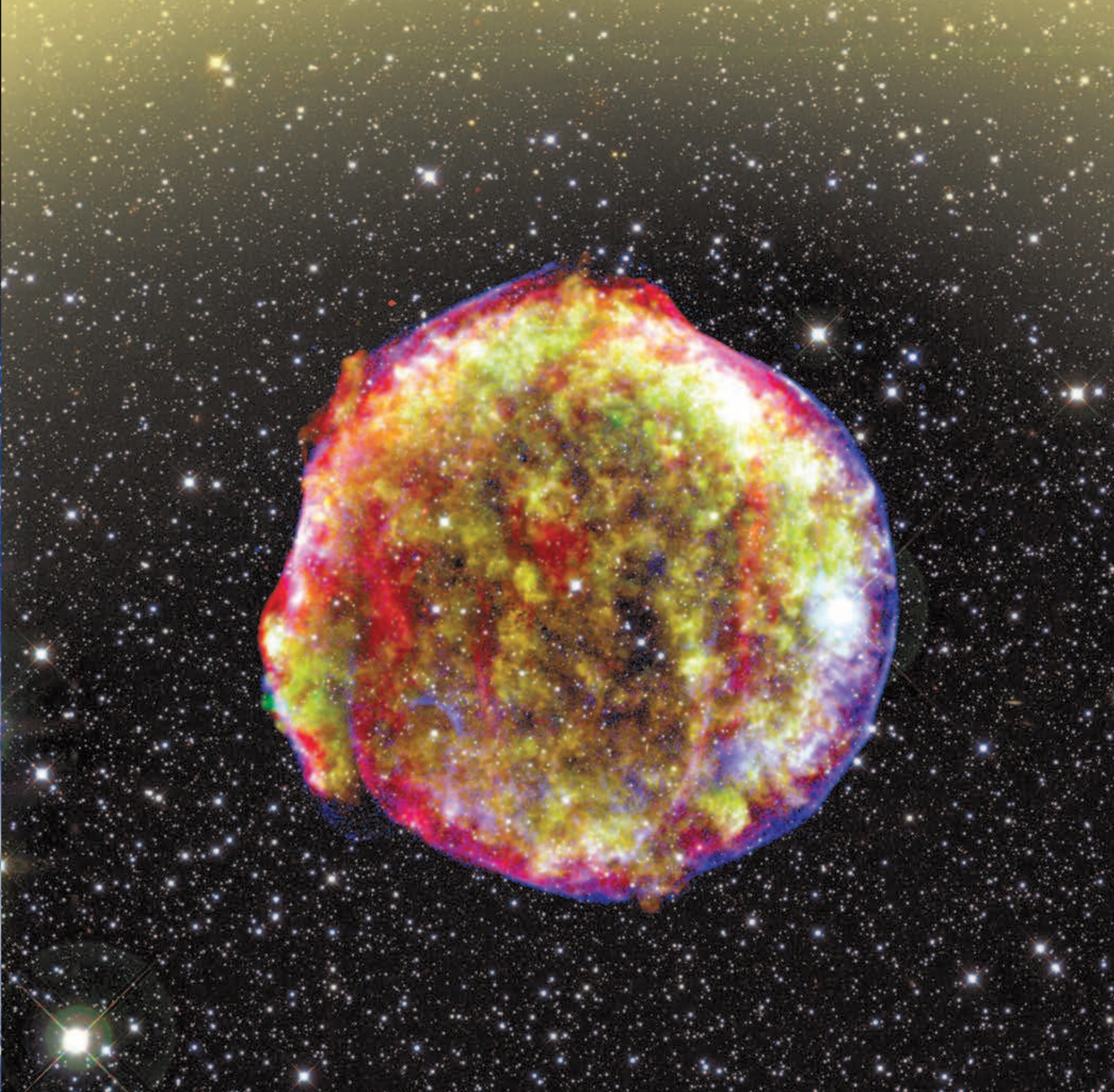
ISSN 0130-2221
ЯНВАРЬ
2018 · №1

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



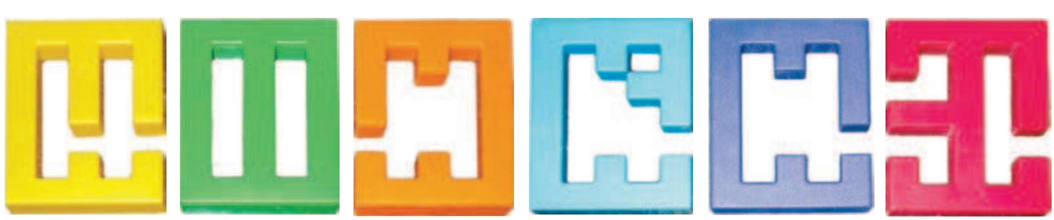
ГОРДИЕВ УЗЕЛ

Эта головоломка состоит из шести частей, из которых необходимо собрать пространственный «узел». Части по отдельности и собранный из них узел показаны на фотографиях. Цвета частей служат небольшой подсказкой.

Головоломку придумал голландский изобретатель Франс де Врогд (Frans de Vreugd). Он использовал компьютерную программу, чтобы найти самую трудную конфигурацию из шести частей такого типа. Надо сказать, что ему это удалось: головоломка полностью оправдывает свое название, ведь ее решение состоит из 69 действий. Если же она попадет к вам в собранном виде, то при разборке узла все равно придется сильно постараться.

Как видно, каждая из частей «вкладывается» в прямоугольник 5×7 клеток, а толщина частей должна быть чуть меньше размера клетки. Изготовить головоломку можно либо из фанеры, либо распечатав на 3D-принтере. Можно также повторить путь изобретателя и написать соответствующую программу. Возможно, кому-то из читателей удастся найти другой набор из шести элементов, из которых можно сложить другой непростой узел, пускай и не гордиев.

В. Журавлев



КВАНТ ЯНВАРЬ 2018 №1

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Астрономия вернулась в школу

В.СУРДИН

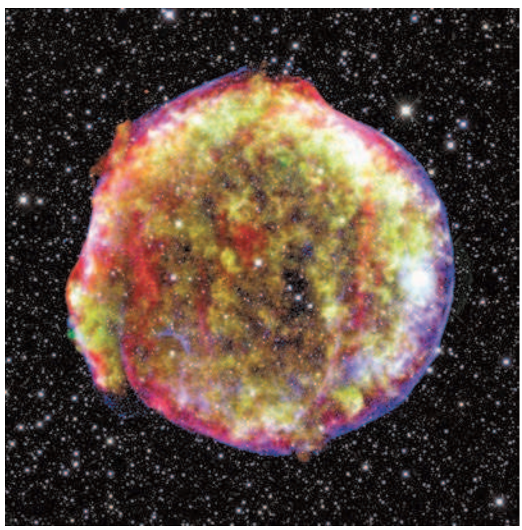
Химия

Изучение химии начинается с демонстрации Таблицы Менделеева со словами: «Из этих элементов построен мир. Давайте узнает, какими свойствами они обладают и как взаимодействуют между собой». Но астрофизика смотрит глубже и старается выяснить, каково происхождение самих химических элементов, как и когда они возникли в природе. И на этом пути уже многое прояснилось. Мы знаем, что в течение первой секунды жизни Вселенной при огромной температуре и плотности вещества рождались протоны, нейтроны, антипротоны и антинейтроны в почти равном количестве (знать бы еще, почему «почти»). По мере расширения Вселенной снижалась температура вещества и прекратилось рождение частиц и античастиц, но продолжалась их аннигиляция. Из тех, что остались, построен наш мир.

Первые несколько минут жизни Вселенной, пока свободные нейтроны еще не распались, а температура была еще достаточно высокой, происходили термоядерные реакции, заполнившие несколько первых клеточек Таблицы Менделеева. Кроме свободных протонов – будущих ядер водорода – возник его тяжелый изотоп дейтерий, возникли также гелий и литий. Впрочем, дейтерия и лития было очень мало, а юный мир почти целиком состоял из водорода (на 3/4 по массе) и гелия (на 1/4). Трудно представить себе нынешнее разнообразие природы, будь она построена лишь из водорода и гелия. К счастью, по прошествии сотен миллионов лет за дело взялись звезды. Именно в их недрах в ходе спокойной эволюции и при взрывах сформировалось все разнообразие химических элементов, ставших планетами и живыми существами на них.

Современная астрофизика не только теоретически объясняет, но и прямо демонстрирует те космические явления, в которых рождаются новые химические элементы. С помощью нейтринных телескопов мы заглянули в ядро Солнца, где протекают термоядерные реакции. А оптические и рентгеновские телескопы демонстрируют нам процессы нуклеосинтеза, происходящие при взрывах звезд. Так химия обрела верное представление о происхождении элементов.

Совсем недавно появилось новое направление в науке – астрохимия. Условия в космосе столь своеобразны, что порой ставят земную химию в тупик. Например, изучать свободные радикалы в земной лаборатории очень сложно, поскольку эти соединения очень активны и моментально превращаются в более стабильные молекулы. А в межзвездной среде они представлены широко, поскольку там им почти не



Остаток взрыва сверхновой

Окончание. Начало – в «Кванте» №12 за 2017 год.

с чем взаимодействовать. Большой интерес представляют и каталитические реакции на межзвездных пылинках, ведь это те же наночастицы, которые можно было бы использовать для химического катализа на Земле. Как видим, химия все больше заинтересована в астрономии.

Биология

Астробиология, биоастрономия, экзобиология… Десятки лет существуют эти дисциплины, хотя объекта практического изучения у них как не было, так и нет. Жизнь за пределом Земли пока не обнаружена. Ее искали и на Луне, и на Марсе; в форме разумной жизни ее искали на просторах Галактики и даже за ее пределами. Но жизни и разума в космосе не найдено, и это заставляет о многом задуматься. Впрочем, пессимизм здесь неуместен. Астрономы регулярно открывают в космосе благоприятные для жизни места, следовательно, рано или поздно обнаружится и сама внеземная жизнь.

Для биологии это означало бы колоссальный прорыв в понимании самого феномена жизни и ее происхождения. Поэтому биологи крайне заинтересованы в находках астрономов. Среди планет у других звезд астрономы уже обнаружили десятки землеподобных, причем у некоторых из них, по-видимому, климат близок к земному. В ближайшее время закончится сооружение нескольких гигантских телескопов диаметром 25–40 метров, которые позволят получить спектры этих планет и поискать в них следы жизни. Но все же изучать чужую жизнь издалека – занятие неблагодарное. Много бы мы узнали о строении белков и ДНК, если бы изучали земную жизнь, глядя на нашу планету с Луны в телескоп?

Поэтому сейчас самое пристальное внимание обращено к объектам Солнечной системы, где обнаружены условия для жизни. К сожалению, на поверхности ни одного из них, кроме Земли, благоприятных условий нет. Но под поверхностью они могут быть. Тут следует напомнить, что и на Земле основная биомасса находится под твердой поверхностью. А поиски внеземной жизни сейчас сосредоточились на трех объектах: это Марс, Европа (спутник Юпитера) и Энцелад (спутник Сатурна), где под поверхностью есть жидкая вода. Вместе с биологами астрономы изучают эти тела, не забывая при этом прослушивать Вселенную в поисках сигналов внеземных цивилизаций. Ведь разумная жизнь – это еще интереснее!

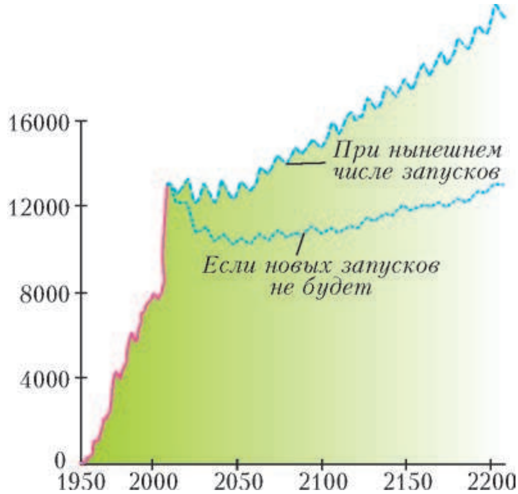
Экология

Состояние окружающей среды прямо влияет на нашу жизнь. Обычно заботой экологов является качество воздуха, воды, еды, уровень шума и прочие локальные параметры в пределах Земли. Но наша планета – частица большого космоса, который время от времени напоминает о себе.

Ближнее космическое пространство мы сами уже заполнили тысячами искусственных тел, которые иногда сталкиваются друг с другом, взрываются и таким образом размножаются как космический мусор. Немалая часть астрономических наблюдений (и заработка астрономов) связана с отслеживанием космического мусора для предупреждения землян и работников Международной космической станции. Уже десятки раз МКС уклонялась от опасных обломков, благодаря точному астрономическому прогнозу их движения.

На приведенном на следующей странице графике показано, как быстро растет количество космического мусора с момента запуска первого искусственного спутника Земли. Это вышедшие из строя спутники, последние ступени ракет-носителей, переходные отсеки, части взорвавшихся ракет или разрушившихся при взаимных соударениях спутников. Здесь учтены только крупные объекты, размером более 10 см, которые удается отслеживать методами радиолокации и которые представляют фатальную угрозу для «живых» спутников и космических кораблей и станций. Красная сплошная кривая – результат прямого подсчета, синие пунктирные кривые – теоретический прогноз.

В первые десятилетия космической эры спутники запускали очень часто, посколь-



Количество космического мусора на низких околоземных орбитах (200–2000 км)

ку были они недолговечны. Несколько резких подъемов количества мусора связаны со столкновениями спутников, взрывами ракет и преднамеренным разрушением «мертвых» спутников при испытании противоспутникового оружия.

Две теоретические кривые различаются начальными предположениями. При расчете верхней из них предполагалось, что снизившаяся к первому десятилетию частота запуска спутников останется таковой надолго. Это приведет, как мы видим, к быстрому накоплению космического мусора. Нижняя кривая показывает прогноз при совершенно фантастическом предположении: что будет, если мы полностью прекратим космические запуски. Понятно, что на практике этого не случится, но рассмотреть такую теоретическую возможность интересно, и результат оказывается совершенно неожиданным – даже при полном запрете космических запусков количество мусора на орбите будет возрастать! Это произойдет за счет взаимных столкновений и деления крупных обломков на более мелкие, но тем не менее – опасные.

Если мы не хотим потерять возможность использовать околоземное пространство (т. е. пользоваться спутниковым телевидением, глобальной навигацией, прогнозом погоды и пр.), то необходимо внимательно следить за космическим мусором, чем и заняты астрономы, а также разрабатывать методы очистки ближнего космоса. Тут у астрономов тоже есть идеи, возникшие при наблюдении за движением комет и астероидов.

Кстати – о них. Кометы и астероиды – это, в некотором смысле, тоже космический мусор естественного происхождения. И если мы не хотим, чтобы он неожиданно падал на нас, за ним надо следить. Астрономы стараются это делать, ежедневно обнаруживая в Солнечной системе сотни новых объектов, в основном – небольших астероидов. Всего их уже зафиксировано порядка миллиона, и за всеми ведется слежка и рассчитывается их движение в будущем. Но тотального контроля за всеми опасными телами мы пока наладить не можем. Для этого нужны специальные телескопы – наземные и космические – с большим полем зрения. Сейчас они в стадии проектирования, а некоторые уже и в стадии строительства. С их помощью астрономы хотя и не смогут защитить Землю, но смогут предупредить о грозящей опасности.

Еще одно важное направление астроэкологии это мониторинг звезд и особенно ближайшей из них – нашего Солнца. Мы пока плохо представляем, как меняется активность Солнца на больших интервалах времени, а от прогноза этой активности зависит будущее человечества. Возможности солнечной астрономии быстро растут. Еще недавно мы наблюдали только одно полушарие Солнца, видимое в данные момент с Земли, и не знали, какие сюрпризы готовит нам другое полушарие, которое через две недели повернется в нашу сторону (Солнце вращается с периодом около месяца). Но теперь космические телескопы контролируют Солнце со всех сторон, включая обратную, и во всех диапазонах электромагнитного спектра. Так что возможности кратковременного прогноза его активности резко возросли. Но по поводу долговременного прогноза пока еще много проблем. Мы знаем, что время от времени на Солнце бывают супервспышки, но подготовиться к ним пока не можем. Не-

Солнечная корона во время затмения[1]

обходимо понять, что происходит под видимой поверхностью Солнца, и астрофизики сейчас работают над этим.

Однако не Солнцем единым богата наша Галактика: в ней еще сотни миллиардов звезд, причем некоторые из них могут быть опасны для Земли. Речь идет о взрывах массивных звезд в конце их эволюции, т. е. о вспышках сверхновых. Астрономы учатся распознавать звезды, готовые в ближайшее время взорваться. Один из кандидатов – Бетельгейзе, ярчайшая звезда в созвездии Орион. Астрономы следят за ней, ожидая взрыва. Но точный прогноз этого события пока невозможен. Для этого нужны чувствительные нейтринные телескопы, которых пока нет. Но они обязательно будут!

* * *

Итак, возвращаясь в школу после многих лет забвения, астрономия заметно изменила свое лицо. Сегодня «небесная наука» тесно связана с другими ветвями естествознания. Космос теперь воспринимается как научная лаборатория с невероятными возможностями. Удовлетворяя свою любознательность, человек побеждал в борьбе за существование. Сегодня предметом любознательности человека стала вся Вселенная. И в этом гарантия нашего будущего.

Астрономия вернулась в школу не для развлечения, а для изучения. Простое накопление знаний не может удовлетворить любознательного человека. Знания должны работать, их нужно уметь применять. Современные средства связи заливают нас потоком информации, среди которой есть чрезвычайно важная и интересная, но нередко встречается ошибочная и даже лживая. Только *активное* знание помогает нам фильтровать эти потоки и получать из них ту информацию, которая развивает наш интеллект, а не засоряет мозг.

Не буду вас убеждать, насколько полезны при изучении любого предмета интересные задачи с подробными решениями. Ведь «знать» и «уметь» – не одно и то же. Именно задачи учат нас *уметь*. Так давайте же их решать!

Задачи

Задача 1. *Астрономы Земли обнаруживают присутствие планет у других звезд по периодическому доплеровскому смещению линий в спектрах этих звезд, вызванному движением звезды относительно центра масс планетной системы. А если наши «братья по разуму» с соседней звезды будут измерять радиальную скорость Солнца с точностью 10 м/с, то смогут ли они заметить существование у Солнца планетной системы? (Радиальная, или лучевая, скорость – это проекция вектора скорости тела на луч зрения наблюдателя.)*

Решение. Бóльшая часть массы нашей Солнечной системы сосредоточена в Юпитере, поэтому именно он оказывает основное гравитационное влияние на Солнце, которое в 1000 раз массивнее Юпитера. Оба они обращаются вокруг общего центра масс, к которому Солнце в 1000 раз ближе, чем Юпитер. Поскольку по орбите Юпитер движется со скоростью $v_{Ю} = 13$ км/с (это значение можно взять из справочника или вычислить самостоятельно, зная радиус орбиты Юпитера 5,2 а.е. = = 779 млн км и его орбитальный период 11,9 лет), скорость обращения Солнца

[1] В «Кванте» №12 за 2017 год на странице 2 подпись под рисунком должна быть такой: Солнце в ультрафиолете и рентгене.

вокруг центра масс составляет

$$v_{\text{С}} = \frac{v_{\text{Ю}} M_{\text{Ю}}}{M_{\text{С}}} = 13 \text{ м/с} .$$

С такой амплитудой будет изменяться радиальная скорость Солнца для удаленного наблюдателя, если он расположен в плоскости орбиты Юпитера. Если же эта плоскость наклонена к его лучу зрения на угол β, то проекция лучевой скорости Солнца на луч зрения наблюдателя составит $13 \text{ м/с} \times \cos\beta$. Из условия $13 \text{ м/с} \times \cos\beta > 10 \text{ м/с}$ находим ограничение на угол: $\beta < 40°$. Поскольку плоскость орбиты Юпитера практически совпадает с эклиптикой (т.е. плоскостью орбиты Земли), то угол β практически равен эклиптической широте. Следовательно, если звезда, у которой живут «братья по разуму», имеет эклиптическую широту $|\beta| < 40°$, то у них есть шанс заметить периодическое движение Солнца и сделать вывод о наличии у него планетной системы (или, по крайней мере, одного Юпитера). Правда, измерение радиальной скорости Солнца придется проводить довольно долго – более одного орбитального периода Юпитера, т.е. более 12 лет.

Отметим, что когда эта задача впервые была сформулирована в начале 2000-х годов, указанная в условии точность измерений 10 м/с вполне соответствовала уровню развития земной астрономии тех лет. Однако нынешний (2018 г.) уровень существенно возрос, и уже можно ориентироваться на точность измерения лучевой скорости в 1 м/с. Если и у наших «братьев по разуму» произошел такой же прогресс, то каким будет при этом критическое значение угла β?

Задача 2. *Если жители планеты у звезды α Кентавра систематически измеряют положение Солнца с точностью $0{,}01''$, то смогут ли они заметить колебания в движении Солнца, вызванные обращением вокруг него планет Солнечной системы? Годичный параллакс звезды α Кентавра составляет $p = 0{,}751''$.*

Решение. Как мы уже знаем, практически вся масса нашей планетной системы заключена в Юпитере, поэтому в подобных задачах можно рассматривать двойную систему Солнце – Юпитер, обращающуюся вокруг общего центра масс. Расстояние Солнца от центра масс равно $r_{\text{С}} = r_{\text{Ю}} M_{\text{Ю}} / M_{\text{С}}$, где $r_{\text{Ю}}$ – расстояние Юпитера от центра масс, практически совпадающее с радиусом его орбиты (5,2 а.е. = 779 млн км). Тогда амплитуда углового перемещения Солнца при наблюдении со звезды α Кентавра при расстоянии до нее D будет

$$\delta = \frac{r_{\text{С}}}{D} = \frac{r_{\text{Ю}} \left(M_{\text{Ю}} / M_{\text{С}} \right)}{D} \text{ (радиан)}$$

(поскольку угол, очевидно, очень мал, значения арксинусов и арктангенсов можно заменять значениями их аргументов, если углы выражены в радианах). В угловых секундах это будет

$$\delta = \frac{206265'' r_{\text{С}}}{D} = \frac{206265'' r_{\text{Ю}} \left(M_{\text{Ю}} / M_{\text{С}} \right)}{D} .$$

Вспомним, что годичным параллаксом объекта называют угол, под которым от него виден отрезок в 1 а.е. (радиус земной орбиты): в угловых секундах $p = 206265'' (1 \text{ а.е.}/D)$. Поэтому в формуле для δ вместо расстояния (D) можно использовать параллакс:

$$\delta = p \left(r_{\text{С}} / 1 \text{ а.е.} \right) = p \left(r_{\text{Ю}} / 1 \text{ а.е.} \right) \frac{M_{\text{Ю}}}{M_{\text{С}}} .$$

Положив $M_{\text{С}} / M_{\text{Ю}} = 1000$, получим

$$\delta = 0{,}751'' \frac{5{,}2}{1000} = 0{,}004'' .$$

Это значение в 2,5 раза меньше указанной в условии задачи предельной точности измерений ($0{,}01''$). Значит, пользуясь этим методом, астрономы из системы α Кентавра не смогут узнать, что у Солнца есть планеты.

Задача 3. *Карликовая планета Плутон находится далеко от Солнца, поэтому принято считать, что даже днем там очень темно. Сравните дневное освещение Плутона с ночным освещением Земли в полнолуние. Учтите, что для наблюдателя на Земле Солнце имеет видимую звездную величину $-26{,}7^m$, а полная Луна – величину $-12{,}7^m$. Определите, во сколь-*

ко раз сильнее Солнце освещает поверхность Плутона, чем полная Луна освещает поверхность Земли. Среднее расстояние от Солнца до Плутона принять равным 40 а.е.

Решение. Сначала определим, во сколько раз Солнце освещает поверхность Земли сильнее, чем полная Луна. Вычислив разность их видимых звездных величин ($26{,}7^m - 12{,}7^m = 14^m$), найдем это отношение: оно равно $2{,}512^{14} \approx 400000$. У планеты, удаленной от Солнца на R а.е., поток солнечного света ослаблен в R^2 раз. Следовательно, Солнце будет освещать эту планету в $400000/R^2$ раз ярче, чем полная Луна освещает Землю. Для Плутона, у которого R = 40 а.е., это составит $400000/1600 = 250$. Иными словами, поверхность Плутона на его среднем расстоянии от Солнца днем освещена так же ярко, как если бы ночью на земном небосклоне сияло 250 полных Лун. Это весьма яркое освещение, при котором можно не только гулять без фонаря, но и читать мелкий шрифт.

Задача 4. *Представьте, что Земля неожиданно остановилась на своей орбите и начала падать на Солнце. Сколько продлится это падение и с какой скоростью Земля ударит Солнце?*

Решение. Поскольку радиус земной орбиты намного больше радиуса Солнца, мы можем упростить постановку задачи и вычислить время падения Земли до центра притяжения, т.е. до центра Солнца. Падение по радиусу-вектору к Солнцу с расстояния R можно представить как движение по предельно сжатому эллипсу с большой полуосью $a = R/2$. Время падения t равно половине орбитального периода T на этой орбите. Значение T легко определяется из третьего закона Кеплера путем сравнения с движением Земли:

$$\left(\frac{T}{1\ \text{год}}\right)^2 = \left(\frac{0{,}5R}{R}\right)^3.$$

Отсюда

$$T = \frac{1}{2^{3/2}} \ \text{года},$$

$$\text{а}\ t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2^{5/2}}\ \text{года} = 65\ \text{суток}.$$

Заметим, что скорость падения издалека на поверхность небесного тела равна второй космической скорости на этой поверхности. Для Солнца $v_\infty = \sqrt{2GM_С/R_С} = 618$ км/с.

Задача 5. *Сколько дней в году на экваторе Земли солнце достигает зенита?*

Решение. Во всех точках земного экватора через зенит всегда проходит небесный экватор, поэтому ответ очевиден: солнце на экваторе достигает зенита только в те дни, когда оно в своем движении по эклиптике пересекает небесный экватор, т.е. дважды в году – в дни весеннего и осеннего равноденствий. Но более точный ответ должен учитывать тот факт, что центр солнечного диска пересекает небесный экватор мгновенно, поэтому не все точки земного экватора удовлетворяют условию задачи, а лишь две: одна – весной, а вторая – осенью. Это те точки, в которых моменты равноденствий совпадают с моментами истинного солнечного полдня.

Задача 6. *Немного изменим условие предыдущей задачи: Сколько раз в году на Земле солнце бывает в зените?*

Решение. На земном шаре всегда существует точка поверхности, над которой солнце в данный момент находится в зените. Если смотреть на Землю со стороны Солнца, то это центр земного диска. В каждый момент времени эта точка лежит на полуденном меридиане Земли и перемещается по нему в течение года от одного тропика к другому и обратно. С учетом суточного вращения Земли становится ясно, что на глобусе совокупность этих точек напоминает туго закрученную вдоль экватора спираль, заполняющую пояс между тропиками – от $23{,}4°$ с.ш. до $23{,}4°$ ю.ш.

Выход в пространство-2

В.ПРОТАСОВ

Колпаки и шары

Теорему о трех центрах гомотетии, или «о трех колпаках», приписывают знаменитому французскому математику Гаспару Монжу (Gaspard Monge, 1746–1818). Мы сформулируем ее в виде задачи.

Задача 4 (о трех колпаках). *На плоскости даны три круга различных радиусов, ни один круг не содержит другой. К каждой паре кругов провели две внешние касательные и отметили их точки пересечения. Докажите, что три отмеченные точки лежат на одной прямой.*

Стандартное решение этой задачи привлекает теорему Менелая. Но есть у нее и эффектное геометрическое решение с помощью выхода в пространство. Правда, как мы увидим сейчас, с этим решением не все так просто.

Мы будем называть *вершиной* пары кругов разных радиусов точку пересечения их внешних касательных. Таким образом, надо доказать, что для любой тройки кругов три вершины всегда лежат на одной прямой (рис.8). Вершина есть и у пары шаров: это точка, через которую проходят все внешние касательные плоскости к этим шарам. Если провести любую плоскость через центры шаров, то в сечении образуются два круга. Их вершина будет совпадать с вершиной шаров. Можно представить, что на пару шаров надели конус («колпак»), тогда вершина этого конуса является вершиной пары шаров. Заметим, что если доказать теорему о трех колпаках для шаров, то из нее будет следовать утверждение для кругов. В самом деле, построим на каждом круге по шару с тем же центром и радиусом, тогда вершины кругов станут вершинами шаров. Ну а для шаров задача решается просто и наглядно.

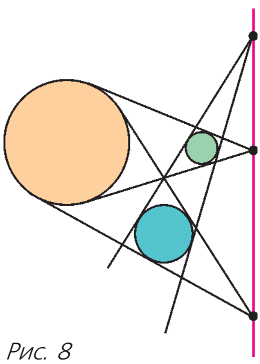


Рис. 8

Решение. Положим на три шара плоскость (рис.9). Она будет касаться всех трех шаров. Значит, она будет содержать все три вершины, поскольку каждая плоскость, касающаяся внешним образом любой пары шаров, содержит их вершины. На те же шары можно положить вторую плоскость, симметричную первой относительно плоскости, проведенной через центры шаров. Поэтому три вершины лежат на одной прямой, по которой эти плоскости пересекаются.

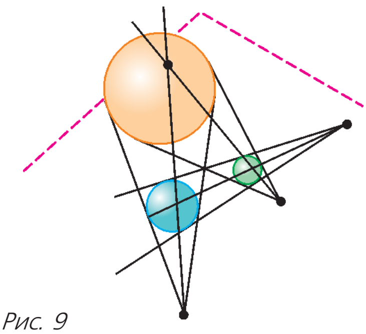


Рис. 9

Задача решена? Не совсем. Вы не заметили подвоха? Дело в том, что не на каждые три шара можно положить плоскость. Пусть, например, есть два больших шара, а третий – очень маленький и расположен между двумя большими. Тогда любая плоскость, касающаяся внешним образом больших шаров, не имеет общих точек с маленьким. Чтобы спасти наше доказательство, поступим так. Во-первых, считаем, что центры шаров не лежат на одной прямой (если

Продолжение. Начало – в «Кванте» №12 за 2017 год.

