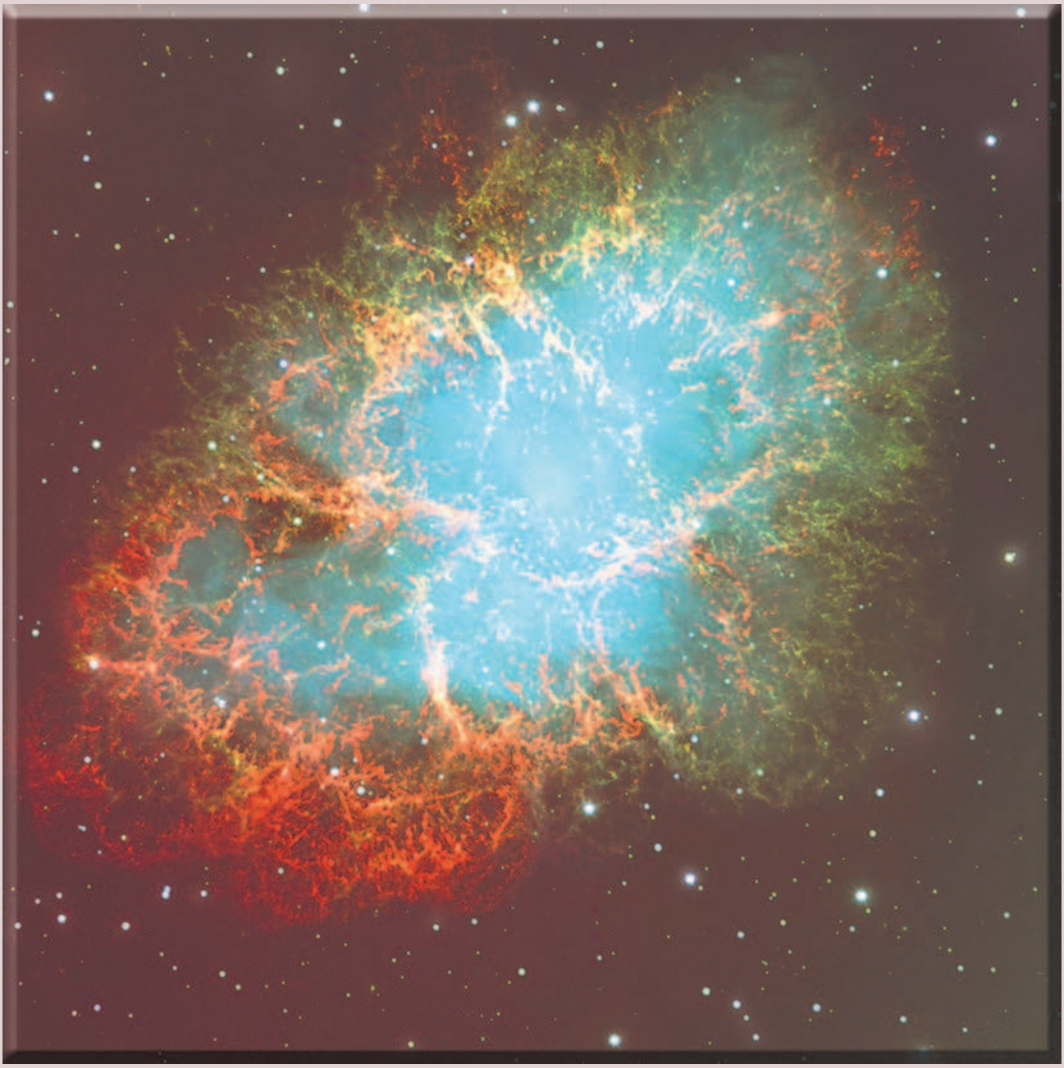
ISSN 0130-2221
ДЕКАБРЬ
2017 · № 12

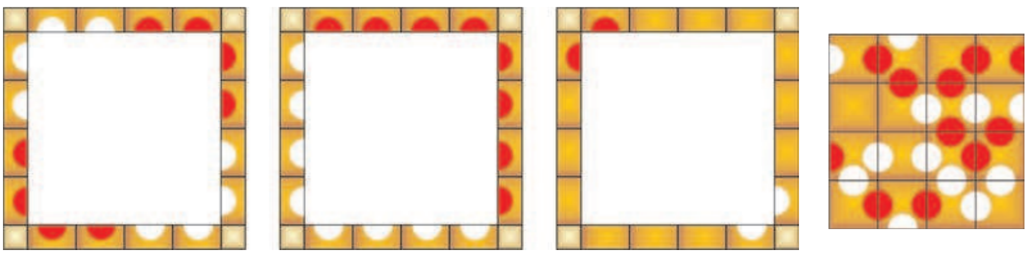
КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



ЧЕК-ПОЙНТ

Английское название головоломки – Check Point – можно перевести как «контрольный пункт». Но правильнее было бы использовать множественное число, потому что таких пунктов на самом деле 16: это прямоугольные брусочки, располагающиеся по границе поля. Сначала нужно расставить их – это определит один из множества вариантов этой головоломки. У каждого из прямоугольных брусочков две боковые стороны пустые, а на двух других нанесены полукруги – красный и белый.



Подготовив таким образом для себя задачу, вы можете приступать к ее решению: требуется заполнить внутреннее поле 4×4 квадратными плитками так, чтобы получились только целые одноцветные круги. На плитках тоже есть красные и белые полукруги – по 20 каждого цвета. Их расположение показано на рисунке справа (одна плитка пустая).

Автор этой головоломки – немецкий изобретатель Дитер Маттес (Dieter Matthes). Ее легко сделать в домашних условиях из фанеры или картона. И на самом деле вы получите сразу много головоломок, потому что каждая новая расстановка прямоугольных брусочков на границе поля дает новую задачу. Ясно, что не все они имеют решение: если, например, оставить на границе только белые полукруги, то на квадратных плитках их просто не хватит. Мы приводим три варианта стартового расположения брусочков. Но вы можете экспериментировать с другими вариантами и даже пробовать аналогичные головоломки с полями других размеров.

Желаем успехов!

В.Журавлев

КВАНТ ДЕКАБРЬ 2017 №12

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Астрономия вернулась в школу

В.СУРДИН

Многие годы астрономия была выведена из числа обязательных школьных предметов, но в 2017 году ее реабилитировали и восстановили в правах. Теперь астрономия – обязательная дисциплина, равноправная с другими естественно-научными предметами: физикой, химией, биологией, математикой, географией. Это отрадно, поскольку во всех развитых странах знание астрономии считается непременной частью культуры современного человека. Тем более это важно для нашей страны – родины космонавтики.

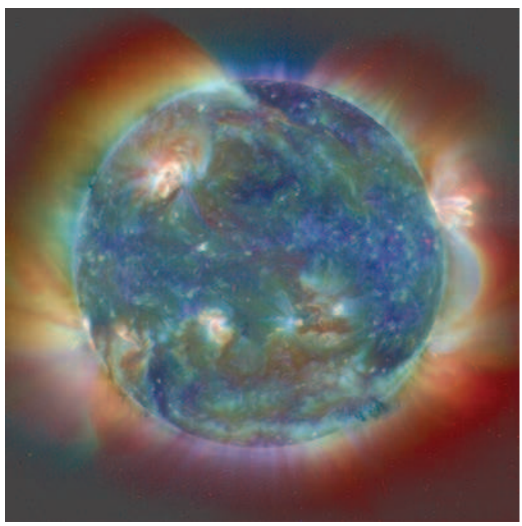
Но появление нового школьного предмета всегда вызывает вопросы. Так ли он нужен уже перегруженным занятиями школьникам? Что нового он даст на фоне действующих дисциплин? Не достаточно ли общих знаний о Вселенной, которые ученик получает из средств массовой информации?

Определенный резон в этом есть. Средства массовой информации любят астрономическую тематику и часто к ней обращаются. Сюжеты фантастических романов и фильмов тоже часто связаны с космическими путешествиями, а телевизионные образовательные каналы обожают «космическую» музыку. Все это стимулирует любознательность, но почти не дает новых знаний.

А задача школы – подготовить будущих работников, способных ставить задачи и решать их, в том числе и в области науки, которая сегодня является мощной производительной силой. Поэтому важно, не теряя романтический элемент астрономии (ведь старшеклассник – это еще и юный организм с яркой фантазией!), связать «небесную науку» с более приземленными предметами, непосредственно питающими технику и наш быт, т.е. с физикой, химией и т.п. Сегодня сделать это несложно, поскольку современная астрономия, в большей своей степени, это астрофизика, астрохимия и даже астробиология. Разумеется, «земные» науки связаны с экспериментом в контролируемых условиях, что невозможно осуществить с небесными телами. Но эксперимент можно ставить не только в лаборатории: природа постоянно ставит эксперименты без нашего участия. Нужно лишь научиться за ними наблюдать. И если лабораторный эксперимент – это точность, то астрономические наблюдения – это диапазон.

Физика

Свойства вещества очень сильно зависят от его плотности: сравните воду в состоянии пара, жидкости и льда. Многие свойства атомов можно изучать только при крайне низких плотностях, когда каждый атом «сам по себе» и не взаимодействует с соседями. В лаборатории предельно низкие плотности называют сверхвысоким вакуумом; сегодня это 10^9 частиц в куби-



Солнечная корона во время затмения

Туманность Ориона – облако межзвездного газа

ческом сантиметре. А насколько низкие плотности достижимы в «космической лаборатории»?

Во время солнечного затмения мы видим сияющую корону Солнца; ее плотность $10^8 - 10^9$ см$^{-3}$. На Земле это сверхвысокий вакуум, а в космосе – весьма ощутимая среда. Удаляясь от Солнца, мы видим, как солнечная корона, превращаясь в поток солнечного ветра, становится все менее и менее плотной. У орбиты Земли плотность солнечного ветра снижается до 10 см$^{-3}$. Примерно такую же плотность имеют облака межзвездного газа, а между этими облаками межзвездное пространство еще разреженнее – всего лишь 1 см$^{-3}$, а то и меньше. Это в миллиард раз меньше плотности самого высокого лабораторного вакуума. Атомы в таких условиях могут долго оставаться в одиночестве, не взаимодействуя с другими атомами. При этом проявляются их свойства, недоступные изучению в лаборатории, например возбужденные состояния с большим временем жизни. Переходы из таких состояний в состояния с меньшей энергией «запрещены», т.е. происходят крайне редко, поэтому соответствующие линии в спектре излучения тоже называют запрещенными. В лаборатории такой возбужденный атом обязательно столкнется с соседом и передаст ему энергию без излучения. А в разреженном космосе атом долго может летать без столкновения, пока не излучит запрещенную линию. Поэтому именно в спектрах межзвездных облаков были обнаружены и изучены запрещенные переходы в атомах, что заметно продвинуло атомную физику.

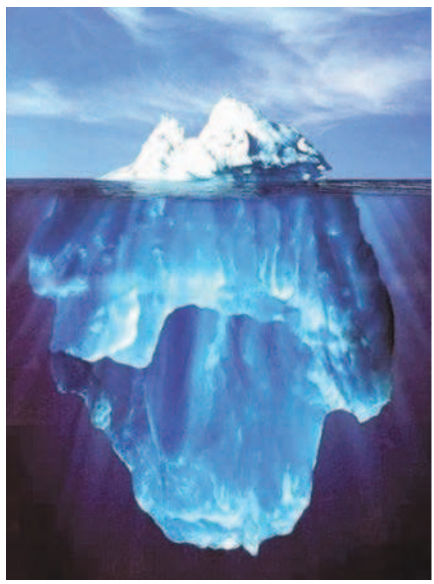
Но межзвездная среда – это еще не предел пустоты. Межгалактический газ в скоплениях галактик имеет плотность $10^{-4} - 10^{-2}$ см$^{-3}$, в пространстве между скоплениями вещества – еще меньше. А средняя концентрация атомов во Вселенной – около $3 \cdot 10^{-7}$ см$^{-3}$, иными словами – один атом (водорода) в кубометре пространства. Вот это астрономы и называют сверхвысоким вакуумом: в миллион миллиардов раз лучше, чем в лаборатории!

Теперь обратимся к высоким плотностям. Изучать вещество при сильном сжатии очень важно – хотя бы для того, чтобы понять, как оно ведет себя в недрах Земли. Из природных материалов высокой плотности мы знакомы со свинцом (11 г/см^3), золотом (19 г/см^3), осмием (23 г/см^3). Максимальные плотности и давления, достигнутые в лабораториях на прессах с алмазными наковальнями, близки к тем, которые мы имеем в ядре Земли. До условий, царящих в недрах планет-гигантов, лабораторные установки еще не дотягивают. Что уж говорить о ядре Солнца, где плазма сжата до плотности 150 г/см^3 и мы имеем возможность изучать ее поведение, регистрируя приходящие оттуда нейтрино. А звезды постарше нашего Солнца, уже завершившие свою эволюцию, оставляют после себя остывающие ядра – белые карлики. Плотность их вещества с трудом укладывается в нашей фантазии: $10^5 - 10^8$ г/см^3. Это же 100 тонн в наперстке! И таких объектов вокруг нас много; астрономы изучают их уже второе столетие.

Но остатки эволюции массивных звезд еще удивительнее – это нейтронные звезды, имеющие плотность $10^{13} - 10^{14}$ г/см^3. Тут уже наша фантазия окончательно сдается – ведь это 100 млн тонн в наперстке! Никогда на Земле мы не получим вещество при такой плотности в макроскопических количествах. А изучать его в космосе вполне возможно. Обнаружены же тысячи нейтронных звезд, и мы можем следить за их поведением и наблюдать их поверхность. Кстати, вблизи их поверхности существуют фантастические магнитные поля с индукцией до 10^{11} Тс, тогда как в лаборатории мы может создавать лишь до 10^4 Тс. Разрыв в 10 миллионов раз! Вряд ли в обозримое время его удастся преодолеть. А изучать поведение вещества в магнитных полях нейтронных звезд мы можем уже сегодня. И это поведение поистине удивляет. Например, атом водорода, помещенный в такое поле, из шарика превращается в ниточку (вспоминаем силу Лоренца). А если вычислить плотность массы магнитного поля с индукцией $B = 10^{11}$ Тс, то получим не менее удивительный результат: $\rho_B = B^2/\left(2\mu_0 c^2\right) = 40\ \text{т}/\text{см}^3$. Вы только подумайте: 40 тонн массы в каждом кубическом сантиметре пустоты, пронизанной магнитным полем! И эти условия доступны для изучения, космос дарит их нам. Нейтронные звезды с рекордными магнитными полями, так называемые магнитары, сейчас активно исследуются астрофизиками.

Еще один «космический бонус» для физики – это частицы высокой энергии, которые физики используют для зондирования внутренней структуры элементарных частиц и рождения новых их типов, ранее неизвестных ученым. Чем выше энергия частицы-ударника, тем интереснее результаты. Большой адронный коллайдер способен разгонять протоны до энергии 10^{13} эВ. Проект Очень большого адронного коллайдера (VLHC) предусматривает энергию 10^{14} эВ. Вряд ли в обозримое время будет создано что-либо более мощное. А из космоса в составе галактических космических лучей к нам прилетают протоны с энергией до 10^{20} эВ, в миллионы раз энергичнее тех, что разгоняет коллайдер. Ускоритель с такой энергией вообще нельзя построить на Земле, поскольку его размер был бы больше, чем у самой планеты. Не говоря уже о его стоимости. А из космоса быстрые частицы прилетают к нам бесплатно. Академик Яков Борисович Зельдович говорил, что Вселенная – это ускоритель для бедных. Но, как видим, и самые богатые не способны создать такой ускоритель, который бы конкурировал со Вселенной.

Крабовидная туманность. Это остаток взорвавшейся массивной звезды, в центре которого находятся ее сохранившееся ядро – нейтронная звезда



Физический «айсберг»: что мы знаем, а что предстоит узнать

И наконец, именно астрономия указала физикам на существование в природе двух таинственных сущностей – темной материи и темной энергии. Поисками темной материи (а точнее – темного вещества) активно заняты сейчас физики-экспериментаторы. Понять антигравитационную сущность темной энергии пытаются физики-теоретики. Без астрономических наблюдений мы бы никогда не узнали о существовании этих двух загадочных объектов природы, заполняющих Вселенную своей массой-энергией на 95%. Можно лишь восхищаться тем, что, наблюдая 2% массы Вселенной (звезды, межзвездный газ, планеты), астрономы смогли узнать о существовании и некоторых свойствах невидимых 98% массы Вселенной. Это открывает перед физикой захватывающую перспективу: изучение нашего мира, по сути, только начинается!

Техника

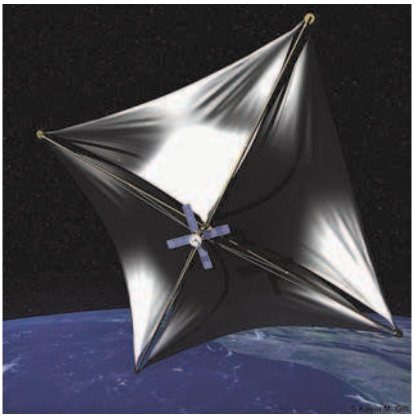
Астрономия, как и другие ветви естествознания, использует самые современные технологии и сама стимулирует их развитие. Можно вспомнить, что запущенный в 1990 году на орбиту космический телескоп «Хаббл» сначала давал некачественные изображения, поскольку его объектив страдал сильной аберрацией. Для исправления этого недостатка и восстановления качества изображения были развиты мощные математические методы решения обратной задачи, в дальнейшем нашедшие применение в компьютерной томографии.

Для улучшения качества изображений, полученных наземными оптическими телескопами, сейчас развиваются методы активной и адаптивной оптики. Результаты поразительны: испорченное неоднородной атмосферой Земли изображение космического объекта удается в реальном времени восстановить почти до идеального состояния, как будто бы телескоп работает за пределом атмосферы, а не на дне воздушного океана.

Изучение Солнечной системы сегодня в значительной степени опирается на космонавтику и автоматические межпланетные зонды. Это стало неотъемлемой частью астрономии. При этом космические условия ставят перед техникой небывалые задачи. Созданы зонды, работавшие на поверхности Титана при температуре –180 °C и на поверхности Венеры с температурой +460 °C . Марсоход «Opportunity» (NASA) уже 14 лет путешествует без ремонта по Красной планете, а некоторые межпланетные аппараты в условиях высокой космической радиации исправно несут службу уже более 40 лет! Надежность и миниатюрность современной бытовой электроники в значительной степени обязана технологиям, развитым при создании этих космических зондов.

Но астрономы не останавливаются на прямом исследовании планет Солнечной системы. За последние годы открыты тысячи планет у соседних звезд, и к некото-

Марсоход «Opportunity»

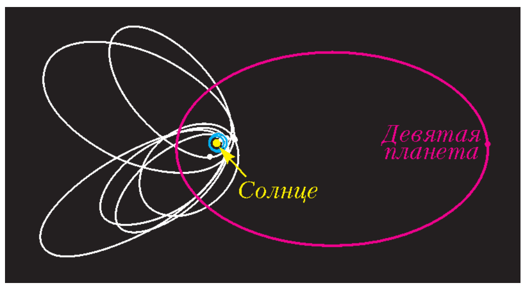


Межзвездный микрозонд со световым парусом рым из них тоже хотелось бы послать автоматических разведчиков. Еще недавно это казалось чистой фантазией, поскольку межзвездные перелеты требуют околосветовых скоростей. Но в этом направлении уже ведется практическая работа. Проект Breakthrough Starshot предполагает создание сверхмалого исследовательского аппарата, который отправится со скоростью $1/5$ от скорости света к планетам ближайших звезд (α Кентавра и др.) с помощью светового паруса, «надуваемого» излучением огромной системы лазеров, использующих адаптивную оптику. Это уже не фантазия, а практическая работа, объединившая в себе астрономию, космонавтику и нанотехнологии.

Математика

Казалось бы, связь математики с астрономией очевидна: математический аппарат – это инструмент естествознания. Действительно, в большинстве случаев в астрономии математика играет служебную роль: астроном, прочесывая небо телескопом, открывает новые объекты, а затем математика помогает ему вычислить орбиту обнаруженного тела. Но бывает и подругому. Французский математик Урбен Леверье (1811–1877), анализируя движение планеты Уран, случайно открытой Уильямом Гершелем (1738–1822), понял, что в Солнечной системе есть еще одно массивное тело, и предсказал существование новой планеты на периферии Солнечной системы. Основываясь на отклонении Урана от расчетной траектории, Леверье вычислил положение неизвестной планеты, и по его указанию астрономы тут же ее обнаружили: Нептун был открыт 23 сентября 1846 года, как говорили тогда, «на кончике пера».

Повторялось ли подобное математическое чудо в истории астрономии? Пока нет. Даже попытка самого Леверье предсказать еще одну планету рядом с Солнцем, внутри орбиты Меркурия, оказалась безуспешной: планета Вулкан (так ее заранее назвали) не существует, а «неправильности» в движении Меркурия объяснила общая теория относительности Эйнштейна. Но, кажется, сейчас мы вновь стоим на пороге математического открытия большой планеты; на сей раз не на кончике пера, а на мониторе компьютера. Исследователи из Калифорнийского технологического института Майк Браун и Константин Батыгин в 2016 году опубликовали статью, в которой высказали гипотезу о существовании в Солнечной системе планеты массой более 10 земных и размером примерно с Нептун. Новая планета, которую исследователи называют Девятой планетой, может обращаться вокруг Солнца с периодом в десятки тысяч лет. На ее существование указывает анализ орбит обнаруженных за последние годы крупных астероидов и карликовых планет на далекой периферии Солнечной системы, в поясе Койпера. Их орбиты распределены не хаотично, а в определенном порядке. Математическое моделирование показало, что «дирижирует» их движением неизвестное массивное тело – Девятая планета.



