

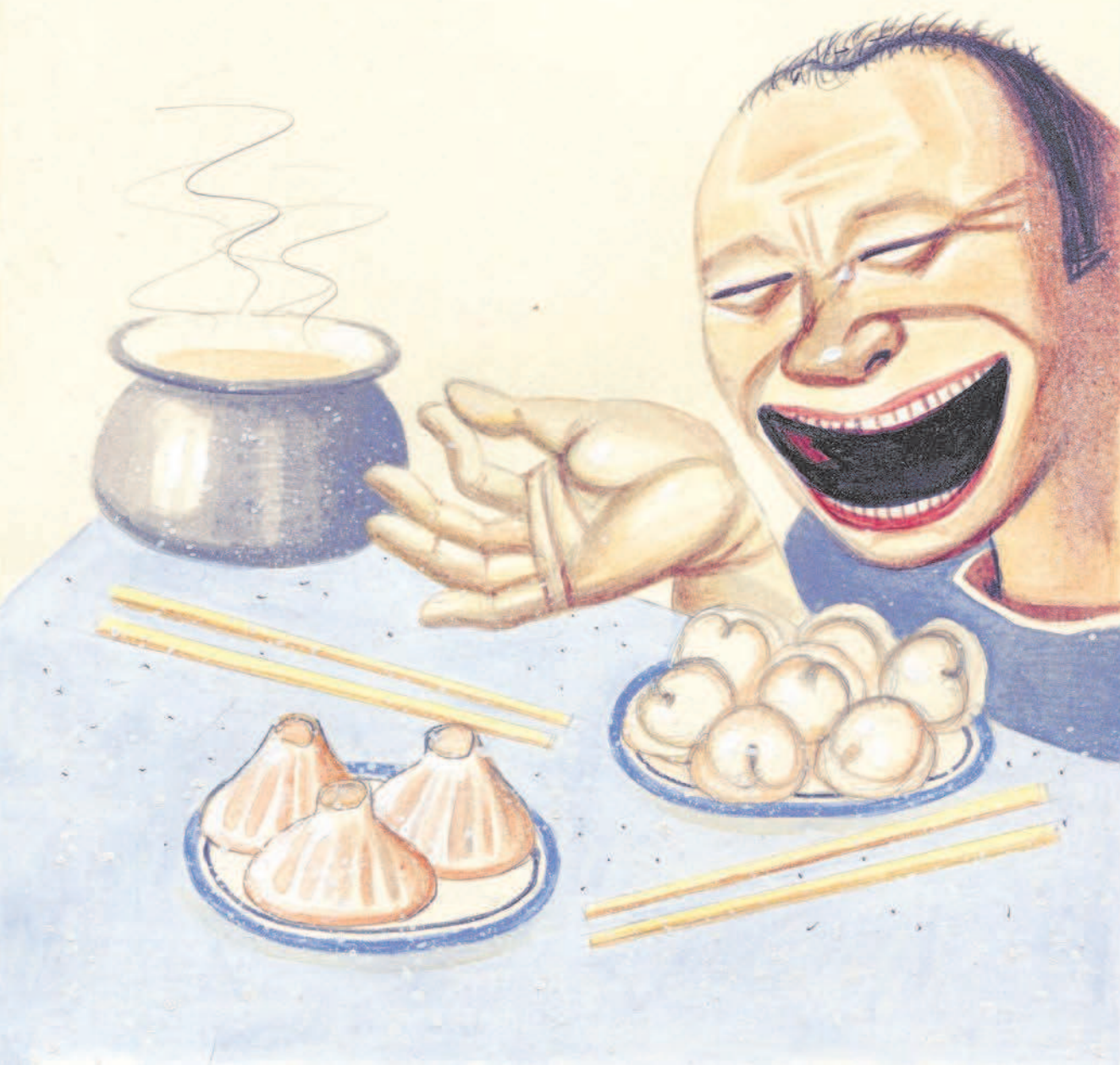
СЕНТЯБРЬ

ISSN 0130-2221

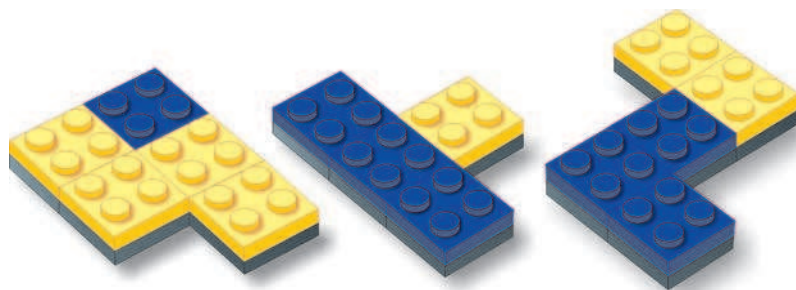
2017 · № 9

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



ЛЕГОМИНО



Обычно, когда речь идет о головоломках с полимино – составленными из единичных квадратиков фигурками, из которых нужно сложить заданную форму или которые нужно поместить в рамку определенной формы, предполагается, что детали-полимино можно поворачивать и переворачивать, как угодно. На этот раз все не совсем так.