лежат, то утверждение очевидно). Во-вторых, если одновременно уменьшить радиусы шаров в N раз, оставив на месте их центры, положение вершин не изменится. В самом деле, если O_1, O_2 – центры шаров, а r_1, r_2 – их радиусы, то вершина V – это единственная точка на прямой O_1O_2, для которой $MO_1/MO_2 = r_1/r_2$ (как и раньше, отрезки – направленные). Поэтому, раз точки O_1, O_2 и отношение радиусов r_1/r_2 не изменились, то и вершина V осталась на прежнем месте.[1] Тогда уменьшим все радиусы в N раз, чтобы они стали настолько маленькими, что каждый колпак не будет пересекать оставшегося шара. В этом случае на шары можно положить плоскость, и, следовательно, три вершины лежат на прямой.

Из теоремы о трех колпаках (теперь ее можно назвать теоремой, ведь мы ее доказали) проистекает множество следствий о касании кругов и шаров. Мы выделим лишь три из них, еще несколько сформулируем в упражнениях 5–9.

Начнем с того, что если для двух из трех пар кругов внешние касательные заменить на внутренние, то теорема останется верна. В доказательстве ничего не изменится. Только плоскость теперь будет касаться двух шаров с одной стороны, а третьего – с другой. Соответствующие точки назовем внутренними вершинами. Итак, *внешняя и две внутренние вершины трех кругов (или трех шаров) лежат на одной прямой*. Если два шара касаются, то внутренняя вершина превратится в точку касания. Этот предельный случай дает такое следствие.

Следствие 1. *Два шара касаются внешним образом третьего. Тогда вершина двух шаров лежит на прямой, соединяющей две точки касания.*

То же верно, конечно, и для кругов на плоскости. Из этого следует такой замечательный факт, который мы для простоты сформулируем для круга на плоскости (хотя он верен и для шара в пространстве).

Следствие 2. *На отрезке AB даны точки C и D. Через C и D проведена произвольная окружность, к которой из A и B проведены касательные, при этом точки касания лежат по одну сторону от прямой AB. Тогда прямая, соединяющая точки касания, проходит через фиксированную точку прямой AB, не зависящую от проведенной окружности.*

Доказательство. Обозначим точки касания через A' и B', а точку пересечения касательных через M. Заметим, что квадрат касательной AA' равен $AD \cdot AC$, а значит, не зависит от окружности. То же с касательной BB'. Проведем окружности с центрами A и B и радиусами, равными этим касательным. Обозначим через V вершину данных окружностей. Эта точка постоянна. Теперь проведем окружность с центром M и радиусом $MA' = MB'$. Она касается нашей пары окружностей в точках A' и B'. Значит, согласно следствию 1, прямая $A'B'$ проходит через V. Значит, V – искомая точка.

Как мы упоминали, у следствия 2 есть «пространственная» версия, когда через точки C и D проводят шар и на него из точек A и B опускают касательные, лежащие в одной плоскости. Тогда прямая, соединяющая точки касания, проходит через фиксированную точку прямой AB. Доказательство остается прежним!

А вот еще один любопытный факт, проистекающий из теоремы о трех колпаках. Его естественно будет назвать «теоремой о клюве».

Следствие 3 (теорема о клюве). *Если стороны пространственного четырехугольника касаются шара, то четыре точки касания лежат на одной окружности.*

Доказательство. Обозначим данный четырехугольник через $ABCD$, а точки касания – через K, L, M, N (рис.10). Касательные AK и AN равны, поэтому мы можем провести сферу с центром A, проходящую через точки N и K. Также мы можем провести сферу с центром C через точки L и M. Этих двух сфер каса-

[1] По сути, здесь мы пользуемся тем, что V – это центр гомотетии, переводящей один шар в другой; этим и объясняется еще одно название теоремы: «теорема о трех центрах гомотетии».

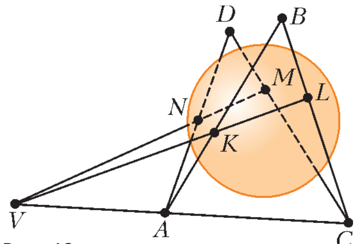


Рис. 10

ется третья – с центром B, проведенная через точки K и L. Значит, можно воспользоваться следствием 1 и заключить, что прямая KL проходит через вершину V двух сфер (с центрами A и C). Также этой пары сфер касается и сфера с центром D, проведенная через точки M и N. Значит, прямая MN проходит через ту же вершину. Итак, прямые KL и MN пересекаются, значит, лежат в одной плоскости, следовательно, все четыре точки касания лежат на окружности – сечении сферы этой плоскостью.

У пространственного четырехугольника тот же критерий для существования вписанного шара, что и у плоского: шар можно вписать тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон равны. Если фиксировать точки A и C, то треугольники ABC и ADC можно разводить и сводить, «птица» будет раскрывать и сжимать «клюв», при этом все время держа в клюве шарик (шарик при этом будет скользить по клюву). Согласно следствию 3, прямые KL и MN, соединяющие точки касания этого шарика с клювом, будут всегда проходить через одну и ту же точку – точку V.

И это – далеко не все, что получается из теоремы о трех колпаках, которую мы доказали выходом в пространство. Еще несколько следствий попробуйте доказать сами.

Упражнения

5. Четыре шара касаются друг друга «по цепочке»: первый – второго, ..., четвертый – первого. Докажите, что четыре точки касания лежат на одной окружности.

6. Докажите, что в описанном четырехугольнике две диагонали, а также два отрезка, соединяющие точки касания вписанной окружности с противоположными сторонами, пересекаются в одной точке.

7. В пространстве даны сфера и две точки K и L вне нее, причем прямая KL пересекает сферу. Из точки K проводится произвольная касательная KP к сфере (P – точка касания), а прямая LP повторно пересекает сферу в точке Q. Докажите, что всевозможные точки Q пробегают окружность.

8. Докажите, что для любой точки L, лежащей вне заданной сферы, на сфере найдутся две окружности, расположенные в непараллельных плоскостях, которые переходят друг в друга при центральной проекции относительно точки L (т.е. прямые, проведенные через L в точки первой окружности, проходят через точки второй окружности).

Указание. Воспользуйтесь упражнением 7. Рассмотрите окружности, пробегаемые точками P и Q.

9. Докажите, что центр окружности нельзя найти при помощи одной линейки, без циркуля.

Указание. Если такое построение возможно, примените его к одной из окружностей из упражнения 8 в ее плоскости. Так как центральная проекция относительно точки L переводит прямые в прямые, она переведет это построение в такое же построение для второй окружности.

В следующем упражнении получите другое доказательство теоремы о трех колпаках, также с помощью выхода в пространство. Его подсказал автору В.Н.Дубровский. Оно хорошо тем, что проходит для любой тройки кругов, в нем нет «плохих» случаев.

Упражнение 10. В каждом из центров трех заданных кругов восставим перпендикуляр к плоскости. Длина перпендикуляра равна радиусу круга, все перпендикуляры лежат по одну сторону от плоскости. Докажите, что прямая, соединяющая концы двух перпендикуляров, проходит через вершину соответствующей пары кругов. Проведем теперь плоскость через концы трех перпендикуляров. Она пересекает исходную плоскость по прямой. Докажите, что все три вершины лежат на этой прямой. Как изменится это рассуждение, если для двух пар кругов взять внутренние вершины?

Теорема Брианшона

Теорема, которую в 1810 году доказал французский математик Шарль Жюльен Брианшон (1783–1864), теперь по праву считается одним из столпов проективной геометрии.

Теорема (C.J.Brianchon, 1810 г.). *Три диагонали шестиугольника, описанного около окружности, пересекаются в одной точке (рис.11).*

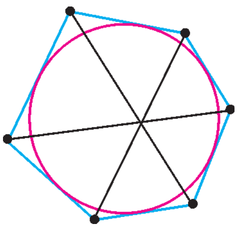


Рис. 11

Доказательство этой теоремы – один из блестящих примеров выхода в пространство. Его приводил и И.Ф.Шарыгин в упомянутой нами статье. Оно вошло во многие задачники по геометрии, и его можно было бы считать самым простым и коротким доказательством теоремы Брианшона, если бы в 1957 году Александр Степанович Смогоржевский (1896–1969) не нашел еще более элегантного рассуждения, с применением радикальных осей (см. книгу А.С.Смогоржевского «Линейка в геометрических построениях», Гостехиздат, 1957 г.). А мы не откажем себе в удовольствии повторить доказательство с выходом в пространство, несколько его изменив. Сначала – два простых вспомогательных факта.

Факт 1. *Две прямые, симметричные друг другу относительно некоторой плоскости, лежат в одной плоскости.*

Факт 2. *Даны три прямые. Если каждые две из них лежат в одной плоскости, то либо все три лежат в одной плоскости, либо все три имеют общую точку, либо все три параллельны.*

Теперь можем приступить к доказательству.

Доказательство теоремы Брианшона. Обозначим наш шестиугольник через $A_1 \ldots A_6$, а точку касания стороны A_1A_2 со вписанной окружностью – через M (рис.12). В вершине A_1 восставим перпендикуляр A_1B_1 к плоскости, в которой лежит шестиугольник, равный по длине касательной

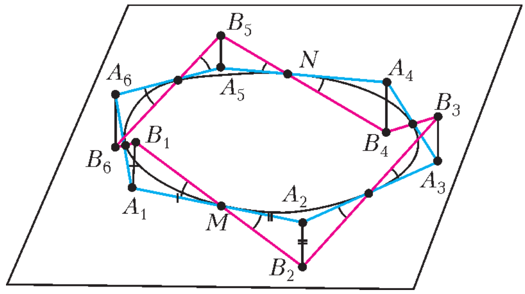


Рис. 12

A_1M. Теперь в вершине A_2 восставим перпендикуляр A_2B_2 к той же плоскости, но лежащий по другую сторону от нее, длина которого равна касательной A_2M. Далее восставим такие же перпендикуляры в остальных вершинах: длина каждого перпендикуляра A_iB_i равна длине касательной к вписанной окружности из вершины A_i, а направления этих перпендикуляров чередуются. Заметим, что каждый из отрезков B_iB_{i+1} составляет угол в 45° со стороной шестиугольника A_iA_{i+1} и пересекает ее в точке касания. Обозначим через N точку касания, лежащую на стороне A_4A_5, и проведем через середину отрезка MN плоскость, перпендикулярную ему

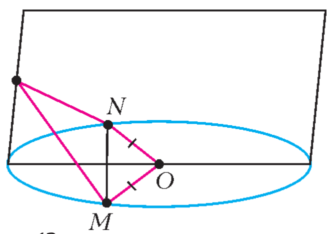


Рис. 13

(рис.13). Радиусы окружности OM и ON симметричны относительно этой плоскости, поэтому симметричны и прямые B_1B_2 и B_4B_5, поскольку они перпендикулярны этим радиусам и составляют равные углы с плоскостью шестиугольника. Значит (факт 1), прямые B_1B_2 и B_4B_5 лежат в одной плоскости. Следовательно, отрезки B_1B_4 и B_2B_5 также лежат в одной плоскости. Повторив то же рассуждение с двумя другими парами сторон нашего шестиугольника, мы видим, что из трех отрезков B_1B_4, B_2B_5, B_3B_6 каждые два лежат в одной плоскости. Применяем факт 2. Эти три отрезка не могут лежать в одной плоскости, иначе в этой же плоскости оказались бы все шесть точек касания, а значит, она совпала бы с плоскостью шестиугольника, что исключено, потому что все точки B_i в ней не лежат. Следовательно, прямые B_1B_4, B_2B_5, B_3B_6 либо пересекаются в одной точке, либо параллельны. Значит, тем же свойством обладают и их проекции на плоскость шестиугольника – диагонали A_1A_4, A_2A_5 и A_3A_6. Так как диагонали не параллельны, то они пересекаются в одной точке.

Вывод. Чем здесь помог выход в пространство? Почему нельзя было провести то же доказательства, не покидая плоскости? Дело в том, что если три прямые, *не лежащие в одной плоскости*, попарно пересекаются, то все три пересекаются в одной точке (факт 2). А если они лежат в одной плоскости, то это неверно! Пример: прямые, содержащие стороны любого треугольника. Поэтому из того, что диагонали шестиугольника пересекаются попарно, не следовало бы, что они пересекаются в одной точке. В этом смысле, в пространстве меньше возможностей, чем в плоскости. Мы вышли в пространство и «подняли» диагонали A_1A_4, A_2A_5 и A_3A_6 до отрезков B_1B_4, B_2B_5, B_3B_6. Доказав, что эти отрезки попарно пересекаются, мы, тем самым, доказываем их пересечение в одной точке.

Конфигурации точек и прямых

Проективная геометрия изучает факты и свойства фигур, не меняющиеся при центральных проекциях, т.е. проекциях из фиксированной точки. Многие проективные задачи решаются с помощью выхода в пространство. Тому есть причины, которые мы не будем здесь обсуждать, это увело бы нас слишком далеко в основания проективной геометрии. Скажем только, что весьма трудные планиметрические задачи о конфигурациях точек и прямых превращаются подчас в совсем простые «пространственные» утверждения.

Задача 5 (поляра относительно угла). *Дан угол и точка A, отличная от его вершины (рис.14). Через A проводятся две произвольные прямые, пересекающие стороны угла в точках M_1, M_2 и N_1, N_2 соответственно. Докажите, что точка пересечения прямых M_1N_2 и M_2N_1 лежит на фиксированной прямой, проходящей через вершину угла.*

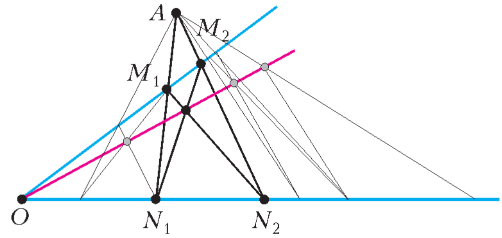


Рис. 14

Если вместо угла взять окружность, то утверждение остается верным, в этом случае эта фиксированная прямая называется *полярой* точки A относительно окружности. У поляры масса интересных свойств, на которых основано важнейшее геометрическое понятие *двойственности* (см., например, книгу Г.С.М.Коксетера и С.П.Грейтцера «Новые встречи с геометрией»). Теорема о поляре имеет несколько доказательств, в том числе вполне геометрических и изящных. Задача 5 утверждает, что поляра бывает не только относительно окружности, но и относительно угла (т.е. относительно пары прямых).[1] Удивительно, что этот факт совсем непросто доказать. Хотя, по идее, с парой прямых все должно быть проще, чем с окружностью. И нам снова поможет выход в пространство.

Сначала мы перейдем к более общему, трехмерному утверждению.

Задача 5′ (поляра относительно двугранного угла). *В пространстве даны двугранный угол и точка A, не лежащая на его ребре. Через A проводится две произвольные прямые, пересекающие грани угла в точках M_1, M_2 и N_1, N_2 соответственно. Докажите, что точка пересечения прямых M_1N_2 и M_2N_1 лежит на*

[1] Для знатоков этот факт не вызовет удивления: поляра есть не только относительно окружности, но и относительно любой коники, а пара прямых – тоже коника, только вырожденная.

фиксированной плоскости, проходящей через ребро угла.

Ясно, что из этого утверждения сразу следует задача 5: достаточно представить наш угол как сечение некоторого двугранного угла. А докажется оно проще, что нас уже не удивляет. («Доказать больше иногда проще»!)

Доказательство (рис.15). Надо показать, что точка K пересечения прямых

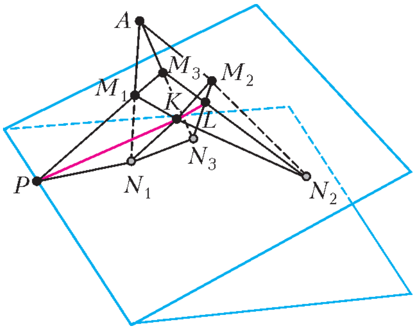


Рис. 15

M_1N_2 и M_2N_1 лежит на фиксированной плоскости. Проведем через точку A еще и третью прямую, пересекающую грани угла в точках M_3 и N_3, обозначим через L точку пересечения прямых M_2N_3 и M_3N_2. Зафиксируем положение прямых AM_2 и AM_3 (тем самым, и точки N_2, N_3 и L), а точку M_1 будем выбирать на грани угла произвольно. Тогда пересечение плоскостей $M_1N_2M_3$ и $N_1M_2N_3$ будет содержать точки K, L и P – точку пересечения плоскости AM_1M_3 с ребром угла. Значит, эти три точки лежат на одной прямой. Следовательно, при любом выборе точки M_1 точка K всегда будет лежать в фиксированной плоскости, проведенной через ребро угла и через точку L. Значит, и при любом выборе точки M_2 она будет лежать на той же плоскости.

У задачи 5 есть еще одно решение – без выхода в пространство, но с применением одного мощного средства – теоремы Дезарга. Однако и сама теорема Дезарга тоже доказывается с помощью выхода в пространство! Но – все по порядку. В 1636 году французский геометр Жерар Дезарг (1591 – 1661) в своем «Трактате о перспективе» впервые сформулировал и привел доказательство теоремы о двух треугольниках. Вот она.

Теорема (G.Desargues, 1636 г.) *На плоскости даны два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Если прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке, то три точки пересечения соответствующих сторон треугольников (или их продолжений) лежат на одной прямой (рис.16).*

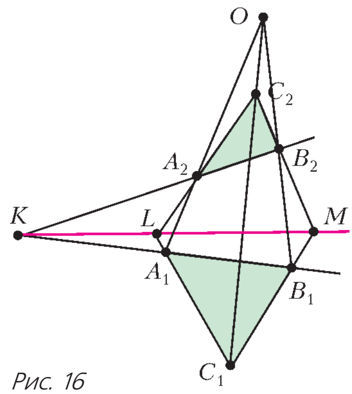


Рис. 16

Этот замечательный факт, видимо, был известен и до Дезарга. Живописцы эпохи Возрождения должны были быть с ним знакомы, поскольку знали основы перспективы и применяли их. Дезарг, однако, впервые его сформулировал в виде теоремы и, что важнее всего, доказал. Причем идея его доказательства практически в неизменном виде используется до сих пор!

Посмотрите на рисунок 16. А теперь представьте, что это не плоский, а пространственный чертеж и заштрихованные треугольники лежат на самом деле в разных плоскостях. Тогда утверждение теоремы очевидно: плоскости заштрихованных треугольников пересекаются по прямой, причем точки K, L, M принадлежат обеим этим плоскостям, а значит, лежат на прямой пересечения. Все, доказательство по существу закончено. Остается аккуратно перейти от пространства к плоскости. Это можно сделать с помощью проекции, а можно с помощью предельного перехода.

Пойдем по второму пути. Закрепляем точки A_1, A_2, B_1, B_2, а точку C_1 немного «поднимем» над плоскостью. Теперь выберем на прямой OC_1 новую точку C_2, рядом с ее первоначальным положением. Получаем, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ вылезли из плоскости, значит, к ним можно применить доказанное утверждение: точки K, L, M лежат на одной прямой. Теперь устремим точку C_1 к ее первоначальному положению, а вместе с ней и точку C_2. В пределе получим, что точки K, L, M лежат на одной прямой. Так приемом, называемым *предельный переход*, мы завершаем доказательство.

Упражнения

11. Решите задачу 5 с помощью теоремы Дезарга.

12. Верна ли теорема Дезарга для четырехугольников: если для двух четырехугольников $A_1 \ldots A_4$ и $B_1 \ldots B_4$ на плоскости четыре прямые $A_1B_1, \ldots, A_4B_4$ пересекаются в одной точке, то четыре точки пересечения соответствующих сторон (или их продолжений) лежат на одной прямой?

13 (теорема о бабочке для угла). На сторонах угла взяты точки A и B. Через середину M отрезка AB проходят две прямые, одна из которых пересекает стороны угла в точках A_1, B_1, а другая – в точках A_2, B_2. Прямые A_1B_2 и A_2B_1 пересекают прямую AB в точках P и Q. Докажите, что $MP = MQ$.

Четырехмерное пространство

Если задачи на плоскости можно решать выходом в трехмерное пространство, значит, некоторые задачи стереометрии можно решать выходом в четырехмерное? Да, конечно. Мы дадим такие задачи в виде упражнений в конце статьи, но сначала разберемся, что такое четырехмерное пространство. На помощь приходит декартова система координат. Плоскость – это множество пар чисел. Каждая пара чисел – точка; множество точек, удовлетворяющих линейному уравнению, – прямая. Расстояния вычисляются с помощью теоремы Пифагора, углы – с помощью скалярного произведения. Пространство – это множество троек чисел. Значит, четырехмерное пространство – множество четверок чисел. Обозначается оно символом $\mathbb{R}^4$. Каждая точка $\boldsymbol{x}$ имеет четыре координаты: $\boldsymbol{x} = (x_1; x_2; x_3; x_4)$ (договоримся точки, в отличие от чисел, обозначать жирным шрифтом). Плоскость (трехмерная!) – это множество точек, удовлетворяющих линейному уравнению $a_1x_1 + \ldots + a_4x_4 + b = 0$. В $\mathbb{R}^4$ есть и двумерные плоскости, которые являются пересечениями двух трехмерных, т.е. решениями систем из двух линейных уравнений. И конечно, прямые. Их можно определить либо как множество решений системы из трех уравнений (громоздко както), либо параметрически: прямая – это множество точек $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{b}$, где t пробегает все действительные числа. Здесь $\boldsymbol{x}_0$ – произвольная точка прямой, а $\boldsymbol{b}$ – любой вектор, параллельный прямой. Длина вектора $\boldsymbol{b} = (b_1; b_2; b_3; b_4)$ – это $\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2}$, а расстояние между двумя точками – это длина вектора-отрезка, их соединяющего. Угол между векторами определяется с помощью скалярного произведения, которое, конечно же, равно $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + \ldots + y_4x_4$. Теперь можно определять четырехмерные фигуры. Например, сфера с центром $\boldsymbol{a}$ и радиусом r – это множество точек $\boldsymbol{x}$, для которых $(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_4 - a_4)^2 = r^2$.

Собственно, и все. Четырехмерное пространство существует, ничего мистического в нем нет. Не очень понятно, присутствует ли оно физически в нашем мире, но в качестве математического объекта мы можем им пользоваться. Многие свойства четырехмерных фигур можно вывести по аналогии с трехмерными. Например, любые пять точек в $\mathbb{R}^4$ являются вершинами четырехмерной пирамиды – *симплекса*.

(Продолжение следует)

Андрей Анатольевич Зализняк

А.ПИПЕРСКИ

24 ДЕКАБРЯ 2017 ГОДА В ВОЗРАСТЕ 82 лет ушел из жизни великий российский лингвист, академик РАН Андрей Анатольевич Зализняк (1935–2017). На его счету – множество выдающихся открытий. Он изучал древненовгородские берестяные грамоты и описал грамматику древненовгородского диалекта; он убедительно доказал, что «Слово о полку Игореве» действительно было написано около 1200 года, а не является подделкой XVIII века, как многие считали раньше; он создал словарь русского словоизменения, который и по сей день лежит в основе компьютерных программ, работающих с русским языком; он развил и доработал определение падежа, данное А.Н.Колмогоровым, – и многое другое. Строгость и доказательность работ Андрея Анатольевича была и остается идеалом для всех его учеников – а таковыми считают себя почти все лингвисты Москвы и не только.

В.А.Успенский (слева) и А.А.Зализняк на Летней школе «Современная математика» (Дубна, 2009 г.)

Отличительная черта научной деятельности Зализняка – интерес к математике и точным методам в языкознании. В 1950-е годы он учился на французском отделении филологического факультета Московского университета – казалось бы, что может быть более гуманитарным и далеким от точных наук? Однако он стал ходить к В.А.Успенскому на занятия по математике для филологов и оказался в числе лучших студентов. «Он меня абсолютно потряс. Он задавал какие-то вопросы, чрезвычайно глубокие, но совершенно перпендикулярные к вопросам всех остальных и к тому, чего я мог ожидать. Какой-то такой был поворот в его вопросах, словно он с другой стороны на все смотрел. Сразу стало ясно, что это гений», – вспоминает Успенский.[1] Вскоре Зализняк стал одним из руководителей семинара по математической лингвистике на механико-математическом факультете МГУ. О некоторых достижениях Зализняка, связанных с формализацией лингвистического знания, мне бы и хотелось рассказать поподробнее.

Русское словоизменение

В 1957–1958 годах Зализняк был на стажировке в Париже. Там он преподавал французским студентам русский язык и обнаружил, что существующих описаний русского склонения и спряжения для иностранцев недостаточно: они слишком расплывчатые. Уже в 1961 году Зализняк издал «Краткий русско-французский учебный словарь», приложив к нему абсолютно формальный 150-страничный очерк русского словоизменения. В 1965 году из этого очерка выросла кандидатская диссертация; работа оказалась настолько новаторской, что ее сразу засчитали за докторскую. В 1967 году Зализняк издал книгу «Русское именное словоизменение», а в 1977 году – «Грамматический словарь русского языка».

[1] Борьба за лингвистику. Беседа с математиком Владимиром Успенским. Часть 1. http://polit.ru/article/2009/07/09/linguist/

В этом словаре при каждом слове стоят непривычные пометы: *дуб* м 1с, *порог* м 3а, *фонарь* м 2b. Ясно, что «м» обозначает мужской род, а зачем все остальное? Ведь мы со школьных лет и так знаем, что *дуб*, *порог* и *фонарь* – это II склонение.

Однако для полного описания русского языка такого знания недостаточно. Чтобы убедиться в этом, образуем родительный падеж единственного числа и именительный падеж множественного числа:

нет ду́ба – есть дубы́,
нет поро́га – есть поро́ги,
нет фонаря́ – есть фонари́.

Видно, что в окончаниях этих слов появляются разные буквы (в одном – *а* и *ы*, в другом – *а* и *и*, в третьем – *я* и *и*), да и с ударением все непросто: у слова *дуб* оно падает то на окончание, то на основу, у слова *порог* оно в обеих формах на основе, а у слова *фонарь* – на окончании. Именно эту информацию и несут в себе пометы.

Цифры обозначают, на что оканчивается основа и как будут выглядеть окончания:

1 – основа на твердый согласный (кроме заднеязычных *к*, *г* и *х*, шипящих *ш* и *ж* и свистящего *ц*);

2 – основа на мягкий согласный (кроме *ч* и *й*);

3 – основа на *к*, *г* и *х*

и т.д.

Таких типов у существительных насчитывается девять: 0 – несклоняемые слова (например, *кенгуру*), 1–7 – варианты традиционных I и II склонений (например, *акула*, *поезд*, *ведро*) и 8 – традиционное III склонение (например, *крепость*).

Буква обозначает схему ударения:

а – всегда на основе;

b – всегда на окончании;

с – подвижное ударение: в единственном числе на основе, а во множественном – на окончании

и т.д.

Всего у существительных насчитывается восемь схем, включающих в себя по крайней мере 10 слов. Больше 90% существительных в «Грамматическом словаре» Зализняка относятся к схеме а – но это не значит, что остальными схемами можно пренебречь. Дело в том, что редкие схемы включают в себя очень частотные слова: например, многие названия частей тела. Посклоняйте слово *рука* и посмотрите, когда ударение будет на основе, а когда на окончании: распределение там очень прихотливое. И вот если считать не по словарю, а по текстам, то на все схемы, кроме а, придется более четверти всех существительных (табл.1).

Кстати, в этой таблице пары слов в каждой ячейке упорядочены так же, как и в самом «Грамматическом словаре», – в инверсионном (обратном) порядке, т.е. по алфавиту при чтении справа налево, а не слева направо. Если объединить эти 16 слов в один список и упорядочить его таким образом,

Таблица 1

Схема ударения	Примеры	Число существительных в словаре	Доля в словаре (%)	Доля в текстах (%)
a	*карта, порог*	44933	91,62	73,40
b	*фонарь, ступня*	3117	6,36	6,85
c	*дуб, море*	408	0,83	8,75
d	*изба, вино*	336	0,69	3,30
e	*ухо, доля*	185	0,38	5,04
f	*губа, червь*	35	0,07	0,38
d′	*спина, душа*	11	0,02	0,91
f′	*рука, гора*	15	0,03	1,37
Всего		49040	100,00	100,00

получим: *изба*, *губа*, *рука*, *спина*, *гора*, *карта*, *душа*, *дуб*, *порог*, *море*, *вино*, *ухо*, *червь*, *фонарь*, *доля*, *ступня* (как и при обычной алфавитной сортировке, если последние буквы одинаковы, смотрим на предпоследние и т.д.).

Зализняк не зря выбрал такой порядок. Благодаря этому в словаре оказываются рядом слова с одинаковой правой частью, т.е. те, которые изменяются похоже: глаголы на *-нуть*, существительные на *-а* и т.п. В нашем примере видно: подряд расположились 7 слов традиционного I склонения, потом 7 слов II склонения и потом еще 2 слова I склонения. Сейчас цель такой сортировки кажется надуманной: можно же взять оцифрованную версию словаря и за доли секунды выбрать все слова на *-нуть*, – но в 1977 году такой возможности не было. Однако с распространением компьютеров обнаружилось новое применение «Грамматического словаря»: именно на нем основаны программы, которые работают с русской морфологией. Без словаря гораздо хуже функционировали бы современные поисковые системы и голосовые помощники. Например, введя в поиск *Пушкин стихи*, вы получаете страницы, на которых написано *в стихах Пушкина*. Это не просто слова, которые отличаются на 1–2 буквы (иначе находились бы и страницы со словами *пушки* и *стихия*, а такого не происходит), а именно формы слов, построенные по моделям Зализняка. А голосовой помощник без словаря не построил бы родительный падеж от слова *фонарь*, а если бы он просто озвучивал текст, то не узнал бы, что надо читать *фонаря́*, а не *фона́ря*.

