыхающие.

Причин, которые могут вызвать звук, несколько. Начнем с механической. Действительно, натянутый провод представляет собой струну или стержень, и на проводе могут возникать резонансные стоячие волны. В качестве примера обсудим такую задачу:

Расстояние L между опорами линии электропередач равно 50 м. Гибкие, но нерастяжимые провода натянуты так, что вблизи опор они составляют с горизонтом одинаковые малые углы $\alpha = 10°$. Какова самая низкая частота поперечных колебаний таких проводов при ветре?

Если масса участка провода между двумя опорами ЛЭП равна M, то линейная плотность провода составляет M/L. Угол $\alpha = 10° \approx 0{,}17$ рад значительно меньше 1, поэтому его косинус, равный 0,98, примерно равен 1. Это означает, что горизонтальная проекция силы $\vec{F}$ натяжения провода вблизи опоры, равная силе натяжения провода f в самой нижней точке между двумя опорами, мало отличается от величины самой этой силы F. Равновесное положение провода в отсутствие ветра соответствует силе натяжения провода вблизи опор, равной $F = Mg/(2\sin\alpha)$. Скорость распространения волн по натянутому проводу определяется соотношением $v = \sqrt{FL/M}$ (при этом изгибная жесткость провода не учитывается). Минимальная частота колебаний (стоячей волны), на которой будет «гудеть» провод, соответствует тому, что на длине провода между опорами укладывается половина длины волны: $L = \lambda/2$. Эта частота равна

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2L} = \sqrt{\frac{g}{8L\sin\alpha}} \approx 0{,}38 \text{ Гц}.$$

Получается, что наш «механизм» не объясняет гудение проводов, которое слышно на частоте 100 Гц.

Может быть, причина не в поперечных, а в продольных колебаниях? Посмотрим. Скорость продольных волн в железе 5,85 км/с, а в алюминии 6,26 км/с, поэтому в достаточно жестких на изгиб проводах ЛЭП, имеющих стальной сердечник и накрученные на него алюминиевые провода, скорость продольных волн порядка $v = 6$ км/с. Если расстояние между опорами ЛЭП составляет $L = 50$ м, то резонансная частота колебаний провода равна

$$f = \frac{v}{2L} = 60 \text{ Гц}.$$

Это тоже не объясняет частоту гудения на 100 Гц. И, кроме того, не очень понятен механизм возбуждения продольных волн.

Теперь рассмотрим магнитную причину возможного гудения проводов. Каждый провод ЛЭП, по которому течет ток, находится во внешнем магнитном поле Земли, которое в наших (российских) широтах имеет вертикальную составляющую индукции магнитного поля, направленную вниз, т.е. перпендикулярно горизонтальным (почти) проводам ЛЭП. Величина этой вертикальной составляющей порядка $B = 5 \cdot 10^{-5}$ Тл. Если в проводе течет переменный ток с частотой 50 Гц, то сила Ампера толкает провод в горизонтальном направлении, перпендикулярном проводу. Если, например, опоры ЛЭП – это деревянные столбы, то провода крепятся к опоре через изоляторы на так называемых крюках и располагаются по одну или по разные стороны от опоры на разных уровнях по вертикали. Поскольку фазы токов в проводах отличаются, то опора (деревянный столб) испытывает изгибные напряжения на частоте 50 Гц, а это не те 100 Гц, которые нас интересуют.

Токи в проводах создают в пространстве вокруг себя магнитное поле, которое накладывается на магнитное поле Земли. Рассмотрим ЛЭП из двух проводов. По проводам течет переменный ток, поэтому сила Ампера, под действием которой провода отталкиваются друг от друга, периодически меняется. Частота изменения силы отталкивания равна удвоенной частоте изменения тока, т.е. равна 100 Гц. Пусть провода находятся на расстоянии d друг от друга, тогда на участок провода длиной L, по которому течет ток I, приходится максимальная сила

$$F = \frac{\mu_0 I^2 (L/d)}{2\pi}.$$

С учетом того, что $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м, при максимальной величине силы тока 50 А, расстоянии между опорами ЛЭП 50 м и расстоянии между проводами 1 м получается максимальная сила $F_{\max}$ = 0,03 Н. Средняя по времени сила равна половине от максимального значения, поэтому переменная составляющая силы взаимодействия двух проводов имеет максимальное значение 0,015 Н. Это значение силы очень мало, и, по-видимому, не этим механизмом объясняется гудение на частоте 100 Гц.

Однако силы действуют не только между проводами ЛЭП, разделенными большими промежутками, но и внутри каждого провода, который состоит из стальной центральной жилы и намотанных на нее алюминиевых жил. Алюминий, как известно, окисляется на поверхности, и пленка окисла плохо проводит ток. Если, например, не по всем алюминиевым жилам течет одинаковый ток, то в этом случае система жил в одном проводе получается несимметричной и в месте расположения железного сердечника периодически изменяется магнитное поле. Частота изменения силы, действующей на стальной сердечник, равна как раз 100 Гц. При этом стальной сердечник притягивается к тем алюминиевым жилам, по которым течет наибольший ток. Расстояния между серединами жил небольшие ($\approx 0{,}5$ см), и они не всегда прижаты друг к другу так, чтобы нигде не было зазоров. Кроме того, стальной сердечник имеет немалую магнитную восприимчивость ($\mu \approx 10^3$), поэтому силы возникают большие, а тряска и столкновения жил приводят к появлению звука именно на частоте 100 Гц (и на более высоких гармониках, кратных 100 Гц).

Вот он механизм возникновения звука, который может «бегать» вдоль проводов!

Ровно по такой же причине на частоте 100 Гц гудят трансформаторы и дроссели люминесцентных ламп в нашей стране. (Кстати, в США они гудят на частоте 120 Гц.) Звук на этой частоте передается опорам через изоляторы. Сухое дерево, из которого сделаны опоры, является хорошим резонатором, поэтому оно и само трясется на частотах 50 и 100 Гц и трясет окружающий воздух. Таким образом и возникает звук, который называют гудением проводов или опор ЛЭП.

Доказать делимость поможет комбинаторика

А.КАНУННИКОВ

Одна из центральных задач арифметики – доказать, что одно целое число делится на другое. Какие методы приходят на ум? Деление с остатком, сравнения по модулю, разложение на простые множители… А что если разложить a предметов на b одинаковых групп, либо же на одинаковые группы по b в каждой? Если это возможно из каких-то сторонних – *комбинаторных* – соображений, то a неизбежно делится на b. Неожиданно? Что за соображения? Сегодня в этом будут разбираться два брата – старший Иван (студент математического факультета) и младший Миша (матшкольник) – со своим папой-математиком.

Сочетания

Папа. Произведение любых двух последовательных натуральных чисел четно. Очевидно?

Иван. Конечно.

Миша. Проще простого: ведь одно из двух соседних чисел четно.

Папа. Правильно. А если взять произведение трех последовательных натуральных чисел: $1\cdot2\cdot3$, $2\cdot3\cdot4$, $3\cdot4\cdot5$ и т.д., то на какое самое большое число всегда разделится такое произведение?

Миша. Ну, раз три числа идут подряд, то одно из них кратно 3. И уж хотя бы одно – четное. Значит, на 6 точно разделится.

Иван. А на что-то большее гарантированно разделится?

Миша. Нет, конечно, ведь самое маленькое произведение $1\cdot2\cdot3$ и есть 6.

Иван. Согласен, осталось только обосновать, почему если произведение кратно двум и трем, то оно кратно шести.

Миша. Ты серьезно? Это же совсем очевидно! В разложение входят двойка и тройка, что тут доказывать?

Папа. Иван прав, вопрос хороший. Миш, ты ответил абсолютно верно, но незаметно использовал *основную теорему арифметики*. Она гласит, что каждое натуральное число можно разложить на простые множители, и притом однозначно. Именно поэтому можно говорить, что в разложение числа входит двойка, тройка или еще какой-то простой множитель.

Миша. Да, нам коротко говорили об этом в школе и обещали позже доказать. Но я, хоть убейте, не могу понять, почему эта теорема не очевидна! Что же теперь, ею нельзя пользоваться? Я так не играю…

Иван. Можно, конечно. Но ответить на мой вопрос можно и без нее. Смотри: пусть N кратно 2 и 3. Тогда $N = 3k$ для некоторого целого k. Если k нечетно, то и $3k$ нечетно, а это не так. Значит, k четно и $3k$ кратно $3\cdot2=6$.

Папа. Или еще короче: $N = 3N - 2N \vdots 6$, поскольку $3N \vdots 6$ (так как $N \vdots 2$) и $2N \vdots 6$ (так как $N \vdots 3$). А насчет основной теоремы арифметики – да, я в детстве тоже не мог взять в толк, почему ее надо доказывать. Но сейчас не будем отвлекаться, это действительно деликатная тема. Давайте лучше сделаем следующий шаг и решим аналогичную задачу для четырех чисел. На какое самое большое число всегда разделится произведение вида $n(n+1)(n+2)(n+3)$, где $n \in \mathbb{N}$? Иными словами, какой НОД (наибольший общий делитель) у всех таких чисел?

Миша. Во-первых, ответ не больше $1\cdot2\cdot3\cdot4=24$. Во-вторых, среди чисел n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ найдется четное, найдется кратное 3 и найдется кратное 4. Значит, $n(n+1)(n+2)(n+3) \vdots 2\cdot3\cdot4=24$. Все, я решил, ответ: 24.

Здесь Иван с папой хитро переглянулись, и Миша понял – такое уже случалось не раз – что где-то ошибся.

Миша. Стойте! Я, кажется, знаю, почему вы улыбаетесь. Я уже понял свою ошибку.

Задача 1. а) В чем была ошибка Миши?

б) Докажите, что $n(n+1)(n+2)(n+3) \vdots 24$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Миша. Теперь я понял, как доказать для четырех чисел. Пап, ты теперь спросишь для пяти, потом для шести и т.д.?

Папа. Я, пожалуй, уже сформулирую теорему для любого k.

Теорема 1. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ произведение любых k последовательных натуральных чисел кратно $k!$.*

Миша. Мы доказали эту теорему для $k \le 4$. Дайте я сделаю еще один шаг – для $k = 5$. Возьмем $N = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$, где $n \in \mathbb{N}$. По доказанному, $N \vdots 4!$, кроме того, $N \vdots 5$, так как одно из пяти последовательных чисел кратно 5.

Иван. Да, Миша. Остается воспользоваться взаимной простотой 4! и 5 и сказать, что $N \vdots 4! \cdot 5 = 5!$.

Миша. Погоди, мне очень понравился метод папы с разностью $N = 3N - 2N$. Я, кажется, могу провести аналогичное рассуждение, не ссылаясь на основную теорему арифметики.

Это и впрямь ценный метод. С его помощью можно доказать более общее утверждение: если $N \vdots a$ и $N \vdots b$, то $N \vdots ab$, коль скоро a и b взаимно просты. Миша понял, как это сделать при $a = 24$ и $b = 5$.

Задача 2. Потренируйтесь и вы. Может быть, вам удастся провести рассуждение для произвольных взаимно простых a и b?

Папа. Ну что ж, очень хорошо. Есть какие-нибудь идеи, как доказать теорему для любого k?

Здесь братья глубоко задумались. У младшего идей не было.

Иван. Вообще, чтобы доказать, что A делится на B, надо взять любое простое p и доказать, что в разложение A оно входит в степени не меньшей, чем в разложение B. Для показателя $\nu_p(k!)$, с которым p входит в разложение $k!$, есть известная **формула Лежандра**:

$$\nu_p(k!) = \left[\frac{k}{p}\right] + \left[\frac{k}{p^2}\right] + \left[\frac{k}{p^3}\right] + \ldots \qquad (1)$$

Миша. Кому известная, а кому пока нет. Как-то это все сложно, Ваня. Пап, неужели нельзя проще, без страшных формул?

Папа. На самом деле, можно, и я хочу, чтобы вы до этого додумались. Хотя Ваня все правильно говорит, и его метод совсем не такой трудный.

Задача 3. Попробуйте закончить рассуждение, начатое Иваном. Сначала докажите формулу Лежандра (1).

Папа. Дам подсказку: вы ничего не узнаёте, глядя на дробь

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}? \qquad (2)$$

Ведь именно ее целочисленность при всех натуральных n и k надо доказать: в числителе как раз стоит произведение ровно k последовательных целых чисел.

Иван. Ого, точно! Как я сразу не догадался? Ну-ка, Миша, насколько хорошо ты знаешь комбинаторику?

Миша. Похоже на число сочетаний C_n^k...

Иван. Это оно и есть – число способов выбрать k человек из n. Очевидно, оно целое.

Миша. Неужели это все доказательство? И не нужна ни основная теорема арифметики, ни формула Лежандра... Просто вспомнили комбинаторику. Фантастика!

Папа. Молодцы! Все верно. Давайте вспомним, почему только k человек из n можно выбрать именно столькими способами.

Миша. Это совсем просто! Если бы мы выбирали k человек из n и ставили их в очередь, то ответ был бы $n(n-1)\ldots(n-k+1)$. Но поскольку нам порядок людей неважен, а k человек можно упорядочить $k!$ способами, то ответ в $k!$ раз меньше – вот и получили формулу (2). Это и есть число сочетаний C_n^k.

Папа. Пять с плюсом! Очень лаконично объяснил.

Иван. Кстати, C_n^k еще называют биномиальным коэффициентом – в связи с формулой бинома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}. \qquad (3)$$

Папа. Это алгебраическая интерпретация сочетаний: чтобы при раскрытии скобок в $(a+b)^n$ получить член $a^k b^{n-k}$, нужно выбрать k скобок $(a+b)$, из которых мы возьмем букву a (из остальных возьмем b), отсюда и коэффициент C_n^k.

Задачи 4–7 не такие простые, но они и необязательны для понимания дальнейшего текста.

Задача 4.[1] Докажите, что число $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ – целое при всех $m, n \in \mathbb{N}$.

Задача 5. У чисел сочетаний есть важные аналоги среди многочленов – *многочлены*

[1] Автор умеет решать эту задачу с помощью формулы Лежандра, комбинаторное решение неизвестно.

Гаусса

$$g_{k,l}(x) = \frac{f_{k+l}(x)}{f_k(x) f_l(x)}, \qquad (4)$$

где $f_n(x) = (x^n - 1)\ldots(x^2 - 1)(x - 1)$. Докажите, что это действительно многочлены, т.е. что многочлен $f_{k+l}(x)$ делится на многочлен $f_k(x) f_l(x)$.

У этой задачи есть несколько красивых решений и интересных применений.

Задача 6 (М.Бернштейн, Турнир городов, 2009). Обозначим $[n]! = 1 \cdot 11 \cdot 111 \cdot \ldots \cdot \underbrace{1\ldots1}_{n \text{ единиц}}$. Докажите, что $[m+n]!$ кратно $[m]![n]!$ при всех $m, n \in \mathbb{N}$.