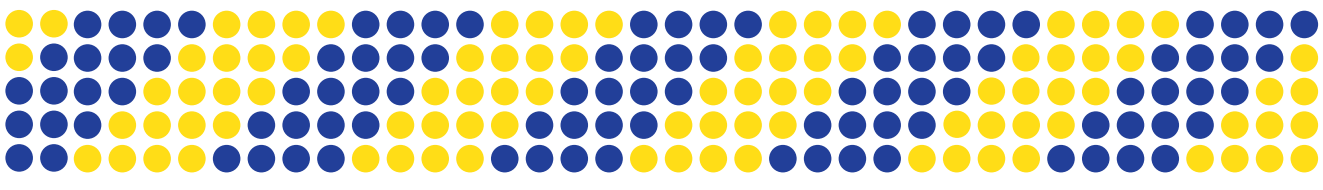
Изобретатель Петер Галь (Péter Gál) предлагает использовать три данные односторонние полимино и выполнить следующие задания:

- 1 сложить фигуру с поворотной симметрией;
- 2 сложить фигуру с зеркальной симметрией;
- 3 сложить полимино так, чтобы желтая и синяя части были равны;
- 4 сложить полимино так, чтобы желтая и синяя части получились симметричными.

При этом полимино можно поворачивать, но нельзя накладывать друг на друга и переворачивать. Автор головоломки подчеркивает это, изготовив ее из конструктора Лего.

Желаем удачи!

Е.Епифанов



КВАНТ СЕНТЯБРЬ 2017 №9

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук
Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН
Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.Л.Семенов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Н.Н.Андреев, А.Я.Белов,
Ю.М.Брук, А.А.Варламов, С.Д.Варламов,
А.Н.Виленин, В.И.Голубев,
Н.П.Долбилин, С.А.Дориченко,
В.Н.Дубровский, А.А.Заславский,
П.А.Кожевников (заместитель главного редактора),
С.П.Коновалов, А.А.Леонович,
Ю.П.Лысов, В.В.Произолов, В.Ю.Протасов,
А.М.Райгородский, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан (заместитель главного редактора)**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,
В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев,
И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов, П.Л.Капица,
В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев,
В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант,
Я.Е.Шнайдер**

- 2 Варить, парить или полоскать? *А.Варламов, Чжэнг Чжу, Ян Чен*
10 Теорема Шаля в трех лицах. *С.Кузнецов*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 15 Задачи М2478–М2481, Ф2485–Ф2488
17 Решения задач М2466–М2469, Ф2473–Ф2476

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 22 Задачи
23 Почти правильные многоугольники на клетчатой бумаге. *А.Карпов*

КОНКУРС ИМЕНИ А. П. САВИНА

- 26 Задачи 1–4

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 27 Что такое геликоид и как раскручивается юла. *С.Дворянинов*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 31 Размышляем, решая задачу. *М.Бондаров*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Трисекторы (окончание)

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 38 Изогональное сопряжение и pedalные треугольники. *Д.Прокопенко*

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 45 ЕГЭ по физике
53 Олимпиада «Покори Воробьевы горы!»
Математика
55 Ответы, указания, решения

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «Варить, парить или полоскать?»*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

Варить, парить или полоскать?

А.ВАРЛАМОВ, ЧЖЭНГ ЧЖУ, ЯН ЧЕН

Одному нравится арбуз, другому – свиной хрящик.

М.Е.Салтыков-Щедрин. За рубежом

СТРЕМИТЕЛЬНО ПРОИСХОДЯЩАЯ В мире глобализация ярко проявляется в повсеместной доступности блюд самых разных национальных кухонь. Конечно, как правило, это лишь некоторое подобие истинных шедевров кулинарного искусства: помимо мастерства повара, для создания последних нужны и соответствующие продукты. Как говорит наш знакомый итальянский гастрономический критик Серджио Грассо, «еда к человеку не ходит, это человек должен идти к еде».

Среди множества «гостей» европейского стола можно назвать двух «родственников» хорошо знакомых нампельменей – это манты и хинкали. Манты традиционно относятся к азиатской кухне, в Сибири они считаются национальным блюдом. С китайского языка слово «маньтоу», так называют их китайцы, переводится как «начиненная голова», поскольку манты по размеру гораздо большепельменей. Хинкали же – неременный атрибут кавказского стола. И те, и другие делаются из тонкого теста и заполняются мясной начинкой: манты – бараниной, а хинкали (как правило) – говядиной или свиной, приправленными различными специями и зеленью. Отличаются они и формой – это хорошо видно на фотографиях, приведенных на рисунках 1 и 2. Грузинские хозяйки традиционно лепят хинкали таким образом, чтобы на верхушке получился небольшой «хвостик» из теста – так их легче держать. Обычно после съедания хинкали этот хвостик выбрасывается.



Рис. 1. Хинкали



Рис. 2. Манты

Важнейшим различием между мантами и хинкали является способ их тепловой обработки. Если хинкали привычно варят в кипящей воде или жарят, то манты парят – готовят при тех же 100 °С, но в атмосфере насыщенного пара.

Еще один заморский гость – это «горячий горшок», популярная разновидность китайской кухни, до сих пор почти неизвестная в западном мире. Созданный в Монголии более тысячи лет назад и завоевавший популярность во времена династии Цин¹ по всему Китаю, «горячий горшок» имеет долгую историю. В пекинском варианте горячего горшка особое внимание

Авторы выражают глубокую благодарность С.Л.Парновскому за неоднократные обсуждения и ценные советы.

¹ Династия Цин (1644–1912) – последняя из императорских династий, правившая Китаем.

уделяется суповой базе и соусам. Чунцинский горячий горшок освещает пряными специями «ма ла» (麻辣, онемение и пряность), а Чаошанский славится мгновенным приготовлением в нем тончайших ломтиков баранины или говядины (涮羊肉, полоскание баранины).

