

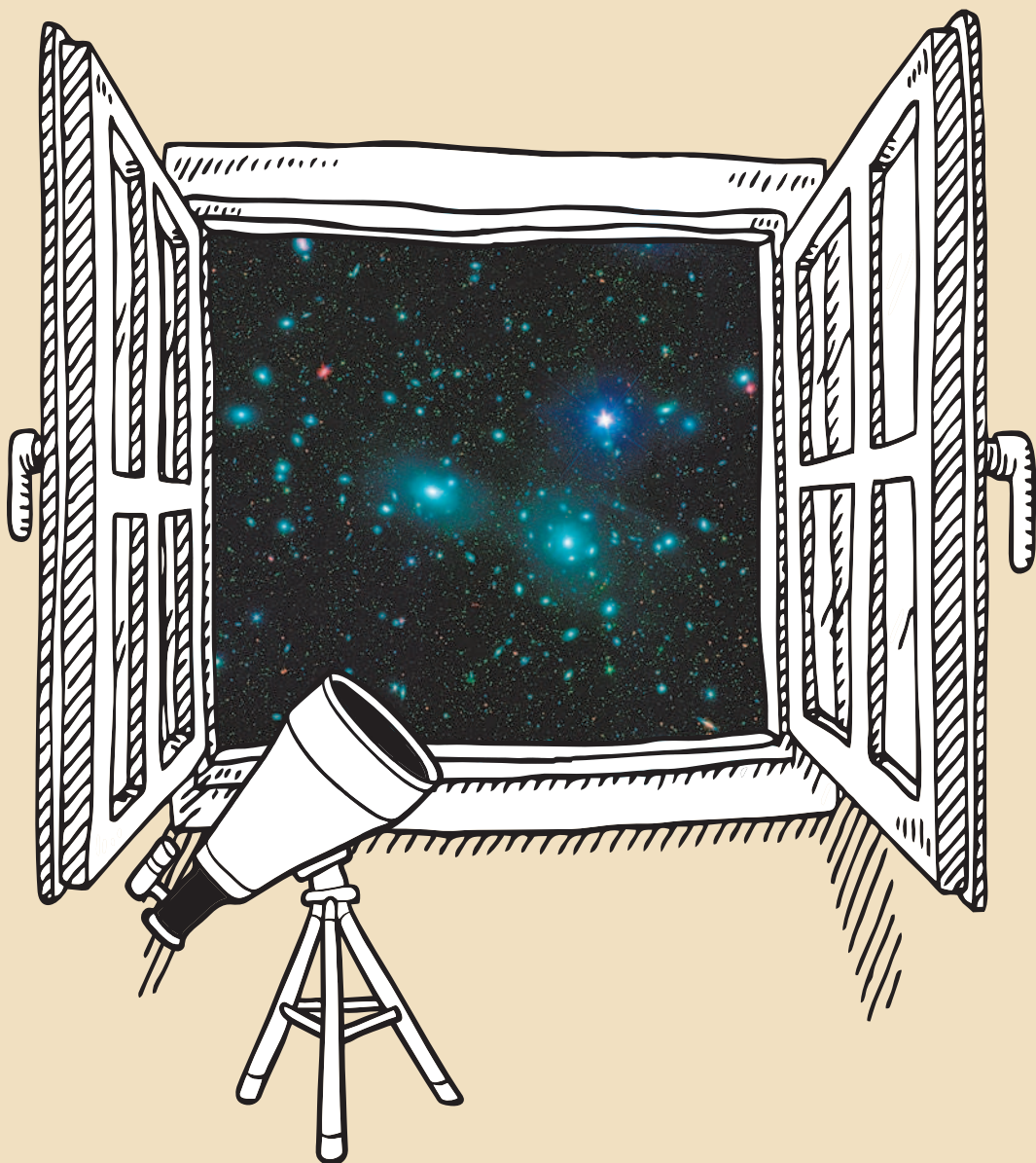
ОКТЯБРЬ

ISSN 0130-2221

2017 · № 10

# КВАНТ

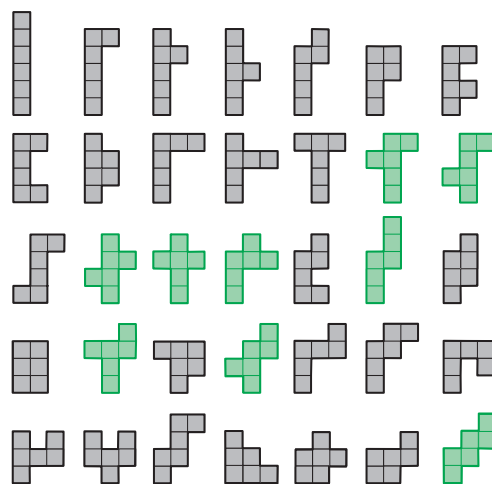
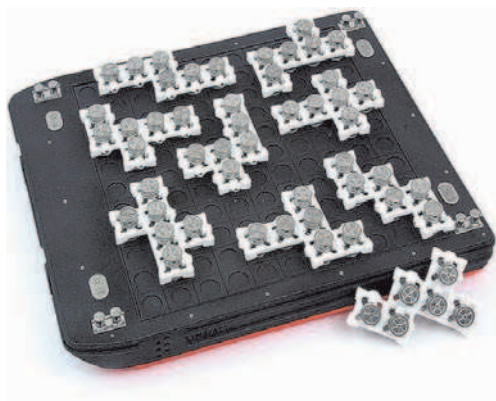
НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



# ОПАСНЫЙ ГРУЗ

Гексамино – это фигурки, составленные из шести единичных квадратиков, которые соединяются друг с другом по сторонам. Если считать одинаковыми фигурки, которые совмещаются всевозможными поворотами и переворотами, то существует всего 35 различных гексамино. Они показаны на рисунке. Зеленым цветом закрашены девять фигурок, которые используются в головоломке изобретателя Карла Хоффа (Carl Hoff).

Он предлагает расположить эти девять гексамино на поле  $11 \times 11$  так, что-



бы они не касались друг друга ни сторонами, ни углами.

Хофф утверждает, что есть 70607460 способов выбрать набор из девяти гексамино и что каждый такой набор допускает хотя бы одно расположение без касаний на таком поле, но только у данного набора такое расположение единственное. Что ж, дополнительная задача – проверить это утверждение.

В авторском исполнении поле оформлено как баржа, а гексамино – как блоки бочек с опасными отходами. Отсюда и название головоломки.

*Е.Епифанов*

# КВАНТ

ОКТАБРЬ 2017

№10

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ  
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

## УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук  
Математический институт  
им. В.А.Стеклова РАН  
Физический институт  
им. П.Н.Лебедева РАН

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**А.Л.Семенов**

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Н.Н.Андреев, А.Я.Белов,  
Ю.М.Брук, А.А.Варламов, С.Д.Варламов,  
А.Н.Виленин, В.И.Голубев,  
Н.П.Долбилин, С.А.Дориченко,  
В.Н.Дубровский, А.А.Заславский,  
П.А.Кожевников (заместитель главного  
редактора), С.П.Коновалов, А.А.Леонович,  
Ю.П.Лысов, В.В.Произолов, В.Ю.Протасов,  
А.М.Райгородский, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский,  
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров,  
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан (заместитель  
главного редактора)**

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,  
В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,  
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков**

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**И.К.Кикоин**

## ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

**А.Н.Колмогоров**

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,  
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев,  
И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов, П.Л.Капица,  
В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев,  
В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,  
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,  
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант,  
Я.Е.Шнайдер**

2 Теорема Шаля в трех лицах (окончание).  
*С.Кузнецов*

6 Принцип 80:20 в биологии. *А.Минеев*

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

11 Задачи M2482–M2485, Ф2489–Ф2492

12 Решения задач M2470–M2473, Ф2477–Ф2480

18 Решетки четырехгольников. *Н.Белухов*

## КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

26 Задачи 5–8

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

27 Задачи

28 Как Бусенька проиграла кулинарный конкурс.  
*К.Кохась*

## ШКОЛА В «КВАНТЕ»

31 Трансформатор Тесла – что это такое.  
*В.Унукович*

35 Где ошибка? *А.Блинков*

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

32 Бионика

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

38 Скорость звука в газе: Ньютон или Лаплас?  
*А.Стасенко*

## ОЛИМПИАДЫ

41 LVIII Международная математическая  
олимпиада

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

43 Московский государственный университет  
имени М.В.Ломоносова

46 Новосибирский государственный университет

52 Ответы, указания, решения

Вниманию наших читателей! (40)

## НА ОБЛОЖКЕ

I *От Вселенной – до генома. Иллюстрация к  
статье А.Минеева*

II *Коллекция головоломок*

III *Шахматная страничка*

IV *Прогулки с физикой*

# Теорема Шаля в трех лицах

С. КУЗНЕЦОВ

ВЕРНЕМСЯ К ВЫЧИСЛЕНИЮ КОМПОЗИЦИИ двух симметрий,  $S_a \circ S_b$ .

Итак, на плоскости Лобачевского возможны три случая: (1) прямые  $a$  и  $b$  пересекаются; (2) прямые  $a$  и  $b$  параллельны; (3) прямые  $a$  и  $b$  расходятся.

В случае (1), как и в евклидовой теореме Шаля,  $S_a \circ S_b$  – поворот на угол, в два раза больший угла между прямыми  $a$  и  $b$  (рис.16). Точки при этом движутся по

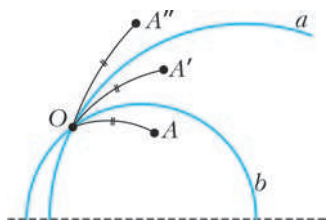


Рис. 16

окружностям с центром в точке  $O$  (рис.17). Заметим, что в модели Пуанкаре окружность в смысле Лобачевского оказалась

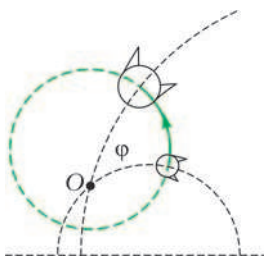


Рис. 17

евклидовой окружностью – однако «в лоб» это доказать не получится: центры в смысле Евклида и в смысле Лобачевского не совпадают. Доказать это можно с помощью одного из эквивалентных определений окружности; мы оставим это читателю в качестве упражнения (решение приведено в конце журнала).

Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.

В случае (2) сначала рассмотрим ситуацию, когда прямые  $a$  и  $b$  особые. Тогда, с евклидовой точки зрения,  $S_a \circ S_b$  есть параллельный перенос вдоль абсолюта (рис.18). Таким образом, при этом преобразовании точки движутся вдоль прямых,

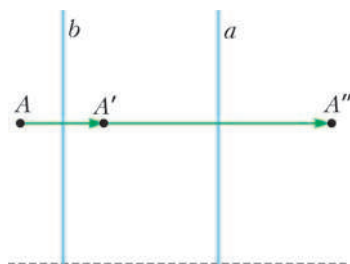


Рис. 18

параллельных абсолюту (рис.19). В геометрии Лобачевского эта траектория называется *орициклом*, т.е. предельным поло-



Рис. 19

жением окружностей, «окружностью бесконечно большого радиуса». Здесь мы имеем дело с семейством орициклов, перпендикулярных прямым  $a$  и  $b$ , т.е. наше движение есть *сдвиг по семейству орициклов*.

Ситуация, когда прямые  $a$  и  $b$  неособые, сводится к уже рассмотренной с помощью симметрии, переводящей их в особые. При этом «особый» орицикл, выглядящий как прямая, параллельная абсолюту, переходит в «неособый» – евклидову окружность, касающуюся абсолюта (рис.20). Этот орицикл, хотя и изображается окружностью, незамкнут (как и исходный): точка

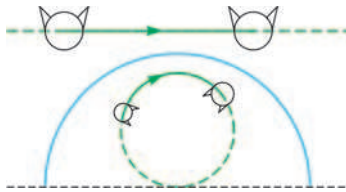


Рис. 20

касания с абсолютом лежит вне плоскости Лобачевского. Движение  $\mathcal{F}'$  по новому орициклу сопряжено с движением  $\mathcal{F}$  по исходному орициклу:  $\mathcal{F}' = \mathbf{S}_l^{-1} \circ \mathcal{F} \circ \mathbf{S}_l$ . Здесь  $\mathbf{S}_l^{-1}$  обозначает преобразование, обратное преобразованию  $\mathbf{S}_l$ ; в данном случае это та же симметрия.

Сопряжение с помощью симметрии или с помощью другого изометрического преобразования – это как бы новый взгляд на ту же модель. Когда мы занимаемся геометрией на обычной евклидовой плоскости, мы можем вертеть листок с чертежом, выбирая более удобную точку зрения. Точно так же и здесь мы можем повернуть модель удобной к нам стороной – например, чтобы интересующая нас прямая оказалась особой. При сопряжении с помощью некоторого преобразования  $\mathcal{D}$  движение  $\mathcal{F}$  переходит в движение  $\mathcal{F}'$  того же вида, но с другими параметрами. Например, симметрия  $\mathbf{S}_l$  переходит в симметрию относительно другой прямой:  $\mathcal{D}^{-1} \circ \mathbf{S}_l \circ \mathcal{D} = \mathbf{S}_{\mathcal{D}^{-1}(l)}$ , поворот переходит в поворот относительно другого центра:  $\mathcal{D}^{-1} \circ R_A^\varphi \circ \mathcal{D} = R_{\mathcal{D}^{-1}(A)}^\varphi$ , и так далее.

Случай (3), когда прямые  $a$  и  $b$  расходятся, немного хитрее. Для начала докажем, что у любых двух расходящихся прямых есть общий перпендикуляр. Пусть расходящиеся прямые  $a$  и  $b$  неособые и выходят на абсолют в точках  $P_1, Q_1$  и  $P_2, Q_2$  соответственно, как показано на рисунке 21 (другие случаи расположения

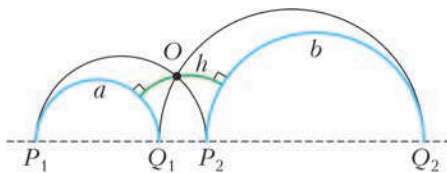


Рис. 21

прямых  $a$  и  $b$  сводятся к этому с помощью инверсии). Проведем прямые через  $P_1$  и  $P_2$  и через  $Q_1$  и  $Q_2$ ; они пересекутся в точке  $O$ . Поскольку прямые  $a$  и  $b$  центрально симметричны относительно  $O$ , перпендикуляры, опущенные на них из  $O$ , образуют одну прямую. Эта прямая и есть искомый общий перпендикуляр  $h$ .

Теперь применим симметрию, чтобы общий перпендикуляр  $h$  оказался особой прямой. Тогда  $a$  и  $b$  изобразятся concentрическими окружностями, а композиция симметрий (инверсий)  $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b$  станет гомотетией с центром в точке  $O$  (рис.22).

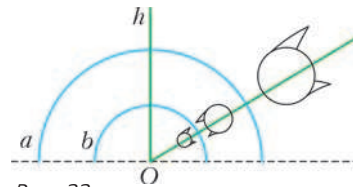


Рис. 22

Действительно, если при  $\mathbf{S}_b$  точка  $A$  переходит в  $A'$ , а при  $\mathbf{S}_a$  точка  $A'$  переходит в  $A''$ , то

$$OA'' = R_2^2 / OA' = R_2^2 / (R_1^2 / OA) = (R_2^2 / R_1^2) \cdot OA,$$

где  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы (в евклидовом смысле) полуокружностей  $a$  и  $b$ .

Опять посмотрим на траектории, по которым движутся точки при этой гомотетии. Это будут лучи, исходящие из точки  $O$  на абсолют. Если взять две точки на одном таком луче и опустить перпендикуляры (в смысле Лобачевского) на особую прямую (рис.23), то эти перпендикуляры будут равны в смысле Лобачевского, так как совмещаются движением. Значит, все точки этой линии равноудалены от данной особой прямой. Поэтому эта линия назы-

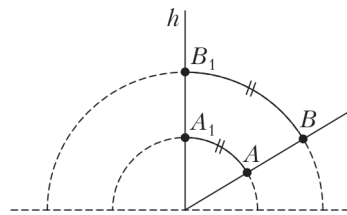


Рис. 23



вается *эквилистантой*, что значит «линия равных расстояний».

Как и в случае с движением по орициклу, к ситуации с особой  $h$  можно перейти с помощью подходящей симметрии (рис.24).

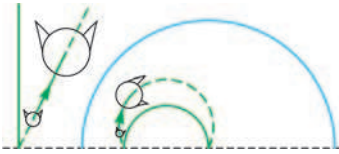


Рис. 24

Для краткости назовем движение по семейству *эквилистант скольжением*. Как мы знаем, скольжение вдоль прямой  $h$  есть композиция симметрий относительно двух прямых ( $a$  и  $b$ ), перпендикулярных  $h$ . Понятие скольжения мы будем использовать и в двух других геометриях. В евклидовом случае скольжение есть параллельный перенос вдоль прямой  $h$  (рис.25);

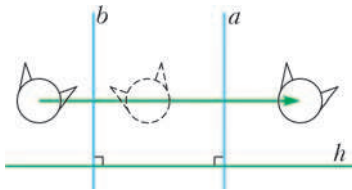


Рис. 25

роль *эквилистант* играют прямые, параллельные  $h$ . На сфере же скольжение оказывается поворотом. Это удобно представлять себе в «географических» терминах: если  $h$  считать экватором, то прямые  $a$  и  $b$  будут меридианами, а композиция  $S_a \circ S_b$  – поворотом вокруг северного (или, что то же самое, южного) полюса (рис.26). Роль *эквилистант* играют параллели (рис.27).

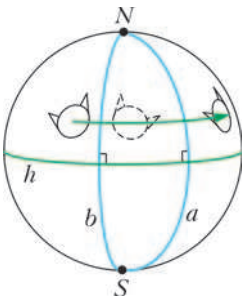


Рис. 26

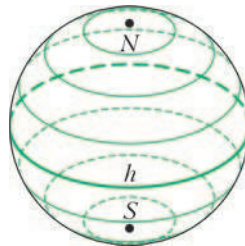


Рис. 27

Итак, на плоскости Лобачевского *композиция двух симметрий – это либо поворот, либо сдвиг по семейству орициклов, либо скольжение*. В евклидовом случае остаются только поворот и скольжение, а в сферическом и эти два случая совпадают и остается только поворот.

Заметим, что в каждом из трех случаев движение можно представить в виде композиции двух симметрий не единственным образом. Действительно, поворот  $R_A^\varphi$  равен  $S_a \circ S_b$  для *любых* двух прямых  $a$  и  $b$ , пересекающихся в точке  $A$  под углом  $\varphi/2$  (напомним, что угол считается со знаком: важно, в каком порядке взяты его стороны). Следовательно, в качестве прямой  $a$  можно взять произвольную прямую, проходящую через точку  $A$ . Вторая прямая при этом определяется однозначно. То же самое происходит и в случаях (2) и (3). Для (2), перейдя с помощью сопряжения к особому случаю, мы можем взять в качестве  $a$  любую особую прямую, тогда  $b$  будет особой прямой на данном расстоянии от  $a$ . Для (3) в качестве  $a$  можно взять любую прямую, перпендикулярную  $h$ .

Для единообразия назовем то множество, из которого мы можем выбирать прямую  $a$ , *пучком* прямых. В случае (1) пучок состоит из прямых, проходящих через данную точку; в случае (2) – из параллельных прямых; наконец, в случае (3) – из прямых, перпендикулярных данной прямой  $h$ . Для евклидовой плоскости случаи (2) и (3) совпадают: пучок параллельных прямых и есть пучок прямых, перпендикулярных данной. На сфере же возможен только случай (1). Таким образом, во всех трех геометриях верно следующее утверждение.

**Лемма о замене симметрий:** *Композицию  $S_a \circ S_b$  можно записать также в виде  $S_{a_1} \circ S_{b_1}$ , где одна из прямых  $a_1$  и  $b_1$  выбирается произвольно из пучка, содержащего прямые  $a$  и  $b$  (другая прямая определяется однозначно).*

Эта лемма пригодится нам для вычисления **композиции трех симметрий**,  $S_a \circ S_b \circ S_c$ . Постараемся провести рассуждения единообразно для всех трех геометрий: мы будем пользоваться только

возможностью опускать перпендикуляр из данной точки на данную прямую, возможностью проводить прямую через две точки и сформулированной выше леммой о замене симметрий.

Сначала заменим прямые  $b$  и  $c$  на  $b_1$  и  $c_1$  так, что  $S_{b_1} \circ S_{c_1} = S_b \circ S_c$  и прямые  $a$  и  $b_1$  пересекаются. Для этого достаточно взять на прямой  $a$  произвольную точку и выбрать из пучка, содержащего прямые  $b$  и  $c$ , прямую  $b_1$ , проходящую через эту точку (в любом пучке, независимо от его вида, найдется прямая, проходящая через данную точку). Теперь выберем в пучке, содержащем прямые  $a$  и  $b_1$ , прямую  $b_2$ , перпендикулярную  $c_1$  – иначе говоря, опустим перпендикуляр из точки пересечения прямых  $a$  и  $b_1$  на прямую  $c_1$  (рис. 28).

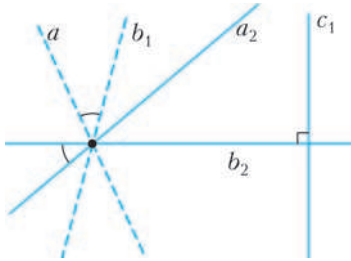


Рис. 28

После этого заменим прямые  $a$  и  $b_1$  на прямые  $a_2$  и  $b_2$  с сохранением композиции первых двух симметрий ( $S_{a_2} \circ S_{b_2} = S_a \circ S_{b_1}$ ). Наконец, заменим прямые  $b_2$  и  $c_1$  на прямые  $b_3$  и  $c_3$ , где  $b_3$  – перпендикуляр, опущенный из точки пересечения прямых  $b_2$  и  $c_1$  на прямую  $a_2$  (рис.29). Заметим, что угол между прямыми при этом не меняется:  $b_3$  по-прежнему перпендикулярна  $c_3$ .

Итак,  $S_a \circ S_b \circ S_c = S_{a_2} \circ S_{b_3} \circ S_{c_3}$ , где  $a_2 \perp b_3$  и  $b_3 \perp c_3$ , т.е.  $b_3$  – общий перпендикуляр

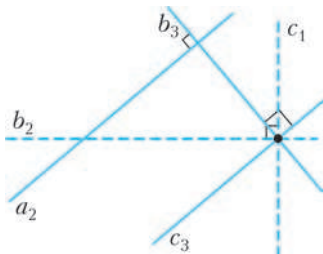


Рис. 29

дикуляр прямых  $a_2$  и  $c_3$ . Напоследок воспользуемся тем фактом, что симметрии относительно перпендикулярных прямых перестановочны (рис.30). Действительно,

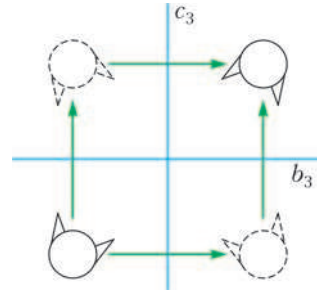


Рис. 30

их композиция есть поворот на  $180^\circ$  относительно их точки пересечения, а для угла  $180^\circ$  не имеет значения, в каком направлении его откладывать. Значит, наша композиция трех симметрий преобразуется в  $S_{a_2} \circ S_{c_3} \circ S_{b_3}$ , причем  $S_{a_2} \circ S_{c_3}$  как композиция симметрий относительно прямых с общим перпендикуляром  $b_3$  есть скольжение вдоль  $b_3$ .

Как отмечено выше, эти рассуждения верны во всех трех геометриях (напомним, что в евклидовом случае скольжение есть параллельный перенос, а в сферическом – поворот). Значит, во всех трех геометриях композиция трех симметрий представляется как композиция симметрии и скольжения вдоль той же прямой, т.е. является *скользящей симметрией*.

Как и в евклидовом случае, обычная симметрия является частным случаем скользящей: если прямые  $a_2$  и  $c_3$  совпадают, то скольжения на самом деле нет.

Скользящая симметрия плоскости Лобачевского изображена на рисунках 31 и 32

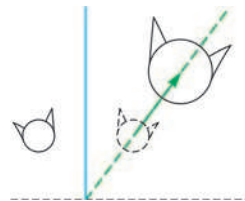


Рис. 31

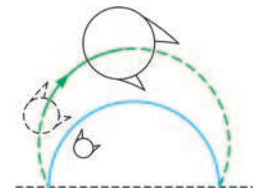


Рис. 32

(Продолжение см. на с. 10)

# Принцип 80 : 20 в биологии

*А.МИНЕЕВ*

**П**РИНЦИП 80:20 ШИРОКО ИЗВЕСТЕН и «работает» в самых разных областях человеческой деятельности, хотя и носит оттенок таинственности, загадки и парадокса. Другое его название – принцип Парето, по имени итальянского социолога и экономиста. В самом конце XIX века, обрабатывая статистические данные, он обнаружил, что 20% населения владеют 80% всех материальных ресурсов. Соответственно, 80% населения принадлежат оставшиеся 20% ресурсов. Дальше – больше. Выяснилось, что 20% покупателей приносят 80% прибыли, 80% пользователей посещают 20% сайтов и так далее и тому подобное. В попытках использования этого принципа дошли до того, что крупнейшие производители программного обеспечения (IBM, Apple, Microsoft, Lotus), обнаружив в свое время, что 80% времени затрачивается на обработку 20% команд, решились на существенную переделку своего программного обеспечения. Обратив особое внимание на скорость обработки 20% наиболее используемых ко-

манд, они повысили общую производительность (так называемые RISC-процессоры). А за счет упрощения обработки оставшихся 80 % команд сделали компьютеры более дешевыми и простыми в обращении.

Классическое правило 80:20 гласит: «80% работы выполняют 20% сотрудников и наоборот». К этому шутовскому высказыванию есть и соответствующее дополнение: «80% считают, что они входят в те самые 20% наиболее ценных». Наверное, что-то и в этом есть, но такую тему развивать не решимся, к физике и биологии она имеет малое отношение...

Проявления подобного принципа (в чуть иной пропорции) обнаружили и «в мировом масштабе» – как вырвавшись во вселенские просторы, так и спрятавшись в глубь генома. При этом и в попытках познать структуру Вселенной, и при расшифровке генома человека было обнаружено нечто совсем загадочное и бросающее вызов, столкнувшись даже не с 80:20, а с подавляющим 95:5.





Так, для согласования картины строения и эволюции Вселенной в настоящее время принимается, что на обычное вещество (включая звезды и планеты) приходится всего 5% массы Вселенной, а остальные 95% заняты неизвестно чем. Название этому «нечто» уже придумали: темная материя (около 20–25% массы) и темная энергия (остальные 75–70%), но в понимании далеко не продвинулись. Не лучше ситуация и с расшифрованным геномом. Сама расшифровка стала огромным достижением ученых, однако оказалось, что 95% длины ДНК в геноме тоже занято непонятно чем. И тут также придумали подходящее название: «мусорная» или «некодирующая» ДНК.

Была высказана надежда, что это нечто – «темное», «мусорное», иными словами, «некодирующее» – поможет объяснить что-то очень важное и в макро-, и в живом мире, а именно *эволюцию*, соответственно, Вселенной и живых организмов.

Немного озадачив читателя, перейдем к расшифровке названия заглавия и смысла нашей статьи, сосредоточимся на необычном *биологическом* примере проявления правила 20:80 и связанного с этим правилом парадокса.

### **«Потерянные» 80%**

Этот парадокс «спрятан» совсем рядом, и каждый сталкивается с ним на бытовом уровне. Представьте себе человека средней упитанности, массой 70–80 кг, малоподвижного и потребляющего в день с пищей 1800 ккал энергии. Посадим его в кресло и оставим в состоянии покоя и температурного комфорта. В этом состоянии его организм потребляет с пищей и, соответственно, выделяет в окружающую среду около 80 Вт мощности.

На что указанная мощность расходует? Человек живет, дышит, его сердце перекачивает кровь: в условиях покоя через сердце проходит 300 литров крови за час. За это же время легкие пропускают 500 литров воздуха... Однако процитируем содержащее уникальный накопленный материал многотомное издание К.П.Иванова «Основы энергетики организма»:

*«...при полном мышечном покое человека сердце потребляет не более 8–9 %, а дыхательные мышцы – не более 3–4% энергетического бюджета, т.е. в сумме 11–13%. Добавим к этой сумме постоянные энергозатраты почек, которые потребляют примерно 7% бюджета и работают непрерывно. В сумме это 20%. На какие нужды расходуются остальные 80%?»*

Итак, снова сталкиваемся с принципом 80:20. Удастся ли разрешить его природе в этом случае? Без этого в жизнедеятельности человека, как и в случае загадки строения Вселенной, появляется «темная энергия». Ее разгадка на первый взгляд сама несет в себе оттенок парадокса: основную часть энергии в состоянии покоя организм тратит на «переборку» самого себя, иначе говоря, на обновление основных структур клеток. Хотя нить ответа, возможно, нащупать уже удалось: 80 % энергии тратится на, казалось бы, совершенно бесполезное дело – постоянное разрушение и одновременно воссоздание одних и тех же живых структур. Как говорится в быту, ломать – не строить. А тут организм сам себя непрерывно и ломает, и тут же строит, более того, тратит на это основную часть энергии. Зачем?

Пройдемся по страницам упомянутой книги с ручкой и калькулятором, делая попутно некоторые комментарии.

### **Время жизни клеток в организме (данные измерений)**

Для начала приведем таблицу (см. таблицу 1), касающуюся *измеренной* продолжительности жизни клеток органов человека. Отметим, что «в среднем» наше тело полностью обновляется за 5–10 лет, в течение которых место старых клеток занимают новые. В то же время часть структур организма обновляется существенно быстрее.

Видно, что лейкоциты, а также клетки эпителия желудка, тонкого кишечника и легких обновляются довольно быстро (грубо – в пределах недели). Альвеолы, расположенные на концах бронхов, обновляются раз в год, а клетки на поверх-

Таблица 1

Продолжительности жизни клеток различных структур организма человека

Орган, элемент	Средняя продолжительность жизни клеток, сутки
Эритроциты	120
Лейкоциты	1–3
Трахея	48
Клетки желудка	2–9
Клетки тонких кишок	1,3–1,6
Клетки легких	8

ности легких (воспринимающие вредные вещества, поступающие с дыханием) – 1–2 раза в месяц. Приблизительно с такой же скоростью обновляется и поверхность кожи. Примерно полугодичный срок нужен для обновления клеток печени и эритроцитов. Долгожителями являются клетки мозга, отвечающие за процессы зрения, – обновляются один раз за жизнь, клетки сердца – один-два раза за жизнь, а также клетки мышц, основной структуры кишечника и позвоночника, «живущие» 10–15 лет. Несколько лет могут «выдержать» и волосы.

Похоже, что именно на такое непрерывное обновление организма и тратятся те самые недостающие 80% энергии.

### Оценка времени обновления материала типичной клетки

Начнем с оценки минимального времени обновления нормально работающей клетки. Для этого воспользуемся значениями некоторых параметров типичной клетки (см. таблицу 2). Заметим, что указанная мощность относится к так называемой «клетке в пробирке» (*in vitro*), вне живого организма.

Поделив энергию клетки  $E$  на мощность метаболизма  $P$ , получим оценку характерного времени преобразования материала клетки  $\tau$ :

$$\tau \sim \frac{E}{P} \sim 6 \cdot 10^5 \text{ с} \sim 7 \text{ суток}.$$

Таблица 2

Некоторые параметры типичной клетки организма человека

Параметр	Значение
Радиус клетки	$r \sim 8 \cdot 10^{-6} \text{ м}$
Масса клетки	$m \sim 2 \cdot 10^{-9} \text{ г}$
Энергия, необходимая для образования клетки	$E \sim 2 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}$
Мощность, потребляемая клеткой	$P \sim 3 \cdot 10^{-11} \text{ Вт}$

Вернемся к загадке смысла довольно быстрого обновления различных структур организма. Зачем это нужно? Оказывается, что в клетках, которые «в среднем» сохраняют постоянный состав, все время происходят процессы как создания новых структур, так и их разрушения. Иначе как клетке избавиться от отходов жизнедеятельности? Или синтезировать новые молекулы белков, жиров и углеводов? Или осуществить транспорт веществ внутри клетки? Или даже предохранить клетку от разрушения? Ведь процессы создания и разрушения структур протекают не вполне точно. Так, в книге К.П.Иванова приведены данные о том, что синтез белков из аминокислот происходит с ошибками и сбоями (в среднем частота ошибок составляет  $3 \cdot 10^{-4}$ ). К сбоям в построении структур приводит также фон космической и земной радиации. Наконец, тепловое движение молекул тоже ведет к медленному разрушению слабых связей в молекулах, удерживающих их в неизменном состоянии. Характерный уровень энергии этих слабых связей несложно оценить.

### Уровень энергии слабых связей

Будем отталкиваться от одной эмпирической закономерности для животных и птиц: при повышении температуры тела на  $10^\circ\text{C}$  скорость метаболизма (иначе – обменных реакций в организме) увеличивается вдвое. Как эту информацию использовать?

Примем, что скорость метаболизма  $v(T)$  экспоненциально зависит от отношения

$W/(kT)$  :

$$v(T) \sim e^{-\frac{W}{kT}}$$

Здесь  $W$  – энергия слабых связей, или иначе средняя энергия активации биохимических реакций в организме, измеренная в джоулях;  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана;  $T$  – температура тела в кельвинах.

Запишем уравнение, соответствующее указанной выше эмпирической закономерности для скорости метаболизма, из которого будем искать величину отношения  $W/(kT)$  :

$$2 \cdot e^{-\frac{W}{kT}} = e^{-\frac{W}{k(T+10)}}$$

Поскольку абсолютная температура тела  $T$  существенно превышает 10 кельвинов, то правая часть уравнения легко преобразуется к виду

$$e^{-\frac{W}{k(T+10)}} \approx e^{-\frac{W}{kT(1+10/T)}} \approx e^{-\frac{W}{kT} \left(1 - \frac{10}{T}\right)} \approx e^{-\frac{W}{kT}} \cdot e^{\frac{10W}{kT^2}}$$

откуда находим

$$\frac{W}{kT} \approx \frac{\ln 2}{10} T$$

При температуре тела человека  $T \approx 37^\circ\text{C} \approx 310\text{ K}$

$$\frac{W}{kT} \approx 21,5$$

В разделах физики, имеющих отношение к уровням энергии атомов, часто используют в качестве единицы энергии электрон-вольт (это энергия, которую приобретает электрон, пройдя разность потенциалов в один вольт). В частности, энергия ионизации атома водорода составляет 13,6 эВ. В биологии же часто применяется другая единица – ккал/моль. Приведем значения  $kT$  и  $W$ , соответствующие полученному отношению, в обеих системах единиц. При  $T \approx 310\text{ K}$  получаем  $kT \approx 0,027\text{ эВ} \approx 0,6\text{ ккал/моль}$  и  $W \approx 0,6\text{ эВ} \approx 13\text{ ккал/моль}$ .