Задача 7. Целозначные многочлены. Так называются многочлены с действительными коэффициентами, принимающие в целых точках целые значения. Например, таковы многочлены

$$C_x^k = \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad (C_x^0 = 1).$$

Докажите, что любой целозначный многочлен представляется в виде $a_0 C_x^0 + a_1 C_x^1 + \ldots$ $\ldots + a_k C_x^k$ для некоторых однозначно определенных целых чисел $a_0, \ldots, a_k$.

Перестановки с повторениями

Папа. Вы отлично разобрались с сочетаниями, а теперь давайте займемся их обобщением – перестановками с повторениями. Легко сосчитать, сколькими способами можно переставить буквы в словах КУБ, ЗНАК, ТОЧКА…

Миша. Да, соответственно 6, 24 и 120 перестановок. Вообще, для слова из n букв ответ будет $n!$.

Иван. Не торопись, Миша. Для слова КУБИК ответ тоже 5! получается? Мы же не переставляем одинаковые буквы К.

Папа. Да, это и есть перестановки с повторениями. Если временно пометить буквы К индексами: $К_1$, $К_2$, то все пять букв будут разными, и перестановок в слове $К_1УБИК_2$ будет 5!. Теперь, стирая индексы, мы разобьем все слова на пары одинаковых.

Миша Ага, понял! Значит, ответ вдвое меньше – 60, так?

Папа. Правильно. А теперь скажи, сколько перестановок букв в слове ЗАДАЧА?

Миша. В случае двух одинаковых букв мы делили на два, значит, здесь, видимо, надо делить на три…

Эту фразу Миша сказал как-то неуверенно. Он не хотел думать над, казалось бы, простой аналогичной ЗАДАЧЕЙ, но в то же время не хотел попасть впросак.

Иван. По-твоему, в слове ААА будет $3!/3 = 2$ перестановки?

Папа. Очень хороший прием, Иван. Комбинаторные рассуждения полезно проверять на тривиальных примерах – если есть ошибка, обычно это сразу видно и понятно, из-за чего она возникла.

Миша. Я уже понял, можете не объяснять. Делить надо, конечно, на 3! – на число перестановок одинаковых букв. А как быть со словом, где много разных повторений, скажем МАТЕМАТИКА?

Папа. Поступаем аналогично: у слова $М_1А_1Т_1ЕМ_2А_2Т_2ИКА_3$ – $10!$ перестановок. Теперь *последовательно* стираем индексы.

Миша. Сначала сотрем индексы у буквы М – число вариантов уменьшится вдвое, затем у буквы А – вариантов еще в 3! раз меньше, наконец, у Т – это еще в два раза меньше. Итого, $\frac{10!}{2^2 \cdot 3!}$ перестановок.

Папа. Да. Теперь понятно, что в общем случае для слова из n_1 букв x_1, n_2 букв x_2, …, n_k букв x_k ответ будет

$$\frac{(n_1 + \ldots + n_k)!}{n_1! \ldots n_k!}. \qquad (5)$$

Это и есть число перестановок с повторениями.

Миша. Пап, ты сказал, что это обобщение числа сочетаний. Глядя на формулу, я это вижу: при $k = 2$ получаем $\frac{(n_1 + n_2)!}{n_1! n_2!} = C_{n_1+n_2}^{n_1}$. Но должно быть комбинаторное объяснение.

Папа. Хорошо, что ты заметил. Смотри: слово из k букв a и $n - k$ букв b взаимно однозначно соответствует k-элементному подмножеству n-элементного множества. Например, подмножеству $\{2, 5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ отвечает слово *babba*: буква a «берет» элемент в подмножество, а буква b «не берет». А еще одну – алгебраическую – интерпретацию нам расскажет Ваня.

Иван. Да, как я заметил раньше, сочетания – это биномиальные коэффициенты. Так вот, перестановки с повторениями – это их обобщения – полиномиальные коэффициенты или, как еще говорят, мультиномиальные. Названия понятны: «би» значит два, «поли» и «мульти» – много. Так что вместо двух слагаемых в биноме Ньютона надо взять любое их число. Вот **полиномиальная формула**:

$$\left(x_1 + \ldots + x_k\right)^n = \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_k \ge 0 \\ n_1+\ldots+n_k=n}} \frac{n!}{n_1!\ldots n_k!} x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k}. \qquad (6)$$

В ней нет ничего страшного, Миша. Мы просто раскрываем скобки и считаем коэффициенты при подобных слагаемых, т.е. при словах одного состава из букв $x_1,\ldots,x_k$. Но давайте вернемся к делимости. Вот какую теорему мы доказали.

Теорема 2. *Число* $\left(n_1 + \ldots + n_k\right)!$ *кратно* $n_1!\ldots n_k!$ *для всех* k, $n_1,\ldots,n_k \in \mathbb{N}$.

Папа. Справедливости ради отмечу, что ее тоже можно доказать с помощью формулы Лежандра, но, придав дроби (5) комбинаторный смысл, мы доказали делимость бесплатно.

Иван. Давайте теперь выведем некоторые следствия. Пусть, например, все числа $n_1,\ldots,n_k$ равны. Положим $n_1 = \ldots = n_k = n$.

Следствие 1. $(nk)! \vdots n!^k$.

А теперь положим еще $n = k$.

Следствие 2. $\left(k^2\right)! \vdots k!^k$.

В этой связи я вспомнил задачу, которую как-то решал на олимпиаде.

Задача 8 (А.Канунников, Московская олимпиада, 2009, 11 кл.). Для каждого простого p найдите наибольшую натуральную степень числа $p!$, на которую делится число $\left(p^2\right)!$.

Иван. Из следствия 2 вытекает, что ответ как минимум p. С другой стороны, в разложении $\left(p^2\right)!$ простое p входит в степени $p+1$, поэтому ответ не больше $p+1$. На олимпиаде я проверил, что $p+1$ подходит при $p = 2, 3, 5$, но доказать это для любого p не получилось…

Папа. Иван, все правильно, тебе оставался последний шаг, наверное, самый трудный. Оказывается, следствия 1 и 2 можно усилить и отсюда вывести решение задачи 8.

Теорема 3. *Число* $(nk)!$ *кратно* $n!^k k!$ *при всех* $n, k \in \mathbb{N}$. *В частности,* $\left(k^2\right)!$ *кратно* $(k!)^{k+1}$.

Задача 9. Попробуйте доказать эту теорему комбинаторно. Надо понять, откуда «выжать» $k!$.

(Продолжение следует)

ОЛИМПИАДЫ

Муниципальный этап LII Всероссийской олимпиады школьников по физике

В Московской области муниципальный этап олимпиады прошел 17 декабря 2017 год. В нем приняли участие школьники 7–11 классов.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

7 класс

Задача 1. На полпути

Из пункта A в пункт $Б$ по прямой дороге выезжают два автомобиля. Первый автомобиль половину всего пути едет со скоростью 60 км/ч, а вторую половину пути – со скоростью 30 км/ч. Второй автомобиль, наоборот, первую половину пути едет со скоростью 30 км/ч, а вторую половину пути – со скоростью 60 км/ч. В результате в пункт $Б$ они приезжают одновременно через 120 мин после старта. На одних координатных осях постройте графики зависимостей расстояний, пройденных автомобилями, от времени их движения и определите, с каким временны́м интервалом они проехали середину дистанции и какое максимальное расстояние было между ними во время движения. (6,2)[1]

М.Замятнин

Задача 2. Куб с лункой

Если в кубе массой $m_0 = 1{,}6$ кг сделать лунку в форме кубика, то он будет иметь массу $m_1 = 1{,}2$ кг (рис.1). А если эту лунку

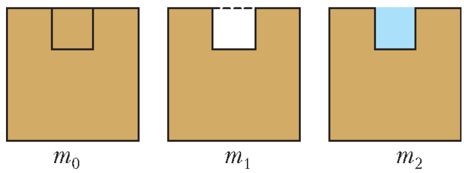


Рис. 1

заполнить водой, то масса куба станет равна $m_2 = 1{,}7$ кг. Определите плотность ρ материала, из которого изготовлен куб. Плотность воды $\rho_в = 1{,}0$ г/см^3 . (8,5)

В.Слободянин

Задача 3. Быстрые термометры

На рисунке 2 изображены шкалы четырех термометров. Определите, у какого их них

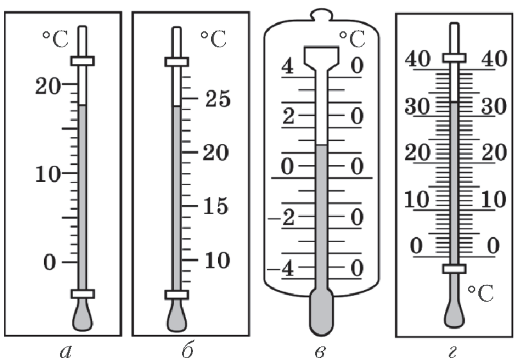


Рис. 2

наибольшая цена деления и чему она равна. Какой термометр сейчас показывает наибольшую температуру и чему она равна?

Термометры внесли в комнату. Через час температура в ней стала медленно увеличиваться, причем за равные промежутки времени на одинаковую величину. Определите, во сколько раз будут отличаться максимальная и минимальная скорости движения верхней границы столбиков жидкости в термометрах. Поясните, как получены ваши ответы. (1,7)

М.Замятнин

Задача 4. Из полного в порожнее-1

В прямоугольном поддоне со сторонами $a = 30$ см, $b = 20$ см и высотой бортика $h_0 = 10$ см стоят цилиндрические сосуды с площадью основания $S = 100$ см^2 каждый (рис.3). Высота первого сосуда h_0 , а второго $5h_0$. В высокий сосуд через отверстие в стенке вставлена тонкая трубка с краном K,

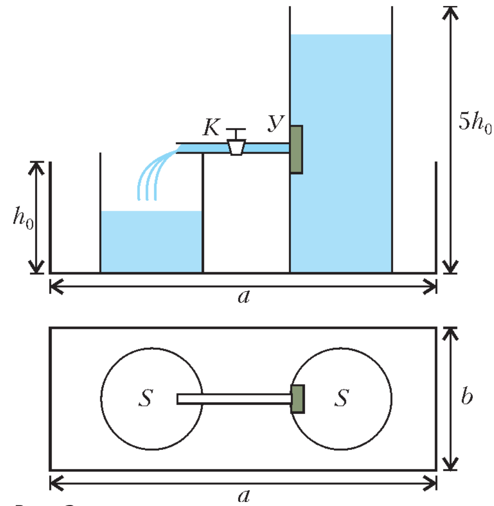


Рис. 3

второй конец которой лежит на стенке низкого сосуда. В этом положении трубка горизонтальна. Благодаря наличию устройства $У$, при открытом кране уровень воды в высоком сосуде понижается с постоянной скоростью $v = 1{,}0$ мм/с. Первоначально в низком сосуде и поддоне воды нет, а уровень воды в высоком сосуде равен $5h_0$. В момент времени $t = 0$ кран открывают. Постройте график зависимости уровня воды z в поддоне от времени t после открытия крана. Отметьте на осях графика величины z и t в характерных точках (точках излома, точках максимума или минимума). (1,9)

С.Кармазин

8 класс

Задача 1. Средняя деревенская

На перемещение из города в деревню с постоянной скоростью автомобиль затратил время t. На обратном пути водитель ехал быстрее и добрался до города за вдвое мень-

[1] В скобках после условия задачи указан средний балл решивших эту задачу. Каждая задача оценивалась в 10 баллов.

шее время. За какое время доехала бы машина от города до деревни, если бы водитель поддерживал скорость, равную средней скорости своего движения за поездку туда и обратно? (7,6)

М.Замятнин

Задача 2. Зимой и летом...

Экспериментатор Глюк обратил внимание, что в начале зимы показания двух уличных термометров (один проградуирован в градусах Цельсия, а другой в градусах Фаренгейта), совпадая по модулю, имеют разные знаки: $-11{,}5$ °C и $11{,}5$ °F. Когда наступили суровые морозы, показания термометров опять совпали, но теперь уже и по знаку: -40 °C и -40 °F. Определите, какую температуру показывает термометр в градусах Цельсия, когда показания второго равны $+40$ °F. (5,0)

М.Замятнин

Задача 3. Шариковая смесь

В лаборатории калориметрии провели серию экспериментов по нагреванию стальных шариков двух различных масс. В таблице 1

Таблица 1

№	1	2	3	4	5	6
Q, Дж	440	195	40	470	25	340
Δt, °C	17	15	3	36	1	13

№	7	8	9	10	11	12
Q, Дж	105	260	130	290	495	300
Δt, °C	8	28	5	11	19	23

приведены значения изменений температуры шариков Δt в зависимости от подведенного к ним количества теплоты Q. К сожалению, по неопытности лаборант занес в одну таблицу данные для разных шариков. Построив график, определите, во сколько раз отличались массы шариков, и найдите, какой из результатов явно надо отбросить как промах экспериментатора. (7,1)

М.Замятнин

Задача 4. Из полного в порожнее-2

См. условие задачи 4 для 7 класса, а задание и дополнительное условие другие: Постройте график зависимости давления p, оказываемого низким сосудом на дно поддона, от времени t после открытия крана. Отметьте на осях графика величины p и t в характерных точках – излома, максимума или минимума. Дно поддона шероховатое. (2,4)

9 класс

Задача 1. Мост

Поезд въезжает на мост со скоростью v_0. Если он будет на мосту разгоняться с ускорением a, то проедет мост за время $t_1 = 30$ с, если с таким же ускорением он будет тормозить, то проедет мост за время $t_2 = 60$ с. За какое время t_3 поезд проедет мост при равномерном движении со скоростью v_0? (6,3)

М.Замятнин

Задача 2. Равновесие-1

Система состоит из нескольких грузов, подвешенных на невесомых нитях, перекинутых через невесомые и один массивный (выделен цветом) блоки (рис.4). Масса $m = 1$ кг. Определите, при каких значениях масс m_1 и m_2 система будет находиться в равновесии. Трения в осях блоков нет. (3,9)

М.Замятнин

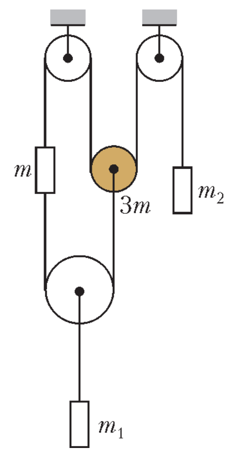


Рис. 4

Задача 3. Два в одном

В калориметр, частично заполненный водой при температуре $t_0 = 10$ °C, опустили кубик 1, имеющий начальную температуру $t = 70$ °C. После прекращения теплообмена температура содержимого калориметра достигла $t_1 = 25$ °C. Если бы вместо кубика 1 в калориметр опустили кубик 2, нагретый до такой же температуры t, то после прекращения теплообмена температура содержимого калориметра достигла бы $t_2 = 35$ °C. До какой температуры t_3 увеличится температура содержимого калориметра, если в него опустить сразу оба кубика, нагретые до температуры t? Теплообменом с окружающей средой пренебречь. Вода из калориметра не выливается. (4,8)