В горячем горшке можно готовить почти все: мясные или рыбные тефтельки, крабовое мясо, овощи... Их кладут в стоящий посредине стола горшок, в котором уже кипит тщательно подготовленная суповая основа (рис.3). Затем остается только ждать, пока блюдо будет готово. Весь



Рис. 3. Приготовление еды в «горячем горшке»

процесс приготовления занимает десяток минут, или около того, и называется по-китайски «чжу» (煮, кипение). Мясные тефтельки и овощи – это первое, что нужно класть в горшок, и последнее, что следует доставать с его дна. Часто используется упомянутая выше процедура «шуан» (涮) – полоскание или мгновенное кипение. Тончайше нарезанные (примерно 1 мм толщиной) ломтики говядины или баранины берут длинными палочками и погружают в кипящий суп. Поразительно, что всего за 10 секунд их цвет изменяется от розового до белого или серого, указывая, что лакомство готово к употреблению. При этом ломтик даже не обязательно выпускать из палочек: вкусный и ароматный, он уже готов к употреблению и его можно сразу же направлять в рот.

Сегодня кулинария стала не только гигантской индустрией, не только искусством, но и обширной областью науки. Здесь пересекаются биология, химия, физика, экономика, этика и многое другое. Задачи этой науки бесконечны. Все время появляются новые и новые методы приготовления пищи. Мы даже не пытаемся их перечислить – ни о жарке мяса, ни о запекании индейки, ни о приготовлении шашлыка на углях здесь речь не пойдет. Давайте поговорим о физических процессах, лежащих в основе приготовления описанных выше яств, – о физике варки и готовки на пару.

Варка

В чем же заключается процесс варки? Говоря повседневным языком – сырое мясо должно стать вареным. А что это означает по-научному?

Мясо состоит в основном из сложных органических макромолекул, называемых *протеинами* (в зависимости от типа мяса они могут различаться). В сыром мясе их длинные цепочки располагаются в виде клубков (рис.4). В процессе тепловой обработки температура возрастает, и эти цепочки распрямляются, а по достижении определенной для каждого типа мяса температуры они, как говорят, компактифицируются в некоторое подобие «ковров». Такой процесс называется *денатурацией протеинов*. Он происходит при относительно низких температурах: для мяса это 55–80 °С, для рыбы еще меньше. В любом случае каждый, кто хоть раз в жизни ел суп харчо, может быть уверен, что кипения при 100 °С оказывается достаточно для полной компактификации протеинов в мясе.

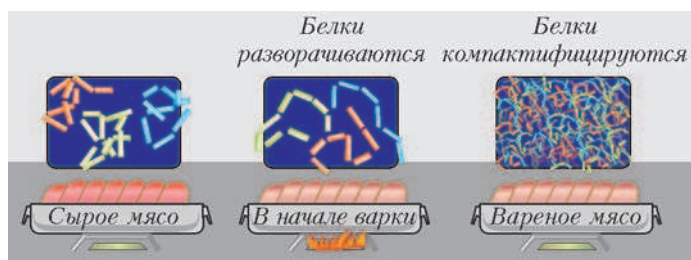


Рис. 4. Схематическое изображение процесса денатурации протеинов (белков) при варке мяса

С точки зрения физики, состояния протеина в сыром мясе и в вареном отличаются своей энергией. Для того чтобы перейти из одного состояния в другое, следует перепрыгнуть через энергетический барьер (рис.5). При комнатной температуре этот барьер высок. Повышая температуру в процессе варки, мы увеличиваем энергию протеина, «приподнимаем» точку, соответствующую его начальному состоянию. Достигнув вершины «холма», протеин переваливается в новое состояние – денатурированного протеина. Мясо сварилось! Это и происходит в кастрюле с варящимся бульоном.² Таким образом, первая задача повара при варке мяса (с точки зрения физики) заключается в по-

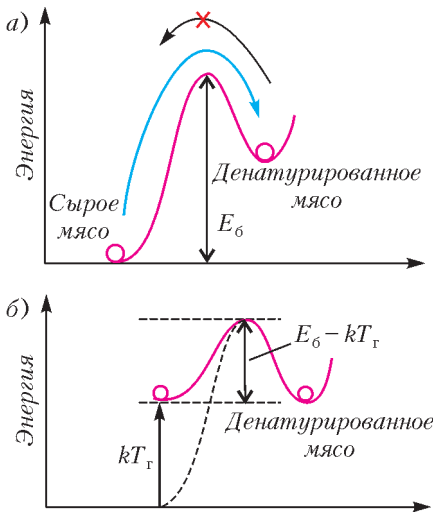


Рис. 5. Схематическое изображение процесса преодоления протеином энергетического барьера E_6 : а) при комнатной температуре, б) при температуре готовки T_r

² Отметим, что в последние годы в моду входит приготовление мяса при относительно низких температурах. При этом мясо помещают в печь с температурой несколько ниже его температуры денатурации и долго (много часов, может быть даже сутки) ждут. У каждой отдельной макромолекулы не хватает энергии самостоятельно перепрыгнуть через барьер, однако они изредка могут занимать ее у окружающих и денатурироваться. Так, постепенно, все мясо переходит в специфическое денатурированное состояние.

вышении температуры по всему объему куска как минимум до температуры денатурации.

В свете вышесказанного, сформулируем простейшую модель процесса варки мяса. Пусть сферически симметричный однородный кусок мяса радиусом R с начальной температурой T_0 и коэффициентом теплопроводности κ помещен в окружающую среду, в которой поддерживается фиксированная температура T_c . Какое время τ потребуется на то, чтобы температура в центре шара достигла температуры денатурации T_d ?