Нужно отметить, что эти, не слишком строгие, оценки энергии активации  $W$  хорошо совпадают с данными обработки раз-

личных экспериментальных зависимостей, включающих кроме млекопитающих также рыб, амфибий, планктона и так далее, которые дали  $W \approx 0,65\text{ эВ}$ .

### Энергоемкость источников энергии в организме и квант энергии в биологии

Основными поставщиками энергии в организм, как известно, являются белки, жиры и углеводы, поступающие с пищей. Их удельная энергоемкость приведена в таблице 3.

Таблица 3

Удельная энергоемкость компонентов пищи

	Белки	Жиры	Углеводы
Энерго-емкость	4,2 ккал/г или 18 кДж/г	9,3 ккал/г или 39 кДж/г	4,2 ккал/г или 18 кДж/г

Указанные величины удельной энергоемкости чрезвычайно велики и прямо организмом не усваиваются. Внутриклеточный обмен энергией протекает на существенно более низком удельном энергетическом уровне, путем обмена специфическими квантами энергии. Роль таких квантов играют молекулы АТФ – Аденозин-ТриФосфорной кислоты, состоящей из азотистого основания – аденина, сахара рибозы и трех фосфорных остатков.

Удельная энергия, выделяющаяся в реакции с участием АТФ, составляет 40 кДж/моль или 0,02 ккал/г – в сотни раз меньше, чем при разложении жиров, белков и углеводов. Эта энергия высвобождается при взаимодействии с водой (гидролизе), при этом один фосфорный остаток отделяется с образованием АДФ – Аденозин-ДиФосфорной кислоты:



АТФ выполняет роль универсального накопителя энергии в клетках, способного отдать ее «по первому требованию» и после этого, в ходе обратной реакции, вернуться в первоначальное «заряженное» состояние. Основное отличие жиров, белков и углеводов от АТФ состоит в том, что для первых высвобождение энергии требу-

ет длинной цепочки превращений с участием ферментов, в то время как АТФ является конечным продуктом, «готовым к употреблению».

В каждый данный момент времени его содержание в организме чрезвычайно мало (см. сравнительную таблицу 4). Однако

Таблица 4

## Уровень содержания в организме

	Жиры	Белки	Углеводы	АТФ
Содержание	десяtkи килограммов	килограммы	сотни граммов	десяtkи граммов

«производительность» АТФ колоссальна. Подсчитано, что за день в реакциях с высвобождением энергии расщепляется до уровня АДФ около 40 кг АТФ (половина массы тела человека!). Правда, столько же и ресинтезируется обратно. В итоге можно сказать, что АТФ «крутится» туда-сюда, как белка в колесе.

Аналогия с белкой в колесе просматривается и с другой стороны: АТФ, будучи довольно большой молекулой, не может «просочиться» сквозь мембраны и поэтому заперта в клетке. В результате свой набор «квантов» АТФ имеется в каждой клетке, и располагаются они в мембранах митохондрий.

АТФ обладает необычайно высокой скоростью обновления. Если принять, что в организме человека в каждый момент времени присутствует 20 г АТФ, и учесть, что за сутки расщепляется 40 кг АТФ, то выходит, что каждая молекула АТФ примерно 2000 раз расщепляется и затем вновь синтезируется, так что продолжительность ее жизни менее 1 мин!

Такое быстрое обновление АТФ чрезвычайно важно для живого организма. И в состоянии покоя 80% мощности метаболизма организм тратит с пользой – на «ремонт» клеток и на транспортировку веществ внутри них.

## Теорема Шаля в трех лицах

(Начало см. на с. 2)

(особый и неособый случай соответственно), скользящая симметрия сферы – иначе говоря, композиция поворота и симметрии относительно плоскости, перпендикулярной оси поворота, – на рисунке 33.

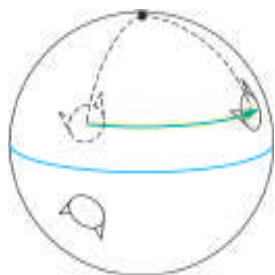


Рис. 33

Скользящую симметрию евклидовой плоскости мы рассмотрели в первой части статьи (см. рис.4).

Итак, мы перечислили все виды движений для каждой из трех геометрий, т.е. доказали следующую теорему.

### Теорема Шаля в трех лицах:

- *Всякое движение сферы есть поворот или скользящая симметрия.*
- *Всякое движение евклидовой плоскости есть поворот, параллельный перенос или скользящая симметрия.*
- *Всякое движение плоскости Лобачевского есть поворот, сдвиг по семейству орициклов, скольжение (сдвиг по эквидистантам данной прямой) или скользящая симметрия.*

Статья написана по материалам лекций, прочитанных автором на Малом мехмате МГУ (Москва) и в ЮМШ (Санкт-Петербург) в 2015–2016 годах. Автор благодарит всех своих слушателей, прежде всего А.Зеленцову, И.Моторину и И.Токареву. Автор благодарен также А.Л.Канунникову и в особенности В.О.Бугаенко за ценные комментарии, позволившие значительно упростить и улучшить доказательство.

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru) и [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru) соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи M2482–M2484 предлагались на II Международной олимпиаде Мегалополисов, задача M2485а предлагалась на VIII Международной олимпиаде Romanian Master in Mathematics.

Задачи Ф2489–Ф2492 предлагались на Всесибирской олимпиаде 2015 года.

## Задачи M2482–M2485, Ф2489–Ф2492

**M2482.** Дан параллелограмм  $ABCD$  с тупым углом  $B$ , в котором  $AD > AB$  (рис. 1).

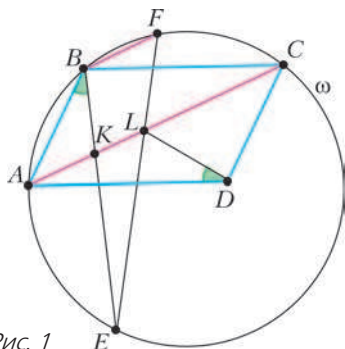


Рис. 1

На диагонали  $AC$  выбраны такие точки  $K$  и  $L$ , что  $\angle ABK = \angle ADL$  (точки  $A, K, L, C$  различны, причем  $K$  лежит между  $A$  и  $L$ ). Прямая  $BK$  пересекает окружность  $\omega$ , описанную около треугольника  $ABC$ , в точках  $B$  и  $E$ , а прямая  $EL$  пересекает  $\omega$  в точках  $E$  и  $F$ . Докажите, что  $BF \parallel AC$ .

Б.Обухов

**M2483.** В стране между некоторыми парами городов осуществляются двусторонние беспосадочные авиарейсы. Известно, что из любого города в любой другой можно долететь, совершив не более 100 перелетов. Кроме того, из любого города в любой

другой можно долететь, совершив четное число перелетов. При каком наименьшем натуральном  $d$  из любого города можно гарантированно долететь в любой другой, совершив четное число перелетов, не превосходящее  $d$ ?

(Разрешается посещать один и тот же город или совершать один и тот же перелет более одного раза.)

И.Богданов

**M2484.** Натуральные числа  $x$  и  $y$  таковы, что

$$\begin{aligned} [x + 2, y + 2] - [x + 1, y + 1] &= \\ &= [x + 1, y + 1] - [x, y]. \end{aligned}$$

Докажите, что одно из чисел  $x$  и  $y$  делится на другое.

(Здесь через  $[a, b]$  обозначается наименьшее общее кратное чисел  $a$  и  $b$ .)

Д.Джукич (Сербия)

**M2485.** а) Зафиксируем натуральное  $n \geq 2$ . Назовем  $n$ -ситом клетчатый квадрат  $n \times n$ , из которого удалили  $n$  клеток так, что из каждого столбца и из каждой строки удалена ровно одна клетка. Назовем *полосками* клетчатые прямоугольники  $1 \times k$  и  $k \times 1$  для всех натуральных  $k$ . Для любого  $n$ -сита  $A$  обозначим через  $m(A)$  наименьшее количество полосок, на которое его можно разрезать. Найдите все



возможные значения  $m(A)$  по всем  $n$ -сигтам  $A$ .

б\*) Докажите, что количество способов разрезать  $n$ -сито на наименьшее возможное количество полосок не превосходит  $100^n$ .

*Н.Белухов (Болгария),  
П.Мейбэйн (США)*

**Ф2489.** В начальном положении система закрепленных труб сечениями  $S$  и  $3S$ , а также вставленных в них поршней и пружи, которые прикреплены к поршням (рис.2), покоится. Между поршнями на-

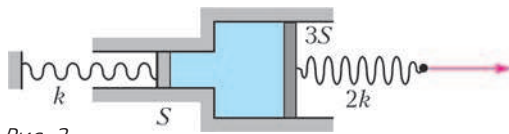


Рис. 2

ходится несжимаемая жидкость. Левый конец пружины жесткостью  $k$  неподвижно закреплен. К правому, свободному концу пружины жесткостью  $2k$  прикладывают внешнюю силу и медленно сдвигают этот конец пружины на расстояние  $L$ . На сколько при этом растянется другая пружина? Считать, что жидкость под поршни не подтекает, трения нет, а внешнее давление достаточно большое. Влиянием силы тяжести пренебречь.

*В.Боровков*

**Ф2490.** В сосуд с нагревателем через промежутки времени  $t_0 = 6$  мин опускают одинаковые порции снега с одинаковой, но неизвестной температурой. Первая порция снега растаяла и превратилась в воду с температурой  $0^\circ\text{C}$  через время  $t = 5$  мин  $20$  с, после чего температура воды выросла до  $T_0 = 10^\circ\text{C}$  к моменту опускания второй порции снега. Вторая порция растаяла через меньшее, чем  $t$ , время, третья – еще быстрее, а сотая растаяла почти сразу. Объясните, почему так происходит. Какова температура воды перед опусканием сотой порции снега и сразу после того, как она растаяла, если временем теплообмена можно пренебречь? Тепловая мощность, передаваемая нагревателем воде и снегу, постоянна.

*В.Баткин*

**Ф2491.** Три нити равной длины  $R$  связаны в одной точке  $O$  (рис.3). На концах нитей закреплены одноименные заряды  $8Q$ ,  $Q$  и  $q$ . Каковы расстояния между этими зарядами в равновесии, если заряд  $q$  пренебрежимо мал в сравнении с  $Q$ ? Система находится на горизонтальной плоскости без трения.

Рис. 3

*В.Баткин*

**Ф2492.** Идеальная батарея с ЭДС  $\mathcal{E}$  через резистор сопротивлением  $R$  подключена к длинным параллельным проводам, замкнутым подвижной массивной перемычкой длиной  $L$  (рис. 4). Система находится в однородном магнитном поле  $B$ , перпендикулярном плоскости рисунка. В момент когда скорость перемычки равна нулю, ее начинают тянуть вправо с силой  $F$ . Укажите диапазон изменения тепловой мощности, выделяющейся на резисторе при движении перемычки. Сопротивлением проводов и перемычки пренебречь, трения нет.

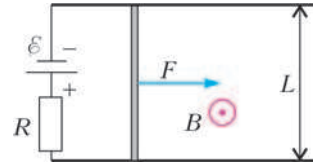


Рис. 4

*А.Киприянов*

### Решения задач М2470–М2473, Ф2477–Ф2480

**М2470.** Даны несколько натуральных чисел. Кирилл сложил два из них, к сумме добавил третье и т.д., пока не получил сумму всех. Илья сделал с исходными числами то же, но в другом порядке. Докажите, что Кирилл и Илья совершили поровну переносов в процессе сложений.

Покажем, что даже в конкретном разряде у Кирилла и Ильи было поровну переносов. Рассмотрим  $k$ -й разряд с конца числа. У каждого из данных чисел отделим  $k$ -хвост – последние  $k$  цифр (возможно, хвост начинается с цифры 0, например в

случае, когда в данном числе меньше  $k$  цифр). Обозначим хвосты чисел через  $a_1, \dots, a_n$ . На переносы в  $k$ -м разряде влияют только хвосты чисел. Появление переноса в  $k$ -м разряде при очередной операции прибавлении хвоста означает, что текущая сумма хвостов перешла через число, кратное  $10^k$  (число, оканчивающееся на  $k$  нулей). Значит, общее число переносов в  $k$ -м разряде равно количеству чисел, кратных  $10^k$  и не превосходящих  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ .

Вот пример:

		3-хвосты		
17390			390	
95			095	
+ 1945		+	945	
2017			017	
811			811	
811			811	
			2258	

Иначе говоря, общее число переносов в  $k$ -м разряде равно  $\left[ \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{10^k} \right]$ . Очевидно, оно не зависит от порядка выполнения операций сложения.

П. Кожевников

**M2471.** На координатной плоскости каждая точка с целыми координатами покрашена в один из трех цветов: красный, зеленый или желтый так, что есть хотя бы одна точка каждого цвета. Докажите, что найдутся три точки  $X, Y$  и  $Z$ , покрашенные в разные цвета, такие, что  $\angle XYZ = 45^\circ$ .

Вначале покажем, что найдутся две соседние по диагонали целочисленные точки разного цвета. Предположим противное, тогда все точки  $(x; y)$  с четной суммой  $x + y$  имеют тот же цвет, что и точка  $(0; 0)$ , а все точки  $(x; y)$  с нечетной суммой  $x + y$  имеют тот же цвет, что и точка  $(1; 0)$ . Третий цвет не встретился – противоречие.

Итак, пусть  $R$  и  $G$  – две точки разных цветов, соседние по диагонали. Для определенности, пусть  $R$  – красная, а  $G$  – зеленая.

Рассмотрим два случая.

**Случай 1.** На прямой  $RG$  есть точка третьего цвета, пусть это желтая точка  $Y$ . Не умаляя общности считаем, что  $G$  находится между  $Y$  и  $R$  (рис. 1). Пусть  $P$  – точка пересечения горизонтали, проходящей через  $R$ , и вертикали, проходящей через  $Y$ . Если  $P$  зеленая, то искомым углом –  $YRP$ . Если  $P$  красная, то искомым углом –  $GYP$ . Если же  $P$  желтая, искомым углом –  $GRP$ .

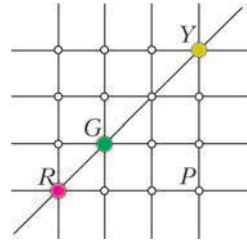


Рис. 1

**Случай 2.** На прямой  $RG$  только красные и зеленые целочисленные точки. Тогда возьмем произвольную желтую точку  $Y$  и проведем через нее горизонталь и вертикаль, которые пересекают прямую  $RG$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно (рис. 2). Если точки  $P$  и  $Q$  разных цветов, то искомым углом –  $YPQ$ . Пусть теперь точки  $P$  и  $Q$  одного цвета, для определенности красного. Лучи  $PQ$  и  $QP$  покрывают всю прямую  $PQ$ . Значит, точка  $G$  лежит на одном из этих лучей. Если зеленая точка  $G$  лежит на луче  $PQ$ , то искомым углом –  $YPG$ , если же  $G$  лежит на луче  $QP$ , то искомым углом –  $YQG$ .

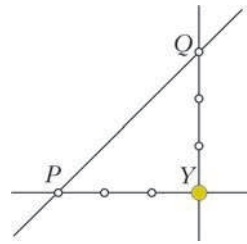


Рис. 2

X. Tine

**M2472\*.** Все члены последовательности  $\{x_n\}$  положительны и при всех натуральных  $n$  имеет место равенство

$$2x_{n+1}^2 - 3x_{n+1}x_n + 2x_n^2 = 1.$$

Определите, какое наибольшее количество различных чисел может быть среди членов последовательности  $\{x_n\}$ .

**Ответ:** 5.

Рассмотрим равенство из условия задачи как квадратное уравнение относительно  $x_{n+1}$ :

$$2x_{n+1}^2 - (3x_n)x_{n+1} + (2x_n^2 - 1) = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{3x_n \pm \sqrt{9x_n^2 - 8(2x_n^2 - 1)}}{4} = \\ &= \frac{3x_n \pm \sqrt{8 - 7x_n^2}}{4} = \\ &= \frac{3}{4}x_n \pm \frac{\sqrt{7}}{4}\sqrt{8 - x_n^2}. \end{aligned}$$

Из этой формулы следует, что  $\frac{8}{7} - x_n^2 \geq 0$ , значит, все члены последовательности  $\{x_n\}$  лежат в интервале  $\left(0; \sqrt{\frac{8}{7}}\right]$ .

Сделаем тригонометрическую подстановку  $x_n = \sqrt{\frac{8}{7}} \cos \varphi_n$ , где  $\varphi_n \in [0; \pi/2)$ . Тогда выражение для  $x_{n+1}$  после деления обеих частей этого выражения на  $\sqrt{\frac{8}{7}}$  принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \cos \varphi_{n+1} &= \\ &= \frac{3}{4} \cos \varphi_n \pm \frac{\sqrt{7}}{4} \sin \varphi_n = \cos(\varphi_n \mp \alpha). \end{aligned}$$

Здесь символом  $\alpha$  обозначено число из интервала  $(0; \pi/2)$  такое, что  $\cos \alpha = \frac{3}{4}$  и  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$  (т.е.  $\alpha = \arccos \frac{3}{4}$ ).

*Случай 1:*  $\cos \varphi_{n+1} = \cos(\varphi_n + \alpha)$ . Поскольку числа  $\varphi_{n+1}$  и  $\varphi_n$  принадлежат промежутку  $[0; \pi/2)$ , то в этом случае

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \alpha. \quad (1)$$

*Случай 2:*  $\cos \varphi_{n+1} = \cos(\varphi_n - \alpha)$ . Поскольку числа  $\varphi_{n+1}$  и  $\varphi_n$  принадлежат промежутку  $[0; \pi/2)$ , то в этом случае

$$\varphi_{n+1} = \begin{cases} \varphi_n - \alpha, & \text{если } \varphi_n \in [\alpha, \pi/2); \\ -\varphi_n + \alpha, & \text{если } \varphi_n \in [0, \alpha). \end{cases} \quad (2)$$

Исходя из формул (1) и (2), легко выводится, что при любом натуральном  $n$

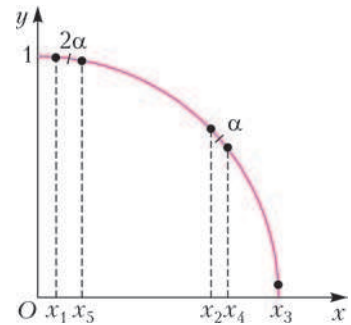
$$\varphi_n = \pm \varphi_1 + k\alpha,$$

где  $k$  – некоторое целое число.

Количество чисел вида  $\pm \varphi_1 + k\alpha$  на промежутке  $[0; \pi/2)$  не больше, чем количество

чисел вида  $\varphi_1 + k\alpha$  на интервале  $(-\pi/2; \pi/2)$ , т.е. не больше чем  $[\pi/\alpha] + 1$ . Но  $[\pi/\alpha] = 4$ . (Поскольку  $\cos \alpha = \frac{3}{4} > \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4}$ , имеем  $\alpha < \frac{\pi}{4}$ . С другой стороны, с помощью достаточно простых вычислений можно доказать, что  $\sin 5\alpha < 0$ , откуда  $5\alpha > \frac{\pi}{5}$ .) Поэтому количество различных чисел среди членов последовательности  $\{\varphi_n\}$ , а значит, и среди членов последовательности  $\{x_n\}$ , не превышает 5.

В то же время значение 5 достигается, например, для последовательности  $x_n = \sqrt{\frac{8}{7}} \cos \varphi_n$  с периодом 8, где (при



достаточно малом  $\varepsilon$ )

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 2\alpha + \varepsilon, \quad \varphi_2 = \alpha + \varepsilon, \quad \varphi_3 = \varepsilon, \\ \varphi_4 &= \alpha - \varepsilon, \quad \varphi_5 = 2\alpha - \varepsilon, \quad \varphi_6 = \alpha - \varepsilon, \\ \varphi_7 &= \varepsilon, \quad \varphi_8 = \alpha + \varepsilon, \quad \varphi_9 = 2\alpha + \varepsilon = \varphi_1, \dots \end{aligned}$$

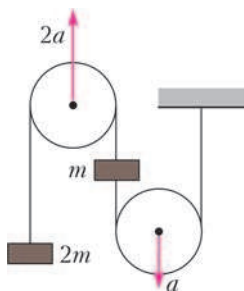
(см. рисунок).

С.Костин

**M2473\***. Решение этой задачи – в статье Н.Белухова «Решетки четырехугольников».

**Ф2477.<sup>1</sup>** В системе двух тел с массами  $t$  и  $2t$ , связанных нерастяжимой и невесомой нитью, второй конец которой прикреплен к потолку, и двух невесомых блоков, ускорения блоков известны и равны  $a$  и  $2a$  (см. рисунок). Какими силами нужно действовать на блоки?

<sup>1</sup> Автор решений задач Ф2477–Ф2480 – С.Муравьев.



Пусть сила натяжения верхнего участка нити (охватывающего блок, движущийся с ускорением  $2a$ ) равна  $T_1$ , нижнего участка нити —  $T_2$ . Тогда второй закон Ньютона для грузов в проекциях на вертикаль-

ную ось дает

$$\begin{aligned} 2ma_1 &= T_1 - 2mg, \\ ma_2 &= T_1 - T_2 - mg. \end{aligned}$$

Найдем связь ускорений грузов с ускорениями блоков. Пусть нижний блок опустился на  $\Delta l$ . Тогда верхний блок поднимется на  $2\Delta l$  (его ускорение в два раза больше). Очевидно, что тело массой  $m$  переместится на  $2\Delta l$ , а тело массой  $2m$  поднимется на  $6\Delta l$ . Поэтому ускорение тела массой  $m$  равно  $2a$  и направлено вниз, тела массой  $2m$  — равно  $6a$  и направлено вверх. Система уравнений движения принимает вид

$$\begin{aligned} 12ma &= T_1 - 2mg, \\ 2ma &= T_2 + mg - T_1, \end{aligned}$$

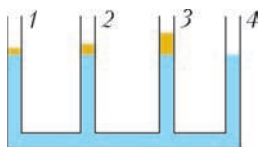
откуда

$$\begin{aligned} T_1 &= 12ma + 2mg, \\ T_2 &= 14ma + mg. \end{aligned}$$

А поскольку блоки невесомы, то силы, которые должны действовать на блоки, равны удвоенным силам натяжения соответствующих участков нити:

$$\begin{aligned} F_1 &= 2T_1 = 24ma + 4mg, \\ F_2 &= 2T_2 = 28ma + 2mg. \end{aligned}$$

**Ф2478.** Имеются четыре одинаковых цилиндрических сосуда, в которые налито некоторое количество воды. Поверх воды в первый, второй и третий сосуды (см. рисунок) аккуратно наливают слой масла толщиной  $h$ ,  $2h$  и  $3h$  соответственно. На сколько изменится уровень жидко-



сти в каждом сосуде по сравнению с первоначальным положением после установления равновесия? Известно, что при налипании масла вода ни из одного сосуда полностью маслом не вытесняется. Плотность масла  $\rho_0$ , плотность воды  $\rho_1$  ( $\rho_1 > \rho_0$ ).

С точки зрения давления в жидкости, наливание в сосуд слоя масла толщиной  $h$  эквивалентно наливанию слоя воды толщиной  $\frac{\rho_0 h}{\rho_1}$ . Поэтому наливание в систему сосудов слоя масла толщиной  $6h$  (в первый, второй и третий сосуды) эквивалентно тому, что мы нальем слой воды толщиной

$$h_1 = \frac{6\rho_0 h}{\rho_1}.$$

Но если бы мы налили такое количество воды, она распределилась бы равномерно по четырем сосудам. Учитывая, что в четвертом сосуде будет только вода (по условию масло полностью воду ни из одного сосуда не вытесняет и, следовательно, не может попасть в четвертый сосуд), уровень воды в нем поднимется на величину

$$\Delta h_4 = \frac{6\rho_0 h}{4\rho_1} = \frac{3\rho_0 h}{2\rho_1}.$$

При этом давление в жидкости (около дна сосуда) возрастет на величину

$$\Delta p = \rho_1 g \Delta h_4 = \frac{3}{2} \rho_0 g h.$$

Изменение уровня жидкости в первом, втором и третьем сосудах найдем из условия увеличения давления в этих сосудах на эту величину.

В первом сосуде находится слой масла толщиной  $h$ , который обеспечивает дополнительное давление  $\rho_0 g h$ . Поэтому для увеличения давления на  $\Delta p = (3/2)\rho_0 g h$  в левый сосуд должна войти дополнительная порция воды, создающая давление около дна сосуда  $(1/2)\rho_0 g h$ . Иными словами, должен войти слой воды толщиной  $(1/2)(\rho_0/\rho_1)h$ . Это значит, что уровень жидкости в первом сосуде увеличится на величину

$$\Delta h_1 = h + \frac{\rho_0}{2\rho_1} h = h \left( 1 + \frac{\rho_0}{2\rho_1} \right).$$

Во втором сосуде появился дополнительный слой масла толщиной  $2h$ , который обеспечивает дополнительное давление  $2\rho_0gh$ . Поэтому, чтобы давление около дна второго сосуда возросло на величину  $\Delta p$ , из второго сосуда должна уйти вода толщиной  $(1/2)(\rho_0/\rho_1)h$ . Следовательно уровень жидкости во втором сосуде поднимется на величину

$$\Delta h_2 = 2h - \frac{\rho_0}{2\rho_1}h = 2h\left(1 - \frac{\rho_0}{4\rho_1}\right).$$

В третьем сосуде появился дополнительный слой масла толщиной  $3h$ , который обеспечивает дополнительное давление  $3\rho_0gh$ . Тогда, чтобы давление около дна третьего сосуда возросло на величину  $\Delta p$ , из третьего сосуда должна уйти вода толщиной  $(3/2)(\rho_0/\rho_1)h$ . Поэтому уровень жидкости в третьем сосуде поднимется на величину

$$\Delta h_3 = 3h - \frac{3\rho_0}{2\rho_1}h = 3h\left(1 - \frac{\rho_0}{2\rho_1}\right).$$

**Ф2479.** В электрической цепи, схема которой представлена на рисунке 1, три

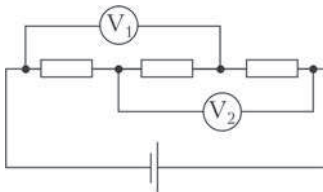


Рис. 1

одинаковых резистора соединены последовательно и подключены к батарее с ЭДС  $\varepsilon = 10$  В. Два одинаковых вольтметра, подключенных так, как показано на рисунке, показывают напряжение  $U = 5$  В каждый. Что будет показывать один из них, если второй вообще отключить от цепи? Внутреннее сопротивление источника равно нулю.

Очевидно, что вольтметры неидеальные, поскольку в случае идеальности они должны были бы показывать по  $2/3$  от напряжения источника. Кроме того, так как вольтметры показывают половину напряжения источника, то потенциалы точек 1 и 2 (рис.2) одинаковы. Значит, ток через

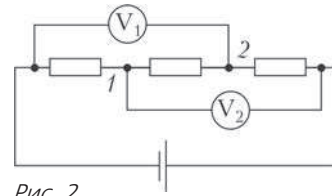


Рис. 2

центральное сопротивление не течет, и его можно выбросить из цепи. Тогда падения напряжения на резисторах и вольтметрах одинаковы, поэтому сопротивление вольтметров равно сопротивлению резисторов.

При выбрасывании одного вольтметра цепь принимает вид, изображенный на рисунке 3, причем сопротивление участка 3–4 со-

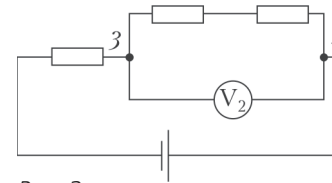


Рис. 3

ставляет  $2/3$  от сопротивления вольтметра или резистора. Поэтому напряжение на участке 3–4 составляет  $2/5$  от напряжения источника:

$$U_2 = \frac{2}{5}\varepsilon = 4 \text{ В}.$$

**Ф2480.** На рисунке 1 изображен выпуклый четырехугольник. Где нужно расположить тонкую собирающую линзу и каким должно быть ее фокусное расстояние, чтобы изображение четырехугольника имело форму квадрата? Решите задачу графически и обоснуйте все сделанные построения на основе законов геометрической оптики. Оцените по рисунку фокусное расстояние этой линзы, считая, что одна клеточка на рисунке равна одному сантиметру.

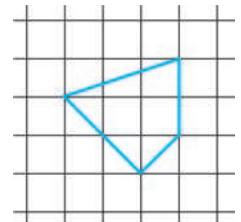


Рис. 1

Очевидно, что изображение четырехугольника будет квадратом, если: 1) изображения противоположных сторон будут параллельны, 2) угол между изображениями



пар противоположных сторон будет равен  $90^\circ$ , 3) угол между изображениями диагоналей четырехугольника также будет равен  $90^\circ$ . Установим, в каких случаях выполняются эти условия.

Пусть есть тонкая собирающая линза и два непараллельных отрезка. Построим их изображения и поймем, когда эти изображения будут параллельными. Для построения возьмем лучи, идущие вдоль самих отрезков. Тогда каждый из таких лучей проходит и через один конец отрезка, и через другой и, следовательно, изображения отрезков будут лежать на этих лучах после их прохождения линзы. Но чтобы два луча после прохождения собирающей линзы были параллельны, до линзы они должны пересекаться в ее фокальной плоскости. Это значит, что точки пересечения лучей, которым принадлежат противоположные стороны четырехугольника, — точки  $A$  и  $B$  на рисунке 2 — лежат в фокальной плоскости линзы (показана точечной линией), а сама линза находится справа от

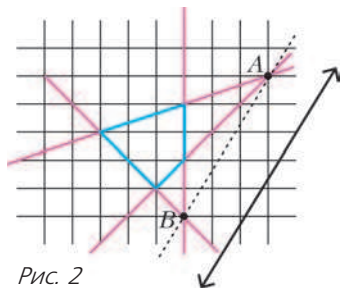


Рис. 2

прямой  $AB$  в любом месте. В качестве примера на рисунке 2 показано одно из возможных расположений линзы, причем ее фокусное расстояние должно равняться расстоянию от линзы до прямой  $AB$ .

Итак, после прохождения линзы изображение четырехугольника будет параллелограммом. Установим теперь, когда это изображение будет прямоугольником. Очевидно, это случится, когда лучи, вышедшие из точек  $A$  и  $B$  и проходящие через центр линзы, будут перпендикулярны друг другу. Действительно, эти лучи не преломляются, все остальные лучи, проходящие через точки  $A$  и  $B$ , после прохождения линзы будут им параллельны. Поэтому центр линзы может лежать в любой точке,

принадлежащей полуокружности, проходящей через точки  $A$  и  $B$ . На рисунке 3 полуокружность показана пунктиром, а главная оптическая ось линзы — штрих-

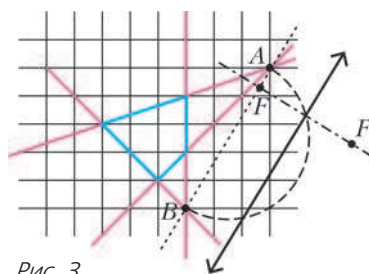


Рис. 3

пунктирной линией, отмечены также фокусы  $F$  линзы.

Таким образом, изображение четырехугольника в линзе, изображенной на рисунке 3, будет прямоугольником, причем таких положений линзы будет очень много — ее центр может располагаться в любой точке пунктирной окружности. А можно ли подобрать такое расположение линзы, чтобы изображение четырехугольника было квадратом? Можно, причем для этого надо, чтобы изображения диагоналей четырехугольника были перпендикулярны друг другу. А это будет в том случае, если угол между лучами, вышедшими из точек  $C$  и  $D$  (рис. 4) и проходящими через центр линзы, будет прямым. Для этого центр линзы

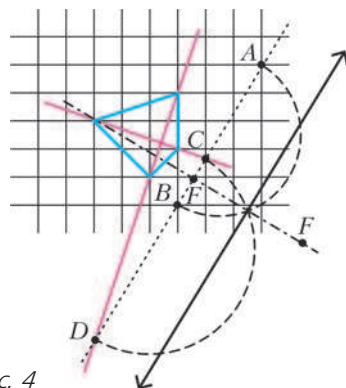


Рис. 4

должен лежать на полуокружности, проходящей через точки  $C$  и  $D$ .

Поскольку все построения проводились в правильном масштабе, рисунок 4 можно использовать для оценки фокусного расстояния линзы. Из рисунка находим, что

расстояние от линзы до ее фокальной плоскости составляет около двух диагоналей одной клетки, т.е.  $F \sim 3$  см. На рисунке 5 приведено окончательное

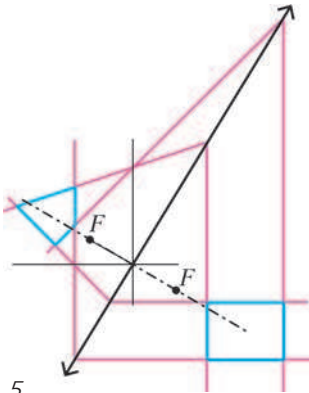


Рис. 5

### Решетки четырехугольников

**Н. БЕЛУХОВ**

Эта статья посвящена истории трудной геометрической задачи, опубликованной в «Задачнике «Кванта» под номером М2473 (см. №7). Мы расскажем о том, как эта задача появилась, приведем ее решение и поговорим о том, как она связана с другими задачами и теоремами.

Наша история начинается с такой задачи.