М.Замятнин

Задача 4. Выделение нелинейности

В лаборатории линейной электродинамики экспериментатор Глюк исследовал вольтамперную характеристику резистора, занося в таблицу 2 значения силы тока I, текущего через резистор, и поданного на него напряжения U. Позже выяснилось, что в таблицу

Таблица 2

№	1	2	3	4	5	6	7
U,В	0,2	3,0	0,4	0,7	1,0	1,3	1,9
I,А	0,03	0,43	0,02	0,04	0,08	0,14	0,27

№	8	9	10	11	12	13	14	15
U,В	1,4	1,6	1,8	2,4	0,7	2,0	2,2	2,3
I,А	0,14	0,23	0,33	0,34	0,10	0,49	0,75	0,98

кроме результатов Глюка попали данные, полученные в соседней лаборатории нелинейных элементов. Построив график, определите, какие результаты относятся к эксперименту Глюка. Найдите сопротивление исследуемого резистора. Какая точка может соответствовать как резистору, так и нелинейному элементу? (4,8)

М.Замятнин

Задача 5. Из полного в порожнее-3

См. условие задачи 4 для 7 класса, а задание и дополнительное условие другие: Постройте график зависимости давления p, оказываемого высоким сосудом на дно поддона, от времени t после открытия крана. Отметьте на осях графика величины p и t в характерных точках – излома, максимума или минимума. Дно поддона шероховатое. (2,6)

10 класс

Задача 1. Шарик в полете

В баллистической лаборатории получили зависимость значений скорости v брошенного вертикально вверх шарика от его высоты h над уровнем стола. Результаты измерений для последовательных моментов времени представлены в таблице 3. Известно, что в одном из измерений (возможно и в первом) скорость была определена неверно. Найдите, в каком. Для этого постройте график с результатами измерений в таких координатах, в которых он должен быть линейным. Рассчитайте максимальную высоту подъема шарика над столом. Через какое время после первого измерения шарик упал на стол? Ускорение свободного падения $g = 9{,}8\ \text{м/с}^2$. (4,4)

Таблица 3

№	1	2	3	4	5	6	7	8
h,см	100	180	220	270	320	250	140	50
v,м/с	7,2	6,0	5,3	4,2	2,8	4,7	6,6	9,0

М.Замятнин

Задача 2. Кап-кап-кап

Маленький шарик, заполненный водой, подвешен на нити длиной L. В нижней точке шарика имеется маленькое отверстие, из которого вытекают капельки воды. Под шариком на расстоянии h от него расположена горизонтальная плоскость. Нить с шариком отклоняют от вертикали на угол φ_0 ($\varphi_0 \ll 1$) и отпускают. При каком значении h капелька, оторвавшаяся от шарика в его нижнем положении, попадет в ту же точку плоскости, что и капелька, оторвавшаяся в момент максимального отклонения шарика от вертикали? Сопротивлением воздуха пренебречь. (4,0)

Примечание. При $\varphi \ll 1$ $\sin\varphi = \varphi$, $\cos\varphi = \left(1 - \varphi^2/2\right)$, где угол φ выражен в радианах.

С.Кармазин

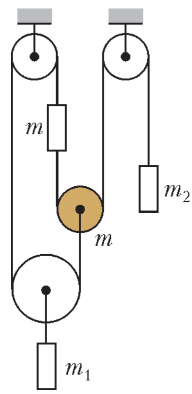


Рис. 5

Задача 3. Равновесие-2

См. задачу 2 для 9 класса, а рисунок не 4, а 5. (4,7)

Задача 4. Вольтметры, вольтметры....

Электрическая цепь (рис.6) составлена из 10 одинаковых вольтметров. Показания вольтметра 1 равно $U_1 = 12$ В. Определите

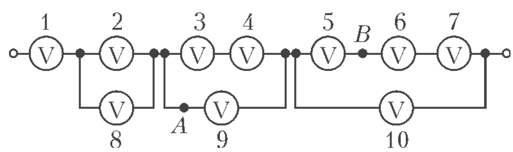


Рис. 6

показания остальных вольтметров и напряжение между точками A и B. (3,9)

И.Иоголевич

Задача 5. Из полного в порожнее-4

См. условие задачи 4 для 7 класса, а задание и дополнительное условие другие: Постройте график зависимости отношения давлений $\alpha = p_2/p_1$ от времени t после открывания крана (p_1 – давление низкого сосуда на дно поддона, p_2 – давление высокого сосуда на дно поддона). Отметьте на осях графика величины α и t в характерных точках – излома, максимума или минимума. Днища сосудов и поддона тщательно отполированы, так что вода под сосуды не подтекает. (3,4)

11 класс

Задача 1. Перепутанные шарики

В баллистической лаборатории исследовались зависимости значений скорости v шарика, выпущенного вертикально вверх из небольшой катапульты, стоящей на столе, от высоты h его подъема над уровнем стола. К сожалению, в спешке в таблицу 4 с результатами измерений попали данные для двух разных шариков. Определите, какие данные относятся к одному, а какие к другому шарику. Для этого постройте график с результатами измерений в таких координатах, в которых он должен быть линейным. Рассчитайте, во сколько раз отличаются максимальные высоты подъема шариков над столом. Определите времена полета шариков. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2. (2,8)

Таблица 4

№	1	2	3	4	5	6
h, см	220	240	350	150	280	160
v, м/с	4,1	6,0	3,7	7,3	2,2	5,4
№	7	8	9	10	11	12
h, см	270	120	300	210	100	200
v, м/с	5,5	7,7	4,9	4,4	6,4	4,6

М.Замятнин

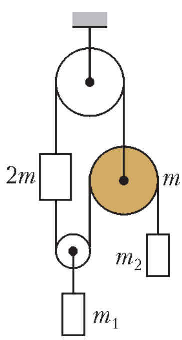


Рис. 7

Задача 2. Равновесие-3

См. задачу 2 для 9 класса, а рисунок не 4, а 7. (5,3)

Задача 3. Диссоциация

Идеальный двухатомный газ, находящийся в герметичном сосуде объемом V_0, нагревают от температуры T_0 до температуры $2T_0$, в результате чего он полностью диссоциирует на атомы. При этом степень диссоциации газа (доля распавшихся молекул) в указанном диапазоне прямо пропорциональна его температуре. Изобразите этот процесс в осях $p{-}V$, $V{-}T$ и $\nu - p$, где p, V, T и ν – давление, объем, температура и количество вещества соответственно. (1,9)

М.Замятнин

Задача 4. Куб в магнитном поле

Проволочный каркас в форме куба помещен в однородное магнитное поле, модуль индукции которого изменяется со временем по закону $B_м = kt$, где $k > 0$. Сопротивления всех ребер одинаковы и равны R каждое. Длина ребра a. Определите направление и величину силы тока, протекающего через каждое из ребер. Рассмотрите случаи, когда вектор индукции магнитного поля: а) параллелен ребру AE (рис.8,*а*); б) параллелен малой диагонали AC (рис.8,*б*). (2,1)

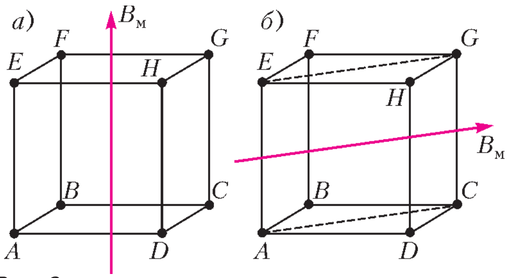


Рис. 8

И.Иоголевич

Задача 5. Из полного в порожнее-5

См. условие задачи 4 для 7 класса, а задание и дополнительное условие другие: Постройте график зависимости отношения давлений $\alpha_2 = p_2/p_1$ от времени после открывания крана (p_1 – давление низкого сосуда, а p_2 – давление высокого сосуда на дно поддона). Отметьте на осях графика значения величин α и t в характерных точках – излома, максимума или минимума. Дно поддона шероховатое. (3,6)

Публикацию подготовил В.Слободянин

Средняя скорость прямолинейного движения

Б.МУКУШЕВ

В повседневной жизни, когда речь идет о движении человека или транспорта, мы чаще всего ориентируемся на среднюю скорость. Именно средняя скорость позволяет оценить пройденное расстояние, зная затраченное время, или, наоборот, помогает найти время движения по пройденному пути.

Заметим, что слово «средняя» здесь означает усреднение по времени. Встречается и средняя скорость, усредненная по расстоянию. Она используется, например, в гидродинамике.

Известно всем, что скорость – величина векторная. А средняя скорость? Нужно хорошо представлять себе, что возможны два понимания средней скорости: средняя скорость *перемещения* и средняя скорость *пути* (или путевая средняя скорость). В первом случае средняя скорость будет вектором, во втором – скаляром.

В примерах, связанных с движением транспорта, чаще всего интересуются пройденным путем – чтобы определить расход топлива, степень износа автомобиля и т.п. Поэтому далее мы будем говорить только о скалярной средней скорости, для определения которой нужно знать время движения t и пройденный за это время путь s:

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{t}.$$

А теперь– конкретные задачи.

Задача 1. *Гонщик едет на мотоцикле по пустынному загородному шоссе и меняет скорость «скачком» в конце каждой минуты:* $v_1 = 40$ *км/ч,* $v_2 = 60$ *км/ч,* $v_3 = 80$ *км/ч,* $v_4 = 20$ *км/ч. Чему равна средняя скорость мотоцикла?*

Решение. Общий путь состоит из четырех разных участков. На каждом участке, где скорость была постоянна, автомобиль двигался в течение одного и того же промежутка времени Δt. Поэтому

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{t} = \frac{v_1\Delta t + v_2\Delta t + v_3\Delta t + v_4\Delta t}{4\Delta t} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(v_1 + v_2 + v_3 + v_4\right) = 50 \text{ км/ч}.$$

Задача 2. *Следующий раз, когда гонщик едет на мотоцикле по шоссе, он ориентируется по телеграфным столбикам, которые тянутся вдоль шоссе. Гонщик последовательно «скачком» переходит на скорости* $v_1 = 40$ *км/ч,* $v_2 = 60$ *км/ч,* $v_3 = 80$ *км/ч,* $v_4 = 20$ *км/ч, когда проезжает мимо очередного столбика. Чему теперь равна средняя скорость мотоцикла?*

Решение. Обозначим расстояние между столбиками через l. Тогда весь пройденный путь составляет $4l$, а время движения мотоцикла складывается из времен прохождения каждого участка. Таким образом,

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{t} = \frac{4l}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4} = \frac{4l}{\frac{l}{v_1} + \frac{l}{v_2} + \frac{l}{v_3} + \frac{l}{v_4}} =$$

$$= \frac{4}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4}} = 38{,}4 \text{ км/ч}.$$

Как видим из первой задачи, средняя скорость мотоцикла определяется средним арифметическим от скоростей на каждом промежутке времени движения. К сожалению, многие школьники ошибочно полагают, что среднюю скорость так можно вычислять всегда. Вторая задача наглядно показывает, что при движении, в котором на каждом участке тело проходит одинаковый путь, но с различными скоростями, средняя скорость выражается более сложно.

Задача 3. *Покажите, что при равнопеременном прямолинейном однонаправленном движении средняя скорость тела определяется средним арифметическим начальной и конечной скоростей.*

Решение. При равноускоренном движении с начальной скоростью v_0 и ускорением a путь определяется выражением

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}, \text{ где } a > 0.$$

Средняя скорость равна отношению пути ко времени, в течение которого совершалось это движение:

$$v_{ср} = \frac{s}{t} = \frac{v_0 t + at^2/2}{t}.$$

По определению,

$$a = \frac{v - v_0}{t}.$$

Тогда

$$v_{ср} = v_0 + \frac{v - v_0}{2} = \frac{v_0 + v}{2}.$$

При равнозамедленном движении, когда $a < 0$, получается тот же результат.

Задача 4. *При равноускоренном движении точка проходит в первые два равных последовательных промежутка времени $t = 4$ с отрезки пути $s_1 = 24$ м и $s_2 = 64$ м. Чему равна средняя скорость движения точки на первой и на второй половине пути?*

Решение. Для начала нам надо определить v_0 и a:

$$s_1 = v_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad s_1 + s_2 = v_0 \cdot 2t + \frac{a(2t)^2}{2},$$

откуда

$$v_0 = 1 \text{ м/с}, \quad a = 2{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Далее найдем скорость v_1 на середине пути:

$$\frac{s_1 + s_2}{2} = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2a},$$

откуда

$$v_1 = \sqrt{\left(v_0^2 + (s_1 + s_2)a\right)} \approx 14{,}9 \text{ м/с}.$$

Тогда на первой половине пути средняя скорость равна

$$v_{ср1} = \frac{v_0 + v_1}{2} \approx 7{,}9 \text{ м/с}.$$

Для определения средней скорости на второй половине пути найдем скорость v_2 в конце пути:

$$s_1 + s_2 = \frac{v_2^2 - v_0^2}{2a},$$

$$v_2 = \sqrt{v_0^2 + 2(s_1 + s_2)a} = 21 \text{ м/с}$$

и получим

$$v_{ср2} = \frac{v_1 + v_2}{2} \approx 17{,}9 \text{ м/с}.$$

Задача 5. *По наклонной плоскости катится шарик без начальной скорости. В последнюю секунду он прошел путь вдвое больший, чем в предыдущую секунду. Длина наклонной плоскости $l = 3{,}1$ м. Нужно найти среднюю скорость шарика на протяжении всего пути. Трением пренебречь.*

Решение. Весь путь состоит из трех участков. Длительность первого участка обозначим t_1. Продолжительности второго и третьего участков известны: $t_2 = t_3 = 1$ с. Скорости в конце трех участков равны, соответственно, $v_1 = at_1$, $v_2 = a(t_1 + t_2)$, $v_3 = a(t_1 + t_2 + t_3)$. Запишем выражения для путей второго и третьего участков:

$$s_2 = \frac{v_1 + v_2}{2} t_2 = \frac{at_1 + a(t_1 + t_2)}{2} t_2,$$

$$2s_2 = \frac{v_2 + v_3}{2} t_3 = \frac{a(t_1 + t_2) + a(t_1 + t_2 + t_3)}{2} t_3,$$

откуда найдем время t_1:

$$t_1 = \frac{t_3^2 + 2t_2 t_3 - 2t_2^2}{2(2t_2 - t_3)} = 0{,}5 \text{ с}.$$

Тогда средняя скорость на всем пути будет равна

$$v_{ср} = \frac{l}{t_1 + t_2 + t_3} = 1{,}24 \text{ м/с}.$$

Задача 6. *Наблюдатель, стоявший в момент начала движения электропоезда у его переднего края, заметил, что первый вагон прошел мимо него за время $t_1 = 10$ с. Электропоезд состоит из 10 вагонов, длина каждого из них $l = 25$ м. Какова была средняя скорость электропоезда в течение того времени, когда мимо наблюдателя полностью прошел весь состав? Движение считать равноускоренным.*