В математической физике процесс передачи тепла внутри шара (рис.6) описыва-

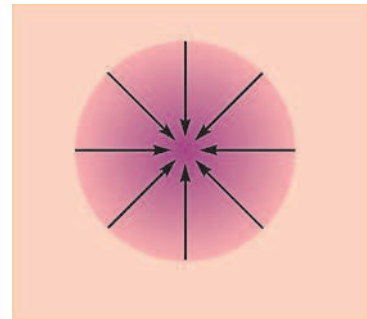


Рис.6. Распространение тепла в сферически симметричном куске мяса

ется сложным дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right), \quad (*)$$

где $T(r,t)$ есть искомая температура в любой точке шара с координатой r в момент времени t , ρ – плотность мяса, c – его удельная теплоемкость. К этому нужно добавить условие, что на поверхности шара температура в любой момент времени остается постоянной и равной 100°C : ведь вода в кастрюле кипит. На языке математической физики это выглядит так:

$$T(r = R, \forall t) = 100^\circ\text{C}.$$

Также нужно помнить, что мясо мы брали из холодильника, поэтому в момент его опускания в воду, по всему его объему температура была 4°C :

$$T(\forall r, t = 0) = 4^\circ\text{C}.$$

Такие задачи математики давно научились решать, и, зная численные значения указанных характеристик мяса, они точно смогут написать нам рецепт приготовления бульона. Тем не менее, давайте попробуем разобраться с задачей сами, используя метод анализа размерностей. Температура денатурации мяса по порядку величины совпадает с температурой кипения воды (отличается от нее на 20–25%). Поэтому мы будем считать, что время «доставки» необходимой температуры в центр шара зависит только от его материальных параметров: коэффициента теплопроводности, плотности, удельной теплоемкости и от радиуса. Поэтому будем искать зависимость необходимого времени от размера шара в виде

$$\tau \sim \kappa^\alpha \rho^\beta c^\gamma R^\delta.$$

На языке размерностей эту зависимость можно записать так:

$$[\tau] = [\kappa]^\alpha [\rho]^\beta [c]^\gamma [R]^\delta,$$

где

$$[\kappa] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^3 \cdot \text{К}}, \quad [\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad [c] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}},$$

$$[R] = \text{м}, \quad [\tau] = \text{с}.$$

Подставляя все размерности в уравнение для $[\tau]$ и сравнивая их в правой и левых частях, находим

$$\alpha = -1, \quad \beta = \gamma = 1, \quad \delta = 2.$$

Откуда заключаем, что

$$\tau = C_0 \frac{\rho c}{\kappa} R^2,$$

где C_0 есть неизвестная константа порядка единицы. Подставляя для мяса величины $\kappa = 0,45 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $\rho = 1,1 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$, $c = 2,8 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, находим, что, например, полукилограммовый кусок мяса ($m = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = 0,5 \text{ кг}$) должен вариться порядка полутора часов. Оценка – несколько завышенная, поскольку мы считали температуру денатурации равной температуре кипения, но по порядку величины верная.

Возвращаясь к хинкали, диаметр которых порядка 4 см, находим, что варить их

нужно десяток минут, а мелкие пельмени – всего несколько минут, что и соответствует нашему жизненному опыту.

Пáрение

Теперь перейдем к обсуждению приготовления мантов. Здесь наш условный шар помещается в атмосферу стоградусного насыщенного пара. Давление в пароварке равно атмосферному. При условии что в ее объем обеспечивается необходимый доступ пара, наш мант или китайский пельмень с тонкой оболочкой, сделанной из рисового теста (рис. 7), формально оказываются в тех же условиях, что и хинкаль или пельмень в кипящей воде.



Рис. 7. Китайские пельмени из рисовой муки, сваренные на пару, подаются на стол в традиционном деревянном сосуде

Сам мант – только что из холодильника, а вокруг – среда с температурой 100°C . Поэтому, с точки зрения математика, распространение тепла в нем описывается тем же уравнением (*) с его граничными условиями. А тогда и распределение температуры внутри манта в любой момент времени будет таким же, как у хинкаля того же размера, и приготовится он примерно за то же время. Однако пар – не вода, как же обеспечить на поверхности манта температуру в 100°C ?

В случае кипячения хинкаля в воде это было несложно: хотя после его помещения в кипящую воду кипение вокруг него временно прекращается, но благодаря

большой теплоемкости воды, ее достаточно хорошей теплопроводности, конвекции и постоянно подводимому к кастрюле теплу, вода очень быстро вновь закипает, что и означает восстановление у поверхности хинкаля температуры в $100\text{ }^{\circ}\text{C}$.

В случае же манта, помещенного в атмосферу насыщенного пара, все не так просто. Здесь теплопередача носит совершенно иной характер. В первый момент молекулы пара вблизи еще холодной поверхности манта оказываются в локальном состоянии сильно пересыщенного пара. Они начинают конденсироваться на этой поверхности, повышая при этом ее температуру. Предполагая, что скачок температур происходит в очень узкой области вблизи поверхности, мы возвращаемся к тому же уравнению (*). Это означает, что распределение температуры внутри манта должно меняться со временем так же, как и в случае хинкаля в кипящей воде. Следовательно, и поток тепла

$$q(r,t) = -\kappa \frac{\partial T(r,t)}{\partial r}$$

на его поверхности должен быть тем же.