**Задача 1.** *Диагонали (вытуклого) описанного четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $P$ . На лучах  $PA, PB, PC, PD$  отметили соответственно точки  $A', B', C', D'$  так, что*

$$PA \cdot PA' = PB \cdot PB' = PC \cdot PC' = PD \cdot PD'$$

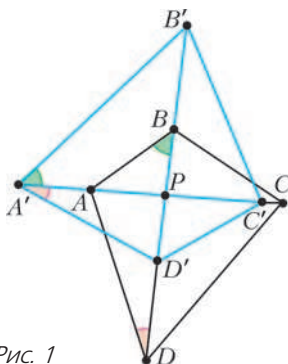


Рис. 1

построение изображения четырехугольника в найденной линзе, выполненное по правилам геометрической оптики. И, как видно из рисунка, изображение действительно похоже на квадрат, к которому, однако, нужно относиться несколько условно. Во-первых, потому, что небольшие ошибки в построении лучей могут достаточно сильно нарушить перпендикулярность изображений противоположных сторон, а во-вторых, потому, что законы геометрической оптики хорошо работают для лучей, наклоненных к главной оптической оси линзы под небольшими углами. Здесь же пришлось пользоваться лучами, наклоненными к главной оптической оси под большими углами.

(рис.1).<sup>1</sup> Докажите, что четырехугольник  $A'B'C'D'$  также является описанным.

Эта задача является шагом в авторском решении задачи М1495 («Задачник «Кванта» №6 за 1995 г.).<sup>2</sup>

Сначала найдем углы четырехугольника  $A'B'C'D'$ . Из подобия треугольников  $PAB$  и  $PA'B'$ ,  $PBC$  и  $PB'C'$  и т.д. имеем

$$\begin{aligned} \angle A' &= \angle B'A'P + \angle PA'D' = \\ &= \angle ABP + \angle PDA = 180^\circ - \angle A. \end{aligned}$$

Аналогично,  $\angle B' = 180^\circ - \angle B$  и т.д. Значит, соответственные углы четырехугольников  $A'B'C'D'$  и  $ABCD$  дают в сумме  $180^\circ$ .

Построим вне четырехугольника  $ABCD$  четырехугольник  $ABXY$ , подобный четырехугольнику  $A'B'C'D'$  (рис. 2). Так как  $\angle BXY = 180^\circ - \angle BCD$ , то  $CD \parallel XY$ , т.е.  $CDYX$  – трапеция (или параллелограмм).

Иными словами, мы «отмасштабировали» четырехугольник  $A'B'C'D'$  и склеили подобную копию четырехугольника  $A'B'C'D'$  с четырехугольником  $ABCD$  по

<sup>1</sup> Иными словами,  $ABCD$  переходит в  $A'B'C'D'$  при инверсии с центром  $P$ . Об инверсии можно прочесть, например, в статье В.Уроева («Квант» №5 за 1984 г.).

<sup>2</sup> Автор задачи М1495 – И.Вайнштейн, авторское решение во многом опиралось на вычисления.

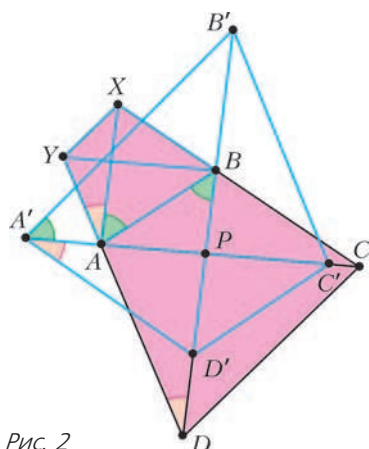


Рис. 2

паре равных сторон. Заметим, что из доказанных равенств углов следует, что  $AX \parallel BD$ ,  $BY \parallel CA$ .

Тем самым, мы свели задачу 1 к следующей (далее точки переобозначены).

**Задача 2а.** Дана трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AB$  и  $CD$ . Пусть  $E$  и  $F$  – точки на отрезках  $BC$  и  $DA$  такие, что  $AE \parallel CF$  и  $BF \parallel DE$  (рис. 3). Известно, что четырехугольник  $ABEF$  описанный.

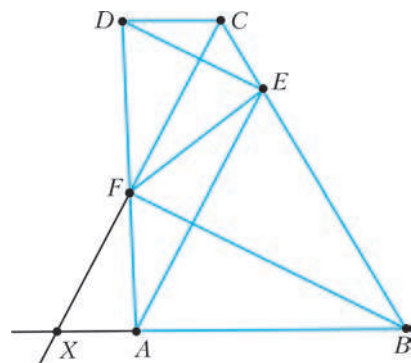


Рис. 3

Докажите, что четырехугольник  $CDFE$  тоже описанный.

Ниже мы решим задачу 2б, обратную к задаче 2а.

**Задача 2б.** Дана трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AB$  и  $CD$ . Пусть точки  $E$  и  $F$  на отрезках  $BC$  и  $DA$  соответственно таковы, что отрезок  $EF$  делит  $ABCD$  на два описанных четырехугольника. Докажите, что  $AE \parallel CF$  и  $BF \parallel DE$ .

**Упражнение 1.** Выведите утверждение задачи 2а из утверждения задачи 2б.

Решим задачу 2б. Сперва найдем необходимые и достаточные условия для параллельности прямых  $AE$  и  $CF$ . Пусть  $AB$  и  $CF$  пересекаются в точке  $X$  (см. рис. 3). По теореме Фалеса,  $AE \parallel CF$  тогда и только тогда, когда  $AB : BE = AX : EC$ . С другой стороны,  $CD : AX = DF : FA$ . Получаем, что  $AE \parallel CF$  тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB}{BE} \cdot \frac{EC}{CD} \cdot \frac{DF}{FA} = 1. \quad (1)$$

**Упражнение 2.** Дана трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AB$  и  $CD$ . На отрезках  $BC$  и  $DA$  выбраны точки  $E$  и  $F$  соответственно. Докажите, что  $AE \parallel CF$  тогда и только тогда, когда  $BF \parallel DE$ .

Итак, для решения задачи 2б нам достаточно доказать соотношение (1). Обозначим через  $\omega_1$  и  $\omega_2$  вписанные окружности четырехугольников  $ABEF$  и  $CDFE$  (рис. 4).

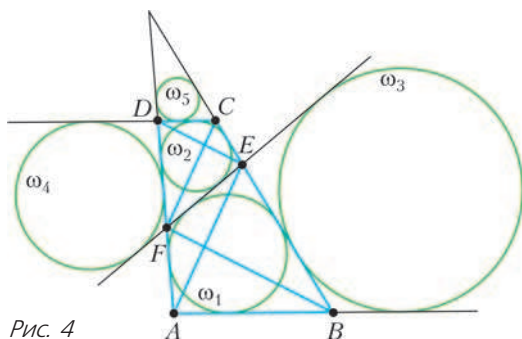


Рис. 4

Далее договоримся обозначать через  $t_k^P$  длину отрезка касательной, проведенной из точки  $P$  к окружности  $k$  (для точки  $P$ , лежащей вне окружности  $k$ ).

Пусть  $\omega_3$  – окружность, касающаяся отрезка  $BE$ , продолжения отрезка  $AB$  за точку  $B$  и продолжения отрезка  $FE$  за точку  $E$ . Пусть  $h$  – гомотетия с центром  $E$ , переводящая  $\omega_3$  в  $\omega_2$ . Так как  $AB$  и  $CD$  – параллельные касательные к  $\omega_3$  и  $\omega_2$ , то  $h$  переводит  $AB$  в  $CD$ , а следовательно,  $h$  переводит  $B$  в  $C$ . Отсюда  $BE : EC = t_{\omega_3}^E : t_{\omega_2}^E$ . Заметим, что  $\omega_1$  и  $\omega_3$  – вписанная и невписанная окружности для треугольника, образованного прямыми  $AB$ ,  $BE$  и  $EF$ , откуда  $t_{\omega_3}^E = t_{\omega_1}^B$ . Значит,

$$EC : BE = t_{\omega_2}^E : t_{\omega_1}^B.$$

Аналогично, рассматривая окружность  $\omega_4$ ,

касающуюся отрезка  $DF$ , продолжения отрезка  $CD$  за точку  $D$  и продолжения отрезка  $EF$  за точку  $F$ , получаем, что

$$BF : FA = t_{\omega_2}^D : t_{\omega_1}^F.$$

Наконец, рассматривая окружность  $\omega_3$ , касающуюся отрезка  $CD$ , продолжения отрезка  $BC$  за точку  $C$  и продолжения отрезка  $AD$  за точку  $D$ , получим, что

$$AB : CD = t_{\omega_1}^B : t_{\omega_3}^C = t_{\omega_1}^B : t_{\omega_2}^D.$$

Перемножая полученные пропорции, получаем

$$\frac{AB}{BE} \cdot \frac{EC}{CD} \cdot \frac{DF}{FA} = \frac{t_{\omega_1}^B}{t_{\omega_2}^D} \cdot \frac{t_{\omega_2}^E}{t_{\omega_1}^D} \cdot \frac{t_{\omega_2}^D}{t_{\omega_1}^D} = \frac{t_{\omega_2}^E}{t_{\omega_1}^D}.$$

Поскольку  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – вписанная и вневписанная окружности для треугольника, образованного прямыми  $BC$ ,  $DA$  и  $EF$ , имеем  $t_{\omega_1}^F = t_{\omega_2}^E$ , что завершает решение.

При переходе от задачи 1 к задаче 2 мы склеили две «масштабированные» копии двух четырехугольников и получили трапецию. Далее склеим две копии трапеции и получим конфигурацию из следующей задачи.

**Задача 3.** Дана трапеция  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ). Пусть  $P, Q, R$  и  $S$  – точки на отрезках  $AB, BC, CD$  и  $DA$  соответственно, такие, что отрезки  $PR$  и  $QS$  делят  $ABCD$  на четыре описанных четырехугольника (рис.5). Докажите, что  $AC, PQ$  и  $RS$  пересекаются в одной точке (или параллельны).

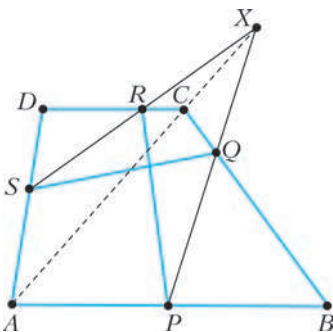


Рис. 5

Автор обнаружил этот факт в 2009 году, рассуждая следующим образом.

Пусть  $X$  – произвольная точка прямой  $AC$ , лежащая вне отрезка  $AC$ . По теореме Менелая,  $X$  лежит на  $PQ$  тогда и только

тогда, когда  $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CX}{XA} = 1$ , и  $X$  лежит на  $RS$  тогда и только тогда, когда  $\frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} \cdot \frac{AX}{XC} = 1$ . Получается, что для решения задачи достаточно доказать соотношение

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1. \quad (2)$$

**Упражнение 3.** Завершите решение, воспользовавшись решением задачи 26.

Остается ли в силе утверждение задачи 3, если опустить условие, что  $ABCD$  – трапеция? Автор немного размышлял над этим, после чего вопрос был отложен «в долгий ящик». Вернувшись к вопросу в 2015 году, автор обнаружил, что ответ на вопрос положительный! Получилась следующая задача.

**Задача 4** (шортлист Международной математической олимпиады 2015 г.). Пусть  $ABCD$  – выпуклый четырехугольник и  $P, Q, R, S$  – точки на отрезках  $AB, BC, CD, DA$  соответственно. Известно, что отрезки  $PR$  и  $QS$  делят четырехугольник  $ABCD$  на четыре описанных четырехугольника. Докажите, что прямые  $AC, PQ$  и  $RS$  пересекаются в одной точке.

Как и в решении задачи 3, достаточно доказать справедливость соотношения (2).

Пусть  $PR$  и  $QS$  пересекаются в точке  $O$ . Идея будет в том, чтобы «отмасштабировать» четырехугольники  $APOS, BQOP, CROQ, DSOR$  так, чтобы они стали описанными вокруг одной и той же окружности.

Через  $\omega$  обозначим вписанную окружность четырехугольника  $APOS$  (рис.6).

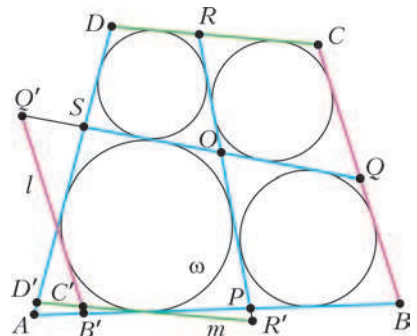


Рис. 6

Пусть  $l$  – касательная к  $\omega$ , параллельная  $BC$  и такая, что  $\omega$  лежит между  $BC$  и  $l$ . Пусть  $l$  пересекает прямые  $AB$  и  $QS$  в точках  $B'$  и  $Q'$ . Аналогично, пусть  $m$  – касательная к  $\omega$ , параллельная  $CD$  и такая, что  $\omega$  лежит между  $CD$  и  $m$ . Пусть  $m$  пересекает прямые  $DA$  и  $PR$  в точках  $D'$  и  $R'$ . Наконец, пусть  $l$  и  $m$  пересекаются в точке  $C'$ .

Согласно решению задачи 2б,

$$\frac{BQ}{QO} \cdot \frac{OQ'}{Q'B'} \cdot \frac{B'P}{PB} = 1.$$

Аналогично,

$$\frac{DR}{RO} \cdot \frac{OR'}{R'D'} \cdot \frac{D'S}{SD} = 1.$$

Кроме того,

$$\frac{CR}{RO} \cdot \frac{OQ}{QC} = \frac{C'R'}{R'O} \cdot \frac{OQ'}{Q'C'},$$

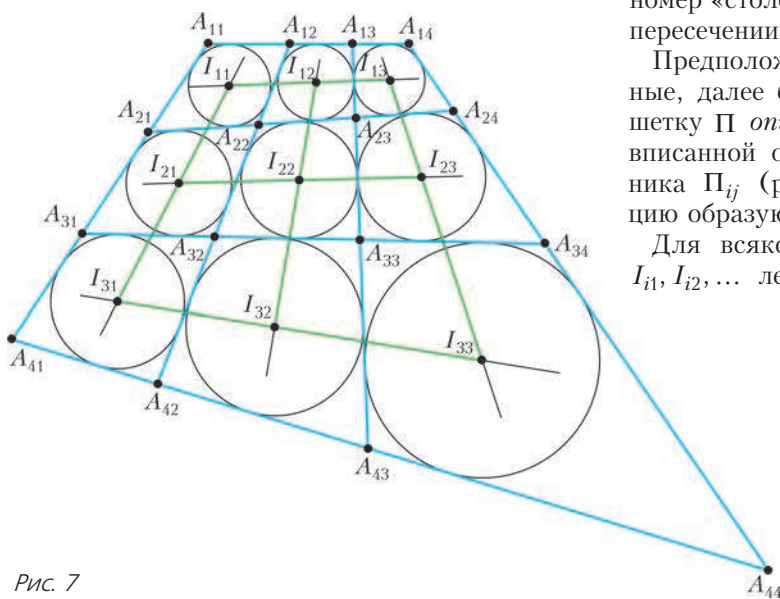


Рис. 7

поскольку четырехугольники  $CROQ$  и  $C'R'OQ'$  гомотетичны.

Из полученных соотношений вытекает

$$\begin{aligned} \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} &= \\ &= \frac{AP}{PB'} \cdot \frac{B'Q'}{Q'C'} \cdot \frac{C'R'}{R'D'} \cdot \frac{D'S}{SA}. \end{aligned}$$

Для того чтобы установить нужное соотношение

$$\frac{AP}{PB'} \cdot \frac{B'Q'}{Q'C'} \cdot \frac{C'R'}{R'D'} \cdot \frac{D'S}{SA} = 1, \text{ дос-}$$

таточно доказать, что прямые  $AC'$ ,  $PQ'$  и  $R'S$  пересекаются в одной точке (аналогично рассуждениям в решении задачи 3 для точек  $P'$ ,  $Q'$ ,  $R'$ ,  $S'$  на сторонах или продолжениях сторон четырехугольника  $AB'C'D'$ ). Но это верно по теореме Бриансона для описанной шестиугольной ломаной  $APR'C'Q'S$ . Этим завершается решение.<sup>3</sup>

В задачах 3 и 4 мы встречаем *решетку*  $2 \times 2$  из описанных четырехугольников. Далее будем рассматривать решетки выпуклых четырехугольников и большего размера.

Пусть некоторая решетка  $\Pi$  получается в пересечении прямых  $l_1, l_2, \dots$  и  $m_1, m_2, \dots$ . Обозначим  $A_{ij} = l_i \cap m_j$  – узлы решетки. Обозначим четырехугольники решетки через  $\Pi_{ij}$  (так что  $i$  – номер «строки»,  $j$  – номер «столбца», т.е.  $\Pi_{ij}$  получается в пересечении прямых  $l_i, l_{i+1}$  и  $m_j, m_{j+1}$ ).

Предположим, что все  $\Pi_{ij}$  – описанные, далее будем называть такую решетку  $\Pi$  *описанной*. Пусть  $I_{ij}$  – центр вписанной окружности четырехугольника  $\Pi_{ij}$  (рис.7). Какую конфигурацию образуют эти центры?

Для всякого индекса  $i$  ряд точек  $I_{i1}, I_{i2}, \dots$  лежит (именно в таком порядке) на биссектрисе угла между прямыми  $l_i$  и  $l_{i+1}$ . Аналогично, для всякого  $j$  точки  $I_{1j}, I_{2j}, \dots$  лежат на биссектрисе угла между прямыми  $m_j$  и  $m_{j+1}$ . Наконец, каждая пара отрезков  $I_{ij}I_{(i+1)(j+1)}$  и  $I_{i(j+1)}I_{(i+1)j}$  пересекается

под прямым углом, поскольку эти отрезки лежат на биссектрисах углов, образованных прямыми  $l_{i+1}$  и  $m_{j+1}$ . Получается, что центры  $I_{ij}$  вписанных окружностей являются узлами решетки  $\Phi$ , в которой у каждого четырехугольника  $\Phi_{ij}$  диагонали

<sup>3</sup> Совершенно другое решение задачи 4, которое опирается на теорему о трех гомотетиях, нашел И.И.Богданов. Это решение содержится в шортлисте ММО-2015.



перпендикулярны. Назовем такие четырехугольники *ортодиагональными*, а решетку ортодиагональных четырехугольников – *ортодиагональной решеткой*. Итак, мы увидели, что описанная решетка  $\Pi$  размера  $n \times k$  порождает ортодиагональную решетку  $\Phi$  размера  $(n-1) \times (k-1)$ , узлы которой – центры вписанных окружностей четырехугольников  $\Pi_{ij}$ . В этой конструкции очевидно, что точки пересечения диагоналей четырехугольников  $\Phi_{ij}$  являются узлами решетки  $\Pi$ , т.е. данная ортодиагональная решетка  $\Phi$  порождает описанную решетку, узлы которой – точки пересечения диагоналей  $\Phi_{ij}$ .

Возникает естественный вопрос: верно ли, что произвольная ортодиагональная решетка порождается (в указанном выше смысле) описанной решеткой?

Пусть дана произвольная ортодиагональная решетка  $\Phi$  (рис.8),  $J_{ij}$  – узлы этой решетки (так что  $\Phi_{ij}$  – это четырехугольник  $J_{ij}J_{i(j+1)}J_{(i+1)(j+1)}J_{(i+1)j}$ ). Обозначим через  $B_{ij}$  точку пересечения диагоналей

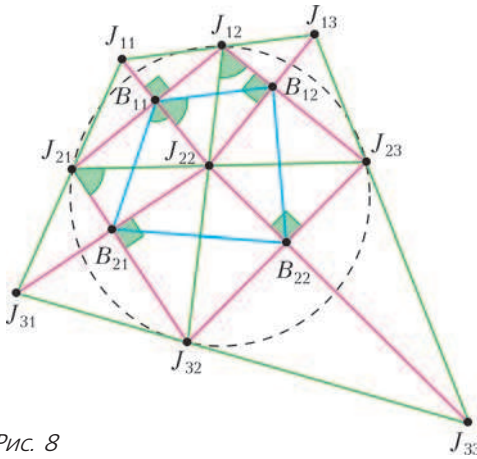


Рис. 8

гоналей четырехугольника  $\Phi_{ij}$ . Точки  $B_{ij}$  будут являться узлами описанной решетки, для которой узлы решетки  $\Phi$  – центры вписанных окружностей, тогда и только тогда, когда для каждого четырехугольника  $B_{ij}B_{i(j+1)}B_{(i+1)(j+1)}B_{(i+1)j}$  биссектрисами углов являются соответствующие диагонали четырехугольников  $\Phi_{ij}$ ,  $\Phi_{i(j+1)}$ ,  $\Phi_{(i+1)(j+1)}$ ,  $\Phi_{(i+1)j}$ . Что это «биссектральное условие» означает для решетки

$\Phi$ ? Посмотрим только на одну подрешетку  $2 \times 2$ . Заметим, что четырехугольники  $J_{12}B_{11}J_{22}B_{12}$  и  $J_{21}B_{21}J_{22}B_{11}$  оба вписанные. Поэтому

$$\angle B_{12}B_{11}J_{22} = \angle J_{22}B_{11}B_{21} \Leftrightarrow \angle B_{12}J_{12}J_{22} = \angle J_{22}J_{21}B_{21} \Leftrightarrow \angle J_{23}J_{12}J_{32} = \angle J_{23}J_{21}J_{32},$$

а это равносильно тому, что  $J_{12}J_{21}J_{32}J_{23}$  – вписанный. Таким образом, мы естественно подошли к задаче M2473.

**Задача 5 (M2473).** На сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$  выбраны точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  и  $S$  соответственно. Оказалось, что отрезки  $PR$  и  $QS$  разбивают  $ABCD$  на четыре четырехугольника, у каждого из которых диагонали перпендикулярны (рис. 9). Докажите, что точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  и  $S$  лежат на одной окружности.

Прямое решение задачи 5 затруднительно. Попробуем решить обратную задачу. Как построить чертеж к задаче 5? Нарисуем вписанный четырехугольник  $PQRS$  (рис.10), пусть  $O$  – точка пересечения его диагоналей. Проведем прямую  $l_A$ , прохо-

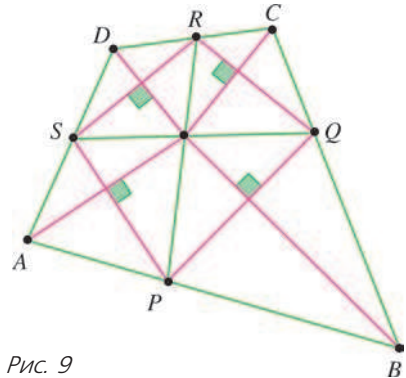


Рис. 9

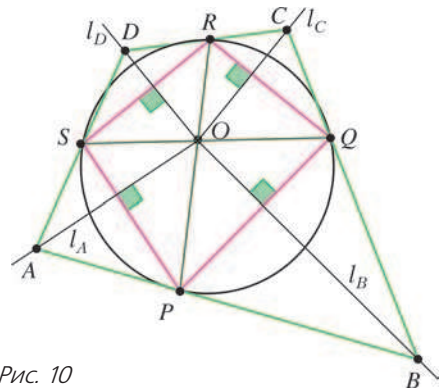


Рис. 10

дующую через  $O$  перпендикулярно  $SP$ , аналогично построим прямые  $l_B$ ,  $l_C$  и  $l_D$ . Возьмем на прямой  $l_A$  произвольную точку  $A$ . Построим  $B$  как пересечение прямых  $AP$  и  $l_B$ ,  $C$  – как пересечение прямых  $BQ$  и  $l_C$ ,  $D$  – как пересечение прямых  $CR$  и  $l_D$  и  $A'$  – как пересечение прямых  $DS$  и  $l_A$ . Докажем, что процесс всегда замкнется на этом шаге, т.е.  $A = A'$ .

**Задача 6** (теорема замыкания). Докажите, что в указанном выше процессе  $A = A'$ .

Пусть  $H_A$  – ортоцентр треугольника  $OSP$  (рис. 11), аналогично определим  $H_B$ ,

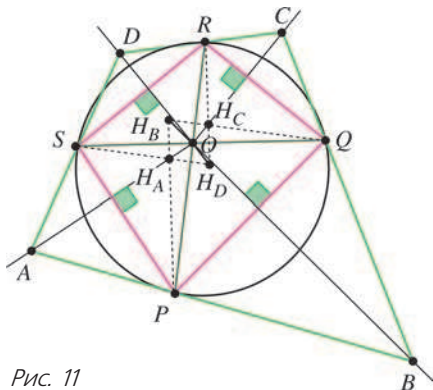


Рис. 11

$H_C$  и  $H_D$ . Когда  $A$  совпадает с  $H_A$ ,  $A = H_A$ , мы последовательно получаем  $B = H_B$ ,  $C = H_C$ ,  $D = H_D$  и  $A' = H_A$ . Поэтому для такого выбора точки  $A$  последовательность в самом деле замыкается на четвертом шаге. (В этом рассуждении мы не пользовались тем, что  $PQRS$  – вписанный.)

Попробуем использовать частный случай  $A = H_A$  как «точку опоры» для общего случая. Пусть  $A \neq H_A$ . Мы хотим показать, что прямые  $BP$  и  $DS$  пересекаются на прямой  $OH_A$ . Так как  $O$  – точка пересечения  $BH_B$  и  $DH_D$ , а  $H_A$  – точка пересечения  $H_BP$  и  $H_DS$ , то согласно теореме Дезарга для треугольников  $BH_BP$  и  $DH_DS$  это эквивалентно тому, что прямые  $BD$ ,  $H_BH_D$  и  $PS$  пересекаются в одной точке. Аналогично, прямые  $BD$ ,  $H_BH_D$  и  $QR$  пересекаются в одной точке. Нам осталось показать, что прямые  $PS$ ,  $QR$  и  $H_BH_D$  пересекаются в одной точке (здесь мы впервые воспользуемся тем, что  $PQRS$  – вписанный). Пусть  $k_A$  – окруж-

ность, построенная на  $SP$  как на диаметре. Определим аналогично  $k_B$ ,  $k_C$  и  $k_D$ . Поскольку радикальная ось окружностей  $k_A$  и  $k_B$  – это высота, проведенная из вершины  $P$  в треугольнике  $OPQ$ , а радикальная ось окружностей  $k_B$  и  $k_C$  – это высота, проведенная из вершины  $Q$  в треугольнике  $OPQ$ , точка  $H_B$  – это радикальный центр окружностей  $k_A$ ,  $k_B$  и  $k_C$ . Таким образом,  $H_B$  принадлежит радикальной оси окружностей  $k_A$  и  $k_C$ . Аналогичное утверждение верно для точки  $H_D$ . Поэтому прямые  $PS$ ,  $QR$  и  $H_BH_D$  совпадают с радикальными осями окружностей  $k_A$ ,  $k_C$  и описанной окружности четырехугольника  $PQRS$  и проходят через их радикальный центр.

Мы почти решили задачу 6, осталось «сгладить» еще одну техническую деталь. Если  $PR \perp QS$ , то все точки  $H_A$ ,  $H_B$ ,  $H_C$  и  $H_D$  совпадают с точкой  $O$ , тем самым, рассуждение, проведенное выше, не работает. Чтобы разобрать этот случай, можно брать точки  $P'$ ,  $Q'$ ,  $R'$  и  $S'$  близко к точкам  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  и так, чтобы  $P'R'$  и  $Q'S'$  не были перпендикулярны, тогда решение можно завершить, выполняя предельный переход от  $P'Q'R'S'$  к  $PQRS$  (проведите нужные рассуждения). Задача 6 решена.

Вернемся теперь к задаче 5. Выведем ее из задачи 6. Приведем рассуждения И.И.Богданова.<sup>4</sup>

В условиях задачи 5 предположим, что, напротив, точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  и  $S$  не лежат на одной окружности (рис. 12). Пусть  $PR$  и  $QS$  пересекаются в  $O$ . Тогда  $PO \cdot OR \neq QO \cdot OS$ . Без ограничения общности предположим, что  $PO \cdot OR < QO \cdot OS$ . Пусть  $P'$  – точка на продолжении  $OP$  за точку  $P$  такая, что  $P'O \cdot OR = QO \cdot OS$ , так что  $P'QRS$  – вписанный четырехугольник. Пусть прямая, перпендикулярная  $SP'$  и проходящая через  $O$ , пересекает прямую  $DA$  в точке  $A'$ . Тогда  $A'$  лежит на отрезке  $DA$ . Аналогично, пусть прямая, перпендикулярная  $P'Q$  и проходящая через  $O$ , пересекает  $BC$  в точке  $B'$ . Тогда

<sup>4</sup> Авторское решение задачи 5 строилось как обратное к приведенному выше решению задачи 6.

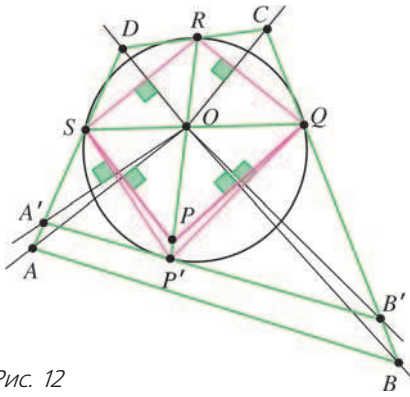


Рис. 12

$B'$  лежит на отрезке  $BC$ . По задаче 6,  $P'$  лежит на прямой  $A'B'$ . Однако, поскольку  $A', B', P$  и  $R$  лежат на сторонах  $DA, BC, AB$  и  $CD$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$ , прямая  $A'B'$  пересекает  $PR$  в точке, лежащей внутри отрезка  $PR$ . Мы пришли к противоречию, и теперь решение задачи 5 завершено!

*Замечание.* В процессе решения задач 5 и 6 мы получили, что  $BD, QR$  и  $PS$  пересекаются в одной точке (либо параллельны). Сравним с утверждением задачи 4, видим, что оно остается в силе после замены слова «описанный» на «ортодиагональный».

Итак, описанные и ортодиагональные решетки оказались двойственными: описанная решетка порождает ортодиагональную (отмечаем центры вписанных окружностей), а ортодиагональная – описанную

(отмечаем точки пересечения диагоналей).

Соображения, которые мы использовали выше, позволяют продолжать описанные и ортодиагональные решетки. Возьмем, например, ортодиагональную решетку  $\Phi$  размера  $2 \times 2$  ( $J_{ij}$  – узлы этой решетки,  $B_{ij}$  – точки пересечения диагоналей четырехугольников  $\Phi_{ij}$ ; рис.13). Мы знаем, что диагонали четырехугольников  $\Phi_{ij}$  являются внутренними и внешними биссектрисами углов четырехугольника  $B_{11}B_{12}B_{22}B_{21}$ , значит, помимо вписанной в него окружности, существуют еще окружности  $\omega_{ij}$  с центрами в узлах  $J_{ij}$ , касающиеся сторон и продолжений сторон четырехугольника  $B_{11}B_{12}B_{22}B_{21}$ , как показано на рисунке 13. Поскольку все окружности  $\omega_{ij}$  «верхнего» ряда имеют общую касательную  $B_{11}B_{12}$  и их центры лежат на одной прямой, они имеют и вторую общую касательную. Аналогично находим новые общие касательные к крайним рядам окружностей. Если эти касательные вместе с прямыми, содержащими стороны четырехугольника  $B_{11}B_{12}B_{22}B_{21}$ , образуют решетку  $3 \times 3$  (иногда конфигурация такова, что этого не происходит; рис.14), то, как мы видим, эта решетка – описанная. Проведенные только что рассуждения позволяют восстанавливать описанную решетку, порождающую данную ортодиагональную решетку.

А можно ли продолжить описанную решетку?

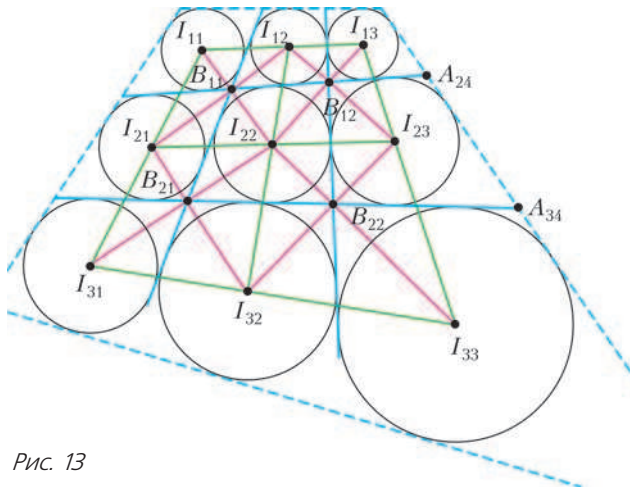


Рис. 13

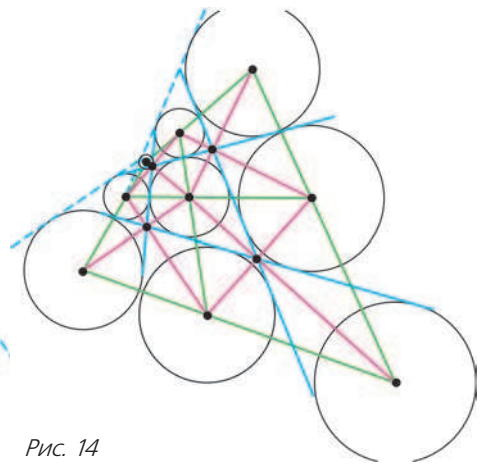


Рис. 14

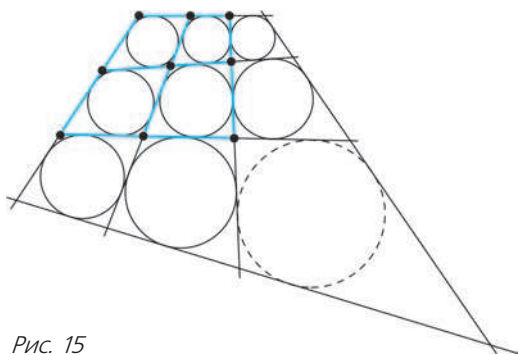


Рис. 15

Рассмотрим описанную решетку размера  $2 \times 2$ . Для продолжения решетки «вправо» и «вниз» четыре окружности строятся однозначно (рис.15). Две общих касательных к парам новых окружностей дадут «правую» и «нижнюю границы» новой решетки. Остается понять, что в новую «ячейку» тоже можно вписать окружность. Возникает следующая задача.

**Задача 7.<sup>5</sup>** Пусть дана решетка  $\Pi$   $3 \times 3$  из выпуклых четырехугольников. Известно, что все четырехугольники  $\Pi_{ij}$ ,

за исключением, возможно,  $\Pi_{33}$ , — описанные. Докажите, что в таком случае  $\Pi_{33}$  также является описанным.

Сейчас мы обнаружим, что задача 7 нами уже решена раньше! Просто мы встречали ее в другом обличии.