Орбиты внешних тел Солнечной системы и предполагаемая орбита гипотетической Девятой планеты

Ее орбита приблизительно известна, но положение планеты на орбите математическая модель предсказать не может. Уже два года астрономы ищут эту планету, но задача непростая: из-за удаленности от Солнца Девятая планета должна выглядеть весьма тускло. Для ее поиска нужны самые зоркие телескопы, а они в дефиците. Но, как известно, кто ищет, тот всегда найдет.

(Продолжение следует)

Выход в пространство-2

В.ПРОТАСОВ

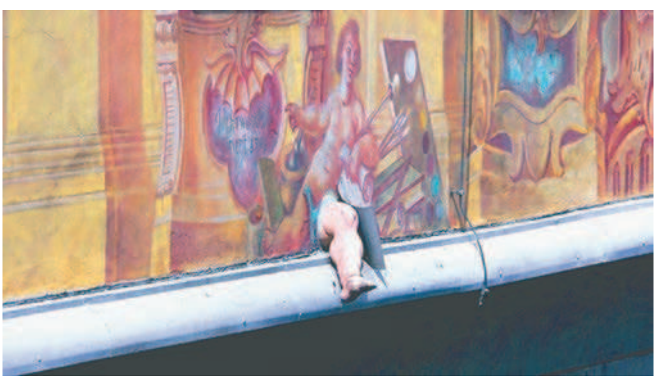
И я выхожу из пространства
В запущенный сад величин
И мнимое рву постоянство
И самосознанье причин.

О.Э.Мандельштам, 1935

Невозможное на плоскости осуществимо в трехмерном пространстве!

И.Ф.Шарыгин, 1975

В ОЧЕНЬ ДАЛЕКОМ УЖЕ 1975 ГОДУ Игорь Федорович Шарыгин (1937–2004) опубликовал в «Кванте» статью «Выход в пространство» (статья была перепечатана в «Кванте» №7 за 2017 г.). В ней он собрал замечательную коллекцию планиметрических задач, в решении которых использовались трехмерные конструкции. В каждой из этих задач, перефразируя известное изречение Адамара, ближайший путь между двумя истинами в плоскости лежал через трехмерное пространство. А в 1993 году вышел новый вариант этой статьи под названием «Геометрический стереоскоп», дополненный новыми интересными и порой неожиданными примерами (авторы статьи – В.Дубровский, И.Шарыгин). За прошедшие с тех пор четверть века многое было открыто и переосмыслено. Появились новые задачи, изменилось понимание старых. Когда объем свежего материала превысил критическую отметку, мы решили вернуться к этой теме. А название оставили прежним (автору не удалось придумать более удачный заголовок), лишь добавив к нему цифру 2, как делают в таких случаях кинематографисты, возвращаясь к полюбившимся сюжетам.



Две задачи

Начнем с двух совершенно разных задач, связанных одной идеей. Первая является обобщением известной задачи о шести спичках.

Задача 1. *Можно ли из 10 спичек сложить одновременно 10 равносторонних треугольников со стороной, равной длине спички?*

Первое, что приходит в голову, – сложить три треугольника, одна спичка при этом останется. Можно экономить спички, складывая треугольники с общими сторонами. Например, сделать две пары треугольников (рис.1,*а*). Потратим ровно 10 спичек, но треугольников по-прежнему мало. Соединим эти пары в одну фигуру, при этом освободится одна спичка (рис.1,*б*). Теперь можно выйти в пространство и согнуть эту фигуру, совместив точки A и E (условие задачи это не запрещает), освободив еще одну спичку (OE). Треугольников по-прежнему четыре. Что дальше? Если точки B и D соединить одной из двух свободных спичек, то получается фигура из двух пирамид (рис.1,*в*). Считаем треугольники – получаем 7! Одна спичка остается. Если бы ей можно было соединить точки A и C, то добавились бы еще три треугольника (CAB, CAD и CAO) и задача была бы решена. Мы почти у цели! Но увы! Расстояние AC, как несложно подсчитать, равно $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$,

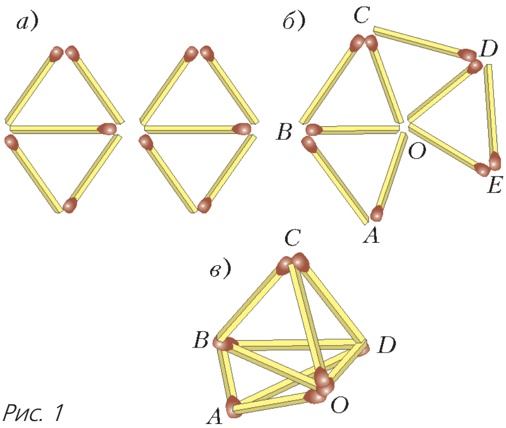


Рис. 1

это больше 1. Так можно ли сложить 10 треугольников?

Во второй задаче требуется сложить из плоского листа бумаги поверхность *тора* – фигуры, похожей на бублик (рис.2).

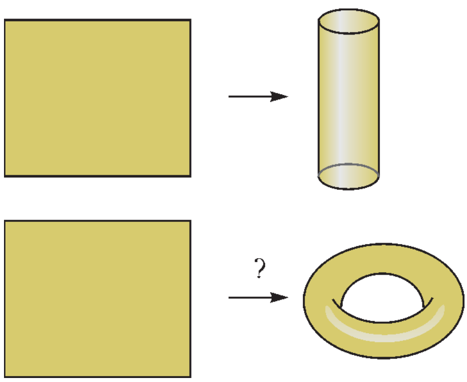


Рис. 2

Задача 2. *Можно ли свернуть прямоугольный лист бумаги так, чтобы получить тор? (Рвать и растягивать бумагу запрещается, можно только сворачивать.)*

Прямоугольный лист легко свернуть в «трубочку», т.е. в цилиндр. Но дальше свернуть этот цилиндр в тор, и даже просто согнуть его, не получается. Силач может согнуть железную трубу, но поверхность трубы при этом растянется, так делать нельзя. Можно прямоугольный лист свернуть в конус (хотя при этом останется неиспользованный кусок). А в тор?

На математическом языке эта задача звучит так:

Можно ли плоскую фигуру перевести в тор изометрическим преобразованием, которое сохраняет длины всех линий на поверхности?

Как мы видели, участки плоскости можно изометрически преобразовать в цилиндр и в конус.

Изометрическое преобразование куска плоскости в кусок сферы – мечта всех картографов! При этом плоские карты можно было бы переводить на глобус с сохранением всех расстояний. Но увы, это невозможно. Сфера даже локально не изометрична плоскости. Доказать это просто. Возьмем сферу радиуса 1, точку M на ней и рассмотрим множество всех точек сферы, удаленных от M на маленькое расстояние a. Расстояние на сфере – это длина дуги большого круга, проходящего через центр сферы. Из произвольной точки A этого множества опустим перпендикуляр AK на прямую OM (рис.3). Ясно, что его длина

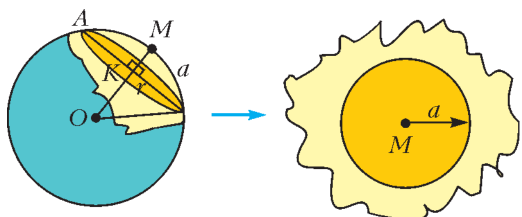


Рис. 3

r меньше, чем a (длина дуги AM). Наше множество – окружность радиуса r с центром K, ее длина равна $2\pi r$. Если кусок сферы можно изометрически отобразить на плоскость, то эта окружность перейдет в окружность радиуса a и длиной $2\pi a$. Длина окружности увеличилась, значит, это – не изометрия.

Итак, сфера не изометрична плоскости. А тор? Доказать так же просто, как для сферы, не получается. Можно поэкспериментировать с велосипедной покрышкой. Вроде, никакой ее кусок не разворачивается на плоскость. И тем не менее...

Как ни странно, между двумя этими задачами есть общее. За ними стоит одна и та же идея. Мы вернемся к ним в конце статьи, а сначала рассмотрим несколько важных примеров из геометрии, которые решаются с помощью выхода в пространство.

Выход в пространство решает планиметрические задачи

Снова начнем с задачи, но ее, в отличие от двух предыдущих, решим сразу.

Задача 3. *На плоскости даны два не пересекающихся круга. Найдите множество точек K, отношение длин касательных из которых к данным кругам равно заданному числу $k > 0$ (рис.4).*

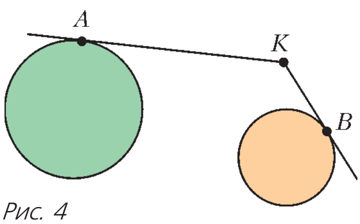


Рис. 4

Даже частные случаи этой задачи весьма интересны. Например, если каждая из окружностей вырождается в точку. В этом случае длина касательной превращается в расстояние до этой точки. Получаем множество точек, отношение расстояний от которых до двух данных точек равно k. Это – окружность Аполлония (о ней можно прочитать, например, в статье Г.Филипповского «Досье» на окружность Аполлония» в «Кванте» №4 за 2004 г.). Если $k = 1$, то для любой пары кругов данное множество – прямая, перпендикулярная их линии центров (радикальная ось). А каков ответ в общей ситуации?

Даже «хорошие» частные случаи не проясняют дело. Например, какой будет ответ для равных кругов при произвольном k? Или для точки и круга? Самое естественное решение – методом координат (попробуйте!). Но все же геометрическое решение есть!

Вначале сделаем небольшие приготовления. Мы перейдем к более общей задаче, когда круги могут пересекаться. А отношение длин касательных заменим на отношение степеней точки относительно окружностей. Напомним, что степень точки M относительно окружности равна $d^2 - r^2$, где r – радиус окружности, а d – расстояние от ее центра до M. Если M лежит внутри окружности, то ее степень отрицательна, а если вне – положительна и равна квадрату длины касательной из точки M. Итак, задача принимает такой вид.

Задача 3′. *Найдите множество точек плоскости, отношение степеней которых относительно двух заданных окружностей равно данному числу m.*

Задача стала гораздо более общей: раньше круги не пересекались и число $m = k^2$ было положительно; теперь и круги и число произвольны. А решение будет проще! Кажется парадоксальным, но за этим стоит важный принцип: если не получается доказать утверждение, попробуйте сначала его обобщить и усилить, а уж потом доказать. Как писал известный математик Дьёрдь Пойя: «Доказать больше иногда проще».

Еще нам понадобится такая лемма.

Лемма 1. *Даны две окружности, пересекающиеся в точках C и D, а также число $m \neq 1$. Через C проводится произвольная прямая, пересекающая окружности второй раз в точках M и N, и на ней выбирается точка K, для которой $KM/KN = m$. Тогда K описывает окружность, проходящую через точки C и D. В случае $m = 1$ – описывает прямую CD.*

(Отрезки мы считаем направленными; отношение одинаково направленных отрезков положительно, а разнонаправленных – отрицательно.)

Доказательство (рис.5). Возьмем на первой окружности точку M', диаметрально противоположную C, и, аналогично, на второй окружности – точку N'. Тогда прямая $M'N'$ содержит точку D и перпендикулярна CD, а четырехугольник $MNN'M'$ – прямоугольная трапеция. Если взять на ее боковой стороне $M'N'$ (или на продолжении) точку K', для которой $K'M'/K'N' = m$, то отрезок $K'K$ будет параллелен основаниям трапеции и, следовательно, перпендикулярен MN. Итак, $\angle K'KC = 90^\circ$, значит, точка K описывает окружность с диаметром $K'C$. В случае $m = 1$ получаем $M = N$, поэтому точка K должна лежать на прямой CD.

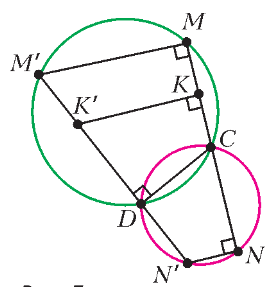


Рис. 5

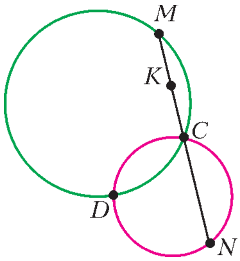


Рис. 6

Теперь легко решить задачу 3, но только для *пересекающихся* кругов. Пусть они пересекаются в точках C и D (рис.6). Для произвольной точки K проведем прямую KC, которая повторно пересекает окружности в точках M и N. Степень точки K относительно первой окружности равна $KC \cdot KM$, а относительно второй – $KC \cdot KN$. Поэтому отношение степеней равно $KM/KN = m$. Остается воспользоваться леммой.

Итак, *если окружности пересекаются, то ответ в задаче – окружность, проходящая через точки их пересечения (в случае $m = 1$ – прямая).*

А если окружности не пересекаются, как и было изначально в задаче 3? Тогда это решение не проходит. Странная ситуация, не правда ли? Вот здесь нам и поможет **выход в пространство**.

Решение задачи 3. Проведем через каждую из наших окружностей по сфере, причем так, чтобы эти сферы пересекались. Так всегда можно сделать (почему?). Для двух сфер верен полный аналог леммы 1: множество точек K, для которых $KM/KN = m$, где MN – произвольный отрезок с концами на сферах, проходящий через заданную общую точку сфер C, является сферой. Причем в доказательстве ничего не изменится – убедитесь в этом сами. Поэтому и решение задачи 3′ для пересекающихся сфер будет таким же: множество точек, отношение степеней которых равно m, является сферой (при $m = 1$ – плоскостью), проходящей через окружность пересечения данных сфер. А пересечение этой сферы с плоскостью, в которой располагаются наши окружности, и дает ответ в задаче 3. Искомое множество – окружность, а при $m = 1$ – прямая.

Вывод. Что произошло? Мы смогли решить задачу 3, но только для *пересекающихся* окружностей, и даже обобщить решение на пересекающиеся сферы. А с

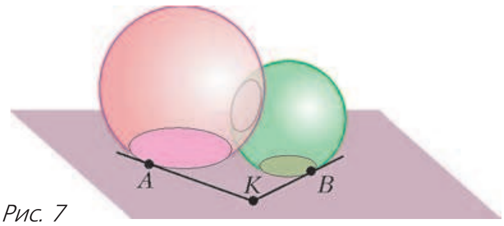


Рис. 7

непересекающимися окружностями поступили так: вышли в пространство, провели через эти окружности пересекающиеся сферы (рис.7) и таким образом свели задачу к первому случаю. Итак, выход в пространство обеспечил нам дополнительную степень свободы.

В упражнениях 1–4 даны несколько планиметрических задач, которые решаются выходом в пространство.

Упражнения

1. Существуют ли восемь точек на плоскости, которые можно покрасить в два цвета так, чтобы для любых трех точек одного цвета нашлась бы четвертая точка другого цвета, образующая с этими тремя вершины параллелограмма?

Указание. Попробуйте сначала окрасить так вершины куба.

2. Через центр правильного треугольника ABC провели произвольную прямую l, пересекающую стороны AB и BC в точках D и E. Построили точку F такую, что $AE = FE$ и $CD = FD$. Докажите, что расстояние от точки F до прямой l не зависит от выбора этой прямой.

Указание. Постройте на данном треугольнике правильный тетраэдр.

3. На плоскости даны четыре прямые общего положения. По первым двум плывут пароходы A и B, по двум другим – пароходы C и D. Все скорости постоянны. Известно, что A и B встречаются между собой, а также встречают каждый из пароходов C и D. Докажите, что C и D также встречаются между собой.

Указание. Нарисуйте графики движения пароходов в трехмерной системе координат.

В 2000 году венгерский математик А.Хрaшко нашел геометрическое доказательство знаменитой теоремы о зигзаге. До этого были два доказательства, оба аналитические и довольно сложные (саму теорему можно посмотреть в статье A.Hrasko, «Poncelet-type problems, an elementary approach», Elem. Math. 55 (2000), 45–62). Новое доказательство использовало выход в пространство! А его ключевое утверждение, которое мы предлагаем вам доказать, интересно само по себе (мы несколько изменили формулировку):

Упражнение 4 (A.Hrasko, 2000). На плоскости дана окружность, и внутри нее – вторая окружность. Кузнечик прыгает с одной окружности на другую и обратно с постоянной длиной прыжка. Получается ломаная $A_1A_2A_3A_4\ldots$, в которой все звенья равны, вершины с нечетными номерами лежат на первой окружности, с четными – на второй. Докажите, что отрезки A_1A_3, A_3A_5, A_5A_7, … касаются одного эллипса.

Указание. Проведем через вторую окружность произвольную сферу радиусом, большим радиуса окружности. Также проведем сферу с центром A_{2k} и радиусом, равным длине прыжка. Докажите, что общая плоскость этих сфер проходит через фиксированную точку для всех k. Затем воспользуйтесь таким вспомогательным фактом.

Вспомогательный факт (без доказательства). На плоскости α дана окружность и даны точки A и B вне плоскости, причем проекция A на α лежит внутри окружности. По окружности движется точка M, а через точку B проводится плоскость, перпендикулярная AM. Тогда она пересекает α по прямой, касающейся фиксированного эллипса.

(Продолжение следует)

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

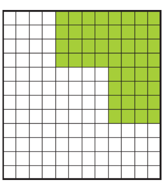
Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач. Они рассчитаны в первую очередь на учащихся 7–9 классов, но мы будем рады участию школьников всех возрастов. Конкурс проводится совместно с журналом «Квантик».

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором Вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

13. Докажите, что произведение любых трех последовательных натуральных чисел является площадью некоторого прямоугольного треугольника, все стороны которого являются целыми числами.

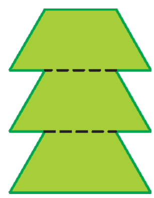
А.Бирюлин (ученик 5 класса)



14. На доске 12×12 некоторые клетки вымазали краской. Сколькими способами можно поставить 12 ладей так, чтобы они не били друг друга и ни одна ладья не испачкалась краской?

П.Кожевников

15. Николаю Ивановичу, любителю занимательных задач, нравится наряжать игрушками-головоломками новогоднюю елку для внуков. Он приготовил из плотной бумаги правильный тетраэдр (треугольную пирамидку из равносторонних треугольников). Затем надрезал его, развернул и получил многоугольник-елочку (она составлена симметрично из трех равных половинок правильного шестиугольника. Как ему это удалось?



А.Домашенко

16. В школьном химическом кабинете имеются двухчашечные весы с набором из n гирек массами 1 г, 2 г, …, n г. Коля разложил все эти гирьки по чашкам весов так, что они уравновесились. Петя хочет убрать часть гирек, но так, чтобы равновесие сохранилось. Какое наименьшее количество гирек ему потребуется снять, чтобы гарантированно добиться успеха (как бы ни были разложены гирьки по чашкам)?

И.Акулич

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи M2490, M2491а, б, в предлагались на XXXIX Турнире городов.

Задачи M2490–M2493, Ф2497–Ф2500

M2490. Было 100 дверей, у каждой свой ключ (отпирающий только эту дверь). Двери пронумерованы числами 1, 2, … …, 100, ключи тоже пронумерованы, но, возможно, с ошибками: номер ключа совпадает с номером двери или отличается на 1. За одну попытку можно выбрать любой ключ, любую дверь и проверить, подходит ли этот ключ к этой двери. Можно ли гарантированно узнать, какой ключ какую дверь открывает, сделав не более: а) 99 попыток; б) 75 попыток; в) 74 попыток?

А.Лебедев, А.Шаповалов

M2491. Кусок сыра надо разрезать на части с соблюдением таких правил:

1) вначале режем сыр на 2 куска, затем один из них режем еще на 2 куска, затем один из трех кусков опять режем на 2 куска и т.д.;

2) после каждого разрезания части могут быть разными по весу, но отношение веса любой части к весу любой другой должно быть строго больше заданного числа R.

а) Докажите, что при $R = 0{,}5$ можно резать сыр так, что процесс никогда не остановится (после любого числа разрезаний можно будет отрезать еще один кусок).

б) Докажите, что если $R > 0{,}5$, то процесс резки когда-нибудь остановится.

в) На какое наибольшее число кусков можно разрезать сыр, если $R = 0{,}6$?

г) Докажите, что если при данном R сыр можно разрезать на 11 кусков, то его также можно разрезать и на 12 кусков.

А.Толпыго

M2492. В неравнобедренном треугольнике ABC проведены медианы AA_0, BB_0, CC_0 и высоты AA_1, BB_1, CC_1. Пусть A_2 – точка пересечения окружностей, описанных около треугольников BA_1B_0 и CA_1C_0, отличная от точки A_1. Аналогично определим точки B_2 и C_2. Докажите, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке.

Т.Ковалев, А.Львов (ученики 9 класса)

M2493. Внутри треугольника $A_1A_2A_3$ взяты точки $A_4, A_5, \ldots, A_n$ так, что среди точек $A_1, \ldots, A_n$ нет трех точек на одной прямой. Аналогично, внутри треугольника $B_1B_2B_3$ взяты точки $B_4, B_5, \ldots, B_n$ так, что среди точек $B_1, \ldots, B_n$ нет трех точек на одной прямой. Дан набор M трехэлементных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots$ $\ldots, n\}$. Пусть A – множество треугольников вида $A_iA_jA_k$, $i < j < k$, где $\{i, j, k\} \in M$, аналогично, B – множество треугольников вида $B_iB_jB_k$, $i < j < k$, где $\{i, j, k\} \in M$. Известно, что треугольники множества A образуют разбиение треугольника $A_1A_2A_3$. Докажите, что любая точка, лежащая внутри треугольника

$B_1B_2B_3$, не лежащая на сторонах треугольников множества B, покрыта нечетным количеством треугольников множества B.

А.Савин, А.Канель-Белов

Ф2497. В журнале «Физика в школе» было опубликовано такое условие задачи: «Свободно падающее с ускорением $g = 10$ м/с^2 тело спустя некоторое время после начала движения оказывается на высоте $h_1 = 300$ м над землей, а еще через время $\Delta t = 10$ с – на высоте $h_2 = 120$ м над землей. С какой высоты падало тело?» И был дан такой ответ: «$H \approx 1531$ м». Найдите две опечатки (по одному символу в каждой) в опубликованном материале.