Легко понять, как на основе словаря Зализняка работает морфологический синтез. Если мы строим формы от слова *фонарь*, надо взять его помету (2b), выбрать из окончаний типа 2 то, которое выражает нужную комбинацию падежа и числа: например *-я* для род. ед., – и узнать во вводной части словаря, что основа слов типа 2 получается отбрасыванием конечного *ь*. В результате выходит: *фонар-* + *-я* = *фонаря*. Чуть сложнее со словами, у которых несколько основ: так, слово *огурец* имеет помету 5*b, где * обозначает наличие беглой гласной (т.е. основ будет две: *огурец-* и *огурц-*). Опять-таки из вводной части словаря узнаем, что окончание род. ед. в типе 5 имеет вид *-а*; если есть знак *, то берется основа без гласной в случае, если окончание не входит в множество {-ε (пустая строка); *-й*; *-ь*; *-ью*}. Получаем *огурц-* + *-а* = *огурца*.

Противоположная задача – опираясь на «Грамматический словарь», понять по строке символов, является ли она формой какого-либо русского слова, и если да, то какие это могут быть формы и от каких слов – с вычислительной точки зрения решается сложнее. Требуется не только хранить все возможные наборы окончаний и помету для каждого слова, но и заранее построить все возможные основы и записать, в какой форме какая из основ используется. Дальше можно предложить такой алгоритм: разбиваем слово на две части всеми возможными способами и смотрим, является ли первая часть основой каких-либо слов. Если да, проверяем, бывает ли вторая часть окончанием у этих слов при такой основе, и если да, то выписываем те слова и формы, в которых это возможно. Проанализируем в качестве примера слово *паром*, для которого получается три разбора (табл.2).

Аркадий Волож, руководитель «Яндекса», вспоминает, что в начале 1990-х его другу и коллеге Илье Сегаловичу на основе словаря Зализняка удалось создать морфологический анализатор, который работал настолько эффективно, что умещался в оперативную память тогдашнего персонального компьютера – 640 килобайт.

Можно, конечно, сказать: зачем все эти сложные обозначения, схемы ударения, чередования основ и т.д.? Давайте просто для каждого слова выпишем все формы с ударением, и готово. Но это очень неэкономно: на каждое существительное придется по 12 форм, а на некоторые глаголы – больше 100 (считая четыре причастия во всех родах, числах и падежах). А «Грамматический словарь» – не такая уж и толстая книга, хотя и имеет большой формат: в 4-м издании описание русского словоизменения занимает 118 страниц, а за ними следуют 586 страниц собственно словаря.

Таблица 2

Часть 1 (основа)	Часть 2 (окончание)	Возможная начальная форма	Есть у этого слова нужное окончание?	Результат
паром-	-ε	*ПАРО́М*	да, им. ед. и вин. ед.	*ПАРО́М*, им. ед. *ПАРО́М*, вин. ед.
паро-	*-м*	—		
пар-	*-ом*	*ПАРИ́ТЬ* *ПА́РИТЬ* *ПА́РА* *ПАР*	— — — да, твор. ед.	*ПАР*, твор. ед.
па-	*-ром*	*ПА*	—	
п-	*-аром*	—		
ε-	*-паром*	—		

Стремясь описать язык оптимальным образом, Зализняк ставил и решал в том числе и математические задачи. К одной из них подводит пример, с которого мы начали. Напомним, что слово ***фонарь*** имеет схему ударения b, т.е. ударение всегда на окончании. Прежде чем читать дальше, подумайте: нет ли здесь некоторого противоречия, которое надо разрешить?

Зададимся странным вопросом: куда падает ударение в форме *фонарь* – на основу или на окончание? На этот вопрос есть три варианта ответа:

1) на основу: ведь ясно, что гласный *а* входит в основу, а окончание здесь нулевое;

2) мы не знаем куда: основа и окончание здесь не соревнуются за ударение, поскольку окончание нулевое;

3) на окончание, но введем дополнительное правило: если ударение попало на нулевое окончание (и получается, что ему негде прозвучать), оно переносится на основу.

Обозначим ударение на основе через +, ударение на окончании через –, а «не знаем» через 0. Примем вариант 1 – самый, как кажется, естественный – и изобразим схему ударения во всех числах и падежах[2] у нескольких русских существительных (табл.3). Нулей в полученной таблице не будет, поскольку этот вариант не предполагает ответа «не знаем».

Видно, что вариант 1 не очень экономный: нам приходится вводить разные схемы ударения для неодушевленного слова *фонарь* и одушевленного слова *вратарь* (у них различается вин. ед.: *вижу фона́рь*, но *вижу вратаря́*), не говоря уже про очень похожее слово *сапог*, для которого понадобится схема V из-за того, что у него род. мн. имеет нулевое окончание: *нет сапо́г*. Всего таких схем, как посчитал Зализняк, окажется 22.

Еще менее экономен вариант 2, который дает нам таблицу с нулями (табл.4). Если использовать его, схем выйдет целых 39. Слова *карта*, *тигр* и *порог* получат не ту же схему, что *юноша* (строка II не изменится, а в строках III–V вместо плюсов будут нули).

А самым экономным оказывается вариант 3 (табл.5): если использовать его, выяснится, что *юноша*, *карта*, *тигр* и *порог* – это одна схема; *ступня*, *фонарь*, *вратарь* и *сапог* – еще одна схема (и да, как это ни странно, в слове *порог* ударение на основе, а в слове *фонарь* – на окончании). Всего для русского языка потребуется 11 таких схем. Выше были продемонстрированы только 8 из них, обозначенные как a, b, c, d, e, f, d' и f', поскольку остальные

[2] За исключением винительного падежа множественного числа, поскольку он всегда совпадает либо с родительным, либо с именительным в зависимости от одушевленности (вин. *вижу столы* как им. *стоят столы*, вин. *вижу кошек* как род. *глаза кошек*).

Таблица 3

	ед.						мн.					Примеры
	И.	Р.	Д.	В.	Т.	П.	И.	Р.	Д.	Т.	П.	
I	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	*юноша, карта, тигр, порог*
II	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*ступня*
III	+	–	–	+	–	–	–	–	–	–	–	*фонарь*
IV	+	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*вратарь*
V	+	–	–	+	–	–	–	+	–	–	–	*сапог*
. . .												

Таблица 4

	ед.						мн.					Примеры
	И.	Р.	Д.	В.	Т.	П.	И.	Р.	Д.	Т.	П.	
I	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	*юноша*
I′	+	+	+	+	+	+	+	0	+	+	+	*карта*
I″	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	*тигр*
I‴	0	+	+	0	+	+	+	+	+	+	+	*порог*
. . .												

Таблица 5

	ед.						мн.					Примеры
	И.	Р.	Д.	В.	Т.	П.	И.	Р.	Д.	Т.	П.	
a	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	*юноша, карта, тигр, порог*
b	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*ступня, фонарь, вратарь, сапог*
. . .												

представлены совсем небольшим числом слов.

Зализняк не просто получил это решение интуитивно, но и доказал строго математически, что оно оптимально, если мы хотим минимизировать число строк в таблице. Вот как выглядит задача, которую он перед собой поставил:

Имеется матрица из m строк и n столбцов, элементами которой являются знаки $+$, $-$ и 0. Требуется заменить каждый из имеющихся в матрице нулей плюсом или минусом так, чтобы в полученной матрице без нулей (назовем ее результирующей для данной матрицы) число s различных строк было минимальным.

Читателей, заинтересовавшихся полным решением, отсылаем к книге А.А.Зализняка «Русское именное словоизменение» (М.: Наука, 1967; переиздание: М.: Языки славянской культуры, 2002) и заметим, что для решения этой задачи автор сформулировал и доказал три теоремы; это нечасто встречается в лингвистических работах – но, оказывается, встречается!

(Продолжение следует)

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи M2494–M2497, Ф2501–Ф2504

M2494. Доска 20×20 покрашена в два цвета: нечетные столбцы покрашены в черный цвет, четные – в белый. На всех черных клетках стоит по одному шахматному королю. Каждым ходом один из королей сдвигается на свободную соседнюю по стороне или диагонали клетку. За какое наименьшее число ходов все короли могут снова встать на черные клетки, причем так, что ни один король не окажется в клетке, в которой стоял изначально?

Р.Ефремов

M2495. а) Найдите остаток от деления числа $(2n-1)^{(2n-1)} + (2n+1)^{(2n+1)}$ на $(2n)^3$.
б) Найдите остаток от деления числа $(2n-1)^{(2n-1)^{(2n-1)}} + (2n+1)^{(2n+1)^{(2n+1)}}$ на $(2n)^2$ и на $(2n)^3$.

В.Расторгуев

M2496. На плоскости расположено нечетное количество городов так, что все попарные расстояния между ними различны. Некоторые пары городов соединены (двусторонними) авиарейсами. Оказалось, что из каждого города выходят ровно два авиарейса, причем это рейсы в два наиболее удаленных города. Докажите, что, используя авиарейсы, из любого города можно добраться до любого другого.

А.Гайфуллин

M2497. Пусть $ABCD$ – выпуклый четырехугольник. Внутри четырехугольника выбираются пары точек P, Q, удовлетворяющие условию

$$\angle APB = \angle CPD = \angle AQB = \angle CQD$$

(рис.1). Докажите, что всевозможные прямые PQ проходят через фиксированную точку либо все они параллельны друг другу.

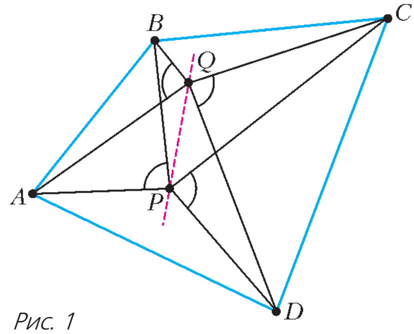


Рис. 1

С.Берлов

Ф2501. Механическая модель молекулы состоит из двух шариков, скрепленных невесомой пружинкой. Такая модель-молекула движется к жесткой стенке так, как показано на рисунке 2 (прямая линия,

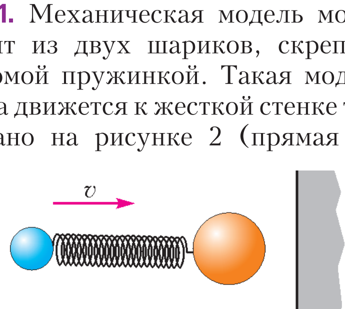


Рис. 2

проходящая через центры шариков, перпендикулярна плоскости стенки). Шарики движутся с одинаковыми скоростями, пружинка не деформирована. При каком соотношении масс атомов-шариков удар молекулы о стенку будет резонансным? При таком ударе энергия колебаний молекулы после «ухода» от стенки должна быть максимальной. Удар шарика о стенку считайте абсолютно упругим.

А.Власов

Ф2502. С одним молем одноатомного газа провели процесс, состоящий из четырех участков. На участке *1–2* газ совершил работу A, при этом температура была пропорциональной объему в степени n. Температуры T_1 и T_2 известны, причем $T_1 < T_2$. На участке *2-3* газ изотермически расширялся, на участке *3–4* он адиабатически расширялся, а на участке *4–1* – изотермически сжимался. Какова работа, совершенная газом на участке *3–4*?

К.Парфёнов

Ф2503. Однократно ионизованный атом гелия (ион) пересекает ось симметрии длинного, $L = 100$ м, цилиндрического, с площадью поперечного сечения $S = 100$ см^2, магнита на расстоянии $l = 100$ см от его южного полюса (вне магнита). В этот момент скорость иона была направлена перпендикулярно оси симметрии магнита, а ускорение составляло угол 100° с вектором индукции магнитного поля. Какой была скорость иона в этот момент? Какова длина волны де Бройля, соответствующая этой скорости иона? Модуль заряда электрона равен $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Магнитный дипольный момент электрона, связанный с наличием у него собственного момента количества движения (спина), равен $\mu_e = 928 \cdot 10^{-26}$ Дж/Тл.

С.Варламов

Ф2504. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 100$ нФ и катушки индуктивностью $L = 100$ мкГн. Емкость конденсатора периодически изменяют с амплитудой $\Delta C = C/100$ и с периодом вдвое меньшим, чем период собственных колебаний контура. Оцените максимальное время, за которое амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе на собственной частоте достигнет 100 мВ. Считайте, что тепловые колебания в контуре имеют характерную тепловую энергию kT. Температура равна 100 К. Омическое сопротивление проводов катушки равно нулю.

Фольклор

Решения задач М2482–М2485, Ф2489–Ф2492

М2482. *Дан параллелограмм $ABCD$ с тупым углом B, в котором $AD > AB$ (рис.1). На диагонали AC выбраны такие*

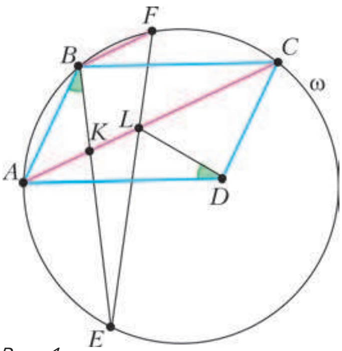


Рис. 1

точки K и L, что $\angle ABK = \angle ADL$ (точки A, K, L, C различны, причем K лежит между A и L). Прямая BK пересекает окружность ω, описанную около треугольника ABC, в точках B и E, а прямая EL пересекает ω в точках E и F. Докажите, что $BF \parallel AC$.

Рассмотрим точку F_1, симметричную D относительно прямой AC (рис.2).

Заметим, что $F_1 \in \omega$. Действительно: по свойству параллелограмма $\angle ABC = \angle ADC$; $\angle ADC = \angle AF_1C$ из симметрии.

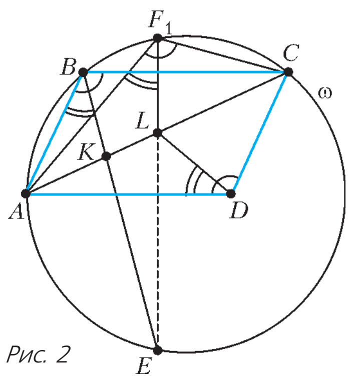


Рис. 2

Тогда $\angle ABC = \angle AF_1C$, а значит, четырехугольник ABF_1C вписан в окружность ω. Отрезки AB и CD равны по свойству параллелограмма, отрезки CD и CF_1 равны из симметрии. Получаем, что $AB = CF_1$. Но тогда ABF_1C – равнобокая трапеция, и $BF_1 \parallel AC$.

В силу симметрии $\angle AF_1L = \angle ADL$; по условию $\angle ADL = \angle ABK$; углы ABK и AF_1E равны, так как опираются на одну дугу AE окружности ω. Имеем $\angle AF_1L = \angle AF_1E$. Полученное равенство означает, что точки F_1, L и E лежат на одной прямой, т.е. точки F и F_1 совпадают. Но ранее доказано, что $BF_1 \parallel AC$, откуда следует утверждение задачи.

Б.Обухов

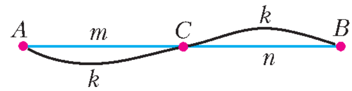
M2483. *В стране между некоторыми парами городов осуществляются двусторонние беспосадочные авиарейсы. Известно, что из любого города в любой другой можно долететь, совершив не более 100 перелетов. Кроме того, из любого города в любой другой можно долететь, совершив четное число перелетов. При каком наименьшем натуральном d из любого города можно гарантированно долететь в любой другой, совершив четное число перелетов, не превосходящее d?*

(Разрешается посещать один и тот же город или совершать один и тот же перелет более одного раза.)

Ответ: 200.

Пример, при котором может понадобиться 200 перелетов: 201 город, соединенные по циклу авиалиниями, и пара соседних городов этого цикла. Ясно, что от любого города можно добраться до любого другого не более чем за 100 перелетов (по более «короткой» дуге цикла). С другой стороны, кратчайший четный маршрут, соединяющий эти два города, потребует 200 перелетов. (Отметим, что приведенный пример – не единственный.)

Оценка. Рассмотрим два произвольных города A и B и докажем, что от A до B можно добраться за четное число перелетов, не превосходящее 200. Рассмотрим минимальное четное количество перелетов $2k$ из города A в город B и предположим,



что $k > 100$ (см. рисунок). Пусть C – город, посещенный k-м после A. Заметим, что из A в C можно добраться, совершив $m \le 100$ перелетов. Если m той же четности, что k, это позволяет сократить маршрут из A в B (сначала за m перелетов добираемся из A в C, а затем – за k перелетов из C в B). Но это противоречит минимальности рассматриваемого четного пути из A в B. Значит, m и k разной четности. Аналогично, имеется маршрут из C в B, содержащий $n \le 100$ перелетов, и n и k разной четности. Эти два маршрута позволяют добраться из A в B через C, совершив четное количество $m + n \le 200$ перелетов. Противоречие.

И.Богданов

M2484. *Натуральные числа x и y таковы, что*

$$[x+2,\ y+2] - [x+1,\ y+1] = [x+1,\ y+1] - [x,\ y].$$

Докажите, что одно из чисел x и y делится на другое.

(Здесь через [a, b] обозначается наименьшее общее кратное чисел a и b.)

Положим $a = x + 1$, $b = y + 1$.

Если $a = b$, то условие задачи выполнено. Теперь без ограничения общности можем считать, что $a < b$.

Заметим, что для любых двух натуральных чисел x и y выполнено $[x,\ y] = zy$, где z – натуральный делитель x, $z = \dfrac{x}{(x, y)}$ (здесь и далее через (x, y) обозначаем НОД натуральных чисел x и y).

Таким образом, из данного в условии равенства $[a-1,\ b-1] + [a+1,\ b+1] = 2\,[a,\ b]$ получаем

$$k(b-1) + m(b+1) = 2lb, \qquad (1)$$

где

$$k = \frac{a-1}{(a-1, b-1)},\quad l = \frac{a}{(a, b)},\quad m = \frac{a+1}{(a+1, b+1)}. \qquad (2)$$

В частности,

$$(a-1)\vdots k,\ \ a\vdots l\,, \qquad (3)$$

$$1 \le k \le a-1 < b\,,\ \ 1 \le m \le a+1 \le b\,. \qquad (4)$$

Далее из (1) получаем $m-k=(2l-k-m)b$, откуда $(m-k)\vdots b$. Из (4): $|m-k|<b$, поэтому $m-k=0$, $k=m$. Подставим $m=k$ в (1) и получим $l=k$. Но из (3) следует $(a-1)\vdots k$ и $a\vdots k$, поэтому $k=1$.

Подставив $k = 1$ в (2), получим $a-1=(a-1,b-1)$, поэтому $(b-1)\vdots(a-1)$, что и требовалось.

Комментарий. Можно найти все пары a и b, удовлетворяющие начальному равенству.

Подставив $k=l=m=1$ в (2), получим $(a-1,b-1)=a-1$, $(a,b)=a$, $(a+1,b+1)=a+1$, поэтому

$$(b-1)\vdots(a-1),\ \ b\vdots a,\ \ (b+1)\vdots(a+1)\,. \qquad (5)$$

Заметим, что (5) равносильно условию $(b-a)\vdots(a-1)$, $(b-a)\vdots a$, $(b-a)\vdots(a+1)$, или $(b-a)\vdots[a-1,a,a+1]$.

Для четных a имеем $(a-1,a,a+1)=(a-1)a(a+1)$, т.е. $b=a+k(a-1)a(a+1)$, $k\in\mathbb{N}$.

Для нечетных a имеем $(a-1,a,a+1)=\dfrac{(a-1)a(a+1)}{2}$, т.е. $b=a+\dfrac{k(a-1)a(a+1)}{2}$, $k\in\mathbb{N}$.

Легко проверить, что все пары натуральных чисел, для которых верно (5), удовлетворяют и условию задачи.

Д.Джукич

М2485. *а) Зафиксируем натуральное $n \ge 2$. Назовем n-ситом клетчатый квадрат $n \times n$, из которого удалили n клеток так, что из каждого столбца и из каждой строки удалена ровно одна клетка. Назовем полосками клетчатые прямоугольники $1\times k$ и $k \times 1$ для всех натуральных k. Для любого n-сита A обозначим через $m(A)$ наименьшее количество полосок, на которое его можно разрезать. Найдите все возможные значения $m(A)$ по всем n-ситам A.*

б) Докажите, что количество способов разрезать n-сито на наименьшее возможное количество полосок не превосходит 100^n.*

а) **Ответ:** $2n-2$.

Разбиение на $2n-2$ полосок можно получить, например, разрезав сито по всем горизонтальным линиям сетки. Далее рассмотрим произвольное разбиение некоторого сита на $2n-2$ или меньшее количество полосок.

Удаленную клетку сита будем называть *дыркой*. *Крестом* дырки a назовем объединение строки и столбца, в которых содержится клетка a (очевидно, в каждом кресте ровно $2n-2$ клетки, не считая саму дырку).

Назовем полоску *горизонтальной*, или h-полоской, если она содержится в некоторой строке (т.е. в горизонтальном ряду), и *вертикальной*, или v-полоской, если она содержится в некотором столбце (полоску 1×1 считаем для определенности горизонтальной). Также пометим каждую клетку сита A буквой h или v в зависимости от того, содержится она в h- или v-полоске. Для каждой клетки определим ее «координаты» (x,y), где x – номер столбца, в котором расположена клетка (при нумерации слева направо), а y – номер строки (при нумерации снизу вверх).

Каждой h-полоске поставим в соответствие дырку, которая находится в ее строке. Аналогично, каждой v-полоске поставим в соответствие дырку, которая находится в ее столбце.

Так как имеется не более $2n-2$ полосок и ровно n дырок, то либо найдется дырка a, которая не соответствует ни одной полоске, либо найдутся хотя бы две дырки a и b, каждая из которых соответствует ровно одной полоске. Рассмотрим эти два случая.

Случай 1. Пусть дырка a не соответствует ни одной полоске. Тогда в кресте дырки a все клетки над и под дыркой a помечены h, а все клетки слева и справа от a помечены v (рис.1). Это означает, что ни одна полоска не содержит более одной клетки рассматриваемого креста и, следовательно, что полосок не менее $2n-2$.

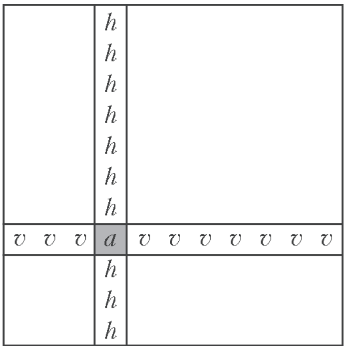


Рис. 1

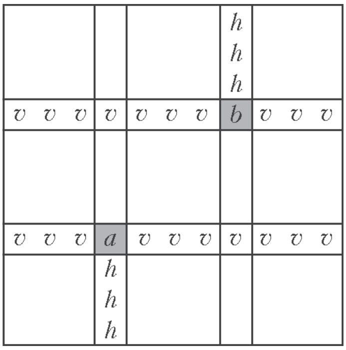


Рис. 2

Случай 2. Пусть $a = (x_a, y_a)$ и $b = (x_b, y_b)$ – дырки, каждая из которых соответствует ровно одной полоске. Без ограничения общности считаем, что $x_a < x_b$, $y_a < y_b$ (рис.2).

Полоске, содержащей клетку (x_a, y_b), соответствует дырка a или дырка b, пусть, для определенности, это дырка a, т.е. эта полоска вертикальная. Тогда полоске, содержащей клетку (x_b, y_a), соответствует дырка b. Так как дырка a соответствует ровно одной полоске, то все клетки под дыркой a – с меткой h, а все клетки слева и справа от a – с меткой v. Рассуждая аналогично, получаем, что все клетки над b – с меткой h, а слева и справа от b – с меткой v.

Рассмотрим все строки между строками клеток a и b, т.е. строки $y_a + 1$, $y_a + 2$, … …, $y_b - 1$. Каждая из них содержит дырку. Столбец каждой из этих дырок содержит хотя бы две v-полоски. Все остальные столбцы содержат хотя бы одну v-полоску. Кроме того, все строки ниже дырки a и выше дырки b содержат хотя бы по одной h-полоске. Всего получается не меньше чем $2(y_b - y_a - 1) + (n - y_b + y_a + 1) + (n - y_b) + (y_a - 1) = 2n - 2$ полосок.

Итак, в каждом из случаев 1 и 2 мы нашли $2n - 2$ полосок.

б) Теперь нам нужно доказать, что количество разбиений сита на $2n - 2$ полоски не превышает 100^n. При $n = 2$ это очевидно. Далее считаем, что $n \geq 3$. Докажем лемму, которую применим к разбиениям на $2n - 2$ полоски в указанных выше случаях 1 и 2.

Лемма. Рассмотрим клетчатый прямоугольник B с m столбцами и n строками. Пусть в B имеется несколько дырок, но в каждой строке и в каждом столбце – не более одной дырки. Пусть одна из дырок – это левый нижний угол. Рассмотрим такие разбиения B на $m - 1$ вертикальных и $n - 1$ горизонтальных полосок, что каждая вертикальная полоска содержит клетку в нижнем ряду, а каждая горизонтальная полоска содержит клетку в самом левом ряду. Количество таких разбиений не превосходит 2^{m+n}.

Доказательство леммы. Пусть дырки находятся в клетках (x_1, y_1), (x_2, y_2), … …, (x_s, y_s), $x_1 < x_2 \ldots < x_s$. Если $x_p < x_q$ и $y_p > y_q$ для некоторых p и q, то ни одна полоска не может содержать клетку (x_q, y_p) и нужных разбиений не существует (рис.3).

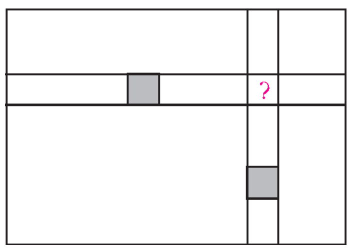


Рис. 3

В противном случае $y_1 < y_2 \ldots < y_s$. Тогда из левого нижнего угла в правый верхний можно по линиям сетки провести ломаную, отделяющую объединение горизонтальных полосок от объединения вертикальных полосок (рис.4).

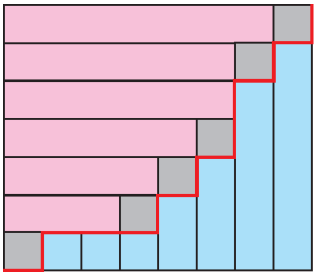


Рис. 4

Каждая такая ломаная определяет не более одного разбиения. Ломаная составлена из $m+n$ единичных отрезков, из которых ровно m горизонтальных, поэтому количество таких ломаных равно C_{m+n}^{m}, что меньше чем 2^{m+n}. Значит, количество возможных разбиений не превосходит 2^{m+n}. Лемма доказана.

Возвращаемся к задаче.

Случай 1. Пусть дырка a не соответствует ни одной полоске. Тогда каждая полоска имеет ровно одну клетку в кресте a. Обрежем исходный квадрат $n \times n$ до прямоугольника B_{nn} размера $(n-x_a+1)\times \times(n-y_a+1)$, у которого две угловые клетки (n, n) и $a=(x_a, y_a)$. Этот прямоугольник удовлетворяет условиям леммы, поэтому количество k_{nn} возможных «картинок», возникающих в нем, не превосходит $2^{2n-x_a-y_a+2}$. Аналогично, обрезаем исходный квадрат $n \times n$ еще тремя способами до прямоугольников B_{1n}, B_{n1}, B_{11}, примыкающих к углам исходного квадрата, оцениваем количество возможных картинок в них: $k_{1n} \le 2^{n+x_a-y_a+1}$, $k_{n1} \le 2^{n+y_a-x_a+1}$, $k_{11} \le 2^{x_a+y_a}$. Таким образом, количество разбиений не превышает $k_{11}k_{1n}k_{n1}k_{nn} \le \le 2^{4n+4}$.

Так как есть n возможностей для выбора дырки a (не соответствующей ни одной полоске), в случае 1 имеем не более $S_1 = n \cdot 2^{4n+4}$ разбиений.

Случай 2. Пусть $a=(x_a, y_a)$ и $b=(x_b, y_b)$ – дырки, каждая из которых соответствует ровно одной полоске. Так как количество полосок равно $2n-2$, в оценке, которую мы получили в пункте а), мы перечислили все полоски. Значит, если обрезать исходный квадрат, оставив только горизонтальную полосу из строк $y_a, y_a+1, \ldots, y_b$, мы однозначно увидим разбиение на полоски по вертикальным линиям сетки. Обрежем исходный квадрат $n \times n$ четырьмя способами: до прямоугольника, у которого две угловые клетки (n, n) и b, до прямоугольника, у которого две угловые клетки $(1, n)$ и b, до прямоугольника, у которого две угловые клетки $(1, 1)$ и a, до прямоугольника, у которого две угловые клетки $(n, 1)$ и a. К этим прямоугольникам применима лемма. Отсюда, аналогично рассуждениям в случае 1, получаем, что количество разбиений (при фиксированной паре a, b) не превосходит 2^{4n+2}. Так как имеется $C_n^2 = \frac{1}{2}(n^2-n)$ возможностей для выбора дырок a и b и для каждой возможности есть два способа сопоставить полоски этим дыркам, то в случае 2 имеем не более $S_2 = (n^2-n)\cdot 2^{4n+2}$ разбиений. Таким образом, общее количество разбиений не превосходит $S_1+S_2 = (4n^2+12n)\cdot 16^n$. При $n \ge 3$ это количество не превосходит 100^n. Задача б) решена.