Пусть  $I_{ij}$  — центр вписанной окружности четырехугольника  $\Pi_{ij}$  для  $ij = 11, 12, \dots, 32$ . (рис.16). Рассмотрим выпуклый четырехугольник  $I_{12}I_{21}I_{32}I_{23}$ . Легко видеть, что он вписанный (см. рассуждение с «биссектральным свойством» в решении задачи 5). Его диагонали пересекаются в  $I_{22}$ , а прямые  $I_{22}A_{22}$ ,  $I_{22}A_{23}$ ,  $I_{22}A_{32}$  и  $I_{22}A_{33}$ , проходящие через  $I_{22}$ , перпендикулярны его сторонам. Согласно задаче 6, прямые  $I_{13}I_{23}$  и  $I_{31}I_{32}$  пересекаются в точке  $I_{33}$ , лежащей на прямой  $I_{22}A_{33}$ . Так как  $I_{33}$  лежит на прямой  $I_{13}I_{23}$ , она равноудалена от прямых  $A_{33}A_{43}$  и  $A_{34}A_{44}$ . Аналогично,  $I_{33}$  равноудалена и от прямых  $A_{34}A_{44}$  и  $A_{43}A_{44}$ , и от прямых  $A_{34}A_{44}$  и  $A_{33}A_{43}$ . Следовательно, четырехугольник  $\Pi_{33}$  описан вокруг окружности с центром  $I_{33}$ .

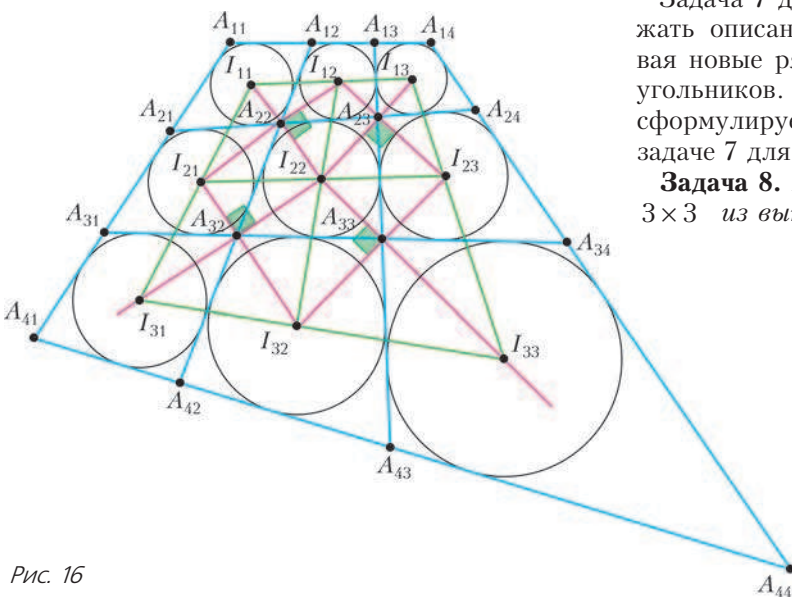


Рис. 16

<sup>5</sup> Эта задача независимо ставится и решается в статье А.Акопяна и А.Бобенко *Incircular nets and confocal conics* (<https://arxiv.org/abs/1602.04637>). В этой статье изучаются и другие интересные свойства описанных решеток.

Задача 7 дает возможность продолжать описанные решетки, пристраивая новые ряды описанных четырехугольников. Завершая нашу историю, сформулируем задачу 8, аналогичную задаче 7 для ортогональных решеток.

**Задача 8.** Пусть дана решетка  $\Phi$   $3 \times 3$  из выпуклых четырехугольников. Известно, что все четырехугольники  $\Phi_{ij}$ , за исключением, возможно,  $\Phi_{33}$ , — ортодиагональные. Докажите, что в таком случае  $\Phi_{33}$  также является ортодиагональным.

Решим задачу 8 в случае, когда все решетки, используемые нами, существуют (хотя продолжение решеток иногда невозможно без использования невыпуклых четырехугольников, как, например, на рисунке 14).

Рассмотрим ортодиагональную решетку



$2 \times 2$ , состоящую из четырехугольников  $\Phi_{11}$ ,  $\Phi_{12}$ ,  $\Phi_{21}$ ,  $\Phi_{22}$ . Пусть она порождена некоторой решеткой  $\Pi 3 \times 3$ , как на рисунке 13. Предположим, что  $\Pi$  можно продолжить до описанной решетки  $\Pi'$  размера  $4 \times 4$  аналогично рисунку 15. Как в рассуждении, которое привело нас к задаче 7, решетка  $\Pi'$  однозначно определена. Поэтому описанная решетка  $3 \times 3$ , порождающая ортодиагональную решетку  $2 \times 2$ , состоящую из четырехугольников  $\Phi_{21}$ ,  $\Phi_{22}$ ,  $\Phi_{31}$ ,  $\Phi_{32}$ , является подрешеткой решетки  $\Pi'$ . Аналогично, описанная

решетка  $3 \times 3$ , порождающая ортодиагональную решетку  $2 \times 2$ , состоящую из четырехугольников  $\Phi_{12}$ ,  $\Phi_{13}$ ,  $\Phi_{22}$ ,  $\Phi_{23}$ , также является подрешеткой решетки  $\Pi'$ . Поэтому  $\Phi$  совпадает с ортодиагональной решеткой, порожденной решеткой  $\Pi'$ . Следовательно, четырехугольник  $\Phi_{33}$  является ортодиагональным, что и требовалось доказать.

**Упражнение 4.** Как изменится решение задачи 8 в случае, когда для продолжения решеток потребуются использовать невыпуклые четырехугольники?

## КОНКУРС ИМЕНИ А. П. САВИНА

*Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач. Они рассчитаны в первую очередь на учащих 7–9 классов, но мы будем рады участию школьников всех возрастов.*

*Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: [savin.contest@gmail.com](mailto:savin.contest@gmail.com) или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором Вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.*

*Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.*

*Желаем успеха!*

5. Чему равняется сумма ТЫР + ПЫР, если известно, что  $\text{ТЫР} + \text{ПЫР} = 8 \times \text{ДЫР}$ ? Найдите все ответы и докажите, что других нет. Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными – разные, и ни одно число не начинается с нуля.

*М.Ахмеджанова*

6. Известно, что несколько небольших тяжелых ящиков можно увезти на семи 6-тонных грузовиках, но нельзя увезти на меньшем количестве таких грузовиков. Докажите, что этот груз не удастся увезти на трех 9-тонных грузовиках.

*А.Акопян, К.Кноп*

7. Все натуральные числа раскрасили в сто цветов. Докажите, что найдется несколько (не менее двух) различных чисел одного цвета таких, что их произведение имеет ровно 1000 различных натуральных делителей.

*Е.Бакаев*

8. Можно ли в пространстве расположить  $n$  одинаковых кубов так, чтобы любой куб имел ровно трех соседей (соседними считаются кубы, имеющие общую грань)? Решите задачу для: а)  $n = 2016$ ; б)  $n = 2017$ ; в)  $n = 2018$ .

*П.Кожевников*



## Задачи

1. Разрежьте фигуру, показанную на рисунке, на четыре части одинакового периметра так, чтобы среди этих частей не было равных.

*Т.Казицина*



2. Состоялся матч по футболу 10 на 10 игроков между командой лжецов (которые всегда лгут) и командой правдолюбів (которые всегда говорят правду). После матча каждого игрока спросили: «Сколько голов ты забил?» Некоторые участники матча ответили «один», Миша сказал «два»,



некоторые ответили «три», а остальные сказали «пять». Лжет ли Миша, если правдолюбів победили со счетом 20:17?

*М.Евдокимов*

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Эти задачи предлагались на XL Турнире имени М.В.Ломоносова.

3. В семье Бесфамильных принято подсчитывать возраст семьи, т.е. сумму возрастов (число полных лет) папы, мамы и всех детей. Каждый год 31 декабря Бесфамильные празднуют день рождения своей семьи. В год, когда родился младший ребенок Вася, семье был 101 год. Через несколько лет Бесфамильные праздновали свое

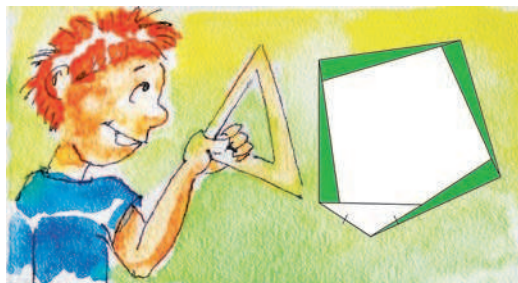


150-летие. Сколько детей в семье Бесфамильных?

*Д.Шноль*

4. Леша нарисовал геометрическую картинку, обведя четыре раза свой пластмассовый прямоугольный треугольник, прикладывая короткий катет к гипотенузе и совмещая вершину острого угла с вершиной прямого. Оказалось, что «закрывающий» пятый треугольник – равнобедренный (см. рисунок; равны именно отмеченные стороны). Найдите острые углы Лешиного треугольника.

*Т.Казицина*



# Как Бусенька проиграла кулинарный конкурс

К. КОХАСЬ

— ТАКИМ ОБРАЗОМ, УЧАСТНИК, СТРОГО следуя рецепту, должен «всего лишь» сварить кашу, — мышь Огрыза внимательно посмотрела на зрителей. — В этом ведь и состоит истинное кулинарное мастерство! Вроде бы все делают одно и то же, но почему-то у одних это весьма неплохо получается, другие же только переводят продукты. А теперь я представлю вам участников конкурса: экстракулинар Бусенька! — раздались дружные аплодисменты, — стряпчий дятел Спятел!! — аплодисменты оказались чуть поуже, — и мегабосс-повар... Злобнопотам!!! — зрители беспокойно заерзали и стали осматриваться, чтобы в случае чего знать, где находится кратчайший путь к выходу. — Для зачитания рецепта приглашается ведущий кулинарный эксперт... Ушася!

— Внимание, рецепт! — произнес ведущий эксперт, глядя на зрителей. — Для изготовления каши требуется 100 граммов

овсяной крупы, щепотка соли, чайная ложка сахарного песка и немного воды. Овсянку положить в кастрюлю, добавить сахара, соли и воды, после чего варить 15 минут.

— Хрюкси-кукси-букси, — ни с того ни сего вдруг сказал Ушася, повернувшись к участникам. Эту мантру он произносил всегда, когда пытался кого-нибудь загипнотизировать. — Постарайтесь обойтись наименьшим количеством воды. Слишком жидкая овсяная каша отвратительна на вкус.

— Прошу участников подойти к кухонным столам, — объявила Огрыза, — в вашем распоряжении 20 минут. Старт!

Таинство приготовления каши началось. Больше всех суетился Злобнопотам. Он придирчиво осматривал плоские ингредиенты, нервно принюхивался, тщательно измерял уровень воды в стакане и при этом непрерывно щелкал колючками и выпускал из ушей колечки розового дыма. Бусенька тоже была поглощена процессом. Неизвестно откуда она достала портативный гидравлический пресс, какие-то насосы и реторты, скорее уместные в химической лаборатории, чем на кухне. Полной противоположностью этим участникам являлся дятел Спятел, он, казалось, вообще ничего не делал, безмятежно расположившись в кресле.

Время конкурса неумолимо подходило к концу.

— Стоп! — объявила Огрыза. — Творческая фаза конкурса завершена. Переходим к дегустационной части. Мы пригласили в жюри тонких ценителей вкуса, прошу их подойти к столам, это — монстропитек Горгулий, таракан Кузька и уже знакомый вам уж Ушася. Теперь участники по очереди представят нам результаты своей дея-



тельности, а жюри оценит их по пятибалльной системе. Злобнопотам!

– Вот вам каша! – мрачно рявкнул Злобнопотам. – Нальешь много воды – будет жидкая, нальешь мало – слишком густая. Я добавил вот столько – он показал на стакан, где была процарапана засечка, отмечавшая уровень налитой воды.

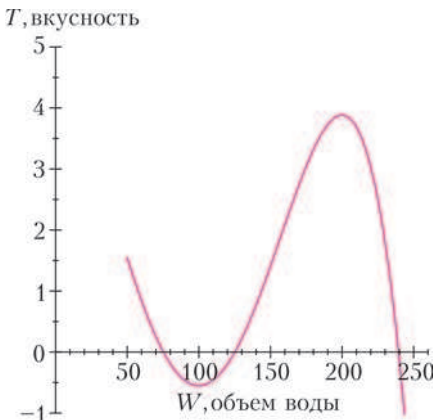
Каша была густая и комковатая и почему-то зеленоватого оттенка. Жюри с подозрением обнюхало кашу. Горгулий посмотрел стакан на просвет и сунул в него какой-то датчик.

– В новейших исследованиях фирмы «Каша Деликатесъон» доказано, – произнес Горгулий, обращаясь к зрителям, – что вкусность овсянки определяется по формуле

$$T = 5 - \frac{1}{3s_2} W - \frac{s_1 + s_2 + 1}{2s_1s_2M} W^2 + \frac{7s_2 - 2s_1}{s_1^2s_2M^2} W^3 - \frac{1}{4s_1M^3} W^4,$$

где  $M = 100$  – масса крупы,  $s_1 = 6$  и  $s_2 = 10$  – количество соли и сахара, все в граммах, эти величины зафиксированы правилами конкурса, а  $W$  – объем воды. В этих условиях величина  $T$  достигает оптимального значения при  $W = 200$  миллилитров и равна 3,89 объединенга.

Прошу посмотреть на график:



Это график функции

$$T(W) = 5 - \frac{1}{30} W - \frac{17}{12000} W^2 + \frac{29}{1800000} W^3 - \frac{1}{24000000} W^4.$$

Мы измерили, что первый конкурсант добавил в кашу всего лишь 100 миллилитров воды. Он получил значение вкусаности  $-0,56$  объединенга. Итоговая оценка участника: 2 балла!

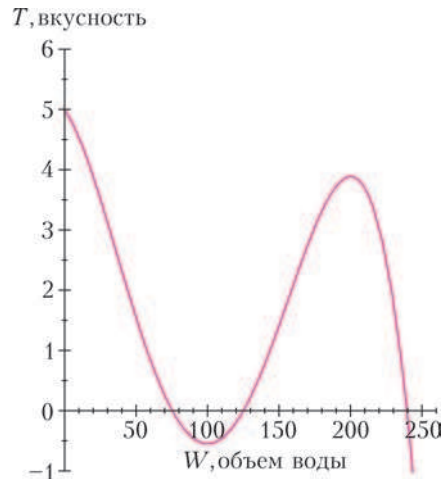
Злобнопотам посинел и заскрежетал когтями, оставляя следы на ровной поверхности кухонного стола.

– Перейдем к оценке следующего участника, – объявила Огрыза. – Дятел Спятел!

Жюри переместилось к столу дятла Спятла. На столе стояла кастрюля с довольно сильно подгоревшей крупой.

– Что это? – с недоумением спросил Кузька.

– В задании было четко сказано не транжирить воду, – веско сказал дятел Спятел. – а именно, я цитирую, «постарайтесь обойтись наименьшим количеством воды». Поэтому я добавил минимально возможное количество воды – 0 миллилитров. Согласитесь, меньшее количество невозможно. Каша получилась суховата, но дух технического задания соблюден полностью. Кроме того, если не полениться и продолжить ваш график немного влево, сразу становится ясно, что при  $W = 0$  вкусность овсянки максимальна – 5 объединенгов:



Поэтому я прошу присяжных вынести мне максимально возможную оценку.

Жюри посоветалось, и Ушася огласил вердикт:

– Похоже, что эксперты «Каша Деликатесон» очень любят запеченные мюсли. Но тем не менее мы все считаем, что эта каша несъедобна. Однако, учитывая смягчающие обстоятельства – дух задания и все такое, – мы ставим за это блюдо щедрую и весьма неплохую оценку: 1 балл!

Дятел Спятел с недовольством посмотрел на жюри, но спорить не стал.

– Теперь жюри оценит работу последнего участника, – объявила Огрыза. – Бусенька!

Жюри уже стояло возле стола Бусеньки и разглядывало *результат*. Результатом кулинарного творчества был обуглившийся коричневый диск, состоящий из какого-то вонючего спекшегося порошка. Ни с какой точки зрения это не было похоже на съедобное блюдо. Если при оценке творчества Злобнопотама доминирующими эмоциями жюри было подозрение и отвращение, а возле стола дятла Спятла – недоумение и отвращение, то теперь лидирующим было ощущение когнитивного диссонанса, а впрочем, и отвращения тоже.

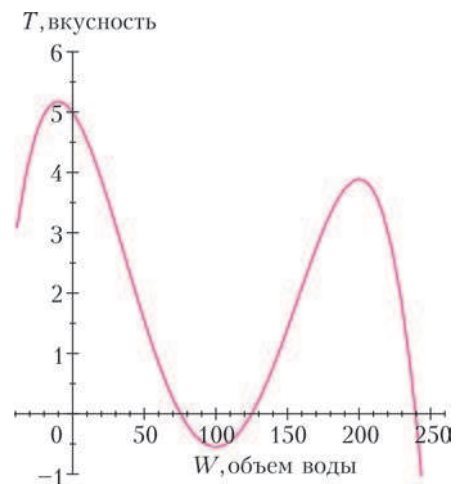
– Мне кажется, кто-то из нас спятил, – пробормотал Кузька. – Нам, домашним насекомым, часто случается иметь дело с крошками и прочими засохшими кусочками пищи, но это... это...

– Я строго следовала заданию, – возразила Бусенька. – Дело в том, что хотя представленная крупа и казалась совершенно сухой, при помощи этого прекрасного пресса и вот этого не менее замечательного выпаривателя мне удалось выжать из нее почти 8 миллилитров воды. Таким образом, я не добавляла воду в кашу, а наоборот, извлекла из нее лишнюю воду, т. е., образно говоря, я сумела добавить в эту крупу отрицательное количество воды! Гениально, правда ведь?

– Но это же совершенно несъедобно, – грустно сказал Горгулий, – абсолютно, вообще, ни при каких обстоятельствах!

– Зато это совершенно идеально соответствует формуле. Значение, которое принимает твоя функция при  $W = 200$  – это всего лишь локальный максимум, он

не является наибольшим значением функции, потому что у функции имеется еще один локальный максимум – отрицательный. Наибольшего значения вкусность достигает при  $W = -10$  и равна 5,18 объединения. Но я сумела получить только  $W = -8$ , при этом вкусность равна 5,17 объединения, что все равно больше, чем у дятла Спятла. Вот как выглядит ваш график, если его продолжить еще немного влево:



Если бы мне дали выпаривать из крупы воду в течение еще пары часов, а не 15 минут, я бы как раз и добыла еще 2 миллилитра воды! Вкуснотища!!

Жюри, разинув рты, смотрело на Бусеньку.

– Прошу жюри огласить оценку участницы, – поторопила Огрыза.

Друзья долго совещались и, наконец, Ушася объявил:

– Поскольку для оценок используется пятибалльная шкала, мы оцениваем кулинарные достижения Бусеньки в  $-5$  баллов!!



# Трансформатор Тесла – что это такое

В. УНУКОВИЧ

СИМЕНЕМ НИКОЛЫ ТЕСЛЫ СВЯЗАНО много великолепных изобретений и мистических историй. Так, после успехов Герца в проверке электромагнитной теории Максвелла Тесле пришла идея разработать высокочастотный генератор высокого напряжения. Его творение получило название «трансформатор Тесла» или же «катушка Тесла» и использовалось для проведения беспроводных экспериментов по передаче энергии на небольшие расстояния.

Наиболее известным трансформатором является *magnifying transmitter* – усиливающий передатчик (рис. 1), построенный Теслой в 1899 году. Устройство было поистине грандиозно: 15,5 метров в диаметре, 51 метр

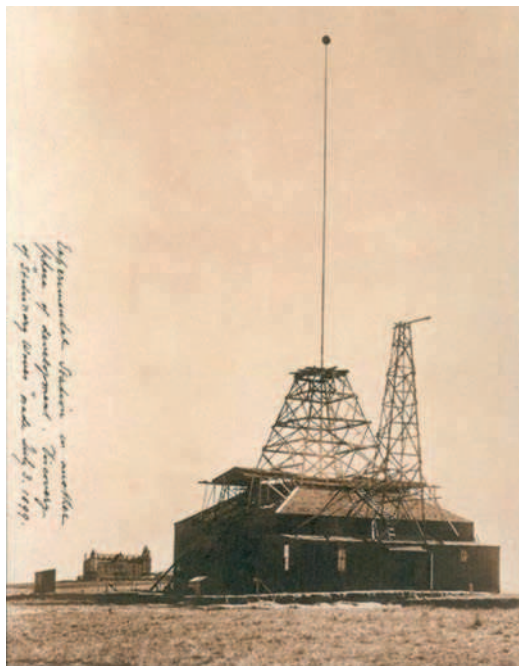


Рис. 1

в высоту (примерно высота 16-этажного здания!) и с выходным напряжением от 12 до 20 меговольт, создающим разряды длиной в 30 метров.

Трансформатор Тесла состоит из таких частей (рис. 2):

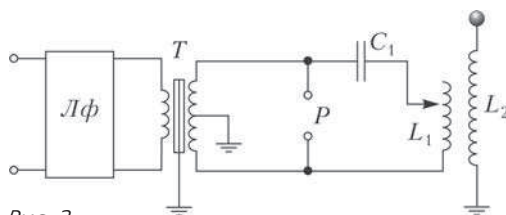


Рис. 2

- линейного фильтра  $L\phi$ , служащего для выделения сигналов из определенного диапазона частот или для подавления нежелательных частот – шума;
- повышающего трансформатора  $T$ ;
- разрядника  $P$ , представляющего собой два контакта, между которыми находится воздух;
- конденсатора  $C_1$ ;
- первичной и вторичной обмоток (катушек индуктивности)  $L_1$  и  $L_2$ ;
- тора или шара (именно он виден в верхней части рисунка 1), присоединенного ко вторичной обмотке.

Отметим важную вещь: обмотки не намотаны на сердечник, а расположены таким образом, что вторичная обмотка содержится в первичной, поскольку при протекании высокочастотных токов в контуре сердечник попросту плавится из-за больших токов Фуко.

Сначала выделяют ток определенной частоты с помощью линейного фильтра, а после прохождения через повышающий трансформатор на выходе получают ток с большей амплитудой и той же частоты. За счет протекания этого тока заряжается конденсатор  $C_1$ , и когда разность потенциалов становится достаточно большой, то в разряднике происходит пробой (напряженность поля там настолько велика, что электроны проносятся через воздушный промежуток, будто он проводник). Сопротивление разрядника резко падает, и происходит замыкание цепи, состоящей из разрядника, конденсатора  $C_1$  и первичной обмотки  $L_1$ . Данная цепь представляет собой колебательный контур, для

(Продолжение см. на с. 34)



*От животных мы путем подражания научились важнейшим делам, ... мы ученики ласточек в построении жилищ...*

Демокрит

*... птица — это инструмент, действующий по законам математики.*

Леонардо да Винчи

*Было бы, вероятно, полезно составить объектив зрительной трубы из различных сред, как это устроено в глазу природой, которая ничего не делает зря.*

Дэвид Грегори

*Если бы оптик принес мне столь несовершенный инструмент, как человеческий глаз, я бы тотчас выбросил его за дверь.*

Герман Гельмгольц

*В целом ряде актов, сопровождаемых сознанием и вызываемых внешним миром, живая материя может быть заменена автоматом.*

Николай Умов

*... в живых существах нет ничего, что не могло бы быть понято с той точки зрения, что они состоят из атомов, действующих по законам физики.*

Ричард Фейнман

## А так ли хорошо знакома вам бионика?

Этот термин отсутствует в приведенных в эпиграфе высказываниях, он родился лишь немногим более полувека назад, когда было выделено новое научное направление. Получив название «бионика», оно объединило подходы многих дисциплин, не в последнюю очередь — и физики. Целью было осмыслить строение и функционирование живых организмов для выявления наилучших возможностей создания уже рукотворных систем, механизмов и конструкций. Ведь природа в ходе миллиарднолетней эволюции «научилась» решать многие проблемы надежнее и экономичнее, чем это удастся ученым и инженерам. Это и накопление и обработка информации; и задачи коммуникации и навигации; и преобразование одних видов энергии в другие...

Однако размышлениям профессиональных исследователей предшествовали неисчислимы попытки наших далеких предков подсмотреть и позаимствовать у природы что-либо удобное, практичное и полезное. Добавим к их пытливости и упорству наши знания, прежде всего по физике, чтобы справиться с сегодняшними не совсем обычными заданиями. Ведь они потребуют от вас наблюдательности, умения проводить аналогии, искать сходство между естественным и искусственным.

### Вопросы и задачи

1. Яйцо выдерживает тяжесть курицы-наседки, но легко разрушается под ударами клювика слабого птенчика изнутри. Почему?
2. Чем может помочь внешний вид обитателей животного мира конструкторам морских и воздушных судов, а также автомобилей?
3. Велосипедисты в командных гонках вытягиваются друг за другом в цепочку, а истребители в групповом полете выстраиваются клином. Зачем?
4. Как движутся лапки водоплавающих птиц? Кто заимствует такой способ передвижения?
5. Кенгуру начинают двигаться с места, низко пригнувшись к земле, что помогает им быстрее достичь высокой скорости. Кому могло пригодиться подобное наблюдение?
6. Авиастроители долгое время не могли найти способ борьбы с флаттером — вредными колебаниями крыла самолета в полете, пока не догадались на конце крыла делать утяжеление. А как природа решает проблему гашения таких колебаний?
7. Кальмар совершает броски, засасывая воду внутрь имеющейся в его теле полости и «выстреливая» ею сквозь узкую воронку, причем та может поворачиваться, изменяя направление его движения. Такой метод весьма экономичен и позволяет животному дости-



гать скорости под 100 км/ч. Где схожий принцип используется в технике?

8. Почему такое эффективное изобретение, как колесо, природа обошла вниманием?

9. Рыба-прилипала обладает присоской, занимающей почти всю длину ее головы, и присасывается к другим рыбам, камням, лодкам так прочно, что ее легче разорвать, чем отцепить. Как действует присоска и где это может быть полезно?

10. Некоторые змеи, например щитомордники, обладают особыми органами, расположенными в ямках между их ноздрями и глазами. Благодаря им змеи восприимчивы к инфракрасному излучению. Где может пригодиться изучение таких термолокаторов?

11. Почему летучие мыши даже в полной темноте не налетают на препятствия? В чем могут помочь нам такие их способности?

12. Рыбка периофтальмус, зарываясь в ил, выставляет наружу глаза. Какие устройства, изобретенные человеком, это напоминает?

13. Тонкие и острые кремниевые иглолки морских губок, как выяснилось, способны проводить свет вдоль своей длины. В чем здесь природа опередила изобретателей?

### Микроопыт

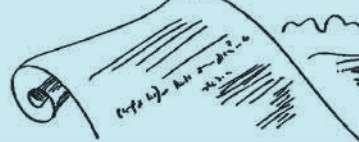
Наверняка во время прогулок на природе к вашей одежде или обуви прилипали колючки лопуха-репейника. Попробуйте найти в вашем гардеробе примеры использования этих особенностей растения.

### Любопытно, что...

... яйца птиц и земноводных, скорлупа орехов, панцири черепах и крабов, раковины моллюсков – примеры прочных и легких природных оболочек, издревле изучаемых строителями и архитекторами и используемых ими, например, при сооружении арочных сводов.

... исследованию полета птиц в надежде создать летательный аппарат для человека Леонардо да Винчи отдал почти четверть века, за что многие современники сочли его магом и даже сумасшедшим.

... автомобильные дизайнеры поначалу добивались чисто внешнего сходства своих машин с быстроходными обитателями морских глубин – скатами и акулами. Но в дальнейшем инженерами концерна «Мерседес» совместно с биологами удалось создать



истинно бионический автомобиль (Bionic Car), опираясь на особенности строения рыбки-коробочки, а именно сделать его более обтекаемым, на 40% жестче и на треть легче, чем близкие по размерам прежние модели.

... способность ящериц-гекконов взбираться по гладким стенам и бегать даже по потолкам не дает покоя конструкторам роботов. Исследуя строение лапок геккона, уже удалось разобраться во взаимодействии покрывающих их микроволосков с поверхностями – это электростатическое притяжение молекул. Применяя искусственные нановолокна, канадские инженеры сделали робота-танкетку, ползающую вверх по стене, правда с еще небольшой скоростью.

... насекомые, привлекаемые ярко окрашенными листьями-кувшинчиками растения-хищника непентеса, несмотря ни на какие ухищрения срываются с них. Такое природное устройство побудило материаловедов к созданию поверхностей, отталкивающих самые различные вещества.

... как выяснили японские ученые, представители одного из видов пиявок выдерживают в течение суток температуру минус 196 градусов по Цельсию, а минус 90 переносили целых 32 месяца. Разгадка этого феномена поможет сохранять человеческие клетки или органы для трансплантации.

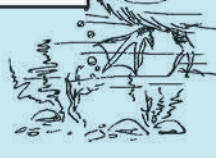
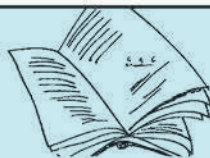
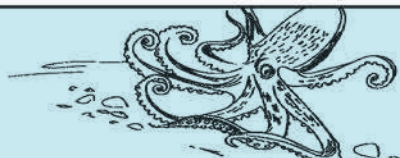
...природа предоставляет примеры пока недостижимой многими нашими приборами и машинами эффективности. Например, при фотосинтезе КПД приближается к 75%, бактерии переводят в свет до 90% химических реакций, а у светлячков он достигает 100%!

### Что читать к «Кванте» о бионике

(публикации последних лет)

1. «Перо птицы и воздушный полет» – 2012, №1, с.14;
2. «Дедал, Икар и центробежная сила» – 2014, №5–6, с.42;
3. «Физик в гостях у биолога» – 2015, Приложение №1;
4. «О махолете электрически» – 2016, №5-6, с.45;
5. «Движение автомобилей и живых существ...» – 2017, №1, с.36;
6. Калейдоскоп «Кванта» – 2017, №1, 4, 7.

Материал подготовил А.Леонович



(Начало см. на с. 31)

периода собственных колебаний которого верна формула Томсона, связывающая период колебаний с величинами индуктивности и емкости контура:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{L_1C_1}.$$

После замыкания контура (он изображен на рисунке 3 слева) конденсатор  $C_1$  начина-

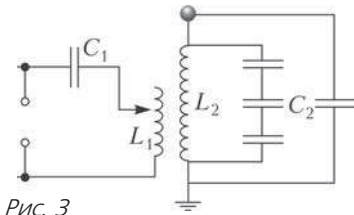


Рис. 3

ет разряжаться через первичную обмотку  $L_1$ , вследствие чего создается изменяющееся во времени магнитное поле, пронизывающее первичную и вторичную обмотки. Причем заметим, что разрядка происходит значительно быстрее зарядки из-за того, что до пробоя разрядника ток протекал через две катушки индуктивности – катушку  $L_1$  и вторичную обмотку трансформатора  $T$ , а после пробоя ток протекал лишь через  $L_1$ . Одновременно с этим возникает ток во вторичной обмотке  $L_2$ . И здесь неидеальность нашего трансформатора играет существенную роль. Из-за невероятного большого количества витков вторичной обмотки стоит учитывать емкостную связь между витками (два соседних витка с током представляются как бы две обкладки конденсатора), а также в качестве обкладок еще одного конденсатора для вторичной цепи надо рассмотреть тор (шар) и землю. Таким образом получается «природный колебательный контур» общей емкостью  $C_2$ , изображенный на рисунке 3 справа. Период собственных колебаний для этого контура равен

$$T_2 = 2\pi\sqrt{L_2C_2}.$$

А дальше проделывается следующий фокус – подбираются такие  $C_1$  и  $L_1$ , чтобы наблюдался резонанс:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{L_1C_1} = 2\pi\sqrt{L_2C_2} = T_2,$$

что приводит к дополнительному увеличению амплитуды колебаний силы тока.

Сделаем предположение, что энергия тратится не во время ее перехода, а лишь после

полной передачи из одного колебательного контура в другой. Изначально энергия, содержащаяся в первичном колебательном контуре, была полностью запасена в конденсаторе емкостью  $C_1$ . После же, когда конденсатор начал разряжаться и через первичную обмотку пошел ток, благодаря электромагнитной индукции во вторичной обмотке возник ток, который зарядил конденсатор  $C_2$ . В конечном итоге энергия будет полностью запасена в конденсаторе емкостью  $C_2$ . Исходя из этих соображений, запишем закон сохранения энергии в виде

$$\frac{C_1U_1^2}{2} = \frac{C_2U_2^2}{2},$$

где  $U_1$  и  $U_2$  – это амплитудные значения напряжений в каждом из колебательных контуров. Выражая отсюда отношение напряжений и воспользовавшись условием резонанса, получаем

$$\frac{U_2}{U_1} = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}.$$

Таким образом, видно, что чем больше отношение индуктивностей обмоток, тем больше отношение выходного напряжения к входному.

Индуктивность определяется характеристиками обмотки (катушки):

$$L = \frac{\mu_0\mu SN^2}{l},$$

где  $\mu_0$  – магнитная постоянная,  $\mu$  – магнитная проницаемость сердечника,  $S$  – площадь сечения катушки,  $N$  – количество витков,  $l$  – длина катушки. Это объясняет, почему первичная обмотка делается из толстого провода с малым количеством витков, а вторичная – из тонкого провода с тысячами витков.

Однако приведенные формулы дают лишь приблизительные отношения, поскольку происходят потери энергии в разряднике, при рассеивании магнитного поля, энергия расходуется также на нагрев обмоток и на излучение электромагнитных волн. Вследствие потерь энергии воздух в разряднике остывает и перестает проводить ток, и весь процесс начинается сначала.

И спрашивается: зачем же нужно такое чудо техники?

Катушки имеют применение в разных шоу, поскольку своими разрядами и вспышками завораживают взгляд и ввергают в изумле-



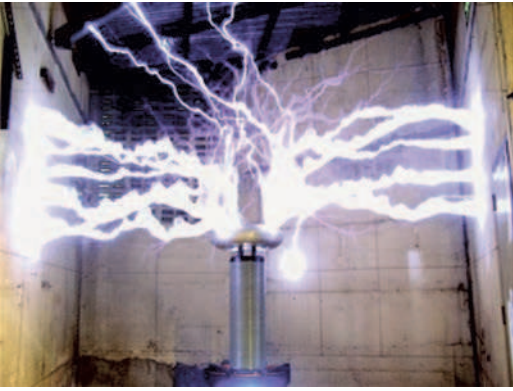


Рис. 4

ние зрителей (рис.4). Нельзя не сказать, что одновременно с визуальными эффектами катушки способны воспроизводить абсолютно любую мелодию, что и является корон-

ным номером некоторых шоу. Это свойство объясняется тем, что во время появления разряда (т.е. плазмы) воздух моментально нагревается, приводя к быстрому повышению давления вокруг разряда и порождая звуковую волну. Следовательно, при пропускании в цепь трансформатора импульсов тока в определенном порядке будут появляться разряды, создающие звуковые волны в таком же порядке, и результатом будет некоторая заданная мелодия.