У.Страшов

Ф2498. Стенки пластиковой бутылки от сильно газированного напитка могут выдержать давление (изнутри) $p = 10$ атм. В такую бутылку емкостью $V = 1$ л налили $V/2$ жидкого азота, закрыли бутылку пробкой и положили на асфальт, накрыв бутылку сверху пустым жестяным ведром емкостью 10 л и массой 1 кг. Через некоторое время произошел взрыв. Ведру достался 1% внутренней энергии газа внутри бутылки до взрыва. Оцените высоту подъема ведра над местом старта. Температура кипения жидкого азота при давлении $p = 10$ атм равна примерно $T = 100$ К. Плотность ρ жидкого азота примерно равна плотности воды $\rho_{\text{в}} = 1$ г/см^3.

А.Зотов

Ф2499. Длина круговой траектории протонов в Большом адронном коллайдере (БАК) равна $L = 26659$ м. Индукция магнитного поля, направленного перпендикулярно плоскости траектории, равна $B = 7{,}5$ Тл. Вычислите разницу между скоростью света и скоростью протонов в коллайдере.

С.Дмитриев

Ф2500. Сплошной прозрачный цилиндр, изготовленный из материала, коэффициент преломления которого зависит от расстояния r между местом в цилиндре и его осью симметрии по «закону»

$$n = 1 + (n_0 - 1)\cdot\left(1 - (r/r_0)^2\right).$$

Здесь r_0 – это радиус цилиндра, $n_0 = 1{,}2$. Узкий луч лазера падает перпендикулярно на торец цилиндра в направлении, параллельном оси цилиндра, в точку, расположенную на расстоянии $r_0/10$ от оси цилиндра. По какой траектории движется лазерный луч внутри цилиндра?

С.Муравьев

Решения задач М2478–М2481, Ф2485–Ф2488

М2478. *Дана «таблица умножения» $n \times n$, т.е. таблица, в которой на пересечении строки с номером k и столбца с номером m записно число km (на рисунке показана*

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

таблица умножения 6×6). Клетки таблицы покрасили в шахматном порядке так, что клетка с числом 1 – черная. Найдите сумму чисел во всех черных клетках.

Можно рассмотреть более общую «таблицу умножения» $m \times n$, строки которой помечены числами $a_1, a_2, \ldots, a_m$, столбцы – числами $b_1, b_2, \ldots, b_n$, а на пересечении строки с номером i и столбца с номером j записано произведение a_ib_j. Сумма всех чисел в таблице равна $(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$, это становится понятно из раскрытия скобок. Также заметим, что произведение знакопеременных сумм $(a_1 - a_2 + a_3 - \ldots)(b_1 - b_2 + b_3 - \ldots)$ даст разность суммы чисел, стоящих в черных клетках, и суммы чисел, стоящих в белых клетках. Действительно, каждое произведение a_ib_j после раскрытия скобок встретится со знаком «+», если $i + j$ четно (т.е. для черной клетки), и со знаком «−», если $i + j$ нечетно (т.е. для белой клетки). Итого, сумма чисел в черных клетках будет равна

$$S=\frac{1}{2}\Big(\left(a_1+a_2+\ldots+a_m\right)\left(b_1+b_2+\ldots+b_n\right)+$$
$$+\left(a_1-a_2+a_3-\ldots\right)\left(b_1-b_2+b_3-\ldots\right)\Big).$$

В нашем случае $m = n$, $a_i = b_i = i$ каждая из сумм $a_1+a_2+\ldots+a_m$ и $b_1+b_2+\ldots+b_n$ равна $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, а каждая из знакопеременных сумм $a_1-a_2+a_3-\ldots$, $b_1-b_2+b_3-\ldots$ равна $1-2+3-\ldots$ $\ldots+(-1)^{n+1}n$. Последнее выражение равно $-k$ при четном $n = 2k$ и равно k при нечетном $n = 2k - 1$.

Таким образом, при $n = 2k$ имеем

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}+k^2\right)=k^2\left(2k^2+2k+1\right),$$

а при $n = 2k - 1$ получаем

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}+k^2\right)=k^2\left(2k^2-2k+1\right).$$

П.Кожевников

M2479. Решение – в статье А.Заславского «Приключения одной задачи».

M2480. *Для любых натуральных чисел m и n докажите неравенства:*

а) $\frac{1}{2\cdot\sqrt[m]{1}}+\frac{1}{3\cdot\sqrt[m]{2}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\cdot\sqrt[m]{n}}<m$;

б) $\frac{1}{1\cdot\sqrt[m]{2}}+\frac{1}{2\cdot\sqrt[m]{3}}+\ldots+\frac{1}{n\cdot\sqrt[m]{n+1}}<\frac{1}{\sqrt[m]{2}-1}$.

а) Для выражения $x_k=\frac{1}{(k+1)\sqrt[m]{k}}$ докажем оценку $x_k\le m\left(\frac{1}{\sqrt[m]{k}}-\frac{1}{\sqrt[m]{k+1}}\right)$. Тогда, складывая такие неравенства по k = 1, 2, …, получим требуемое.

Положим $\sqrt[m]{k}=a$, $\sqrt[m]{k+1}=b$. Тогда

$$x_k=\frac{1}{b^ma}=\frac{a^{m-1}}{b^ma^m}=a^{m-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=$$
$$=a^{m-1}\left(\frac{1}{a^m}-\frac{1}{b^m}\right)=$$
$$=a^{m-1}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a^{m-1}}+\frac{1}{a^{m-2}b}+\ldots+\frac{1}{b^{m-1}}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{m-1}+\left(\frac{a}{b}\right)^{m-2}+\ldots+1\right)\le$$
$$\le m\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

– нужная нам оценка получена.

б) Для выражения $y_k=\frac{1}{k\sqrt[m]{k+1}}$ докажем оценку $y_k\le\frac{1}{\sqrt[m]{2}-1}\left(\frac{1}{\sqrt[m]{k}}-\frac{1}{\sqrt[m]{k+1}}\right)$. Складывая такие неравенства по k = 1, 2, …, получим требуемое.

Так же, как и в решении пункта а), положим $\sqrt[m]{k}=a$, $\sqrt[m]{k+1}=b$. Тогда

$$y_k=\frac{1}{ba^m}=\frac{b^{m-1}}{b^ma^m}=b^{m-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=$$
$$=b^{m-1}\left(\frac{1}{a^m}-\frac{1}{b^m}\right)=$$
$$=b^{m-1}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a^{m-1}}+\frac{1}{a^{m-2}b}+\ldots+\frac{1}{b^{m-1}}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{m-1}+\left(\frac{b}{a}\right)^{m-2}+\ldots+1\right).$$

Так как $\frac{b}{a}\le\sqrt[m]{2}$, то

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{m-1}+\left(\frac{b}{a}\right)^{m-2}+\ldots+1\le$$
$$\le\left(\sqrt[m]{2}\right)^{m-1}+\left(\sqrt[m]{2}\right)^{m-2}+\ldots+1=$$
$$=\frac{\left(\sqrt[m]{2}\right)^m-1}{\sqrt[m]{2}-1}=\frac{1}{\sqrt[m]{2}-1},$$

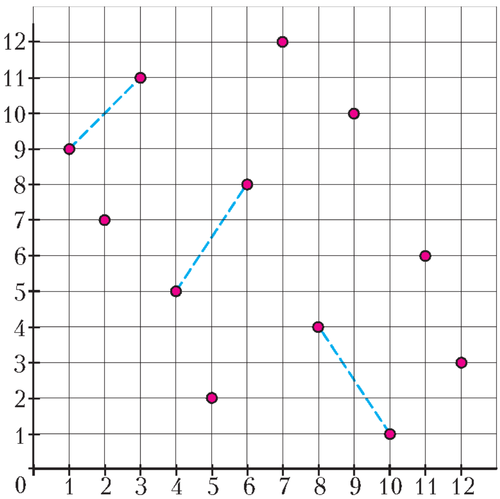
значит, мы получили желаемую оценку.

А.Егоров

M2481*. *Дано натуральное число $N > 2$. В шеренгу выстроена команда из $N(N+1)$ футболистов, среди которых нет двух футболистов одинакового роста. Сэр Алекс хочет удалить из шеренги $N(N-1)$ игроков так, чтобы остался ряд из $2N$ игроков, для которого выполнены следующие N условий: (1) никто не стоит между двумя самыми высокими иг-*

роками, (2) никто не стоит между третьим и четвертым по росту игроками,… …, (N) никто не стоит между двумя самыми низкими игроками.
Докажите, что желание сэра Алекса можно осуществить.

Начнем с доказательства следующей леммы.
Лемма. Пусть в шеренгу выстроены футболисты из N команд, в каждой из которых хотя бы $N+1$ игрок. Тогда в шеренге можно оставить $2N$ футболистов по 2 из каждой команды так, что любые два игрока из одной команды будут стоять рядом.
Доказательство. Индукция по N. База: при $N=1$ утверждение очевидно.
Сделаем переход от $N-1$ к N. Занумеруем игроков в каждой команде числами 1, 2, … слева направо. Среди всех игроков с номером 2 выберем самого левого. Пусть это игрок K_2, играющий за команду K (здесь $K_1, K_2, \ldots$ – все игроки команды K, занумерованные слева направо). Теперь удалим из шеренги всех футболистов, стоящих левее K_2, и всю команду K полностью. Тогда из каждой оставшейся команды мы удалили не более одного игрока (могли удалить только игрока с номером 1, так как игроки с бóльшими номерами находились правее K_2). По предположению индукции, для оставшегося ряда можно выбрать $2N-2$ игроков требуемым образом. Остается добавить к ним пару игроков K_1 и K_2.
Перейдем к решению задачи. Разобьем футболистов на N команд следующим образом: в первую команду включим $N+1$ самых высоких игроков, во вторую – следующих $N+1$ по росту и т.д. По лемме, мы можем оставить по два футболиста из каждой команды так, чтобы они стояли рядом. Это и требуется в задаче, так как игроки из i-й команды являются $(2i-1)$-м и $2i$-м игроками по росту среди оставленных. Задача решена.
В завершение приведем следующую графическую интерпретацию этой задачи. Пусть $n=N(N+1)$. Если в нашей шеренге на i-м слева месте стоит j-й по высоте игрок, то покрасим узел с координатами (i,j). Таким образом, на решетке, полученной в пересечении горизонталей $y=1$, $y=2$, …, $y=n$ и вертикалей $x=1$, $x=2$, …, $x=n$, у нас будет покрашено n узлов, при этом на каждой горизонтали и вертикали покрашен ровно один узел (см. рисунок). Задачу теперь можно переформулировать так: требуется выбрать N пар покрашенных узлов и соединить узлы в каждой паре отрезком так, чтобы проекции полученных N отрезков на координатные оси не пересекались.



В.Ретинский

Ф2485. *Тяжелый однородный бильярдный шар массой m «застрял» в горизонтальной решетке (рис.1), протянутой (для безопасности ламп) под потолком над игровым столом. При каком минимальном значении коэффициента трения μ такое возможно? Радиус шара R, «шаг» решетки 2a, диаметр прутка решетки l. Ускорение свободного падения равно g.*

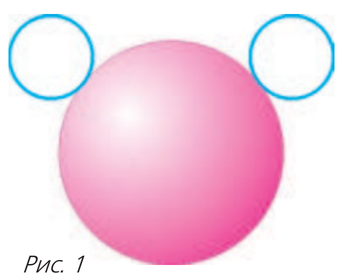


Рис. 1

Рассмотрим плоскость, проходящую через точки касания шара с решеткой и центр шара (рис.2). Пусть $\vec{N}_k$, $\vec{T}_k$ $(k = 1,\ 2)$ –

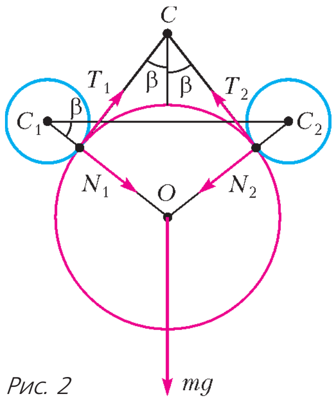


Рис. 2

силы нормальной реакции и трения, действующие на шар в левой и правой точках касания с прутками решетки. Прежде всего заметим, что треугольник OC_1C_2 – равнобедренный с углом $\beta = \arccos\dfrac{a}{R + l/2}$ при вершинах C_i. Выпишем теперь условия равновесия шара. В проекции на горизонтальную и вертикальную оси имеем, соответственно,

$$T_1 \sin\beta + N_1 \cos\beta - T_2 \sin\beta - N_2 \cos\beta = 0\,,$$

$$T_1 \cos\beta - N_1 \sin\beta + T_2 \cos\beta - N_2 \sin\beta - mg = 0\,.$$

Из условия равенства нулю момента сил относительно оси симметрии шара, перпендикулярной плоскости OC_1C_2, следует $T_1R - T_2R = 0$, откуда

$$T_1 = T_2 = T\,.$$

Тогда

$$N_1 = N_2 = N\,,$$

что естественно из соображений симметрии,

$$T\cos\beta - N\sin\beta = \frac{mg}{2}\,,$$

$$T = \frac{N\sin\beta + mg/2}{\cos\beta}\,.$$

Заметим, что выполнение условий равновесия накладывает на действующие в системе силы такие ограничения:

$$|T_1| \le \mu|N_1|\,,\quad |T_2| \le \mu|N_2|\,.$$

Наконец, так как решетка не притягивает шар, то

$$N_1 \ge 0,\quad N_2 \ge 0\,.$$

Поэтому остается решить неравенства

$$\left|\frac{N\sin\beta + mg/2}{\cos\beta}\right| \le \mu|N|\,,\quad N > 0.$$

Эти неравенства удобно решать графически (рис.3.) Пусть коэффициент сухого

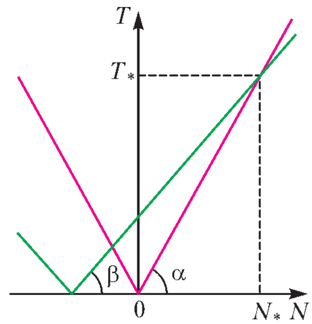


Рис. 3

трения $\mu = \operatorname{tg}\alpha$. Тогда ветви графика правой части неравенства составляют с горизонталью угол α, а ветви графика левой части – угол β. Эти ветви должны пересекаться при $N > 0$, что возможно лишь в случае, когда $\beta < \alpha$. Иными словами, равновесие возможно, только если

$$\operatorname{tg}\beta < \operatorname{tg}\alpha\,,\ \text{или}\ \frac{\sqrt{(R + l/2)^2 - a^2}}{a} < \mu\,.$$

При выполнении данного условия равновесие существует, если

$$N > N_* = \frac{mg}{2(\mu\cos\beta - \sin\beta)} = \frac{mg\cos\alpha}{2\sin(\alpha - \beta)}\,.$$

При этом

$$T > T_* = \frac{mg}{2}\,\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - \beta)}\,.$$

Нетрудно сообразить, что в предельном случае, когда центр шара и оси соседних прутков решетки располагаются в одной горизонтальной плоскости, каждая из двух равных сил трения, реализующих равновесие, должна быть не меньше $mg/2$, а шар должен быть стиснут силами, равными по величине и не меньшими, чем $mg/(2\mu)$.

А.Буров

Ф2486. *Теплоизолированный цилиндр разделен подвижным невесомым теплонепроницаемым поршнем на две части. Слева от поршня находятся N_0 атомов гелия при температуре $2T_0$, справа – $2N_0$ атомов аргона при температуре T_0. В некоторый момент произошла «разгерметизация» поршня: он стал пропускать атомы гелия.*

1) Как будет изменяться (повышаться или понижаться) температура газа, находящегося слева от поршня, в процессе перехода системы к равновесному состоянию?

2) Какая часть β атомов гелия пройдет сквозь поршень к моменту, когда температура левого газа изменится на $\alpha = 0{,}01$ от начальной?

Считайте, что все процессы протекают медленно, а энергия проходящих сквозь перегородку атомов равна средней энергии атомов газа, находящегося слева от поршня.

1) Так как поршень подвижен и невесом, давления газов по обе стороны перегородки, а значит, и объемные плотности энергии в любой момент времени одинаковы. Энергия и суммарный объем газов сохраняются (система теплоизолирована), поэтому при переходе к равновесию объемные плотности энергии (и давления) газов не изменяются по величине. Движение поршня вправо привело бы к увеличению объемной плотности энергии правого газа. Следовательно, поршень в процессе перехода системы к равновесию может двигаться только влево. При этом температура газа слева от поршня будет увеличиваться, так как газ теплоизолирован и над ним совершается работа.

2) Пусть ΔN атомов гелия «просочилось» сквозь поршень слева направо (встречным потоком атомов гелия пренебрегаем, так как $\Delta N \ll N_0$). Энергия этих атомов идет на увеличение энергии правого газа и на совершение им работы:

$$\frac{3}{2}k\left(2T_0\right)\Delta N = p_0\Delta V + \frac{3}{2}p_0\Delta V = \frac{5}{2}p_0\Delta V .$$

Здесь ΔV – соответствующее приращение объема правого газа, $p_0\Delta V$ – его работа, а $\frac{3}{2}p_0\Delta V$ – изменение внутренней энергии правого газа. Кроме того, происходит изменение внутренней энергии левого газа из-за работы, совершаемой над ним:

$$\frac{3}{2}kN_0\Delta T = p_0\Delta V .$$

Совместное решение полученных уравнений дает связь относительного изменения числа атомов с относительным изменением температуры гелия:

$$\beta = \frac{\Delta N}{N_0} = \frac{5}{4}\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{5}{4}\alpha .$$

Ю.Рогальский

Ф2487. *В схеме, показанной на рисунке 1, все сопротивления одинаковы и равны R,*

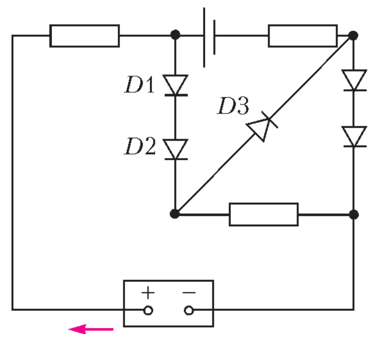


Рис. 1

все диоды имеют вольт-амперную характеристику, приведенную на рисунке 2, ЭДС источника $\mathcal{E} = 1{,}5U_0$. На схему подают напряжение от источника. Постройте график зависимости силы тока, протекающего через источник, от напряжения на нем, считая положительным ток, изображенный на рисунке 1 красной стрелкой. Обозначьте на графике координаты всех особых точек (изломов).

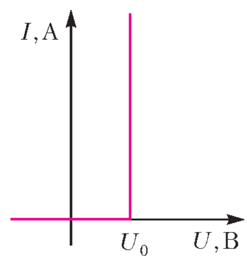


Рис. 2

Для отрицательных напряжений и малых положительных напряжений ток течет в обратном направлении через диод D_3, источник и все сопротивления. Сила тока в этом случае равна

$$I = \frac{-U + \mathcal{E} - U_0}{3R} = \frac{-U + 0,5U_0}{3R}. \quad (1)$$

Обратите внимание, что ток отрицательный. При $U = 0,5U_0$ диод D_3 закрывается, и ток перестает течь, т.е. формула (1) справедлива для $U \le 0,5U_0$.

Для напряжения в интервале $0,5U_0 \le U \le 2U_0$ все диоды закрыты и ток в цепи не течет:

$$I = 0. \quad (2)$$

При напряжении $U = 2U_0$ открываются диоды D_1 и D_2, ток протекает через них и два сопротивления и равен

$$I = \frac{U - 2U_0}{2R}. \quad (3)$$

Чтобы узнать, какой диод открывается следующим, сравним два варианта.

А) Ток течет через диоды D_1, D_2 и одновременно открываются диоды D_3, D_4 и D_5. Тогда напряжение на сопротивлении равно напряжению на открывающихся диодах:

$$IR = 3U_0.$$

Б) Ток течет через диоды D_1, D_2 и открываются D_4, D_5, при этом диод D_3 закрыт. Равенство напряжений на участках цепи имеет вид $2U_0 + IR = \mathcal{E} + 2U_0$, т.е.

$$IR = \mathcal{E} = 1,5U_0.$$

Из сравнения вариантов А и Б видно, что сначала откроются диоды D_4 и D_5, а диод D_3 останется закрытым. Используя соотношение (3), находим $\frac{U - 2U_0}{2} = 1,5U_0$, т.е. переключение произойдет при напряжении на источнике $U = 5U_0$. Формула (3) справедлива для $2U_0 \le U \le 5U_0$.

Итак, диод D_3 закрыт, все остальные диоды открыты. Обозначим I – полный ток, I_1 – ток через диоды D_1, D_2 и I_2 – ток через диоды D_4, D_5. Запишем правила Кирхгофа:

$$U - IR - 2U_0 - I_1R = 0,$$

$$U - IR - \mathcal{E} - I_2R - 2U_0 = 0,$$

$$I = I_1 + I_2.$$

Решаем систему уравнений и получаем

$$I = \frac{2U - 5,5U_0}{3R}, \quad (4)$$

$$I_1 = \frac{U - 0,5U_0}{3R},$$

$$I_2 = \frac{U - 5U_0}{3R}.$$

Открытие диода D_3 произойдет при условии $I_1R = 3U_0$, т.е. при $U = 9,5U_0$. Формула (4) справедлива для $5U_0 \le U \le 9,5U_0$.

Когда все диоды открыты,

$$I = \frac{U - 5U_0}{R}. \quad (5)$$

Формула (5) справедлива при $9,5U_0 \le U$.

Ответ задачи приведен на рисунке 3.