Одно из альтернативных решений пункта а) опирается на лемму Холла. Идея этого решения состоит в следующем. Рассматривается разбиение горизонтальными сетками на $2n-2$ *максимальных* горизонтальных полосок. Аналогично определяются максимальные вертикальные полоски. Построим двудольный граф, вершины которого соответствуют максимальным полоскам, при этом вершины соединяются ребром, если соответствующие полоски пересекаются по клетке. Можно доказать, что этот граф удовлетворяет условиям леммы Холла, а значит, имеется паросочетание (разбиение всех вершин на пары соединенных ребром). Этому паросочетанию соответствуют $2n-2$ клетки на пересечениях максимальных горизонтальных и вертикальных полосок. При этом ни для какого разбиения сита на полоски никакие две из указанных $2n-2$ клеток не принадлежат одной полоске. Таким образом, полосок не может быть меньше чем $2n-2$.

Есть и другие подходы к решению задачи б), позволяющие снизить верхнюю оценку на количество способов до $p(n)\cdot 8^n$, где p – некоторый многочлен. Авторы предполагают, что количество способов разбить сито на $2n-2$ полосок на самом деле не превосходит 4^{n-2}, причем равенство достигается только тогда, когда все дырки расположены вдоль большой диагонали.

Н.Белухов, П.Мебэйн

Ф2489. *В начальном положении система закрепленных труб сечениями S и $3S$, а также вставленных в них поршней и пружин, которые прикреплены к поршням (рис.1), покоится. Между поршнями находится несжимаемая жидкость. Левый конец пружины жесткостью k неподвижно закреплен. К правому, свободному концу пружины жесткостью $2k$ прикладывают внешнюю силу и медленно сдвигают этот конец пружины на расстояние L. На сколько при этом растянется другая пружина? Считать, что жидкость под поршни не подтекает, трения нет, а внешнее давление достаточно большое. Влиянием силы тяжести пренебречь.*

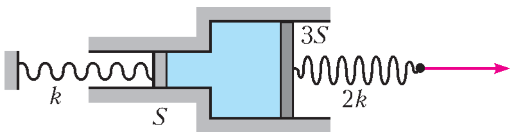


Рис. 1

Изобразим новые положения поршней и концов пружин (рис.2). Обозначим искомое изменение длины левой пружины через Δx_1 (этому же равно смещение левого поршня), смещение правого поршня – через Δx_2 (этому же равно смещение левого конца правой пружины) и силу, приложенную к свободному концу правой пружины, – через F. По закону Гука,

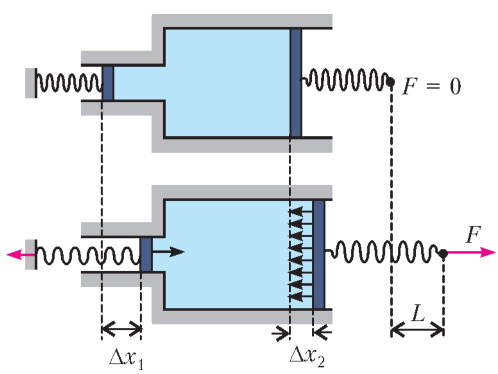


Рис. 2

$$F = 2k\left(L-\Delta x_2\right).$$

Правый поршень находится в равновесии, поэтому сила, действующая на поршень со стороны пружины, равна равнодействующей сил давления на него жидкости (изнутри) и внешней среды (эта равнодействующая схематично показана короткими стрелками на рисунке). Иными словами,

$$F = 3S\cdot\Delta p = 2k\left(L-\Delta x_2\right),$$

где Δp – перепад давлений по разные стороны поршня. Таким образом, на левый поршень со стороны внешней среды и жидкости действует сила

$$F_1 = S\cdot\Delta p.$$

Левая пружина при этом должна растянуться на такую величину, чтобы поршень был в равновесии, т.е.

$$F_1 = S\cdot\Delta p = k\Delta x_1.$$

Смещения поршней связаны между собой, вследствие неизменности объема жидкости, соотношением

$$S\cdot\Delta x_1 = 3S\cdot\Delta x_2.$$

Решая полученную систему уравнений, находим

$$\Delta x_1 = \frac{6}{11}L.$$

В.Боровков

Ф2490. *В сосуд с нагревателем через промежутки времени $t_0 = 6$ мин опускают одинаковые порции снега с одинаковой, но неизвестной температурой. Первая порция снега растаяла и превратилась в воду с температурой 0 °С через время $t = 5$ мин 20 с, после чего температура воды выросла до $T_0 = 10$ °С к моменту опускания второй порции снега. Вторая порция растаяла через меньшее, чем t, время, третья – еще быстрее, а* *сотая растаяла почти сразу. Объясните, почему так происходит. Какова температура воды перед опусканием сотой порции снега и сразу после того, как она растаяла, если временем теплообмена можно пренебречь? Тепловая мощность, передаваемая нагревателем воде и снегу, постоянна.*

Каждые следующие порции снега получают дополнительное тепло от нагретой воды, которой становится все больше и больше, что и сокращает время таянья снега.

Запишем уравнение теплового баланса для таянья первой порции снега массой m:

$$Nt = m\left(\lambda + c_{л}\Delta T_{л}\right)$$

– полученное от нагревателя за время t количество теплоты идет на повышение температуры снега на $\Delta T_{л}$ до $0\ °C$ и на плавление снега (льда). Здесь $c_{л}$ – удельная теплоемкость льда, λ – удельная теплота его плавления, а N – мощность нагревателя. Тепловой баланс на этапе нагрева воды от $0\ °C$ до T_0 имеет вид

$$N\left(t_0 - t\right) = cmT_0 ,$$

где c – удельная теплоемкость воды. Отсюда получаем соотношение

$$\lambda + c_{л}\Delta T_{л} = \frac{cT_0 t}{t_0 - t} .$$

Так как тепла, полученного за время t_0, как раз хватает на нагрев и таянье снега и на нагрев образовавшейся воды до температуры T_0, то в конце каждого промежутка температура воды перед опусканием новой порции снега, в том числе и сотой, равна

$$T_{перед} = T_0 = 10\ °C .$$

В условии указано, что время таянья сотой порции снега весьма мало, а тогда мала передача тепла от нагревателя за это время. Основное тепло поступает от воды массой $99m$ при начальной температуре T_0, и оно идет на плавление снега и на повышение температуры до искомой величины T:

$$99mcT_0 = 100mcT + m\left(\lambda + c_{л}\Delta T_{л}\right) .$$

Окончательно находим

$$T = \frac{T_0}{100}\left(99 - \frac{t}{t_0 - t}\right) = 9{,}1\ °C .$$

В.Баткин

Ф2491. *Три нити равной длины R связаны в одной точке O (рис.1). На концах нитей закреплены одноименные заряды*

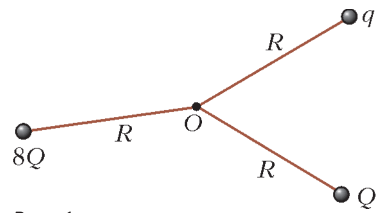


Рис. 1

$8Q$, Q и q. Каковы расстояния между этими зарядами в равновесии, если заряд q пренебрежимо мал в сравнении с Q? Система находится на горизонтальной плоскости без трения.

Ввиду малости q, силами со стороны этого заряда при рассмотрении равновесия зарядов $8Q$ и Q пренебрегаем.

Натяжения соответствующих нитей уравновешивают кулоновскую силу отталкивания, направленную по прямой, соединяющей заряды. По этой прямой тогда направлены и нити, и расстояние z между зарядами $8Q$ и Q равно $2R$. «Большие» заряды стремятся оказаться как можно дальше друг от друга. Обозначим расстояния от заряда q до зарядов Q и $8Q$ через x и y (рис.2). Раз сумма углов при общей вершине в точке O у равнобедренных треугольников с основаниями x и y равна $180°$, то угол $\alpha + \beta$ равен $90°$. Иными словами, треугольник со сторонами x, y и $z = 2R$ прямоугольный и $x^2 + y^2 = z^2$.

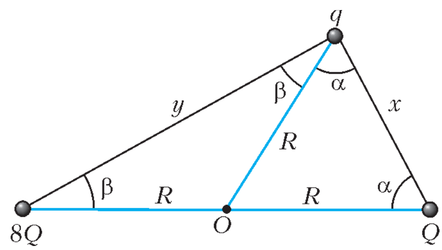


Рис. 2

Заряд q будет в равновесии, если сумма векторов кулоновских сил и силы натяжения нити равна нулю. Поскольку натяжение нити направлено по ней от заряда q к точке O, то проекции кулоновских сил на направление, перпендикулярное нити, уравновешиваются:

$$\frac{kqQ}{x^2}\sin\alpha = \frac{8kqQ}{y^2}\sin\beta .$$

Заметим, что $\sin\alpha = y/z$, $\sin\beta = x/z$. После подстановки в условие равновесия получим

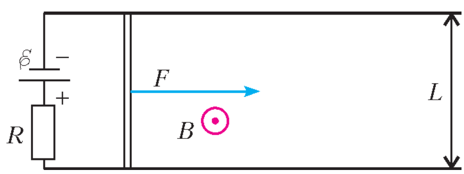
$$\frac{q}{x^3} = \frac{8q}{y^3}, \text{ или } y = 2x .$$

Учитывая, что $x^2 + y^2 = z^2$, находим

$$x = \frac{z}{\sqrt{5}} = \frac{2R}{\sqrt{5}}, \quad y = \frac{2z}{\sqrt{5}} = \frac{4R}{\sqrt{5}} .$$

В.Баткин

Ф2492. *Идеальная батарея с ЭДС $\mathcal{E}$ через резистор сопротивлением R подключена к длинным параллельным проводам, замкнутым подвижной массивной перемычкой длиной L (см. рисунок). Система находится в однородном магнитном поле B, перпендикулярном плоскости рисунка. В момент когда скорость перемычки равна нулю, ее начинают тянуть вправо с силой F. Укажите диапазон изменения тепловой мощности, выделяющейся на резисторе при движении перемычки. Сопротивлением проводов и перемычки пренебречь, трения нет.*



Мощность, выделяющаяся на резисторе, равна $P = RI^2$, где I – ток в цепи. При движении перемычки со скоростью v в магнитном поле в контуре наводится ЭДС индукции $\mathcal{E}_\text{и} = -d\Phi/dt = -vBL$. Полная ЭДС равна $\mathcal{E} - vBL$, и ток в цепи равен

$$I = \frac{\mathcal{E} - vBL}{R} .$$

Определим диапазон изменения P, выяснив, как меняется скорость v. Пусть масса перемычки m, тогда для ее ускорения $a = dv/dt$ из второго закона Ньютона с учетом магнитной силы ILB имеем

$$ma = F + ILB .$$

Начальная скорость $v_0 = 0$, начальный ток $I_0 = \mathcal{E}/R$, начальное ускорение положительно. Скорость начинает нарастать, по мере роста скорости ток монотонно уменьшается от I_0 до нуля. В этот момент ускорение положительно и равно F/m, поэтому скорость продолжает расти, а ток становится отрицательным. Затем ускорение продолжает уменьшаться и при некоторой скорости обращается в ноль, что отвечает движению с установившейся скоростью. При этом достигается наибольшее по модулю значение тока. Поскольку $a_\text{к} = 0$, то

$$I_\text{к} = -\frac{F}{LB} .$$

Итак, мощность $P = RI^2$ сначала убывает от значения $P_0 = \mathcal{E}^2/R$ до нуля, затем нарастает от нуля до $P_\text{к} = \left(F/(LB)\right)^2 R$ при установившихся скорости и токе.

Заметим, что при $R < \mathcal{E}BL/F$ максимум мощности равен $P_0 = \mathcal{E}^2/R$.

А.Киприянов

ВНИМАНИЮ НАШИХ ЧИТАТЕЛЕЙ!

В 2018 году наш журнал будет выходить в том же формате, что и в 2017 году. И мы по-прежнему будем выпускать 12 номеров в год. В остальном «Квант» остается тем же, что и был раньше, – научно-популярным журналом по физике и математике для школьников и всех, кому это интересно.

Подписаться на наш журнал можно с любого номера в любом почтовом отделении связи. Наш подписной индекс в каталоге агентства «Пресса России» – 90964.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» можно найти на сайте: http://kvant.ras.ru

Задачи

1. В компании среди любых трех детей есть Саша, а среди любых четырех – девочка. Может ли так оказаться, что в компании нет девочки по имени Александра?

О.Нечаева

2. Все натуральные числа от 1 до 30 выписали подряд слева направо: 123456789101112...282930. Сколько существует способов вычеркнуть все цифры полученного числа, кроме четырех, чтобы оставшиеся цифры образовали (без перестановок) число 2017?

О.Нечаева

Иллюстрации Д.Гришуковой

3. Фигура из трех клеток – это либо прямоугольник 1×3, либо уголок. Какое наименьшее число клеток можно закрасить на белой доске 3×3 так, чтобы оттуда нельзя было по линиям сетки вырезать белую фигуру из трех клеток? Приведите пример и обоснуйте, что меньше клеток закрасить нельзя.

О.Нечаева

4. Есть три двузначных числа. Если сложить те из них, в записи которых есть цифра 3, получится 80. Если сложить числа, где есть цифра 4, получится 90. А сколько получится, если сложить все три числа?

Фольклор

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Эти задачи предлагались на Олимпиаде имени Е.Н.Анисимовой.

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Мы продолжаем конкурс по решению математических задач. Они рассчитаны в первую очередь на учащихся 7–9 классов, но мы будем рады участию школьников всех возрастов. Конкурс проводится совместно с журналом «Квантик».

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать в конкурсе можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы. Задания, решения и текущие результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest

Желаем успеха!

17. Петя придумал признак равенства четырехугольников. Он утверждает, что если даны четырехугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$ (не обязательно выпуклые), причем три стороны одного соответственно равны трем сторонам другого ($AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$) и диагонали одного соответственно равны диагоналям другого ($AC = A'C'$, $BD = B'D'$), то и сами четырехугольники равны. Не ошибается ли Петя?

Данила Боханов (ученик 7 класса)

18. В куче 131 камень. Двое берут камни по очереди. Сначала первый игрок берет k камней, где k – некоторое фиксированное число. Каждым следующим ходом игрок берет либо столько же камней, сколько брал его соперник на предыдущем ходу, либо на один больше. Кто не может сделать ход – проиграл. Кто из игроков может гарантировать себе победу, как бы ни играл его соперник, если: а) $k = 9$; б) $k = 1$?

А.Перепечко

19. а) Найдите четыре таких последовательных натуральных числа, что первое из них делится на 3, второе – на 5, третье – на 7, четвертое – на 9.

б) Можно ли найти сто таких последовательных натуральных чисел, что первое из них делится на 3, второе – на 5, третье – на 7, ..., сотое – на 201?

А.Толпыго

20. Кузнечик умеет прыгать по полоске из n клеток на 8, 9 и 10 клеток в любую сторону. Будем называть натуральное число n *пропрыгиваемым*, если кузнечик может, начав с некоторой клетки, обойти всю полоску, побывав на каждой клетке ровно один раз. Докажите, что, начиная с некоторого числа M, все $n \geq M$ пропрыгиваемы.

Е.Бакаев

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

КРАСИВЫЕ ОПЕЧАТКИ

А если не понимали, то Упрашивали

И это требует немИЛОГО времени

Это – уравнение сВОДных колебаний

При нулевом напряжении между СО-Бой и катодом

Магнитный поток пронизывает контРУ ABCD

Разность давлений можно оцеПЕнить

ПОЛность воды равна

Будет иметь местЬ

О преобразовании многоРаНИков

Нахождение центра масс проволочного треугольника

И.ДАЦЕНКО, Ю.МИНАЕВ, О.ОРЛЯНСКИЙ

Системе материальных точек может быть поставлена в соответствие особая геометрическая точка C, положение которой задается формулой

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}.$$

Эта точка называется *центром масс*. Для непрерывного распределения массы в каком-то теле соответствующая формула записывается так:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m}\int \vec{r}\,dm ,$$

где интегрирование ведется по всему телу.

Положение центра масс в некоторых случаях достаточно очевидно (мы будем вести речь только об однородных телах). Так, центр масс материальной точки совпадает с ней самой; центр масс тонкого стержня (отрезка) находится в его середине. Для правильного многоугольника центр масс совпадает с его центром, причем не важно, речь идет о тонкой пластине соответствующей формы или о контуре (периметре) многоугольника, сделанном из тонкой проволоки; то же касается круга (тонкого диска) и окружности (проволоки, изогнутой соответствующим образом). Аналогично и для правильных многогранников: не имеет значения, распределена масса по объему, или по поверхностям граней, или сконцентрирована в проволочном каркасе – центр масс будет находиться в центре фигуры.

Но как только симметрия нарушается, пусть даже незначительно, определить положение центра масс становится уже сложнее. Не каждый сможет устно рассчитать, где находится центр масс, скажем, половины круга или проволочной полуокружности. Для того чтобы воспользоваться формулой, позволяющей определить положение центра масс твердого тела относительно выбранного начала координат, придется научиться интегрировать (что само по себе, конечно же, неплохо).

С другой стороны, существует по крайней мере одна несимметричная фигура, положение центра масс которой достаточно хорошо известно, – это *сплошной* треугольник (треугольная пластина). Даже без интегрирования можно сообразить, что центр масс плоского треугольника находится в точке пересечения его медиан (этот факт можно встретить и в школьном курсе геометрии). Если спросить, где находится центр масс *проволочного* треугольника, то многие, не подумав, укажут на эту же точку. Вот очевидный контрпример: представьте себе равнобедренный треугольник, основание которого мало по сравнению с боковой стороной. Тогда, если он проволочный, центр масс лежит примерно на середине высоты, опущенной на основание, а если сплошной – то делит эту высоту в отношении 2:1, считая от вершины.

Итак, задача о положении центра масс проволочного треугольника менее известна, а ответ на нее не так очевиден. Далее в применении к решению этой задачи будут рассмотрены простые физические методы, основанные на том, что в однородном гравитационном поле использование понятия центра масс оказывается очень полезным.

Введем некоторые обозначения. Пусть стороны заданного проволочного треугольника равны a, b, c. Массы этих сторон пропорциональны их длинам: $M_a = \lambda a$, $M_b = \lambda b$, $M_c = \lambda c$, где λ – *линейная плотность* проволоки. Отметим середины сторон этого треугольника точками, которые для удобства обозначим M_a, M_b, M_c, поскольку можно считать, что именно в этих точках (центрах масс сторон) сосредоточены массы соответствующих сторон треугольника.

Обсудим три способа решения нашей задачи.

(Продолжение см. на с. 34)

…по этим силам… выводятся движения планет, комет, луны и моря.

Исаак Ньютон

…вследствие сложности своего объекта изучения геология является самой молодой.

Джеймс Геттон

В северном сиянии всполохи или лучи вид подобный имеют.

Михаил Ломоносов

Основным законом морского волнения является отсутствие какого-либо закона.

Джон Стретт (лорд Рэлей)

…реки северного полушария размывают главным образом правый берег. Реки южного полушария ведут себя противоположным образом (закон Бэра).

Альберт Эйнштейн

…внешняя оболочка литосферы не покрывает сплошь всего земного шара… Это есть геофизическая сторона теории перемещения материков.

Альфред Вегенер

Со своей планетой мы справляемся куда хуже, нежели с состоянием вещества в звездах… мы не сможем разобраться в свойствах горных пород при сверхвысоких давлениях.

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакома вам геофизика?

Астрономия возвращается в школу!

Приветствуя это событие, «Калейдоскоп» откликается на него целой серией своих выпусков. Однако поскольку этот славный, но нелегкий предмет венчает школьный курс естественных наук, то его изучение требует хорошей подготовки и эрудиции. А закладывается это при изучении природоведения, естествознания, физической географии. И, наверное, вы обратили внимание, сколько вопросов в них требовали привлечения физических знаний.

Вот и мы решили наше восхождение по «лестнице в небо» начать с первой ступени – земной тверди. И сразу столкнулись с тем, каким сегодня «зыбким» оказывается это утверждение, впрочем, как и множество вроде бы очевидных представлений об окружающем нас мире. Надеемся, геофизика, объединяющая учение о литосфере, гидросфере и магнитосфере Земли, поможет нам разобраться хотя бы с небольшой их частью. Да еще и напомнит, сколько полезного предоставили созданные с помощью физики приборы, например, при поиске полезных ископаемых или предотвращении последствий стихийных бедствий – наводнений, оползней и землетрясений.

Вопросы и задачи

1. Геологические данные показывают, что районы Арктики и Антарктики находились когда-то в жарком поясе. С чем это связано?

2. Земля полностью восстанавливает свою форму после приливных воздействий, что является признаком упругости. Можно ли тогда считать всю Землю кристаллом?

3. В чем заключаются физические причины выветривания – разрушения твердых горных пород?

4. Средняя плотность горных пород равна $3{,}5\ \text{г/см}^3$. Какой вывод из этого можно сделать о плотности вещества ядра Земли?

5. Почему горы на Марсе выше, чем горы на Земле?

6. Отчего в озеро втекает много рек, а вытекать может только одна (пример – озеро Байкал, в которое втекают несколько сот рек, а вытекает одна Ангара)?

7. Как, путешествуя по воде, например по Волге, можно по виду берегов доказать существование вращения Земли и определить его направление?

8. Почему наиболее сильные приливы наблюдаются в полнолуние и новолуние?

9. Отчего приливы на Земле замедляют ее вращение?

10. Как объяснить, почему вода начинает замерзать с поверхности водоема?

11. Может ли покрывающий морскую поверхность лед изгибаться на волнах?

12. Как изменилась бы температура земной поверхности, если бы Земля потеряла гидросферу?

13. На каком расстоянии от Северного полюса находится северный магнитный полюс?

14. Какое свойство Земли как физического тела оказывается главным для защиты человека от космической корпускулярной радиации?

15. Какое геофизическое явление, вызванное космическими причинами, выдает наличие у Земли магнитного поля?

16. Как можно оценить возраст Земли?

Микроопыт

Наверняка вы прохаживались утром по замерзшим за ночь лужам. Почему по одним из них можно идти без особой боязни, а по другим это небезопасно?

Любопытно, что...

...в фундаментальном труде «Математические начала натуральной философии» Ньютону удалось продемонстрировать эффективность своего подхода к объяснению природных явлений, среди которых возникновение приливов и образование фигуры Земли.

...Карл Бэр, установивший благодаря наблюдениям во время многочисленных экспедиций свой закон, привлек к нему внимание многих выдающихся физиков. Однако для него самого это было лишь эпизодом многогранной деятельности естествоиспытателя, занимавшегося зоологией, анатомией, эмбриологией, антропологией и географией.

...при достаточно высоком давлении, достигаемом, например, глубоко в недрах Земли, любое вещество, даже кристаллическое, ведет себя как жидкость, о чем свидетельствует вытекающая из жерла вулкана лава.

...русский физик Борис Борисович Голицын в 1902 году решил важнейшую задачу сейсмологии: определение очага землетрясения по данным лишь одной сейсмической станции. Свое отношение к сейсмологии как области физических исследований он подтвердил созданием и внедрением в практику электромагнитных сейсмографов.

...изучение землетрясений дало множество сведений о внутреннем строении Земли. Так, по поведению вызванных ими волн было обнаружено жидкое ядро планеты.

...поскольку большую часть поверхности Земли, почти 70,8%, занимает Мировой океан, нашу планету логичнее было бы назвать не Землей, а Океаном. К воде, содержащейся в морях, океанах, реках, озерах и льдах, надо добавить, как выяснилось, и воду, «связанную» горными породами, которой всего лишь вдвое меньше.

...Земля сохраняет в среднем постоянную температуру несмотря на непрерывное получение энергии от Солнца. Теплоотвод осуществляется за счет излучения, спектр которого лежит в инфракрасном диапазоне.

...магнитное поле Земли – переменное, в последние 200 лет наблюдений оно слабо убывает. А на интервалах времени в десятки тысяч лет неоднократно происходила и смена положения полюсов на противоположное!

...континентальные плиты Земли, лежащие над вязкой раскаленной мантией, находятся в незаметном, но постоянном движении. По убеждению геологов, в истории нашей планеты были периоды, когда двигались не только отдельные плиты, а вся твердая оболочка поворачивалась как целое относительно металлического ядра и меняла положение земной оси.

...проведенное в последние годы сейсмическое «просвечивание» земных недр выявило во внутреннем твердом ядре еще одно, в два раза меньшее по диаметру ядро с отличающейся ориентацией составляющих его кристаллов железа.

Что читать в «Кванте» о геофизике

(публикации последних лет)

1. «Обратная задача всемирного потопа» – 2015, Приложение №3, с.37;

2. «Вращение: реки, тайфуны, молекулы» – там же, с.85;

3. «Гольфстрим, или Как Гренландия согревает Европу» – 2015, №5/6, с.30;

4. «Тайна лунных недр» – 2016, Приложение №4, с.18;

5. «Геомолоток и тайна полезного удара» – 2017, №5, с.23.

Материал подготовил А.Леонович

(Начало см. на с. 31)

Способ первый: условие равновесия

Как известно, любая механическая система стремится к равновесному состоянию,

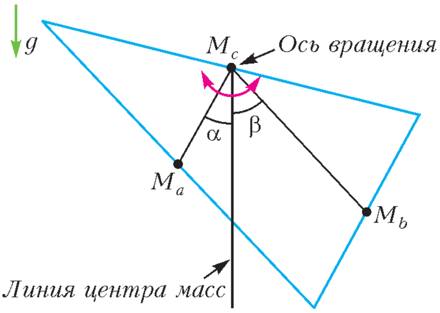


Рис. 1. Проволочный треугольник в однородном поле тяжести

которому соответствует минимум потенциальной энергии. Подвесим проволочный треугольник в поле тяжести за середину одной из сторон, например *c* (рис.1). Тогда он расположится так, чтобы его потенциальная энергия стала минимальной, т.е. центр масс принял самое низкое из возможных положений и оказался на одной вертикали с точкой M_c. Пусть эта линия составляет углы α и β с отрезками M_cM_a и M_cM_b соответственно.

Используем условие равновесия тела, имеющего неподвижную ось вращения: *алгебраическая сумма моментов приложенных к телу сил относительно этой оси равна нулю*. Данное условие согласуется с минимумом потенциальной энергии и для потенциальных сил может быть из него получено. В рассматриваемом случае ось вращения проходит через точку M_c и перпендикулярна плоскости рисунка. На треугольник действуют силы тяжести M_ag, M_bg, M_cg, приложенные к серединам сторон треугольника. Но сила M_cg не создает вращающего момента относительно указанной оси, поскольку линия действия силы пересекает ее. Для оставшихся двух сил с учетом того, что отрезки M_cM_a и M_cM_b – средние линии исходного треугольника, запишем (рис.2)

$$M_bg\frac{a}{2}\sin\beta - M_ag\frac{b}{2}\sin\alpha = 0 .$$

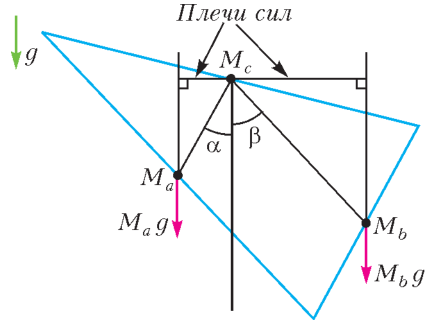


Рис. 2. К вычислению моментов сил относительно оси вращения

А поскольку $M_a = \lambda a$, $M_b = \lambda b$, получим

$$\frac{\lambda abg}{2}(\sin\alpha - \sin\beta) = 0 \text{, и } \alpha = \beta .$$

Итак, мы выяснили, что центр масс должен лежать на биссектрисе угла $M_bM_cM_a$. Если теперь подвесить треугольник за середины других сторон, то получим аналогичные утверждения. Таким образом, *центр масс проволочного треугольника совпадает с точкой пересечения биссектрис его серединного треугольника* (треугольника, образованного средними линиями данного).

Следует сказать, что в геометрии найденная нами точка известна как центр масс периметра треугольника и называется центром Шпикера.

Используем теперь для отыскания центра масс другой метод, основанный на подсчете работы, совершаемой при повороте фигуры в однородном гравитационном поле.

Способ второй: поворот

Расположим проволочный треугольник в вертикальной плоскости так, чтобы его сторона *c* была горизонтальной (рис.3). Точка *O* – искомый центр масс. Представим себе, что ось вращения треугольника горизонтальна и совпадает с прямой M_aM_b. Расстo-

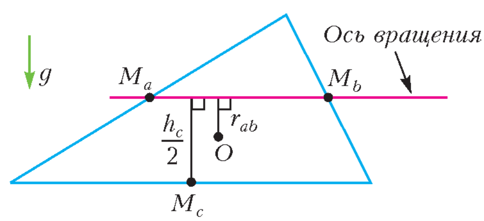


Рис. 3. К вычислению работы, совершаемой при повороте проволочного треугольника в однородном поле тяжести

яние от точки O до нее обозначим r_{ab}. Расстояние от точки M_c до оси вращения равно половине высоты треугольника h_c, опущенной на сторону c.

Повернем треугольник на угол 90° относительно указанной оси, переведя его в горизонтальную плоскость. Совершенную при этом работу можно представить с двух точек зрения. С одной стороны, это работа по поднятию стороны c на $h_c/2$:

$$A = M_c g \frac{h_c}{2}.$$

С другой стороны, это работа по поднятию центра масс треугольника на высоту r_{ab}:

$$A = (M_a + M_b + M_c) g r_{ab}.$$

Приравнивая правые части записанных выражений, с учетом пропорциональности масс длинам сторон получаем

$$(a + b + c) r_{ab} = \frac{ch_c}{2} = S_\Delta,$$

где S_Δ – площадь исходного треугольника.

Таким образом, выражение для расстояния от прямой M_aM_b до центра масс O не меняется при любой перестановке сторон:

$$r_{ab} = \frac{S_\Delta}{a + b + c}.$$

Следовательно, $r_{ab} = r_{bc} = r_{ca}$. А это значит, что *искомая точка O – центр вписанной в треугольник $M_aM_bM_c$ окружности, который лежит на пересечении его биссектрис*.