Помимо этого есть и прикладное назначение катушек. Так, в вакуумных системах, чтобы определить места пробоя, используют переносные трансформаторы Тесла – если во время включения трансформатора внутри вакуумного прибора будут видны какие-то разряды, значит, есть разгерметизация.

## Где ошибка?

**А.БЛИНКОВ**

**В** ПРЕДЛАГАЕМЫХ ТЕКСТАХ МОГУТ БЫТЬ ошибки (как в условиях задач, так и в ответах и решениях). Попробуйте их найти там, где они есть.

**Задача 1.** Докажите, что если у треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны стороны  $AB$  и  $A_1B_1$ , равны высоты  $CH$  и  $C_1H_1$  и равны медианы  $BM$  и  $B_1M_1$ , то такие треугольники равны.

**Решение.** Продолжим медианы  $BM$  и  $B_1M_1$  за точки  $M$  и  $M_1$  соответственно и отложим отрезки  $MD = BM$  и  $M_1D_1 = B_1M_1$  (рис.1).

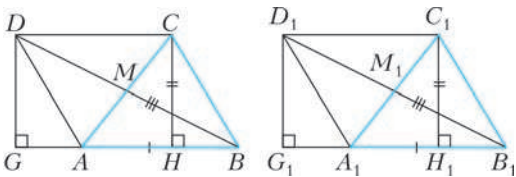


Рис. 1

Получим параллелограммы  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$ . Из вершин  $D$  и  $D_1$  опустим перпендикуляры  $DG$  и  $D_1G_1$  на прямые  $AB$  и  $A_1B_1$  соответственно. Тогда  $DG = CH = C_1H_1 = D_1G_1$ , значит, равны прямоуголь-

ные треугольники  $BDG$  и  $B_1D_1G_1$  (по гипотенузе и катету). Следовательно,  $\angle DBG = \angle D_1B_1G_1$ .

Треугольники  $ABM$  и  $A_1B_1M_1$  равны по двум сторонам и углу между ними ( $AB = A_1B_1$ ,  $BM = B_1M_1$ ,  $\angle ABM = \angle A_1B_1M_1$ ). Тогда  $AM = A_1M_1$  и  $\angle BAM = \angle B_1A_1M_1$ . Из равенства отрезков  $AM$  и  $A_1M_1$  следует, что  $AC = A_1C_1$ . Таким образом, в треугольниках  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ :  $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$ ,  $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ . Следовательно, треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны.

Кажется, что найден еще один признак равенства треугольников. Так ли это?

**Задача 2.** В ромбе  $ABCD$  на сторонах  $AB$  и  $BC$  отмечены точки  $E$  и  $F$  соответственно так, что  $\angle DEF = \angle DFE$ . Докажите, что  $BE = BF$ .

**Решение.** Из данного равенства углов следует равенство отрезков  $DE$  и  $DF$ . Следовательно, равны треугольники  $DEA$  и  $DFC$ . Тогда  $AE = CF$ , откуда  $BE = BF$ .

Здесь, наверное, все очевидно. Достаточно нарисовать симметричную «картинку». Или что-то не так?

**Задача 3.** В равнобокую трапецию, длина диагонали которой равна  $2,5$ , вписан круг площади  $\pi$ . Найдите площадь трапеции.

**Ответ:** 3.

**Решение.** Пусть  $ABCD$  – данная трапеция (рис.2). Так как радиус круга равен 1, то

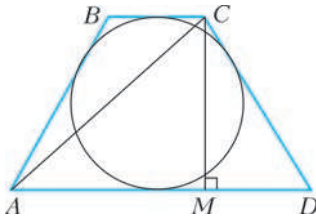


Рис. 2

высота  $CM$  трапеции равна 2. Из треугольника  $SAM$  получим, что  $AM = 1,5$ . Так как трапеция равнобокая, то отрезок  $AM$  равен средней линии трапеции. Следовательно, ее площадь  $S = AM \cdot CM = 3$ .

Странно, как это площадь трапеции меньше, чем площадь вписанного в нее круга?

**Задача 4.** Рассматриваются все треугольники  $ABC$ , у которых фиксированы длина стороны  $AB$  и сумма длин двух других сторон. У какого из этих треугольников высота, проведенная к стороне  $AB$ , имеет наибольшую длину?

**Ответ:** такого треугольника не существует.

**Решение.** Так как  $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot h$  и длина  $AB$  фиксирована, то высота  $h$  имеет наибольшую длину, если  $S_{ABC}$  принимает наибольшее значение. Поскольку  $S_{ABC} = pr$  и полупериметр  $p$  данного треугольника зафиксирован, то  $S_{ABC}$  – наибольшая, если наибольшее значение принимает радиус  $r$  окружности, вписанной в данный треугольник. Но  $r = (p - AB) \operatorname{tg} \frac{\angle ACB}{2}$ , значит,  $r$  принимает наибольшее значение при наибольшем значении тангенса указанного угла.

Угол  $\alpha = \frac{1}{2} \angle ACB < 90^\circ$ , функция  $\operatorname{tg} \alpha$  на промежутке  $(0; 90^\circ)$  возрастает от 0 до  $+\infty$ , т.е. наибольшего значения тангенса не существует, значит, и треугольника с наибольшей длиной высоты также не существует.

Полученный результат удивляет. Известно, что из всех фигур с данной длиной периметра наибольшую площадь имеет круг. Почему не нашлось треугольника с фиксированным периметром и наибольшей площадью?

**Задача 5.** Пусть  $H$  – ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника  $ABC$ . Докажите, что треугольники  $ABC$  и  $BCH$

имеют общий центр описанной окружности.

**Решение.** В треугольнике  $ABC$  рассмотрим ортотреугольник (треугольник, образованный основаниями его высот). Известно, что перпендикуляры к сторонам ортотреугольника, проведенные из соответствующих вершин треугольника  $ABC$ , пересекаются в центре окружности, описанной около  $ABC$ . У треугольников  $ABC$  и  $BCH$  один и тот же ортотреугольник. Значит, эти треугольники имеют общий центр описанной окружности (эти центры можно получить как пересечение перпендикуляров к сторонам ортотреугольника из общих вершин  $B$  и  $C$ ), что и требовалось доказать.

Факт красивый. Может быть, нарисовать чертёж?

**Задача 6.** Известно, что центр  $I$  вписанной окружности остроугольного треугольника  $ABC$  лежит на отрезке  $OH$  ( $O$  – центр описанной окружности,  $H$  – точка пересечения высот). Докажите, что треугольник  $ABC$  равносторонний.

**Решение.** Из условия задачи следует, что  $AI$  – биссектриса угла  $BAC$  (рис.3). Вос-

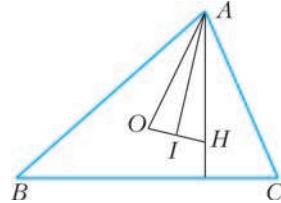


Рис. 3

пользуемся известным фактом:  $\angle OAB = \angle HAC$ , тогда  $AI$  – биссектриса треугольника  $OAH$ . По свойству биссектрисы:

$\frac{HO}{HI} = \frac{AO}{HA}$ . Проведя аналогичные рас-

суждения для треугольников  $OBH$  и  $OCH$ ,

получим  $\frac{HO}{HI} = \frac{BO}{HB}$  и  $\frac{HO}{HI} = \frac{CO}{HC}$ . Тогда,

учитывая, что  $OA = OB = OC$  (радиусы окружности, описанной около треугольника), получим  $AH = BH = CH$ . Следовательно,  $\angle HAB = \angle HBA$  и  $\angle HBC = \angle HCB$ . Из первого равенства следует равенство углов  $A$  и  $B$  данного треугольника, а из второго – равенство углов  $B$  и  $C$ . Таким образом, в треугольнике  $ABC$  три угла равны, т.е. этот треугольник – равносторонний.



Но в равностороннем треугольнике точки  $O$  и  $H$  совпадают! Что же не так?

**Задача 7.** В треугольнике  $ABC$ :  $AB = 3$ ,  $AC = 6$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$ . Найдите длину биссектрисы треугольника, проведенной к стороне  $BC$ .

**Решение.** Пусть  $AD = L$  – искомая биссектриса (рис. 4). По теореме косинусов:

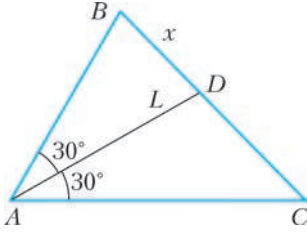


Рис. 4

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC = 27$ ;  $BC = 3\sqrt{3}$ . По свойству биссектрисы треугольника:  $\frac{DB}{CD} = \frac{BA}{CA}$ . Обозначив длину  $BD$  через  $x$ , получим уравнение  $\frac{x}{3\sqrt{3} - x} = \frac{3}{6}$ , откуда  $x = \sqrt{3}$ . По теореме косинусов из треугольника  $ABD$ :  $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \angle BAD$ . Подставив известные значения, получим квадратное уравнение  $L^2 - 3\sqrt{3}L + 6 = 0$ . Его корни:  $L_1 = \sqrt{3}$ ;  $L_2 = 2\sqrt{3}$ . Таким образом, длина биссектрисы равна  $\sqrt{3}$  или  $2\sqrt{3}$ .

Треугольник однозначно определяется двумя сторонами и углом между ними. Откуда тогда взялись два ответа и какой из них верный?

**Задача 8.** В треугольнике  $ABC$  с углом  $B$ , равным  $120^\circ$ , проведены биссектрисы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ . Найдите площадь треугольника  $A_1B_1C_1$ , если длины двух его сторон равны 4 и 5.

**Ответ:** 10 или 6.

**Решение.** На продолжении стороны  $AB$  (за точку  $B$ ) отметим точку  $D$ , тогда  $\angle DBC = 60^\circ$ , т.е. луч  $BC$  – биссектриса угла  $DBB_1$  (рис. 5). Так как  $AA_1$  – биссектриса угла  $BAC$ , то  $A_1$  – центр окружности, касающейся  $BB_1$ ,  $BD$  и  $B_1C$ . Такая окружность является вневписанной для треугольника  $ABB_1$ , поэтому  $B_1A_1$  – биссектриса угла  $BB_1C$ . Аналогично,  $C_1$  – центр вневписанной окружности для треугольника  $CBB_1$ ,

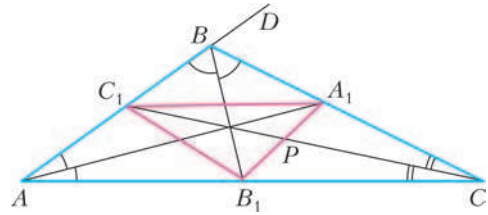


Рис. 5

поэтому  $B_1C_1$  – биссектриса угла  $BB_1A$ . Следовательно,  $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$ . Таким образом, треугольник  $A_1B_1C_1$  – прямоугольный, значит, его площадь  $S = \frac{1}{2} B_1A_1 \cdot B_1C_1$ . Далее возможны два случая:

1) Заданные длины сторон – это длины катетов этого треугольника, тогда его площадь  $S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$ .

2) Гипотенуза этого треугольника равна 5, а один из катетов равен 4. Тогда другой катет равен 3, т.е.  $S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$ .

Может быть, в этом рассуждении нет ошибок?

**Задача 9.** На сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  квадрата  $ABCD$  отмечены точки  $P$ ,  $R$ ,  $Q$  и  $T$  соответственно. Докажите, что отрезки  $PQ$  и  $RT$  равны тогда и только тогда, когда они перпендикулярны.

**Решение.** Проведем перпендикуляры  $PF$  и  $RE$  к соответствующим сторонам квадрата (рис. 6). Тогда:

1) Если  $PQ = RT$ , то прямоугольные треугольники  $QPF$  и  $TRE$  равны (по катету и гипотенузе), следовательно,  $\angle QPF = \angle TRE$ . Так  $PF \perp RE$ , то  $PQ \perp RT$ .

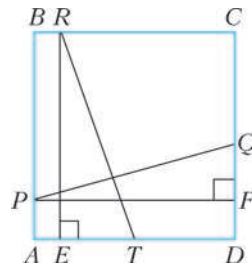


Рис. 6

2) Если  $PQ \perp RT$ , то  $\angle QPF = \angle TRE$  (острые углы с соответственно перпендикулярными сторонами). Тогда прямоугольные треугольники  $QPF$  и  $TRE$  равны (по кате-

ту и углу), следовательно,  $PQ = RT$ .

Неужели и здесь что-то неверно?

**Задача 10.** Точки  $M$  и  $N$  – середины сторон  $AB$  и  $CD$  четырехугольника  $ABCD$  соответственно. Известно, что  $BC \parallel AD$  и  $AN = CM$  (рис. 7). Обязательно ли  $ABCD$  – параллелограмм?

**Ответ:** обязательно.

**Решение.** Предположим, что  $ABCD$  – не параллелограмм, а трапеция (см. рис. 7). Тогда  $MN$  – ее средняя линия, откуда следует, что  $\angle BCM = \angle CMN$  и  $\angle DAN = \angle MNA$ . Опустим перпендикуляры  $CP$  и  $NQ$  на прямые  $MN$  и  $AD$  соответственно, тогда прямоугольные треугольники  $CMP$  и  $NAQ$  равны (по катету и гипотенузе). Следовательно,  $\angle CMN = \angle DAN = \angle MNA$ , значит,  $MC \parallel AN$ . Таким образом,  $AMCN$

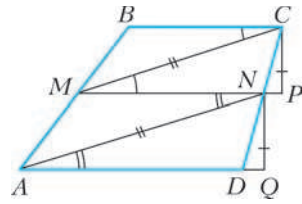


Рис. 7

– параллелограмм,  $AM \parallel CN$ , значит, и  $ABCD$  – параллелограмм.

Думайте!

*Статья написана по материалам Творческих конкурсов учителей математики, Московских математических регат и Устных городских олимпиад по геометрии для 8–11 классов.*

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

# Скорость звука в газе: Ньютон или Лаплас?

**А. СТАСЕНКО**

*...Ибо и голос и звук непременно должны  
быть телесны,  
Если способны они приводить наши  
чувства в движение...  
Так что сомнения нет, что должны состоять  
из телесных  
Голос и слово начал...*

Лукреций Кар. О природе вещей

**ЕЩЕ В ДРЕВНОСТИ, НАБЛЮДАЯ ЗА УДАЛЕННЫМ ДРОВОСЕКОМ, ЛЮДИ СООБРАЗИЛИ, ЧТО СКОРОСТЬ ЗВУКА В ВОЗДУХЕ ИМЕЕТ КОНЕЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ: СНАЧАЛА ВИДЕН УДАР ТОПОРА, ПОТОМ ЧЕРЕЗ НЕКОТОРОЕ ВРЕМЯ СЛЫШЕН ЗВУК УДАРА (СМ., НАПРИМЕР, «О ПРИРОДЕ ВЕЩЕЙ»). ТУТ УЖ НЕТРУДНО БЫЛО РАЗДЕЛИТЬ РАССТОЯНИЕ ДО ДРОВОСЕКА (ВЫРАЖЕННОЕ В СТАДИЯХ, ВЕРСТАХ, ЛОКТЯХ ИЛИ ЕЩЕ В КАКИХ-ЛИБО ЕДИНИЦАХ – ПОНЯТИЕ МЕТРА БЫЛО ЕЩЕ НЕИЗВЕСТ-**

но) на время (выраженное, например, количеством ударов сердца, период которых приблизительно равен одной секунде, – пощупайте свой пульс, как Галилей, ронявший тела с башни) – и получить значение искомой скорости ~ 600 локтей за один удар сердца, или ~ 300 м/с в современной системе единиц.

Прошли столетия, ученые открыли газовые законы и пришли к мысли, что скорость звука  $v$  связана с давлением  $p$  и плотностью  $\rho$  (а значит, и с температурой) газа:

$$v^2 \sim \frac{p}{\rho}, [v^2] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \frac{\text{м}^3}{\text{кг}} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}. \quad (*)$$

Ясно, почему это так. Вспомним шарик массой  $m$  на пружинке жесткостью  $k$  – квадрат угловой частоты его колебаний равен  $\frac{k}{m}$ . В случае колебаний, распространяющихся в пространстве, роль жесткости (упругости) играет давление, а роль инертности – распределенная в пространстве масса, т.е. плотность. Зная это, уже можно утверждать, что в твердом теле квадрат скорости распространения продольных возмущений будет пропорционален отношению модуля упругости Юнга к плотности тела, т.е.  $\frac{E}{\rho}$ ; для поперечных колебаний он будет пропорционален

$\frac{G}{\rho}$ , где  $G$  – модуль сдвига; для струны гитары или рояля, натянутых силой  $F$ , пропорционален  $\frac{F}{\mu}$ , где  $\mu$  – погонная масса, т.е. масса, отнесенная к единице длины струны. Впрочем, это даже точные соотношения.

Но почему в выражении (\*) стоит знак пропорциональности, а не равенства? Дело в том, что газ может сжиматься или расширяться по-разному, например изотермически или адиабатически (рис.1). Во времена Ньютона (1643–1727) был известен только один газовый закон, открытый Бойлем (1627–1691) и Мариоттом (1620–1684), полученный для медленных процессов сжа-

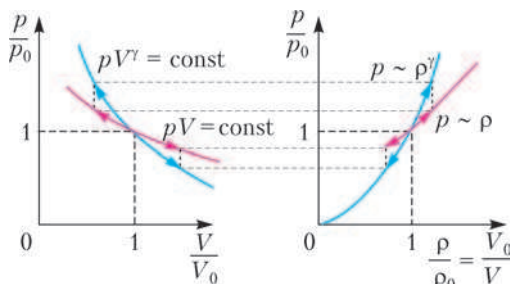


Рис. 1. Изотермические и адиабатические колебания параметров газа в звуковой волне;  $p_0, V_0, \rho_0$  – значения давления, объема и плотности в невозмущенном газе

тия–расширения. Согласно закону Бойля–Мариотта,  $p \sim \rho$ . Поэтому неудивительно предположение Ньютона, что и звук в воздухе распространяется изотермически.

Прошла еще сотня лет, были сформулированы еще два газовых закона – закон Шарля (1746–1823) и закон Гей-Люссака (1778–1850). Также было установлено, что при отсутствии теплообмена газ при расширении охлаждается, а при сжатии нагревается. Уже этого было достаточно, чтобы усомниться в изотермичности процесса распространения звука. И вот Лаплас (1749–1827) заявил, что этот процесс – адиабатический; значит, для скорости звука можно записать следующее выражение:

$$v^2 = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma \frac{R}{M} T.$$

Здесь  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  – отношение теплоемкостей газа при постоянном давлении (индекс  $p$ ) и постоянном объеме (индекс  $V$ ), оно входит в

уравнение адиабатического процесса,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $M$  – молярная масса газа.

Кто же прав? Чтобы ответить на это вопрос, рассмотрим мгновенную картину изменения температуры газа, возмущенного звуковой волной (рис.2). Пусть амплитуда вол-

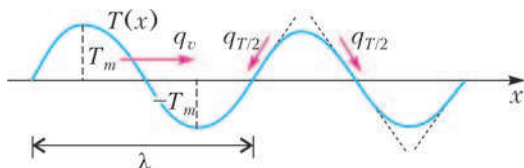


Рис. 2. Пространственное распределение температуры газа в плоской звуковой волне в фиксированный момент времени;  $q_v$  – плотность потока внутренней энергии (теплосодержания),  $q_T$  – плотность потока теплопроводности

ны в горбах и впадинах отличается на величину  $T_m$  от значения  $T$  в невозмущенном газе. Тогда избыток внутренней энергии (теплосодержания) в горбе можно оценить как  $\rho c_V T_m$ , ( $[\rho c_V T_m] = \text{Дж/м}^3$ ). А если он перемещается со скоростью  $v$ , то плотность потока энергии будет  $q_v \sim \rho c_V T_m v$  ( $[q_v] = \text{Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ ). Сравним ее со скоростью  $q_T$  рассеивания теплоты горба за счет теплопроводности. Ведь соответствующая плотность потока пропорциональна наклону  $\frac{\Delta T}{\Delta x}$  кривой  $T(x)$ , который можно оценить как  $\frac{2T_m}{\lambda/2}$ , так что  $q_T \sim \kappa \frac{2T_m}{\lambda/2}$ , где  $\kappa$  – коэффициент теплопроводности. Найдем отношение двух потоков:

$$\frac{q_T}{q_v} \sim \frac{\kappa \cdot 2T_m / (\lambda/2)}{\rho c_V T_m v} = \frac{4\kappa}{\lambda \rho c_V v}.$$

Из справочников можно найти для воздуха следующие значения параметров:

$$\kappa = 2 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}/(\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К}), \quad \rho = 1,3 \text{ кг/м}^3,$$

$$c_V = 700 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}), \quad v = 330 \text{ м/с}.$$

А какую взять длину волны  $\lambda$ ? Ухо человека воспринимает звуки частотой  $\nu \sim 20 - 20000$  Гц (собаки слышат звуки частотой до 38000, кошки – до 70000 Гц). По определению,

$$\lambda = \frac{v}{\nu} \sim \frac{330 \text{ м/с}}{(20 - 20000) 1/\text{с}} \sim 1,5 \text{ см} - 15 \text{ м}.$$

Итак,

$$\frac{q_T}{q_v} \sim \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{(0,015 - 15) \cdot 1,3 \cdot 700 \cdot 330} \ll 1.$$

А это означает, что горбы и впадины пространственного распределения температуры не успевают рассасываться при прохождении звука в газе. Получается, что *прав Лавлас*. Конечно, через столько лет после Ньютона он «стоял на плечах» уже более высоких гигантов и «видел дальше».

Однако рассмотрим теперь случай, когда в газе присутствуют частицы, например капельки тумана или облака, пыль в результате «бури в пустыне», вулканические выбросы... Если все частицы одинаковы, радиуса  $a$ , а их концентрация равна  $n$ , то размазанная по объему плотность этой диспергированной массы равна  $\hat{\rho} = mn = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho^\circ n$ , где  $\rho^\circ$  – плотность материала частицы. И пусть в этой смеси распространяется волна, которая будет таскать эти частицы взад-вперед, то охлаждая, то нагревая. Если частицы достаточно мелкие и их материал обладает высокой теплопроводностью, то скорость их (не скорость звука!) и температура будут без отставания следовать за колебаниями соответствующих параметров газа. А какова при этом будет так называемая равновесная скорость звука?

Во-первых, поскольку частицы инертны и не участвуют в создании давления  $p$ , газ должен тратить свои импульс и энергию на их движение. Похоже, как будто к каждой молекуле «приклеилась» дополнительная масса, так что каждая молекула газа «потя-

желела» на долю частиц  $\frac{\hat{\rho}}{\rho} = \varepsilon$  и стала равной  $m(1 + \varepsilon)$ . Во-вторых, суммарные теплоемкости этой равновесной среды стали равными  $\hat{c}_p = c_p + \varepsilon c^\circ$ ,  $\hat{c}_V = c_V + \varepsilon c^\circ$ , так что их отношение будет

$$\hat{\gamma} = \frac{c_p + \varepsilon c^\circ}{c_V + \varepsilon c^\circ} < \gamma$$

(здесь учтено, что у твердого тела теплоемкости при постоянных давлении и объеме почти одинаковы). Таким образом, равновесная скорость звука теперь определяется выражением

$$\hat{v}^2 = \left( \frac{R + \varepsilon c^\circ / c_V}{1 + \varepsilon c^\circ / c_V} \frac{1}{1 + \varepsilon} \right) p \rho.$$

Множитель в скобках можно сделать равным единице (желающие да построят соответствующую поверхность в пространстве параметров). Получается, что *Ньютон не так уж и неправ*. Разумеется, это не значит, что процесс распространения звука перестал быть адиабатическим.

А еще можно вообразить, что смесь газа и частиц разогрета до нескольких тысяч градусов. При этом появляется еще один канал обмена теплом между горячими частицами в горбах температуры и холодными во впадинах; этот процесс – излучение, которое почти мгновенно выравнивает температуру, приближая процесс к изотермическому.

А еще... Но и сказанного довольно, чтобы понять, что газотермодинамика – увлекательная область физики, которую можно изучить, поступив, например, в Московский физико-технический институт (государственный университет).

### Вниманию наших читателей!

Издательство Московского центра непрерывного математического образования (МЦНМО) выпустило в свет две книги серии «Библиотечка «Квант».

В книге В.М.Тихомирова «Рассказы о максимумах и минимумах» (выпуск 56, издание третье) прослеживается история методов нахождения наибольших и наименьших величин; излагаются решения многих замечательных задач на максимум и минимум, принадлежащие великим математикам прошлых эпох; говорится о зарождении многих идей, заложивших основания современного анализа; объяс-

няются связи экстремальных задач с проблемами естествознания, техники и экономики. Книга рассчитана на школьников старших классов, учителей, студентов, преподавателей.

Из книги В.Б.Алексеева «Теорема Абеля в задачах и решениях» (выпуск 137) читатель узнает, как решать алгебраические уравнения третьей и четвертой степени с одним неизвестным, познакомится с двумя важными разделами современной математики – теорией групп и теорией функций комплексного переменного. Книга представляет интерес для широкого круга читателей, интересующихся серьезной математикой, может служить пособием для работы математического кружка.

## ОЛИМПИАДЫ

# LVIII Международная математическая олимпиада

С 12 по 23 июля 2017 года в Рио-де-Жанейро (Бразилия) прошла LVIII Международная математическая олимпиада (ММО). Бразилия впервые принимала Международную олимпиаду, а у участников олимпиады появилась редкая возможность искупаться в водах Атлантического океана в Южном полушарии и познакомиться с природой и достопримечательностями Рио-де-Жанейро.

ММО является одним из самых крупных интеллектуальных соревнований школьников. В 2017 году в олимпиаде приняли участие 615 победителей национальных олимпиад из 110 страны мира.

Команду России составили выпускники школы *Георгий Вепрев* (Рыбинск), *Никита Добронравов* (Новосибирск), *Тимофей Зайцев* (Москва), *Михаил Иванов* и *Кирилл Тыщук* (оба – Санкт-Петербург), а также десятиклассник *Вадим Ретинский* (Москва).

В этом году задания олимпиады оказались наиболее сложными за всю историю ММО. Так, задачу 3 решили всего 2 участника, в том числе российский школьник Михаил Иванов, а задачу 6 решили 14 участников, и еще двое, в том числе Георгий Вепрев, получили по этой задаче 5 баллов.

Соответственно, значительно ниже обычного оказался командный результат у победителя олимпиады, которым в этом году стала команда Южной Кореи, набравшая 170 баллов. Далее следуют Китай – 159 баллов, Вьетнам – 155, США – 148, Иран – 142, Япония – 134, а потом сразу идут 7 сборных, включая Россию, – в узком диапазоне от 127 до 131 балла.

Очень близкими оказались и границы медалей. Для получения золотой медали было достаточно набрать 25 баллов, а бронзовой – 16 баллов из 42.

Ниже приведена таблица с результатами выступления нашей сборной

(каждая задача оценивалась из 7 баллов). Полная информация о результатах на международных математических олимпиадах имеется на официальном сайте олимпиады [www.imo-official.org](http://www.imo-official.org).

Завершающий этап подготовки команды к ММО – летние учебно-тренировочные сборы – как и в прошлом году, проводился в Образовательном центре Сириус (г.Сочи).

Участник	Баллы по задачам						Сумма баллов	Медаль
	1	2	3	4	5	6		
Георгий Вепрев	7	4	0	7	1	5	24	Серебряная
Никита Добронравов	7	3	0	7	0	2	19	Серебряная
Тимофей Зайцев	7	1	0	7	2	0	17	Бронзовая
Михаил Иванов	7	7	7	7	0	0	28	Золотая
Вадим Ретинский	7	4	0	2	2	1	16	Бронзовая
Кирилл Тыщук	7	7	0	7	3	0	24	Серебряная



Слева направо: Г.Вепрев, К.Тыщук, М.Иванов, В.Ретинский, Н.Добронравов, Т.Зайцев



Занятия с командой проводили преподаватели сборов: педагог ФМЛ № 239 г. Санкт-Петербурга, к.ф.-м.н. *С.Л.Берлов*; профессор МФТИ, д.ф.-м.н. *В.Л.Дольников*; доцент МФТИ, к.ф.-м.н. *П.А.Кожевников*; старший научный сотрудник Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А.Стеклова РАН *Ф.В.Петров*; директор, педагог ФМЛ № 239 г. Санкт-Петербурга, к.ф.-м.н. *М.Я.Пратусевич*; педагог ФМЛ № 239 г. Санкт-Петербурга *К.А.Сухов*; доцент МФТИ, к.п.н. *Д.А.Терёшин*; программист *Г.Р.Челноков*. В подготовке команды помогли математики *С.А.Дориченко*, *К.А.Кноп*.

Руководители команды благодарят *Дмитрия Юрьевича Дойхена*, который много лет поддерживает команду России в международных математических соревнованиях.

### ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Для произвольного целого  $a_0 > 1$  определим последовательность  $a_0, a_1, a_2, \dots$  следующим образом:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{если } \sqrt{a_n} \text{ — целое число,} \\ a_n + 3 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

для всех  $n \geq 0$ . Найдите все значения  $a_0$ , при которых существует число  $A$  такое, что  $a_n = A$  для бесконечно многих значений  $n$ .

*ЮАР*

2. Пусть  $\mathbb{R}$  множество всех вещественных чисел. Найдите все функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такие, что для всех вещественных  $x$  и  $y$  выполнено равенство

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy).$$

*Албания*

3. Охотник и невидимый кролик играют в следующую игру на плоскости. Стартовая точка  $A_0$  кролика и стартовая точка  $B_0$  охотника совпадают. Пусть после  $n-1$  раунда игры кролик находится в точке  $A_{n-1}$ , а охотник — в точке  $B_{n-1}$ . Тогда в  $n$ -м раунде игры последовательно выполняются следующие три действия:

(i) Кролик, оставаясь невидимым, перемещается в точку  $A_n$  такую, что расстояние между  $A_{n-1}$  и  $A_n$  в точности равно 1.

(ii) Следящее устройство сообщает охотнику некоторую точку  $P_n$ . При этом следящее устройство гарантирует только то, что

расстояние между точками  $P_n$  и  $A_n$  больше 1.

(iii) Охотник, оставаясь видимым, перемещается в точку  $B_n$  такую, что расстояние между  $B_{n-1}$  и  $B_n$  в точности равно 1.

Всегда ли возможно охотнику, при любых перемещениях кролика и любых сообщаемых следящим устройствам точках, выбирать свои перемещения так, чтобы после  $10^9$  раундов он мог гарантировать, что расстояние между ним и кроликом не больше 100?

*Австрия*

4. Пусть  $R$  и  $S$  — две различные точки на окружности  $\Omega$  такие, что  $RS$  не является диаметром. Пусть  $l$  — касательная к  $\Omega$  в точке  $R$ . Точка  $T$  выбрана так, что  $S$  является серединой отрезка  $RT$ . Точка  $J$  выбрана на меньшей дуге  $RS$  окружности  $\Omega$  так, что окружность  $\Gamma$ , описанная около треугольника  $JST$ , пересекает  $l$  в двух различных точках. Пусть  $A$  — та из общих точек  $\Gamma$  и  $l$ , которая находится ближе к точке  $R$ . Прямая  $AJ$  вторично пересекает  $\Omega$  в точке  $K$ . Докажите, что прямая  $KT$  касается  $\Gamma$ .

*Люксембург*

5. См. задачу M2481 «Задачника «Кванта»».

*Россия*

6. Упорядоченная пара  $(x, y)$  целых чисел называется *примитивной точкой*, если наибольший общий делитель чисел  $x$  и  $y$  равен 1. Дано конечное множество  $S$  примитивных точек. Докажите, что существуют натуральное  $n$  и целые  $a_0, a_1, \dots, a_n$  такие, что для каждой примитивной точки  $(x, y)$  из  $S$  выполнено равенство

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \dots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

*США*

Публикацию подготовили  
*Н.Агаханов, И.Богданов, М.Пратусевич,  
К.Сухов, Д.Терёшин*

# Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

## ФИЗИКА

### Профильный экзамен

В 2017 году профильный экзамен (дополнительное вступительное испытание) по физике в МГУ и в его Севастопольском филиале проводился в письменной форме. Типовое задание для абитуриента охватывало все основные разделы программы по физике для поступающих в МГУ: 1) механику, 2) молекулярную физику и термодинамику, 3) электродинамику, 4) оптику. По каждому разделу программы абитуриенту предлагалась краткий вопрос по теории и дополняющая его задача. На выполнение всего задания отводилось четыре астрономических часа.

Ниже приводятся примеры заданий профильного экзамена 2017 года.

### МЕХАНИКА

**1.** Сформулируйте законы сухого трения. Дайте определение коэффициента трения.

*Задача.* На гладкой горизонтальной поверхности лежит брус массой  $m_1 = 2$  кг и длиной  $l = 1$  м (рис.1). Сверху на брус

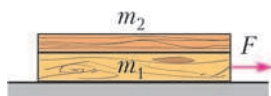


Рис. 1

положили однородную доску такой же длины, масса которой  $m_2 = 1$  кг. Через время  $t_0 = 1$  с после того, как за привязанную к брусу веревку начали тянуть в горизонтальном направлении с силой  $F = 8$  Н, левый конец доски стал опускаться вниз. Определите коэффициент трения  $\mu$  между доской и брусом. Ускорение свободного падения примите равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**2.** Приведите формулы для зависимости от времени координаты и скорости материальной точки, совершающей прямолинейное равнопеременное движение.

*Задача.* По гладкому горизонтальному льду замерзшего озера скользит доска массой  $M = 20$  кг со скоростью, модуль которой равен  $v_0 = 2$  м/с. Скорость доски параллельна ее длинной стороне. В некоторый момент времени стоящий на льду человек аккуратно опустил на эту доску брусок массой  $m = 1$  кг так, что его центр масс оказался на прямой, проходящей через центр масс доски параллельно ее длинной стороне. Определите коэффициент трения  $\mu$  бруска о доску, если брусок перестал скользить по доске, переместившись относительно нее на расстояние  $l = 95$  см. Считайте, что модуль ускорения свободного падения равен  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Ответ округлите до двух знаков после запятой.