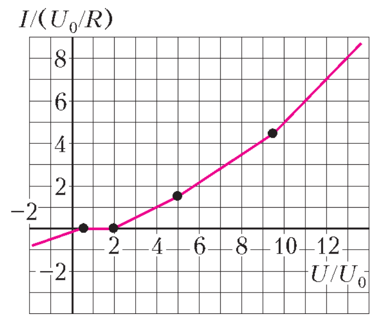


Рис. 3

А.Воронцов

Ф2488. *Виток тонкого уранового провода в форме квадрата (рис.1,а) имеет индуктивность L_1. Другой виток из того же провода, идущего по 6 ребрам (двух соседних квадратов) куба (рис.1,б), имеет индуктивность L_2. Найдите индуктивность витка из этого же провода, идущего по 8 ребрам (трех в ряд соседних квадратов) куба (рис.1,в).*

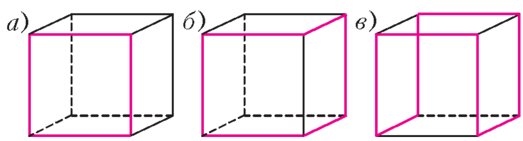


Рис. 1

Пусть вдоль второго витка, т.е. вдоль контура 1234561 (рис.2) течет ток I. Контур можно разбить на два квадратных

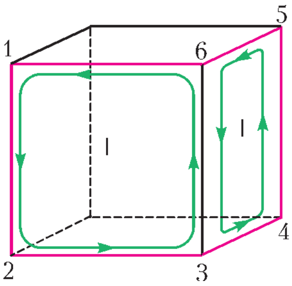


Рис. 2

контура. Контур 12361 создает магнитный поток $\Phi_1 = L_1 I$ через самого себя и отрицательный поток $\Phi_{12} = L_{12} I$ через соседний контур 65436. Точно так же ведет себя контур 65436 – создает магнитный поток через самого себя и через соседний контур 12361. Тогда суммарный поток через весь контур определяется двумя потоками, пронизывающими самих себя, и двумя другими потоками, пронизывающими соседний контур:

$$\Phi_2 = \left(2L_1 - 2L_{12}\right) I = L_2 I \ ,$$

откуда

$$L_{12} = L_1 - \frac{L_2}{2} \ .$$

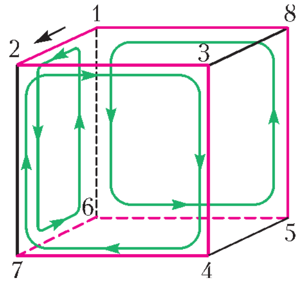


Рис. 3

Теперь рассмотрим третий виток (рис.3). Контур 12761 создает поток $\Phi_1 = L_1 I$ через самого себя и отрицательный поток $\Phi_{12} = L_{12} I$ через соседние контуры 18561 и 23472. Аналогично ведут себя контуры 18561 и 23472, причем потоки от этих контуров, влияющие друг на друга, равны и противоположны по знаку. Тогда суммарный поток через весь виток определяется тремя потоками, пронизывающими самих себя, и четырьмя другими потоками, пронизывающими соседние контуры:

$$\Phi_3 = \left(3L_1 - 4L_{12}\right) I = L_3 I \ ,$$

откуда

$$L_3 = 3L_1 - 4L_{12} = 2L_2 - L_1 \ .$$

Г.Кузнецов

Приключения одной задачи

А.ЗАСЛАВСКИЙ

У меня было сорок фамилий,
У меня было семь паспортов.

В.Высоцкий

В 2017 году на финале Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина была предложена следующая задача (задача М2479 «Задачника «Кванта»).

Задача 1 (С.Берлов, А.Полянский). *Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC, точка M – середина стороны AC, а точка W – середина дуги AB описанной окружности, не содержащей C (рис. 1). Оказалось, что $\angle AIM = 90°$. В каком отношении I делит отрезок CW?*

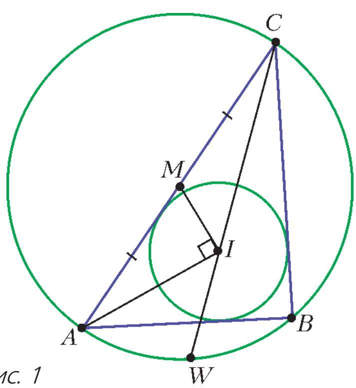


Рис. 1

Ответ. 2:1.

Решение. Пусть I_c – центр вневписанной окружности, касающейся стороны AB (рис.2). Так как $AI_c \perp AI$, получаем, что $IM \parallel AI_c$, т.е. IM – средняя линия тре-

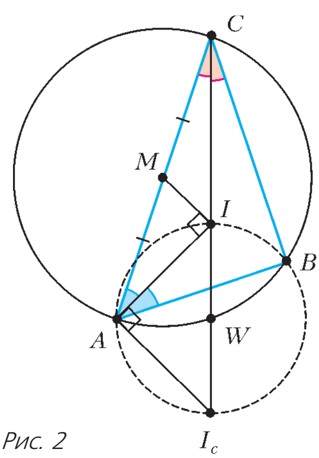


Рис. 2

угольника ACI_c. Как известно, W равноудалена от A, B, I, I_c (теорема о трезубце), в частности, W – середина II_c, следовательно, $CI = II_c = 2IW$.

Упражнение 1. Докажите обратное утверждение: если $CI = 2IW$ (или $CI = II_c$), то $\angle AIM = 90°$.

Надо сказать, что такая формулировка задачи на олимпиаде появилась в последний момент. До этого в проекте варианта фигурировала немного другая задача.

Задача 2 (С.Берлов). *Периметр треугольника ABC равен 1. Точка I – центр вписанной окружности, точка M – середина стороны AC. Оказалось, что $\angle AIM = 90°$. Найдите длину стороны AB.*

Ответ. $1/4$.

Первое решение. Одно из решений задачи 2 нетрудно получить из приведенного выше решения задачи 1. Действительно, так как I – середина CI_c, радиус r_c вневписанной окружности вдвое больше радиуса r вписанной. Отсюда и из формул площади треугольника $S = pr = (p-c)r_c$ сразу получаем ответ: $c = 1/4$.

Но у задачи 2 есть еще несколько решений. Приведем два из них.

Второе решение. Пусть N – середина BC (рис.3). Так как $MN \parallel AB$ и $\angle AIM = 90°$, то MI – биссектриса угла AMN. Поэтому прямая MN касается вписанной окружности треугольника. Значит, трапеция $AMNB$ описана вокруг этой окружности, т.е. $AB + MN = AM + BN$, откуда, поскольку $MN = AB/2$, получаем $AB = (AC + BC)/3$.

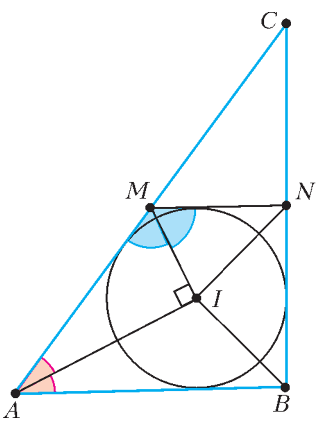


Рис. 3

Упражнение 2. Докажите, что из равенства $AB = (AC + BC)/3$ следует, что $\angle AIM = 90°$.

Третье решение. Пусть T – точка касания стороны AC с соответствующей вневписанной окружностью (рис.4). Известно, что $BT \parallel IM$ (это можно доказать, рассмотрев гомотетию, переводящую вписанную окружность во вневписанную). Следовательно, в треугольнике ABT прямая AI является биссектрисой и высотой, т.е. $AB = AT = p - c$, откуда легко следует $AB = 1/4$.

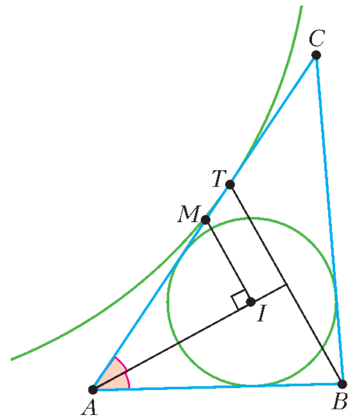


Рис. 4

Упражнение 3. Докажите непосредственно, что средняя линия, параллельная AB, касается вписанной окружности тогда и только тогда, когда $r_c = 2r$.

Указание. Примените гомотетию с центром в точке C.

Так почему же формулировка задачи была изменена прямо перед олимпиадой? Дело в том, что в 2010 году на Московской математической олимпиаде предлагалась следующая задача.

Задача 3 (А.Заславский). *В треугольнике ABC точка I – центр вписанной окружности, точки M, N – середины сторон AC, BC. Известно, что $\angle AIM = 90°$. Докажите, что $\angle BIN = 90°$.*

Легко видеть, что решение этой задачи практически совпадает со вторым из приведенных решений задачи 2.

Но и это еще не все! В 2014 году на Олимпиаде имени И.Ф.Шарыгина предлагалась такая задача.

Задача 4 (А.Полянский).} *Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC, M, N – середины дуг ABC и BAC описанной окружности. Докажите, что точки M, I, N лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $AC + BC = 3AB$.*

Решение. Докажем, что если точки M, I, N лежат на одной прямой, то $AC + BC = 3AB$.

Первый способ. Обозначим через A_1, B_1 и C_1 середины дуг BC, CA и AB, не содержащих других вершин треугольника ABC (рис.5,*а*).

Так как A_1N и B_1M – диаметры, то A_1B_1 и MN равны и параллельны. Как известно, $A_1B_1 \perp CC_1$ и $CC_2 = C_2I$. Из симметрии относительно серединного перпендикуляра к CC_1 имеем $CC_2 = C_1I$, следовательно, $CI = 2IC_1$. Но из упражнения 1 и задачи 2 мы уже знаем, что последнее равенство равносильно требуемому.

Второй способ. Пусть I_c – центр вневписанной окружности, касающейся стороны AB (рис.5,*б*). Как известно, M и N являются центрами окружностей ACI_c и BCI_c (вариант теоремы о трезубце для середин дуг BAC и ABC). Следовательно, MN – серединный перпендикуляр к отрезку CI_c, т.е. I – середина CI_c. Мы снова получили условие, равносильное требуемому.

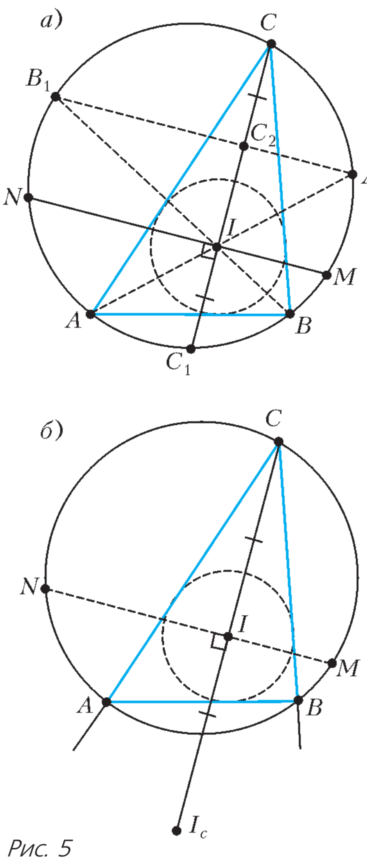


Рис. 5

Упражнение 4. Проведите рассуждения в обратную сторону, доказав, что если $AC + BC = 3AB$, то точки M, I, N лежат на одной прямой.

Подведем итог. Мы убедились, что следующие свойства треугольника ABC равносильны:

- $AB = (AC + BC)/3$;
- $\angle AIM = 90°$, где M – середина AC;
- $\angle BIN = 90°$, где N – середина BC;
- средняя линия, параллельная AB, касается вписанной окружности;
- I – середина CI_c;
- $CI = 2IW$, где W – середина дуги AB;
- середины дуг ABC, BAC и точка I лежат на одной прямой.

После этого уже не кажется удивительным многократное появление на олимпиадах задач про такие треугольники. Возможно, читателям удастся обнаружить у них новые свойства или найти новый, не менее интересный класс треугольников.

P.S. Когда статья была уже написана, С.Берлов сообщил, что на одной из Санкт-Петербургских олимпиад предлагалась следующая задача.

Задача 5 (С.Иванов). *В треугольнике ABC I – центр вписанной окружности, M, N – середины сторон AC, BC. Известно, что $\angle AIM + \angle BIN = 180°$. Докажите, что $AC + BC = 3AB$.*

Мы оставляем задачу 5 читателю для самостоятельного решения и надеемся, что наш рассказ поможет ее решить.

Задачи

1. Из спичек сложено число 73 (см. рисунок). Переложите две спички так, чтобы получился квадрат. Найдите два решения.

С.Костин

2. Можно ли в равенстве

$$0,** + 0,** + 0,** + 0,** = 2$$

заменить звездочки различными цифрами от 1 до 9 так, чтобы получилось верное равенство?

И.Богданов

3. Вырежьте из клетчатого квадрата 5×5 одну нецентральную клетку так, чтобы оставшуюся часть можно было

разрезать на 6 равных клетчатых фигурок, не являющихся прямоугольниками. Приведите пример такого разрезания.

Н.Агаханов, О.Подлипский

4. Турнир лучников проводился по следующим правилам. С каждого участника собрали одинаковый взнос. Организаторы турнира забрали 1/3 от всех поступивших денег, а оставшиеся деньги пошли в призовой фонд турнира. Робин Гуд, победивший в турнире, получил 1/6 от призового фонда – больше каждого из остальных участников, однако оказался в убытке. Какое количество лучников могло участвовать в турнире? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

О.Подлипский

Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Задачи 2–4 предлагались на Муниципальном этапе Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области.

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ России

МАТЕМАТИКА

Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений

Избранные задачи

1 (8–9)[1]. Найдите сумму $0,(0001)+$ $+\,0,(0002)+\ldots+0,(2017)$.

2 (8–9, 10). Докажите, что для любого целого числа N уравнение $10xy+17xz+$ $+\,27yz=N$ имеет решение в целых числах.

3 (8–9, 10). Известно, что многочлен $f(x)=8+32x-12x^2-4x^3+x^4$ имеет 4 различных действительных корня $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Найдите многочлен вида $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4$, имеющий корни $\{x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2\}$.

4 (8–9, 10, 11). Имеется неограниченное количество пробирок трех видов A, B и C. Каждая из пробирок содержит один грамм раствора одного и того же вещества. В пробирках вида A содержится 10%-й раствор этого вещества, в пробирках B – 20%-й раствор и в C – 90%-й раствор. Последовательно, одну за другой, содержимое пробирок переливают в некоторую емкость. При этом при двух последовательных переливаниях нельзя использовать пробирки одного вида. Какое наименьшее количество переливаний надо сделать, чтобы получить в емкости 20,17%-й раствор? Какое наибольшее количество пробирок вида C может быть при этом использовано?

5 (8–9, 10, 11). Найдите сумму квадратов натуральных делителей числа 1800. (Например, сумма квадратов натуральных делителей числа 4 равна $1^2+2^2+4^2=21$.)

[1] В скобках после номера задачи указан класс, котором она предлагалась.

6 (8–9). В треугольнике со сторонами a, b, c и углами α, β, γ выполнено равенство $3\alpha+2\beta=180^\circ$. Докажите, что $c^2=a^2+bc$. Стороны a, b, c лежат напротив углов α, β, γ соответственно.

7 (10). Окружность касается сторон угла в точках A и B. На окружности выбрана точка M. Расстояния от M до сторон угла равны 24 и 6. Найдите расстояние от M до прямой AB.

8 (11). Про пятиугольник $ABCDE$ известно, что $AB=BC=CD=DE$, $\angle B=96^\circ$, $\angle C=\angle D=108^\circ$. Найдите $\angle E$.

9 (8–9, 10, 11). Докажите, что для любого натурального числа n существует натуральное число N, делящееся нацело на n, сумма цифр которого равна n.

10 (8–9, 10). Имеются таблицы A и B, в ячейки которых вписаны целые числа. С таблицей A можно проделывать следующие действия: 1) прибавлять к строке другую строку, умноженную на произвольное целое число; 2) прибавлять к столбцу другой столбец, умноженный на произвольное целое число. (Например, если к первой строке таблицы А на рисунке 1 прибавить вторую

Таблица А

1	0
0	2

Таблица В

0	2
3	0

Пример

1	8
0	2

Рис. 1

строку, умноженную на 4, то получится таблица, изображенная под словом *Пример*.) Можно ли, проделав некоторое количество указанных действий с таблицей A, получить таблицу B? Ответ обоснуйте.

11 (11). Имеются таблицы A и B, в ячейки которых вписаны целые числа. С таблицей A можно проделывать следующие действия: 1) прибавлять к строке другую строку, умноженную на произвольное целое число; 2) прибавлять к столбцу другой столбец, умно-

Таблица А

1	0	0	0	0
0	3	0	0	0
0	0	3	0	0
0	0	0	6	0
0	0	0	0	6

Таблица В

0	0	0	0	1
0	0	0	2	0
0	0	3	0	0
0	6	0	0	0
9	0	0	0	0

Пример

1	0	6	0	0
0	3	0	0	0
0	0	3	0	0
0	0	0	6	0
0	0	0	0	6

Рис. 2

женный на произвольное целое число. (Например, если к первой строке таблицы А на рисунке 2 прибавить третью строку, умноженную на 2, то получится таблица, изображенная под словом *Пример*.) Можно ли, проделав некоторое количество указанных действий с таблицей A, получить таблицу B? Ответ обоснуйте.

12 (10). Найдите все корни уравнения

$$\frac{1}{\cos^3 x}-\frac{1}{\sin^3 x}=4\sqrt{2}\ ,$$

лежащие на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

13 (11). Известно, что уравнение $x^4-8x^3+ax^2+bx+16=0$ имеет (с учетом кратности) четыре положительных корня. Найдите a и b.

14 (11). Дима выбирает два различных числа из множества {0, 1, 2, …, 2332} и записывает их на первую страницу тетради. Далее он снова выбирает два различных числа из этого же множества, прибавляет каждое из выбранных чисел к каждому числу, записанному на первой странице, и записывает на вторую страницу все получившиеся суммы. (Например, если в начале были выбраны числа 2 и 3, а потом 2 и 4, то на второй странице будут записаны числа 4,5,6,7.) При этом, если какая-либо сумма превосходит 2332, он заменяет ее остатком от деления на 2333. Затем он опять выбирает два различных числа, прибавляет их ко всем числам на второй странице и записывает все получившиеся суммы на третью страницу и т.д.

1) Найдите наименьший номер страницы N, на которой (как бы Дима числа ни выбирал) каждое из чисел 0,1,2, … , 2332 будет гарантированно записано хотя бы один раз.

2) Опишите все варианты выбора чисел, при которых для выполнения условия пункта 1) потребуется ровно N страниц.

ФИЗИКА

Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений

9 класс

1. В комнате объемом $V=4\ \text{м}^3$ при температуре $t=20\ °\text{C}$ относительная влажность воздуха $B_1=20\%$. Какую массу воды m надо испарить, чтобы увеличить относительную влажность воздуха до $B_2=50\%$?

Плотность насыщающих водяных паров при различных темпертурах			
T, K	$\rho_\text{н}$, 10^{-3}кг/м^3	T, K	$\rho_\text{н}$, 10^{-3}кг/м^3
288	12,80	295	19,40
289	13,60	296	20,60
290	14,50	297	21,80
291	15,40	298	23,00
292	16,30	299	24,40
293	17,30	300	25,80
294	18,30	301	27,20

2. Две лодки, массой M каждая, идут с одинаковой скоростью $\vec{v}_0$ одна за другой по стоячей воде. Из первой лодки во вторую перебрасывают груз массой m. Горизонтальная составляющая скорости груза относительно лодки в момент броска равна $\vec{u}$. Найдите скорости лодок $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ после переброски груза. Векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}_0$ коллинеарны.

3. Два сосуда объемами $V_1=5\ \text{м}^3$ и $V_2=3\ \text{м}^3$ содержат воздух при температурах $t_1=15\ °\text{C}$ и $t_2=28\ °\text{C}$ и относительной влажности $B_1=22\%$ и $B_2=46\%$ соответственно. Определите относительную влажность воздуха B после соединения между собой этих сосудов, если установившаяся температура воздуха $t=20\ °\text{C}$. (См. таблицу к задаче 1.)

10 класс

1. Авианосный крейсер «Адмирал Кузнецов» идет со скоростью 30 км/ч. Сколько времени потребуется катеру, движущемуся параллельным курсом со скоростью 50 км/ч, для того чтобы пройти от кормы крейсера до носа и обратно к корме, если длина крейсера 306 м?

2. Пластина массой M подвешена за ее середину на резиновом шнуре. Вдоль шнура с высоты h на пластину падает плашмя шайба (шнур проходит через отверстие в шайбе) и прилипает к пластине. Масса шайбы m, жесткость шнура k. Какую максимальную скорость будет иметь пластина с шайбой при движении после удара?

3. Два одинаковых баллона наполнены одинаковым количеством гелия. Средняя квадратичная скорость атомов гелия в первом сосуде 1200 м/с, а во втором 2400 м/с. Какой будет средняя квадратичная скорость, если соединить баллоны трубкой?

4. Реактивный самолет с вертикальными взлетом и посадкой завис над землей, выбрасывая вниз струю газа со скоростью 1200 м/с. Какая масса газа выбрасывается в струе за секунду, если масса самолета 10 тонн?

5. Беспилотный космический корабль совершил посадку на далекой планете. При этом в корпусе корабля образовалось небольшое отверстие. Атмосфера планеты очень разряженная – настолько, что, пролетая через отверстие, молекулы не сталкиваются друг с другом. Давление атмосферы планеты p_0, а температура T_0. Какое давление p установится внутри корпуса корабля, если в нем поддерживается температура в два раза больше, чем снаружи?

6. В цилиндре под поршнем находится гелий. Во сколько раз изменится средняя квадратичная скорость его молекул, если объем газа увеличить в 1,5 раза и одновременно давление увеличить в 1,5 раза?

11 класс

1. Легкая соломинка массой $m = 1$ г и длиной $L = 4$ см плавает на поверхности воды. По одну сторону от соломинки налили мыльный раствор. С каким ускорением w начнет двигаться соломинка? Сопротивлением воды движению соломинки пренебречь. Коэффициенты поверхностного натяжения воды и мыльного раствора равны $\sigma_{\text{в}} = 7{,}4 \cdot 10^{-2}$ Н/м и $\sigma_{\text{мр}} = 4 \cdot 10^{-2}$ Н/м соответственно.