Кстати сказать, окружность, вписанная в серединный треугольник, называется окружностью Шпикера.

Второй способ привел нас к тому же алгоритму построения центра масс проволочного треугольника, что и в предыдущем случае. А теперь рассмотрим такой способ, который будет приводить к другому алгоритму нахождения той же самой точки.

Способ третий: сведение к известному

Заметим, что в обоих рассмотренных случаях мы сводили задачу об отыскании центра масс проволочного треугольника к задаче об отыскании центра масс трех материальных точек. Замена тонкого стержня, представляющего определенную сторону проволочного треугольника, точечной массой – вполне естественный ход мысли, упрощающий задачу. Ведь материальная точка проще тонкого стержня.

Но, оказывается, можно найти простое решение данной задачи на пути «усложнения» исходного объекта. Для этого каждую сторону-стержень проволочного треугольника надо заменить не материальной точкой, а соответствующей тонкой треугольной пластиной. Но надо это сделать так, чтобы три треугольные пластины, заменившие стержни-стороны проволочного треугольника, имели одинаковую толщину и образовывали, вместе взятые, треугольную пластину большего размера. Если это удастся, то дальнейшее решение задачи очевидно. Ведь центр масс тонкой однородной треугольной пластины находится в точке пересечения медиан!

Посмотрим на рисунок 4, где показано, как проволочный треугольник ABC превра-

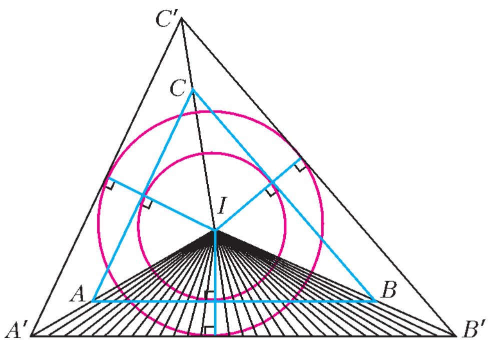


Рис. 4. Преобразование треугольника ABC в треугольник A′B′C′ (гомотетия с центром в точке пересечения биссектрис и коэффициентом 1,5)

тить в треугольную пластину $A'B'C'$, чтобы центр масс не сдвинулся с места. При этом, например, сторона-стержень AB заменяется пластиной $A'IB'$, где I – общий центр вписанных окружностей подобных треугольников ABC и $A'B'C'$ с коэффициентом подобия 1,5. Поскольку отрезки AB и $A'B'$ параллельны, середина отрезка AB при таком коэффициенте подобия будет совпадать с точкой пересечения медиан треугольника $A'IB'$, т.е. с центром масс этой треугольной пластины.

Тот факт, что I – общий центр вписанных окружностей треугольников ABC и $A'B'C'$, является очень важным обстоятельством. У трех треугольников $A'IB'$, $B'IC'$ и $C'IA'$ высоты, опущенные из общей вершины I, оказываются одинаковыми и равными радиусу окружности, вписанной в треугольник $A'B'C'$. Это означает, что площади трех указанных треугольников, которые вместе составляют треугольник $A'B'C'$, относятся как $AB : BC : CA$. Поскольку массы этих треугольных пластин, полученных из стержней-сторон проволочного треугольника ABC, должны относиться друг к другу так же, можно сделать вывод, что указанные треугольные пластины имеют одинаковую толщину. Соответственно, составленная из них треугольная пластина $A'B'C'$ является однородной. А у такой пластины, как известно, центр масс находится в точке пересечения медиан.

Получается, что *центр масс проволочного треугольника ABC совпадает с точкой пересечения медиан треугольника $A'B'C'$, полученного из исходного гомотетией с центром в точке пересечения биссектрис и коэффициентом 1,5.*

Итоги

С помощью трех рассмотренных способов мы нашли два разных алгоритма построения центра масс проволочного треугольника. Рисунок 5 демонстрирует совпадение точек,

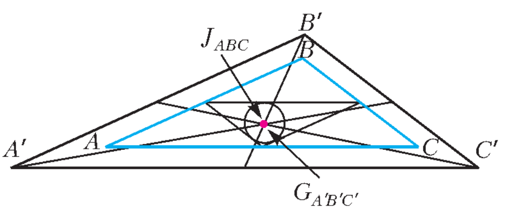


Рис. 5. Два алгоритма построения центра масс проволочного треугольника ABC

полученных с помощью этих алгоритмов: точки пересечения медиан треугольника $A'B'C'$ (точка $G_{A'B'C'}$) и центра окружности Шпикера треугольника ABC (точка J_{ABC}).

Напомним, что центр гомотетии, переводящей ΔABC в $\Delta A'B'C'$, находится в точке пересечения биссектрис этих треугольников ($I_{ABC} \equiv I_{A'B'C'}$). На рисунке 6 изображена прямая, проходящая в треугольнике $A'B'C'$ через точки пересечения его биссектрис (точка $I_{A'B'C'}$) и медиан ($G_{A'B'C'}$). Опираясь на

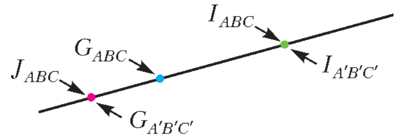


Рис. 6. Взаимное расположение некоторых характерных точек треугольников ABC и A′B′C′

понятие гомотетии, можно сказать, что на этой же прямой лежит точка пересечения медиан треугольника ABC (G_{ABC}), причем выполняется такое соотношение:

$$I_{A'B'C'}G_{A'B'C'} : I_{ABC}G_{ABC} = 3 : 2$$

(коэффициент гомотетии равен 1,5).

Совпадение точек $G_{A'B'C'}$ и J_{ABC} дает возможность переписать только что указанное соотношение в несколько ином виде:

$$I_{ABC}J_{ABC} : I_{ABC}G_{ABC} = 3 : 2,$$

или даже так:

$$I_{ABC}G_{ABC} : G_{ABC}J_{ABC} = 2 : 1.$$

Другими словами, можно считать доказанной такую геометрическую теорему: *в треугольнике точка пересечения биссектрис I, точка пересечения медиан G и центр окружности Шпикера J лежат на одной прямой, причем точка G делит отрезок IJ на отрезки так, что IG : GJ = 2 : 1.*

Последний предложенный нами способ также оказывается полезным для практически устного решения похожих задач (но это уже предмет отдельного обсуждения). Таким образом, нахождение разных способов решения задачи полезно не только само по себе как разносторонний тренинг, оттачивающий мышление, но и как возможный источник новых идей.

Длинные пути в графах

П.КОЖЕВНИКОВ

В этой статье мы рассмотрим несколько разных комбинаторных сюжетов, приводящих к близким вопросам о путях в графах. Начнем с двух известных олимпиадных задач.

Задача 1. *Незнайка хочет выписать подряд цифры от 0 до 9 по одному разу так, чтобы сумма любых двух соседних цифр делилась либо на 5, либо на 12. Удастся ли ему сделать это?*

Задача 2. *Мышка грызет куб сыра* $3 \times 3 \times 3$ *, разбитый на 27 единичных кубиков. Когда мышка съедает какой-либо кубик, она переходит к кубику, имеющему общую грань с предыдущим. Может ли мышка съесть весь куб, кроме центрального кубика?*

Решение задачи 1. Чтобы помочь Незнайке осуществить задуманное, нарисуем схему (граф): 10 вершин пометим цифрами от 0 до 9 и проведем отрезок (ребро) между цифрами a и b, если сумма $a + b$ делится либо на 5, либо на 12 (рис.1,*а*). Тогда достаточно

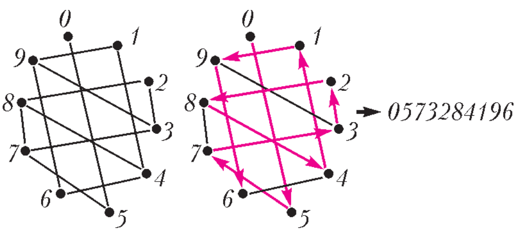


Рис. 1

сделать *обход графа по вершинам*, т.е. найти путь по ребрам, проходящий через каждую вершину ровно по разу. Этот путь и определит нужную последовательность цифр (рис.1,*б*).

Задачи 1 и 2 внешне совсем разные, но на самом деле мышке требуется сделать почти то же самое, что и Незнайке, только для другого графа. (Это становится совсем понятным, если поставить в центр каждого единичного кубика точку-вершину и соединить ребром-отрезком центры соседних кубиков.)

Решение задачи 2. К сожалению для мышки в задаче 2 ответ отрицательный. Докажем это.

Единичные кубики можно раскрасить в черный и белый цвета подобно шахматной доске – так, чтобы соседние кубики были разного цвета (рис.2). При этом наблюдается следующее чередование цветов: после белого кубика мышка съедает черный и наоборот. Всего черных кубиков 14, а белых – 12 (считаем, что белый центральный кубик вырезали). Из-за чередования цветов количество съеденных черных кубиков не больше чем 12 + 1 = 13. Действительно, между двумя съеденными черными кубиками не менее одного белого. Таким образом, все 14 черных кубиков мышка съесть не могла.

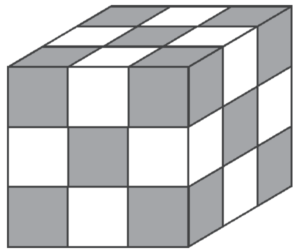


Рис. 2

Как мы увидели, в задачах 1 и 2 вопрос сводился к обходу всех вершин некоторого графа. Далее мы продолжим заниматься путями в разных графах. Говоря «путь в графе», мы будем всегда иметь в виду *простой путь* по ребрам, т.е путь, в котором каждая вершина встречается не более одного раза. В частности, вершины, в которых начинается и заканчивается путь, различны (иначе получили бы *цикл*). *Длиной пути* называем количество ребер в нем. Путь по ребрам графа, проходящий через каждую вершину ровно по разу, называется *гамильтоновым путем*. (Аналогично, можно говорить о *гамильтоновом цикле*.) Вообще говоря, задача нахождения гамильтонова пути или доказательства его отсутствия для произвольного графа весьма трудна. Наличие шахматной раскраски, в которой один цвет существенно преобладает (как, например, в задаче 2), – одна из немногих ситуаций, когда отсутствие гамильтонова пути можно доказать коротко. Это соображение позволяет сформулировать такую несложную теорему.

Теорема 1. *Пусть каждая вершина графа покрашена в черный или белый цвет так, что нет ребер, соединяющих пару вершин* *одного цвета*[1]*; при этом количество черных вершин равно B, а количество белых вершин равно W. Если* $B \ge W + 2$*, то в этом графе не существует гамильтонова пути.*

…●○●○●○●○●○●○…

Вид пути в теореме 1

Доказать теорему нетрудно – провести такие же рассуждения, как и в задаче о мышке с сыром. Предлагаем читателю сделать это самостоятельно.

Упражнения

1. Докажите аналог теоремы 1 для цикла: если $B \ne W$, то в этом графе не существует гамильтонова цикла.[2]

2. Из шахматной доски вырезали две противоположные клетки. Может ли шахматный конь обойти оставшуюся часть доски, побывав на каждой клетке ровно один раз?

Упражнение 2 тоже про обход графа, в котором вершины соответствуют клеткам (например, вершины – это центры клеток), а ребра соединяют пары вершин, отстоящих на ход коня. Можно назвать такой граф «коневым». Впереди нас еще ждут несколько задач о шахматных конях. А пока решим следующую, более трудную задачу.

Задача 3 (А.Шаповалов). *Восемь одноклассников образовали дежурную команду для решения домашних задач. В команде всегда не менее трех человек. Каждый день в команду добавляется один человек либо из нее исключается один человек. Можно ли будет перебрать все допустимые составы команды ровно по одному разу?*

Решение. Задача похожа на предыдущую лишь формой вопроса: в процессе требуется перебрать все объекты (в данном составе команды) по разу. Поэтому можно предположить, что здесь тоже идет речь о поиске гамильтонова пути, только надо понять, в каком графе.

Каждый возможный состав (возможную «позицию») условно изобразим как вершину. Если из одного состава можно за шаг перейти к другому составу, соединим ребром соответствующие вершины (рис. 3). Мы

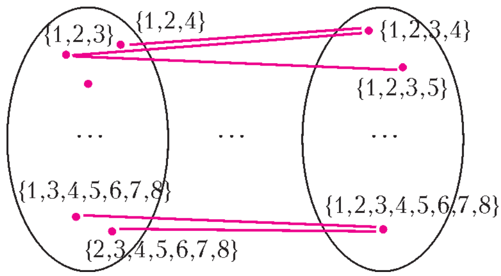


Рис. 3

построили так называемый *граф позиций*. Теперь ясно, что в задаче действительно спрашивается о том, существует ли гамильтонов путь в этом графе позиций. Заметим, что за один шаг меняется четность количества людей в составе, значит, наш граф позиций двудольный. Подсчет показывает, что «четных» составов на 21 меньше, чем «нечетных», и, согласно теореме 1, гамильтонов путь не существует.

Упражнения

3. Проведите нужный подсчет разности количеств «четных» и «нечетных» составов.

4 (XXII Турнир городов). На двух клетках шахматной доски стоят черная и белая фишки. За один ход можно передвинуть любую из них на соседнюю по вертикали или горизонтали клетку (две фишки не могут стоять на одной клетке). Могут ли в результате таких ходов встретиться все возможные варианты расположения этих двух фишек, причем ровно по одному разу?

Конечно, идея шахматной раскраски, которую мы использовали, годится не только для доказательства отсутствия гамильтонова пути, но и для оценки длины пути.

Теорема 2. *Пусть каждая вершина графа покрашена в черный или белый цвет так, что нет ребер, соединяющих пару одноцветных вершин; при этом количество белых вершин равно W. Тогда любой путь в этом графе содержит не более W + 1 черных вершин и его длина не превосходит 2W.*

…●○●○●○●○●○●○…

Вид пути в теореме 2

---

[1] Графы, в которых возможна такая покраска вершин, называются *двудольными*. Саму покраску уместно назвать *шахматной*.

[2] Итак, теорема 1 и упражнение 1 дают необходимые условия для наличия гамильтонова пути и цикла в двудольном графе. Разумеется, эти условия не являются достаточными (читатель легко может построить соответствующие примеры).

Упражнение 5. Докажите теорему 2.

Задача 4 (М43, частный случай). *Замок в форме треугольника разбит на 36 равных треугольных залов (рис.4,а). В каждой стенке между залами есть дверь. Какое наибольшее число залов сможет обойти турист, не заходя ни в какой зал дважды?*

Решение. Пример на рисунке 4,*б* показывает, что можно обойти 31 зал (есть и другие примеры).

Докажем, что большее количество залов обойти нельзя. Покрасим залы в черный и белый цвета (рис.4,*в*) так, что при переходе из зала в зал меняется цвет. Белых залов 15, значит, турист и посетил не более 15 белых залов. Из-за чередования цветов черных залов он мог посетить разве что на 1 больше, чем белых, т.е. не более 16. Итого турист посетил не более 15 + 16 = 31 зала.

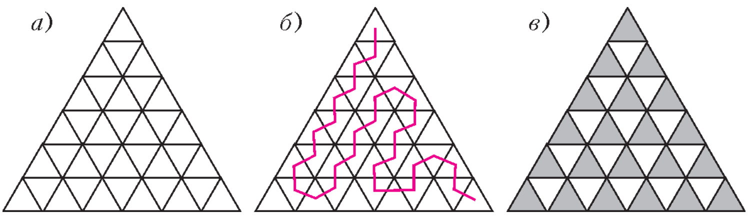


Рис. 4

Понятно, что в задаче 4 мы отыскивали самый длинный путь в графе, вершины которого – центры треугольных залов, а ребра – это проходы между соседними залами. Рассуждения из решения задачи 4 практически повторяют доказательство теоремы 2.

В следующем упражнении предлагаем вернуться к сюжету задачи 3.

Упражнение 6. Пять одноклассников образовали дежурную команду для решения домашних задач. В команде всегда не менее двух человек. Каждый день в команду добавляется один человек либо из нее исключается один человек. Сколько дней можно будет продолжать этот процесс, если запрещается повторять каждый допустимый состав больше одного раза?

Если внимательно проследить доказательство теоремы 2, становится ясно, что главное не двудольность, а отсутствие ребер между черными вершинами. Зафиксируем такое усиление предыдущей теоремы.

Теорема 3. *Пусть каждая вершина графа покрашена в черный или белый цвет так, что нет ребер, соединяющих пару черных вершин; при этом количество белых вершин равно W. Тогда любой путь в этом графе содержит не более W + 1 черных вершин и его длина не превосходит 2W.*


Вид пути в теореме 3

Доказательство. Пусть в процессе прохождения пути мы встретили n черных вершин. Между двумя последовательными пройденными черными вершинами мы посетили хотя бы одну белую вершину, значит, в итоге посетили не менее $n-1$ белых вершин. Поскольку всего у нас W белых вершин, имеем $n-1 \le W$, или $n \le W+1$, что и требовалось доказать.

Предлагаем применить эту теорему при решении следующей непростой задачи.

Задача 5 (Е.Бакаев, по мотивам задачи М2460). *Кузнечик умеет прыгать по клетчатой полоске длиной 26 клеток на 8, 9 или 10 клеток в любую сторону. (Прыжок на k клеток означает, что между начальным и конечным положениями прыжка находятся k – 1 клеток.) Какое наибольшее количество клеток может пропрыгать кузнечик на этой полоске, если нельзя попадать на одну клетку больше одного раза?*

Решение. Покрасим клетки полоски, как показано на рисунке 5,*а*. Тогда с черной клетки одним прыжком можно попасть только на белую. Это значит, что граф возможных прыжков кузнечика (вершины ставятся в центры клеток, а ребром соединяется каждая пара клеток, между которыми может прыгнуть кузнечик) удовлетворяет условиям теоремы 3. (Поскольку с белой на белую

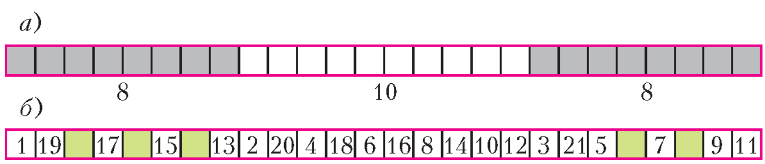


Рис. 5

клетку тоже иногда можно прыгнуть, теорема 2 здесь не сработает.)

Белых клеток 10. По теореме 3, кузнечик может пропрыгать не более 11 черных клеток, итого не более 21 клетки.

Пример, как пропрыгать 21 клетку, показан на рисунке 5,*б*.

В доказательстве теоремы 3 важно лишь то свойство раскраски, что в пути между любыми двумя черными вершинами мы обязательно встретим хотя бы одну белую вершину. Для выполнения этого условия можно еще немного ослабить требования в теореме.

Теорема 4. *Пусть некоторые вершины графа покрашены в черный цвет, некоторые – в белый цвет, а кроме того могут быть непокрашенные вершины. Известно, что любое ребро, выходящее из черной вершины, идет в белую вершину. Пусть количество белых вершин равно W. Тогда любой путь в этом графе содержит не более W + 1 черных вершин.*

Вид пути в теореме 4

Упражнение 7. Докажите теорему 4.

Задача 6 (IX Турнир городов). *На бесконечной шахматной доске расставлены пешки через три поля на четвертое, так что они образуют квадратную сетку. Докажите, что шахматный конь не может обойти все свободные поля, побывав на каждом поле по одному разу.*

Дополнительная сложность задачи 6 в том, что здесь речь идет о бесконечном обходе. Несмотря на это, попробуем выделить на бесконечной доске ограниченную область и свести вопрос к ситуации, описанной в теореме 4.

Решение. Покрасим в шахматном порядке все клетки так, чтобы пешки стояли на белых полях. Выделим некоторый квадрат K размера $4n \times 4n$ (n выберем чуть позже) и «обесцветим» все черные клетки вне этого квадрата, т.е. черных клеток всего будет $B = (4n)^2/2 = 8n^2$ (рис.6). Добавим к квадрату K каемку из двух клеток, получим квадрат L размера $(4n+4)\times(4n+4)$. Обесцветим все белые клетки вне квадрата L, а также клетки квадрата L, на которых стоят пешки. После этого белых клеток остается $W = (4n+4)^2 \cdot \frac{7}{16}$, так как в каждом квадра-

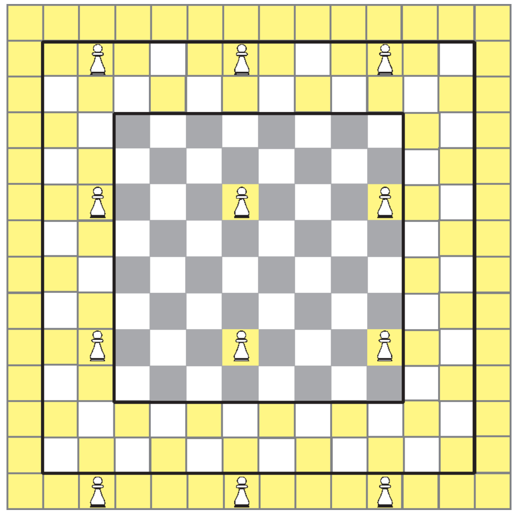
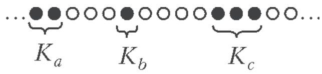


Рис. 6

те 4×4 находится ровно одна пешка. Эта подготовительная работа была сделана с тем расчетом, чтобы с черной клетки конь мог попасть только на белую (иначе говоря, в «коневом графе» любое ребро, выходящее из черной вершины, идет в белую вершину, т.е. выполняются условия теоремы 4). Достаточно подобрать n так, чтобы $B \geq W + 2$, тогда никакой путь без повторения клеток не может содержать все черные клетки. Легко проверить, что $n = 1000$ подходит.

Наконец, еще раз посмотрим на условия теоремы 3 или теоремы 4: от одной черной вершины нельзя добраться до любой другой, не пройдя через «белый мост». Иначе говоря, если удалить из графа все белые вершины (вместе с ребрами, выходящими из них), то черные вершины будут изолированными. Идея в том, что если «белых мостов» между «черными островами» недостаточно много, то обойти все черные острова (или достаточно много черных островов) невозможно. Сделаем еще один шаг (последний в этом разговоре) в сторону обобщения, допуская, что «черным островом» может быть не только одна изолированная вершина, но также и группа вершин. Лишь бы сохранилось условие того, что с острова нельзя попасть на другой без прохождения «белого моста».

Теорема 5. *Пусть дан граф, в котором некоторые W вершин покрашены в белый цвет, и после удаления всех белых вершин получается граф, который распадается на компоненты связности* $K_1, K_2, \ldots, K_s$. *Тогда* *любой путь в исходном графе содержит вершины из не более чем W + 1 множеств* $K_1, K_2, \ldots, K_s$.



Вид пути в теореме 5

Проиллюстрируем применение теоремы 5 на примерах.

Задача 7 (Е.Бакаев, по мотивам задачи М2460). *Кузнечик умеет прыгать по клетчатой полоске длиной 60 клеток на 8, 9 или 10 клеток в любую сторону. Докажите, что кузнечик не сможет, начав с некоторой клетки, обойти эту полоску, побывав на каждой клетке ровно один раз.*

Решение. Как и в задаче 5, рассмотрим «граф кузнечика»: поставим вершины в центры клеток, а ребром соединим каждую пару клеток, между которыми может прыгнуть кузнечик. Покрасим клетки полоски (и соответствующие вершины графа), как показано на рисунке 7. Тогда белых клеток будет 28.

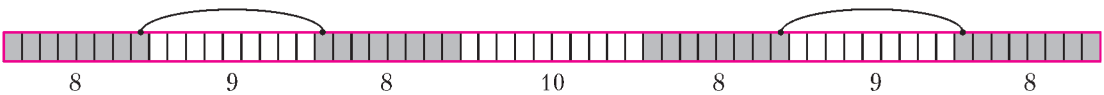


Рис. 7

И после их удаления остается 30 «черных островов»: почти все черные вершины изолированы, кроме двух «островов» из двух черных клеток. По теореме 5 никакой путь в нашем графе не может содержать вершины со всех 30 «островов». Тем самым, хотя бы одна черная вершина была не пройдена.

Задача 8. *Из доски* 10×10 *вырезали средний квадрат* 6×6. *Докажите, что оставшуюся часть доски нельзя обойти конем, побывав на каждой клетке ровно один раз.*

Идея решения. Выделим 12 белых клеток, а в другие клетки нашей «каемки» расставим числа от 1 до 14, как показано на рисунке 8. Заметим, что нумерация обладает таким свойством: если вырезать белые клетки, то конь сможет пойти с любой клетки только на клетку с тем же номером. Номера клеток и определяют «острова» из теоремы 5.

1	7	8	9	11	7	8		3	7
8	9		7	8	9		7	8	4
7								7	
9	8								8
14	7							10	7
8	9							8	12
7								7	10
	8								8
5	7	8		10	7	8		10	7
8	6		7	8	13	10	7	8	2

Рис. 8

Упражнение 8. Завершите решение этой задачи сведением к теореме 5.

Разобранная только что задача 8 – это частный случай задачи М118 из «Задачника «Кванта» («Квант» №12 за 1971 г.), в которой утверждается, что доску размера $(n+4)\times(n+4)$ с вырезанным центральным квадратом $n \times n$ конь может обойти, побывав на каждом поле ровно один раз, тогда и только тогда, когда $n - 1$ делится на 4. Попробуйте решить задачу в этой полной формулировке.

Помимо задачи отыскания гамильтоновых (или достаточно длинных) путей в графе интересны и другие близкие постановки задачи, например: «Добавить в графе минимальное количество ребер так, чтобы в нем появился гамильтонов путь».

Упражнение 9. Дан граф. Пусть h – минимальное количество ребер, которое можно добавить так, чтобы в графе появился гамильтонов путь. Множество путей назовем *покрывающим*, если каждая вершина графа принадлежит ровно одному из этих путей (допускаются пути длины 0, содержащие ровно одну вершину). Пусть p – минимальное число, для которого найдется покрывающее множество из p путей. Докажите, что $h = p - 1$.

В заключение рассмотрим несколько примеров, когда отыскание гамильтоновых (или просто длинных) путей в графе может быть основным шагом в коротком решении задачи.

Задача 9 (XIX Турнир городов). *На клетчатой доске* 5×5 *расставили максимальное число шахматных коней так, чтобы они не били друг друга. Докажите, что такая расстановка – единственная.*

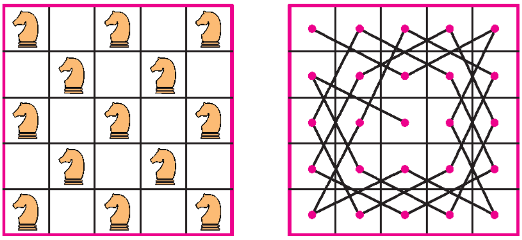


Рис. 9

Решение. Одну расстановку 13 коней найти несложно (рис.9,*а*). Но почему нет других способов? И вдруг возможно поставить большее количество коней?

«Коневой граф» играет в этой задаче роль «графа запретов»: запрещается отмечать пару вершин, соединенных ребром (т.е. ставить в них коней). Задача теперь имеет такой вид: надо доказать, что есть единственный способ отметить максимальное количество вершин так, чтобы никакие две вершины, соединенные ребром, не были отмечены.

Можно выделить гамильтонов путь (рис.9,*б*). Ясно, что две соседние вершины в этом пути не могут быть отмечены. Значит, отмечено не более $\left\lceil \frac{25}{2} \right\rceil = 13$ вершин, при этом 13 вершин могут быть отмечены в единственном случае: когда отмеченные и неотмеченные вершины в пути чередуются, причем путь начинается с отмеченной вершины (докажите это аккуратно!). Конечно, этот способ в самом деле приводит к расстановке, показанной на рисунке 9,*а*. Задача решена.

Упражнения

10. Сколько существует способов расставить на шахматной доске максимальное количество попарно не бьющих друг друга коней?

11. Кузнечик умеет прыгать по клетчатой полоске длиной 26 клеток на 8, 9 или 10 клеток в любую сторону (как в задаче 5). а) Какое наибольшее количество кузнечиков можно рассадить в клетки, чтобы никакой кузнечик не мог за один прыжок попасть в клетку, где уже сидит другой кузнечик? б) Сколько существует таких «максимальных» рассадок кузнечиков?

12 (вариация задачи М1259). Имеются красные и синие бусинки. Составляется круговое ожерелье из $n = 15$ бусинок. Оно называется *хорошим*, если в нем нет двух красных бусинок, между которыми ровно $k = 5$ бусинок. а) Какое наибольшее количество красных бусинок может быть в хорошем ожерелье? б) Каково количество различных хороших ожерелий с наибольшим количеством красных бусинок? в) Попробуйте решить задачу для произвольных натуральных n и k ($k < n$).

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Астрофизика в ЕГЭ по физике

Н.ГОМУЛИНА

Успешное решение задач по астрофизике, таких как задание 24 в ЕГЭ по физике 2018 года, предполагает знание следующих элементов астрофизики.

- Солнечная система: планеты земной группы и планеты-гиганты, малые тела солнечной системы.
- Звезды: разнообразие звездных характеристик и их закономерности. Источники энергии звезд.
- Современные представления о происхождении и эволюции Солнца и звезд.
- Наша Галактика. Другие галактики. Пространственные масштабы наблюдаемой Вселенной.
- Современные взгляды на строение и эволюцию Вселенной.