**3.** Дайте определение момента силы относительно оси вращения. Сформулируйте правило моментов.

*Задача.* Тонкая однородная пластина  $\Pi$  опирается одним ребром на гладкую горизонтальную поверхность, а другим – на шероховатую наклонную плоскость, образующую с горизонтом угол  $\alpha = 45^\circ$  (рис.2).

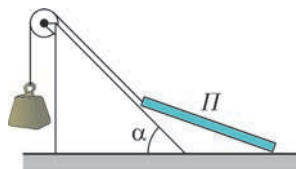


Рис. 2

Модуль действующей на пластину силы тяги равен  $P = 10$  Н. К середине верхнего ребра пластины прикреплена гладкая невесомая нить, переброшенная через блок. На другом конце нити подвешен груз. Отрезок нити между пластиной и блоком параллелен наклонной плоскости, а между грузом и блоком – вертикален. Определите вес груза  $Q$ , при котором рассмотренная система будет находиться в равновесии, если коэффи-

коэффициент трения пластины о наклонную плоскость равен  $\mu = 0,2$ . Числовой ответ округлите до двух значащих цифр.

### МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

1. Какие виды парообразования вы знаете? Дайте определение удельной теплоты парообразования.

*Задача.* В закрытом с обоих торцов цилиндре при температуре  $100^\circ\text{C}$  находятся пары воды и гелий, отделенные друг от друга гладким тяжелым поршнем. Когда ось цилиндра была горизонтальной, объемы пара и гелия были равны друг другу, а давление водяного пара было в  $n = 3$  раза меньше давления насыщенного пара воды при  $100^\circ\text{C}$ . После того как цилиндр поставили вертикально, через достаточно большой промежуток времени половина пара сконденсировалась. Определите установившееся давление  $p$  гелия в вертикально расположенном цилиндре, если температура в обеих частях цилиндра все время поддерживалась неизменной. Нормальное атмосферное давление равно  $p_0 = 10^5$  Па.

2. Дайте определение коэффициента полезного действия (КПД) теплового двигателя. Чему равно максимально возможное значение КПД теплового двигателя?

*Задача.* Идеальный одноатомный газ совершает в тепловом двигателе цикл  $1-2-3-1$ , в котором давление  $p$  газа изменяется с изменением его плотности  $\rho$  так, как показано на рисунке 3, причем график процесса

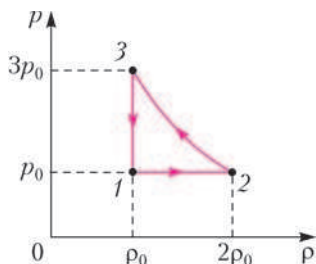


Рис. 3

$2-3$  представляет собой участок гиперболы, описываемой уравнением  $p = b + \frac{k}{\rho}$ . Определите КПД цикла  $\eta$ . Ответ приведите в процентах, округлив до одного знака после запятой.

3. Сформулируйте первый закон термоди-

намики. Запишите формулы для теплоемкости идеального одноатомного газа при изохорном и изобарном процессах.

*Задача.* Идеальный одноатомный газ совершает в тепловом двигателе цикл  $1-2-3-4-1$ , в котором давление  $p$  газа изменяется с изменением его плотности  $\rho$  так, как показано на рисунке 4, причем графики процес-

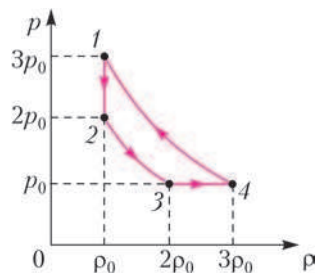


Рис. 4

сов  $2-3$  и  $4-1$  представляют собой участки гипербол. Определите коэффициент полезного действия (КПД) цикла  $\eta$ . Ответ приведите в процентах, округлив до одного знака после запятой.

### ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

1. Сформулируйте закон Кулона. Что такое элементарный заряд?

*Задача.* Заряженная частица массой  $m = 1$  мг находится в вакууме в электрическом поле неподвижного равномерно заряженного шара. Частицу удерживают в состоянии покоя на некотором расстоянии от центра шара, действуя на нее силой  $F = 1$  мН. Затем частицу отпускают, и она начинает двигаться. Пройдя от исходного положения расстояние  $s = 1$  м, частица приобретает скорость  $v = 1$  м/с. Каково ускорение  $a$  частицы в этот момент времени? Частица и шар заряжены одноименно.

2. Что такое напряженность электрического поля? Чему равна напряженность электростатического поля точечного заряда?

*Задача.* Два одинаковых точечных заряда  $q = 10^{-7}$  Кл находятся на расстояниях  $a = 1$  м от центра заземленной проводящей сферы радиусом  $R = 5$  см (рис.5). Отрезки, проведенные из центра сферы к зарядам, взаимно перпендикулярны. Расстояния от зарядов и сферы до окружающих тел достаточно велики. Определите модуль  $F$  силы, с которой заряды действуют на

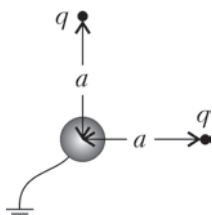


Рис. 5

сферу. Электрическая постоянная равна  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м.

3. Сформулируйте закон Ома для участка цепи. Чему равны сопротивления последовательно и параллельно соединенных проводников?

*Задача.* Резистор сопротивлением  $R = 8$  Ом подключен к источнику постоянного тока с внутренним сопротивлением  $r = 4$  Ом. Резистор с каким сопротивлением  $R_x$  надо подсоединить параллельно резистору сопротивлением  $R$ , чтобы мощность, выделяющаяся во внешней цепи, не изменилась?

**ОПТИКА**

1. Дайте определения фокусного расстояния и оптической силы тонкой линзы.

*Задача.* В отверстие в вертикальной стенке аквариума плотно заделана тонкая плоско-выпуклая линза с фокусным расстоянием  $F = 20$  см (рис.6). На выпуклую поверх-

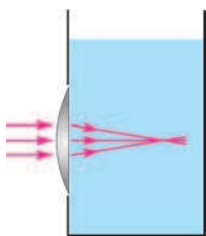


Рис. 6

ность линзы падает параллельно ее главной оптической оси узкий пучок света, который фокусируется внутри первоначально пустого аквариума. Если аквариум заполнить некоторой жидкостью, то точка, в которой фокусируются лучи, сместится на расстоянии  $\Delta l = 4$  см. Определите показатель преломления жидкости  $n$ . Углы падения и преломления лучей считайте малыми. Учтите, что для малых значений аргумента  $x$ ,

заданного в радианах, справедливы приближенные формулы  $\sin x = \text{tg } x = x$ .

2. Сформулируйте законы преломления света. Дайте определения абсолютного и относительного показателей преломления.

*Задача.* На сферическую поверхность прозрачного полушара радиусом  $R = 10$  см с показателем преломления  $n = 1,5$  падает луч света, параллельный оси, перпендикулярной основанию полушара и проходящей через его центр (рис.7). Точка паде-

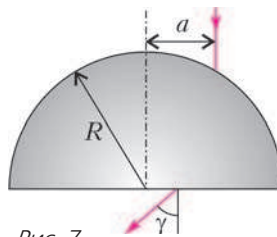


Рис. 7

ния луча находится на расстоянии  $a = 1$  см от этой оси. Какой угол  $\gamma$  образует луч, вышедший из полушара, с нормалью к его основанию? При расчетах учтите, что  $a \ll R$ , а для малых значений аргумента  $x$ , заданного в радианах, справедливо приближенное равенство  $\sin x = x$ .

3. Какие линзы называют тонкими? Запишите формулу тонкой линзы и поясните смысл входящих в нее величин.

*Задача.* На расстоянии  $f = 15$  м от объекта проекционного аппарата расположен экран размером  $2 \times 3$  м. На экране получено четкое изображение диапозитива, имеющего размер  $24 \times 36$  мм. При этом изображение занимает половину площади экрана. Рассчитайте оптическую силу  $D$  тонкой линзы, которую следует вплотную приставить к объективу проекционного аппарата, не меняя его положения, чтобы четкое изображение точно уложилось в размеры экрана. Объектив проекционного аппарата считайте тонкой линзой. Ответ приведите в диоптриях, округлив до одного знака после запятой.

*Публикацию подготовил С.Чесноков*

# Новосибирский государственный университет

## Ф И З И К А

Открытая межвузовская олимпиада школьников «Будущее Сибири»

Первый (отборочный) этап

8 класс

1. Машина проехала из пункта  $A$  в пункт  $B$  и обратно. Весь путь из  $A$  в  $B$  и половину обратного пути машина ехала с постоянной скоростью, а затем из-за поломки снизила скорость и проехала остаток обратного пути с постоянной, но меньшей скоростью. Во сколько раз машина снизила скорость, если известно, что ее средняя скорость на пути из  $A$  в  $B$  была втрое больше, чем на обратном пути?

2. Прямоугольный аквариум с размерами прямоугольного дна  $a \times b$  наполнен водой плотностью  $\rho_0$  до уровня на высоту  $h$  ниже края аквариума (рис.1). Какой объем воды

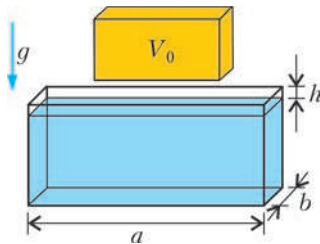


Рис. 1

выльется из аквариума, если опустить в него деревянный брусок плотностью  $\rho$  и объемом  $V_0$ ? Брусок после погружения плавает в воде.

3. Легкая линейка длиной  $l$  лежит на двух опорах так, что они поделили ее на три равные части. На противоположных концах линейки лежат грузы разной массы. Конструкция находится в равновесии. Левый груз начали аккуратно двигать вправо так, что линейка оставалась неподвижной. Когда груз был сдвинут на  $l_1$  (рис.2), конструкция потеряла равновесие и разрушилась. Конструкцию восстановили в ее начальном виде и

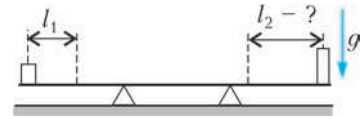


Рис. 2

повторили эксперимент, только теперь стали двигать правый груз влево. На какое максимальное расстояние  $l_2$  можно сдвинуть груз до того, как разрушится конструкция?

4. В прямоугольном теплоизолированном сосуде, дно которого имеет форму квадрата со стороной 10 см, находятся в тепловом равновесии лед и вода (рис.3). Надо льдом закреплена сетка, препятствующая его всплыванию. В сосуд

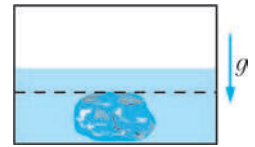


Рис. 3

налили 0,9 л горячей воды, имеющей температуру  $80^\circ\text{C}$ , так, что она полностью покрыла лед. На сколько изменится уровень воды в сосуде, после того как наступит тепловое равновесие, если известно, что при этом часть льда растает? Теплоемкость воды  $4,2 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{K})$ , ее плотность  $1000 \text{ кг}/\text{м}^3$ , теплота плавления льда  $336 \text{ кДж}/\text{кг}$ , его плотность  $900 \text{ кг}/\text{м}^3$ .

9 класс

1. Иван Царевич отправился в путь за путеводным клубком, подаренным ему Бабой Ягой. Первую треть пути, пролежавшему по полю, клубок катился с постоянной скоростью  $5 \text{ км}/\text{ч}$ , а затем углубился в лес, где его скорость упала вдвое. Иван Царевич шел с непостоянной скоростью вдоль разматывающейся нити по траектории клубка, стараясь не отставать от него. Чему равна средняя скорость Ивана Царевича на всем пути, если в начале пути он находился рядом с клубком, а конечной точки они достигли одновременно?

2. На столе лежат три одинаковые монеты. Одну из монет, возле края которой в точке  $A$



10 класс



Рис. 4

проделано отверстие (рис.4), катят без проскальзывания вокруг двух других, плотно прижатых друг к другу закрепленных монет. После того как центр монеты вернулся в исходную точку  $O$ , отверстие заняло положение  $A'$ . Найдите угол  $AOA'$ .

3. Четыре одинаковых легких контейнера связаны тонкими легкими тросами (рис.5).

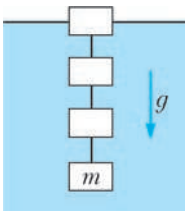


Рис. 5

В нижнем контейнере находится груз массой  $m$ , остальные контейнеры пустые. Верхний контейнер погружен в воду наполовину. Найдите силу натяжения верхнего троса. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

4. В колбе над газовой горелкой греют воду со льдом. В некоторый момент времени из морозильника достают новую порцию льда, бросают в колбу и продолжают нагревать. На протяжении всего эксперимента измеряют температуру в колбе. График зависимости температуры от времени приведен на рисунке 6. Величины  $T_1, T_2, t_1, t_2,$

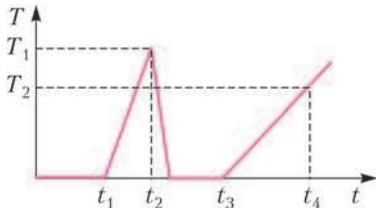


Рис. 6

$t_3, t_4$  измерены и известны. Определите, какой была температура в морозильнике, где находился лед. Скорость подвода тепла к колбе считать постоянной. Удельная теплоемкость воды  $c_1$ , льда  $c_2$ , теплота плавления льда  $\lambda$ .

1. Мальчик Петя вышел из дома в школу и шел с такой постоянной скоростью, что успевал прийти ровно к началу первого урока. Пройдя треть пути, он обнаружил, что забыл дома телефон. Во сколько раз Петя должен увеличить свою скорость по сравнению с первоначальной, чтобы вернуться за телефоном и вовремя успеть в школу?

2. К одному концу пружины прикреплен груз цилиндрической формы, а ко второму концу привязана нерастяжимая нить, которая перекинута через блок и закреплена на дне широкого сосуда так, что груз частично опущен в воду (рис.7). Блок приподняли на

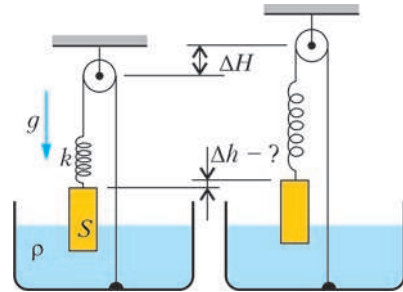


Рис. 7

высоту  $\Delta H$ . На какую высоту приподнимется груз? Плотность воды  $\rho$ , жесткость пружины  $k$ , площадь основания цилиндрического груза  $S$ , ускорение свободного падения  $g$ . Плотность груза больше плотности воды.

3. Трактор может тащить волоком груз, соединенный с ним тросом (трос параллелен дороге), в горку с углом наклона  $\alpha$  с максимальным ускорением  $a_0$  (рис.8). С каким максимальным ускорением трактор может тащить этот груз по горизонтально-

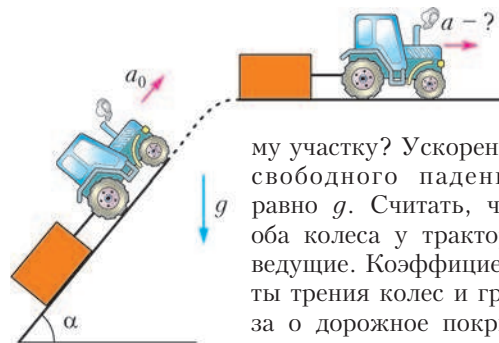


Рис. 8

му участку? Ускорение свободного падения равно  $g$ . Считать, что оба колеса у трактора ведущие. Коэффициенты трения колес и груза о дорожное покрытие одинаковы на наклонном и горизонталь-

ном участках. Влиянием воздуха пренебречь.

4. По клину массой  $M$ , стоящему на шероховатом полу, соскальзывает брусок массой  $m$  (рис.9). Определите, при каком мини-

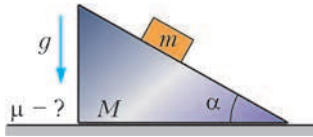


Рис. 9

мальном коэффициенте трения между столом и клином клин будет покоиться. Угол наклона клина  $\alpha$ . Трением между бруском и клином, а также влиянием воздуха пренебречь.

11 класс

1. Мальчик стоял на берегу озера у самой воды и бросал камни в озеро под углом  $15^\circ$  к горизонту. Он заметил, что водяные круги достигают его ног через время  $T$  после падения камня. К мальчику подошел отец и тоже бросил камень в озеро, но под углом  $45^\circ$  и с вдвое большей начальной скоростью, чем это делал мальчик. Через какое время после падения камня, который бросил отец, водяные круги достигнут его ног? Считать, что круги по воде распространяются с постоянной скоростью. Ростом мальчика и его отца, а также влиянием воздуха пренебречь.

2. Герметичный цилиндрический сосуд массой  $m$ , высотой  $H$  и сечением  $S$ , наполненный воздухом, плавает в вертикальном положении в жидкости (рис.10). В нижней

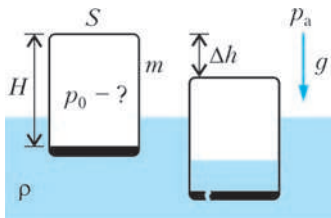


Рис. 10

части сосуда возникла течь, в результате чего сосуд занял новое положение равновесия, опустившись на высоту  $\Delta h$ . Найдите начальное давление воздуха в сосуде. Атмосферное давление равно  $p_a$ , ускорение свободного падения равно  $g$ . Температура постоянна.

3. Два кусочка мела запустили по движущейся ленте транспортера, придав им одинаковую начальную скорость относительно неподвижного наблюдателя (рис.11). При этом

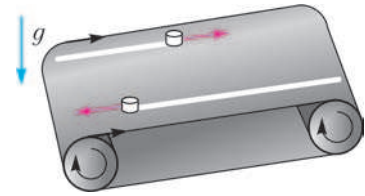


Рис. 11

первый кусочек запустили по направлению движения ленты, а второй – против. Когда мелки остановились на ленте, оказалось, что след, прочерченный вторым мелком, в  $N$  раз длиннее, чем след, оставленный первым. Во сколько раз скорость, сообщаемая мелкам, больше по величине скорости ленты?

4. Плоский воздушный конденсатор, расстояние между пластинами которого равно  $d$ , подключен к источнику напряжения (рис.12). Заряд конденсатора равен  $q_0$ . Внутри кон-

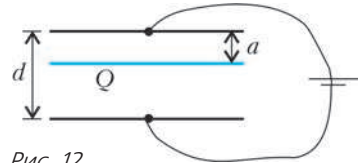


Рис. 12

денсатора параллельно его обкладкам на расстоянии  $a$  ( $a < d$ ) от одной из них вставили тонкую пластину, равномерно заряженную зарядом  $Q$ . Определите заряд конденсатора  $q$  после вставки пластины.

Второй (заключительный) этап

8 класс

1. Велосипедист, двигаясь вдоль проспекта, заметил, что трамваи, движущиеся ему навстречу, встречаются вдвое чаще, чем обгоняющие его попутные трамваи. Автомобилист, двигаясь по тому же проспекту, также заметил, что встречные трамваи он видит вдвое чаще попутных, которые он периодически обгоняет. Считая скорости велосипеда, автомобиля и трамваев постоянными, а интервалы движения трамваев в обе стороны одинаковыми, определите, во сколько раз автомобиль движется быстрее велосипеда.

2. Маленький переносной холодильник представляет собой закрытую сумку, стенки

которой сделаны из материала с низкой теплопроводностью, с помещенным в нее пакетом со льдом. Температура в холодильнике поднялась до  $4\text{ }^\circ\text{C}$  через 14 часов после того, как лед начал таять. Через какое время температура в холодильнике поднялась бы до этого значения, если бы изначально почти весь лед был растаявшим? Удельная теплоемкость воды  $4,2\text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ , удельная теплота плавления льда  $336\text{ кДж}/\text{кг}$ . Теплоемкостью сумки и пакета пренебречь. Мощность поступления тепла внутрь холодильника считать одинаковой и постоянной в этом температурном диапазоне. (Полученный результат дает представление о соотношении длительностей работы холодильников, использующих фазовый переход и теплоемкость.)

**3.** Однородная доска устойчиво покоится на двух опорах, расстояние между которыми равно половине длины доски (рис.13). Сна-

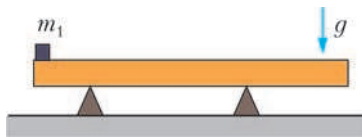


Рис. 13

чала определяют минимальную массу  $m_1$  маленького груза, который нужно положить на один край доски, чтобы нарушилось равновесие. Затем груз массой  $m_1$  убирают и аналогично определяют минимальную массу  $m_2$  маленького груза, который нужно положить на другой край доски, чтобы нарушилось равновесие. Определите массу доски, считая величины  $m_1$  и  $m_2$  известными.

**4.** Внутри высокого вертикального сосуда к неподвижной точке подвешены на нитях два груза одинаковой плотности, имеющих форму прямоугольных параллелепипедов (рис.14). Сосуд медленно наполняют жид-

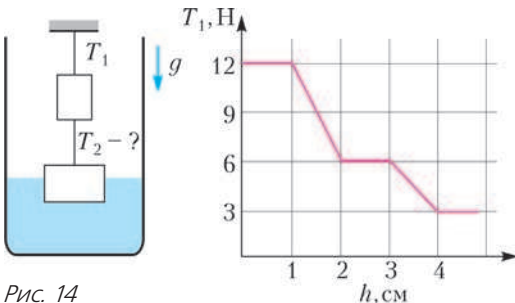


Рис. 14

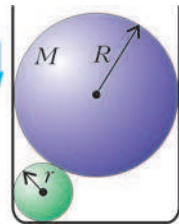
костью и измеряют зависимость силы натяжения  $T_1$  верхней нити от уровня жидкости  $h$  в сосуде. График этой зависимости представлен на рисунке. Определите силу натяжения  $T_2$  нижней нити в момент, когда вода скроет нижний груз.

9 класс

**1.** Велосипедист, двигаясь вдоль проспекта, заметил, что трамваи, движущиеся ему навстречу, встречаются вдвое чаще, чем обгоняющие его попутные трамваи. Автомобилист, двигаясь по тому же проспекту, также заметил, что встречные трамваи он видит вдвое чаще попутных, которые он периодически обгоняет. Считая скорости велосипеда, автомобиля и трамваев постоянными, а интервалы движения трамваев в обе стороны одинаковыми, определите, во сколько раз автомобиль движется быстрее велосипеда.

**2.** На дно цилиндрического стакана радиусом  $R$  положили шарик радиусом  $r$  ( $r < R$ ), а сверху на него положили шар радиусом  $R$  и массой  $M$  (рис.15). С какой силой  $F$  верхний шар давит на боковую стенку стакана? Трения нет. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

Рис. 15



**3.** По электрической цепи, состоящей из большого числа одинаковых резисторов и источника напряжения (рис.16), течет ток. Найдите отношение качества теплоты, ко-

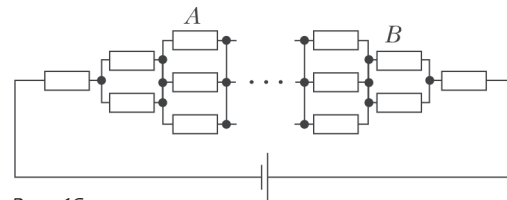


Рис. 16

торое выделяется на сопротивлении  $A$  в единицу времени, к количеству теплоты, выделяющемуся на сопротивлении  $B$  в единицу времени.

**4.** Многоступенчатая ракета стартует с поверхности Земли и летит с постоянным ускорением под некоторым постоянным углом к горизонту. Каждая ступень работает одинаковое время, после чего отделяется и

падает по баллистической траектории (без двигателей). Первая ступень упала на расстоянии  $s_1$  от места старта. На каком расстоянии упадет вторая ступень? Для полета на указанные расстояния поверхность Земли считать плоской. Влиянием воздуха пренебречь.

5. На гладкое проволочное кольцо массой  $M$  надеты две одинаковые бусинки массой  $m$ , которые первоначально находились на противоположных сторонах кольца (рис. 17).

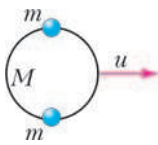


Рис. 17

Кольцу ударом сообщили скорость  $u$  в направлении, перпендикулярном к линии, соединяющей центры бусинок. Найдите скорости бусинок к моменту их столкновения. Силой тяжести пренебречь.

10 класс

1. Галилей бросил первый камень с вершины Пизанской башни, а второй – с одного из средних этажей (рис. 18). Он бросал камни с нулевой начальной скоростью и измерял время их падения на землю, которое для первого камня оказалось равным  $t_1$ , а для второго  $t_2$ .

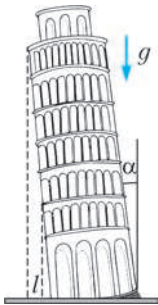


Рис. 18

Спустившись на землю, он измерил расстояние  $l$  между точками падения камней. Определите тангенс угла наклона Пизанской башни к вертикали. Ускорение свободного падения равно  $g$ . Влиянием воздуха пренебречь.

2. Монгольфьер (аэростат с нерастяжимой открытой снизу оболочкой, наполненной горячим воздухом) совершал горизонтальный полет при атмосферном давлении  $p_0$  и температуре  $T_0$ . В результате пересечения атмосферного фронта давление снаружи упало до  $p_1$ , а температура упала до  $T_1$ , и монгольфьер начал опускаться. До какой температуры нужно нагреть воздух в монгольфьере, чтобы он перестал опускаться? Первоначально температура воздуха внутри аппарата была равна  $T$ .

3. Две бусинки, заряженные одинаковыми зарядами  $q$ , нанизаны на две параллельные спицы, расстояние между которыми равно  $l$  (рис. 19). Бусинки могут без трения перемещаться вдоль спиц. В сторону верхней поко-

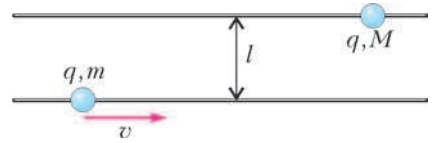


Рис. 19

ящейся бусинки массой  $M$  с большого расстояния запускается нижняя бусинка массой  $m$  с начальной скоростью  $v$ . Найдите минимальную скорость  $v^*$ , которую следует сообщить нижней бусинке, чтобы она обогнала верхнюю бусинку, а также конечную скорость верхней бусинки после того, как бусинки вновь разлетятся на большое расстояние. Рассмотрите два случая: а)  $v > v^*$ ; б)  $v < v^*$ .

4. Автомобиль массой  $m$  начинает разгоняться с места таким образом, что его двигатель развивает постоянную полезную мощность  $P$ . Какая энергия выделится в виде тепла к тому времени, когда прекратится проскальзывание колес? Считать, что все колеса автомобиля ведущие. Коэффициент трения колес о дорогу равен  $\mu$ , ускорение свободного падения равно  $g$ . Колеса перестают проскальзывать одновременно.

5. С высоты  $H$  по вертикальной спице начинают отпускать одинаковые бусинки без начальной скорости (рис. 20). Последнюю бусинку отпустили с высоты  $H$ , когда первая опустилась на половину начальной высоты. Через какое время после отпускания последняя бусинка вернется в начальную точку? Ускорение свободного падения равно  $g$ . Удары бусинок о пол и друг о друга считать упругими, размерами бусинок пренебречь. Трения между бусинками и спицей нет.

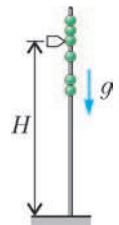


Рис. 20

11 класс

1. Электрическая цепь состоит из конденсатора, ключа и двух сопротивлений  $A$  и  $B$ , соединенных параллельно (рис. 21, а). В на-

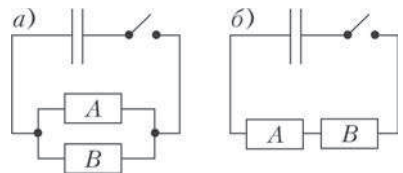


Рис. 21

чале эксперимента конденсатор был заряжен, а ключ разомкнут. После того как ключ замкнули на некоторое время, оказалось, что количество теплоты, выделившееся на сопротивлении  $A$ , в  $k$  раз больше, чем количество теплоты, выделившееся на сопротивлении  $B$ . Найдите отношение количеств теплоты, выделившихся на тех же резисторах, когда их соединили последовательно (рис.21,б) и повторили тот же эксперимент.

2. Три одинаковых кольца надеты на гладкую нить, замкнутую в петлю (рис.22).

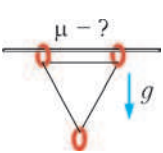


Рис. 22

Через два кольца продета жесткая горизонтально закрепленная спица. Система находится в поле тяжести, а кольца расположены в вершинах равностороннего треугольника, лежащего в вертикальной плоскости. Трения между нитью и кольцами нет. Найдите минимальный коэффициент трения между спицей и кольцами, при котором кольца останутся в покое.

3. Легкий шероховатый блок радиусом  $R$  (рис.23) подвешен на ремне, прикрепленном к потолку двумя вертикальными пружинами с жесткостями  $k_1$  и  $k_2$  ( $k_1 > k_2$ ).

Ось блока тянут вниз со скоростью  $v$ . С какой угловой скоростью вращается блок вокруг своей оси? Проскальзывания между блоком и ремнем нет, трение в оси блока отсутствует.

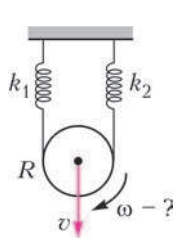


Рис. 23

4. Маятник, состоящий из легкой нерастяжимой нити и шарика массой  $m = 0,1$  кг с зарядом  $Q = 10^{-9}$  Кл, находился в состоянии равновесия (рис.24). После того как включили однородное горизонтальное электрическое поле неизвестной величины, шарик пришел в движение. В момент его наибольшего отклонения вправо полярность поля изменили на противоположную. При наибольшем отклонении маятника влево полярность изменили еще раз, и далее процедуру изменения полярности поля повторяли при каждом наибольшем отклонении маятника. Амплитуда его колебаний всякий раз возрастала. После включения поля и девяти его

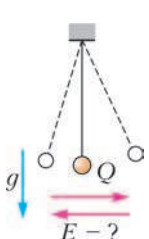


Рис. 24

переключений маятник стал колебаться так, что максимальный угол его отклонения от вертикали стал равным  $30^\circ$ . Определите величину напряженности электрического поля. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

5. Космонавт на малой планете играет сам с собой в теннис. Он бьет ракеткой по мячу, направляя его над поверхностью планеты, и отбивает его, когда мяч, обогнув планету, прилетает с другой стороны (рис.25).

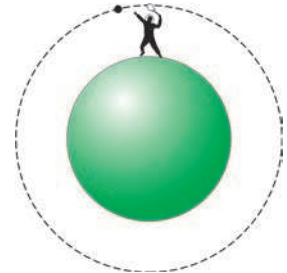


Рис. 25

Оцените, при каком максимальном радиусе планеты это возможно.

Предполагается, что вы хорошо представляете явление, можете сами задать необходимые для решения задачи величины, выбрать их числовые значения и получить численный результат.

6. Задача-демонстрация (демонстрируется видеоролик). К грузу, находящемуся внутри шприца, привязана нить, пропущенная через открытый кончик шприца (рис.26).

Эту конструкцию опускают в сосуд с водой и медленно доливают воду. По мере наполнения сосуда водой шприц все время поднимается (эксперимент 1).

Если же к нижнему концу нити прикрепить дополнительный груз (эксперимент 2), то поведение шприца меняется: шприц вначале поднимается, потом перестает подниматься, а затем опускается на дно (при этом дополнительный груз все время покоится на дне). Объясните наблюдаемое явление.

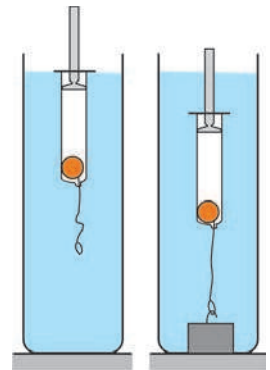


Рис. 26

Публикацию подготовили В.Баткин, В.Боровков, В.Дубровский, Е.Жданов, А.Киприянов, С.Лежнин, М.Махмудян, А.Ненашев, Е.Пальчиков, А.Погосов, Д.Похабов, Г.Федотович



# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

### ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №9)

- Незнайка написал на 81 слово больше. Посчитаем, на сколько различаются количества слов в каждом десятке, т.е. в наборе чисел вида  $\overline{AB0}, \dots, \overline{AB9}$ , где  $A$  и  $B$  – какие-то цифры. Каждое число вида  $\overline{AB0}$  на одно слово короче, чем  $\overline{AB1}$ , а остальные пары чисел ( $\overline{AB2}$  и  $\overline{AB3}$ ,  $\overline{AB4}$  и  $\overline{AB5}$  и т.д.) содержат поровну слов. Исключение составляют десятки вида  $\overline{A10}, \dots, \overline{A19}$ , где все числа содержат поровну слов. Таким образом, в каждой сотне у Незнайки на 9 слов больше, чем у Чебурашки, а суммарно – на 81 слово.
- См. рис.1.

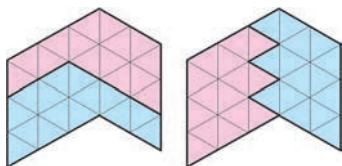


Рис. 1

**3. Первое решение.** После первого матча выкрасим ребят, игравших в одной команде, в красный, а игравших в другой команде – в синий цвет. Тогда во втором матче среди каждого из составов найдутся по крайней мере 6 одноцветных ребят, причем эти шестерки разных цветов. А в этих двух шестерках найдутся два разноцветных футболиста, не сыгравших в одной команде и в третий раз (иначе им всем нужно попасть в одну команду, для чего их слишком много).

**Второе решение.** Нарисуем игроков в виде точек и будем соединять отрезками тех, кто были сокомандниками. После первой игры от каждого игрока будет выходить по 10 отрезков, а так как каждый соединяет двоих, то всего отрезков будет  $\frac{22 \cdot 10}{2} = 110$ . Теперь посмотрим на произвольную команду во второй или третьей игре. Пусть  $x$  ребят из нее были в первом матче на одной стороне, а оставшиеся  $11 - x$  – на другой. Тогда новых отрезков добавится не более чем  $x(11 - x) \leq 30$  (это можно, например, легко проверить перебором). Таким образом, за оставшиеся две игры добавится не более  $4 \cdot 30 = 120$  отрезков, и в итоге их будет 230. Но если бы каждый сыграл с каждым, то их было бы  $\frac{22 \cdot 21}{2} = 231$ .