2. Саша один раз раздвинул пластины плоского конденсатора, которые все время были подключены к источнику напряжения, а в другой раз они были отключены после первоначальной зарядки. В каком из этих двух случаев Саша совершил большую работу по раздвижению пластин? Ответ поясните.

3. Два небольших шарика массой m с зарядом q каждый соединены непроводящей нитью длиной $2l$ и лежат на гладком горизонтальном столе. В некоторый момент времени середина нити начинает двигаться с постоянной скоростью v, перпендикулярной направлению нити в начальный момент времени. Определите минимальное расстояние d, на которое сблизятся шарики.

4. Ракета влетает в неподвижное облако частиц с начальной скоростью v_0 и движется в нем с ускорением a. Частицы налипают на переднюю поверхность ракеты площадью S. Концентрация частиц n, масса каждой частицы m, а масса самой ракеты M_0. Определите силу реактивной тяги двигателей ракеты.

5. Маша сообщила равные отрицательные заряды двум металлическим шарам, имеющим разные диаметры, затем она соединила шары проводом большого сопротивления с последовательно включенным амперметром. Что покажет амперметр? Ответ поясните.

6. Два небольших шарика с зарядами q_1 и q_2 вначале двигались с одинаковыми по модулю и направлению скоростями по гладкому горизонтальному столу. После того как на некоторое время было включено однородное электрическое поле, вектор скорости первого шарика повернулся на $60°$ градусов, а модуль его скорости уменьшился в два раза. Второй шарик стал двигаться в перпендикулярном к первоначальному направлении. Определите модуль отношения заряда к массе для второго шарика, если для первого он равен k_1. Электростатическим взаимодействием шариков пренебречь.

7. Санки массой M_0 тянут так, что они движутся равномерно со скоростью v_0. При начавшемся снегопаде снежинки налипают на верхнюю поверхность санок площадью S. Концентрация снежинок n, масса каждой снежинки m, а их скорость у поверхности земли равна v. Определите, как должна зависеть от времени сила, с которой тянут санки, чтобы они продолжали двигаться с той же скоростью v_0. Коэффициент трения равен μ.

8. Два мыльных пузыря с радиусами $r_1 = 10$ см и $r_2 = 5$ см выдуты на противоположных концах одной трубки. Найдите разность давлений Δp на концах трубки. Коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора $\sigma_{\text{мр}} = 4 \cdot 10^{-2}$ Н/м.

9. Маша обнаружила двухпроводную линию постоянного тока. Как при помощи вольтметра постоянного тока и магнитной стрелки она определила, на каком конце линии находится электростанция? Ответ поясните.

Профильный экзамен

ВАРИАНТ 1

1. С какой горизонтальной силой F надо действовать на брусок массой $m = 2$ кг, находящийся на неподвижной наклонной плоскости с углом наклона к горизонту $\alpha = 30°$, чтобы он двигался равномерно вверх по наклонной плоскости (рис.3)? Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость $\mu = 0{,}3$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

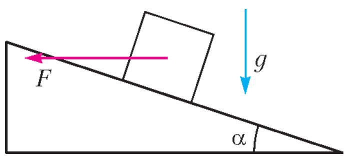


Рис. 3

2. Один моль идеального газа переводят по изобаре из состояния с температурой T_1 и объемом V_1 в состояние, в котором объем газа уменьшается на некоторую величину ΔV, а температура становится равной T_2. Найдите изменение объема ΔV.

3. В баллоне находится одноатомный идеальный газ в количестве $\nu = 4$ моль при температуре $T = 300$ К. При нагревании баллона средняя квадратичная скорость молекул газа увеличилась в $n = 1{,}3$ раза. Какое количество теплоты Q сообщили газу? Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}314$ Дж/(моль · К).

4. Плоский воздушный конденсатор с вертикально расположенными пластинами наполовину погрузили в воду с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 81$. Как изменится емкость конденсатора?

5. Определите центростремительную силу, действующую на протон в однородном магнитном поле с индукцией 0,01 Тл (вектор магнитной индукции перпендикулярен вектору скорости), если радиус окружности, по которой он движется, равен 5 см. Масса протона $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг, заряд протона $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

6. Тело, двигаясь равноускорено из состояния покоя по окружности радиусом r, прошло за время t_1 путь l. С каким центростремительным ускорением a_n двигалось тело спустя время t_2 после начала движения?

7. У вертикальной стенки на гладкой поверхности стоит чаша массой M, внутренняя поверхность которой имеет форму полусферы радиусом R (рис.4). На край чаши кладут шайбу массой m и отпускают ее. Найдите максимальную скорость чаши при последующем движении. Трением пренебречь. Ускорение свободного падения равно g.

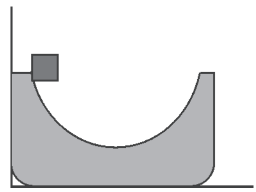


Рис. 4

8. Конденсатор включен в цепь постоянного тока, состоящую из источника с ЭДС $\mathcal{E}$ и сопротивлений с номиналами R_1 и R_2 (рис.5). Известно, что отношение напряжения U на конденсаторе к значению ЭДС равно некоторой величине k, т.е. $U/\mathcal{E} = k$. Найдите отношение сопротивлений R_2/R_1, если $k = 2/3$.

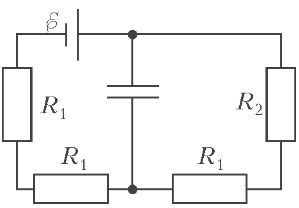


Рис. 5

Непрофильный экзамен

ВАРИАНТ 1

1. Два пластилиновых шарика массами m_1 и m_2 летят под прямым углом друг к другу со скоростями v_1 и v_2 соответственно. Они сталкиваются и слипаются. Каков будет полный импульс системы этих шариков после столкновения?

2. Для того чтобы нагреть в сосуде лед, имеющий начальную температуру $T_0 = -50$ °С, до температуры плавления ($T = 0$ °С) и превратить его полностью в воду, потребовалось время $t = 5$ мин. В течение какого времени $t_т$ таял лед? Тепло к сосуду подводилось равномерно (пропорционально времени). Тепловые потери отсутствуют. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 2{,}5 \cdot 10^4$ Дж/кг. Удельная теплоемкость льда $c = 2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К).

3. Проводящий шар радиусом 10 см имеет заряд 10^{-8} Кл. Какова напряженность поля в точке, находящейся от поверхности шара на расстоянии 20 см?

4. Найдите отношение показания вольтметра V_2 к показанию вольтметра V_1 для схемы, изображенной на рисунке 6, если

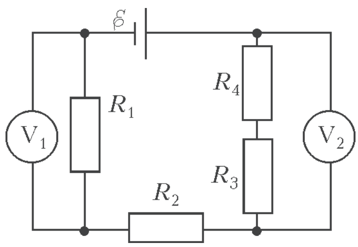


Рис. 6

$R_1 = 10$ кОм, $R_2 = 20$ кОм, $R_3 = 80$ кОм, $R_4 = 160$ кОм.

5. Проводник длиной $L = 20$ см с силой тока $I = 50$ А находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 40$ мТл. Какую работу совершит источник тока, если проводник переместится на $s = 10$ см перпендикулярно вектору магнитной индукции (вектор магнитной индукции перпендикулярен направлению тока в проводнике)?

6. Тело, двигаясь с постоянным ускорением, проходит последовательно два участка пути, причем время движения на обоих участках одинаково. При движении по первому участку длиною l скорость тела уменьшилась в n раз. Найдите длину второго участка.

7. Брусок массой M соединен с грузом массой m невесомой и нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый блок (рис.7). Брусок скользит без трения по закрепленной наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Чему равно ускорение a бруска?

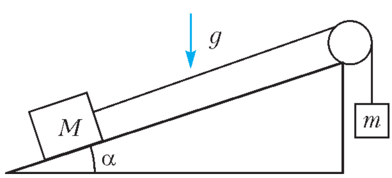


Рис. 7

8. В закрытом откачанном цилиндре подвешен на пружине поршень, положение равновесия которого находится у дна цилиндра. В пространство под поршнем вводится некоторое количество газа. При температуре T_1 поршень поднят на l_1 от дна. Определите положение поршня l_2 при нагревании газа до температуры T_2.

КРИПТОГРАФИЯ

Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии

Избранные задачи

1 (10 класс). Найдите натуральное число x, не превосходящее 85, такое, что при делении чисел x^{15} и x^{23} на 85 в остатке получится 23 и 28 соответственно.

2 (8–9 классы). Найдите натуральное число x, не превосходящее 77, если известно, что остатки от деления числа x^2 на 77 и 96 равны 71 и 73 соответственно.

3 (8–9, 10 кл.). Шляпник решил отправить по почте Зайцу свой пароль от компьютера (слово из 7-ми букв). Перед отправкой он его зашифровал следующим образом (рис.8). Каждую букву слова он заменил пятизначной комбинацией в соответствии с таблицей 1 (считается, что Е=Ё). Данные из

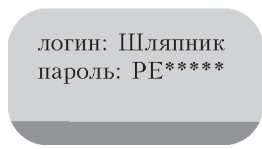


Рис. 8

Таблица 1

А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

таблицы считываются сверху вниз. Так, например, буква Б заменяется на 00001. В результате у него получилась последовательность $a_1, \ldots, a_{35}$, где $a_i \in \{0; 1\}$. Затем Шляпник построил еще одну последовательность $y_1, \ldots, y_{35}$, также состоящую из 0 и 1. Он наугад записал первые четыре члена последовательности y_1, y_2, y_3, y_4 и выбрал четыре неотрицательных целых числа c_1, c_2, c_3, c_4. Оставшиеся члены $y_5, \ldots, y_{35}$ он подсчитал по формуле

$$y_{n+4} = r_2\left(c_1 y_n + c_2 y_{n+1} + c_3 y_{n+2} + c_4 y_{n+3}\right),$$

где $r_2(a)$ – остаток от деления a на 2. Затем он вычислил $b_i = r_2(a_i + y_i)$, $i = 1, \ldots, 35$. Получившуюся последовательность $b_1, \ldots, b_{35}$ Шляпник разбил на фрагменты длины 5, каждый из которых он преобразовал в буквы согласно таблице. Заяц получил строку: ГОШРОХБ. Помогите ему определить пароль.

4 (8–9, 10 кл.). Даны множества:

$$X_1 = \{1,2,3,4,5,6,7\},\ X_2 = \{2,5\},$$
$$X_3 = \{2,3\},\ X_4 = \{1,2,3,4,5,7,8,9\},$$
$$X_5 = \{3,5\},\ X_6 = \{1,3,5,6,7\},$$
$$X_7 = \{2,3,5,7,8,9\},\ X_8 = \{5,7,8\},$$
$$X_9 = \{2,3,7,9\}.$$

Сколько существует наборов *различных* цифр $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9)$ таких, что $a_i \in X_i$? Предъявите все эти наборы.

5 (8–9, 10 кл.). Злоумышленник хочет получить доступ к банковской ячейке, защищенной кодовым замком. Комбинация из трех цифр (u,v,w), отпирающая замок, ему не известна. Злоумышленнику удалось изготовить проксимити-карты со следующей информацией: на первой карте записаны цифры $(1,5,8)$, на второй – $(7,4,9)$, на третьей – $(9,7,6)$, на четвертой – $(3,2,4)$. При прикладывании карты с информацией (a,b,c) к считывающему устройству банковской ячейки ее кодовый замок из состояния (i,j,k) переходит в состояние $(i+a,\ j+b,\ k+c)$ (если какая-либо сумма превосходит 9, то она заменяется ее остатком от деления на 10). Как только замок оказывается в состоянии (u,v,w), он немедленно открывается. Какое наименьшее количество из имеющихся карт следует использовать, чтобы гарантированно открыть ячейку, независимо от установленной отпирающей комбинации (u,v,w) и начального состояния замка?

6 (8–9, 10 кл.). Агенту передаются сообщения с помощью специальных «передающих» часов, установленных на главной площади города. В заранее условленное время агент приходит к часам и начинает следить за их секундной стрелкой. Если прошла секунда, а стрелка не сдвинулась, значит, передан 0, в противном случае (прошла секунда и стрелка сдвинулась) передана 1. Каждая буква сообщения закодирована пятизначной комбинацией из 0 и 1 в соответствии с таблицей 1 (считается, что Е=Ё). Данные из таблицы считываются сверху вниз. Так, например, буква Б заменяется на 00001. При приеме сообщения случайный прохожий ненадолго отвлек агента. Помогите ему восстановить сообщение, если известно, что за время сеанса связи часы отстали на 81 секунду, а в блокноте у агента записаны следующие знаки:

011111000001000101010111000100010001000
1001000101001110000000001010010100 0
000000000100001011100000100010000 0

7 (11 кл.). Даты рождения учеников хранились на сервере школы. Для каждого ученика его дата рождения была представлена числом t, которое вычислялось по формуле $t = 31(m-1) + (d-1)$, где m – номер месяца, d – порядковый день месяца. Например, если $t = 65$, то $m = 3$ и $d = 4$, т.е. этот ученик родился 4-го марта. Затем было решено сведения о датах рождения зашифровать. Вместо числа t на сервере теперь хранится число x такое, что число α^x при делении на 373 дает остаток t, где α – секретное (но одинаковое для всех учеников) натуральное число. Известно, что Мария (табл.2) родилась 28-го марта, Александр – 31-го января. Известно также, что число α^{372} при делении на 373 дает остаток 1. Найдите дату рождения Павла.

Таблица 2

Ученик	x
Мария	31
Александр	12
Павел	189

8 (11 кл.). На прямой заданы два отрезка, длины которых равны $2016^{2015}-1$ и $2016^{2018}-1$. Осуществляя построения только на этой прямой (т.е. без использования точек вне прямой), с помощью циркуля постройте отрезок длины 2015.

9 (11 кл.). Для зашифрования сообщения на русском языке, знаки препинания в котором опущены, а слова отделены друг от друга знаком пробела (-), используется двухблочный шифратор. Первый блок шифратора заменяет буквы сообщения и пробелы (-) на числа в соответствии с таблицей, построенной на основе ключевого слова. Сначала записывается ключевое слово, потом знак пробела (-), потом остальной алфавит в естественном порядке за исключением букв, входящих в ключевое слово (при этом считается, что Е=Ё). Например, если ключевое слово *привет*, то первый блок будет осуществлять замену в соответствии с таблицей 3. Второй блок получает на вход числа

Таблица 3

П	Р	И	В	Е	Т	–	А	Б	Г	Д	Ж	З	Й	К	Л	М
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Н	О	С	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32

из первого блока и осуществляет усложнение шифрованного сообщения по следующему правилу. Первое число оставляется без изменений, а к каждому следующему прибавляется число, равное произведению числа 33 и остатка от деления на три предыдущего числа. Слово *тайное* на предложенном ключе будет зашифровано в сообщение 5 73 46 50 84 4 (табл. 4). Прочитайте

Таблица 4

Текст	Т	А	Й	Н	О	Е
1-й блок	5	7	13	17	18	4
Остаток	2	1	1	2	0	1
2-й блок	5	73	46	50	84	4

исходное сообщение, зашифрованное этим шифратором на другом ключе, если известно, что в сообщении встречается слово *здесь*:

30 5 84 6 16 51 10 42 5 72 19 51 14 66 11 66 5 95 70 65 72 4 38 86 66 17 83 94 49 39 17 84 6 17 84 24 29 97 39 11 74 75 4 62 72 1 37 42 6 14 84 25 47 78 6 4 42 20 94

10 (11 кл.). Каждая буква алфавита была заменена на другую букву. При этом разные буквы были заменены разными. Расшифруйте фразу, позволяющую запомнить расположение планет Солнечной системы (здесь Плутон считается планетой):

ЧАЮША ПСЭЙМЙМЕ ЯК ЧКНО, БПЙЭТНША ОПЙНШЩП Щ ШКИЙУ ЦЭКШЙМС.

11 (8–9, 10, 11 кл.). Про составленный из цифр 20-значный пароль $(a_1, a_2, \ldots, a_{20})$ известно следующее: а) сумма первых 5 цифр $a_1+\ldots+a_5$ делится на 5; б) сумма первых 10 цифр $a_1+\ldots+a_{10}$ делится на 10; в) сумма всех цифр пароля $a_1+\ldots+a_{20}$ делится на 20. Сколько таких паролей?

12 (11 кл.). Для безопасной передачи по беспроводной сети и установки на мобильный телефон секретного ключа СК, представляющего собой набор из 3-х цифр $p_1p_2p_3$, этот ключ предварительно зашифровывается следующим образом. Формируется четырехзначное число $m=1p_1p_2p_3$ и вычисляется зашифрованный ключ ЗК c по формуле $c=r_n\left(m^3\right)$, где $r_n(a)$ – остаток от деления числа a на n. Это значение c и пересылается по сети. При получении числа c на телефоне высчитывается число $M=r_n\left(c^d\right)$. Причем натуральное число d выбрано так, что для любого натурального числа z выполняется равенство $r_n\left(z^{3d}\right)=r_n(z)$. Если найденное M не является четырехзначным числом, первая цифра в котором 1, телефон выдает сообщение об ошибке. Злоумышленник перехватил ЗК $c = 18299$ и предпринял попытку передачи на телефон новых чисел вида $r_n(s\cdot c)$. При $s=100^3$ была получена ошибка, а при $s=89^3$ и $s = 1728$ ошибки не возникло. Определите СК, если $n = 20203$.

Публикацию по математике подготовил С.Рамоданов;
по физике – М.Алексеев, В.Попов;
по криптографии – С.Рамоданов

«Импрессионистическая» фотография

В.ПТУШЕНКО

«Зеркальная гладь озера (моря)», «зеркало воды»... Подобные словосочетания часто можно встретить в художественных описаниях. Но и физически они тоже вполне верны: поверхность воды при больших углах падения света оказывается очень хорошим зеркалом. Однако это «зеркало» очень подвижное, легко изменяющее форму своей поверхности при малейшем ветре или течении. Отклонения от плоскости, называемые рябью или волнением, создают разнообразные искажения создаваемого этим «кривым зеркалом» изображения. Классический образ — «лунная дорожка».

На фотографии, приведенной здесь наверху справа и на 4-й странице обложке журнала, – поверхность воды в слегка ветреный день. В этой не совсем спокойной воде отражается набережная – ограда, деревья, машины и стены, стоящих вдоль набережной домов. Строгий, реалистический надводный мир смотрится в свое «импрессионистическое» отражение. Если «перевернуть» это отражение вверх ногами, как это представлено здесь на фотографии внизу слева, то его не сразу и отличишь от настоящего пейзажа, разве что написанного рукой художника-импрессиониста.

В подписи на обложке мы заверили читателя, что фотография не подвергалась никакой обработке. Впрочем, этот эффект вполне можно было бы назвать «аналоговой обработкой» изображения — хотя и произведенной с ним еще до съемки.

После прогулки по берегу пройдемся мысленно по картинной галерее (см. ссылки). Если верить известному утверждению, что лучшие находки искусства это всегда «подсмотренное» в природе, то можно считать, что на сегодняшней «прогулке с физикой» мы встретили один из его источников.

http://s44.radikal.ru/i103/1209/85/62cb001bf8edt.jpg

http://tigelclub.ru/images/mclass/mc_rain.jpg

http://muradeli.ru/wp-content/uploads/2015/11/Impressionizm.jpg

https://artchive.ru/res/media/img/oy800/work/03e/292955.jpeg

ЗАОЧНАЯ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКАЯ ШКОЛА ПРИ МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) Московского физико-технического института (государственного университета) (МФТИ) проводит набор в 8 – 11 классы учащихся 7–10 классов общеобразовательных учреждений (школ, лицеев, гимназий и т.п.), расположенных на территории Российской Федерации.

ЗФТШ работает в сфере профильного дополнительного образования детей с 1966 года. За прошедшие годы школу окончили более 100 тысяч учащихся; практически все ее выпускники поступают в ведущие вузы страны, а каждый второй студент МФТИ – ее бывший ученик.

Научно-методическое руководство школой осуществляет Московский физико-технический институт.

Обучение в школе ведется по четырем предметам научно-технической направленности – *физике, математике, информатике и химии*.

В 8 классе изучаются только физика и математика. В 9–11 классах к этим предметам добавляются «Математические основы информатики и ИКТ» (информатика) и химия. Учащиеся могут по своему выбору изучать один, два, три или четыре предмета.

Количество заданий в год по классам и по предметам представлено в таблице:

8 класс		9 класс			
Ф	М	Ф	М	И	Х
5	6	6	7	4	4

10 класс				11 класс			
Ф	М	И	Х	Ф	М	И	Х
6	7	4	4	6	8	5	4

Цель нашей школы – помочь учащимся 8–11 классов общеобразовательных учреждений, интересующимся предметами научно-технической направленности, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам, а также способствовать их профессиональному самоопределению.

Набор в 8, 9, 10 и 11 классы на 2018/19 учебный год проводится на заочное, очное и очно-заочное отделения.

Программы ЗФТШ являются профильными дополнительными образовательными программами и едины для всех отделений.

Полная программа обучения рассчитана на 4 года – с 8-го по 11-й класс включительно, но начать обучение можно с любого из указанных классов.

Согласно положению о ЗФТШ, *учащийся может обучаться только на одном отделении ЗФТШ.*

Учащиеся всех отделений, успешно справившиеся с программой ЗФТШ, по окончании 11 класса получают свидетельство об окончании школы с итоговыми оценками по изучавшимся в 11-м классе предметам. *Свидетельство об окончании ЗФТШ* учитывается при поступлении в МФТИ в соответствии с правилами приема в МФТИ и Порядком учета индивидуальных достижений поступающих (https://pk.mipt.ru/bachelor/2018_ID/).

Ученикам всех отделений будет предложено участвовать в физико-математической олимпиаде «ФИЗТЕХ-2019», которая проводится на базе МФТИ и в ряде городов России в феврале или начале марта, в других очных и заочных олимпиадах МФТИ и его факультетов.