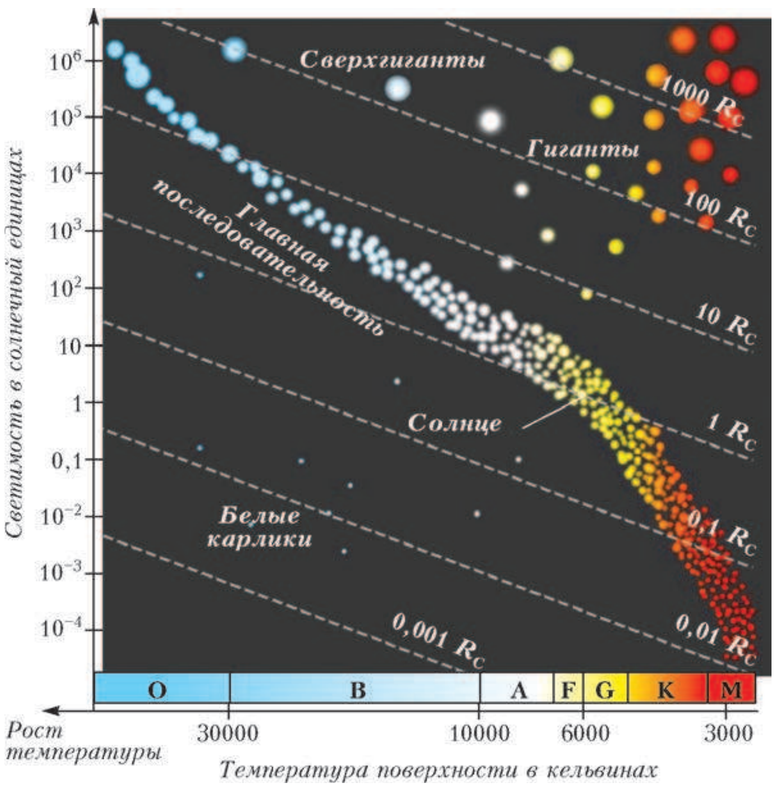
В этой статье на примере конкретных задач мы рассмотрим первые две из перечисленных тем.

Звезды: звездные характеристики и их закономерности

Здесь вы должны уметь различать спектральные классы звезд; понимать взаимосвязь основных звездных характеристик (температура, цвет, спектральный класс, светимость); уметь пользоваться диаграммой Герцшпрунга–Рассела; различать звезды главной последовательности, белые карлики и гиганты (сверхгиганты); знать основные этапы эволюции звезд типа Солнца и массивных звезд, сравнивать продолжительность жизненного цикла звезд разной массы; представлять эволюционный путь звезды на диаграмме Герцшпрунга–Рассела.

Сопоставление светимостей звезд с их спектральными классами впервые было сделано в начале XX века Эйнаром Герцшпрунгом и Генри Расселом, поэтому диаграмму спектр-светимость часто называют диаграммой Герцшпрунга–Рассела. На этой диаграмме (см. рисунок) по оси абсцисс откладываются спектральные классы или эффективные температуры, по оси ординат – светимости L или абсолютные звездные величины M. Если бы между светимостями и температурами не было никакой зависимости, то все звезды распределялись бы на такой диаграмме равномерно. Но на реальной диаграмме обнаруживаются несколько закономерностей, которые называют последовательностями. Светимость – физическая характеристика звезды, указывающая, какое количество энергии она теряет за единицу времени. Светимость Солнца составляет около $4 \cdot 10^{26}$ Дж/с, сверхгиганты имеют бóльшую светимость. Они могут быть бело-голубыми, например Ригель (β Ориона) с температурой поверхности 12130 К, или красными сверхгигантами, например Бетельгейзе (α Ориона) с температурой поверхности 3590 К.

Большинство звезд (около 90%) располагаются на диаграмме вдоль длинной узкой полосы, называемой *главной последовательностью*. Она протянулась из верхнего левого угла (от голубых сверхгигантов) в нижний правый угол (до красных карликов). К звездам главной последовательности относится Солнце, светимость которого принимают за единицу. При этом плотность звезд главной последовательности по порядку величины остается примерно одинаковой, равной плотности воды. Масса звезд главной последовательности возрастает, вместе с их размерами, при смещении влево-вверх.



Точки, соответствующие гигантам и сверхгигантам, располагаются над главной последовательностью справа, а соответствующие белым карликам – в нижнем левом углу, под главной последовательностью. Плотность гигантов и сверхгигантов на порядки меньше плотности воды, а плотность белых карликов – на несколько порядков больше плотности воды.

Бóльшую часть своей жизни звезда проводит на главной последовательности. В этот период ее цвет, температура, светимость и другие параметры почти не меняются. Жизненный цикл у звезд большей массы более короткий, чем у звезд меньшей массы. Стадии эволюции звезды после пребывания на главной последовательности короткие. Типичные звезды становятся при этом красными гигантами, а очень массивные звезды – красными сверхгигантами.

Задача 1. *Рассмотрите таблицу 1, содержащую сведения о ярких звездах. Выбери-*

Таблица 1

Наименование звезды	Температура, К	Масса, в массах Солнца $M_С$	Радиус, в радиусах Солнца $R_С$	Видимая звездная величина	Расстояние до звезды, в св. годах
Процион	6990	1,5	2	$0{,}38^m$	11,4
Сириус	9940	2	1,7	$-1{,}46^m$	8,6
Канопус	6998	8	71	$-0{,}72^m$	310
Арктур	4300	1	25	$-0{,}05^m$	36,7
Денеб	8550	21	210	$1{,}25^m$	1550
Фомальгаут	8500	1,92	1,85	$1{,}16^m$	25
Поллукс	4666	1,92	8,8	$1{,}14^m$	33,7

*те **два** утверждения, которые соответствуют характеристикам звезд.*

1) Самой яркой звездой на небе является Сириус.

2) Звезды Арктур и Поллукс находятся примерно на одинаковом расстоянии от Земли и, следовательно, относятся к одному созвездию.

3) Масса Сириуса примерно в 10 раз меньше, чем масса Денеба, поэтому эволюция Сириуса будет проходить быстрее.

4) Так как массы звезд Фомальгаут и Поллукс одинаковы, то они относятся к одному и тому же спектральному классу.

5) Поскольку температуры Проциона и Канопуса примерно равны, то они относятся к одному и тому же спектральному классу.

Решение. 1) Наиболее яркие звезды имеют отрицательную звездную величину, поэтому Сириус – самая яркая звезда.

2) Звезды могут отстоять от Солнца (Земли) на одинаковые расстояния, но это не означает, что они находятся в одном созвездии. Например, звезда Вега (α Лиры) и звезда Фомальгаут (α Южной Рыбы) удалены от Солнца на одно и то же расстояние, но принадлежат разным созвездиям.

3) Эволюция звезд зависит от их массы. Чем больше масса звезды, тем интенсивнее происходит эволюция звезды. Поэтому эволюция Денеба (его масса 21 $M_С$) будет происходить быстрее, чем у Сириуса (его масса 2 $M_С$).

4) Спектральные классы звезд тесно связаны с температурой (в меньшей степени – с плотностью и химическим составом) звездных атмосфер. Спектральный класс звезды не зависит от ее массы.

5) Если температуры звезд примерно равны, то они относятся к одному спектральному классу.

Итак, верны утверждения 1) и 5).

Задача 2. *Используя таблицу 2, содержащую сведения о ярких звездах, выполните задание. Выберите **два** утверждения, которые соответствуют характеристикам звезд.*

1) Звезды Капелла и Менкалинан относятся к одному созвездию, значит, они находятся на одинаковом расстоянии от Солнца.

2) Звезда Денеб является сверхгигантом.

3) Звезды Альдебаран и Эльнан имеют одинаковые массы, значит, они относятся к одному и тому же спектральному классу.

4) Звезда Бетельгейзе относится к красным звездам спектрального класса М.

5) Температура на поверхности Ригеля в 2 раза ниже, чем на поверхности Солнца.

Решение. 1) Звезды могут относиться к одному созвездию, но находиться на разных расстояниях от Солнца (Земли). Звезды Капелла (α Возничего) и Менкалинан (β Возничего) отстоят от Солнца на расстояния 42,2 св.лет и 82,1 св.лет соответственно.

2) Светимость звезды L связана с радиусом звезды R формулой (закон Стефана–Больцмана)

$$L = 4\pi R^2 \cdot \sigma T^4 .$$

Радиус Денеба равен 210 $R_С$, поэтому Денеб является белым сверхгигантом со светимостью $270000\,L_С$.

3) Массы звезд не имеют отношения к спектральным классам звезд (связанным с температурой поверхности).

4) Звезда Бетельгейзе действительно отно-

Таблица 2

Наименование звезды	Температура, К	Масса, в массах Солнца M_C	Радиус, в радиусах Солнца R_C	Созвездие, в котором находится звезда
Капелла	5200	3	2,5	Возничий
Менкалинан	9350	2,7	2,4	Возничий
Денеб	8550	21	210	Лебедь
Садр	6500	12	255	Лебедь
Бетельгейзе	3100	20	900	Орион
Ригель	11200	40	138	Орион
Альдебаран	3500	5	45	Телец
Эльнат	14000	5	4,2	Телец

сится к красным звездам спектрального класса М, так как ее температура поверхности равна 3100 К.

5) Температура поверхности Солнца примерно 6000 К (справочные данные), а Ригеля – 11200 К (по таблице). Поэтому температура Ригеля больше, чем у Солнца.

Таким образом, верны утверждения 2) и 4).

Задача 3. *Рассмотрите таблицу 3, содержащую сведения о ярких звездах. Выберите* ***два*** *утверждения, которые соответствуют характеристикам звезд.*

Таблица 3

Наименование звезды	Температура, К	Масса, в массах Солнца M_C	Радиус, в радиусах Солнца R_C	Расстояние до звезды, в св. годах	Созвездие
Процион	6990	1,5	2	11,4	Малый Пес
Сириус	9940	2	1,7	8,6	Большой Пес
Канопус	6998	8	71	310	Киль
Арктур	4300	1	25	36,7	Волопас
Денеб	8550	21	210	1640	Лебедь
Фомальгаут	8500	1,92	1,85	25	Южная Рыба
Поллукс	4666	1,92	8,8	33,7	Близнецы
Кастор	10300	2,15	2,3	49,8	Близнецы

1) Звезды Поллукс и Кастор находятся в одном созвездии, значит, они расположены на одном расстоянии от Солнца.

2) Звезды Арктур и Поллукс находятся примерно на одинаковом расстоянии от Земли и, следовательно, относятся к одному созвездию.

3) Масса Сириуса примерно в 10 раз меньше, чему у Денеба, поэтому эволюция Сириуса будет проходить медленнее.

4) Так как массы звезд Фомальгаут и Поллукс одинаковы, то они относятся к одному и тому же спектральному классу.

5) Поскольку температуры Порциона и Канопуса примерно равны, то они относятся к одному и тому же спектральному классу.

Решение. 1) Звезды могут относиться к одному созвездию, но находиться на разных расстояниях от Солнца. Поэтому, несмотря на то что звезды Поллукс и Кастор находятся в одном созвездии, они расположены на разных расстояниях от Солнца – 33,7 св.года и 49,8 св.лет соответственно.

2) Это утверждение аналогично предыдущему.

3) Скорость эволюции звезд зависит от

массы: чем больше масса, тем скорость эволюции выше.

4) Массы звезд не имеют отношения к спектральным классам звезд (определяемым температурой поверхности).

5) Если звезды имеют одинаковые температуры поверхности, то они относятся к одному спектральному классу.

Значит, правильны утверждения 3) и 5).

Задача 4. *Рассмотрите таблицу 4, содержащую сведения о ярких звездах. Выберите **два** утверждения, которые соответствуют характеристикам звезд.*

Таблица 4

Наименование звезды	Температура, К	Масса, в массах Солнца $M_С$	Радиус, в радиусах Солнца $R_С$	Плотность по отношению к плотности воды
Антарес	3400	12	680	$1{,}5 \cdot 10^{-7}$
Арктур	4300	1	25	$3 \cdot 10^{-4}$
Вега	9600	2,8	3	0,14
Сириус В	8200	1	$2 \cdot 10^{-2}$	$1{,}75 \cdot 10^{6}$
Ригель	11200	40	138	$2 \cdot 10^{-5}$
α Центавра	5750	1	1,2	0,8
70 Змееносца	4900	0,8	0,89	2,2
40 Эридана	10000	0,44	$1{,}7 \cdot 10^{-4}$	$1{,}25 \cdot 10^{8}$

1) Звезды Антарес и Ригель являются сверхгигантами.

2) Звезда Арктур относится к голубым звездам спектрального класса О.

3) Звезда Сириус В относится к звездам главной последовательности на диаграмме Герцшпрунга–Рассела.

4) Температура поверхности Веги ниже температуры поверхности Солнца.

5) Звезда 40 Эридана относится к белым карликам.

Решение. 1) Звезды Антарес и Ригель являются сверхгигантами, так как их радиусы больше радиуса Солнца в 680 и 138 раз соответственно.

2) Температура Арктура 4300 К, поэтому цвет звезды красный, а не голубой.

3) Звезда Сириус В – белый карлик, о чем свидетельствуют табличные данные (размер, сравнимый с размером Земли, высокая плотность, большая температура). Белые карлики располагаются внизу слева на диаграмме Герцшпрунга–Рассела, а не на главной последовательности.

4) Температура Веги 9600 К, а температура Солнца 6000 К, поэтому температура Веги выше, чем у Солнца.

5) Звезда 40 Эридана действительно относится к белым карликам, о чем свидетельствуют табличные данные (размер, сравнимый с размером Земли, высокая плотность, большая температура).

Итак, верны утверждения 1) и 5).

Задача 5. *Посмотрите на рисунок, где представлена диаграмма Герцшпрунга–Рассела. Выберите **два** утверждения о звездах, которые соответствуют диаграмме.*

1) Температура звезд спектрального класса G в 2 раза выше температуры звезд спектрального класса А.

2) Звезда Бетельгейзе относится к сверхгигантам, поскольку ее радиус почти в 1000 раз превышает радиус Солнца.

3) Плотность белых карликов существенно меньше средней плотности гигантов.

4) Звезда Антарес имеет температуру поверхности 3300 К и относится к звездам спектрального класса А.

5) Жизненный цикл звезды спектрального класса К главной последовательности более длительный, чем у звезды спектрального класса В главной последовательности.

Решение. 1) В соответствии с диаграммой, температура звезд спектрального класса G приблизительно в 2 раза ниже температуры звезд спектрального класса А.

2) Звезда Бетельгейзе имеет радиус почти в 1000 раз больший, чем радиус Солнца, а такие звезды действительно относятся к сверх-

гигантам (они располагаются в правом верхнем углу диаграммы).

3) Плотность белых карликов во много раз больше плотности звезд главной последовательности, а тем более – звезд-гигантов.

4) Звезда Антарес имеет температуру поверхности 3300 К и относится к звездам спектрального класса К, а не спектрального класса А (звезды белого цвета с температурой поверхности 7500–10000 К).

5) Жизненный цикл звезды спектрального класса К главной последовательности более длительный, чем у звезды спектрального класса В главной последовательности, поскольку звезды спектрального класса К относятся к красным карликам – звездам более малой массы, чем у звезд голубого цвета главной последовательности.

Следовательно, верны утверждения 2) и 5).

Задача 6. *Посмотрите на рисунок, где представлена диаграмма Герцшпрунга–Рассела. Выберите* ***два*** *утверждения о звездах, которые соответствуют диаграмме.*

1) Плотность гигантов существенно меньше средней плотности звезд главной последовательности.

2) Звезда Альтаир, имеющая радиус 1,9 радиусов Солнца, относится к сверхгигантам.

3) Температура поверхности звезд спектрального класса М ниже температуры поверхности звезд спектрального класса А.

4) Звезда Бетельгейзе относится к голубым звездам главной последовательности, поскольку ее радиус почти в 1000 раз превышает радиус Солнца.

5) Жизненный цикл звезды спектрального класса В главной последовательности более длительный, чем у звезды спектрального класса G главной последовательности.

Решение. 1) Плотность гигантов действительно меньше плотности звезд главной последовательности (см., например, таблицу 4).

2) Звезда, которая имеет радиус $1{,}9\,R_C$, не может относиться к сверхгигантам.

3) Температура поверхности звезд спектрального класса М (температура 2000–3500 К) действительно ниже температуры поверхности звезд спектрального класса А (7500–10000 К).

4) Если звезда относится к голубым гигантам главной последовательности, то ее спектральный класс О или В, температура порядка 10000–30000 К, а радиус примерно $10\,R_C$. Радиус Бетельгейзе почти в 1000 раз больше радиуса Солнца, поэтому Бетельгейзе – красный сверхгигант.

5) Звезды спектрального класса В главной последовательности имеют большую массу, чем звезды спектрального класса G главной последовательности. Поэтому эволюция звезд спектрального класса В проходит быстрее, чем у звезд спектрального класса G.

Таким образом, правильны утверждения 1) и 3).

Солнечная система: планеты и малые тела

Чтобы не испытывать затруднений при решении задач на эту тему, нужно знать строение Солнечной системы, основные отличия планет земной группы от планет-гигантов и отличительные признаки каждой из планет; понимать причины смены дня и ночи, а также причины смены времен года; уметь рассчитывать первую и вторую космические скорости.

Напомним, что первая космическая скорость равна $v_1 = \sqrt{gR} = \sqrt{\dfrac{GM}{R}}$, где g – ускорение свободного падения на поверхности планеты, M – масса планеты, R – радиус планеты, G – гравитационная постоянная. Вторая космическая скорость связана с первой соотношением $v_2 = \sqrt{2}v_1$. Для Земли, например, $v_1 = 7{,}89$ км/с, $v_2 = 11{,}2$ км/с.

Задача 7. *Рассмотрите таблицу 5, содержащую характеристики планет Солнечной системы. Выберите* ***два*** *утверждения, которые соответствуют характеристикам планет.*

1) Ускорение свободного падения на Юпитере составляет $40{,}1$ м/с^2.

2) На Сатурне не может наблюдаться смена времен года.

3) Орбита Марса находится на расстоянии примерно 228 млн км от Солнца.

4) Сатурн имеет самую маленькую массу из всех планет Солнечной системы.

5) Ускорение свободного падения на Уране составляет около $9{,}6$ м/с^2.

Решение. 1) Ускорение свободного падения можно найти, зная первую космическую

Таблица 5

Название планеты	Среднее расстояние от Солнца, а.е.	Диаметр в районе экватора, км	Наклон оси вращения	**Первая космическая скорость, км/с**	**Средняя плотность, г/см^3**
Меркурий	0,39	4878	28°	2,97	5,43
Венера	0,72	12104	3°	7,25	5,25
Земля	1,00	12756	23°27′	7,89	5,52
Марс	1,52	6794	23°59′	3,55	3,93
Юпитер	5,20	142800	30°5′	42,1	1,33
Сатурн	9,54	119900	26°44′	25,0	0,71
Уран	19,19	51108	82°05′	15,7	1,24
Нептун	30,52	49493	28°48′	17,5	1,67

скорость:

$$v_1 = \sqrt{gR}, \text{ и } g = \frac{v_1^2}{R} = 24{,}79 \text{ м/с}^2 < 40{,}1 \text{ м/с}^2.$$

2) Наклон оси вращения у Сатурна $26°44'$, поэтому смена времен года там наблюдается.

3) Расстояние от Марса до Солнца составляет 1,52 а.е. Это приблизительно 228 млн км (1 а.е. = 150 млн км).

4) Сатурн – планета-гигант с большой массой.

5) Аналогично пункту 1),

$$g = \frac{v_1^2}{R} = 9{,}6 \text{ м/с}^2 .$$

Итак, верны утверждения 3) и 5).

Задача 8. *Рассмотрите таблицу 6, содержащую характеристики планет Солнечной системы. Выберите* ***два*** *утверждения, которые соответствуют характеристикам планет.*

1) Первая космическая скорость вблизи Марса составляет примерно 3,55 км/с.

2) Скорость движения Урана по орбите в 2 раза меньше, чем скорость Нептуна.

3) Средняя плотность планет земной группы значительно выше, чем у планет-гигантов.

4) Ускорение свободного падения на Венере примерно равно $10{,}36$ м/с^2.

5) Масса Марса в 2 раза меньше массы Земли.

Решение. 1) По таблице найдем, что вторая космическая скорость для Марса равна 5,02 км/с. Известно, что вторая космическая скорость связана с первой космической скоростью соотношением $v_2 = \sqrt{2}v_1$. Отсюда

Таблица 6

Название планеты	Диаметр в районе экватора, км	Период обращения вокруг Солнца	Период вращения вокруг оси	**Вторая космическая скорость, км/с**	**Средняя плотность, г/см^3**
Меркурий	4878	87,97 суток	58,6 суток	4,25	5,43
Венера	12104	224,7 суток	243 суток 3 часа 50 минут	10,36	5,25
Земля	12756	365,3 суток	23 часа 56 минут	11,18	5,52
Марс	6794	687 суток	24 часа 37 минут	5,02	3,93
Юпитер	142800	11 лет 314 суток	9 часов 55,5 минут	59,54	1,33
Сатурн	119900	29 лет 168 суток	10 часов 40 минут	35,49	0,71
Уран	51108	83 года 273 суток	17 часов 14 минут	21,29	1,24
Нептун	49493	164 года 292 суток	17 часов 15 минут	23,71	1,67

находим первую космическую скорость:

$$v_1 = \frac{v_2}{\sqrt{2}} = 3{,}55\ \text{км/с}\ .$$

2) Нептун – самая дальняя планета от Солнца, поэтому ее орбитальная скорость будет самой маленькой в Солнечной системе.

3) Средняя плотность планет-гигантов (Юпитер, Сатурн, Уран и Нептун) намного ниже средней плотности планет земной группы (Меркурий, Венера, Земля, Марс). Причем самая низкая плотность – у Сатурна (меньше плотности воды), а самая высокая плотность – у Земли.

4) Ускорение свободного падения можно вычислить через первую или вторую космическую скорость:

$$g = \frac{v_1^2}{R} = \frac{v_2^2}{2R} = 9{,}12\ \text{м/с}^2 < 10{,}36\ \text{м/с}^2\ .$$

5) Масса планеты связана с плотностью и радиусом соотношением $M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$. Поэтому

$$\frac{M_З}{M_М} = \frac{\rho_З}{\rho_М}\frac{R_З^3}{R_М^3} = 9{,}3 > 2\ .$$

Следовательно, верны утверждения 1) и 3).

Задача 9. *Рассмотрите таблицу 7, содержащую характеристики некоторых спутников планет Солнечной системы. Выберите* ***два*** *утверждения, которые соответствуют характеристикам планет и спутников планет.*

1) Ускорение свободного падения на Обероне равно 7,7 м/с^2.

2) Масса Луны меньше массы Ио.

3) Объем Титана почти в 2 раза больше объема Тритона.

4) Ио находится дальше от поверхности Юпитера, чем Каллисто.

5) Первая космическая скорость для Тритона составляет примерно 1,03 км/с.

Решение. 1) Ускорение свободного падения находим через первую или вторую космическую скорость и радиус спутника:

$$g = \frac{v_1^2}{R} = \frac{v_2^2}{2R} = 0{,}39\ \text{м/с}^2 < 7{,}7\ \text{м/с}^2\ .$$

2) Сравним массы Луны и Ио:

$$\frac{M_Л}{M_{Ио}} = \frac{\rho_Л}{\rho_{Ио}}\frac{R_Л^3}{R_{Ио}^3} = 0{,}82 < 1\ .$$

3) Объем Титана ($V = \frac{4}{3}\pi R^3$) почти в $2^3 = 8$ раз больше объема Тритона.

4) Ио находится на расстоянии 422,6 тыс.км от Юпитера, а Каллисто – на расстоянии 1883 тыс.км от него (данные таблицы), следовательно, Ио ближе к Юпитеру, чем Каллисто.

5) Первая космическая скорость на Тритоне равна

$$v_1 = \frac{v_2}{\sqrt{2}} = \frac{1450\ \text{м/с}}{\sqrt{2}} = 1030\ \text{м/с} = 1{,}03\ \text{км/с}\ .$$

Итак, верны утверждения 2) и 5).

Задача 10. *Рассмотрите таблицу 8, содержащую характеристики некоторых карликовых планет и астероидов Солнечной системы. Выберите* ***два*** *утверждения, которые соответствуют характеристикам астероидов и карликовых планет.*

Таблица 7

Название спутника	Радиус спутника, км	Радиус орбиты, тыс.км	**Средняя плотность, г/см^3**	**Вторая космическая скорость, м/с**	Планета
Луна	1737	384,4	3,35	2038	Земля
Фобос	12	9,38	2,20	11	Марс
Ио	1815	422,6	3,57	2560	Юпитер
Европа	1569	670,9	2,97	2040	Юпитер
Каллисто	2400	1883	1,86	2420	Юпитер
Титан	2575	1221,9	1,88	2640	Сатурн
Оберон	761	587,0	1,50	770	Уран
Тритон	1350	355,0	2,08	1450	Нептун

Таблица 8

Название астероида или карликовой планеты	Примерный радиус, км	Большая полуось орбиты, а.е.	Период обращения вокруг Солнца, земных лет	Эксцентриситет орбиты e	Масса, кг
Веста	265	2,37	3,63	0,091	$3{,}0 \cdot 10^{20}$
Эвномия	136	2,65	4,30	0,185	$8{,}3 \cdot 10^{18}$
Церера	466	2,78	4,60	0,077	$8{,}7 \cdot 10^{20}$
Паллада	261	2,78	4,61	0,235	$3{,}2 \cdot 10^{20}$
Юнона	123	2,68	4,36	0,256	$2{,}8 \cdot 10^{19}$
Геба	100	2,42	3,76	0,202	$1{,}4 \cdot 10^{19}$
Аквитания	54	2,79	4,53	0,238	$1{,}1 \cdot 10^{18}$

1) Астероид Геба вращается по более вытянутой орбите, чем астероид Веста.

2) Большие полуоси орбит карликовой планеты Церера и астероида Паллада одинаковы, значит, они движутся по одной орбите друг за другом.

3) Средняя плотность карликовой планеты Церера равна 400 $кг/м^3$.

4) Первая космическая скорость для астероида Юнона составляет более 8 км/с.

5) Орбита астероида Аквитания находится между орбитами Марса и Юпитера.

Напомним, что эксцентриситет орбиты определяется по формуле $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, где b – малая полуось, a – большая полуось орбиты. У окружности $e = 0$, у эллипса $0 < e < 1$.

Решение. 1) У астероида Гебы эксцентриситет $e = 0{,}202$, а у Весты $e = 0{,}091$, поэтому у Гебы орбита более вытянутая.

2) Большие полуоси орбит астероидов Церера и Паллада одинаковы, но эксцентриситет Цереры равен $e = 0{,}077$, т.е. ее орбита близкая к круговой, а у астероида Паллада $e = 0{,}235$, поэтому его орбита вытянутая.

3) Средняя плотность Цереры

$$\rho = \frac{m}{(4/3)\pi R^3} = \frac{8{,}7 \cdot 10^{20}\ кг}{4{,}2\left(4{,}66 \cdot 10^5\right)^3\ м^3} = 2000\ кг/м^3 > 400\ кг/м^3 .$$

Хотя можно было и не считать. Плотность 400 $кг/м^3$ очень низкая, она соответствует большому количеству легких веществ в составе карликовой планеты, а это не так. Самая маленькая плотность – у Сатурна, у которого очень мощная атмосфера, состоящая на 96% из водорода и на 3% из гелия; и та равна 700 $кг/м^3$.

4) Для того чтобы у Юноны была такая первая космическая скорость, нужны масса и радиус порядка массы и радиуса Земли. А масса Юноны в десятки тысяч раз меньше массы Земли, тогда как ее радиус меньше земного лишь в 50 раз.

5) Можно, например, сравнить периоды обращения вокруг Солнца. Период обращения Земли 1 год, Марса 1,8 лет, Юпитера 11 лет, а Аквитании 4,53 года. Подходит. Или можно вспомнить, что среднее расстояние от Марса до Солнца 1,5 а.е, а от Юпитера до Солнца 5,2 а.е. Поэтому все представленые в таблице астероиды и карликовая планета Церера принадлежат главному поясу астероидов, расположенному между Марсом и Юпитером.

Следовательно, верны утверждения 1) и 5).

XXXIX Турнир городов

ЗАДАЧИ ОСЕННЕГО ТУРА (2017 ГОД)

Базовый вариант

8–9 классы

1. (3) [1] Имеется 5 ненулевых чисел. Для каждых двух из них вычислены их сумма и произведение. Оказалось, что пять сумм положительны и пять сумм отрицательны. Сколько произведений положительны и сколько – отрицательны?

Б.Френкин

2. (4) Существуют ли такие 99 последовательных натуральных чисел, что наименьшее из них делится на 100, следующее делится на 99, третье делится на 98, …, последнее делится на 2?

П.Кожевников

3. (4) В ряд лежат 100 внешне одинаковых монет. Среди них ровно 26 фальшивых, причем они лежат подряд. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивые – не обязательно одинаково, но они легче настоящих. Как за одно взвешивание на двухчашечных весах без гирь найти хотя бы одну фальшивую монету?

Р.Женодаров

4. (5) На одной из клеток поля 8×8 зарыт клад. Вы находитесь с металлоискателем в центре одной из угловых клеток этого поля и передвигаетесь, переходя в центры соседних по стороне клеток. Металлоискатель срабатывает, если вы оказались на той клетке, где зарыт клад, или в одной из соседних с ней по стороне клеток. Можно ли гарантированно указать клетку, где зарыт клад, пройдя расстояние не более 26?

М.Евдокимов

5. (5) Окружность радиуса 1 нарисована на шахматной доске так, что целиком содержит внутри белую клетку (сторона клетки равна 1). Докажите, что участки этой окружности, проходящие по белым клеткам, составляют суммарно не более $1/3$ от ее длины.

М.Евдокимов

[1] В скобках после номера задачи указано максимально количество баллов, присуждавшихся за ее решение. Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.

10–11 классы

1. (4) Существуют ли нецелые числа x и y, для которых $\{x\}\cdot\{y\}=\{x+y\}$? (Здесь $\{x\}$ – дробная часть числа x.)

М.Евдокимов

2. (4) В треугольнике ABC провели биссектрису CL. Серединный перпендикуляр к стороне AC пересекает отрезок CL в точке K. Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и AKL касаются.