Решение. Запишем уравнения движения мимо наблюдателя первого и второго вагонов:

$$l_1 = \frac{at^2}{2}, \quad l_2 = v_1 t_2 + \frac{at_2^2}{2}.$$

Поскольку $l_1 = l_2 = l$ и $v_1 = at_1$, то получим

$$\frac{at_1^2}{2} = at_1 t_2 + \frac{at_2^2}{2}, \text{ и } t_2 = t_1\left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right).$$

Для третьего вагона запишем, соответственно,

$$l_3 = v_2 t_3 + \frac{at_3^2}{2}, \text{ где } v_2 = v_1 + at_2 = a(t_1 + t_2),$$

следовательно,

$$t_3^2 + 2(t_1 + t_2)t_3 - t_1^2 = 0, \text{ и } t_3 = t_1\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right).$$

Для четвертого вагона получим

$$t_4 = t_1\left(\sqrt{4} - \sqrt{3}\right).$$

Выражения для t_2, t_3, t_4 наводят на мысль, что для t_n должно выполняться следующее соотношение:

$$t_n = t_1\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right).$$

Длина электропоезда равна $L = 10l$. Общее время, за которое все вагоны прошли мимо наблюдателя, равно $t = t_1 + t_2 + \ldots + t_n = t_1\sqrt{n} = t_1\sqrt{10}$. Тогда

$$v_{ср} = \frac{L}{t} = \frac{10l}{t_1\sqrt{10}} \approx 7{,}9 \text{ м/с}.$$

Задача 7. *Первую треть пути автомобиль ехал со скоростью v_1, а последнюю треть времени – со скоростью v_3. На втором участке пути его скорость равнялась средней скорости движения на всем пути. Нужно найти эту среднюю скорость автомобиля.*

Решение. По условию,

$$v_2 = \frac{s_2}{t_2} = \frac{s - \frac{s}{3} - \frac{v_3 t}{3}}{t - \frac{s}{3v_1} - \frac{t}{3}} = v_{ср} = \frac{s}{t},$$

или

$$\frac{\left(2v_{ср} - v_3\right)v_1}{2v_1 - v_{ср}} = v_{ср}.$$

Отсюда получим

$$v_{ср} = \sqrt{v_1 v_3}.$$

Задача 8. *Мотоциклист из города A в город B ехал с постоянной скоростью 80 км/ч. На обратном пути часть трассы была загружена транспортными средствами, и он ехал со скоростью 30 км/ч столько времени, сколько затратил на путь из города A в город B. Потом оставшийся участок пути оказался свободным, и он мчался со скоростью 100 км/ч. Определите среднюю скорость мотоциклиста на всем пути от города A до города B и обратно.*

Решение. Пусть L – расстояние от города A до города B. Тогда время, затраченное мотоциклистом на первую половину пути, равно

$$t_1 = \frac{L}{v_1}, \text{ где } v_1 = 80 \text{ км/ч}.$$

Расстояние, которое мотоциклист ехал со скоростью $v_3 = 100$ км/ч, равно

$$L_3 = L - v_2 t_1 = L - v_2\frac{L}{v_1} = \frac{5}{8}L,$$

и на его преодоление он затратил время $t_3 = L_3/v_3$. Средняя скорость равна отношению длины всего пути ко всему времени в пути:

$$v_{ср} = \frac{2L}{2t_1 + t_3} = \frac{2L}{\frac{2L}{v_1} + \frac{5L}{8v_3}} = \frac{2}{\frac{2}{v_1} + \frac{5}{8v_3}} = 64 \text{ км/ч}.$$

Задача 9. *На двух последовательных участках пути автомобиль двигался с постоянными скоростями. Известно, что его средняя скорость на первой половине пути в два раза больше, чем на второй, и что на прохождение первого участка пути автомобиль затратил четвертую часть всего времени своего движения. Во сколько раз его средняя скорость за первую половину времени движения больше, чем за вторую?*

Решение. Нарисуем графики движения автомобиля (рис.1). График с красными

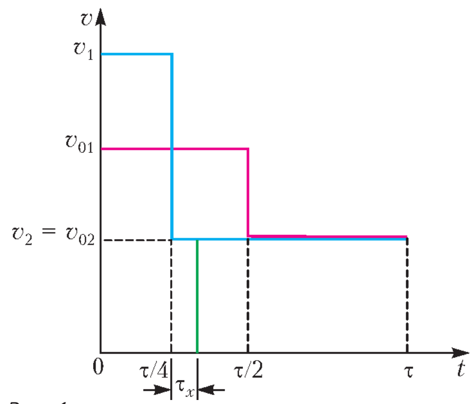


Рис. 1

линиями представляет движение, когда автомобиль первую половину времени ехал со средней скоростью v_{01}, а вторую половину времени – со средней скоростью v_{02}. Синий график представляет движение, когда автомобиль проехал первый участок пути со скоростью v_1 за четвертую часть времени своего движения, а второй участок – со скоростью $v_2 = v_{02}$. Из равенства площадей под графиками найдем

$$v_{01} = \frac{v_1 + v_2}{2}, \text{ где } v_2 = v_{02}.$$

Из условия задачи,

$$\frac{s}{2} = 2v_{\text{ср}}\left(\frac{\tau}{4} + \tau_x\right) = v_{\text{ср}}\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{4} - \tau_x\right),$$

откуда найдем

$$\tau_x = \frac{\tau}{12}.$$

Зеленая вертикальная линия делит площадь под синим графиком на две равные части:

$$\frac{s}{2} = v_1\frac{\tau}{4} + v_2\tau_x = v_2\left(\frac{\tau}{4} - \tau_x + \frac{\tau}{2}\right).$$

Отсюда получаем

$$v_{01} = \frac{5}{3}v_2, \quad v_{02} = v_2, \quad \frac{v_{01}}{v_{02}} = \frac{5}{3}.$$

Задача 10. *Трамвай прошел расстояние между соседними остановками за определенное время, причем вначале он двигался равноускоренно, затем равномерно, а в конце равнозамедленно. На разгон и торможение ушло в общей сложности $\Delta t = 2$ мин, а максимальная скорость была $v_0 = 5$ м/с. Расстояние между остановками $s = 1500$ м. Нужно найти среднюю скорость трамвая.*

Решение. Обозначим общее время движения трамвая через t, а время разгона – через t_0. Тогда время торможения равно $\Delta t - t_0$. Нарисуем график зависимости скорости трамвая от времени (рис.2). За время t_0 трамвай

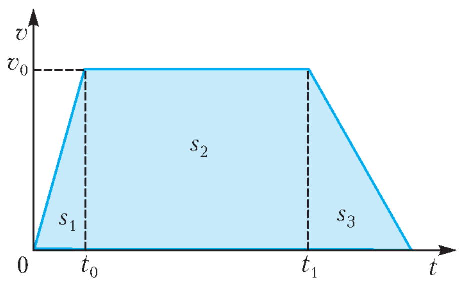


Рис. 2

пройдет расстояние

$$s_1 = \frac{v_0 t_0}{2}.$$

Анализируя график движения, находим расстояние, пройденное трамваем при его равномерном движении:

$$s_2 = v_0(t - \Delta t).$$

Путь трамвая на третьем этапе движения равен

$$s_3 = \frac{v_0(t - t_1)}{2} = \frac{v_0(\Delta t - t_0)}{2}.$$

Расстояние между остановками равно

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = \frac{v_0 t_0}{2} + v_0(t - \Delta t) + \frac{v_0(\Delta t - t_0)}{2} = \frac{v_0(2t - \Delta t)}{2}.$$

Отсюда находим время движения трамвая:

$$t = \frac{s}{v_0} + \frac{\Delta t}{2} = 360 \text{ с}$$

и среднюю скорость трамвая во всем пути:

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{t} = \frac{1500 \text{ м}}{360 \text{ с}} \approx 4{,}2 \text{ м/с}.$$

Задача 11. *График зависимости скорости тела от времени имеет вид полуокружности (рис.3). Максимальная скорость тела*

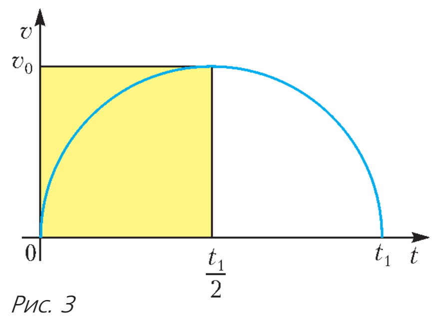


Рис. 3

равна v_0. Определите среднюю скорость тела за время t_1.

Решение. Площадь закрашенного квадрата равна R^2, где R – радиус полуокружности. Она соответствует пути $l_1 = v_0\frac{t_1}{2}$. Площадь полукруга равна $\frac{1}{2}\pi R^2$ и соответствует пройденному телом пути l. Путь l во столько раз больше пути l_1, во сколько раз площадь полукруга больше площади квадрата. Поэтому

$$l = v_0\frac{t_1}{2}\frac{\pi R^2/2}{R^2} = \frac{\pi}{4}v_0 t_1.$$

В таком случае средняя скорость тела равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{l}{t_1} = \frac{\pi}{4}v_0.$$

Задача 12. *Муравей бежит от муравейника по прямой так, что скорость его обратно пропорциональна расстоянию до центра муравейника. В тот момент когда муравей находится в точке А на расстоянии $l_1 = 1$ м от центра муравейника, его средняя скорость равна $v_1 = 2$ см/с. Найдите среднюю скорость муравья, когда он* *добежит от точки A до точки B, которая находится на расстоянии* $l_2 = 2$ *м от центра муравейника.*

Решение. Путь муравья равен $l_2 - l_1$. Нам нужно найти время, за которое муравей добежит от точки A до точки B. Разобьем весь путь муравья на малые участки Δl, которые он проходит за одинаковые промежутки времени Δt. Тогда $\Delta t = \dfrac{\Delta l}{v_{\text{ср}}(\Delta l)}$, где $v_{\text{ср}}(\Delta l)$ – средняя скорость на данном отрезке Δl. Эта формула подсказывает идею решения задачи. Нарисуем график зависимости величины $\dfrac{1}{v_{\text{ср}}(\Delta l)}$ от l на пути от точки A до точки B. Поскольку Δl стремится к нулю, то получим прямолинейный график (рис.4).

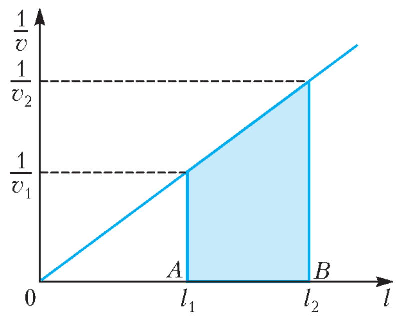


Рис. 4

Закрашенная на рисунке площадь трапеции численно равна искомому времени. Ее нетрудно найти:

$$S_{\text{трапеции}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)(l_2 - l_1) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_1}\frac{l_2}{l_1}\right)(l_2 - l_1) = \frac{l_2^2 - l_1^2}{2v_1 l_1} = t.$$

Таким образом,

$$v_{\text{ср}} = \frac{l_2 - l_1}{t} = \frac{2v_1 l_1}{l_2 + l_1} \approx 1{,}3 \text{ см/с}.$$

Задача 13. *На рисунке 5 изображены графики путей равнопеременного прямолинейного движения двух тел, когда они за одинаковые время прошли одинаковые пути. Найдите значения средних скоростей для этих двух случаев. Сравните средние скорости этих тел в интервале времени* $\left(\dfrac{t_1}{2}; t_1\right)$.

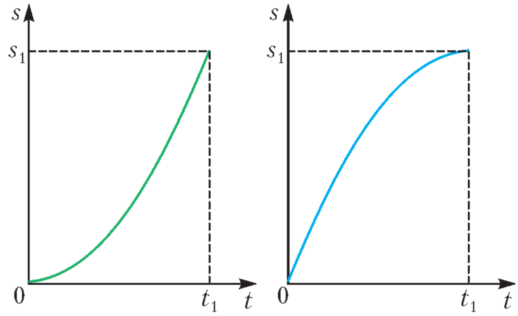


Рис. 5

Решение. Поскольку оба движения равнопеременные, их пройденные пути и время движения одинаковы, то тела двигались с одинаковыми по модулю скоростями. Первое тело двигалось без начальной скорости с ускорением a и достигло скорости $v_0 = at_1$, а второе тело начало движение с начальной скоростью v_0 и противоположно направленным ускорением a и остановилось через промежуток времени t_1. При этом оба тела прошли путь $s_1 = \dfrac{v_0^2}{2a}$. Средние скорости этих тел за все время движения одинаковы и равны $v_{\text{ср}} = \operatorname{tg}\alpha$ (рис.6).

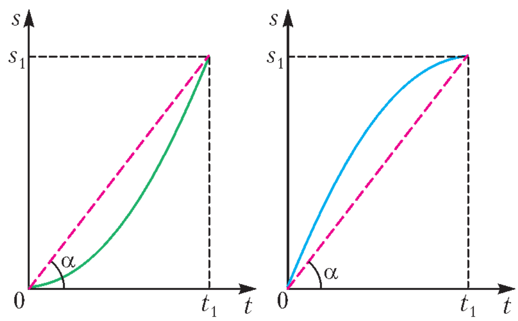


Рис. 6

В интервале времени $\left(\dfrac{t_1}{2}; t_1\right)$ средняя скорость первого тела больше, чем второго. Читатели сами могут это доказать с помощью графиков.

Задача 14. *Трое туристов, обладающих одним велосипедом, должны прибыть на базу в кратчайший срок (время оценивается по последнему прибывшему). Велосипед может взять лишь двоих, поэтому третьему туристу приходится сначала идти пешком. Велосипедист довозит второго туриста до некоторой точки дороги, откуда тот продолжает движение пешком, и возвраща-*

ется за третьим. Найдите среднюю скорость туристов, если скорость пешехода $v_1 = 4$ км/ч, а скорость велосипедиста $v_2 = 20$ км/ч.

Решение. Поскольку время оценивается по последнему прибывшему, кратчайшим оно будет тогда, когда все туристы прибудут на базу одновременно. Графики путей движения туристов в зависимости от времени изображены на рисунке 7. Зеленые линии –

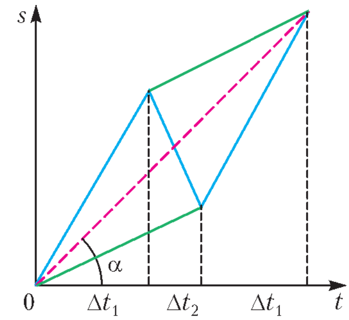


Рис. 7

графики движения второго и третьего туристов, когда они продвигались пешком. Синяя линия – график движения велосипедиста. Красная пунктирная линия – это график мнимого движения группы со средней скоростью $v_{ср}$. Тангенс угла наклона каждого отрезка графика представляет собой скорость движения туриста. Таким образом, $v_{ср} = \operatorname{tg}\alpha$.