4. а) 1 и 2.

Ясно, что в конце останется не более двух ворон, а первая и вторая никогда не улетают. Значит, это будут именно они.

б) 16 минут.

Легко видеть, что количество улетающих в очередную минуту ворон – треть их числа, округляемая вниз. Таким образом, остается всего лишь аккуратно посчитать (см. таблицу).

Минута	1	2	3	4	5	6	7	8	
Было ворон в начале	1000	667	445	297	198	132	88	59	
Улетит в конце	333	222	128	99	66	44	29	19	
Минута	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Было ворон в начале	40	27	18	12	8	6	4	3	2
Улетит в конце	13	9	6	4	2	2	1	1	0

Видим, что вороны перестали улетать на 17-й минуте. Таким образом, получаем ответ: 16 минут.

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

### ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

- Причина прочности скорлупы – в ее геотермической форме, благодаря которой усилие, приложенное *снаружи* в какой-либо точке, передается вдоль всей поверхности.
- Птицы, рыбы и морские животные, например дельфины, обладают оптимально обтекаемой формой тела для движения в воде и воздухе с наименьшими затратами энергии.
- Спортсмены и летчики таким образом уменьшают сопротивление среды – подобно птицам, летящим в стае вслед за вожаком, или косяку рыб, образующему при движении форму капли.
- При движении лапок назад водоплавающие птицы растопыривают пальцы, распрямляя соединяющую их перепонку, чтобы лучше грести, а при движении вперед сдвигают пальцы, снижая сопротивление воды. Подобным образом, к примеру, управляют веслами, поворачивая их, гребцы на лодках.
- Бегунам на короткие дистанции – раньше они начинали бег с так называемого высокого старта, что увеличивало время достижения большой скорости.
- Подобное решение, естественно, коснулось летающих животных, особенно насекомых. Так, у стрекоз на переднем крае вершинной части каждого крыла имеется легко распознаваемое хитиновое утолщение.
- Это не что иное, как реактивное движение, используемое в самолетах, ракетах и водомет-

ных катерах, а в последнее время – позволяющее человеку «летать» на водяной струе, испускаемой из подведенного к нему шланга.

8. Колеса эффективны при передвижении по ровным, гладким и твердым поверхностям, которые в природе встречаются редко.

9. При попытке оттянуть присоску растёт объем ее внутренней полости, давление в ней падает и атмосферное давление сильнее прижимает ее к поверхности. Механизм действия присоски важен для создания устройств, позволяющих двигаться человеку или роботу по вертикальным стенам и потолкам. Саму же рыбу-прилипалу заставили служить своеобразным рыболовным крючком рыбки южных морей.

10. В приборах ночного видения, регистрирующих в темноте источники тепла на фоне окружающей среды. Чувствительность змеиных термоллокаторов завидна – они позволяют определять разности температур в тысячные доли градуса!

11. Летучие мыши (а также дельфины) располагают ультразвуковым локатором, испуская и принимая отраженные от препятствий волны. Эхолокационные устройства животных помогают разработать не только новые принципы гидро- и радиолокации, но и такие бытовые приборы, как, например, парктроник – автомобильный парковочный радар.

12. Конечно же, перископы, позволяющие вести наблюдение из укрытий на поле боя или с подводных лодок.

13. В создании оптоволокна, способного передавать на огромные расстояния свет, а с его помощью – и гигантские потоки информации.

МИКРООПЫТ

Разумеется, это широко распространенные «липучки», заменившие шнурки на обуви и пуговицы и молнии на одежде, – их действительно создали по образу и подобию колючек лопуха.

ТЕОРЕМА ШАЛЯ В ТРЕХ ЛИЦАХ

Докажем, что в модели Пуанкаре окружность в смысле Лобачевского представляется евклидовой окружностью. Для этого воспользуемся тем, что евклидова окружность есть геометрическое место точек, из которых ее диаметр виден под прямым углом. Пусть дана окружность, в смысле Лобачевского, с центром  $O$  (рис.2). Проведем через  $O$  особую прямую и отметим на ней две точки  $A$  и  $B$ , лежащие на нашей окружности. Теперь пусть  $C$  – произвольная точка окружности. Поскольку (опять же в смысле Лобачевского) отрезки  $OA$ ,  $OC$  и  $OB$  равны, то существуют симметрии, переводящие точку  $C$  в точки  $A$  и  $B$ .

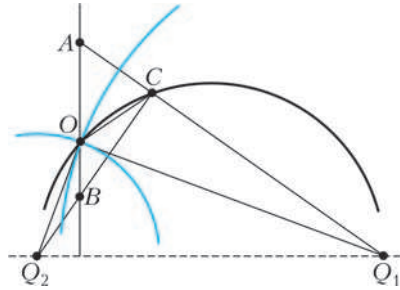


Рис. 2

Прямые, относительно которых совершаются эти симметрии, изображены синим цветом; центры их – точки  $Q_1$  и  $Q_2$  на абсолюте. Из соотношений инверсии можно получить, что

$$Q_1C : Q_1O = Q_1O : Q_1A \text{ и } Q_2C : Q_2O = Q_2O : Q_2B,$$

откуда

$$\Delta Q_1OC \sim \Delta Q_1AO \text{ и } \Delta Q_2OC \sim \Delta Q_2BO.$$

Пользуясь равенством углов в подобных треугольниках и тем, что  $Q_1O \perp Q_2O$  («синие» прямые перпендикулярны как биссектрисы смежных углов, значит, перпендикулярны и касательные, и они же суть радиусы), получаем, что  $\angle ACB = 90^\circ$ . Значит, точка  $C$  лежит на евклидовой окружности с диаметром  $AB$ . Обратное рассуждение (доказательство того, что любая точка на этой евклидовой окружности лежит также на окружности в смысле Лобачевского) оставим читателю.

ГДЕ ОШИБКА?

В каждом из предложенных текстов есть ошибки.

1. Утверждение задачи неверно. Приведем пример двух неравных треугольников, для которых выполняются все равенства из условия задачи. Построим равнобедренный треугольник  $BKB_1$  и проведем высоту  $KH$  к его основанию (рис.3).

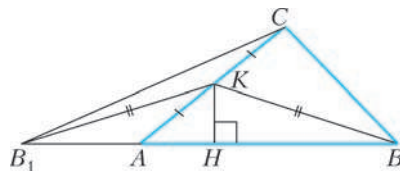


Рис. 3

На отрезке  $B_1H$  выберем произвольную точку  $A$ , проведем луч  $AK$  и отложим на нем точку  $C$  так, что  $CK = AK$ . Таким образом, в неравных треугольниках  $ABC$  и  $AB_1C$  сторона  $AC$  и высота, проведенная из вершины  $C$ , общие, а медианы  $BK$  и  $B_1K$  равны.

Ошибка в решении состоит в том, что из равен-

ства углов  $DBG$  и  $D_1B_1G_1$  (безусловно, верного) сделан неверный вывод, что равны углы  $ABM$  и  $A_1B_1M_1$ . На самом деле, это не обязательно, но этот вывод спровоцировал рисунок в решении, на котором оба треугольника остроугольные.

**2.** Утверждение задачи неверно. Действительно, рассмотрим ромб  $ABCD$ , в котором углы  $B$  и  $D$  тупые. Так как основания высот ромба, проведенных, например, из вершины  $D$ , лежат на сторонах ромба, то найдется окружность с центром  $D$ , которая пересечет каждую из сторон  $AB$  и  $BC$  в двух точках ( $E, K$  и  $F, M$  соответственно; рис. 4). Тогда  $\angle DEF = \angle DFE$  (углы при осно-

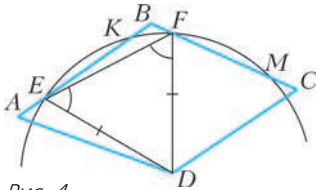


Рис. 4

вании равнобедренного треугольника  $DEF$ ), но  $BE \neq BF$ .

Отсюда понятен пробел в решении: утверждение, что треугольники  $DEA$  и  $DFC$  равны, ошибочно. Действительно, в этих треугольниках  $DA = DC$ ,  $DE = DF$  и  $\angle A = \angle C$ . Согласно так называемому «четвертому признаку равенства треугольников» отсюда следует, что либо эти треугольники равны, либо  $\angle DEA + \angle BAC = 180^\circ$  (что и выполняется в данном случае).

**3.** В «решении» ошибок нет, но противоречивы числовые данные в условии задачи. Это можно заметить и до получения ответа. Уже на предыдущем шаге полученное значение длины  $AM$  больше  $CM$ , т.е. диаметр вписанного круга больше средней линии трапеции, что невозможно (либо, учитывая, что  $CD = AM$ , заметим: в треугольнике  $CMD$  катет больше гипотенузы, что также невозможно)!

**4.** Как ответ, так и решение неверны. Ошибка допущена в заключительной части приведенного решения и состоит в следующем: если сумма длин сторон  $AC$  и  $BC$  фиксирована, то областью определения функции  $\operatorname{tg} \alpha$  будет являться только часть промежутка  $(0; 90^\circ)$ , а именно  $(0; \alpha_{\max}]$ ,

где  $\alpha_{\max} = \arcsin \frac{AB}{AC + BC}$ . На самом деле, наибольшее значение длины высоты существует и достигается в случае равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AC = BC$ ). Доказать это можно многими способами. Придумать рассуждение, не выходящее за рамки «школьной» геометрии, предоставим читателю и приведем менее стандартное рассуждение.

Геометрическим местом точек  $C$ , сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек  $A$  и  $B$  постоянна, является эллипс, фокусы которого — точки  $A$  и  $B$ . Его уравнение в декартовой системе координат:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0$  и  $b > 0$  — длины полуосей эллипса). Длина высоты треугольника  $ABC$ , опущенной на сторону  $AB$ , равна расстоянию от точки  $C$  до оси абсцисс, т.е. равна  $|y|$ . Так как  $|y| = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ , то его наибольшее значение достигается при  $x = 0$ , т.е. если точка  $C$  принадлежит малой полуоси эллипса. Следовательно, треугольник  $ABC$  равнобедренный.

**5.** Изобразив любой треугольник  $ABC$ , кроме прямоугольного, и проведя его высоты  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$ , несложно убедиться, что утверждение задачи неверно. В решении допущена следующая ошибка: для треугольника  $ABC$  ортотреугольником является треугольник  $A'B'C'$ , а для треугольника  $HBC$  — треугольник  $A'C'B'$ , т.е. меняется соответствие между вершинами треугольника и сторонами ортотреугольника.

**6.** Утверждение задачи неверно. Ошибка в решении — аналогичное рассуждение можно провести только для одного из треугольников: либо для  $OBH$ , либо для  $OCH$ . Действительно, проведя его, например, для треугольника  $OBH$ , мы получим, что  $OA = OB$ , откуда будет следовать, что треугольник  $ABC$  равнобедренный ( $AC = BC$ ). Тогда точки  $C, H, I$  и  $O$  окажутся на одной прямой, а значит, треугольника  $OCH$  существовать не будет. Таким образом, из условия задачи следует только, что треугольник  $ABC$  — равнобедренный.

**7.** Верным ответом является  $L = 2\sqrt{3}$ . Это можно проверить, вычислив, например, эту биссектрису по формуле  $L_\alpha = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\alpha}{2}$ . Либо можно объяснить, какой из двух ответов следует отбросить, например, так: заметим, что если  $AD = \sqrt{3}$ , то для треугольника  $ACD$  не выполняется неравенство треугольника. В этом случае  $AD + CD < AC$ , что невозможно. Сложнее понять, откуда взялся второй ответ.

Дело в том, что была применена теорема косинусов для треугольника  $ABD$ , который задан сторонами  $AB$  и  $BD$  и углом  $BAD$ . При данных в задаче условиях существует два различных треугольника с такими дли-

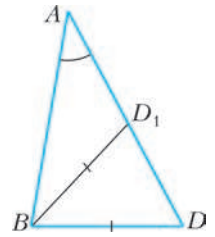


Рис. 5

нами сторон и величиной угла:  $ABD$  и  $ABD_1$  (рис.5). Корень уравнения, посторонний для исходной задачи, соответствует длине стороны  $AD_1$  треугольника  $ABD_1$ .

**8.** Доказательство того, что треугольник  $A_1B_1C_1$  прямоугольный, ошибок не содержит. Эта часть задачи является классической, а рассмотренную конфигурацию иногда называют «треугольником Шебаршина» (по имени автора первой публикации о ней, которая была более 50 лет назад). Однако треугольника  $A_1B_1C_1$  с длинами сторон, указанными в условии задачи, не существует. Покажем это, найдя границы, в которых может находиться отношение катетов этого треугольника.

Обозначим углы  $A$  и  $C$  треугольника  $ABC$  через  $\alpha$  и  $\gamma$  соответственно. Угол  $BC_1B_1$  — угол между биссектрисами внешних углов треугольника  $BCB_1$ , значит,  $\angle BC_1B_1 = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ . Аналогично,  $\angle BA_1B_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ . Из треугольников  $BCB_1$  и  $BA_1B_1$  по теореме синусов:

$$\frac{B_1C_1}{BB_1} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right)} \quad \text{и} \quad \frac{B_1A_1}{BB_1} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Тогда

$$\frac{B_1C_1}{B_1A_1} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}.$$

Пусть  $\frac{\gamma}{2} = x$ , тогда, учитывая, что  $\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = 30^\circ$ , получим

$$\frac{B_1C_1}{B_1A_1} = \frac{\cos(30^\circ - x)}{\cos x} = \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} x}{2}.$$

Так как  $0 < x < 30^\circ$ , то

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{B_1C_1}{B_1A_1} < \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

В нашем случае отношение катетов (большого к меньшему) равно  $\frac{5}{4}$  или  $\frac{4}{3}$ . Оба числа не принадлежат указанному промежутку.

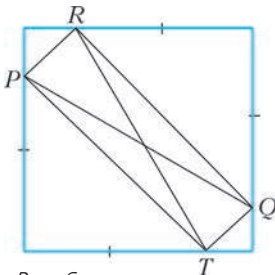


Рис. 6

**9.** Из перпендикулярности указанных отрезков следует их равенство, а обратное утверждение неверно. Контрпример — на рисунке 6.

**10.** Увы, но «ответ» неверен. При этом найти ошибку весьма непросто. Оказывается, углы  $CMN$  и  $MNA$  — не обязательно накрест лежащие. Контрпри-

мер удобно построить на клетчатой бумаге (рис.7).

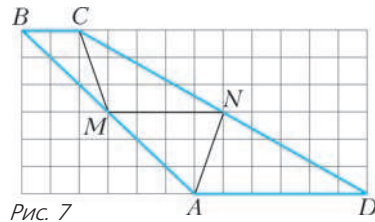


Рис. 7

### LVIII МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

**1** (Н.Добронравов). Любое  $a_0$ , делящееся на 3. Первый случай:  $a_0$  делится на 3. В этом случае любое  $a_n$  делится на 3, значит, любое  $a_n \leq a_0^2$ , следовательно, в этом случае последовательность бесконечно много раз принимает одно и то же значение.

Второй случай:  $a_0$  не делится на 3. Заметим, что если какое-то число повторяется бесконечное число раз, то последовательность закичилась. Пусть  $t$  — минимальный элемент цикла. Заметим, что в последовательности нет элемента  $a_k \equiv 2 \pmod{3}$ , иначе последовательность начала бы бесконечно возрастать и не закичилась бы, следовательно,  $t \equiv 1 \pmod{3}$ , тогда  $t > (t-2)^2$ . Решим полученное неравенство и получим, что  $t$  равно 2 или 3, но оба этих числа не подходят.

**2** (К.Тыщук). Сразу приведем ответы и убедимся, что они подходят:

- 1)  $f(x) = 0, \quad 0 + 0 = 0$ ;
- 2)  $f(x) = x - 1,$   
 $(x-1)(y-1) - 1 + x + y - 1 = xy - 1$ ;
- 3)  $f(x) = 1 - x,$   
 $1 - (1-x)(1-y) + 1 - x - y = 1 - xy$ .

Итак, начнем с того, что подставим в условие  $x = y = 0$ . Получаем  $f(f(0)f(0)) + f(0) = f(0)$ , т.е.  $f((f(0))^2) = 0$ . Значит,  $y = f(0)$  есть корень  $(f(0))^2$ .

Изучим корни  $f$ . Пусть  $a$  — корень  $f(x)$ . Подставим в условие  $y = a$ :

$$f(f(x)f(a)) + f(x+a) = f(ax),$$

$$f(0) + f(x+a) = f(ax).$$

В этом тождестве есть два неприятных объекта, но от них можно избавиться, если подобрать  $x$  такой, что  $x + a = ax$ , т.е.  $x(a-1) = a$ . Такой  $x$  точно существует при  $a \neq 1$ . Значит, если найдется  $a \neq 1$ , то подстановкой  $x = \frac{a}{a-1}$  получим

$$f(0) + f\left(\frac{a^2}{a-1}\right) = f\left(\frac{a^2}{a-1}\right), \text{ т.е. } f(0) = 0.$$

Но тогда, подставив в условие  $y = 0$ , получаем

$$f(f(x)f(0)) + f(x) = f(0),$$

откуда

$$f(0) + f(x) = 0, \text{ и } f(x) = 0,$$

что и дает первый ответ – тождественный ноль. Теперь предположим, что не существует  $a \neq 1$ . Но корень есть  $-(f(0))^2$ . Значит,  $(f(0))^2 = 1$ , т.е.  $f(0) = \pm 1$ . Эта двойственность как раз дает два оставшихся ответа.

С ответом  $f(x) = x - 1$  приятнее работать, поэтому считаем, что  $f(0) = -1$ . Если  $f(0) = 1$ , то сменим знак  $f$  и будем рассматривать функцию  $g(x) = -f(x)$ . Она будет удовлетворять соотношению из условия:

- $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,
- из  $f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(y)$  сменой знака получим  $g(f(x)f(y)) + g(x+y) = g(xy)$ , т.е.  $g(g(x)g(y)) + g(x+y) = g(xy)$ .

Также, аналогично, у  $g$  есть корень, но теперь это  $-1$ , как мы и хотели.

Итак,  $f(0) = -1$ .

Если мы теперь докажем, что  $f(x) = x - 1$ , мы получим наши два ответа.

Вспомним, что  $f((f(0))^2) = 0$ , т.е.  $f(1) = 0$ .

Получим несколько полезных соотношений.

- Подставим в условие  $y = 1$ :

$$\begin{aligned} f(f(x) \cdot 0) + f(x+1) &= f(x), \\ -1 + f(x+1) &= f(x), \\ f(x+1) &= f(x) + 1, \end{aligned}$$

таким образом, мы можем вносить единицу (а значит, и целые числа) под  $f$  или, наоборот, вынимать наружу. Тогда

$$f(2) = f(1) + 1 = 1; \quad f(-1) = f(0) - 1 = -2.$$

- Подставим  $y = 2$  ( $f(2) = 1$ ):

$$f(f(x)) + f(x+2) = f(2x),$$

откуда

$$f(2t) = f(f(t)) + f(t+2) = f(f(t)) + f(t) + 2. \quad (1)$$

- Подставим  $y = 0$  ( $f(0) = -1$ ):

$$f(-f(x)) + f(x) = f(0) = -1,$$

откуда

$$f(-f(t)) = -1 - f(t). \quad (2)$$

- Подставим  $y = -1$ , ( $f(-1) = -2$ ):

$$f(-2(f(x))) + f(x-1) = f(-x).$$

Пользуясь известными тождествами, получим

$$\begin{aligned} f(-x) &= f(2(-f(x))) + f(x-1) \stackrel{(1)}{=} \\ &= f(f(-f(x))) + f(-f(x)) + 2 + f(x-1) \stackrel{(2)}{=} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= f(-1 - f(x)) - 1 - f(x) + 2 + f(x-1) = \\ &= -1 + f(-f(x)) - 1 - f(x) + 2 + f(x) - 1 \stackrel{(2)}{=} \\ &= -1 - 1 - f(x) - 1 - f(x) + 2 + f(x) - 1 = -2 - f(x). \end{aligned}$$

Значит,

$$f(-x) = -2 = f(x). \quad (3)$$

Тогда тождество (2) превращается в  $-2 - f(f(x)) = -1 - f(x)$ , т.е.

$$f(f(x)) = f(x) - 1 = f(x-1), \quad f((x)) = f(x-1)$$

(это тождество можно получить и более изящным путем).

Оставшаяся часть доказательства посвящена инъективности  $f(x)$ , ведь если  $f$  инъективна, то из  $f(f(x)) = f(x-1)$  следует  $f(x) = x-1$ , что и требуется доказать.

Итак, пусть нашлись  $a$  и  $b$  такие, что  $f(a) = f(b)$ . Докажем, что  $a = b$ . Поиграем с подстановками. Подставим  $x = y = a$  в условие:

$$f((f(a))^2) + f(2a) = f(a^2),$$

тогда

$$f(a^2) \stackrel{(1)}{=} f((f(a))^2) + f(f(a)) + f(a) + 1.$$

Аналогично,

$$f(b^2) = f((f(b))^2) + f(f(b)) + f(b) + 1 =$$

$$= f((f(a))^2) + f(f(a)) + f(a) + 1 = f(a^2),$$

значит,  $f(a^2) = f(b^2)$ . Из (2) получим, что и  $f(-a^2) = f(-b^2)$ , это в дальнейшем пригодится.

Теперь подставим  $y = a$  и  $y = b$ :

$$\begin{cases} f(f(x)f(a)) + f(x+a) = f(ax), \\ f(f(x)f(b)) + f(x+b) = f(bx). \end{cases}$$

Вычтя, получим

$$f(x+a) - f(x+b) = f(ax) - f(bx). \quad (4)$$

Подставим в (4)  $x = -b$ , чтобы  $f(x+b)$  обратилось в  $f(0)$ :

$$f(a-b) - f(0) = f(-ab) - f(-b^2).$$

Подставим аналогично  $x = -a$ :

$$f(0) - f(-a+b) = f(-a^2) - f(ab).$$

Сложим полученное:

$$\begin{aligned} (f(a-b) - f(0)) + (f(0) - f(-a+b)) &= \\ = (f(-ab) - f(-b^2)) + (f(-a^2) - f(-ab)), \end{aligned}$$

откуда

$$f(a-b) - f(-a+b) = -f(-b^2) + f(-a^2) = 0,$$

так как

$$f(-a^2) = f(-b^2), \quad f(a-b) = f(-a+b).$$



Но

$$f(-a+b) = f(-(a-b)) \stackrel{(3)}{=} -2 - f(a-b).$$

Значит,  $f(a-b) = -2 - f(a-b)$ , т.е.  $f(a-b) = -1$ .

Но из этого следует, что  $f(a-b)+1=0$ , т.е.  $f(a-b+1)=0$  и  $a+b-1$  – корень. Значит,  $a-b+1=1$ , так как других корней  $f(x)$  нет. Тогда  $a=b$ , что и требовалось доказать.

Читателю (как и автору) может сначала показаться, что здесь где-то спрятана ошибка со знаком, ведь решение взялось практически из ниоткуда, но ее нет. А странное равенство  $f(a-b) = f(a+b)$  на самом деле означает, что  $f(0) = f(-0)$ .

Приведем альтернативное доказательство инъективности. Пусть  $f(a) = f(b)$ . Условие позволяет работать с  $f(rs)$  и  $f(r+s)$  (при подстановке  $r+s$ ):

$$f(f(r)f(s)) + f(r+s) = f(rs).$$

Если мы сумеем подобрать  $r$  и  $s$  такие, что  $rs = a-1$ ;  $r+s = b$ , то

$$f(f(r)f(s)) + f(b) = f(a-1) = f(a)-1,$$

т.е.

$$f(f(r)f(s)) = -1 + f(a) - f(b) = -1.$$

Тогда, опять же,  $f(f(r)f(s)+1) = 0$ , и  $f(r)f(s)+1$  – корень. Поэтому  $f(r)f(s)+1=1$ , откуда  $f(r)f(s)=0$ , и  $r$  или  $s$  – корень. Значит,  $r$  или  $s$  равно 1, что дает  $a=b$ , так как  $rs+1=a$ ,  $r+s=b$ . Но такие  $r$  и  $s$  существуют при  $b^2 \geq 4(a-1)$ . Здесь нам поможет сдвиг: из  $f(a) = f(b)$  следует  $f(a-n) = f(b-n)$  для  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Значит, можно считать  $a < 1$ , откуда будет следовать  $b^2 \geq 4(a-1)$ , что нам и нужно.

**3** (М.Иванов). Нет.

Первым шагом устройство покажет на  $A_0$ , и охотник прыгнет в некоторую точку  $B_1$ ; пусть тогда окажется, что кролик в первом раунде прыгнул не в  $B_1$ .

Заметим, что если после некоторого раунда расстояние между охотником и кроликом превзойдет 100, то кролик может действовать так, чтобы после каждого следующего раунда расстояние превосходило 100. Для этого он просто может каждый раз прыгать на 1 в направлении, противоположном направлению на охотника. После прыжка кролика расстояние между ним и охотником увеличится на 1, и, что бы ни показало устройство и куда бы ни переместился охотник, расстояние уменьшится не более чем на 1 и, таким образом, станет не меньше, чем после предыдущего раунда.

Предположим, что после некоторого  $m$ -го раун-

да расстояние  $d$  между охотником и кроликом положительно, но не превосходит 100. Тогда кролик может произвести *операцию*, заключающуюся в следующем. Возьмем наименьшее натуральное  $n$ , которое не меньше  $d+1$ . Построим два различных треугольника  $A_m P_{m+n} X_{m+n}$  и  $A_m P_{m+n} Y_{m+n}$  со следующими свойствами:

1.  $\angle P_{m+n}$  у обоих треугольников прямой;
2.  $P_{m+n} X_{m+n} = P_{m+n} Y_{m+n} = 1$ ;
3.  $A_m X_{m+n} = A_m Y_{m+n} = n$ ;
4.  $P_{m+n}$  лежит на продолжении отрезка  $B_m A_m$  за точку  $A_m$ .

Для натуральных  $k$ , меньших  $n$ , отметим такие точки  $X_{m+k}$ ,  $Y_{m+k}$ ,  $P_{m+k}$  на отрезках  $A_m X_{m+n}$ ,  $A_m Y_{m+n}$ ,  $A_m P_{m+n}$ , что  $A_m X_{m+k} = A_m Y_{m+k} = k$ , а  $P_{m+k}$  – проекция  $X_{m+k}$  (а также  $Y_{m+k}$ ) на прямую  $B_m A_m$ . Ясно, что  $\Delta A_m P_{m+n} X_{m+n}$  подобен  $\Delta A_m P_{m+k} X_{m+k}$  и  $\Delta A_m P_{m+k} Y_{m+k}$  с коэффициентом  $\frac{k}{n}$ , поэтому  $P_{m+k} X_{m+k} = P_{m+k} Y_{m+k} = \frac{k}{n} \leq 1$ . Значит, если кролик после  $(m+k)$ -го раунда был в  $X_{m+k}$  или  $Y_{m+k}$ , устройство могло показать на  $P_{m+k}$ . Пусть тогда оно действительно показывало последовательно на точки  $P_{m+1}, \dots, P_{m+n}$  и охотник оказался в некоторой точке  $B_{m+n}$ . Не умаляя общности, эта точка лежит на прямой  $B_m A_m$  или в полуплоскости относительно этой прямой, содержащей  $Y_{m+n}$ . Тогда пусть окажется, что  $A_{m+k} = X_{m+k}$  для натуральных  $k \leq n$ . Охотник за  $n$  прыжков переместился не более чем на  $n$ , поэтому его проекция на  $B_m A_m$  сдвинулась не более чем на  $n$ , т.е. если мы отложим на луче  $B_m A_m$  отрезок  $B_m Z = n$ , то проекция совпадает с точкой  $Z$  или находится с той же стороны от нее, что и  $B_m$ .

Тогда ясно, что  $A_{m+n} B_{m+n} \geq A_{m+n} Z$ . По теореме Пифагора,

$$A_m P_{m+n} = \sqrt{A_m X_{m+n}^2 - P_{m+n} X_{m+n}^2} = \sqrt{n^2 - 1},$$

откуда  $Z P_{m+n} = \sqrt{n^2 - 1} - (n - d)$ . Тогда, опять же по теореме Пифагора,

$$\begin{aligned} X_{m+n} Z^2 &= 1 + \left( \sqrt{n^2 - 1} - (n - d) \right)^2 = \\ &= n^2 - 2(n - d)\sqrt{n^2 - 1} + (n - d)^2 = \\ &= d^2 + 2(n - d)\left( n - \sqrt{n^2 - 1} \right) = \\ &= d^2 + \frac{2(n - d)}{n + \sqrt{n^2 - 1}} \geq d^2 + \frac{2}{n + n} = d^2 + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Эти  $n$  раундов и будут нашей операцией. Заметим, что  $n-1 < d+1 \leq 101$ , откуда  $n \leq 101$ . Значит, одна операция длится не более 101 раунда, и за нее квадрат расстояния растет хотя бы на  $\frac{1}{101}$ . Итак, если произвести хотя бы  $101 \cdot 10000$

операций, квадрат расстояния от кролика до охотника превзойдет 10000, т.е. расстояние между ними превзойдет 100. При этом пройдет не более  $1 + 101 \cdot 101 \cdot 10000 \leq 10^9$  раундов, считая самый первый, поэтому кролик сможет добиться того, чтобы к концу игры он был на расстоянии большем 100 от охотника.

4. Пусть  $B$  – вторая точка пересечения  $\Gamma$  и  $l$  (рис.8). Сделаем инверсию с центром в  $R$ , пере-

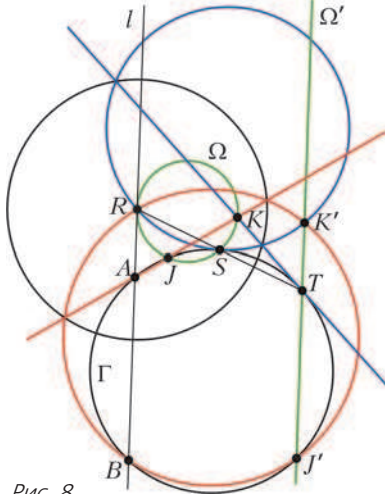


Рис. 8

водящую  $S$  в  $T$ . Тогда  $\Omega$  переходят в прямую  $\Omega'$ , которая параллельна  $l$ ;  $A \leftrightarrow B$  (эта запись означает, что точки  $A$  и  $B$  переходят друг в друга),  $T \leftrightarrow S$ ,  $K \leftrightarrow K'$ ,  $J \leftrightarrow J'$ . Заметим, что  $\Gamma$  остается на месте (так как  $S \leftrightarrow T$ ,  $A \leftrightarrow B$ )  $\Rightarrow J' = \Gamma \cap \Omega'$  (не  $T$ );  $K' = \text{окр } BCR \cap \Omega'$  (не  $J'$ ). Также заметим, что  $ATBJ'$  и  $RK'BJ'$  вписаны  $\Rightarrow RK' \parallel AT \Rightarrow ARK'T$  – параллелограмм, а  $S$  – его центр как середина  $RT$ .

Нужно было доказать, что  $KT$  касается  $\Gamma$ . Это равносильно тому, что  $\text{окр } K'SR$  касается  $\Gamma = \text{окр } ATS$ . Но так как  $S$  – центр параллелограмма  $ATK'R$ , то окружности  $K'SR$  и  $ATS$  переходят друг в друга при симметрии в точке  $S$ . Следовательно, они касаются в точке  $S$ , что и требовалось доказать.

**6. Лемма.** Существует искомый многочлен для пар  $(x, 1)$ ,  $(1, y)$ ,  $(1, 1)$ , где  $x, y$  – целые.

Перед доказательством леммы отметим следующее очевидное утверждение:

уравнение  $\sum_{i=1}^m A_i x_i = W$ , где  $A_i$  и  $W$  целые, имеет решение в целых  $x_i$  тогда и только тогда, когда  $\text{gcd}(A_i) \mid W$ .

**Доказательство леммы.** Понятно, что если  $x = y = 1$ , то такой многочлен существует.

Пусть  $x \neq 1$ . Тогда достаточно доказать, что

существует такое  $k$ , что следующая система имеет решение в целых  $a_i$ :

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^k a_i x^i = 1, \\ \sum_{i=0}^k a_i y^{k-i} = 1, \\ \sum_{i=0}^k a_i = 1. \end{cases}$$

Из последнего уравнения имеем  $a_0 = 1 - \sum_{i=1}^k a_i$ .

Подставив это выражение в первые два уравнения, получаем

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k a_i x^i - \sum_{i=1}^k a_i = 0, \\ \sum_{i=1}^k a_i y^{k-i} + y^k \left(1 - \sum_{i=1}^k a_i\right) = 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k a_i (x^i - 1) = 0, \\ \sum_{i=1}^k a_i (y^k - y^{k-i}) = y^k - 1. \end{cases}$$

Отметим, что  $x - 1 \neq 0$  и для любого  $i$  выполняется  $x - 1 \mid x^i - 1$ . Тогда первое уравнение полученной системы переписывается в виде

$$a_1 = -\sum_{i=2}^k a_i \frac{x^i - 1}{x - 1}.$$

Подставим это выражение во второе уравнение:

$$-(y^k - y^{k-1}) \sum_{i=2}^k a_i \frac{x^i - 1}{x - 1} + \sum_{i=2}^k a_i (y^k - y^{k-i}) = y^k - 1,$$

или

$$\sum_{i=2}^k a_i \left( -\frac{x^i - 1}{x - 1} (y^k - y^{k-1}) + (y^k - y^{k-i}) \right) = y^k - 1.$$

Докажем, что для этого уравнения выполнено условие утверждения. НОД всех коэффициентов делит НОД коэффициентов при  $a_2$  и  $a_k$ . При  $a_2$ :

$$\begin{aligned} & -(x+1)(y^k - y^{k-1}) + (y^k - y^{k-2}) = \\ & = y^{k-2} (-(x+1)(y^2 - y) + y^2 - 1) = y^{k-2} D. \end{aligned}$$

При  $a_k$ :

$$-(y^k - y^{k-1}) \frac{x^k - 1}{x - 1} + y^k - 1 = R.$$

Понятно, что  $D$  и  $R$  взаимно просты с  $y$ . Поэтому НОД этих коэффициентов взаимно прост с  $y$ . Но так как он делит  $y^{k-2}D$ , то он делит и  $D$ . Так как  $D$  не зависит от  $k$  и при этом  $D$  и  $y$  взаимно просты, то существует  $k$  такое, что  $D \mid y^k - 1$ .