М.Панов

3. (4) Имеется 21 ненулевое число. Для каждых двух из них вычислены их сумма и произведение. Оказалось, что половина всех сумм положительна и половина – отрицательна. Каково наибольшее возможное количество положительных произведений?

Б.Френкин, С.Кудря

4. а) (2) Может ли некоторый шар высекать на гранях какого-нибудь правильного тетраэдра круги радиусов 1, 2, 3 и 4?

б) (3) Тот же вопрос, если радиус шара должен быть равен 5.

М.Евдокимов

5. (5) В левой нижней клетке доски 100×100 стоит фишка. Чередуя горизонтальные и вертикальные ходы в соседнюю по стороне клетку (первый ход – горизонтальный), она дошла сначала до левой верхней клетки, а потом до правой верхней. Докажите, что найдутся две такие клетки A и B, что фишка не менее двух раз делала ход из A в B.

А.Грибалко

Сложный вариант

8–9 классы

1. (4) Имеется железная гиря в 6 кг, сахар и невесомые пакеты в неограниченном количестве, а также нестандартные весы с двумя чашами: весы находятся в равновесии, если грузы на левой и правой чашах относятся как 3:4. За одно взвешивание можно положить на весы любые уже имеющиеся грузы и добавить на одну из чаш пакет с таким количеством сахара, чтобы чаши уравновесились (такие пакеты с сахаром можно использовать при дальнейших взвешиваниях). Удастся ли отмерить 1 кг сахара?

Г.Гальперин

2. (4) Даны две монеты радиуса 1 см, две монеты радиуса 2 см и две монеты радиуса 3 см. Можно положить две из них на стол так, чтобы они касались друг друга, и добавлять монеты по одной так, чтобы очередная касалась хотя бы двух уже лежащих. Новую монету нельзя класть на старую. Можно ли положить несколько монет так, чтобы центры каких-то трех монет оказались на одной прямой?

Е.Бакаев

3. (6) См. задачу М2486 «Задачника «Кванта» для трех месяцев вместо двенадцати.

4. а) (1) См. задачу М2490 а «Задачника «Кванта».

б) (3) См. задачу М2490 б «Задачника «Кванта».

в) (4) См. задачу М2490 в «Задачника «Кванта».

5. (9) Цифры натурального числа $n > 1$ записали в обратном порядке и результат умножили на n. Могло ли получиться число, записываемое только единицами?

Ф.Петров

6. (9) См. задачу М2487 «Задачника «Кванта».

7. а) (5) См. задачу М2488 а «Задачника «Кванта».

б) (5) См. задачу М2488 б «Задачника «Кванта».

10–11 классы

1. а) (1) См. задачу М2490 а «Задачника «Кванта».

б) (2) См. задачу М2490 б «Задачника «Кванта».

в) (3) См. задачу М2490 в «Задачника «Кванта».

2. (5) Дан правильный шестиугольник с центром O. Провели такие шесть равных окружностей с центрами в вершинах шестиугольника, что точка O находится внутри окружностей. Угол величины α с вершиной O высекает на этих окружностях шесть дуг. Докажите, что суммарная величина этих дуг равна 6α.

Е.Бакаев

3. (6) См. задачу М2486 «Задачника «Кванта».

4. (8) См. задачу М2489 «Задачника «Кванта».

5. а) (3) См. задачу М2491 а «Задачника «Кванта».

б) (4) См. задачу М2491 б «Задачника «Кванта».

в) (4) См. задачу М2491 в «Задачника «Кванта».

6. (10) Дан треугольник ABC. Пусть I – центр вневписанной окружности, касающейся стороны AB, а A_1 и B_1 – точки касания двух других вневписанных окружностей со сторонами BC и AC соответственно. Пусть M – середина отрезка IC, а отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке N. Докажите, что точки N, B_1, A и M лежат на одной окружности.

Ф.Ивлев

7. (10) Город имеет вид квадрата $n \times n$, разбитого на кварталы 1×1. Улицы идут с севера на юг и с запада на восток. Человек каждый день утром идет из юго-западного угла в северо-восточный, двигаясь только на север или восток, а вечером возвращается обратно, двигаясь только на юг или запад. Каждое утро он выбирает свой путь так, чтобы суммарная длина знакомых участков пути (тех, которые он уже проходил в том или ином направлении) была минимальна, и каждый вечер тоже. Докажите, что за n дней он пройдет все улицы целиком.

М.Дидин

Публикацию подготовили С.Дориченко, Л.Медников

Очередной набор в ВЗМШ

Всероссийская заочная многопредметная школа (ВЗМШ), входящая в структуру московского лицея «Вторая школа» и работающая при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, в пятьдесят четвертый раз проводит набор учащихся. Эта школа была создана по инициативе академика И.М.Гельфанда в 1964 году. Многие годы И.М.Гельфанд возглавлял Научный совет школы.

ВЗМШ – государственное учреждение дополнительного образования, доступное для всех желающих, причем не только для школьников, пополнить свои знания в одной или нескольких из следующих областей науки: математика, биология, филология, физика, история (перечисление – в хронологическом порядке открытия отделений).

Сейчас ВЗМШ совместно с другими научно-педагогическими учреждениями ведет исследовательские работы по разработке новых интерактивных технологий в образовании и переводу части своих учебно-методических комплексов на язык современных телекоммуникаций.

За время существования ВЗМШ удостоверения о ее окончании получили несколько сотен тысяч школьников и тысячи кружков – групп «Коллективный ученик ВЗМШ».

Обучение в школе ЗАОЧНОЕ, т.е. начиная с сентября–октября 2018 года все поступившие будут систематически получать специально разработанные для заочного обучения материалы, содержащие изложение теоретических вопросов и методов рассуждений, разнообразные задачи для самостоятельной работы, образцы решений задач, деловые игры, контрольные и практические задания.

Контрольные работы учащихся будут тщательно проверяться и рецензироваться преподавателями ВЗМШ – студентами, аспирантами, преподавателями и научными сотрудниками МГУ, а также других вузов и учреждений, где имеются филиалы школы. Многие из преподавателей в свое время сами закончили ВЗМШ и поэтому особенно хорошо понимают, как важно указать, помимо конкретных недочетов, пути ликвидации имеющихся пробелов в знаниях, порекомендовать дополнительную литературу, поругать за невнимательность и похвалить за заметный (а иногда – и за самый маленький) прогресс и трудолюбие.

Поступившие в ВЗМШ смогут узнать об увлекательных вещах, часто остающихся за страницами школьного учебника, познакомиться с интересными нестандартными задачами и попробовать свои силы в их решении. Для многих станет откровением, что задачи бывают не только в математике, физике и химии, но и в биологии, филологии и других науках. Решение задач поможет прояснить и сделать интересными многие разделы, казавшиеся непонятными и скучными.

Одна из особенностей учебных программ и пособий ВЗМШ – в том, что они созданы действующими на переднем крае науки талантливыми учеными и опытными незаурядными педагогами.

Чтобы успешно заниматься в заочной школе, вам придется научиться самостоятельно и продуктивно работать с книгой, грамотно, четко, коротко и ясно излагать свои мысли, а это, как известно, умеют далеко не все. Возможно, наша заочная школа поможет вам выбрать профессию, найти свое место в окружающем мире.

Все выполнившие программу ВЗМШ получают дипломы. Хотя формальных преимуществ они не дают, приемные комиссии многих вузов учитывают, что обладатели этих удостоверений в течение продолжительного времени самоотверженно трудились над приобретением знаний, научились самостоятельно творчески работать, а это значит, что из них получатся хорошие студенты и, в дальнейшем, грамотные, вдумчивые, широко образованные специалисты.

Вы сможете получать наши задания как обычной, так и электронной почтой, а также принимать участие в апробации новых интерактивных учебных программ.

Для поступления в ВЗМШ надо успешно выполнить вступительную контрольную работу. Приемную комиссию интересует, в первую очередь, ваше умение рассуждать, попытки (пусть поначалу не совсем удачные) самостоятельно мыслить и делать выводы. Преимуществом при поступлении пользуются проживающие в сельской местности, поселках и небольших городах, где нет крупных научных центров и учебных заведений и где получить дополнительное образование можно лишь заочно.

Решения задач вступительной работы надо написать на русском языке в обычной ученической тетради в клетку. Желающие поступить сразу на несколько отделений каждую работу присылают *в отдельной тетради.* На обложке тетради укажите: *фамилию, имя, отчество, год рождения, базовое образование* (сколько классов средней школы будет закончено *к сентябрю 2018 года), полный почтовый адрес* (с индексом), *откуда узнали о ВЗМШ* (из «Кванта», от друзей, из афиш заочной школы и т.п.), *на какое отделение хотите поступить.*

Адрес ВЗМШ: 119234 Москва, Воробьевы горы, МГУ, ВЗМШ, на прием (укажите отделение)

Телефон: (495) 939-39-30

Обо всех наших отделениях вы можете узнать на общешкольном сайте ВЗМШ: www.vzmsh.ru

На ваши вопросы мы ответим по электронной почте: vzms@yandex.ru

Вступительные работы обратно не высылаются.

Без вступительной работы, только по заявлению, принимаются на индивидуальное обучение победители областных (краевых, республиканских) туров всероссийских олимпиад по соответствующим предметам, а также участники финальных туров этих олимпиад.

Учащиеся ВЗМШ частично возмещают расходы на свое обучение. По просьбе тех, кто не в состоянии внести эту плату, ВЗМШ готова обратиться в школу, в орган народного образования, к другому спонсору с ходатайством об оплате этим благотворителем соответствующих расходов.

Помимо индивидуального обучения, на всех отделениях ВЗМШ, кроме биологического, имеется форма обучения «Коллективный ученик». Это группа учащихся, работающая под руководством преподавателя (школьного учителя, преподавателя вуза, студента или другого энтузиаста) и, как правило, по тем же пособиям и программам, что и индивидуально. Прием в эти группы проводится *до 15 октября 2018 года.* Для зачисления группы требуется заявление ее руководителя (с указанием его профессии и должности, со списком учащихся и сообщением о том, в каком классе они будут учиться с сентября 2018 года); заявление должно быть подписано руководителем группы, заверено и подписано руководителем учреждения, при котором будет работать группа. Работа с группами «Коллективный ученик» может оплачиваться школами как факультативные занятия.

На Северо-Западе России работает Северо-Западная заочная математическая школа при Лицее «Физико-техническая школа» (только математическое отделение, 8–11 классы).

Желающие поступить на отделение математики и проживающие на Северо-Западе России (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми республиках, а также в Санкт-Петербурге), высылают вступительные работы по адресу: 194021 Санкт-Петербург, ул. Хлопина, д.8, к.3, литер А, С-З ЗМШ при Лицее «ФТШ». Можно отправить скан-копию работы по электронному адресу: mathscool@mail/ru. Этот же электронный адрес можно использовать для связи с С-З ЗМШ. Подробная информация имеется на сайте дистанционного обучения: http://distmath.ru/.

Проживающие в остальных регионах России, дальнем и ближнем зарубежье высылают свои работы по математике в адрес ВЗМШ или соответствующего филиала.

Адреса филиалов математического отделения ВЗМШ:

241035 г. Брянск, ул. Мало-Орловская, д. 8, тел.: (4832) 56-18-08,
e-mail: brotek@mail.ru;
610002 г. Киров, а/я 2039, ЦДООШ,
тел.: (8332) 35-15-03, 35-15-04,
e-mail: sms@extedu.kirov.ru,
сайт: http://cdoosh.kirov.ru;
150000 г. Ярославль, ул. Советская, д. 14,
тел.: (0852) 11-82-03,
e-mail: olimp@olimp.edu.yar.ru.

Ниже вы найдете краткие сведения об отделениях ВЗМШ и условия вступительных контрольных работ.

Отделение математики

Мы заочно обучаем математике школьников 6–11 классов.

На индивидуальное обучение принимаем по результатам вступительной работы и высылаем пособия. Куратор руководит обучением: составляет программу, проверяет задания и отвечает на вопросы.

На обучение в группе «Коллективный ученик» принимаем по заявлению руководителя группы. Высылаем пособия на всю группу. Ученики присылают на проверку в ВЗМШ одну коллективную работу по каждой теме.

Принимаем учащихся на все курсы с 0-го по 5-й (т.е. учеников 6–11 классов).

Заявление и вступительную работу присылайте по электронному адресу приема: priem@math-vzms.org или на почтовый адрес школы: 119234 Москва В-234, Воробьевы горы, МГУ, математическое отделение ВЗМШ.

Наш сайт: http://www.math-vzms.org/

Наш телефон: +7 495 93 93 93 0

Если вы хотите учиться индивидуально, выполните вступительную работу, условия задач которой приведены ниже. Решения задач, с которыми удалось справиться, нужно записать в обычной ученической тетради и выслать простой бандеролью вместе с заявлением о приеме в адрес школы. Вступительные работы и заявления принимаются также по электронной почте. В этом случае работа должна быть оформлена в виде файла формата .doc или .pdf, можно также отсканировать текст работы и прикрепить его к заявлению о приеме.

Заявление о приеме пишется в свободной форме. Сообщите фамилию, имя, отчество, год рождения, базовое образование (нам было бы удобно прочесть: «С 1-го сентября 2018 года я буду учиться в ... классе»), полный почтовый адрес с индексом, откуда узнали о ВЗМШ (из интернета, из журналов «Квант», «Наука и жизнь», от учителя, родителей, друзей или из других источников). Сообщите, пожалуйста, адрес своей электронной почты, если она имеется. Не забудьте указать, что вы поступаете на отделение математики.

Срок отправки вступительной работы – до 15 июня 2018 года.

В приведенной ниже вступительной работе рядом с порядковым номером задачи в скобках указано, ученикам какого класса (имеется в виду тот класс, в котором вы предполагаете учиться с 1 сентября 2018 года) эта задача предназначается. Вы можете, если хотите, дополнительно решать задачи, адресованные более старшим классам.

Не торопитесь, а если задачи не получаются, возвращайтесь к ним несколько раз. До 15 июня времени еще достаточно. Возможно, вы не сможете решить все задачи своего класса, тогда присылайте решения тех, которые сделать удалось. Не забудьте обосновать свои решения, «голый» ответ к задаче решением не считается.

Задачи

1 (6–7). Простые числа расположили в виде последовательности в порядке возрастания. Верно ли, что среднее арифметическое двух соседних простых чисел не может быть простым числом?

2 (6–7). В коробке лежат воздушные шарики: 10 красных и 10 синих. Продавец не глядя достает по одному шарику. Сколько шариков ему надо вытащить, чтобы среди них обязательно нашлись: а) два шарика одного цвета; б) два шарика разного цвета; в) три шарика одного цвета?

3 (6–7). Припишите к числу 10 справа и слева по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 12.

4 (6–8). Петя отпил $1/2$ стакана кофе и долил его молоком. Потом он отпил $1/3$ стакана и опять долил молоком. Наконец, он отпил $1/6$ стакана, долил молоком и выпил весь стакан. Чего Петя выпил больше: кофе или молока?

5 (7–10). а) Можно ли занумеровать ребра куба натуральными числами от 1 до 12 так, чтобы для каждой вершины куба сумма номеров ребер, которые в ней сходятся, была одинаковой? б) Аналогичный вопрос, если расставлять по ребрам куба числа -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

6 (8–10). Два города A и B расположены на берегу реки на расстоянии 10 км друг от друга. Пароход может проплыть из A в B и обратно за 1 час. Больше или меньше времени понадобится ему, чтобы проплыть 20 км по озеру?

7 (8–9). Найдите целые числа x и y такие, что $x > y > 0$ и $x^3 + 7y = y^3 + 7x$.

8 (8–10). В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при основании равна одной из сторон. Определите углы треугольника.

9 (9–11). Разложите на множители:

а) $x^8 + x^4 + 1$ (на 3 множителя);

б) $x^5 + x + 1$ (на 2 множителя).

10 (10–11). а) Докажите, что при $a > 0$ $a + \frac{1}{a} \geq 2$. б) Постройте график функции $y = x + \frac{1}{x}$.

11 (10–11). Известно, что $a + b + c < 0$ и что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней. Определите, какой знак имеет число c.

12 (10–11). Можно ли восстановить треугольник по серединам его сторон? А четырехугольник? Любой ответ требует доказательства!

Отделение физики

Обучение на отделении одно-, двух- и трехгодичное. На трехгодичный поток (курс Ф3) принимаются оканчивающие в 2018 году 8 классов средней школы, на двухгодичный (курс Ф2) – оканчивающие 9 классов и на одногодичный (курс Ф1) – 10 классов. Учащиеся, оканчивающие 10-й класс, могут пройти ускоренно всю программу за один год (курс Ф0).

Для поступления на курс Ф3 нужно решить задачи 1–5 приведенной ниже вступительной работы, на курс Ф2 – задачи 4–9, на курс Ф1 – задачи 5–10, на курс Ф0 – задачи 4–10.

На обложке тетради следует указать фамилию, имя и отчество, код курса (Ф0, Ф1, Ф2 или Ф3), сколько классов будет закончено к 1 сентября 2018 года, полный почтовый адрес (с индексом), адрес e-mail (если есть), телефон.

Срок отправки вступительной работы – до 25 июня 2018 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются на курсы Ф1, Ф2, Ф3 без вступительной работы только по заявлению руководителя.

Наш адрес: 119234 Москва В-234, Воробьевы горы, МГУ, ВЗМШ, отделение физики.

E-mail: olphys@phys.problems.ru

Интернет-сайт: http://phys.problems.ru

Задачи

1. Катаясь на велосипеде, мальчик сломал его и пошел дальше пешком. Его средняя скорость при этом составила $v = 20$ км/ч. Если бы поломка произошла несколько позже, то средняя скорость мальчика составила бы $u = 25$ км/ч. Чему была бы равна его средняя скорость, если бы велосипед сломался на такое же время раньше?

2. Цветочный горшок, имеющий форму цилиндра радиусом $r = 5$ см, установлен в цилиндрическом поддоне (рис.1). В горшок наливают $V = 80$ мл воды, которая практически сразу начинает вытекать в поддон с постоянной скоростью $u = 1$ мл/с через отверстие в дне горшка. Постройте график зависимости силы давления горшка на поддон от времени, если масса горшка вместе с землей и цветком $m = 0{,}3$ кг. Можно считать, что в смеси с землей вода везде занимает 10% объема. Зазор между боковыми стенками горшка и поддона $d = 5$ мм, высота боковых стенок поддона $h = 3$ см, толщину стенок горшка считать малой.

Рис. 1

3. Сосуд с водой нагрели от температуры $t_0 = 0\ °C$ до некоторой температуры t, затратив при этом количество теплоты $Q_1 = 664$ кДж. Если воду заменить на лед той же массы при $0\ °C$, то на нагревание сосуда с содержимым до температуры t потребуется количество теплоты $Q_2 = 1654$ кДж, если сосуд вначале имеет температуру t_0, и $Q_3 = 1494$ кДж, если начальная температура сосуда равна t. Определите по этим данным теплоемкость сосуда. Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

4. Два одинаковых амперметра, два одинаковых вольтметра и лампочка соединены в схему, изображенную на рисунке 2. Показания приборов таковы: $I_{A1} = 0$, $I_{A2} = 1$ А, $U_{V1} = 2$ В, $U_{V2} = 1$ В. Найдите мощность тока, текущего через лампочку.

5. Собирающая линза с фокусным расстоянием F находится между экраном с круглым отверстием радиусом r и плоским

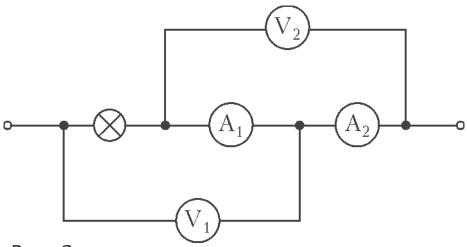


Рис. 2

зеркалом. Экран и зеркало перпендикулярны главной оптической оси линзы. Расстояние от линзы до зеркала $F/2$, до экрана $3F/2$. Величина r много меньше радиуса линзы. Через экран на линзу падает пучок параллельных световых лучей, параллельных ее главной оптической оси. Каковы будут форма и размеры освещенной области на экране со стороны линзы?

6. Два жука, находящиеся в вершинах A и B квадрата $ABCD$, начинают ползти вдоль сторон этого квадрата по часовой стрелке. Скорости жуков одинаковы. Нарисуйте траекторию одного из жуков в системе отсчета, связанной с другим жуком.

7. К концам палочки длиной L = 20 см приложены силы F_1 = 1 Н и F_2 = 2 Н, направленные под углом $\alpha = 45°$ к палочке (рис.3). С какой силой F нужно подействовать на эту палочку, чтобы она оставалась в

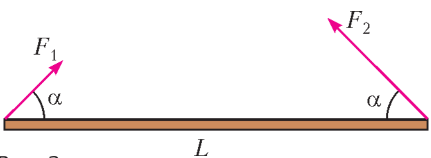


Рис. 3

равновесии? Куда должна быть приложена эта сила?

8. Маленькое тело массой $m = 50$ г подвешено на идеальной нити длиной $L = 30$ см. Тело отводят в сторону так, что нить становится горизонтальной, и отпускают. В тот момент когда нить составляет угол $\alpha = 30°$ с вертикалью, происходит обрыв нити. Найдите скорость тела в момент, когда оно будет пролетать точно под точкой подвеса нити.

9. В сосуде, представляющим собой узкий вертикальный цилиндр высотой H, закрытый сверху поршнем массой M, находится ν молей кислорода. Стенки сосуда в его верхней трети гладкие, а ниже – шероховатые, причем максимальное значение силы трения, действующей на поршень, равно $Mg/5$. В некоторый момент в дне сосуда образуется маленькое отверстие, через которое выходит газ с постоянной скоростью u моль/мин. Постройте график зависимости высоты поршня от времени и найдите, через какое время он опустится до половины высоты сосуда.

10. Магнитное поле занимает область, ограниченную полуплоскостями α и β, которые пересекаются под прямым углом (рис.4).

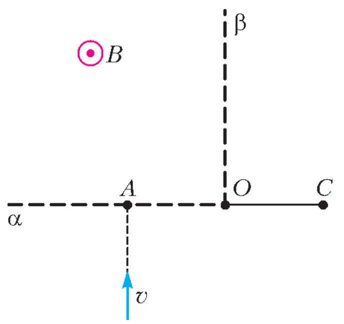


Рис. 4

Полуплоскости и индукция поля B перпендикулярны плоскости рисунка. Электрон влетает в поле в точке A со скоростью v и при последующем движении пролетает через точку C, причем известно, что $AO = OC$. Найдите путь, пройденный электроном в области, занятой магнитным полем. Масса электрона m_e, заряд e; скорость v лежит в плоскости рисунка.

Отделение филологии

Отделение существует с 1989 года. За это время подготовлено и издано большое количество уникальных учебных пособий по русскому языку, общему языкознанию, истории и теории литературы.

На отделение принимаются все желающие, имеющие базовую подготовку в объеме 7 классов.

Сведения о программах и порядке обучения высылаются вместе с извещением о решении Приемной комиссии и размещены на сайте.

Вы хотите исправить грамотность? Познакомиться с любопытными проблемами теории и практики русского языка? Освоить приемы лингвистического или литературоведческого анализа? Приобрести навыки, необходимые для успешной сдачи экзаменов? Тогда выполните и пришлите нам вступительное задание, вопросы которого приведены ниже.

Внимание! На первой странице укажите следующие данные: Ф.И.О., какой класс заканчиваете, полный (с индексом!) почтовый адрес, телефон, e-mail.

Срок отправки вступительной работы – до 15 июня 2018 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы.

Наш e-mail: filologiyvzmsh@mail.ru

Вопросы

1. А.М.Горький долго смеялся, когда бывший сенатор, почтенный старик, уверявший его, что умеет переводить с «десяти языков», принес в издательство «Всемирная литература» такой перевод романтической сказки: *«За неимением красной розы жизнь моя будет разбита»*. Вариант *«Ввиду отсутствия красной розы жизнь моя будет разбита»* тоже был забракован. Почему, как вы думаете?

2. Андрей Белый считал, что звуковая структура стихотворения М.Ю.Лермонтова «Бородино» *строится на борьбе двух музыкальных тем: широкого открытого гласного «а», сопутствующего характеристике русских, и глухого низкого «у», соответствующего теме французов*. Попробуйте показать на примерах, как вы понимаете этот тезис А.Белого.

3. Как разные принципы русской орфографии – морфологический, фонетический, традиционный и дифференцирующий – «работают» в словах ПРИПОЗДНИШЬСЯ и РАЗЖЁГ?

Отделение истории

Обучение на отделении позволит всем, в том числе жителям самых отдаленных городов и деревень, расширить свой кругозор, подготовиться к единому государственному экзамену по истории. Успешно прошедшие курс обучения получают диплом.

А зачем нужно изучать историю? Во-первых, это просто интересно. Любопытно знать, как жили когда-то люди, во что одевались, чем питались, что читали, как женились и выходили замуж, за что боролись и «на что напарывались». Во-вторых, это полезно. Только зная прошлое, можно понять настоящее и прогнозировать будущее. Мы поможем вам в этом разобраться. Специально для вас опытные преподаватели пишут книжки. Последние новости из мира истории вы узнаете одними из первых! Мы будем поддерживать с вами постоянную связь. По нашим книжкам вы будете выполнять особые задания и сообщать нам, что вы раскопали. Ведь, в сущности, труд историка и состоит из этих раскопок. Историк-археолог, копая землю и песок, отыскивает крупицы ушедших времен; историк-архивариус копается в груде бумаг и достает из архивов и даже из частной переписки все, что может позволить ему понять образ времени; историк-теоретик как увлекательный роман читает археологические таблицы, сухие сводки, статистику и восстанавливает по ним живую ткань ушедшей жизни. У историка особая профессия: он в одном лице следователь, прокурор и адвокат времени.

Приведенное ниже вступительное задание нужно выполнить на двойном листе бумаги.

Срок отправки вступительной работы – до 1 июня 2018 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы по заявлению руководителя.

Задание

1. Отгадайте, кто это:

• Русский промышленник, ситцевый магнат, меценат.

• Его жена и друг Вера Николаевна – урожденная Мамонтова.

• Молодой купец с гидом и картой объехал все европейские музеи и сделался тонким знатоком живописи.

• В 24 года основал в своем родовом доме частную галерею русской живописи.

• В 60 лет передал свою галерею в дар Москве.

• Из всех современных ему художников предпочитал передвижников.

• Мечтал найти иконы Рублева, но удача улыбнулась другому коллекционеру.

• Стал первым директором основанного им музея, тратил на него все свои сбережения, но из скромности никогда не являлся на собственные юбилеи.

• Совершенно бескорыстен. Его бумажник всегда был открыт для нуждающихся.

• С художниками никогда не торговался. Заказывая картины, платил сполна.

• Его именем назван национальный музей и станция метро в Москве.

• Его портрет работы Репина украшает залы созданного им музея.

• Его последние слова родственникам: «Берегите галерею».

2. Опишите, не более чем в 7-ми предложениях, политический портрет второго президента России.

* * *

***Внимание*!**

ВЗМШ проводит набор на курс «Обществознание». Курс включает следующие дисциплины: философия, человек и общество, политология, теория государства, государственное устройство России, право, экономика.

Слушателям направляются оригинальные учебные пособия, созданные на основе многолетнего опыта работы авторов курса. Проверка знаний осуществляется с помощью общепринятой системы тестирования.

Программа курса рассчитана на 1 год. Обучение носит заочный характер и имеет целью дать выпускникам школ – как крупных городов, так и небольших сел – глубокие знания по общественным дисциплинам, подготовить их к успешной сдаче ЕГЭ по обществознанию.

Для записи на курс необходимо отправить заявление *до 1 июня 2018 года*.

В заявлении укажите фамилию, имя, отчество, свой полный домашний адрес (с индексом!), класс, в котором вы будете учиться с 1 сентября 2018 года.

Заявление отправьте по адресу: *119234 Москва, Воробьевы горы, МГУ, ВЗМШ (курс «Обществознание»).*

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

(*см. «Квант» №11 за 2017 г.*)

9. Пусть Алеша собрал Ч ягод черники и Б ягод брусники. Тогда каждый собрал по Ч + Б ягод и всего ребята собрали 9Ч + 11Б ягод. Если ребят не больше 9, то всего ягод не больше 9(Ч + Б), а если ребят не меньше 11, то всего ягод не меньше 11(Ч + Б), в каждом случае количество ягод не может равняться 9Ч + 11Б. Значит, ребят 10, тогда 9Ч + 11Б = 10Ч + 10Б, откуда Б = Ч.

10. а) В качестве первого многоугольника подойдет четырехугольник с углами $70°$, $70°$, $90°$ и $130°$, а в качестве второго – четырехугольник с углами $70°$, $70°$, $70°$ и $150°$.

б) У первого – один, у второго – ни одного.

Оценим, сколько нетупых углов может быть у выпуклого многоугольника. Пусть многоугольник имеет n углов, из которых k нетупые. С одной стороны, сумма углов n-угольника равна $180°\cdot(n-2)$. С другой стороны, k его углов не больше $90°$, а остальные $(n-k)$ меньше $180°$. Получаем неравенство $180°\cdot(n-2)\le 90°\cdot k + 180°\cdot(n-k)$, из которого после преобразования получается $k\le 4$. Поэтому нетупых углов не больше четырех. При этом равенство достигается только в случае, когда все углы прямые.

А значит, острых углов не больше трех. Учитывая это, делаем выводы, что у первого многоугольника может быть только 2 острых угла, у второго – 3 и у них по одному тупому углу.

Прямых углов у второго многоугольника нет (так как уже есть три острых). Значит, прямой угол есть у первого многоугольника, и раз у него уже два острых угла, то прямой угол только один.