Из рисунка 7 следует, что движение пешком занимало у второго и третьего туристов одинаковое время $\Delta t_1 + \Delta t_2$, где Δt_2 – время обратного движения велосипедиста. На основе анализа графиков движений туристов напишем следующую систему уравнений:

$$v_1(\Delta t_1 + \Delta t_2) + v_2\Delta t_1 = v_{ср}(\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_1),$$

$$v_2\Delta t_1 - v_2\Delta t_2 = v_1(\Delta t_1 + \Delta t_2).$$

Отсюда находим среднюю скорость туристов:

$$v_{ср} = \frac{3v_1 + v_2}{3v_2 + v_1}v_2 = 10 \text{ км/ч}.$$

Упражнения

1. Велосипедист ехал из одного города в другой. Половину пути он проехал со скоростью $v_1 = 12$ км/ч. Далее половину оставшегося времени он ехал со скоростью $v_2 = 6$ км/ч, а затем до конца пути шел пешком со скоростью $v_3 = 4$ км/ч. Определите среднюю скорость велосипедиста на всем пути.

2. Тело падает без начальной скорости с высоты h. Найдите среднюю скорость на нижней половине траектории.

3. При перемещении из одного города в другой Коля первую половину пути проехал со скоростью v_1, а вторую половину – со скоростью v_2. Его друг Ваня на той же дороге первую половину всего времени движения ехал со скоростью v_1, а вторую половину времени – со скоростью v_2. Чья средняя скорость больше?

4. Шарик расположен на середине наклонной плоскости. Ему сообщена скорость v_0, направленная вверх вдоль наклонной плоскости. Шарик, дойдя до верхнего края наклонной плоскости, возвращается назад. Найдите среднюю скорость шарика, когда он двигался по наклонной плоскости.

5. Автомобиль первую половину времени ехал со скоростью $v_1 = 80$ км/ч, оставшееся время – со скоростью $v_2 = v_1/2$. Найдите среднюю скорость автомобиля на второй половине его пути.

6. Турист первую треть всего времени движения шел по грунтовой дороге со скоростью $v_1 = 2$ км/ч, затем треть всего пути перемещался по шоссе со скоростью v_2. В конце второго участка пути он встретил грузовик, на котором и вернулся в исходную точку по той же дороге. Известно, что на грузовике он ехал с постоянной скоростью v_3. Вычислите среднюю скорость туриста.

7. На рисунке 8 показано, как меняется с течением времени скорость точки на прямолинейном участке пути. Чему равна средняя скорость

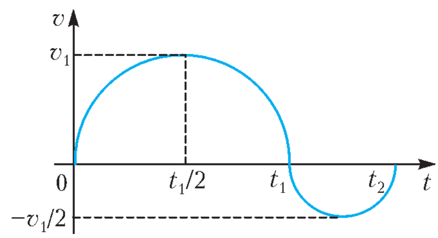


Рис. 8

точки за время t_2? Участки кривых на графике являются полуокружностями, $t_2 - t_1 = t_1/2$.

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №1)

1. Может.

Например, в компании из пяти человек будет три мальчика по имени Саша и две девочки: Катя и Маша.

2. 22.

Получить ноль можно только из 10 и 20. Рассмотрим эти случаи отдельно.

1) Пусть ноль получен из 10. Двойка перед 10 только одна. А вот 7 можно получить из числа 17 или из числа 27.

Если 7 получено из 17, то есть 8 способов выбрать единицу, ведь в числах от 11 до 17 восемь единиц.

Если 7 получено из 27, то есть 11 способов выбрать единицу, ведь в числах от 11 до 27 стоит 11 единиц (две в числе 11, по одной в числах от 12 до 19 и одна в числе 21).

Уже 8 + 11 = 19 способов.

2) Пусть ноль получен из 20. Тогда двойку можно получить из числа 2, из числа 12 и из числа 20 – три способа. Зато 17 получается из чисел 21 и 27 единственным способом. Итого три способа.

Всего получается 19 + 3 = 22 способа.

3. 4.

Пример, как отметить клетки, показан на рисунке 1. Докажем, что тремя клетками и меньше не обойтись. Во-первых, в каждой строке или столбце должна быть хотя бы одна отмеченная клетка, но так как клеток три, то в каждом столбце отмеченная клетка – ровно одна. Значит, в каком-то столбце есть две неотмеченные клетки рядом (вертикальная доминошка 1×2). Рассмотрим соседнюю с ней вертикальную доминошку (она есть или слева, или справа). В ней должны быть отмечены обе клетки, но это невозможно, так как они в одном столбце.

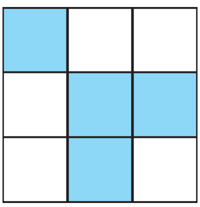


Рис. 1

4. 127.

Поскольку в числах 80 и 90 нет цифр 3 и 4, мы каждый раз складывали как минимум по два числа. При этом не может быть, чтобы в одну сумму вошли три числа, а в другую – два, так как тогда было бы слагаемое 90 – 80 = 10, в котором нет ни цифры 3, ни цифры 4. Значит, в каждую сумму входит ровно по два числа. Какое-то число вошло в обе суммы, т.е. среди наших чисел есть число 34 или 43. Число 34 не подходит, так как 90 – 34 = 56 не содержит четверки, а 43 подходит: 90 – 43 = 47, 80 – 43 = = 37. Тем самым, получаем 43 + 47 + 37 = 127.

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

(см. «Квант» 12 за 2017 г.)

13. Пусть даны последовательные числа $k-1$, k и $k+1$. Рассмотрим треугольник с целочисленными катетами $2k$ и $(k-1)(k+1)$. Его площадь равна $(k-1)k(k+1)$. По теореме Пифагора квадрат его гипотенузы равен сумме квадратов катетов:

$$(2k)^2 + ((k-1)(k+1))^2 = 4k^2 + (k^2-1)^2 =$$
$$= 4k^2 + k^4 - 2k^2 + 1 = k^4 + 2k^2 + 1 = (k^2+1)^2,$$

значит, длина гипотенузы выражается целым числом.

14. $24^3 = 13824$.

Пронумеруем строки числами от 1 до 12 сверху вниз, аналогично пронумеруем столбцы слева направо. В одной строке две ладьи стоять не могут, значит, в каждой строке стоит по одной ладье.

Ладьи, стоящие в строках 1–4, занимают столбцы 1–4. Значит, ладьи, стоящие в строках 8–12, занимают столбцы 8–12. Можно сделать вывод, что ладьи из строк 5–8 могут занимать только столбцы 5–8. Тогда оставшиеся ладьи из строк 9–12 могут стоять только в столбцах 9–12.

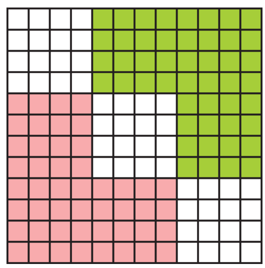


Рис. 2

Таким образом, ладьи делятся на 3 группы по 4 ладьи, каждая группа занимает свой белый квадрат 4×4 (рис.2). Поставить 4 ладьи в одном квадрате можно $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способами (поставить ладью в первую строчку – 4 способа, затем поставить ладью во вторую строчку – 3 способа, так как один столбец уже занят, затем поставить ладью в третью строчку – 2 способа и потом ладья в четвертой строчке ставится однозначно).

В каждом квадрате ладьи ставятся независимо от ладей других квадратов. Значит, всего способов $24^3 = 13824$.

15. Свернем елочку по красным линиям (рис.3). Получим исходный тетраэдр.

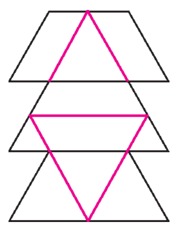


Рис. 3

16. При $n = 4$ потребуется снять 4 гирьки, иначе – 3 гирьки.
Суммарная масса гирек равна $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ г, поэтому исходная масса гирек на каждой чашке равна $\frac{n(n+1)}{4}$ г. Значит, если $n(n+1)$ не делится на 4, то Коля вообще не сможет разложить гирьки, чтобы чашки уравновесились. Так будет при $n = 4m - 3$ и $n = 4m - 2$ (m – произвольное натуральное число).
Таким образом, $n = 4m - 1$ или $n = 4m$. Выясним, сколько гирек надо снять Пете.
Рассмотрим сначала наименьшее значение $m = 1$. Для него получаем $n = 3$ и $n = 4$. В первом случае это гирьки массами 1, 2 и 3 г. Разложить их Коля может только так: на одну чашку – 1 и 2 г, на вторую – 3 г. Пете же для сохранения равновесия потребуется снять все 3 гирьки. При $n = 4$ это гирьки массами 1, 2, 3 и 4 г. Их разложить Коля может только так: на одну чашку – 1 и 4 г, на вторую – 2 и 3 г, и Пете для сохранения равновесия потребуется снять все 4 гирьки.
Убедимся, что при $m \ge 2$ (и, стало быть, $n \ge 7$) Петя всегда может добиться своего, сняв 3 гирьки. Докажем от противного. Пусть при каком-то $n \ge 7$ Коля так уравновесил гирьки, что Петя не может сохранить равновесие, сняв 3 из них.
Ту чашку, на которой лежит 1-граммовая гирька, обозначим буквой А, а вторую чашку – буквой Б. Расположим гирьки с чашки А в порядке возрастания масс. Первой будет гирька массой 1 г, а масса следующей по величине гирьки пусть равна k г. Заметим, что в этом случае гирька с массой $(k+1)$ г тоже должна лежать на чашке А. В самом деле, если она находится на чашке Б, то Петя может снять с чашки А гирьки массами 1 г и k г, а с чашки Б – гирьку массой $(k+1)$ г, и равновесие сохранится. По аналогичной причине и гирька массой $(k+2)$ г тоже должна лежать на чашке А, и гирька массой $(k+3)$ г, и вообще все гирьки массами k г и более.
Оценим значение k, исходя из первоначального равновесия чашек А и Б. На чашке Б суммарная масса гирек равна $2+3+\ldots+(k-1) = \frac{(k-1)k}{2} - 1$ г, и это значение должно равняться $\frac{n(n+1)}{4}$ г.
Если $n \ge 7$, то $\frac{n(n+1)}{4} \ge 14$, и потому $\frac{(k-1)k}{2} \ge 15$, откуда $k \ge 6$. Поэтому $k - 2 > 2$. Отсюда следует, что гирьки массами 2 г и $(k-2)$ г – это разные гирьки и обе лежат на чашке Б. Но тогда Петя может добиться своего, сняв с чашки А гирьку массой k г, а с чашки Б – две гирьки массами 2 г и $(k-2)$ г. Вот и противоречие. Значит, предположение о том, что Петя не может снять три гирьки для сохранения равновесия, было неверным, и он все-таки может обойтись именно тремя гирьками.
Убрать одну или две гирьки недостаточно, ведь чтобы равновесие сохранилось, надо убирать с обеих чашек хотя бы по одной гире, а гирь одинаковой массы у нас нет.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Теплоемкость твердых пород, образующих берег, значительно меньше теплоемкости воды, поэтому днем берег нагревается до более высокой температуры быстрее, чем вода в море. Конвекционные потоки теплого воздуха поднимаются над сушей вверх, а на их место поступает более холодный воздух с моря. Ночью происходит обратный процесс.
2. При обтекании провода ветром воздушный поток становится неустойчивым, с провода срываются вихри, создающие колебания давления воздуха, которые мы воспринимаем как звуки.
3. Вследствие большой теплоемкости окружающих острова водных масс за лето в них накапливается огромное количество тепловой энергии, которую вода, остывая, отдает зимой воздуху.
4. Нет; силы трения, возникающие между воздушными и водными течениями и поверхностью Земли, являются внутренними силами, суммарный момент которых равен нулю.
5. Масса Земли недостаточна, чтобы удержать в атмосфере значительное количество такого легкого газа, как водород.
6. Падение атмосферного давления, обычно связываемое с ухудшением погоды, наблюдается также и при подъеме на высоту.
7. Процесс кристаллизации воды связан с выделением тепла.
8. В сухом воздухе возможно непосредственное испарение льда, минуя жидкую фазу.
9. На скате крыши падающие лучи солнца поднимают температуру выше нуля – и снег тает; вода, стекая с крыши, замерзает, так как температура воздуха ниже нуля.
10. Густое дерево выполняет роль термостата – суточные колебания температуры под ним выражены слабо, и при охлаждении окружающего воздуха под деревом точка росы не достигается.
11. Утром происходит испарение росы, а вечером – ее конденсация из насыщенного парами

воздуха. Первый процесс идет с поглощением тепла, а второй – с его выделением.

12. В сырой пасмурный день из-за высокой влажности воздуха тело человека плохо охлаждается за счет испарения. По той же причине в низинах и в болотистых местах жара переносится труднее.

13. Сила тяжести капелек большого радиуса больше силы сопротивления воздуха, и они падают вниз. Если же радиус капельки мал, то ее сила тяжести мало отличается от силы сопротивления. Поэтому достаточно самого слабого восходящего движения воздуха, чтобы капелька, а значит и облако, удерживалась от падения и даже поднималась вверх.

14. Свет полностью рассеивается, преломляясь и отражаясь на огромном числе случайно расположенных капелек тумана.

15. Причина – в парниковом эффекте, возникающем из-за наличия в земной атмосфере водяного пара и углекислого газа, «непрозрачных» для тепловых лучей.

16. Для образования мощных грозовых облаков необходима быстрая вертикальная конвекция влажного воздуха. Как правило, зимой условий для образования такой конвекции нет.

17. Влажная почва у берегов рек и озер хорошо проводит электричество.

18. Высоко в горах воздух гораздо чище и разреженнее, чем внизу, поэтому ультрафиолетовым лучам, вызывающим загар, легче через него проходить.

19. Солнце, находясь за горизонтом, освещает атмосферу. Воздух рассеивает солнечные лучи и создает сумеречный свет.

Микроопыт

Восходящие потоки воздуха все время немного меняют плотность атмосферы и условия преломления световых лучей. Быстрое изменение их направления – мерцание – заметнее вблизи поверхности, так как лучи от «низких» звезд проходят больший путь в атмосфере.

АНДРЕЙ АНАТОЛЬЕВИЧ ЗАЛИЗНЯК

Задача 2. Окончания существительных различаются в зависимости от рода и падежа:

	муж.	жен.
им.	*-ë*	
род.	*-it*	*-ës*

Окончания прилагательных различаются в зависимости от рода: муж. *-ëm*, жен. *-me*. Определение, выраженное существительным или прилагательным, ставится после определяемого слова. Между определяемым и определением обязательно ставится «малое слово», согласованное с определяемым в роде и падеже. «Малые слова»:

	муж.	жен.
им.	*i*	*e*
род.	*të*	*së*

Ответ на задание 1: конь племянницы царицы – *kalë i mbesës së mbretëreshës*; слабая девочка – *vayzë e hajthme*.

Ответ на задание 2 фактически дан выше.

Упражнение 1: *вы-* ↓, *-мог-* →, *-мы-* ↓, *-жи-* –, *-а* ↓, *-и* –.

Упражнение 2: *день*, *лев*, *сон*, *пшено*, *ложка*, *почесть*, *льстим*, *лесть*, *чтец*, *Смоленску*.