Тогда и НОД всех коэффициентов делит  $y^k - 1$ , значит, целое решение есть. Лемма доказана.

Теперь докажем утверждение задачи индукцией по  $n$  – количеству примитивных пар.

Для  $n = 1$  утверждение очевидно, так как для любой пары  $(x, y)$  взаимно простых чисел существуют  $A$  и  $B$  такие, что  $Ax + By = 1$ .

Пусть утверждение задачи выполнено для  $n - 1 \geq 1$ . Докажем его для  $n$ . Пусть даны примитивные пары  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . Для пар  $(x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$  по предположению индукции существует многочлен  $P(x, y)$ , а для пар  $(x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  – многочлен  $Q(x, y)$ .

Пусть

$$P_1(x, y) = P(x, y)^{\deg Q(x, y)},$$

$$Q_1(x, y) = Q(x, y)^{\deg P(x, y)}.$$

Тогда  $\deg P_1 = \deg Q_1 = \deg P \deg Q$ . Причем

$$P_1(x_n, y_n) = A, \quad P_1(x_i, y_i) = 1, \quad i < n,$$

$$Q_1(x_1, y_1) = B, \quad Q_1(x_i, y_i) = 1, \quad i > 1.$$

По лемме существует искомый многочлен  $T(x, y)$  для пар  $(1, 1), (A, 1), (1, B)$ . Пусть

$$F(x, y) = T(P_1(x, y), Q_1(x, y)).$$

Так как  $\deg P_1 = \deg Q_1$  и  $T$  – однородный многочлен, то и  $F$  – однородный многочлен. Докажем, что  $F(x_i, y_i) = 1$  для всех  $i = 1, \dots, n$ .

При  $i = 1$  имеем

$$F(x_1, y_1) = T(P_1(x_1, y_1), Q_1(x_1, y_1)) = T(1, B) = 1.$$

При  $i = n$ , аналогично,

$$F(x_n, y_n) = T(A, 1) = 1.$$

И при всех остальных  $i$  имеем

$$F(x_i, y_i) = T(P_1(x_i, y_i), Q_1(x_i, y_i)) = T(1, 1) = 1.$$

Таким образом, многочлен  $F(x, y)$  является искомым для пар  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , что и требовалось доказать.

## МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

Ф И З И К А

Профильный экзамен

МЕХАНИКА

1. Пусть  $a_1$  и  $a_2$  – ускорения бруса и доски в неподвижной системе отсчета. Уравнения движения для бруса и доски имеют вид

$$m_1 a_1 = F - f, \quad m_2 a_2 = f,$$

где  $f = \mu m_2 g$  – сила трения. Отсюда следует

$$a_2 = \mu g, \quad a_1 = \frac{1}{m_1} (F - \mu m_2 g), \text{ и}$$

$$a_{\text{отн}} = a_1 - a_2 = \frac{F}{m_1} - \mu g \left( \frac{m_2}{m_1} + 1 \right).$$

Доска начнет «свешиваться», когда ее центр тяжести достигнет конца бруса, т.е. при

$$\frac{a_{\text{отн}} t_0^2}{2} = \frac{l}{2}.$$

В итоге получаем

$$\mu = \frac{F - (m_1 l / t_0^2)}{(m_1 + m_2) g} = 0,2.$$

2. Поскольку силы сухого трения скольжения, действующие на доску и брусок, по модулю равны  $\mu mg$ , то относительно человека брусок начинает двигаться с ускорением  $a_1 = \mu g$  в направлении движения доски, а доска начинает тормозить с ускорением  $a_2 = \frac{m}{M} \mu g$ , направленным противоположно ее скорости. Брусок и доска после соприкосновения будут двигаться по-ступательно и прямолинейно со скоростями

$$v_1 = at \quad \text{и} \quad v_2 = v_0 - at.$$

Скольжение бруска по доске прекратится, когда скорости этих тел относительно льда станут равными. Отсюда находим соответствующее время:

$$t_0 = \frac{Mv_0}{\mu g(m + M)}.$$

Поскольку за это время брусок переместится относительно льда на  $x = \frac{\mu g t_0^2}{2}$ , а доска сместится на  $X = v_0 t_0 - \frac{\mu m g t_0^2}{2M}$ , то

$$l = X - x = \left( v_0 - \mu g t_0 \frac{m + M}{2M} \right) t_0 = \frac{Mv_0^2}{2\mu g(m + M)}.$$

Отсюда находим

$$\mu = \frac{Mv_0^2}{2gl(m + M)} = 0,20.$$

3. Пусть ось  $x$  инерциальной системы отсчета направлена вдоль наклонной плоскости, а ось  $y$  – перпендикулярно ей (рис.9). Поскольку нить невесомая и

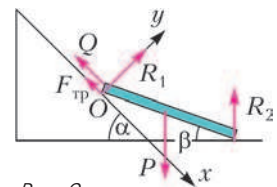


Рис. 9

гладкая, а груз покоится, то условие отсутствия ускорения у центра масс пластины имеет вид

$$-Q - F_{\text{тр}} - R_2 \sin \alpha + P \sin \alpha = 0,$$

$$R_1 + R_2 \cos \alpha - P \cos \alpha = 0,$$

а отсутствие углового ускорения пластины относительно оси, проходящей через точку  $O$ , –

$$R_2 l \cos \beta - P \frac{l}{2} \cos \beta = 0.$$

Здесь  $R_1$  и  $R_2$  – модули нормальных составляющих сил реакции наклонной плоскости и горизонтальной поверхности,  $F_{\text{тр}} = \mu R_1$  – модуль силы трения пластины о наклонную плоскость,  $l$  – длина пластины. При этом изображенное на рисунке направление силы трения покоя соответствует минимальному значению силы  $Q$ . Решая приведенную систему уравнений, находим

$$Q_{\min} = \frac{P}{2}(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

Если же значение силы  $Q$  максимально, то направление силы трения будет противоположным показанному на рисунке. Решение соответствующей этому случаю системы уравнений дает

$$Q_{\max} = \frac{P}{2}(\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

Таким образом,

$$\frac{P}{2}(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \leq Q \leq \frac{P}{2}(\sin \alpha + \mu \cos \alpha),$$

или

$$2,8 \text{ Н} \leq Q \leq 4,2 \text{ Н}.$$

#### МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

**1.** Пусть  $p_{\text{н}} = p_0 = 10^5$  Па – давление насыщенного пара воды при  $100^\circ\text{C}$ ,  $V$  – объемы пара и гелия в исходном состоянии,  $v_{\text{н}}$  – число молей пара, а  $v_{\text{г}}$  – число молей гелия. Поскольку давления и объемы пара и гелия в исходном состоянии равны друг другу, то

$$v_{\text{г}} = v_{\text{н}} = \frac{p_0 V}{nRT}, \text{ где } T = 373 \text{ К}.$$

Так как в вертикально стоящем цилиндре часть пара сконденсировалась при неизменной температуре, то гелий должен находиться в верхней части цилиндра, а давление в нижней части цилиндра должно стать равным  $p_0$ . Поскольку плотность пара во много раз меньше плотности воды при  $100^\circ\text{C}$ , то объемом сконденсировавшейся воды можно пренебречь, а потому занятый гелием объем можно считать равным

$$V_1 = 2V - \frac{V}{2n} = \frac{(4n-1)V}{2n}.$$

Поэтому, согласно уравнению Менделеева–Клапейрона, искомое давление гелия равно

$$p = \frac{v_{\text{г}} RT}{V_1} = \frac{2p_0}{4n-1} = \frac{2}{11} p_0 \approx 18,2 \text{ кПа}.$$

**2.** Согласно условию,

$$p_0 = b + \frac{k}{2\rho_0}, \quad 3p_0 = b + \frac{k}{\rho_0},$$

откуда находим  $b = -p_0$ ,  $k = 4p_0\rho_0$ , и

$$p = p_0 \left( -1 + 4 \frac{\rho_0}{\rho} \right), \text{ или } p = p_0 \left( -1 + 4 \frac{V}{V_0} \right),$$

где  $V_0$  – объем газа в состояниях 1 и 3. Таким образом,  $pV$ -диаграмма цикла имеет вид, изоб-

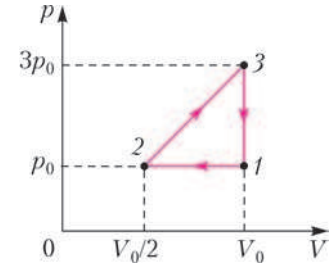


Рис. 10

раженный на рисунке 10. Работа газа равна

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2p_0 V_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{p_0 V_0}{2}.$$

Газ получает тепло на участке 2–3, а отдает тепло на участках 3–1 и 1–2. Следовательно,

$$Q_{\text{н}} = \frac{3}{2} vR(T_3 - T_2) + \frac{1}{2} \cdot 4p_0 V_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{19p_0 V_0}{4}.$$

Таким образом, КПД цикла равен

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{н}}} = \frac{2}{19} \cdot 100\% = 10,5\%.$$

**3.** КПД цикла равен

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{н}}} = \frac{5}{64} \cdot 100\% = 7,8\%.$$

#### ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

**1.** Пусть  $q$  – заряд частицы,  $Q$  – заряд шара,  $r$  – начальное расстояние между частицей и центром шара. По закону Кулона,

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2},$$

где  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная. Потенциальная энергия электростатического отталкивания зарядов  $q$  и  $Q$ , находящихся на расстоянии

$x$  друг от друга, равна  $\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 x}$ , поэтому по закону сохранения энергии имеем

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r+s} = F \frac{sr}{r+s}.$$

По второму закону Ньютона,

$$ma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{(r+s)^2} = F \left( \frac{r}{r+s} \right)^2.$$

Объединяя записанные выражения, получаем

$$a = \frac{mv^4}{4Fs^2} = 0,25 \text{ м/с}^2.$$

2. Потенциал изолированной незаряженной сферы, центр которой находится на расстоянии  $a$  от точечного заряда  $q$ , равен  $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$ . Поскольку сфера заземлена и находится в поле двух зарядов, то справедливо равенство

$$\frac{2q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = 0.$$

Отсюда следует, что заряд  $Q$ , индуцированный на поверхности сферы, равен

$$Q = -\frac{2qR}{a}.$$

Учитывая, что  $R \ll a$ , можно считать, что этот заряд эквивалентен точечному заряду  $Q$ , находящемуся в центре сферы. Следовательно, модуль искомой силы равен

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}, \text{ где } F_1 = F_2 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a^2}.$$

Из записанных выражений находим

$$F = \frac{q^2 R \sqrt{2}}{2\pi\epsilon_0 a^3} \approx 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ Н}.$$

3. Условие равенства мощностей, выделяющихся во внешней цепи при разных сопротивлениях нагрузки  $R_1$  и  $R_2$ , можно записать в виде

$$P = \frac{\epsilon^2 R_1}{(R_1 + r)^2} = \frac{\epsilon^2 R_2}{(R_2 + r)^2},$$

где  $\epsilon$  – ЭДС источника. Из этого равенства находим  $r = \sqrt{R_1 R_2}$ . Следовательно,

$$\sqrt{\frac{R_x R^2}{R_x + R}} = r, \text{ и } R_x = \frac{Rr^2}{R^2 - r^2} \approx 2,7 \text{ Ом}.$$

ОПТИКА

1. На рисунке 11,а показан ход лучей, преломляющихся на плоской поверхности, ограничивающей линзу. Пусть один из лучей, идущих в толще линзы, падает на эту поверхность под углом  $\gamma$ . Тогда в случае выхода луча из линзы в воздух (штриховая линия на рисунке) по закону

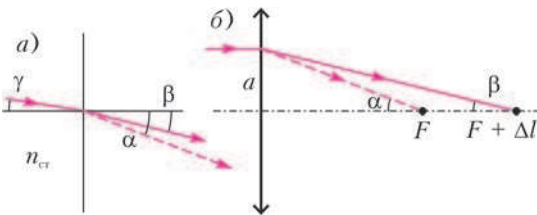


Рис. 11

преломления имеем  $n_{\text{ст}} \sin \gamma = \sin \alpha$ , а в случае выхода луча из линзы в жидкость (сплошная линия на рисунке) имеем  $n_{\text{ст}} \sin \gamma = n \sin \beta$ . Здесь  $n_{\text{ст}}$  – показатель преломления стекла. Из этих равенств получаем

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n.$$

Ход лучей, покинувших линзу, изображен на рисунке 11,б. Видно, что

$$\text{tg } \alpha = \frac{a}{F}, \text{ tg } \beta = \frac{a}{F + \Delta l}.$$

Поскольку падающий на линзу пучок света по условию является узким,

$$\alpha = \frac{a}{F}, \beta = \frac{a}{F + \Delta l}, \frac{\alpha}{\beta} = n \text{ и } n = 1 + \frac{\Delta l}{F} = 1,2.$$

2. Ход луча, прошедшего полушар, изображен на рисунке 12, где  $\alpha$  – угол падения луча на сферическую поверхность полушара, а  $\beta$  – угол преломления на этой поверхности. По закону преломления,  $\sin \beta = \frac{1}{n} \sin \alpha$ ,

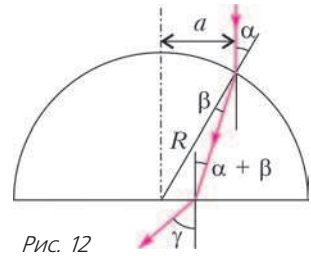


Рис. 12

или приближенно

$\beta = \frac{\alpha}{n}$ . Поскольку  $\alpha = \frac{a}{R}$ , то  $\beta = \frac{a}{nR}$ . Из рисунка видно, что угол падения луча на плоскую поверхность полушара равен  $\alpha - \beta = \frac{a}{R} \frac{n-1}{n}$ .

Поэтому угол преломления на этой поверхности равен

$$\gamma = n(\alpha - \beta) = \frac{a}{R}(n-1) = 0,05 \text{ рад}.$$

3. По условию взаимное расположение объектива и экрана не изменяется, а формирование резкого изображения на экране достигается в результате изменения расстояния от диапозитива до объектива. Как известно, линейное увеличение, даваемое линзой, равно  $\Gamma = \frac{f}{d}$ , где  $d$  – расстояние от диапозитива до линзы (объектива), а  $f$  – расстояние от линзы до экрана, которое не изменяется. Из формулы тонкой линзы следует, что оптическая сила линзы равна

$$D = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{f}(\Gamma + 1).$$

При сдвинутых вплотную тонких линзах их оптические силы складываются. Обозначив через  $D_0$  оптическую силу объектива диапроектора, а через  $D_d$  – оптическую силу добавочной линзы,



имеем

$$D_0 = \frac{1}{f}(\Gamma_0 + 1), \quad D_k + D_0 = \frac{1}{f}(\Gamma_k + 1).$$

Учитывая, что конечное увеличение равно

$$\Gamma_k = \frac{2000}{24} = \frac{3000}{36} \approx 83,3, \quad \text{а начальное равно}$$

$$\Gamma_0 = \frac{\Gamma_k}{\sqrt{2}} \approx 58,9, \quad \text{находим}$$

$$D = \frac{1}{f}(\Gamma_k - \Gamma_0) = 1,6 \text{ дптр}.$$

## НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

### Ф И З И К А

*Открытая межвузовская олимпиада  
школьников «Будущее Сибири»*

Первый (отборочный) этап

8 класс

$$1. \frac{v_1}{v_2} = 5. \quad 2. V_B = V_0 \frac{\rho}{\rho_0} - abh. \quad 3. l_2 = \frac{l - 2l_1}{2 - 3(l_1/l)}.$$

$$4. \Delta h = -\frac{V}{a^2} \frac{c\rho}{\lambda} (T - T_0) \left( \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho} \right) = -1 \text{ см, т.е. уро-}$$

вень воды в сосуде понизится на 1 см.

9 класс

$$1. v_{cp} = \frac{3}{5}v = 3 \text{ км/ч}.$$

2.  $\angle AOA' = -\frac{2}{3}\pi = -120^\circ$ ; знак «минус» означает, что искомый угол нужно отсчитывать в направлении, противоположном вращению.

$$3. T = \frac{mg}{7}.$$

4. Пусть масса воды со льдом, первоначально находившаяся в колбе, равна  $M$ . В момент времени  $t_1$  лед растаял, поэтому температура начала расти. Нагреву воды на первом наклонном участке графика соответствует уравнение

$$P(t_2 - t_1) = c_1 M (T_1 - T_0),$$

где  $P$  – тепловая мощность, подводимая к колбе, а  $T_0 = 0^\circ\text{C}$  – температура плавления льда. Их графика видно, что после момента времени  $t_2$  температура начала понижаться, значит, именно в этот момент бросили порцию льда. Все тепло, подведенное к колбе на участке от  $t_1$  до  $t_3$ , пошло на нагрев льда до нулевой температуры и на плавление этой порции льда:

$$P(t_3 - t_1) = c_2 m (T_0 - T) + \lambda m,$$

где  $m$  – масса порции льда, а  $T$  – искомая температура. На участке от  $t_3$  до  $t_4$  происходит нагрев всей образовавшейся воды:

$$P(t_4 - t_3) = c_1 (m + M)(T_2 - T_0).$$

Окончательно получим

$$T = \frac{\lambda}{c_2} - \frac{c_1}{c_2} \frac{(t_3 - t_1)T_1 T_2}{(t_4 - t_3)T_1 - (t_2 - t_1)T_2}.$$

10 класс

$$1. \frac{v}{v_0} = 2. \quad 2. \Delta h = \frac{2\Delta H}{1 + (\rho g S)/k}.$$

3. Очевидно, что максимальное ускорение получится при максимальной силе тяги трактора, которая не может превышать силу трения, действующую на его колеса. Поэтому при движении по горизонтальному участку трактор развивает максимальную силу тяги

$$F = \mu_1 m_1 g,$$

где  $\mu_1$  – коэффициент трения колес о дорожное покрытие,  $m_1$  – масса трактора. При движении по наклонному участку сила тяги равна

$$F_0 = \mu_1 m_1 g \cos \alpha.$$

Запишем уравнения движения системы на наклонном и горизонтальном участках:

$$F_0 - \mu_2 m_2 g \cos \alpha - (m_1 + m_2) g \sin \alpha = (m_1 + m_2) a_0,$$

$$F - \mu_2 m_2 g = (m_1 + m_2) a,$$

где  $\mu_2$  – коэффициент трения груза о дорожное покрытие,  $m_2$  – масса груза. Отсюда

$$a = \frac{a_0}{\cos \alpha} + g \operatorname{tg} \alpha.$$

$$4. \mu \geq \frac{m \cos \alpha \sin \alpha}{m \cos^2 \alpha + M}.$$

11 класс

$$1. T' = 8T.$$

$$2. \rho_0 = \left( p_a + \frac{mg}{S} \right) \left( 1 - \frac{\Delta h}{H} \right). \quad 3. \frac{v_M}{v_L} = \frac{\sqrt{N} + 1}{\sqrt{N} - 1}.$$

4. Помимо перераспределения заряда между обкладками конденсатора наличие заряженной пластины приведет (в силу закона сохранения заряда) к тому, что полный заряд системы станет ненулевым и равным  $Q$ . Чтобы привести получившуюся систему к обычной схеме с нулевым полным зарядом, внесем дополнительную пластину с зарядом  $-Q$  в центр конденсатора (убедитесь, что это не приведет к дополнительному перераспределению заряда). Получится система из трех последовательно соединенных конденсаторов. Заряды на пластинах каждого из конденсаторов противоположным по знаку, при этом сумма зарядов на нижней пластине верхнего конденсатора и верхней пластине среднего конденсатора равна  $Q$ . Следовательно, заряд среднего конденсатора равен  $Q + q$ . Емкость исходного конденсатора равна  $C_0 = \epsilon_0 S/d$ , где  $S$  – площадь пластин, а емкости трех получившихся

конденсаторов равны, соответственно,

$$C_1 = \epsilon_0 \frac{S}{a}, \quad C_2 = \epsilon_0 \frac{S}{(d/2) - a}, \quad C_3 = \epsilon_0 \frac{S}{d/2}.$$

Запишем условие равенства напряжений между внешними пластинами до и после вставки заряженных пластин (эти напряжения в обоих случаях равны ЭДС батареи):

$$\frac{q_0}{C_0} = \frac{q}{C_1} + \frac{Q+q}{C_2} + \frac{q}{C_3}.$$

Окончательно получим

$$q = q_0 - Q \left( \frac{1}{2} - \frac{a}{d} \right).$$

Второй (заключительный) этап

8 класс

1.  $\frac{v_a}{v_b} = 9$ .    2.  $t_2 = t_1 \frac{c(T - T_0)}{\lambda + c(T - T_0)} = 40$  мин.

3.  $M = \sqrt{m_1 m_2}$ .

4. Горизонтальные участки графика соответствуют случаям, когда уровень жидкости находится ниже нижнего груза, между грузами и выше верхнего груза, а наклонные участки соответствуют частичному погружению нижнего и верхнего грузов. Отсюда получим

$$T_2 = 2 \text{ Н}.$$

9 класс

1.  $\frac{v_a}{v_b} = 4$ .    2.  $F = Mg \frac{R-r}{2\sqrt{Rr}}$ .

3.  $\frac{Q_A}{Q_B} = \frac{4}{9}$  (токи, текущие через резисторы A и B, относятся как 2:3).

4. Из соображений размерности выражение для s в зависимости от времени t, ускорения свободного падения g и проекций ускорения ракеты a<sub>x</sub> и a<sub>y</sub> должно иметь вид

$$s = t^2 \cdot g \cdot f \left( \frac{a_x}{g}, \frac{a_y}{g} \right),$$

где f – некоторая безразмерная функция. Отсюда получим

$$\frac{s_2}{s_1} = \left( \frac{t_2}{t_1} \right)^2 = 4, \text{ и } s_2 = 4s_1.$$

5.  $v = u \sqrt{\frac{2M(M+m)}{M+2m}}$ .

10 класс

1.  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2l}{g(t_1^2 - t_2^2)}$ .    2.  $T_{\text{иск}} = \frac{T_1}{1 - \frac{p_0}{p_1} \left( \frac{T_1}{T_0} - \frac{T_1}{T} \right)}$ .

3. Запишем законы сохранения энергии и импульса для начального момента и момента наибольшего сближения, когда скорости обеих бу-

синок одинаковы:

$$\frac{mv^{*2}}{2} = k \frac{q^2}{l} + \frac{(m+M)u^2}{2}, \quad mv^* = (m+M)u.$$

Отсюда находим

$$v^* = \sqrt{2k \frac{q^2}{l} \frac{m+M}{Mm}}.$$

Теперь запишем законы сохранения энергии и импульса в момент, когда бусинки вновь удалятся на большое расстояние:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mu_1^2}{2}, \quad mv = mv_1 + Mu_1,$$

откуда получим относительно u<sub>1</sub> квадратное уравнение. Первое решение u<sub>1</sub> =  $\frac{2mv}{M+m}$  соответству-

ет случаю, когда нижняя бусинка не догонит верхнюю, т.е. случаю б). Второе решение u<sub>1</sub> = 0 соответствует случаю, когда нижняя бусинка обгонит верхнюю, т.е. случаю а).

4.  $Q = \frac{P^2}{2m(\mu g)^2}$ .

5. При лобовом упругом ударе тел одинаковой массы происходит обмен скоростями между телами. Поскольку бусинки маленькие, такой обмен скоростями можно рассматривать как пролет одной бусинки сквозь другую. Очевидно, что искомое время будет равно времени, в течение которого одиночная бусинка, отпущенная из верхней точки, пролетела бы путь от половины высоты до пола и затем вверх в исходную точку. Это время равно

$$t = \sqrt{\frac{H}{g}} (\sqrt{8} + 1).$$

11 класс

1.  $\frac{Q'_A}{Q'_B} = \frac{1}{k}$ .    2.  $\mu_{\min} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

3.  $\omega = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \frac{v}{R}$ , откуда следуют заранее очевидные результаты:  $\omega = 0$  при  $k_1 = k_2$  или при  $v = 0$ ,  $\omega = \frac{v}{R}$  при  $k_1 \gg k_2$ ,  $\omega = -\frac{v}{R}$  при  $k_2 \gg k_1$ .

4. При колебаниях маятника в электрическом поле с напряженностью E его равновесное состояние соответствует углу отклонения от вертикали  $\alpha$  такому, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{QE}{mg},$$

а максимальное отклонение равно

$$\alpha_0 = 2\alpha.$$

Нетрудно показать, что максимальные отклонения маятника после n-го и (n + 1)-го переключе-

ний поля связаны соотношением

$$|\alpha_{n+1}| = |\alpha_n| + 2\alpha.$$

Значит, после девяти переключений

$$|\alpha_9| = |\alpha_0| + 9 \cdot 2\alpha = 20\alpha,$$

откуда находим

$$\alpha = \frac{1}{20} \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{120}.$$

Тогда для напряженности электрического поля получим

$$E = \frac{mg}{Q} \operatorname{tg} \alpha \approx \frac{mg}{Q} \alpha = \frac{\pi}{120} \frac{mg}{Q} = 2,6 \cdot 10^7 \text{ В/м}.$$

5. Ускорение свободного падения  $g$  на поверхности планеты определяется ее радиусом  $R$  и плотностью  $\rho$ :

$$g = G \frac{M}{R^2} = G \frac{(4/3)\pi R^3 \rho}{R^2} = \frac{4}{3} \pi G R \rho.$$

Значит, для всех планет с плотностью, равной плотности Земли, можно записать

$$\frac{g}{g_3} = \frac{R}{R_3}.$$

Чтобы мяч двигался по круговой орбите у поверхности планеты, его скорость должна равняться первой космической скорости:

$$v = \sqrt{gR}.$$

Тогда найдем

$$R = \sqrt{R_3 \frac{v^2}{g_3}}.$$

Подставим  $R_3 \approx 6400 \text{ км}$ ,  $g_3 \approx 10 \text{ м/с}^2$ ,  $v \approx 50 \text{ м/с}$  и получим

$$R \approx 40 \text{ км}.$$

6. Конструкция, состоящая из шприца и груза внутри, оказалась легче воды, т.е. ее масса меньше массы вытесняемой ею воды. Поэтому в первом эксперименте шприц всплывает к поверхности воды и поднимается при доливании воды в сосуд. При этом шприц в течение всего эксперимента находится в одних и тех же условиях — давление воды в области отверстия внизу шприца постоянно.

В начале второго эксперимента шприц также плавает у поверхности воды, а нить не натянута. Таким образом, шприц находится в тех же условиях, что и в первом эксперименте, и тоже движется вверх вместе с уровнем воды при ее добавлении. При дальнейшем добавлении воды нить натягивается, и шприц удерживается тяжелым нижним грузом на постоянной высоте. Однако при этом уровень воды над шприцем, а вместе с ним и давление воды вблизи отверстия внизу шприца увеличиваются по мере добавления воды.

Поэтому увеличивается и давление воздуха внутри шприца, а следовательно, объем, занимаемый воздухом, уменьшается (вода проникает внутрь шприца). Таким образом, количество вытесняемой шприцем воды уменьшается, а значит, уменьшается и сила Архимеда, действующая на шприц. При некотором уровне воды сила Архимеда становится меньше силы тяжести, действующей на шприц с грузом внутри, и шприц тонет. Заметим, что в процессе опускания шприца на дно давление воды вблизи его отверстия возрастает с глубиной, сила Архимеда соответственно уменьшается. Поэтому с глубиной увеличивается результирующая сила, действующая на шприц и направленная вниз, и в результате шприц довольно быстро опускается на дно.

# КВАНТ

12+

**НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ**

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,  
А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов,  
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

**НОМЕР ОФОРМИЛИ**  
**М.Н.Головина, Д.Н.Гришукова,  
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

**ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ  
РЕДАКТОР**

**Е.В.Морозова**

**КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА**

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован  
в Комитете РФ по печати.**

**Рег. св-во ПИ №ФС77-54256**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,  
«Квант»**

**Тел.: (495) 930-56-48**

**E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru**

**Отпечатано**

**в соответствии с предоставленными  
материалами  
в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8»**

**Телефон: (495) 363-48-86,**

**http://capitalpress.ru**

## На кубок МИРА

В сентябре 2017 года в Грузии прошли соревнования на кубок мира по шахматам, в которых приняли участие практически все ведущие гроссмейстеры современности (из первой тридцатки мирового рейтинга в Тбилиси не приехали только двое). Обладателем кубка мира стал армянский гроссмейстер Левон Аронян, переигравший в финале на тай-брейке Динь Лижэня из Китая.

В сегодняшнем выпуске мы представим наиболее интересные партии этого турнира

### Л.Аронян – Динь Лижэнь Финал, 1 партия тай-брейка

Финальные партии, сыгранные с классическим контролем времени, не выявили победителя, поэтому судьбу кубка решали быстрые шахматы.

1. c4 ♖ f6 2. ♘ f3 e6 3. ♘ c3 d5 4. d4 c6 5. ♘ g5 h6 6. ♘ f6 ♜ f6 7. ♜ b3 ♘ d7 8. e4 de 9. ♘ e4 ♜ f4 10. ♘ d3 e5 11. 0-0 ♘ e7 12. ♚ ae1 ed. Белые жертвуют пешку, чтобы с темпом начать атаку на королевском фланге.



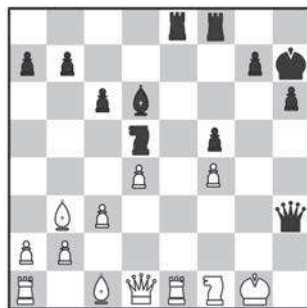
13. ♘ b1 0-0 14. ♘ g3 ♘ d8 15. ♜ d3 g6 16. h4! ♘ f6 17. h5 g5? Необходимо было пытаться наладить контригру: 17... ♘ a5 18. ♘ e5 ♘ a5 19. ♘ g6! ♜ d2 20. ♘ e7+ ♘ g7 21. ♜ b3 ♜ f4 22. ♚ d1? (В позициях такого типа, как правило, необходимо искать атакующие ходы, невзи-

рая на жертвы. К победе вело немедленное 22. ♘ gf5+ ♜ h8 23. g3 ♜ c7 24. ♜ d3! ♘ d1 25. ♜ d4) 22... ♘ b6? Решающая ошибка: слон теряет контроль над полем e1 (к упорной борьбе вело 22... c5 23. ♘ gf5+ ♜ h8 24. g3 ♜ c7 25. ♘ c8 ♚ c8 26. ♘ h6 g4!) 23. ♘ gf5+ ♘ f5 24. ♘ f5+ ♜ h8 25. g3 ♜ g4?! (усложнить задачу белым можно было с помощью 25... ♜ c7 26. ♘ h6 ♚ ae8) 26. ♘ h6 ♜ h5. Открытая линия h – залог победы для белых. 27. ♚ g2 d3 28. ♜ c3 ♘ g7 29. ♘ f5+ ♘ g6 30. ♚ h1 с выигрышем ферзя. Белые выиграли.

### М.Карлсен – Бу Сянжи 1/16 финала, 1 партия

Чемпион мира, уверенно пройдя два первых раунда, неожиданно проиграл белыми в первой партии 1/16 финала и не смог отыграться черными.

1. e4 e5 2. ♘ c4 ♘ f6 3. d3 ♘ c6 4. ♘ f3 ♘ e7 5. 0-0-0-0. ♘ b3 d6 7. c3 ♘ e6 8. ♚ e1 ♜ d7 9. ♘ bd2 ♚ ab8 10. ♘ c2 d5. Подобная идея жертвы пешки впервые встретилась почти сто лет назад в партии Капабланка – Маршал, и впоследствии именем Маршала был назван один из вариантов Испанской партии. 11. h3 h6 12. ed ♘ d5 13. ♘ e5 ♘ e5 14. ♚ e5 ♘ d6 15. ♚ e1 ♘ h3!? 16. gh ♜ h3 17. ♘ f1 ♚ be8 18. d4 f5 19. ♘ b3 c6 20. f4! ♜ h7.

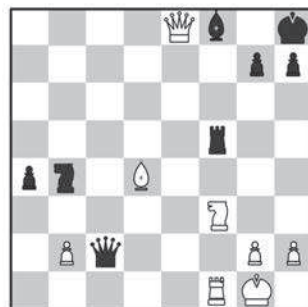


Критическая позиция. Белым необходимо найти ход 21. ♚ e2, после которого 21... ♘ f4 22. ♚ h2

ведет к размену ферзей, а 21... ♘ f4 – к массовому размену фигур. 22. ♚ e8 ♚ e8 23. ♘ d5 ♘ c1 24. ♘ g2! ♘ e3+ 25. ♘ e3 ♜ e3 с небольшим преимуществом белых. В партии белые поторопились с разменами, вероятно недооценив атакующие возможности черных на королевском фланге. 21. ♘ d5?! cd 22. ♚ e3?! ♚ e3 23. ♘ e3 g5! 24. ♚ f2 gf 25. ♜ f3 fe 26. ♘ e3 ♜ h2 27. ♚ f1 ♚ g8 28. ♜ f5+ ♚ g6 29. ♚ e1 h5? (к победе вело 29... ♜ g7 – и белые не могут поставить вечный шах: 30. ♜ d7+ ♜ h8 31. ♜ d8+ ♜ h7 32. ♜ d7+ ♚ g7 33. ♜ f5+ ♜ h8 34. ♜ c8+ ♚ g8) 30. ♚ d1? (значительно усложняло задачу черным 30. ♚ d1!, создавая возможность для побега на ферзевый фланг королем) 30... ♜ h6 31. ♘ c2 h4 32. ♘ e1 h3 33. ♘ f3 ♜ g2 34. ♘ e1 ♜ g4+ 35. ♜ g4 ♚ g4 36. ♘ f3 ♚ g1+. Изящный удар. После 37. ♘ g1 h2 движение пешки остановить невозможно. Выигрыш черных.

Симпатичный тактический удар нашла в своей партии первого круга действующая чемпионка мира Хоу Ифань.

### Хоу Ифань – К. Перун 1/64 финала, 2 партия



37. g4! ♚ f4 38. ♘ g7+! ♜ g7 39. ♜ e5+ ♚ f6 40. ♘ d4 (40.g5? ♜ c5+) 40... ♜ g6 41. g5 ♘ c5 42. ♚ h1! Выигрыш белых.

А. Русанов



Индекс 90964

## ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ РАЗРЯД И СВЕТОМУЗЫКА

С именем **Николы Тесла** связано немало изобретений и мистических историй. Так, созданный им трансформатор способен не только передавать электрическую энергию без проводов, но и создавать красивое шоу.

(Подробнее – на с. 31 внутри журнала)

*Уроки с физикой*