Для учащихся и руководителей факультативных групп работает *online-лекторий* по физике, математике и химии по программе ЗФТШ. Лекции читают преподаватели МФТИ (как правило, авторы заданий). Подробнее об этих мероприятиях можно прочитать на сайте ЗФТШ.

Обучение в ЗФТШ бесплатное.

Для учащихся, проживающих за пределами Российской Федерации, возможно только платное обучение на заочном и очно-заочном отделениях.

Заочное отделение *(индивидуальное заочное обучение)*

Тел./факс: (495) 408-51-45,
e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Прием на заочное отделение проводится на конкурсной основе по результатам выполнения вступительного задания по выбранным для изучения предметам.

В течение учебного года в соответствии с программой ЗФТШ ученик получает по каждой теме задания по изучаемым предметам, а затем – рекомендуемые авторские решения этих заданий вместе с проверенной работой ученика.

Задания составляют опытные преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ, а также выпускники МФТИ и другие специалисты, имеющие большой опыт работы с одаренными школьниками. Задания содержат теоретический материал, разбор характерных примеров и задач по соответствующей теме и 8–12 контрольных вопросов и задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные. Примеры заданий можно посмотреть на сайте ЗФТШ.

Работы учащихся-заочников проверяют студенты, аспиранты и выпускники МФТИ (из них 80% – выпускники нашей школы).

Вступительное задание по выбранным предметам ученик выполняет самостоятельно в *одной* школьной тетради на русском языке, сохраняя тот же порядок задач, что и в задании. Тетрадь нужно выслать в конверте *простой бандеролью* или простым письмом. На лицевую сторону тетради наклейте *заполненный бланк* (его можно заполнить в электронном виде на сайте ЗФТШ, а затем распечатать):

Л№													
№ задач	1	2	3	4	5	…	10	11	12	13	14	15	Σ
Ф													
М													
И													
Х													

(таблица заполняется методистом ЗФТШ)

1. Республика, край, область_______________
2. Фамилия, имя, отчество_________________
3. Класс, в котором учитесь________________
4. Если вы уже учитесь в ЗФТШ, напишите свой личный номер____________________
5. Предметы, по которым выполнены задания (отметьте галочками)
   - □ физика
   - □ математика
   - □ информатика
   - □ химия
6. Номер и/или название школы__________
7. Вид школы (обычная, лицей, гимназия, центр образования и т.п.)_______________
8. Ф.И.О. учителей по физике_____________
   по математике___________________________
   по информатике__________________________
   по химии_______________________________
9. Подробный домашний адрес (с указанием индекса), телефон, e-mail_______________
10. Имя, отчество и № телефона одного из родителей_______________________________

На конкурс ежегодно приходит более 5 тысяч вступительных работ. Пожалуйста, обратите внимание на правильность заполнения бланка! Будьте аккуратны!

На внутреннюю сторону обложки тетради наклейте справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса.

Для получения ответа на вступительное задание и для отправки вам первых заданий *обязательно* вложите в тетрадь два одинаковых конверта размером 160×230 мм. Марки наклеивать не надо. На конвертах четко напишите свой домашний адрес.

Тетрадь с выполненными заданиями высылайте на адрес ЗФТШ *не позднее 1 марта 2018 года*. Проверенные вступительные работы обратно не высылаются.

Все присланные в ЗФТШ работы регистрируются. Информацию о получении работ можно увидеть на сайте ЗФТШ в разделе «Вступительные задания». Решение приемной комиссии будет выслано в июле 2018 года.

Если школьник уже обучается в ЗФТШ и хочет добавить на следующий год еще предмет, необходимо выполнить и прислать в ЗФТШ вступительное задание по этому предмету. На бланке обязательно укажите свой личный номер. Решение приемной комиссии в этом случае не высылается, а дополнительный предмет становится доступным учащемуся в Личном кабинете в июле, в случае положительного решения приемной комиссии.

Очно-заочное отделение *(обучение в факультативных группах)*

Тел.: (498) 744-63-51,
e-mail:fakultativ@mipt.ru

Факультативные группы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении *двумя, тремя или четырьмя преподавателями* – физики, математики, информатики и химии, в отдельных случаях разрешается обучение по одному предмету. Руководители факультатива принимают в него учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ.

Группа (не менее 7 человек) принимается в ЗФТШ по заявлению директора, написанному на бланке общеобразовательного учреждения (образец можно посмотреть в разделе «очно-заочное отделение» сайта ЗФТШ), в котором должны быть указаны фамилии, имена, отчества руководителей факультативной группы по предметам и поименный алфавитный список обучающихся (Ф.И.О. в алфавитном порядке полностью с указанием класса *текущего учебного года* и итоговых оценок за вступительное задание по выбранным предметам), адрес, телефон, факс и e-mail школы.

Заявление можно выслать обычной почтой, вложив конверт для ответа о приеме в ЗФТШ с обратным адресом одного из руководителей на адрес ЗФТШ (с пометкой «Факультатив»), или выслать в отсканированном виде (с подписями и печатью) на e-mail:fakultativ@mipt.ru *до 25 мая 2018 года* на адрес ЗФТШ (с пометкой «Факультатив»).

Тетради с работами учащихся проверяются учителями физики, математики, информатики и химии и *в ЗФТШ не высылаются*.

Работа руководителей факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением как руководство профильными факультативными занятиями по предоставлении ЗФТШ соответствующих сведений.

Руководители, работающие с учащимися, будут в течение учебного года получать учебно-методические материалы (программы по физике, математике, химии и информатике, задания по темам программ, решения заданий с краткими рекомендациями по оценке работ учащихся); приглашаться на курсы повышения квалификации учителей физики и математики, проводимые на базе МФТИ. Работы учащихся проверяют и оценивают руководители факультативных групп, а в ЗФТШ ими высылаются ведомости с итоговыми оценками по каждому заданию и итоговая ведомость (11 класс) за год (образец есть на сайте ЗФТШ).

Очное отделение *(заочное обучение с посещением очных консультаций)*

Тел.: (925) 755-55-80,
e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Для учащихся Москвы и Московской области по программе ЗФТШ работают вечерние консультационные пункты. Набор в них проводится в сентябре в два этапа:

- заочный этап – тестирование на сайте http://zftsh.online/,
- очный этап – устные экзамены.

Более подробная информация о наборе на очное отделение размещается на сайте ЗФТШ в начале сентября.

Занятия с учащимися очного отделения проводятся в учебных корпусах МФТИ в городах Долгопрудный и Жуковский.

Контакты ЗФТШ

Почтовый адрес: 141700 Московская область, г.Долгопрудный, Институтский пер., д. 9, ЗФТШ

Тел./факс: (495) 408-51-45 – заочное отделение, (498) 744-63-51 – очно-заочное отделение, (498) 744-65-83 и (925) 755-55-80 – очное отделение

E-mail: zftsh@mail.mipt.ru – заочное и очное отделения, fakultativ@mipt.ru – очно-заочное отделение

Сайт: www.school.mipt.ru

ВК: https://vk.com/club1032617

Для школьников Украины работает УЗФТШ при ФТННЦ НАН Украины (обучение платное). Желающим поступить туда следует высылать работы по адресу: 03680, Украина, г. Киев, б-р Вернадского, д. 36, ГСП, УЗФТШ

Тел.: 8(10-38-044) 424-30-25, 8(10-38-044) 422-95-64

E-mail: ftcsch@imp.kiev.ua

Сайт УЗФТШ: www.mfti.in.ua

Ниже приводятся задачи вступительных заданий по физике, математике, информатике и химии. Номера задач, обязательных для выполнения (для поступления на заочное и очно-заочное отделения), и максимальные баллы приводятся в таблице (номера классов указаны на текущий 2017/18 учебный год):

Номера задач

	7 класс	8 класс	9 класс	10 класс
Физика	1–5	5–9	8–12	11–15
Математика	1–5	3–8	5–11	7–14
Информатика		1–5	6–10	9,11–14
Химия		1–5	6–10	7,9–13

Максимальные баллы

	7 класс	8 класс	9 класс	10 класс
Физика	25	25	25	25
Математика	18	24	26	29
Информатика		5	10	14
Химия		25	25	30

ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

ФИЗИКА

1. Есть два одинаковых по размерам бруска. Масса бруска из железа на 51 г больше массы бруска из алюминия. Плотности железа и алюминия $\rho_1 = 7{,}8$ г/см^3 и $\rho_2 = 2{,}7$ г/см^3. Найдите массу бруска из железа.

2. Первую треть пути автомобиль ехал со скоростью $v_1 = 30$ км/ч, вторую треть пути – $v_2 = 60$ км/ч, последнюю треть пути – $v_3 = 90$ км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля.

3. Две пружины скреплены одними концами, а за свободные другие концы их растягивают. Жесткости первой и второй пружин $k_1 = 80$ Н/м и $k_2 = 60$ Н/м. Удлинение первой пружины $x_1 = 6$ см. Найдите удлинение второй пружины.

4. При какой минимальной площади льдины толщиной $H = 30$ см она сможет удержать над водой человека массой $m = 70$ кг?

5. Деталь из алюминия массой $m = 270$ г подвешена на динамометре и полностью погружена в жидкость. Динамометр показывает $F = 1{,}9$ Н. Определите плотность жидкости. Плотность алюминия $\rho_1 = 2{,}7$ г/см^3.

6. Два мальчика массами $m_1 = 50$ кг и $m_2 = 30$ кг качаются, сидя на концах однородной доски длиной $l = 3{,}6$ м и массой $m = 20$ кг. На каком расстоянии от центра доски должна быть точка опоры?

7. В сосуде из железа массой $m_1 = 150$ г находятся $m_2 = 750$ г воды и $m_3 = 300$ г льда при температуре $t_1 = 0$ °C. В сосуд долили воду при температуре $t_2 = 100$ °C. Общая температура стала $\theta = 32$ °C. Найдите массу долитой воды. Теплообменом с окружающей средой пренебречь. Удельная теплоемкость железа $c_1 = 460$ Дж/(кг·К), удельная теплоемкость воды $c_2 = 4200$ Дж/(кг·К). Удельная теплота плавления льда $\lambda = 335$ кДж/кг.

8. На сколько километров пути хватит $V = 10$ л бензина для двигателя автомобиля, развивающего мощность $P = 15$ кВт при скорости $v = 72$ км/ч? Двигатель имеет КПД $\eta = 27\%$. Плотность бензина $\rho = 700$ кг/м^3, удельная теплота сгорания бензина $q = 46000$ кДж/кг.

9. Сопротивление двух последовательно соединенных одинаковых резисторов на 45 Ом больше, чем сопротивление при их параллельном соединении. Найдите сопротивление одного резистора.

10. Камень, брошенный вертикально вверх, возвратился к месту броска через $t = 3$ с. С какой скоростью был брошен камень? Сопротивлением воздуха пренебречь.

11. Бруски массами $m_1 = 0{,}2$ кг и $m_2 = 0{,}3$ кг связаны легкой нитью и находятся на гладком горизонтальном столе. К бруску массой m_1 приложили горизонтальную силу $F_1 = 1$ Н, направленную вдоль нити, а к другому бруску приложили в противоположном направлении силу $F_2 = 1{,}5$ Н. Бруски пришли в движение, а нить стала натянутой. Найдите силу натяжения нити.

12. Человек услышал раскаты грома через $t = 6$ с после того, как сверкнула молния. На каком расстоянии от человека произошел электрический разряд? Скорость звука в воздухе $v = 330$ м/с.

13. Азот массой $m = 9$ г находится в цилиндре с вертикальными стенками под поршнем с гирей. Площадь поршня $S = 90$ см^2. После нагревания газа на $\Delta T = 25$ К поршень поднялся на высоту $H = 7$ см. Найдите массу поршня с гирей. Наружное атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Трением поршня о стенки цилиндра пренебречь.

14. Гелий массой $m = 8$ г нагрели изобарно на $\Delta T = 50$ К. Какую работу совершил газ?

15. Известно, что атмосфера Земли имеет положительный электрический заряд, а сама Земля – такой же по модулю отрицательный заряд. Напряженность электрического поля вблизи поверхности Земли $E = 130$ В/м, радиус Земли $R = 6400$ км. Найдите заряд Земли.

МАТЕМАТИКА

1 (2 балла). К двадцатипроцентному раствору щелочи добавили 25 кг щелочи, в результате чего концентрация раствора стала равна 36%. Найдите массу полученного раствора.

2 (3 б.). Пассажир, едущий из A в B, первую треть затраченного на путь времени ехал на машине, а оставшиеся две трети времени – на автобусе. Если бы он весь путь проехал на автобусе, это заняло бы на 30% больше времени. Во сколько раз быстрее проходит путь из A в B машина, чем автобус? (Скорости машины и автобуса считать постоянными.)

3 (3 б.). Один из углов треугольника равен α. Найдите угол между биссектрисами внешних углов, проведенными из вершин двух других углов.

4 (5 б.). а) (2 б.) Постройте график функции $y = \dfrac{(8-x)(2+x)-6x}{|x|-4}$.

б) (3 б.) Найдите все значения a, при которых прямая $y = a(x+5)+2$ имеет с построенным графиком ровно одну общую точку.

5 (5 б.). Найдите наименьшее натуральное число, которое записывается одинаковыми цифрами и делится на 693.

6 (3 б.). Резервуар снабжается водой по пяти трубам. Первая наполняет его за 1 ч; вторая, третья и четвертая вместе – за 15 мин; вторая, третья и пятая – за 10 мин; четвертая и пятая – за 20 мин. За какое время его наполнят все 5 труб вместе?

7 (5 б.). Средняя линия трапеции равна 8, а отрезок, соединяющий середины ее оснований, равен 3. Найдите основания трапеции, если углы при ее меньшем основании равны $160°$ и $110°$.

8 (3 б.). Определите, является ли число $\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|} - \sqrt{\left|40\sqrt{2}+57\right|}$ рациональным. Ответ обоснуйте.

9 (3 б.). Решите уравнение

$$x\sqrt{36x+1261} = 18x^2 - 17x.$$

10 (4 б.). Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, при этом $AB : CD = 1 : 2$, $BD : AC = 2 : 3$. Найдите $AD : BC$.

11 (3 б.). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+4y^2}{xy} = 5, \\ 2x^2 - y^2 = 31. \end{cases}$$

12 (3 б.). Решите уравнение

$$\cos x \cos 2x \sin 3x = \frac{\sin 2x}{4}.$$

13 (4 б.). Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2+x-6}+3x+13}{x+5} > 1.$$

14 (4 б.). Найдите все пары натуральных чисел (x, y), удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2017}.$$

ИНФОРМАТИКА

1 (1 балл). Рассеянный профессор собирался на работу в университет. Открыв ящик комода, он обнаружил, что там вперемешку лежит большое количество одинаковых перчаток. Профессор точно помнит, что 12 из них – левые, а 17 – правые. Какое минимальное количество перчаток ему нужно взять из комода, чтобы гарантированно иметь на руках пару? Ответ обоснуйте.

2 (1 б.). Почтовый индекс в некоторой стране состоит из одной первой буквы (используется 25-символьный алфавит) и трех десятичных цифр, среди которых может быть не более двух 0. Сколько различных индексов можно построить? Ответ обоснуйте.

3 (1 б.). Сколько записей в нижеследующем фрагменте экзаменационной ведомости удовлетворяют условию

«`(Пол = м И Физика >= 3 ) ИЛИ Химия = 5`»?

Фамилия	Пол	Алгебра	Химия	Физика	История
Аксенов	м	5	4	5	3
Голова	ж	3	5	4	5
Григоренко	ж	5	5	4	5
Иванов	м	4	5	3	5
Сергеева	ж	4	3	4	4
Черепанов	м	3	2	5	3

4 (1 б.). В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в бутылке, сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом, в банке не лимонад и не вода; стакан стоит между банкой и сосудом с молоком. В каком сосуде находится каждая из жидкостей? Ответ обоснуйте.

5 (1 б.). Сколько единиц в двоичной записи десятичного числа 438? Ответ обоснуйте.

6 (1 б.). Запишите по правилам синтаксиса языка программирования Паскаль следующее логическое высказывание: «Число X четное и не принадлежит отрезку [6; 8]».

7 (2 б.). Отметьте штриховкой на координатной плоскости область, в которой и только в которой выполняется приведенное логическое выражение (имеет значение true):

$(x <= 1) > (x^2 + y^2 <= 9)$

Если граница входит в область, то обозначайте ее сплошной линией, если не входит, то – штриховой.

8 (2 б.). Допустим ли следующий оператор присваивания при y=3? Если да, то выпишите тип и итоговое значение переменной «y», если нет, то напишите, почему.

```
y := round(5*9 Div y Mod 7/3/y) –
– Trunc(0.724)
```

9 (2 б.). Исполнитель Черепашка перемещается на экране компьютера, оставляя след в виде линии. В каждый конкретный момент известно положение исполнителя и направление его движения. У исполнителя существуют две команды:

`Вперёд n` (*n* – целое число) – вызывает передвижение Черепашки на *n* шагов в направлении движения.

`Направо m` (*m* – целое число) – вызывает изменение направления движения на *m* градусов по часовой стрелке.

Запись

```
Повтори k [Команда1 Команда2]
```

означает, что последовательность команд в скобках повторится *k* раз.

Напишите программу для данного исполнителя, которая приведет к появлению на экране правильного треугольника (у которого все стороны равны).

10 (3 б.). На вход программе подается последовательность натуральных чисел. Признак конца ввода – ноль. Напишите программу, которая находит сумму чисел, которые делятся на 13 и последняя цифра которых равна 7. Числа не превосходят 10000. Массивы не использовать.

11 (2 б.). Какие из перечисленных ниже имен удовлетворяют данному условию? Ответ обоснуйте.

```
¬(¬ последняя буква гласная →
первая буква согласная) & вторая
буква согласная
```

```
ИРИНА, АРТЁМ, СТЕПАН, МАРИЯ
```

12 (2 б.) Сколько значащих нулей в двоичной записи шестнадцатеричного числа $28FA,E4_{16}$? Ноль называется значащим, если удаление его из записи числа ведет к изменению значения числа. Приведите решение задачи.

13 (4 б.). Напишите на языке программирования Паскаль или в виде блок-схемы алгоритм, позволяющий вычислить сумму всех делителей введенного натурального числа.

14 (4 б.). Напишите на языке программирования Паскаль или С либо в виде блок-схемы алгоритм, определяющий количество различных корней в обобщенном квадратном уравнении. На вход алгоритму подаются коэффициенты a, b, c, на выходе нужно вывести количество различных корней.

ХИМИЯ

1 (5 б.). а) В воде массой 80 г растворили 20 г сульфата натрия. Какова массовая доля соли в полученном растворе?

б) Какую массу воды нужно добавить к этому раствору, чтобы массовая доля соли стала равна 12,5%?

в) Какие массы приготовленного 12,5%-го

раствора и раствора с концентрацией сульфата натрия 20% следует смешать, чтобы приготовить 300 г 14%-го раствора?

г) Какова молярная концентрация [моль/л] раствора сульфата натрия в приготовленном 14%-м растворе массой 300 г, если известно, что плотность этого раствора 1,13 г/мл?

2 (5 б.). Осуществите цепочку превращений:

$$\begin{tikzcd} & \text{А} \arrow[r, "HCl_{\text{конц}}"] & \text{В} \arrow[r, "Fe"] & \text{Д} \\ KMnO_4 \arrow[ur, "t"] \arrow[dr] & & & \\ & \text{Б} \arrow[r, "FeO"] & \text{Г} \arrow[uur, "HCl"] & \end{tikzcd}$$

Определите вещества А, Б, В, Г, Д. Укажите условия проведения реакций.

3 (5 б.). Какие из нижеперечисленных веществ будут взаимодействовать с раствором гидроксида натрия: Mg, Zn, Cl_2, SiO_2, Si, Al_2O_3, KNO_3, $CuSO_4$? Напишите уравнения возможных химических реакций и укажите условия их проведения.

4 (5 б.). При прокаливании смеси карбоната и гидрокарбоната натрия ее масса уменьшилась на 22,63%. Рассчитайте массовую долю карбоната натрия в исходной смеси.

5 (5 б.). В раствор голубого цвета опустили серебристо-серое простое вещество. Через некоторое время голубая окраска раствора исчезла и появилось нерастворимое в воде вещество красного цвета. Раствор отделили и добавляли к нему раствор щелочи до выпадения серо-зеленого осадка, который при воздействии на него пероксидом водорода стал бурым. Осадок высушили, прокалили и пропустили через него бесцветный газ без запаха. В результате наблюдали изменение бурой окраски вещества на темно-серую. Напишите уравнения всех описанных реакций и укажите условия их проведения.

6 (5 б.). Даны вещества: медь, кальций, оксид железа (III), оксид бария, оксид азота (II), оксид кремния (IV), оксид азота (V), сульфат меди, хлорид калия, карбонат магния. Выберите из этих веществ те, из которых можно в одну стадию получить гидроксид (кислоту или основание). Приведите примеры соответствующих реакций и укажите их тип.

7 (7 б.). Осуществите цепочку превращений:

$$\begin{tikzcd} Ca_3(PO_4) \arrow[r] & \text{А} \arrow[r] & \text{Б} \arrow[r] & PH_3 \arrow[d] \\ Na_2HPO_4 \arrow[u] & NaH_2PO_4 \arrow[l] & & H_3PO_4 \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

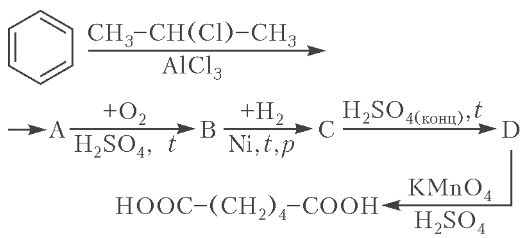
8 (3 б.). Растворы хлорида алюминия и карбоната натрия слили. Выпавший белый аморфный осадок отделили и растворили в избытке щелочи. Затем к полученному раствору стали по каплям добавлять азотную кислоту до тех пор, пока не выпал белый аморфный осадок. Напишите уравнения описанных реакций.