Основным механизмом распространения тепла в среде является теплопроводность. Если два тела с разными температурами находятся в контакте, то тепло перетекает от тела с более высокой температурой к телу с более низкой температурой ($T_1 < T_2$). Мерой теплопроводности служит плотность теплового потока, которая представляет собой то количество теплоты ΔQ , которое протекает через единицу площади (A) в единицу времени (Δt) в направлении изменения температуры: $q = \Delta Q / (A \Delta t)$. Эксперимент показывает, что при небольших разностях температур величина потока тепла оказывается пропорциональным разности температур $\Delta T = T_2 - T_1$ на образце и обратно пропорциональным его длине Δx :

$$q = \frac{\Delta Q}{A \Delta t} = \kappa \frac{\Delta T}{\Delta x}.$$

Коэффициент κ нам уже встречался выше, он называется коэффициентом теплопроводности и входит в уравнение теплопроводности (*). Его величина зависит только от типа вещества и говорит о том, насколько хорошо вещество проводит тепло. Строго говоря, плотность теплового потока является вектором, направленным, в случае изотропной среды,

против вектора изменения (градиента) температуры: $\vec{q} = -\kappa \nabla T$. Это уравнение называется законом Фурье.

Но теперь этот поток определяется не теплопроводностью воды, а количеством молекул пара, сающихся на 1 см^2 поверхности за 1 с:

$$q(R,t) = Lm(t) = L \frac{M}{N_A} N(t),$$

где L – удельная теплота испарения, $N(t)$ – число сконденсировавшихся за прошедшую секунду молекул, $m(t)$ – их масса, N_A – число Авогадро, M – молярная масса воды. Таким образом, число молекул, «приземляющихся» на одном квадратном сантиметре манта в одну секунду, должно быть равно

$$N(t) = N_A \frac{\kappa}{LM} \left(\frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right)_{r=R}.$$

Прекрасно! Математики это число находят путем решения сложного уравнения, манти же сам «знает», какой поток тепла ему нужен, чтобы поддерживать на поверхности температуру в $100\text{ }^{\circ}\text{C}$. Осталось лишь понять, откуда молекулы пара узнают, скольким из них следует сконденсироваться в данную секунду на квадратном сантиметре поверхности манта.

Давайте предположим, что в некоторый момент конденсируется не $N(t)$, а $N(t) + \delta N$ молекул. Первые $N(t)$ из них гостеприимно поглощаются манти – ведь они необходимы, чтобы содержать в гармонии стоградусную поверхность и еще холодную внутреннюю часть. Оставшиеся δN являются персонами «non grata» – их здесь не ждали, теплопроводность манта не позволяет пропустить их внутрь. Что же им остается делать? Улететь обратно? Слишком хлопотно, поэтому они остаются на поверхности, локально повышая ее температуру (рис.8). Точка, соответствующая локальному равновесию пара и воды на выбранном квадратном сантиметре, передвигается по линии сосуществования пара и воды вверх. При этом давление остается прежним, равным 1 атм. Следовательно, над выбранным квадратным сантиметром пар локально перестает быть

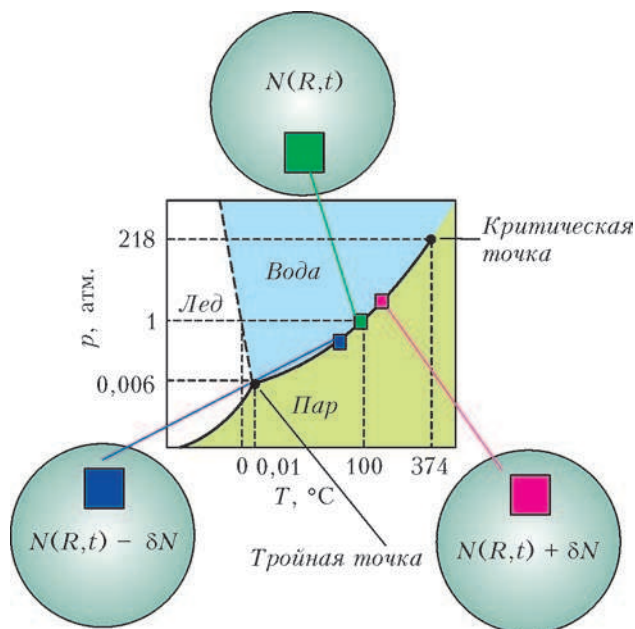


Рис. 8. Схематическое изображение процесса передачи тепла манту или китайскому пельменю при приготовлении в атмосфере насыщенного пара

насыщенным. Как следствие, через секунду здесь сконденсируются уже не необходимые $N(t+1c)$, а несколько меньшее число молекул. При этом мант продолжает «требовать» положенное ему количество теплоты. В результате температура поверхности, повысившаяся при локальном перегреве, пойдет вниз. Точно такой же процесс возврата температуры к $100\text{ }^\circ\text{C}$ работает и при случайном недостатке конденсирующихся в секунду молекул $N(t) - \Delta N$. Подобный механизм возвращения системы в заданный режим при случайных отклонениях называется отрицательной обратной связью.

О временах приготовления

В начале статьи мы рассказали о горячем горшке и о различных способах приготовления мяса в нем. Загадочным остается вопрос: почему в десятки раз отличаются времена приготовления, например, не говяжьих и бараньих фрикаделек, а тонкого ломтика и фрикадельки, изготовленной из того же мяса? Почему маслянистый суп **хонгоу** в чунцинском горшочке закипает гораздо раньше водянистого супа **циндан** в

его чаошанском и пекинском вариантах? Постараемся ответить на эти вопросы.

Оба способа приготовления в горячем горшке – «шуан» и «чжу» – в действительности являются одним и тем же термическим процессом, который мы уже обсудили выше. В обоих случаях конвекция окружающей жидкости и ее непрерывный нагрев гарантируют постоянную температуру, равную $100\text{ }^\circ\text{C}$, на поверхности изначально холодных фрикадельки или ломтика мяса. В результате поток тепла распространяется от поверхности внутрь, повышая температуру на своем пути и приводя к денатурации протеинов.