Задача 3

Шаг 1 (классификация омег). Разделим все буквы *w* на два класса: свободная *w* и несвободная *w*. Назовем несвободными такие *w*, которые стоят в 1-м перестроенном слоге, и свободными – все остальные.

Шаг 2 (первичная генерация вариантов). Если в записи «Мерила» есть хотя бы одна свободная *w*, слово может иметь только автономное ударение на слоге с самой левой свободной *w* или на два слога левее (если такой слог есть). Если в слове нет ни одной свободной *w*, слово может иметь любое ударение (автоматическое или автономное на любом слоге)

Шаг 3 (ограничение возможностей). Если в записи «Мерила» есть хотя бы одна буква *о* на месте раннедревнерусского *о*, для каждой такой буквы из возможностей, полученных в шаге 2, следует исключить автономное ударение на этом слоге и на два слога левее (если такой слог есть).

Рассмотрим несколько примеров (см. таблицу на следующей странице).

Однозначно определяется ударение в словах *мẃжемъ*, *живẃтъ*, *подẃбалw*, *свободнẃму* и *¯золото*. В словах *подẃбалw* и *свободнẃму* ударение отличается от современного (*подоба́ло* и *свобо́дному*); в слове *¯свободе́нъ* мы не можем однозначно определить ударение, но оно в любом случае отлично от современного *свобо́ден*[1].

Задачи 1 и 2 А.А.Зализняка с некоторыми изменениями в изложении решений воспроизводятся по сборнику: В.И.Беликов, Е.В.Муравенко, М.Е.Алексеев (ред.-сост.). Задачи лингвистических олимпиад (М.: МЦНМО, 2006); задачи

---

[1] Из других источников известно, что на самом деле было ударение *¯свободенъ*.

Написание «Мерила»	Шаг 1 (свободные *w* подчеркнуты)	Шаг 2 (отмечены все варианты)	Шаг 3 (отмечены все варианты)	Число вариантов
истиненъ	*истиненъ*	*¯и́сти́не́нъ*	*¯и́сти́не́нъ*	4
золото	*золото*	*¯зо́ло́то́*	*¯золото*	1
погребенw	*погребен<u>w</u>*	*погре́бенẃ*	*погре́бенẃ*	2
подwбалw	*под<u>w</u>бал<u>w</u>*	*подẃбалw*	*подẃбалw*	1
свободенъ	*свободенъ*	*¯сво́бо́де́нъ*	*¯свободе́нъ*	2
свитокъ	*свитокъ*	*¯сви́то́къ*	*¯сви́то́къ*[2]	3

180 и 139. Задача 3 не публиковалась в таком виде, но в разные годы устно предлагалась (без ограниченного списка примеров) слушателям курса по истории русского ударения. Примеры взяты мною из оцифрованной рукописи «Мерило праведное» (http://old.stsl.ru/manuscripts/medium.php?manuscript=015) и из работы А.А.Зализняка «Противопоставление букв *о* и *w* в древнерусской рукописи XIV века «Мерило Праведное» (1978).

ГДЕ ОШИБКА?

1. В обоих пунктах в решениях ошибок нет, но некорректно условие задачи. Поясним это.

а) Для того чтобы выражение $\sqrt{10-a^4}$ имело смысл, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $a^4 \le 10$. Тогда $\sqrt{74-a^4} \ge \sqrt{64} = 8$. Следовательно, сумма данных корней не может быть равна 4.

б) Докажем, что значений t, для которых указанная разность корней равна 2, не существует. Действительно, пусть $t^2 = x \ge 0$, тогда рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{24-x} - \sqrt{8-x}$, где $x \in [0;8]$. Ее производная

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{24-x}} + \frac{1}{2\sqrt{8-x}} > 0$$

во всех внутренних точках указанного промежутка. Следовательно, ее наименьшее значение достигается при $x = 0$. Но $f(0) = 2\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) > 2$, так как

$$\sqrt{6}-\sqrt{2} > 1 \Leftrightarrow 6 > \left(1+\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow 3 > 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 9 > 8.$$

2. Приведенный ответ неверен, а в решении есть еще одна существенная ошибка. Не рассмотрен случай, когда уравнение (*) не является квадратным, т.е. когда $6p + 4q + 9 = 0$. Для этого случае мы и можем построить пример, показывающий, что ситуация, описанная в условии, возможна.

Действительно, пусть исходное уравнение имеет вид $4x^2 - 12x + 9 = 0$, тогда у него есть единственный корень: $x = \frac{3}{2}$. Корнями уравнения, полученного при указанной замене, должны являться корни уравнения $\frac{3x+1}{2x+1} = \frac{3}{2}$, но это уравнение корней не имеет.

3. Полученный ответ верен, а решение содержит ошибки.

1) Последовательность $\left(1, x, x^2, \ldots, x^n\right)$ является геометрической прогрессией только в случае, когда $x \ne 0$.

2) Использованная формула суммы n первых членов геометрической прогрессии справедлива только при $x \ne 1$.

Поэтому необходимо было отдельно выяснить, являются ли числа 0 и 1 корнями исходного уравнения, и отдельно рассмотреть случай, когда $x \ne 0$ и $x \ne 1$. Отбрасывание «постороннего корня», описанное в решении, подчеркивает допущенную ошибку.

Таким образом, исправленное решение может быть таким.

Подставив в исходное уравнение $x = 0$, получим, что 0 – его корень.

Подставив в исходное уравнение $x = 1$, получим, что 1 его корнем не является.

Для $x \ne 0$ и $x \ne 1$ используем суммирование геометрической прогрессии и получим, что в этом случае корней нет.

Приведем также другой способ решения предложенного уравнения. Пусть $1 + x + \ldots + x^{10} = S$, тогда исходное уравнение примет вид

$$\left(S - x^{10}\right)\left(S + x^{11}\right) = S^2 \Leftrightarrow x^{10}\left(Sx - S - x^{11}\right) = 0.$$

Учитывая, что $S(x-1) = x^{11} - 1$, получим, что $-x^{10} = 0$, т.е. $x = 0$.

4. Конечно, в приведенном решении потерян еще один корень уравнения: $x = -2$. Это произошло

[2] Так как здесь *о* из *ъ*, исключить ударение на *о́* нельзя.

при замене выражений $\sqrt{(x-1)(x+1)}$ и $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ на выражения $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$ и $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ соответственно. Тем самым, были использованы равенства $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ и $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, которые одновременно выполняются только при $a\ge 0$ и $b>0$. На самом деле $\sqrt{ab}=\sqrt{|a|}\cdot\sqrt{|b|}$ и $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$, поэтому приведенный способ решения, в котором фактически разобран только случай, когда $x>1$, требуется дополнить разбором случая $x\le -1$ (или $x<-1$ с учетом ранее найденного корня). В этом случае получим

$$\begin{cases}\sqrt{1-x}=\dfrac{x+5}{\sqrt{1-x}},\\ x<-1\end{cases} \Leftrightarrow x=-2.$$

5. Приведенное решение не является полным, а полученный ответ – неверный. Данное уравнение не равносильно записанной системе: пропущен случай, когда обе части равны нулю, т.е. когда $x^2-4=1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5}$. В этом случае достаточно, чтобы выражения в основаниях обоих логарифмов были положительны и отличны от 1. Этим условиям удовлетворяет $x=\sqrt{5}$. Таким образом, **ответ**: 3; $\sqrt{5}$.

6. Предложенное решение основывается на трех утверждениях.

1) Уравнение $f(f(x))=x$ равносильно уравнению $f(x)=f^{-1}(x)$.

2) Если графики двух взаимно обратных функций пересекаются, то точки их пересечения лежат на прямой $y=x$.

3) Из уравнения $f(f(x))=x$ следует уравнение $f(x)=x$.

Каждое из этих утверждений ложно, причем 3) автоматически следует из неверных утверждений 1) и 2). Обоснуем это.

1) Утверждение выполняется только для обратимых функций. В данном случае функция $f(x)=x^2+2x+5$ обратимой не является (существуют различные значения аргумента, которым соответствуют одинаковые значения функции).

2) Точки пересечения графиков взаимно обратных функций могут не лежать на прямой $y=x$, а быть симметричными относительно этой прямой. Например, рассмотрим взаимно обратные функции $f(x)=-x^3$ и $g(x)=-\sqrt[3]{x}$, графики которых имеют три точки пересечения: $(0;0)$; $(1;-1)$; $(-1;1)$.

Другой контрпример: функции вида $y=-x+b$, которые совпадают с обратными к ним. Существует также «хрестоматийный» пример взаимно обратных функций $f(x)=\left(\frac{1}{16}\right)^x$ и $g(x)=\log_{\frac{1}{16}} x$, графики которых пересекаются в трех точках, одна из которых лежит на прямой $y=x$, а две другие: $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ и $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$.

Отметим также, что несложно доказать следующее утверждение: если графики взаимно обратных **возрастающих** функций пересекаются, то их точки пересечения лежат на прямой $y=x$.

3) Как будет показано ниже, данное уравнение имеет корни, отличные от корней уравнения $x^2+2x-5=x$.

Отметим, что обратное утверждение является верным: $f(x)=x \Rightarrow f(f(x))=f(x)\Rightarrow f(f(x))=$ $=x$. Поэтому корни уравнения, полученные в решении, действительно являются корнями исходного уравнения, но не составляют все множество корней, т.е. приведенный ответ неверен.

Приведем два основных способа решения данного уравнения.

Первый способ. Если x_0 является корнем уравнения $f(x)=x$, то x_0 является и корнем уравнения $f(f(x))=x$, поэтому $x=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$ – корни данного уравнения. Для того чтобы найти остальные корни, приведем исходное уравнение к виду $x^4+4x^3-4x^2-17x+10=0$ (раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые). Многочлен, полученный в левой части уравнения, разделим на трехчлен x^2+x-5 «в столбик». Получим трехчлен x^2+3x-2, корнями которого являются числа $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$. Поэтому **ответ**: $\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$; $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$.

Второй способ. Пусть $x^2+2x-5=y$, тогда $y^2+2y-5=x$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases}x^2+2x-5=y,\\ y^2+2y-5=x.\end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе и преобразуем:

$$x^2-y^2+3x-3y=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y,\\ y=-x-3.\end{array}\right.$$

Подставив полученные выражения в любое из уравнений системы, получим совокупность двух квадратных уравнений. Решив квадратные уравнения, найдем ответ, записанный выше.

7. Рассуждения в приведенном решении ошибок не содержат. По-видимому, некорректно усло-

вие задачи. Это можно обосновать по-разному.
Первый способ. Преобразуем равенство из условия: при $x > 0$, $y > 0$ и $z > 0$

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=1 \Leftrightarrow x(z+x)(x+y)+$$
$$+y(y+z)(x+y)+z(y+z)(z+x)=$$
$$=(x+y)(y+z)(z+x).$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим равенство $x^3+y^3+z^3+$ $+3xyz=0$, которое не может быть верным при положительных значениях всех переменных.
Второй способ. Докажем, что при $x > 0$, $y > 0$ и $z > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\ge 1{,}5.$$

Пусть $x + y = a$, $y + z = b$, $z + x = c$, тогда $x+y+z=\frac{a+b+c}{2}$. Выразим x, y и z: $x=\frac{a+c-b}{2}$, $y=\frac{a+b-c}{2}$, $z=\frac{b+c-a}{2}$. Таким образом,

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=$$
$$=\frac{a+c-b}{2b}+\frac{a+b-c}{2c}+\frac{b+c-a}{2a}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}-1+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}-1\right)\ge\frac{3}{2},$$

так как сумма двух взаимно обратных положительных чисел больше или равна двум.
8. Ошибка допущена при переходе от $\operatorname{arctg} x = a$ к равенству $x=\operatorname{tg} a$. Такой переход будет корректным только в случае, когда число a принадлежит множеству значений функции $\operatorname{arctg} x$, т.е. $a\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. В нашем случае это не так:

$$\operatorname{arctg}2+\operatorname{arcctg}(-2)=\operatorname{arctg}2+\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(-2)\right)=$$
$$=\frac{\pi}{2}+2\operatorname{arctg}2>\frac{\pi}{2}.$$

Значит, исходное уравнение не имеет решений.
9. Из того, что одно из уравнений системы имеет единственное решение, не следует, что система также имеет единственное решение.
Действительно, в нашем случае при $a = 0{,}25$ решением рассмотренного уравнения является $y = -0{,}25$. Тогда первое уравнение системы примет вид $x^2 - 2x + 0{,}25 = 0$. Так как его упрощенный дискриминант $D' = 1-0{,}25>0$, то оно имеет два различных корня. Значит, при $a = 0{,}25$ система имеет два решения.
Приведем одно из возможных верных решений.

Запишем равносильную систему, преобразовав второе уравнение:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ (x-1)^2+(y-a)^2=1. \end{cases}$$

Тогда графиком первого уравнения в декартовой системе координат является парабола, а графиком второго уравнения – окружность (для каждого значения a). Заметим, что прямая $x = 1$ является осью симметрии параболы и окружности (рис.4), поэтому точки их пересечения (если

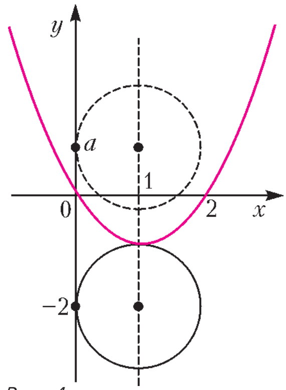


Рис. 4

они есть) симметричны относительно этой прямой. Значит, система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда графики пересекаются только на оси симметрии. Этот случай соответствует их касанию в вершине параболы, причем окружность расположена ниже параболы. Отсюда следует **ответ**: при $a = -2$.
10. Если построить графики функций и касательную в одной системе координат (рис.5),

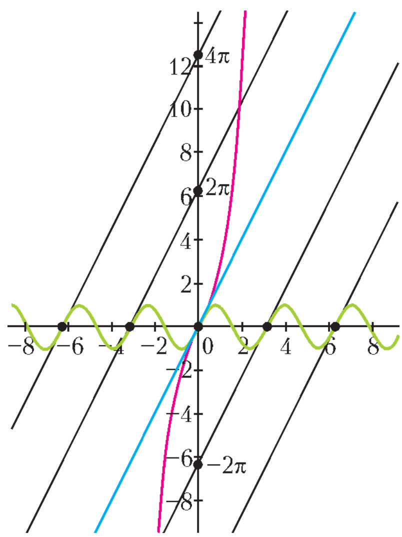


Рис. 5

станет ясно, что полученный ответ неверен: вместо требуемой касательной найдена общая касательная двух графиков. Это произошло из-за двух ошибок, допущенных в решении.

1) В записанных уравнениях касательных выбрана одна и та же точка x_0, а это ниоткуда не следует.

2) Не проверено, что при найденном значении x_0 совпадают не только угловые коэффициенты касательных, но и свободные члены в их уравнениях (если бы свободные члены оказались различными, то полученный ответ мог бы оказаться одним из возможных).