9 (5 б.). Смесь Ва и ВаО массой 44,3 г растворили в воде и получили 10%-й раствор гидроксида бария. При растворении выделилось 2,24 л газа (н.у.). В каком объеме воды растворили исходную смесь?

10 (5 б.). Термическое разложение карбоната кальция проводили при 881,3 °С и нормальном давлении. Через некоторое время выделилось 28,4 л газа, а масса твердого остатка составила 36,8 г. Определите массу исходного карбоната кальция, взятого для разложения.

11 (4 б.). Через раскаленный оксид меди пропустили аммиак. Образовавшийся при этом газ пропустили над нагретым магнием. Полученное твердое вещество растворили в горячей воде, а выделившийся при этом газ пропустили через раствор сульфата алюминия, в результате чего выпал белый осадок. Напишите уравнения описанных реакций.

12 (5 б.). Осуществите цепочку превращений:



13 (4 б.). Нагревание этилового спирта с концентрированной серной кислотой до 140 °С приводит к образованию смеси, состоящей из двух органических веществ с плотностью по водороду 18,26. Определите выход каждого компонента в полученной смеси в расчете на этиловый спирт, который прореагировал на 87%.

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. с. 22)

1. Задача имеет разные решения в зависимости от того, какой смысл вкладывается в слово «квадрат» (рис.1).

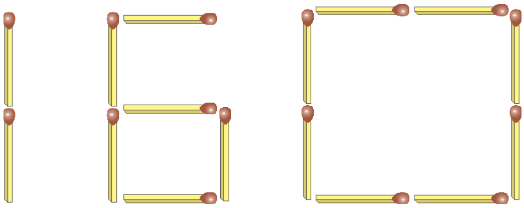


Рис. 1

2. Можно.
Например, 0,13 + 0,24 + 0,65 + 0,98 = 2.

3. Один из возможных примеров показан на рисунке 2.

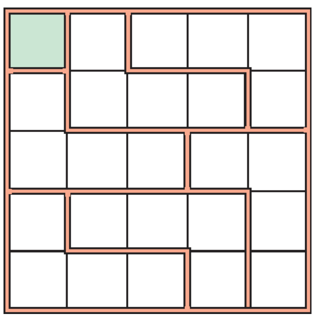


Рис. 2

4. 7 или 8.

Призовой фонд составляет $\frac{2}{3}$ от всех поступивших денег. Поэтому победитель турнира получил $\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$ от поступивших денег. Значит, если число участников не больше восьми, то взнос превышает награду за первое место, а иначе – не превышает. Итак, количество участников не больше восьми.

Так как победитель получил $\frac{1}{6}$ от призового фонда, то остальные участники разделили $\frac{5}{6}$ фонда. При этом победитель получил больше каждого из остальных. Поэтому каждый из оставшихся получил меньше $\frac{1}{6}$ фонда, а значит, остальных участников больше, чем $\frac{5}{6}:\frac{1}{6}=5$ человек.

Таким образом, в турнире могли участвовать 7 или 8 человек. Обе этих ситуации возможны. Для этого, например, не выигравшие участники могли поровну разделить остающиеся $\frac{5}{6}$ призового фонда (получив по $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}<\frac{1}{6}$ или по $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{7}<\frac{1}{6}$ призового фонда).

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №11)

1. Если выбраны числа 7, 8, 9, 10, то у Вани получилось 78910, а у Миши 10987.

2. Пусть ладья сделает 7 ходов таким образом: ходы на 1, 6 и 7 клеток – вверх, а ходы на 2, 3, 4 и 5 клеток – вправо. Тогда она сместится по вертикали на 1 + 6 + 7 = 14 клеток, т.е. окажется в верхней строчке, и по горизонтали на 2 + 3 + + 4 + 5 = 14 клеток, т.е. окажется в правом столбце.

3. Девочка в желтой шапке старше Жени на 3 года.

Пусть *С* – возраст Саши, *К* – Клары, *З* – Зины, *Ж* – Жени, *с* – девочки в синей шапке, *к* – девочки в красной шапке, *з* – девочки в зеленой шапке, *ж* – девочки в желтой шапке. Тогда сумма возрастов четырех девочек, с одной стороны, равна *С* + *К* + *З* + *Ж*, а с другой, она равна *с* + *к* + *з* + *ж*. Отсюда получаем, что *ж* – *Ж* = = *С* – *с* + *К* – *к* + *З* – *з* = 1 + 1 + 1 = 3.

4. Предположим, что Буратино не обсчитался, тогда при каких-то различных натуральных a, b, c верно, что $a+b-c=ab:c$. Домножив обе части на c, получим равенство $ac+bc-c^2=ab$ и преобразуем: $(a-c)(c-b)=0$. А это невозможно, так как a, b и c – различные числа.

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

(см. «Квант» №10)

5. 1200.

Перепишем равенство:

$$100\cdot\text{Т}+\text{ЫР}+100\cdot\text{П}+\text{ЫР}=800\cdot\text{Д}+8\cdot\text{ЫР}.$$

Преобразуем его: $100\cdot(\text{Т}+\text{П}-8\cdot\text{Д})=6\cdot\text{ЫР}$. Левая часть делится на 100, а значит, и правая тоже. При этом правая часть меньше $6\cdot100$ и делится на 6. Значит, она равна 300. Поэтому ЫР = 50 и $\text{Т}+\text{П}-8\cdot\text{Д}=3$. Каким может быть Д? Если $\text{Д}\ge2$, то $\text{Т}+\text{П}\ge19$ – противоречие. Значит, Д = 1. Получаем, что

$$\text{ТЫР}+\text{ПЫР}=8\cdot150=1200.$$

6. Пусть груз можно увезти на трех 9-тонных грузовиках. Покажем, как из каждого 9-тонного грузовика переложить все ящики в два 6-тонных – получим противоречие. Так как ящики можно увезти на семи 6-тонных грузовиках, то каждый ящик весит не более 6 тонн. Будем перемещать по очереди ящики с 9-тонного грузовика в 6-тонный, беря каждый раз самый тяжелый ящик, пока либо они не кончатся (тогда все ящики влезли в один грузовик), либо 6-тонный грузовик не загрузится хотя бы наполовину (тогда оставшиеся ящики поместятся в другой грузовик). Это удастся сделать, потому что первый ящик поместится, а вес каждого следующего ящика меньше, чем суммарный вес груза, уже лежащего в 6-тонном грузовике. Если ящики в 9-тонном грузовике остались, то переложим их все во второй 6-тонный грузовик.

7. Отметим числа вида p^9, где p – простое. Отмеченных чисел бесконечно много, так как простых чисел бесконечно много. Значит, среди отмеченных найдутся три числа одного цвета. Их произведение имеет вид $p^9q^9r^9$, где p, q и r – различные простые числа. У числа такого вида все делители имеют вид $p^aq^br^c$, где $0 \le a,b,c \le 9$. Все эти делители различны и их $10^3 = 1000$ штук.

8. а) Можно.

Количество кубиков делится на 8, поэтому кубики можно разбить на группы по восемь. Из каждой группы сложим кубик с ребром 2. Кубики расположим так, чтобы они не касались друг друга.

б) Нельзя.

Предположим, что можно. Назовем *граничными* квадраты, которые являются общими гранями двух кубиков. Посчитаем, сколько их всего. На каждом кубике по 3 граничных квадрата, тогда на всех кубиках мы насчитаем $2017 \cdot 3$ граничных квадратов. Но при этом подсчете каждый граничный квадрат учтен по два раза, так как находится на двух кубиках. Значит, граничных квадратов $2017 \cdot 3/2$, но это число нецелое. Противоречие.

Замечание. Также можно было рассмотреть граф, вершины которого соответствуют кубикам, а ребра соединяют вершины, соответствующие соседним кубикам. В этом графе 2017 вершин степени 3. Но по лемме о рукопожатиях в любом графе количество вершин нечетной степени четно. (Рассуждения выше по сути повторяют доказательство леммы о рукопожатиях.)

в) Можно.

Составим две фигурки по 17 кубиков, как показано на рисунке 3, а затем поставим одну фигурку на другую.

Таким образом получим фигурку из 34 кубиков, каждый из которых касается трех других.

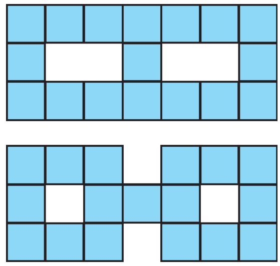


Рис. 3

Оставшиеся кубики поделим на 248 групп по 8 кубиков ($2018 = 248 \cdot 8 + 34$). Из каждой группы сложим кубик, как в пункте а).

ИНСТИТУТ КРИПТОГРАФИИ, СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ АКАДЕМИИ ФСБ РОССИИ

МАТЕМАТИКА

МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ НА БАЗЕ ВЕДОМСТВЕННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УЧРЕЖДЕНИЙ

Избранные задачи

1. $\dfrac{2035153}{9999}$.

Воспользовавшись правилом перевода периодической десятичной дроби в обыкновенную, а также формулой для суммы первых 2017 членов арифметической прогрессии, найдем

$$0,(0001) + 0,(0002) + \ldots + 0,(2017) =$$

$$= \frac{1}{9999} + \frac{2}{9999} + \ldots + \frac{2017}{9999} = \frac{1009 \cdot 2017}{9999} = \frac{2035153}{9999}.$$

2. Рассмотрим уравнение $Axy + Bxz + Cyz = N$. Пусть числа A и B взаимно просты. Тогда существуют такие целые числа y и z, что $Ay + Bz = 1$. Следовательно, $x = N - Cyz$. Поэтому наше уравнение имеет следующее решение в целых числах: $y = -5$, $z = 3$, $x = N + 27 \cdot 3 \cdot 5$. Утверждение доказано.

3. $g(x) = 64 - 1216x + 416x^2 - 40x^3 + x^4$.

Обозначим коэффициенты заданного многочлена (кроме старшего) через a_0, a_1, a_2, a_3. Тогда по условию задачи имеем

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^4 =$$

$$= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Вместе с многочленом $f(x)$ рассмотрим многочлен $h(x)$, имеющий корни $\{-x_1, -x_2, -x_3, -x_4\}$:

$$h(x) = (x + x_1)(x + x_2)(x + x_3)(x + x_4) =$$

$$= a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + x^4.$$

Рассмотрим многочлен $G(x) = f(x)h(x)$:

$$G(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)\times$$
$$\times(x + x_1)(x + x_2)(x + x_3)(x + x_4) =$$
$$= \left(x^2 - x_1^2\right)\left(x^2 - x_2^2\right)\left(x^2 - x_3^2\right)\left(x^2 - x_4^2\right).$$

Заменой переменной $y = x^2$ получаем требуемый многочлен $g(y)$, поскольку

$$g(y) = \left(y - x_1^2\right)\left(y - x_2^2\right)\left(y - x_3^2\right)\left(y - x_4^2\right).$$

В нашем случае:

$$f(x) = 8 + 32x - 12x^2 - 4x^3 + x^4,$$
$$h(x) = 8 - 32x - 12x^2 + 4x^3 + x^4,$$
$$G(x) = f(x)h(x) = 64 - 1216x^2 + 416x^4 - 40x^6 + x^8,$$
$$g(y) = 64 - 1216y + 416y^2 - 40y^3 + y^4.$$

4. Наименьшее количество переливаний равно 1000. При этом могут быть использованы максимум 73 пробирки вида *C*.

Пусть пробирок вида *A*, *B* и *C* взяли *a*, *b* и *c* штук соответственно. По условию,

$$0{,}1a + 0{,}2b + 0{,}9c = 0{,}2017\cdot(a + b + c) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1000\cdot(a + 2b + 9c) = 2017\cdot(a + b + c).$$

Левая часть последнего равенства делится на 1000, следовательно, на 1000 должна делиться и правая часть. Значит, наименьшее возможное значение суммы $a + b + c$ равно 1000. Покажем, что эта оценка достижима, т.е. докажем, что существуют неотрицательные целые числа *a*, *b* и *c* такие, что

$$\begin{cases} a + b + c = 1000, \\ a + 2b + 9c = 2017, \\ a \le 500,\ b \le 500,\ c \le 500. \end{cases} \qquad (1)$$

Последние три неравенства служат необходимым и достаточным условиям того, что удастся избежать использования пробирок одного вида при двух последовательных переливаниях.

Из первых двух уравнений системы (1) находим

$$a = 7c - 17,\ b = 1017 - 8c. \qquad (2)$$

Подставив эти выражения в последние три неравенства системы (1), получим

$$7c \le 517,\ 8c \ge 518,\ c \le 500.$$

Отсюда наибольшее значение *c* равно 73. Ему соответствующие значения *a* и *b* могут быть найдены из (2). Они, очевидно, удовлетворяют неравенствам системы (1). Таким образом, разрешимость в неотрицательных целых числах системы (1) доказана.

5. 5035485.

Пусть $\sigma(N)$ – сумма квадратов натуральных делителей натурального числа *N*. Заметим, что для любых двух взаимно простых натуральных чисел *a* и *b* справедливо равенство $\sigma(ab) = \sigma(a)\cdot\sigma(b)$. Действительно, любой делитель произведения *ab* есть произведение делителя *a* и делителя *b*. И наоборот: умножив делитель *a* на делитель *b*, получим делитель произведения *ab*. Это же, очевидно, верно и для квадратов делителей (квадрат делителя произведения равен произведению квадратов делителей сомножителей и наоборот).

Рассмотрим разложение числа *N* на простые множители: $N = p_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot p_n^{k_n}$. Здесь p_i – попарно различные простые числа и все $k_i \in N$. Тогда

$$\sigma(N) = \sigma\left(p_1^{k_1}\right)\cdot\ldots\cdot\sigma\left(p_n^{k_n}\right) \text{ и}$$
$$\sigma\left(p^k\right) = 1 + p^2 + p^4 + \ldots p^{2k}.$$

Поскольку $1800 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5^2$, то

$$\sigma(1800) =$$
$$= \left(1 + 2^2 + 2^4 + 2^6\right)\cdot\left(1 + 3^2 + 3^4\right)\cdot\left(1 + 5^2 + 5^4\right) =$$
$$= 5035485.$$

6. Из условия следует, что $c > b$ (рис.4). Найдем на отрезке *AB* точку *D* такую, что $AC = AD$.

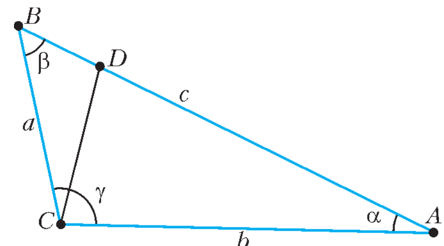


Рис. 4

Тогда треугольник *ACD* равнобедренный и $\angle ACD = \angle ADC = 90° - \alpha/2$. Угол *ADC* – внешний угол треугольника *CBD*. Значит, $\angle BCD + \beta = \angle ADC = 90° - \alpha/2 = \alpha + \beta$. Тогда $\angle BCD = \alpha$, и треугольники *BCD* и *ABC* подобны. Имеем $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BC}{AB}$, или $\dfrac{c - b}{a} = \dfrac{a}{c}$, откуда следует искомое соотношение.

7. 12.

Из рисунка 5 следует, что $\angle XBM = \angle ZAM = \frac{1}{2}\overset{\smile}{BM}$, значит, треугольники *BMX* и *ZAM* подобны, поэтому $\dfrac{XM}{ZM} = \dfrac{BM}{AM}$ Аналогично, $\angle ABM = \angle YAM = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AM}$, следовательно, треугольники *AMY* и *BMZ* подобны, поэтому $\dfrac{YM}{ZM} = \dfrac{AM}{BM}$. Отсюда

$$ZM^2 = XM\cdot YM = 24\cdot 6 = 144,\ ZM = 12.$$

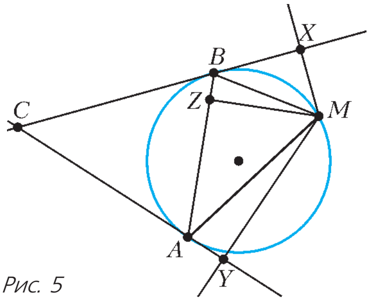


Рис. 5

8. $102°$.

Проведем отрезки BD и CE (рис.6). Пусть они пересекаются в точке O. Заметим, что треугольники BCD и CDE равнобедренные с углом $108°$

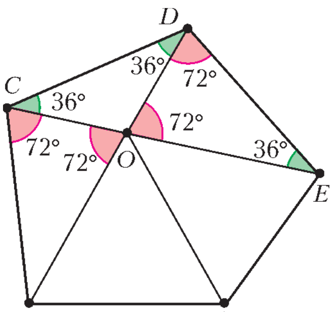


Рис. 6

при вершине, а значит, углы при основании равны $36°$ (они отмечены на рисунке зеленым цветом). Тогда $\angle BCE = \angle BDE = 72°$. Угол COD равен $108°$ (так как в треугольнике COD два угла по $36°$). Поэтому $\angle COB = 180° - 108° = 72°$. Углы по $72°$ отмечены на рисунке красным цветом. Получаем, что треугольники CBO и DEO равнобедренные. Значит, $AB = BO = BC = CD = DE = EO = x$. Заметим, что $\angle OBA = 96° - 36° = 60°$, т.е. треугольник OBA равнобедренный с углом $60°$ при вершине, т.е. равносторонний. Поэтому $AO = x$. Вычислим угол AOE: $\angle AOE = \angle EOB - \angle AOB = 108° - 60° = 48°$. Треугольник AOE равнобедренный с углом $48°$ при вершине. Поэтому $\angle OEA = (180° - 48°)/2 = 66°$. Получаем, что угол E пятиугольника равен

$$\angle AED = \angle AEO + \angle OED = 66° + 36° = 102°.$$

9. Рассмотрим числа вида 10^k, $k = 0, 1, \ldots$, а именно: 1, 10, 100, 1000,… Среди этих чисел выберем n чисел, имеющих одинаковые остатки от деления на n (это можно сделать, поскольку чисел вида 10^k бесконечно много, а остатков от деления на n ровно n). В качестве искомого N возьмем сумму этих n чисел. Утверждение доказано.

10. Нельзя.

Если таблица 2 (рис.7) получена из таблицы 1 одним из указанных действий, то

Таблица 1 $\begin{array}{|c|c|}\hline a_1 & b_1 \\ \hline c_1 & d_1 \\ \hline\end{array}$ Таблица 2 $\begin{array}{|c|c|}\hline a_2 & b_2 \\ \hline c_2 & d_2 \\ \hline\end{array}$

Рис. 7

$a_1d_1 - b_1c_1 = a_2d_2 - b_2c_2$, что для таблиц A и B не выполнено. Поэтому указанным способом получить таблицу B из таблицы A нельзя.

11. Нельзя.

Определение. Рассмотрим таблицу 2 на 2 вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Число $ad - bc$ называют *определителем* этой таблицы.

Утверждение. Пусть в составленной из целых чисел таблице

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

у любой подтаблицы размера 2 на 2 (т.е. подтаблицы вида $\begin{pmatrix} a_{i,j} & a_{i,j+k} \\ a_{i+k,j} & a_{i+k,j+k} \end{pmatrix}$, $i, j, i+k, j+k \in \overline{1, \ldots, 5}$) определитель делится на целое число m. Проделаем с таблицей (1) одно из указанных в задаче действий. У получившейся в результате таблицы определитель любой ее подтаблицы размера 2 на 2 также будет делиться на m.

Доказательство. Проведем доказательство для действия 1 из условия задачи (для столбцов доказательство аналогично). Пусть, без ограничения общности, к первой строке прибавляется вторая, умноженная на целое число b:

$$\begin{pmatrix} a_{11}+ba_{21} & a_{12}+ba_{22} & a_{13}+ba_{23} & a_{14}+ba_{24} & a_{15}+ba_{25} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

В получившейся таблице все подтаблицы 2 на 2, не содержащие элементы первой строки таблицы (2), остались без изменения, и потому их определитель, естественно, на m по-прежнему делится. Поэтому проверим, что в таблице (2) определители подтаблиц 2 на 2, включающие элементы первой строки, делятся на m. Это нужно проверить в двух случаях: 1) подтаблица 2 на 2 составлена из элементов первой и второй строки таблицы (2) и 2) таблица 2 на 2 составлена из элементов первой и еще какой-то (отличной от второй) строки таблицы (2).

Случай 1. Определитель таблицы

$$\begin{pmatrix} a_{11}+ba_{21} & a_{12}+ba_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

равен

$$a_{22}\left(a_{11}+ba_{21}\right)-a_{21}\left(a_{12}+ba_{22}\right)=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12},$$

что совпадает с определителем соответствующей подтаблицы таблицы (1), а значит, делится на m по условию.

Случай 2. Рассмотрим подтаблицу, составленную из элементов первой и, например, третьей строки: $\begin{pmatrix} a_{11}+ba_{21} & a_{12}+ba_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$. Ее определитель

$$a_{32}\left(a_{11}+ba_{21}\right)-a_{31}\left(a_{12}+ba_{22}\right) \qquad (3)$$

равен $a_{32}a_{11}-a_{31}a_{12}+b\left(a_{32}a_{21}-a_{31}a_{22}\right)$. Числа $a_{32}a_{11}-a_{31}a_{12}$ и $a_{32}a_{21}-a_{31}a_{22}$ представляют собой определители подтаблиц таблицы (1), а значит, делятся на m. Следовательно, на m делится и определитель (3). Утверждение доказано.

0	0	0	0	1
0	0	0	2	0
0	0	3	0	0
0	6	0	0	0
9	0	0	0	0

Рис. 8

Остается заметить, что определители всех подтаблиц 2 на 2 таблицы A делятся на 3, в то время как таблица B содержит подтаблицу (на рисунке 8 она выделена цветом), определитель которой на 3 не делится. Значит, получить таблицу B из таблицы A указанными действиями нельзя.

12. $-\dfrac{\pi}{4}$.