11. Изобразим девочек точками на плоскости, а мальчиков – линиями (рис.1). Девочке нравится мальчик, если соответствующая ей точка лежит на соответствующей мальчику линии. В качестве мальчиков возьмем стороны равностороннего треугольника, его медианы и вписанную окружность, а в качестве девочек – точки, где пересекаются три линии. Получится 7 девочек и 7 мальчиков. Такая конфигурация называется плоскостью Фано.

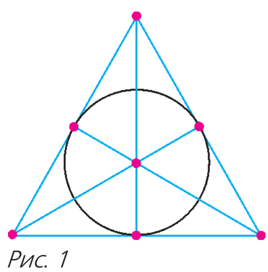


Рис. 1

12. а) Можно.

Утверждение этого пункта следует из утверждения пункта б).

б) Можно.

Подпишем около каждой горизонтали количество уголков, которые она пересекает. Так как всего уголков $12\cdot 12/3=48$ и каждый из них пересекается с двумя горизонталями, то сумма этих чисел равна $48 \cdot 2 = 96$. Докажем от противного: предположим, что среди этих чисел нет больших или равных 9.

Если среди них есть число меньше 8, то их сумма не превосходит 95. Значит, все числа равны 8. Верхняя горизонталь пересекает 8 уголков. Очевидно, что все они лежат в двух верхних горизонталях. Эти уголки занимают $8 \cdot 3 = 24$ клетки и две верхние горизонтали занимают вместе столько же клеток. Значит, две верхние горизонтали можно отрезать, не повредив при этом уголки.

Эти рассуждения для горизонталей можно повторить и для двух левых вертикалей. Таким образом, при отрезании двух верхних горизонталей и двух левых вертикалей уголки не повредятся. Но при этом отрежется левый верхний квадрат 2×2, который на уголки не разрезается.

в) Нельзя.

Контрпример показан на рисунке 2.

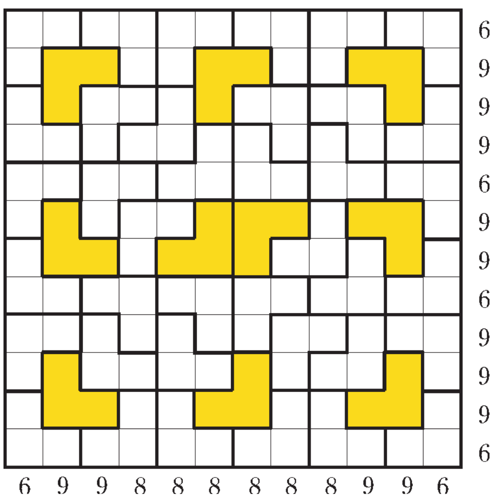


Рис. 2

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Причина этого явления – в перемещении континентальных плит по расплавленным слоям нижележащего вещества.

2. Нет, большая часть объема и массы Земли находится в аморфном состоянии в виде очень вязкой жидкости, а шарообразную форму она восстанавливает под действием сил тяготения.

3. При замерзании воды, попавшей в трещины горных пород, образующийся лед создает давление, превышающее прочность пород, и они начинают крошиться. Другая причина – в неравномерности теплового расширения слагающих породу минералов. При колебаниях температуры они деформируются в разной степени, что также способствует их разрушению.

4. Плотность вещества ядра Земли больше средней ее плотности. Возможный материал ядра – железо, плотность которого $7{,}8\ г/см^3$.

5. Высота горы определяется предельным механическим напряжением, при котором начинает разрушаться кристаллическая решетка, иными словами – весом горы. На Марсе вес тел меньше, чем на Земле, примерно в 2,5 раза, а значит, высота их гор может быть во столько же раз больше. Это подтверждается наблюдениями.

6. Если в озеро поступает больше воды, чем испаряется с его поверхности, то уровень воды в нем может повышаться, но лишь до высоты наиболее глубокого стока, при вытекании из которого и образуется река.

7. Ответ содержится в одном из эпиграфов – эффект размывания берега реки возникает из-за действия сил Кориолиса в неинерциальной, вращающейся вместе с Землей, системе отсчета.

8. В эти моменты Луна и Солнце располагаются на одной линии с Землей, и их воздействие на воду максимально.

9. При вращении Земля стремится повернуть оттягиваемый Луной водяной приливный выступ. Из-за трения между водой и твердым дном океана вращение Земли тормозится и продолжительность суток растет.

10. Вода, охлажденная ниже $4\ ^\circ C$, на дно не опускается. Образовавшийся на поверхности воды лед также не тонет, так как его плотность меньше плотности воды.

11. Молодой морской лед образуется при резком похолодании из *чистой* воды, при этом в нем остаются гнезда рассола, придающие ему эластичность, что позволяет льду изгибаться на волнах подобно резиновому ковру.

12. С потерей воды, обладающей большой теплоемкостью, тепловая инертность Земли стала бы значительно меньше. Температура днем была бы выше, а ее колебания в течение суток и в течение года были бы больше.

13. Северный *магнитный* полюс расположен в Южном полушарии, в Антарктике. От Северного географического полюса он находится на расстоянии свыше 18 тысяч километров.

14. Наличие у Земли магнитного поля.

15. Частицы солнечного ветра (электроны и протоны) закручиваются вокруг линий магнитного поля Земли, проникают к полюсам и сталкиваются с атомами и молекулами воздуха, ионизируя и возбуждая их, что приводит к люминесцентному свечению – полярному сиянию.

16. По содержанию изотопов свинца, образовавшегося в горных породах при радиоактивном распаде изотопов урана, что приводит, по расчетам, к возрасту коры Земли в 4,5 миллиарда лет.

Микроопыт

Неглубокие лужи промерзают до дна; идя по ним, можно лишь чуть поскользнуться. А вот на тонкий лед, покрывший за ночь глубокую лужу, наступать более опасно – провалившись, вы, как минимум, промочите ноги.

ДЛИННЫЕ ПУТИ В ГРАФАХ

2. Не может.

Указание. Ход коня меняет цвет клетки.

4. Не может.

Указание. Позицию назовем одноцветной, если фишки находятся на полях одного цвета, и разноцветной – в противном случае. Найдите количества одноцветных и разноцветных позиций и используйте тот факт, что за один ход разноцветная позиция становится одноцветной, и наоборот.

6. 23.

Указание. Нарисуйте соответствующий граф позиций, покрасьте его вершины в два цвета и оцените длину пути, исходя из теоремы 2.

9. *Указание*. Покрывающее множество из p путей можно добавлением $p-1$ ребер превратить в один путь.

10. 2 способа.

Указание. Рассмотрите в «коневом графе» гамильтонов цикл.

11. а) 16 кузнечиков; б) 1 рассадка.

Указание. Можно использовать путь кузнечика из задачи 5.

12. а) 6 бусинок; б) 125 хороших ожерелий; в) $d[m/2]$ бусинок и t^d хороших ожерелий, где $d = \text{НОД}(n, k+1)$, $m = n/d$, $t = 2$, если m четно, и $t = m$, если m – нечетно.

Указание. Выясните, какова структура «графа запретов».

XXXIX ТУРНИР ГОРОДОВ

ЗАДАЧИ ОСЕННЕГО ТУРА (2017 ГОД)

Базовый вариант

8–9 классы

1. Четыре положительны, шесть отрицательны. Если бы среди имеющихся чисел нашлись четыре числа одного знака, то уже они дали бы шесть сумм этого знака. Поэтому имеется три числа одного знака и два – другого. Отсюда – ответ.

2. Существуют, например $100!-100$, $100!-99$, …, $100!-2$.

3. Рассмотрим 26-ю, 52-ю и 78-ю монеты. Ясно, что среди них ровно одна фальшивая. Сравнение любых двух из трех монет выявит ее.

Есть много других способов, например, сравнить первые 25 или 26 монет с последними.

4. Можно.

Решение (Авиэль Боаг, Израиль). Достаточно даже 25 ходов. Будем двигаться по пути, указанному на рисунке 3. Когда миноискатель сработает впервые, клад сможет находиться не более чем в трех клетках. Например, если он сработал в черной клетке, то подозрительными будут три клетки, помеченные плюсами. Из них легко выбрать нужную за два хода. Если металлоискатель впервые сработает на 24-м ходу, то подозрительных клеток останется две, а на 25-м – одна, и оставшихся ходов хватит. Если миноискатель не сработает ни разу, то клад – в красной клетке.

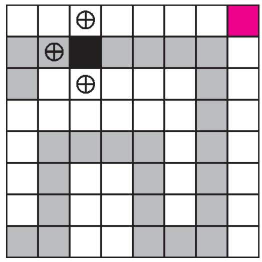


Рис. 3

Как показала проверка на компьютере, 24 ходов недостаточно.

5. Окружность лежит в восьмиклеточной рамке, окружающей указанную клетку, иначе расстояние от точки окружности вне рамки до дальней вершины исходной клетки будет больше 2 – диаметра окружности. Поэтому окружность разбивается на восемь дуг чередующихся цветов (белые дуги могут быть нулевыми). Заметим, что каждая черная дуга не меньше $60°$, поскольку стягивающая ее хорда не меньше стороны клетки, т.е. радиуса окружности. Поэтому четыре черные дуги составляют не менее $2/3$ длины окружности.

10–11 классы

1. Не существуют.

Пусть $\{x\} = \alpha$, $\{y\} = \beta$, тогда $\{x+y\} = \{\alpha+\beta\}$. Из условия следует, что $\alpha+\beta-\alpha\beta$ – целое число. Значит, и число $1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta = (1-\alpha)(1-\beta)$ – целое. Но это не так.

2. Проведем в общей точке A этих окружностей касательные l и m соответственно. Угол между l и хордой AB равен углу C. Угол между m и хордой AL равен

$$\angle AKL = \angle KAC + \angle KCA = 2\angle KCA = \angle C .$$

Следовательно, прямые l и m совпадают, что и требовалось.

3. 120.

Всего сумм 210, т.е. по 105 сумм каждого знака. Пусть было x чисел одного знака и y – другого. Нам надо минимизировать количество xy отрицательных произведений. При фиксированной сумме произведение чисел тем меньше, чем дальше они друг от друга. Ни одно из чисел x и y не может быть больше 15 (иначе количество сумм одного знака будет больше $15 \cdot 14 : 2 = 105$), поэтому наилучший результат будет при $x = 15$, $y = 6$ (или наоборот). При этом количество отрицательных произведений равно 90. Нужное количество положительных сумм достигается, например, если пятнадцать чисел равны 1, а шесть равны -2.

4. Может в обоих пунктах.

а) Возьмем такой правильный тетраэдр, что шар, касающийся его ребер, высекает на гранях круги радиуса больше 4. Затем будем отдалять одну из граней от центра шара, пока в этой грани не высечется круг радиуса 4. Тетраэдр при этом останется правильным, радиусы кругов в других гранях не изменятся. Аналогично отдалим остальные грани, чтобы получить нужные круги.

б) Рассмотрим шар с центром O радиуса 5. Опишем вокруг него правильный тетраэдр. На радиусах, соединяющих O с точками касания, найдем точки, для которых плоскости, проходящие через эти точки и перпендикулярные этим радиусам, пересекают шар по кругам радиусов 1, 2, 3, 4.

Осталось доказать, что эти четыре круга не пересекаются (тогда указанные плоскости образуют тетраэдр). Достаточно доказать это для кругов радиусов 3 и 4. Заметим: если бы соответствующие радиусы были перпендикулярны, то круги касались бы (поскольку треугольник со сторонами 3, 4, 5 прямоугольный). Так как угол между радиусами на самом деле тупой, круги пересекаться не будут.

5. Раскрасим клетки в шахматном порядке так, что левая нижняя клетка X – черная. Тогда левая верхняя Y – белая. Из черной клетки X делается горизонтальный ход, следующий ход – из белой вертикально, потом – снова из черной горизонтально и так далее, чередуясь. Это значит, что из черной клетки фишка всегда выходит горизонтально, а из белой – вертикально. В частности, в Y фишка попала горизонтальным ходом.

Пусть одинаковых ходов не было. Тогда никакую сторону клетки фишка не может пересечь дважды: в том же направлении – в силу предположения, а в противоположном – в силу указанного выше чередования.

Поскольку пройденную сторону клетки снова проходить нельзя, будем «строить» вдоль нее стену. Очевидно, стены образуют связное множество. Когда фишка доберется до Y, стены соединят нижний и верхний края доски. Вся доска разобьется стенами на области, причем Y и правая верхняя клетка Z окажутся в разных областях. Следовательно, из Y в Z фишка пройти не сможет. Противоречие.

Сложный вариант

8–9 классы

1. Удастся.

Положим гирю на левую чашу и уравновесим ее 8 кг сахара. Уберем гирю и насыпем на левую чашу 6 кг сахара. Поменяем пакеты местами и доложим на правую чашу гирю. Теперь на левой чаше – 8 кг, на правой – 12 кг. Для равновесия не хватает 1 кг сахара на левой чаше, который и насыпаем.

2. Можно.

На рисунке 4 центры четырех монет находятся в вершинах двух треугольников со сторонами 3, 4, 5.

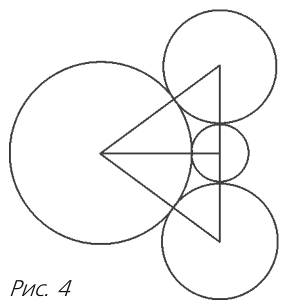


Рис. 4

5. Не могло.

Заметим сначала, что произведение двух k-значных чисел – либо $(2k-1)$-значное число, либо $2k$-значное. Действительно, наименьшее k-значное число 10^{k-1}, умноженное само на себя, дает число 10^{2k-2}, в котором $2k-1$ знаков, а наибольшее k-значное число, умноженное само на себя, дает меньше, чем наименьшее $(k+1)$-значное число 10^k, умноженное само на себя, откуда результат меньше наименьшего $(2k+1)$-значного числа 10^{2k}.

Пусть даны числа $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1}$ и $\overline{a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k}$. Представим себе, что мы умножаем их в столбик. В самом правом разряде будет стоять $a_1 a_k$ (возможно, с переносом, который уйдет в следующие разряды), и в $(2k-1)$-м справа разряде тогда – минимум a_1a_k. По условию, a_1a_k оканчивается на 1. Если есть еще и перенос, то a_1a_k не меньше 11, и как минимум этот же перенос есть и в $(2k-1)$-м разряде. Но произведение двух цифр не может дать 11, т.е. a_1a_k еще больше. Значит, в $(2k-1)$-м разряде после всех переносов должно получиться минимум 111 (иначе в итоге не получится число из одних единиц), что невозможно – в нашем произведении будет слишком много цифр (не меньше $2k+1$). Поэтому переноса нет, и $a_1=a_k=1$. Тогда произведение наших чисел будет меньше, чем $\left(2\cdot 10^{k-1}\right)\cdot\left(2\cdot 10^{k-1}\right)=4\cdot 10^{2k-2}$, т.е. в произведении $2k-1$ разрядов.

Посмотрим теперь на второй разряд справа. Там стоит $a_ka_2+a_{k-1}a_1$, возможно, с переносом. Если перенос есть, то минимум такой же перенос будет и в $(2k-2)$-м разряде, и единица в $(2k-1)$-м разряде испортится. Значит, переноса нет, и $a_ka_2+a_{k-1}a_1=1$. Аналогично получаем, что и в третьем разряде (справа и слева) переноса нет и там 1, и так далее. Так мы дойдем до середины и получим, что там тоже 1 без переноса. Но на среднем месте стоит $a_1^2+\ldots+a_k^2$, что не меньше 2 (ведь $a_1=a_k=1$). Противоречие. Значит, число из одних единиц получить нельзя.

10–11 классы

2. Рассмотрим угол, симметричный данному относительно точки O. По теореме о величине угла между хордами, эти два угла высекают на каждой окружности две дуги суммарной величины 2α, а на всех шести окружностях – 12 углов суммарной величины 12α. Поскольку картинка симметрична относительно O, каждый из углов высекает по шесть дуг суммарной величины 6α.

6. Будем использовать стандартные обозначения a, b, c и p для длин сторон и полупериметра треугольника ABC. Пусть первая вневписанная окружность касается прямой BC в точке K. Поскольку KM – медиана прямоугольного треугольника CKI, то при повороте на угол $\varphi=180°-\angle C$ прямая BC переходит в прямую AC. При этом точка K переходит в C, точка B – в B_1, а точка A_1 – в A (как известно, $KB=CB_1=p-a$, $BA_1=B_1A=p-c$). Поэтому $MA=MA_1$, $MB=MB_1$.

Равнобедренные треугольники A_1MA и B_1MB подобны (у обоих углы при вершине M равны φ). Значит, $\angle MAN=\angle MAA_1=\angle MB_1B=\angle MB_1N$, что и требовалось.

7. На каждом ребре сетки (отрезке улицы) поставим стрелки в направлениях на север или на восток. Пусть город – квадрат $ABCD$, где A – юго-западная вершина, B – юго-восточная (рис.5). Назовем *весом* узла сетки минимум из длин пути по сетке от него до вершин A и C. Во все внутренние узлы, а также в B и D стрелок

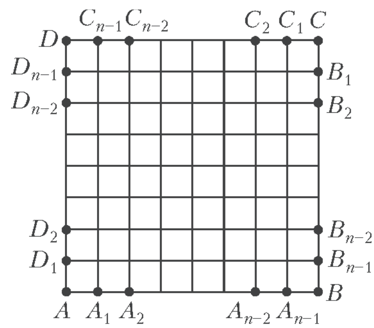


Рис. 5

входит и выходит поровну, назовем эти узлы *равновесными*. В узлы на интервалах BC и CD входят две стрелки, выходит одна, назовем эти узлы *финальными*, обозначим их B_k на BC и C_k на CD, где k – вес. А в узлы на интервалах AB и AD входит одна, выходят две стрелки, назовем эти узлы *стартовыми*, обозначим их A_k на AB и D_k на AD. Пути из A в C идут по стрелкам. Пути из C в A идут против стрелок, но их тоже будем считать путями по стрелкам из A в C. Каждый путь имеет длину $2n$, веса узлов на нем сначала возрастают от 0 до n, затем убывают от n до 0.

Будем нумеровать дни, начиная с 0, а также считать, что пройденные ребра окрашиваются в синий цвет (исходный цвет ребер – черный). Докажем индукцией по k, что в k-й день станут синими ровно $4(n-k)$ ребер, после этого все ребра, инцидентные узлам веса не более k, будут синими, а все синие ребра, инцидентные узлам веса больше k, будут пройдены только по разу.

База ($k=0$). Проведем любой путь из A в C. Заведомо есть еще один путь из A в C по еще не пройденным стрелкам, например симметричный предыдущему относительно прямой AC. Проведем любой такой путь. Все четыре ребра, инцидентные A и C (т.е. узлам веса 0), пройдены. Каждый из узлов веса 1 имеет степень 3, через каждый прошел один путь.

Шаг индукции. Пусть настал k-й день. Первые k звеньев любого пути выходят из узлов с весами от 0 до $k-1$. По предположению индукции, они пройдут по синим ребрам. То же верно для k последних звеньев. Значит, на пути может быть не более $2(n-k)$ черных ребер. Докажем, что есть путь, где таких ребер ровно $2(n-k)$.

На сторонах квадрата остались узлы веса не меньше k и степени 3. По предположению индукции, через них не могли пройти два пути, поэтому каждой из них инцидентна хотя бы одна черная стрелка (выходящая для A_i и D_i, входящая для B_i и C_i). При этом в узлах степени 3 веса k осталось ровно по одной инцидентной стрелке, поскольку ребро, соединяющее его с узлом веса $k-1$, по предположению индукции синее.

Стартуем из A_{n-1} и будем идти по черным стрелкам, пока не дойдем до B_{n-1} или не зайдем в тупик. Тупиком может быть только финальный узел F. Пусть он отличается от B_{n-1}. Ломаная $A_{n-1}F$ разбивает город на две части, и у части с узлом B_{n-1} нет стартовых узлов на границе, кроме A_{n-1}. Выйдем из B_{n-1} и будем идти против черных стрелок, пока не дойдем до ломаной $A_{n-1}F$. Далее по ломаной дойдем до A_{n-1}. Получим путь $A_{n-1}B_{n-1}$. Временно сотрем его звенья. После этого узлы A_{n-1} и B_{n-1} станут равновесными (а равновесные ранее узлы так и останутся равновесными). Аналогично строим путь $A_{n-2}B_{n-2}$: стартуем из A_{n-2}, получаем путь $A_{n-2}F$, если F не B_{n-2}, то стартуем задним ходом из B_{n-2} и дойдем до ломаной $A_{n-2}F$, потому что все неравновесные стартовые узлы лежат за этой границей. И так далее.

Построив путь A_kB_k (и восстановив стертые ребра), мы получим путь AA_kB_kC с ровно $2(n-k)$ черными ребрами. Человек не обязан выбирать именно его, но ему придется выбрать путь П, черная часть которого начинается в A_k или D_k и заканчивается в B_k или C_k. Действительно, $2k$ путей, пройденные в первые k дней, прошли через $2k$ узлов веса k и окрасили $8k$ инцидентных им ребер (по предположению индукции, все эти ребра различны). Но всего у нас есть 4 узла веса k степени 3 и $2(k-1)$ узлов степени 4. Им инцидентны $8k+4$ ребра. Как показано выше, все четыре неокрашенных ребра инцидентны узлам степени 3.

Окрасим путь П в синий цвет и обозначим те два из четырех вышеперечисленных узлов, которые не стали концами П, A' и B'. Докажем, что остался путь из A' в B' по черным ребрам. Для этого, как и раньше, последовательно строим пути $A_{n-1}B_{n-1}$, $A_{n-2}B_{n-2}$, …, $A_{k+1}B_{k+1}$, $A'B'$. Значит, человек выберет один из путей, проходящий через A' и B'. Окрасив его в синий цвет, мы, в частности, сделаем синими последние четыре черных ребра, инцидентные узлам веса k.

В силу доказанного, за n дней будет пройдено всего $4(n+(n-1)+\ldots+1)=2n(n+1)$ ребер, что совпадает с общим числом ребер сетки.

КВАНТ 12+

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: (495) 930-56-48

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8»

Телефон: (495) 363-48-86,

htpp: //capitalpress.ru

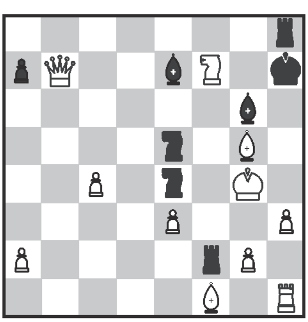
Вспоминая ПРОШЛЫЙ ГОД

Прошедший 2017 год был богат на интересные события в шахматном мире и на красивые партии. Наиболее яркие партии представлены в сегодняшнем выпуске шахматной странички.

Бай Цзиньши – Динь Лижень

Пекин, 2017

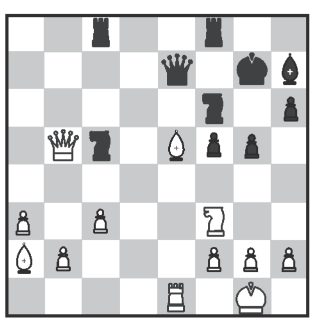
1. d4 ♞f6 2. c4 e6 3. ♘c3 ♝b4 4. ♘f3 0-0 5. ♗g5 c5 6. e3 cd 7. ♕d4?! Неудачный ход, позволяющий черным с темпом развить фигуры. 7… ♞c6 8. ♕d3 h6 9. ♗h4 d5 10. ♖d1 g5 11. ♗g3 ♞e4 12. ♘d2 ♞c5 13. ♕c2 d4 14. ♘f3 e5 15. ♘e5 dc!? 16. ♖d8 cb+ 17. ♔e2? Решающая ошибка. Съедая ладью, черные получают достаточную материальную компенсацию и мощнейшую атаку за пожертвованного ферзя. Необходимо было 17. ♖d2 ♜d8 18. ♘f3 ♝g4 19. ♕b2 ♝f3 20. gf ♜d2 21. ♕d2 ♝d2+ 22. ♔d2 ♜d8+ 23. ♔e2 с равной позицией 17… ♜d8 18. ♕b2 ♞a4 19. ♕c2 ♞c3+ 20. ♔f3 ♜d4!! Важнейший ход в партии: грозит мат. 21. h3 h5 22. ♗h2 g4+ 23. ♔g3 ♜d2! Ладья идеально взаимодействует с конем и остается неприкосновенной из-за вилки на e4. 24. ♕b3 ♞e4+ 25. ♔h4 ♝e7+ 26. ♔h5 ♚g7! Великолепный пример «тихого» хода. Грозит мат с h8. 27. ♗f4 ♝f5 28. ♗h6+ ♚h7 29. ♕b7 ♜f2 30. ♗g5 ♜h8 31. ♘f7 ♝g6+ 32. ♔g4 ♞e5+! Финальная позиция достойна отдельной диаграммы! Белый конь отвлекается от защиты поля h6, и мат неизбежен: 33. ♘e5 ♝f5+ 34. ♔h5 ♚g7+ 35. ♗h6 ♜h6×. Выигрыш черных.



В.Крамник – П.Харикришна

Шамкир, 2017

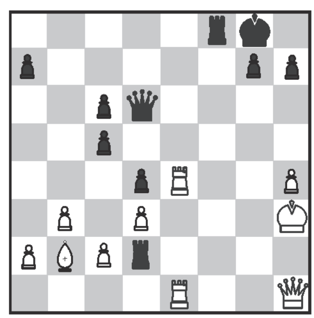
1. e4 e5 2. ♘f3 ♞c6 3. ♗b5 a6 4. ♗a4 ♞f6 5. 0-0 ♝e7 6. d3 b5 7. ♗b3 d6 8. a3 0-0 9. ♘c3 ♞b8 10. ♘e2 ♞bd7 11.c3 ♝b7 12. ♘g3 c5 13. ♖e1 ♜c8 14. ♘f5 c4 15. dc ♝e4 16. ♘e7+ ♛e7 17. cb ab 18. ♗g5?! Комментируя партию, В. Крамник отметил, что пошел на этот вариант, имея в виду 18…h6 19. ♘h4 hg 20. ♘g6 ♛a7 21. ♖e3 ♞b3 22. ♕b3 ♜fe8 23. ♖h3 ♞h7, и черные отбивают атаку белых и остаются с лишней фигурой, так как конь на g6 в западне. 18… ♞c5 19. ♗a2 h6 20. ♗h4 g5 21. ♗g3 ♝h7 22. ♕e2 ♚g7 23. ♖ad1 ♞fe4 24. ♖d5!? f5 25. ♖e5!? Белые решаются на редчайший прием – позиционную жертву ладьи, не желая просто оборонять сложную позицию, возникшую после неудачного 18-го хода. 25… de 26. ♗e5+ ♞f6 27. ♕b5. Взамен ладьи белые получили три проходные пешки на ферзевом фланге и виртуозно продвигают их к цели. 27… ♞ce4 28. ♗d4 ♜fd8 29. h3 ♜b8 30. ♕e2 ♝g8? Неудачное решение. Необходимо было попытаться заблокировать линии на ферзевом фланге: 30… ♕b7 31. b4 ♜a8. Далее последовало 31. ♗b1 ♛b7 32. b4 ♜e8 33. c4 ♛c6 34. ♕b2 ♜bd8 35. c5 ♛e6 36. b5 ♚f8? 37. c6 g4 38. hg fg 39. ♗e4 gf (39… ♞e4 40. ♖e4 ♛e4 41. ♗g7+ ♚f7 42. ♕g7×) 40. ♗f6 ♜d6 41. ♗g7+ ♚f7 42. ♗e5. Белые выиграли.



А.Гергей – Е.Воробьев

Ла-Рода, 2017

1. e4 c5 2. ♘f3 e6 3. b3 ♞c6 4. ♗b2 d5 5. ed ed 6. ♗b5 ♞f6 7. 0-0 ♝e7 8. ♘e5 ♛c7 9. ♖e1 0-0 10. h3 ♞e4 11. ♗c6 bc 12. d3 ♞f2!? 13. ♔f2 ♝h4+ 14. g3 f6 15. gh fe+ 16. ♔g2 e4 17. ♖e3?! (Сильнее 17. ♘d2, развивая фигуру и создавая дополнительного защитника. Ходом в партии белые пытаются предотвратить вторжение ладьи, однако благодаря серии жертв черным удается сделать это.) 17… d4! 18. ♖e4 ♝h3+!! 19. ♔h3 ♜f2 20. ♕h1. Беря под контроль поля h3 и f2, однако через несколько ходов окажется, что этого недостаточно. 20… ♜af8 21. ♘d2 ♛d7+ 22. ♔g3 ♛d6+ 23. ♔h3 ♜d2 24. ♖ae1.



24… ♜f3+!! Отвлекая ферзя от защиты поля h2 и выманивая короля навстречу неизбежному мату. 25. ♕f3 (25. ♔g4 ♛g3 26. ♔h5 ♛g6×) 25… ♜h2+ 26. ♔g4 ♛g6+ 27. ♔f4 ♜h4+ 28. ♔e5 ♜h5+. Черные выиграли.

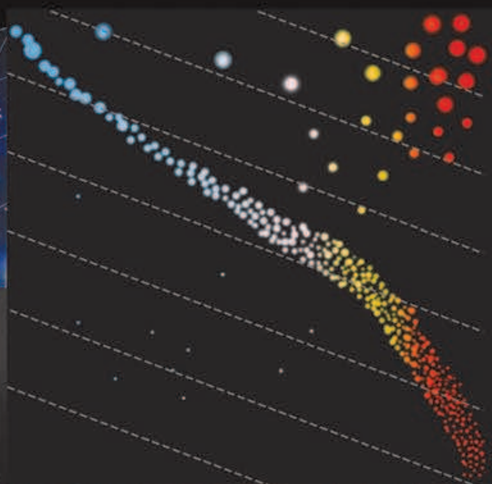
А.Русанов

Индекс 90964

Прогулки с физикой

ЗВЕЗДНАЯ РОССЫПЬ

Кто и зачем раскидал эти разноцветные звезды по черному небу?



(Ответ – на с. 42 внутри журнала)