Если в уравнениях касательных выбрать различные точки касания x_0 и x_1, то условие равенства угловых коэффициентов будет выглядеть так: $2\cos 2x_0 = 3x_1^2 + 2$. По тем же соображениям, что указаны в решении, получим необходимое условие параллельности касательных:

$$\begin{cases}\cos 2x_0 = 1,\\ x_1 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0 = \pi n,\ n \in \mathbb{Z},\\ x_1 = 0.\end{cases}$$

Подставив полученное значение x_0 в уравнение касательной, указанное в решении, получим $y = 2x - 2\pi n$.

Достаточность обеспечивается условием $x_0 \neq x_1$. Таким образом, условию задачи удовлетворяют все прямые вида $y = 2x - 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

11. Уже из приведенного примера понятно, что сформулированное утверждение не может быть верным. Если рассмотреть функцию $f(x) = x^2$, то функция $f(f(x)) = x^4$ не является возрастающей функцией (убывает при $x \in (-\infty; 0]$ и возрастает при $x \in [0; +\infty)$). Дело в том, что в приведенном решении неявно предполагается, что если $[a;\ b]$ является промежутком монотонности, то и $[f(a); f(b)]$ – также промежуток монотонности, а это не так. Утверждение «композиция как двух возрастающих функций, так и двух убывающих функций есть функция возрастающая» справедливо лишь для таких функций, монотонных на промежутке M, у которых множество значений содержится в том же промежутке M.

В приведенном примере функция $f(x) = x^2$ отображает промежуток $(-\infty; 0]$ не в себя, а на промежуток $[0; +\infty)$. Другим возможным простым контрпримером является функция $f(x) = |x|$.

Кроме того, допущена ошибка и в доказательстве, поскольку отсутствие промежутков, на которых функция постоянна, не означает, что количество точек экстремума конечно, ведь их может быть счетное число. Тем самым, утверждение о том, что числовая прямая разбивается на не перекрывающиеся промежутки монотонности функции $f(x)$, приведенное в доказательстве, также неверно.

На этот счет существует классический пример, предложенный известным алгебраистом Ван дер Варденом. Продолжим функцию $f_1(x) = |x|$ при $|x| \leq \frac{1}{2}$ периодически на всю числовую прямую с периодом $T = 1$. Положим далее $f_n(x) = 4^{1-n} \cdot f_1\left(4^{n-1} \cdot x\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда можно показать, что ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ сходится к некоторой непрерывной функции $f(x)$ (грубо говоря, состоящей почти сплошь из изломов), обладающей парой необычных свойств. Во-первых, на любом интервале числовой прямой эта функция не является монотонной и, во-вторых, она не имеет производной ни в одной точке.

Доказательство этих фактов можно прочитать, например, в книжке: Б.Гелбаум, Дж.Олмстед. «Контрпримеры в анализе» (М.: URSS-ЛКИ, 2007).

Еще одним возможным контрпримером является функция

$$f(x) = \begin{cases}x \cdot \sin\dfrac{1}{x}, \text{ если } x \neq 0,\\ 0, \text{ если } x = 0.\end{cases}$$

ДОКАЗАТЬ ДЕЛИМОСТЬ ПОМОЖЕТ КОМБИНАТОРИКА

1. б) Среди чисел n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ два четных, одно из которых кратно 4, поэтому $N = n(n+1)(n+2)(n+3) \vdots 8$. Кроме того, $N \vdots 3$. Отсюда $N = 3 \cdot 3N - 8N \vdots 24$, так как $3N \vdots 3 \cdot 8$ и $8N \vdots 8 \cdot 3$.

2. Если $N \vdots 24{,}5$, то $N = 5 \cdot 5N - 24N \vdots 120$. Вообще, обратный ход алгоритма Евклида, примененного к взаимно простым числам a и b, показывает, что $ua + vb = 1$ для некоторых $u, v \in \mathbb{Z}$. Поэтому если $N \vdots a,b$, то $N = uaN + vbN \vdots ab$.

3. Среди чисел 1, 2, …, k ровно $\left[\dfrac{k}{p}\right]$ кратных p, среди них ровно $\left[\dfrac{k}{p^2}\right]$ кратно p^2 и т.д. Отсюда следует формула Лежандра. Применим ее к числам $n, m, n-m \in \mathbb{N}$. Так как

$$\left[\frac{n}{p^k}\right] \geq \left[\frac{m}{p^k}\right] + \left[\frac{n-m}{p^k}\right], \text{ то } n! \vdots m!(n-m)!.$$

4. Доказательство с помощью формулы Лежандра сводится к неравенству $[a] + [b] + [a+b] \leq$ $\leq [2a] + [2b]$. Расписав $a = [a] + \{a\}$ и $b = [b] + \{b\}$, получим $[\{a\} + \{b\}] \leq [2\{a\}] + [2\{b\}]$, что доказывается перебором четырех случаев $\{a\},\{b\} \gtrless \frac{1}{2}$.

5. *Первый способ.* Покажем, что каждый (комплексный) корень знаменателя является корнем числителя не меньшей кратности. Пусть ε – любой корень из единицы, причем $n \in \mathbb{N}$ – наименьшее число, для которого $\varepsilon^n = 1$. Тогда $\varepsilon^N = 1 \Leftrightarrow N \vdots n$, поэтому ε – корень многочлена $x^m - 1$ кратности $\left[\frac{m}{n}\right]$. Утверждение $f_{k+l}(x) \vdots f_k(x) f_l(x)$ следует теперь из неравенства $\left[\frac{k}{m}\right] + \left[\frac{l}{m}\right] \le \left[\frac{k+l}{m}\right]$.

Второй способ. Сосчитаем число k-мерных подпространств в пространстве $\mathbb{Z}_p^{k+l}$ над полем $\mathbb{Z}_p$ (p – любое простое число).[3] Каждое такое подпространство определяется своим базисом – набором из k линейно независимых векторов. Сколькими способами можно выбрать такой упорядоченный набор $(e_1, \ldots, e_k)$? В качестве первого вектора e_1 можно взять любой ненулевой – всего $p^{k+l} - 1$ вариантов. Далее, e_2 может быть любым, не пропорциональным вектору e_1: $e_2 \ne ae_1$, $a \in \mathbb{Z}_p$, т.е. для e_2 имеем $p^{k+l} - p$ вариантов. При выбранных e_1, e_2 вектор e_3 не должен через них выражаться: $e_3 \ne ae_1 + be_2$, $a, b \in \mathbb{Z}_p$, так что для e_3 всего $p^{k+l} - p^2$ вариантов, и т.д. Итого, $\prod_{i=0}^{k-1}\left(p^{k+l} - p^i\right)$ наборов. Это число надо разделить на число базисов в k-мерном подпространстве, которое по тем же причинам равно $\prod_{i=0}^{k-1}\left(p^k - p^i\right)$. Значит, число k-мерных подпространств в $\mathbb{Z}_p^{k+l}$ равно

$$\frac{\prod_{i=0}^{k-1}\left(p^{k+l} - p^i\right)}{\prod_{i=0}^{k-1}\left(p^k - p^i\right)} = \frac{f_{k+l}(p)}{f_k(p) f_l(p)} = g_{k,l}(p).$$

Итак, значения многочлена $f_{k+l}(x)$ делятся на значения многочлена $f_k(x) f_l(x)$ при всех простых $x = p$. Отсюда следует делимость самих многочленов. В самом деле, разделим с остатком: $f_{k+l}(x) = q(x) f_k(x) f_l(x) + r(x)$. Все многочлены здесь имеют целые коэффициенты. По доказанному, $r(p) = 0$ для всех простых p, значит, у многочлена $r(x)$ бесконечно много корней и он нулевой.

6. $[n]! = \frac{(10-1)\left(10^2-1\right)\ldots\left(10^n-1\right)}{9^n} = \frac{f_n(10)}{9^n}$ в обозначениях предыдущей задачи, согласно которой $f_{m+n}(x) \vdots f_m(x) f_n(x)$ в $\mathbb{Z}[x]$. Следовательно, $9^m[m]!\,9^n[n]! = f_m(10) f_n(10)$ делит $f_{m+n}(10) = 9^{m+n}[m+n]!$.

[3] Эти подпространства образуют важное многообразие, называемое *грассманианом*.

7. Любой многочлен степени n однозначно записывается в виде $f(x) = a_n C_x^n + \ldots + a_1 C_x^1 + a_0$, где $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ (индукция по n: если $f(x) = b_n x^n + \ldots$, то $\deg\left(f(x) - b_n n! C_x^n\right) < n$). Докажем, что многочлен $f(x)$ целозначен $\Leftrightarrow a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$. Импликация $\Leftarrow$ очевидна, так как многочлены C_x^k целозначные. Обратно, если $f(x)$ целозначен, то

$f(0) = a_0 \in \mathbb{Z}$,

$f(1) = a_0 + a_1 \in \mathbb{Z}$,

$f(2) = a_0 + 2a_1 + a_2 \in \mathbb{Z}$,

$f(3) = a_0 + 3a_1 + 3a_2 + a_3 \in \mathbb{Z}$,

…

$f(n) = a_0 + C_n^1 a_1 + C_n^2 a_2 + \ldots + C_n^{n-1} a_{n-1} + a_n \in \mathbb{Z}$.

Отсюда последовательно получаем, что $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$.

9. Рассмотрим слова из n букв $x_1, \ldots, n$ букв x_k – всего $\frac{(nk)!}{n!^k}$ слов. Переставляя в данном слове индексы у букв, получим из него $k!$ слов. Значит, $\frac{(nk)!}{n!^k} \vdots k!$. Можно также сказать, что $\frac{(nk)!}{n!^k\, k!}$ – это число способов разбить nk человек на k групп по n человек, причем нам неважен ни порядок людей в группах, ни порядок самих групп.

СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ

1. $v_{ср} = \frac{2v_1(v_2 + v_3)}{2v_1 + v_2 + v_3} \approx 7$ км/ч.

2. $v_{ср} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}\sqrt{gh}$.

3. Средняя скорость Вани больше.

4. $v_{ср} = \frac{3}{2\left(1 + \sqrt{2}\right)} v_0$.

5. $v_{ср} = \frac{6}{5} v_0 = 48$ км/ч.

6. $v_{ср} = 2v_1 = 4$ км/ч.

7. $v_{ср} = \frac{5\pi}{24} v_1$.

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП LII ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

7 класс

1. См. рис.6; $\Delta t = 40$ мин; $l_{\max} = 20$ км.

2. $\rho = \rho_в \frac{m_0 - m_1}{m_2 - m_1} = 0{,}8$ г/см^3.

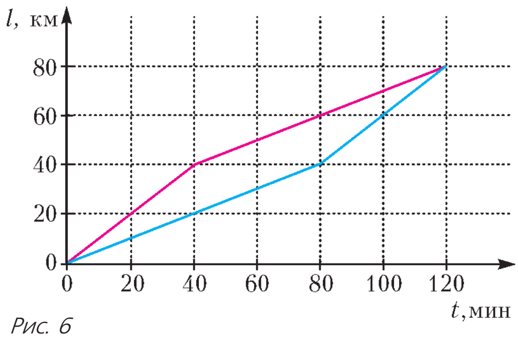


Рис. 6

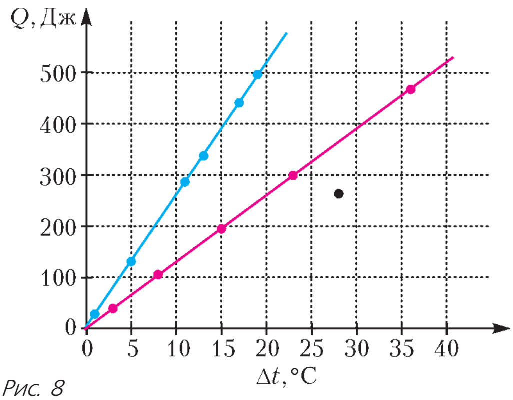


Рис. 8

3. Наибольшая цена деления у термометра *в*, она равна 5 °С. Наибольшую температуру, 33 °С, показывает термометр *г*. Отношение максимальной и минимальной скоростей подъема столбиков, в термометрах *б* и *в* соответственно, равно $15/3{,}6 \approx 4{,}2$.

4. См. рис. 7. До момента $t = 100$ с воды в поддоне нет. Затем вода начинает заполнять поддон и в течение следующих 300 с заполняет его до уровня 75 мм.

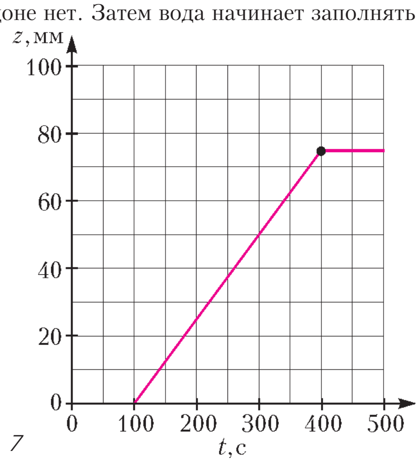


Рис. 7

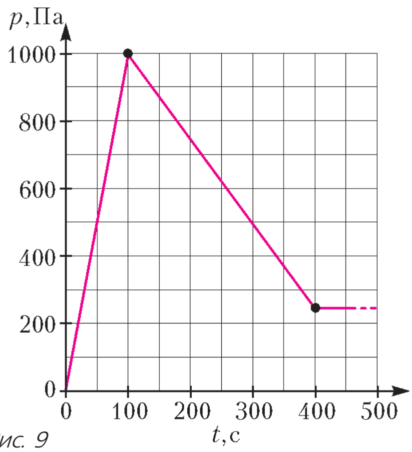


Рис. 9

8 класс

1. $t_1 = \frac{3}{4}t$. **2.** $t = 4{,}5$ °С.

3. $\frac{m_1}{m_2} = 2$; надо отбросить результат для $Q = 260$ Дж (см. рис.8).

4. См. рис.9.

9 класс

1. $t_3 = \frac{t_1 t_2 (t_1 + t_2)}{t_1^2 + t_2^2} = 36$ с.

2. $m_1 = m_2 = 2m = 2$ кг (запишите условия равновесия для каждого груза и весомого блока).

3. $t_3 = 40{,}7$ °С (запишите уравнения теплового баланса для трех случаев).

4. См. рис.10; к эксперименту Глюка относятся все точки прямолинейного графика; $R = 7$ Ом; обоим экспериментам соответствует точка $U = 1{,}6$ В.

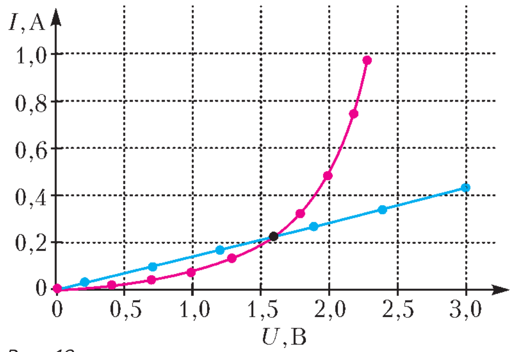


Рис. 10

5. См. рис.11. В интервале от 0 до 100 с давление, оказываемое высоким сосудом, равномерно убывает от 5 до 4 кПа. Затем в течение 300 с вытекающая вода заполняет поддон, и появляется возрастающая сила Архимеда, действующая на сосуды. После этого вытекание воды прекратится, и давление ниже 250 Па не упадет.