Заметим, что

$$\sin^3 x-\cos^3 x=4\sqrt{2}\sin^3 x\cos^3 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin x-\cos x)\left(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x\right)= 4\sqrt{2}\sin^3 x\cos^3 x .$$

Замена: $\sin x-\cos x=t, \sin x\cos x=\dfrac{1-t^2}{2}$. Тогда $t\left(3-t^2\right)=\sqrt{2}\left(1-t^2\right)^3$. После замены $t=z\sqrt{2}$ уравнение примет вид $z\left(3-2z^2\right)-\left(1-2z^2\right)^3=0$. Имеется корень $z=-1$, и левая часть может быть разложена на множители следующим образом:

$$(z+1)\left(8z^5-8z^4-4z^3+2z^2+4z-1\right)=0 . \qquad (*)$$

Так как $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)$, то $t=\sin x-\cos x= =\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)<-1$. Следовательно, $z<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. При таких z многочлен пятой степени в левой части (*) принимает только отрицательные значения, так как $\left|8z^5\right|>\left|4z^3\right|$ и $\left|8z^4\right|>\left|2z^2\right|$. Поэтому $z=-1$ – единственный корень уравнения (*). Далее легко найти, что $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$, и $x=-\dfrac{\pi}{4}$.

13. $a=24, b=-32$.

Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 – корни нашего уравнения (возможно, среди них есть одинаковые). Следовательно, многочлен в левой части уравнения раскладывается на множители:

$$x^4-8x^3+ax^2+bx+16= =\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\left(x-x_4\right).$$

Раскрывая в правой части скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$x_1+x_2+x_3+x_4=8, \quad x_1x_2x_3x_4=16.$$

Известно, что среднее геометрическое неотрицательных чисел не превосходит их среднего арифметического, но в нашем случае они равны:

$$\frac{x_1+x_1+x_1+x_1}{4}=\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}=2.$$

Следовательно, $x_1=x_2=x_3=x_4=2$, и

$$x^4-8x^3+ax^2+bx+16=(x-2)^4 .$$

Отсюда $a=24, b=-32$.

14. 1) N = 2332. 2) Дима выбирает первые два числа a_1 и a_2 произвольно. На каждом шаге новые числа b_1 и b_2 он выбирает так, что $\left|a_2-a_1\right|=\left|b_2-b_1\right|>0$.

Найдем наименьший номер страницы N, на которой будут записаны все числа множества $\{0,1,2, \ldots ,p-1\}$, где p =2333 – простое число. Покажем, что на новой странице различных чисел будет записано по крайней мере на одно больше, чем на предыдущей. Докажем это утверждение методом от противного.

Пусть A – множество различных чисел, полученных на данный момент:

$$A=\left\{a_1,\ldots,a_m\right\}\neq\{0,1,\ldots,p-1\} . \qquad (*)$$

Далее Дима выбрал два различных числа b_1, b_2 и прибавил их ко всем числам множества A, но количество сумм в результате не увеличилось. Таким образом, прибавив к числам из множества A сначала число b_1, а затем число b_2, он получил один и тот же набор сумм:

$$\left\{r_p\left(a_1+b_1\right),\ldots,r_p\left(a_m+b_1\right)\right\}= =\left\{r_p\left(a_1+b_2\right),\ldots,r_p\left(a_m+b_2\right)\right\}$$

(здесь $r_p(m)$ – остаток от деления числа m на число p). Следовательно, для любого $a \in A$ существует такой $c \in A$, что $r_p(a+b_2) = r_p(c+b_1)$. Другими словами, для любого $a \in A$ верно, что $r_p(a+(b_2-b_1)) = r_p(c) \in A$. Значит, для любого $a \in A$ и для всех $k = 0, 1, 2, \dots, p-1$ верно, что $r_p(a+k(b_2-b_1)) \in A$. Но для таких k числа вида $r_p(a+k(b_2-b_1))$ между собой различны. (Действительно, пусть числа $r_p(a+k_1(b_2-b_1))$ и $r_p(a+k_2(b_2-b_1))$ совпадают. Тогда разность $(a+k_1(b_2-b_1))-(a+k_2(b_2-b_1))$ делится на p, а следовательно, на p делится произведение $(k_1-k_2)(b_2-b_1)$, что невозможно, так как каждый сомножитель по абсолютной величине не превосходит $p-1$, а число p – простое.) Получается, что множество A уже содержит p чисел, что противоречит (*).

Итак, доказано, что каждый раз количество различных чисел увеличивается по крайней мере на 1. Значит, самое позднее на странице с номером $p-1$ будут записаны все p чисел. Эта оценка достижима: если каждый раз выбирать числа 0 и 1, то все числа впервые будут записаны именно на странице с номером $p-1$ и не раньше. Следовательно, искомое N равно $p-1$.

Чтобы для получения всех чисел Дима заполнял в тетради максимальное (равное $p-1$) количество страниц, ему следует выбирать числа так, чтобы количество новых различных сумм увеличивалось каждый раз ровно на 1. Для этого необходимо и достаточно, чтобы полученные на каждом шаге различные числа образовывали арифметическую прогрессию, т.е. $A = \{a_1, a_1+d, \dots$ $\dots, a_1 + d(m-1)\}$, где d – произвольное заранее выбранное число от 1 до $p-1$, а новые числа b_1 и b_2 надо выбирать так, чтобы $d = |b_2 - b_1|$.

Достаточность очевидна. Необходимость легко доказать по индукции. Действительно, пусть сперва Дима выбрал числа a_1 и a_2, $a_2 > a_1$. Положим $d = a_2 - a_1 > 0$. Затем он выбрал числа b_1 и b_2 и в результате получил суммы a_1+b_1, a_2+b_1, a_1+b_2, a_2+b_2. Из этих сумм две должны совпадать. Значит, или $a_2+b_1 = a_1+b_2$, или $a_1+b_1 = a_2+b_2$. В обоих случаях $d = |b_2-b_1|$. Нетрудно заметить, что получившиеся в результате три новые суммы образуют арифметическую прогрессию. Пусть теперь на m-м шаге получены суммы $\{a_1, \dots, a_{m+1}\}$, образующие арифметическую прогрессию с разностью d. Прибавляя к ней новые числа b_1 и b_2, мы «сдвигаем» всю прогрессию вправо на b_1 и b_2 позиций, и если $d \neq |b_2-b_1|$, то количество новых различных сумм увеличится более чем на 1. Значит, $d = |b_2-b_1|$, и новые суммы опять образуют арифметическую прогрессию с той же разностью. Необходимость доказана.

ФИЗИКА

МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ НА БАЗЕ ВЕДОМСТВЕННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УЧРЕЖДЕНИЙ

9 класс

1. $m = (B_2 - B_1)\rho_{\text{н}} V / 100\% = 207{,}6$ г (здесь, в соответствии с таблицей, $\rho_{\text{н}} = 17{,}30 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3).

2. $\vec{v}_1 = \vec{v}_0 - \vec{u}\dfrac{m}{m+M}$, $\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \vec{u}\dfrac{mM}{(m+M)^2}$ (векторы $\vec{v}_0$ и $\vec{u}$ имеют противоположные направления, значит, после переброски груза скорость первой лодки увеличится, а второй уменьшится).

3. $B = \dfrac{B_1\rho_{\text{н}1}V_1 + B_2\rho_{\text{н}2}V_2}{\rho_{\text{н}}(V_1+V_2)} = 0{,}37 = 37\%$ (здесь, в соответствии с таблицей, $\rho_{\text{н}1} = 12{,}80 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3, $\rho_{\text{н}2} = 27{,}20 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3, $\rho_{\text{н}} = 17{,}30 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3).

10 класс

1. $t = \dfrac{L}{v+u} + \dfrac{L}{v-u} = 1{,}1$ мин (здесь L – длина крейсера, v – скорость катера, u – скорость крейсера).

2. $v_{\max} = \sqrt{\dfrac{m^2g^2}{k(M+m)} + \dfrac{2m^2gh}{(M+m)^2}}$ (скорость максимальна, когда ускорение равно нулю).

3. $v = \sqrt{\dfrac{v_1^2+v_2^2}{2}} = 1987$ м/с.

4. $\dfrac{m}{\Delta t} = \dfrac{Mg}{v} = 83$ кг/с.

5. $p = p_0\sqrt{\dfrac{T}{T_0}} = p_0\sqrt{2}$ (в пределах отверстия потоки молекул в обе стороны в установившемся состоянии равны).

6. $\dfrac{v}{v_0} = 1{,}5$.

11 класс

1. $w = \dfrac{(\sigma_{\text{в}} - \sigma_{\text{мр}})L}{m} = 1{,}36$ м/с^2.

2. Работа во втором случае больше, поскольку она совершается против постоянной силы притяжения пластин конденсатора, тогда как в первом случае эта сила постепенно уменьшается.

3. $d = \dfrac{2lq^2}{q^2 + 8\pi\varepsilon_0 mv^2 l}$ (воспользуйтесь законом сохранения энергии).

4. Через промежуток времени t скорость ракеты и ее масса будут равны $v = v_0 + at$ и $M = M_0 + \left(v_0 t + \frac{at^2}{2}\right) nmS$ соответственно. Тогда реактивная сила ракеты будет равна

$$F = \frac{d(Mv)}{dt} = v\frac{dM}{dt} + M\frac{dv}{dt} =$$

$$= (v_0 + at)^2 nmS + \left(M_0 + \left(v_0 t + \frac{at^2}{2}\right) nmS\right) a .$$

5. Амперметр покажет ток, текущий от большего шара к меньшему, поскольку потенциал меньшего шара меньше, чем потенциал большего.

6. После выключения электрического поля импульс первого шарика изменится на $\Delta p_1 = q_1 E\Delta t = m_1 v \sin 60°$, а второго – на $\Delta p_2 = q_2 E\Delta t = m_2 v/\cos 30°$. Отсюда находим

$$\frac{q_2}{m_2} = \frac{q_1}{m_1 \sin 60 \cos 30°} = \frac{4}{3} k_1 .$$

7. $F_{\text{тяги}} = F_{\text{трения}} + \frac{d(Mv_0)}{dt} = \mu Mg + v_0 \frac{dM}{dt} =$

$= \mu M_0 g + (v_0 + \mu g t) nmSv$.

8. $\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{4\sigma}{r_2} - \frac{4\sigma}{r_1} = \frac{4\sigma(r_1 - r_2)}{r_1 r_2} = 1{,}6$ Па .

9. Включив между точками A и B (рис.9) вольтметр, можно определить, какая из точек имеет

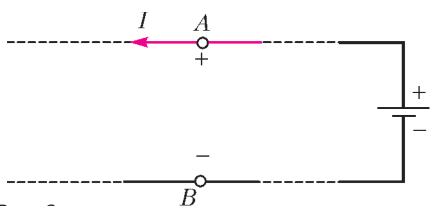


Рис. 9

более высокий потенциал. Поднеся к проводу магнитную стрелку, по отклонению ее северного полюса можно определить направление тока в проводе. Например, если северный полюс магнитной стрелки отклонится из плоскости рисунка на читателя, то, значит, ток в этом проводе течет через точку A справа налево. Отсюда следует, что генератор в рассматриваемом примере расположен справа от точки A.

ПРОФИЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН

Вариант 1

1. Из условия равномерного движения вдоль наклонной плоскости

$$F\cos\alpha = mg\sin\alpha + \mu(mg\cos\alpha + F\sin\alpha)$$

находим

$$F = \frac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} \approx 21{,}1 \text{ Н} .$$

2. $\Delta V = V_1\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)$.

3. Согласно первому началу термодинамики,

$$Q = \Delta U + A = \Delta U + 0 = \frac{3}{2}\nu R\Delta T .$$

Средняя квадратичная скорость молекул v связана с температурой газа соотношением

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT ,$$

следовательно,

$$\frac{T_{\text{к}}}{T_{\text{н}}} = \frac{v_{\text{к}}^2}{v_{\text{н}}^2} = n^2 .$$

Окончательно имеем

$$Q = \frac{3}{2}\nu R T_{\text{н}}\left(n^2 - 1\right) = 10{,}3 \text{ кДж}$$

(здесь $T_{\text{н}} = T = 300$ К).

4. После погружения образовалась система двух параллельно соединенных конденсаторов с вдвое меньшей площадью пластин, причем один конденсатор заполнен воздухом, а другой – водой. Тогда

$$\frac{C'}{C} = \frac{C_1 + C_2}{C} = \frac{C/2 + \varepsilon C/2}{C} = \frac{\varepsilon + 1}{2} = 41 .$$

5. Центростремительной силой является сила Лоренца:

$$F_{\text{ц}} = \frac{mv^2}{R} = F_{\text{Л}} = qvB .$$

Отсюда $v = \frac{qBR}{m}$, и

$$F_{\text{ц}} = qvB = \frac{q^2B^2R}{m} = 7{,}68\cdot 10^{-17} \text{ Н} .$$

6. $a_n = \frac{v_2^2}{r} = \frac{(a_\tau t_2)^2}{r} = \frac{\left(\frac{2l}{t_1^2}t_2\right)^2}{r} = \frac{4l^2t_2^2}{rt_1^2}$.

7. Когда шайба спускается по левой половине углубления, чаша покоится. При подъеме шайбы по правой половине углубления чаша разгоняется. Чаша продолжает разгоняться при спуске шайбы по правой половине углубления и достигает максимальной скорости, когда шайба окажется в самой нижней точке. Из законов сохранения энергии и импульса находим

$$v_{\max} = \frac{2m}{M + m}\sqrt{2gR} .$$

8. $k = \frac{U}{\mathscr{E}} = \frac{R_1 + R_2}{3R_1 + R_2}$, и $\frac{R_2}{R_1} = \frac{3k - 1}{1 - k} = 3$.

НЕПРОФИЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН

Вариант 1

1. $p = \sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}$.

2. $t_{\text{т}} = \dfrac{\lambda t}{\lambda + c(T - T_0)} = 0{,}96\ \text{мин} \approx 1\ \text{мин}$.

3. $E = k\dfrac{q}{(R+d)^2} = 10^3\ \text{В/м} = 1\ \text{кВ/м}$.

4. $\dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{R_3 + R_4}{R_1} = 24$.

5. $A = IBLs = 0{,}04\ \text{Дж}$.

6. $l' = l\dfrac{3-n}{n+1}$.

7. $a = g\dfrac{M\sin\alpha - m}{M+m}$.

8. $l_2 = l_1\sqrt{\dfrac{T_2}{T_1}}$.

КРИПТОГРАФИЯ

1. 37.
2. 29.
3. РЕАГЕНТ.
4. 18 наборов: (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), (1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 7, 9), (1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 8, 7), (1, 5, 2, 4, 3, 6, 7, 8, 9), (1, 5, 2, 4, 3, 6, 8, 7, 9), (1, 5, 2, 4, 3, 6, 9, 8, 7), (4, 2, 3, 1, 5, 6, 7, 8, 9), (4, 2, 3, 1, 5, 6, 8, 7, 9), (4, 2, 3, 1, 5, 6, 9, 8, 7), (4, 5, 2, 1, 3, 6, 7, 8, 9), (4, 5, 2, 1, 3, 6, 8, 7, 9), (4, 5, 2, 1, 3, 6, 9, 8, 7), (6, 2, 3, 4, 5, 1, 7, 8, 9), (6, 2, 3, 4, 5, 1, 8, 7, 9), (6, 2, 3, 4, 5, 1, 9, 8, 7), (6, 5, 2, 4, 3, 1, 7, 8, 9), (6, 5, 2, 4, 3, 1, 8, 7, 9), (6, 5, 2, 4, 3, 1, 9, 8, 7).
5. (I, II, IV) и (IV, II, III).
6. ПРИХОДИТЕ ЗАВТРА В ДВА ЧАСА.
7. 4-е октября.
8. Наибольшей общей мерой данных отрезков является отрезок длины 2015. Его можно получить по алгоритму Евклида: меньший отрезок отложить циркулем на большем отрезке столько раз, сколько возможно, а оставшуюся часть большего отрезка (принимаемую за «остаток от деления») отложить на меньшем отрезке и т.д.
9. ЭТО МОЖЕТ ПОКАЗАТЬСЯ СТРАННЫМ НО НОЧЬЮ ЗДЕСЬ ВСЕ КОШКИ СЕРЫ.
10. МОЖНО ВЫЛЕТЕТЬ ЗА МАРС, ЮВЕЛИРНО СВЕРНУВ У НАШЕЙ ПЛАНЕТЫ.
11. 10^{17}.
12. 1828.

НАПЕЧАТАНО В 2017 ГОДУ

Физика – инженерам

Лаборатория «Кванта»

Наши наблюдения

Практикум абитуриента

Математика

Физика

Олимпиады

Экзаменационные материалы

Информация

Нам пишут

ВНИМАНИЮ НАШИХ ЧИТАТЕЛЕЙ!

В следующем, 2018 году наш журнал будет выходить в том же формате, что и в 2017 году. И мы по-прежнему будем выпускать 12 номеров в год. В остальном «Квант» остается тем же, что и был раньше, — научно-популярным журналом по физике и математике для школьников и всех, кому это интересно.

Подписаться на наш журнал можно с любого номера в любом почтовом отделении связи. Наш подписной индекс в каталоге агентства «Пресса России» — 90964.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» можно найти на сайте: http://kvant.ras.ru

КВАНТ 12+

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

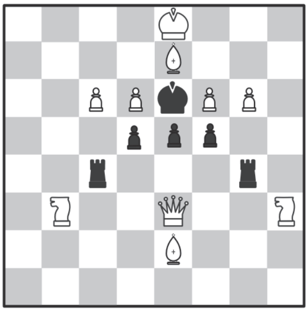
Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: (495) 930-56-48
E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8»
Телефон: (495) 363-48-86,
htpp: //capitalpress.ru

НовогодниЕ СЮЖЕТЫ

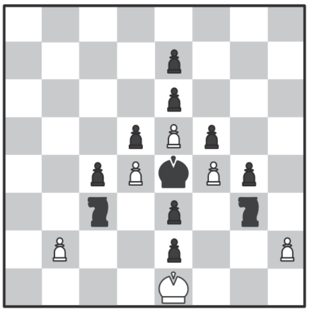
Первый месяц зимы традиционно ассоциируется с приближающимися праздниками: Новым годом и Рождеством. Не обошла эта тема стороной и шахматных композиторов: в сегодняшнем выпуске «Шахматной странички» представлены задачи на праздничную тематику.



С.Кнудсен, 1950

Мат в 2 хода

В этой позиции можно увидеть и новогоднюю елку, и звезду на ее верхушке, а основная идея задачи заключается в сохранении симметрии. Оставить позицию симметричной можно единственным способом: 1. ♕e4!! Несмотря на то что этот ход не создает никаких угроз, а ферзь находится под ударом сразу четырех фигур, черные в цугцванге. На любой ход ладьей белые отвечают матом конем (2. ♘d4× или 2. ♘c5×, если отступит ладья c4; 2. ♘f4× или 2. ♘g5×, если отступит ладья g4). Если же ходят пешки, то мат ставит слон: 2. ♗:c4× или 2. ♗:g4×.



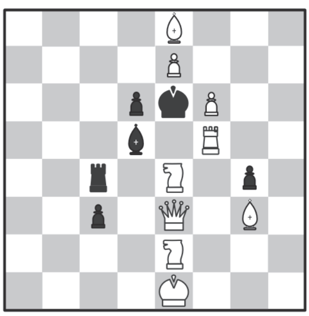
Т.Доусон, 1914

Ход черных, мат в 2 хода

В оригинале эта задача выглядит зеркально, и мат ставят белые. Однако, чтобы новогодняя елка не росла «вверх тормашками», мы ее перевернули. Найти решение задачи поможет ретроанализ: у белых есть только два возможных последних хода: d2-d4 или f2-f4. Какой же из них был сделан? Чтобы разобраться в этом, нужно посмотреть на расположение черных пешек: такая позиция могла возникнуть, только если бы черные съели 10 отсутствующих белых фигур своими пешками. Но если ход d2-d4 сделан только что, значит, чернопольный слон белых мог быть съеден на поле c1 только черной фигурой, но не пешкой, и исходная позиция возникнуть не могла бы. Значит, позиция на диаграмме получилась после 1. f2-f4, и теперь следует взятие на проходе 1...gf, а затем мат 2...f2×.

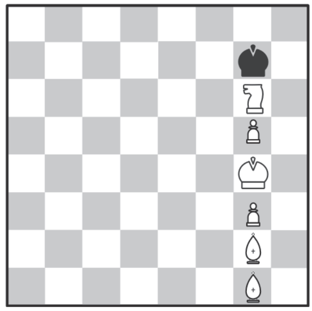
П.Бенко, 1975

Мат в 2 хода



Продолжает новогоднюю тематику двухходовка американского гроссмейстера П.Бенко, которая так и называется: «Рождественская ель» (Christmas tree). Решает ход ферзем: 1. ♕c5! с угрозой 2. ♕: d5× На взятие любой белой фигуры следует мат: 1... ♚:f5 2. ♕:d5×, 1... ♜:c5 2. ♘d4×, 1... ♝:e4 2. ♘f4×, 1...dc 2. ♖e5×.

В завершение номера еще одна задача П.Бенко, которая носит название «Рождественская свеча».



П.Бенко

Задача белых состоит в том, чтобы не выпустить черного короля из угла. 1. ♗d5! ♚:g6 2. ♗d4 ♚h7 3. ♔f4 ♚g6 4. ♗g8 ♚h5 5. ♗f7×.

«Шахматная страничка» желает своим читателям счастливого Нового года и побольше увлекательных шахматных (и не только) сюжетов в новом году!

А.Русанов

Индекс 90964

Прогулки с физикой

«ИМПРЕССИОНИСТИЧЕСКАЯ» ФОТОГРАФИЯ

Если вам кажется, что это фрагмент одного из полотен импрессионистов, то вы ошибаетесь. Это совершенно реальная фотография, которая не подвергалась никакой обработке...

(Подробнее – на с. 30 внутри журнала)