Откуда же возникает столь огромное различие во временах приготовления фрикадельки и тонкой мясной ленточки? Со способом приготовления «шуан» все ясно: о распространении тепла в шаре, который слу-

жит моделью фрикадельки, мы уже говорили выше, обсуждая варку хинкаля, и можем воспользоваться сделанными там оценками. Процесс же «чжу» требует отдельного разговора.

Рассмотрим полупространство $x > 0$, температура которого постоянна и равна T_1 . Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ температура на всей плоскости $x = 0$ скачком повышается до T_2 и в дальнейшем поддерживается внешними факторами (нагревом, конвекцией). В такой геометрии также можно решить уравнение теплопроводности (*) и найти, как

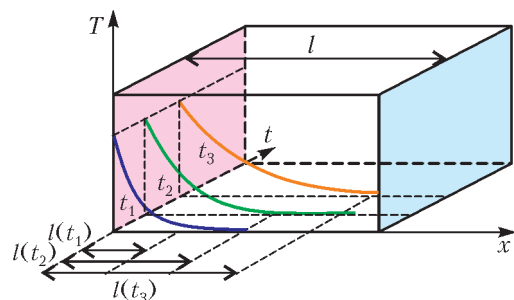


Рис. 9. Изменение температуры в полупространстве в зависимости от времени

температура изменяется в рассматриваемом полупространстве со временем (рис.9). Из рисунка видно, что тепло проникает в среду постепенно. Для описания закона этого проникновения во времени введем характерную длину проникновения $l(t)$, в формуле для потока тепла $q = \kappa \frac{\Delta T}{\Delta x}$ заменим толщину Δx на $l(t)$, а также примем $\Delta Q = mc\Delta T$, где $m = \rho Al(t)$ – масса цилиндра с основанием площади A :

$$\frac{c\rho Al(t)\Delta T}{At} = \kappa \frac{\Delta T}{l(t)}.$$

Отсюда уже легко найти характерную длину проникновения температурного фронта в полупространство:

$$l(t) \sim \sqrt{\frac{\kappa t}{c\rho}} = \sqrt{\chi t},$$

которая называется тепловой длиной. Более аккуратное рассмотрение, основанное на решении уравнения теплопроводности, уточняет лишь численный коэффициент:

$$l(t) = \sqrt{\pi\chi t}.$$

Таким образом, мы видим, что температура проникает в среду со временем по корневому закону. Параметр $\chi = \kappa/(c\rho)$ называется коэффициентом температуропроводности и характеризует скорость изменения (выравнивания) температуры вещества в неравновесных тепловых процессах. Время готовки куска мяса с характерным размером l теперь можно записать в таком виде:

$$\tau \sim \frac{l^2}{\pi\chi}.$$

Однако вернемся к проблеме объяснения разительного расхождения между временами «полоскания» тонкого ломтика мяса и кипячения фрикадельки. Пусть масса прямоугольного ломтика $a \times b$ толщиной d совпадает с массой фрикадельки радиусом r_Φ . Процесс денатурации мяса требует, чтобы соответствующая температура T_d установилась в самых удаленных от поверхности точках. Поэтому для ломтика температурный фронт, соответствующий температуре денатурации, должен пройти

половину его толщины, $d/2$, с обеих сторон, а для фрикадельки – пройти вдоль ее радиуса r_Φ . Соответствующие времена имеют вид

$$\tau_{\text{чжу}} \sim \frac{(d/2)^2}{\pi\chi} \quad \text{и} \quad \tau_{\text{шуан}} \sim \frac{r_\Phi^2}{\pi\chi},$$

а их отношение –

$$\frac{\tau_{\text{шуан}}}{\tau_{\text{чжу}}} \sim \left(\frac{2r_\Phi}{d}\right)^2.$$

Толщина ломтика при приготовлении в горячем горшке способом «чжу» составляет всего лишь 1 мм. Принимая $a = 3$ см и $b = 15$ см, находим, что объем тонкого ломтика составляет $a \cdot b \cdot d = 4,5$ см³, т.е. его масса составляет около пяти граммов. Радиус фрикадельки той же массы оказывается около $r_\Phi = 1,0$ см. Таким образом, теоретическая величина отношения времен приготовления фрикадельки и тонкого ломтика составляет

$$\left(\frac{\tau_{\text{шуан}}}{\tau_{\text{чжу}}}\right)_{\text{теор}} \sim \left(\frac{2r_\Phi}{d}\right)^2 \sim 400.$$

В то же время типичное время приготовления мясного шарика (мы говорили раньше о пельменях) это 3–4 минуты, а ломтика – 10 секунд, что приводит к реалистичному значению этого соотношения

$$\left(\frac{\tau_{\text{шуан}}}{\tau_{\text{чжу}}}\right)_{\text{реал}} \sim 20-25.$$

Различие между оценками – в 20 раз, что довольно много. Причина такого расхождения заключается в нашем предположении о том, что все тепло, проникающее во фрикадельку или в ломтик мяса, идет на их нагревание. При этом мы забыли о тех химических процессах, которые изменяют структуру белка, а ведь они также требуют энергии и времени. Когда кусок мяса относительно большой (пусть это будет мясная кость в борще или хинкаль), то этим временем $\tau_{\text{хим}}$ можно пренебречь, что мы и делали выше. Однако при приготовлении мяса в горшке «чжу», ввиду малой толщины ломтика, процесс проникновения тепла в него происходит столь быстро, что при сравнении опытного и теоретичес-

кого значений рядом со временем проникновения тепла следует добавить и соответствующее время $\tau_{\text{хим}}$:

$$\tau'_{\text{чжу}} \sim \tau_{\text{хим}} + \frac{(d/2)^2}{\pi\chi}, \quad \tau'_{\text{шуан}} \sim \tau_{\text{хим}} + \frac{r_{\text{ф}}^2}{\pi\chi}.$$

Величины вторых слагаемых в этих формулах можно оценить, с использованием значения $\chi \sim 3 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$, как $(d/2)^2 / (\pi\chi) \sim 0,5 \text{ с}$ и $r_{\text{ф}}^2 / (\pi\chi) \sim 200 \text{ с}$. Поскольку типичное время приготовления тонкого ломтика в горячем горшке составляет 10 с, приходим к значению $\tau_{\text{хим}} \approx 10 \text{ с}$. Эта величина, конечно же, мала по сравнению с 3 мин, необходимыми для установления температуры выше точки денатурации во всем объеме фрикадельки, однако оказывается определяющей при «полоскании» ломтика мяса в горячем горшке «чжу».