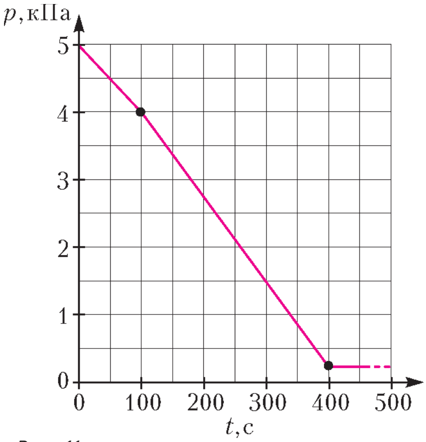


Рис. 11

10 класс

1. См. рис.12; скорость была определена неверно на высоте $h = 50$ м; $h_{max} \approx 365$ см; $t = 1{,}6$ с.

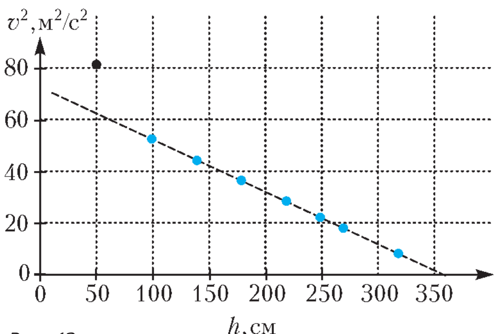


Рис. 12

2. $h = \dfrac{L}{2}$.

3. $m_1 = 6m = 6$ кг, $m_2 = 2m = 2$ кг (запишите условия равновесия для каждого груза и весомого блока).

4. $U_2 = U_8 = 6$ В, $U_3 = U_4 = 4$ В, $U_5 = U_6 = U_7 = 3$ В, $U_9 = 8$ В, $U_{10} = 9$ В, $U_{AB} = U_9 + U_5 = 11$ В.

5. См. рис.13. В интервале времени от 0 до 100 с α уменьшается по гиперболическому закону $\alpha(t) = \dfrac{5h_0}{vt} - 1$ от бесконечности до $\alpha = 4$. В интервале от 100 до 400 с α уменьшается линейно, так как низкий сосуд уже заполнен, а из высокого сосуда вода продолжает выливаться.

11 класс

1. См. рис.14; одному шарику принадлежат точки

№	1	2	3	4	5	6
h, см	120	150	240	270	300	350
v, м/с	7,7	7,3	6,0	5,5	4,9	3,7

другому –

№	1	2	3	4	5	6
h, см	100	160	200	210	220	280
v, м/с	6,4	5,4	4,6	4,4	4,1	2,2

$\dfrac{h_{max\,2}}{h_{max\,1}} = \dfrac{425\text{ см}}{310\text{ см}} \approx 1{,}4$; $t_1 = 2\sqrt{\dfrac{2h_1}{g}} = 1{,}6$ с,

$t_2 = 2\sqrt{\dfrac{2h_2}{g}} = 1{,}9$ с.

2. $m_1 = 2m = 2$ кг, $m_2 = m = 1$ кг (запишите условия равновесия для каждого груза и весомого блока).

3. См. рис.15.

4. а) По ребрам AE, BF, CG и DH ток не идет, сила тока в остальных ребрах одинакова и равна $I = \dfrac{ka^2}{4R}$. б) По ребрам AE и CG ток не идет,

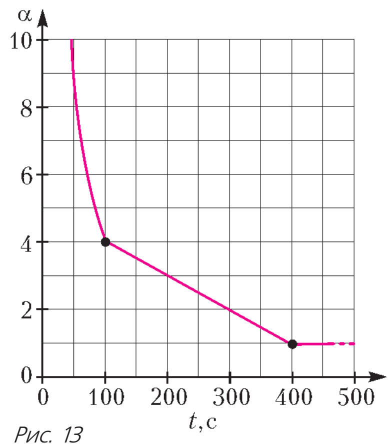


Рис. 13

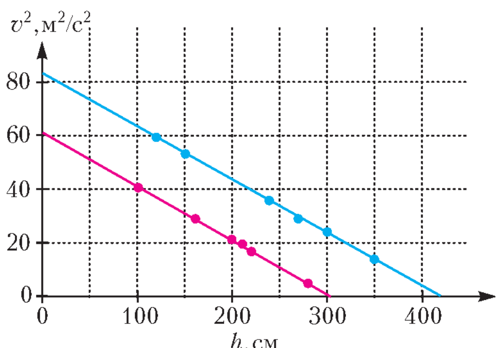


Рис. 14

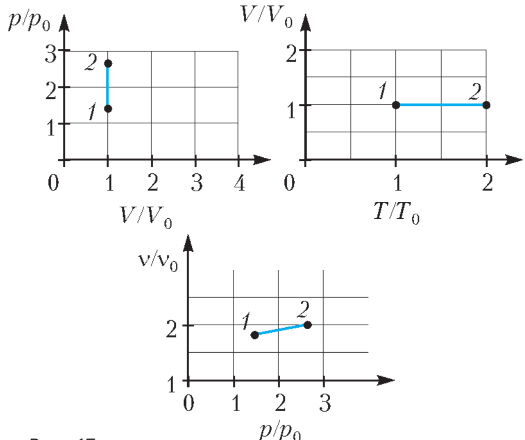


Рис. 15

сила тока в ребрах AB, AD, EH, EF, DC, CB, FG и GH равна $I = \frac{ka^2}{4\sqrt{2}R}$, а в ребрах BF и HD сила тока равна $2I = \frac{\sqrt{2}ka^2}{4R}$.

5. См. рис.16. В интервале времени от 0 до 100 с давление на дно поддона, оказываемое нижним сосудом, равномерно возрастает, а оказываемое высоким сосудом – равномерно убывает, и отношение давлений уменьшается по гиперболическому закону $\alpha(t) = \frac{5h_0}{vt} - 1$. В интервале от 100 до 400 с вода выливается в поддон, подтекает под сосуды, на которые начинает действовать возрастающая со временем сила Архимеда, и отношение давлений изменяется по закону $\alpha(t) = \frac{2100 - 5t}{500 - t}$ от $\alpha = 4$ до $\alpha = 1$.

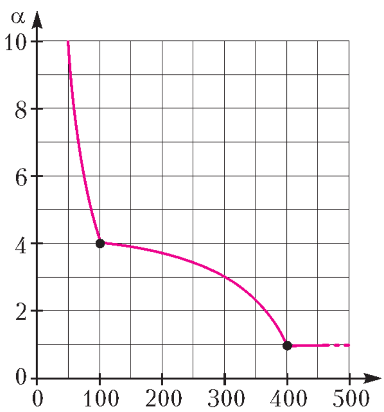


Рис. 16

ВНИМАНИЮ НАШИХ ЧИТАТЕЛЕЙ!

В 2018 году наш журнал будет выходить в том же формате, что и в 2017 году. И мы по-прежнему будем выпускать 12 номеров в год. В остальном «Квант» остается тем же, что и был раньше, – научно-популярным журналом по физике и математике для школьников и для всех, кому это интересно.

Подписаться на наш журнал можно с любого номера в любом почтовом отделении связи. Наш подписной индекс в каталоге агентства «Пресса России» – 90964.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» можно найти на сайте: http://kvant.ras.ru

КВАНТ 12+

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.А.Аткарская, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: (495) 930-56-48

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8»

Телефон: (495) 363-48-86,

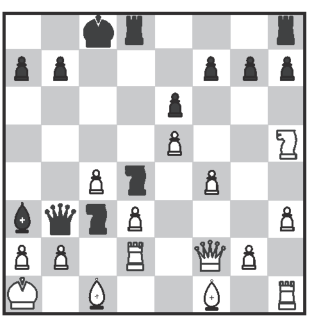
htpp: //capitalpress.ru

КрасотА быстрой игры

Ритм современной жизни постепенно ускоряется, и шахматы не остаются в стороне. В последнее десятилетие проводятся чемпионаты мира по рапиду (быстрым шахматам) и блицу (молниеносной игре). Приведем три партии турнира по рапиду 2017 года. Наиболее яркой стала победа 15-летнего международного мастера из России Андрея Есипенко над Сергеем Карякиным.

Карякин – Есипенко

1. e4 c6 2. ♘f3 d5 3. ♘c3 ♝g4 4. h3 ♝f3 5. ♕f3 ♞f6 6. d3 e6 7. ♗d2 ♛b6 8.0-0-0 d4 9. ♘e2 c5 10. e5 ♞d5 11. ♘f4 ♞b4 12. ♔b1 ♞d7 13. ♕e4 ♞c6 14. ♘h5 0-0-0! (выигрыш пешки невыгоден черным ввиду ухудшения пешечной структуры: 14…♞ce5 15. f4 ♞c6 16. f5 e5 17. ♗e2) 15. f4? c4! 16. dc ♝a3 17. ♗c1 ♞c5 18. ♕f3 d3! 19. cd (напрашивающееся взятие слоном ведет к потере ферзя: 19. ♗d3 ♝b2! 20. ♗b2 ♞a4 21. ♔c1 ♛b2 22. ♔d2 ♜d3! 23. ♕d3 ♜d8) 19…♞a4 20. ♖d2 ♞d4 21. ♕f2 ♞c3+ 22. ♔a1 ♛b3!! Фантастический ход!

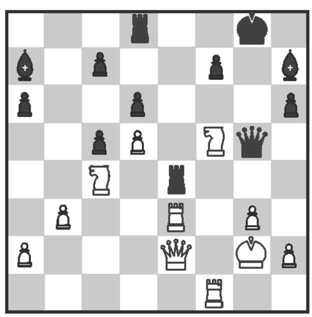


Черного ферзя брать нельзя из-за мата (23. ab ♞b3×), а вариант в партии ведет к потере уже белого ферзя: 23. bc ♛c3+ 24. ♗b2 ♝b2 25. ♖b2 ♛c1+ 26. ♖b1 ♞c2+ 27. ♕c2 ♛c2 28. g3 b5 29. cb ♜d4. Черные выиграли.

Победителем турнира стал Вишванатан Ананд, 15-й чемпион мира по классическим шахматам. Приведем его партию с многократным чемпионом России Александром Грищуком, в которой ему удалось блестяще реализовать позиционное преимущество двух коней над двумя слонами.

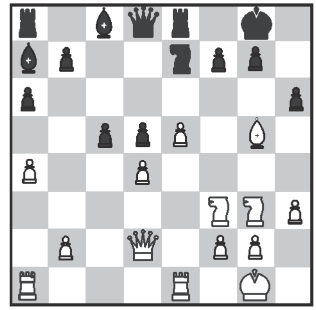
Ананд – Грищук

1. e4 e5 2. ♘f3 ♞c6 3. ♗b5 ♞f6 4. d3 ♝c5 5. ♘bd2 d6 6.c3 0-0 7. 0-0 a6 8. ♗c6 bc 9. d4 ed 10. cd ♝b6 11. ♕c2 c5 12. d5 ♜e8 13. b3 ♝g4 14. ♗b2 ♝h5 15. ♖ae1 ♝g6 16. ♗f6! ♛f6 17. ♘c4. Чернопольный слон заблокирован черными пешками на ферзевом фланге, а белопольный занимает пассивную позицию на королевском. 17…♝a7 18. ♕d3 h6 19. ♖e3 ♜ad8 20. g3 ♝h7 21. ♖fe1 g5 22. ♕e2 ♚g7 23. ♖d1 ♛g6 24. ♖e1 ♛f6 25. ♔g2 g4 26. ♘h4 ♛g5 27. f4 gf+ 28. ♕f3 ♛f6 29. ♕e2 ♛g5 30. ♖f1 ♚g8 31. ♘f5 ♜e4. Попытка усложнить игру в худшей позиции.



32. ♘h6+ (к немедленной победе вело 32. h4! ♜e3 33. ♘ce3 ♛f6 34. ♘g4, однако такой тонкий маневр сложно заметить в цейтноте) 32…♛h6 33. ♖e4 ♝e4+ 34. ♕e4 ♚f8 35. ♖e1. Фактически у белых лишняя фигура, так как слон отрезан от игры. 35…♛f6 36. ♖e2 ♝b6 37. h4 ♚g7 38. ♖f2 ♛g6 39. ♖f5 ♚f8 40. h5 ♛h7 41. g4 ♜e8 42. ♕f3 ♚g8 43. ♔h3 ♜e1 44. ♕f4 ♚f8 45. ♕g5 ♛h8 46. ♖f3 ♛g7 47. ♕g7+ ♚g7 48. g5 ♜d1 49. ♘e3 ♜h1+ 50. ♔g4 c4 51. ♘f5+ ♚f8 52. bc ♜g1+ 53. ♖g3 ♜c1 54. g6 fg 55. hg ♜c4+ 56. ♔h5 ♝d4 57. ♖g4. Белые выиграли.

Ананд – Леко



К такой позиции пришла партия Ананда против венгерского гроссмейстера Петера Леко. Легкие фигуры белых сосредоточены на королевском фланге, позиция созрела для решающей атаки: 21. ♗f6! (но не 21. ♗h6, так как 21…gh 22. ♕h6 ♞f5 позволяет черным подключить к защите коня) 21…♚h7 22. ♘g5+! ♚g8 (22…hg 23. ♕g5 gf 24. ef ♞g6 25. ♕h5 ♚g8 26. ♕h6 ♜e1 27. ♖e1 ♛f8 28. ♖e8! ведет к потере ферзя) 23. ♘h5! gf 24. ♘f7! ♚f7 25. ♕h6 ♞f5 26. ♕h7+ ♚f8 27.ef ♝e6 28. ♘f4 ♛f6 29. ♘g6+ ♛g6 30. ♕g6. На доске образовалось необычное материальное соотношение: ферзь против трех легких фигур. Благодаря нескольким лишним пешкам и открытому положению черного короля, белые постепенно побеждают. 30…♞g7 31. ♖e3 ♜e7 32. ♖ae1 ♜ae8 33. ♖g3 ♜f7 34. h4 ♝b8 35. ♖ge3 ♜fe7 36. dc ♝f7 37. ♕f6 ♜e3 38. ♖e3 ♜e3 39. fe ♝c7 40. g4 ♞e8 41. ♕h8+ ♝g8 42. h5 ♝d8 43. ♕h6+ ♞g7 44. ♕d6+ ♝e7 45. ♕b8+ ♞e8 46. b4 a5 47. ♕b7 ab 48. ♕b4 ♞f6 49. ♕f4 ♚e8 50. c6 ♝e6 51. h6. Белые выиграли.

А. Русанов

Индекс 90964

Прогулки с физикой

ГУДЕНИЕ ПРОВОДОВ

Почему гудят линии электропередач?
Причин, которые могут вызвать звук, несколько...

(Подробнее – на с. 38 внутри журнала)