О роли супа

Физические свойства супа, используемого в том или ином типе горячего горшка, также существенно определяют специфику протекающих в них процессов. Так, в чунцинском горшочке суповая основа **хонгоу** состоит в основном из тушеного с чили и китайской колочей золой масла и небольшой части воды. Напротив, обычная суповая основа **циндан** в основном состоит из воды, смешанной для создания пряного вкуса с небольшим количеством масла, соли и других приправ. Если в одинаковые горшки налить одинаковые объемы суповых основ **хонгоу** и **циндан** и поставить на огонь, то первая из них, в основном состоящая из масла, закипит раньше, чем вторая. Этот факт кажется несколько странным – ведь масло если и кипит, то при температурах значительно выше температуры кипения воды. Объяснение очень простое. Дело в том, что и в первом и во втором случаях кипит не масло, а вода, смешанная в большей или меньшей пропорции с маслом.

При этом имеются три причины, обуславливающие более быстрое закипание горшка с суповой основой **хонгоу**. Во-первых, удельная теплоемкость масла заметно меньше удельной теплоемкости

воды: $c_{\text{м}} = 2 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ и $c_{\text{в}} = 4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, и, следовательно, для повышения температуры единицы массы супа **хонгоу** от комнатной температуры до $100 \text{ }^\circ\text{C}$ требуется меньше половины количества теплоты, расходуемого при нагреве **циндан**. Во-вторых, плотность масла, как и его теплоемкость, заметно меньше этих же характеристик воды, поэтому при равных объемах масса супа **хонгоу** окажется меньшей. Это еще один фактор, ускоряющий доведение горшка с **хонгоу** до кипения. Последнее, третье, обстоятельство касается процесса потери тепла с поверхности супа при нагревании горшка. Потеря тепла в значительной степени определяется конвекцией – переносом энергии благодаря потокам нагретого вещества, которые возникают в неравномерно нагретой жидкости в результате различия в плотностях ее слоев.

Тепловой поток на поверхности качественно описывается законом охлаждения Ньютона, который утверждает, что поток пропорционален разности температур:

$$q = h\Delta T.$$

Входящий в это выражение коэффициент h называется коэффициентом теплоотдачи и показывает, насколько сильна роль конвекции. Типичные величины коэффициента теплоотдачи для кипящей воды и масла равны $h_{\text{в}} = (2,5 - 25) \cdot 10^3 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ и $h_{\text{м}} = (0,5 - 15) \cdot 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ соответственно. Такое огромное различие (на два порядка) связано с большой вязкостью и плохой теплопроводностью масла. Таким образом становится понятно, почему тепла с поверхности маслянистого **хонгоу** теряется гораздо меньше, чем с содержащего большой процент воды супа **циндан**.

* * *

Китайская кухня – одна из самых богатых и интересных в мире. Здесь едят всё, ну или почти всё. И способы приготовления еды очень разные. В этой статье мы заглянули лишь в маленькое окошко этого огромного мира.

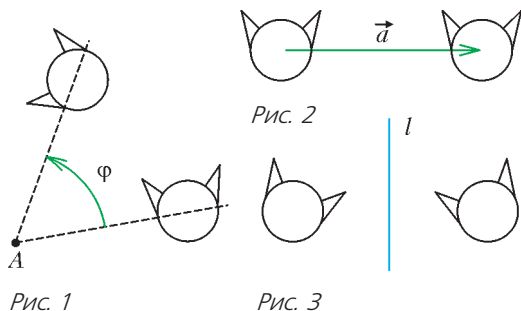
Маньмань чи (кушайте медленно)!

Теорема Шаля в трех лицах

С. КУЗНЕЦОВ

ПОНЯТИЕ ДВИЖЕНИЯ (ИЗОМЕТРИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ) играет весьма важную роль в геометрии. По определению, движением плоскости называется ее преобразование, сохраняющее расстояния между точками: если A переходит в A' , а B – в B' , то отрезок $A'B'$ должен быть равен отрезку AB . С помощью третьего признака равенства треугольников нетрудно доказать, что всякое движение сохраняет также и углы – таким образом, сохраняется вся геометрическая структура преобразуемых объектов. Недаром фигуры, которые можно совместить движением, считаются *равными*.

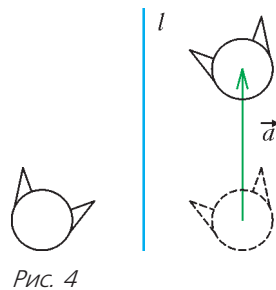
Движениями являются, например, поворот на угол¹ φ относительно некоторой точки A (рис.1), обозначаемый \mathbf{R}_A^φ ; параллельный перенос на вектор \vec{a}



(рис.2), обозначаемый $\mathbf{T}_{\vec{a}}$; осевая симметрия относительно прямой l (рис.3), обозначаемая \mathbf{S}_l .

Новые движения можно получать при помощи композиции: движение $\mathcal{H} = \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ состоит в последовательном применении сначала движения \mathcal{G} , а потом \mathcal{F} к резуль-

тату.² Примером композиции движений является скользящая симметрия, $\mathbf{T}_{\vec{a}} \circ \mathbf{S}_l$, где \vec{a} – вектор, параллельный прямой l (рис.4). В этом случае порядок композиции не имеет значения:



$$\mathbf{T}_{\vec{a}} \circ \mathbf{S}_l = \mathbf{S}_l \circ \mathbf{T}_{\vec{a}}.$$

Другие известные виды движений оказываются частными случаями перечисленных: например, центральная симметрия \mathbf{Z}_A есть поворот на 180° , т.е. $\mathbf{R}_A^{180^\circ}$; тождественное преобразование, оставляющее все точки на месте, можно записать как перенос на нулевой вектор ($\mathbf{T}_{\vec{0}}$) или как поворот на нулевой угол вокруг произвольной точки ($\mathbf{R}_A^{0^\circ}$); композиция нетривиального поворота и параллельного переноса опять дает поворот; композиция поворотов, даже с разными центрами, – поворот или параллельный перенос³ и так далее. Осевая симметрия – это скользящая симметрия с $\vec{a} = \vec{0}$. Оказывается, что так будет со всеми видами движений.

² Обратите внимание, что при композиции мы применяем преобразования в необычном порядке – справа налево. Таким образом, получается равенство $(\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(X) = \mathcal{F}(\mathcal{G}(X))$. Если бы мы вместо $\mathcal{F}(X)$ писали $(X)\mathcal{F}$, как в обратной польской записи (введена Ч.Хэмблингом на основе «польской записи» Я.Лукаевича), то и в композиции преобразования применялись бы слева направо.

³ Красивую иллюстрацию этого факта можно увидеть в статье С.Дориченко, С.Шашкова и А.Шеня «Загадочные круги и движения плоскости» («Квант» №4 за 2009 г.).

¹ Угол берется со знаком: положительное направление – против часовой стрелки, отрицательное – по часовой стрелке.

Теорема Шаля. *Всякое движение евклидовой плоскости есть или поворот, или параллельный перенос, или скользящая симметрия.*

Эта теорема, доказанная французским геометром Мишелем Шалем в середине XIX века, достаточно широко известна и встречается во многих книгах по элементарной геометрии; есть о ней статья и в «Кванте»⁴. В этой статье мы докажем теорему Шаля и ее аналоги в трех геометриях: плоской евклидовой, сферической и геометрии Лобачевского.

Аксиоматика геометрии Лобачевского отличается от евклидовой только одной аксиомой – аксиомой о параллельных. У Евклида эта аксиома выглядит так:

Аксиома Евклида. *Через данную точку A , не лежащую на данной прямой a , можно провести не более одной прямой, параллельной прямой a (т.е. не имеющих с ней общих точек).*

Эта аксиома, в сравнении с другими, не кажется наглядно очевидной и скорее выглядит как теорема, которую следовало бы доказать. Тем не менее, попытки сделать это, которые предпринимали многие геометры со времен Евклида и до XIX века, не увенчались успехом. В конце концов, Николай Иванович Лобачевский в своей работе «О началах геометрии» (1828 г.) предположил, что если заменить евклидову аксиому о параллельных на ее отрицание, то получится непротиворечивая теория, и тем самым доказать эту аксиому как теорему из остальных аксиом невозможно (одновременное присутствие утверждения и его отрицания делают теорию противоречивой). Примерно в то же время к этой идее пришли также Янош Бойаи и Карл Фридрих Гаусс. Основываясь на предположении, что замена аксиомы о параллельных на ее отрицание не приводит к противоречиям, Лобачевский значительно продвинулся в развитии новой геометрической теории, которую мы сейчас называем геометрией Лобачевского, – однако строго

доказать, что противоречия в ней в принципе получить невозможно, удалось лишь спустя полвека после открытия Лобачевского. Для этого были построены модели геометрии Лобачевского, одну из которых мы приводим ниже.

Итак, в геометрии Лобачевского вместо аксиомы о параллельных принято ее отрицание.

Аксиома Лобачевского. *Существуют такие прямая a и не лежащая на ней точка A , что через точку A можно провести хотя бы две прямые, не имеющие общих точек с a .*

В присутствии других аксиом Евклида из аксиомы Лобачевского следует ее более сильный вариант: для любых прямой a и не лежащей на ней точки A через A можно провести более одной прямой, параллельной a . Все остальные аксиомы у Евклида и у Лобачевского совпадают.

К этим двум геометриям – Евклида и Лобачевского – мы добавим также сферическую геометрию. Точки этой геометрии расположены на сфере (в обычном трехмерном евклидовом пространстве). Роль прямых играют большие круги, образующиеся при сечении сферы плоскостями, проходящими через ее центр: дуга большого круга – это кратчайший путь между двумя точками, если двигаться разрешено только по сфере. Может показаться, что рассуждать о фигурах на сфере можно методами обычной евклидовой стереометрии, и выделять отдельную сферическую геометрию излишне. Однако взглянуть на сферу как на некий аналог плоскости иногда бывает очень полезно, как для теоретических, так и для практических задач.⁵ Сферическая геометрия и вправду многим похожа на планиметрию Евклида и Лобачевского (в частности, в ней верны многие из теорем, используемых в доказательстве теоремы Шаля – см. ниже), но многим и отличается. Например, на сфере возможен треугольник, все углы которого прямые (рис.5).

⁴ В.Бугаенко. «Движения плоскости и теорема Шаля» («Квант» №4 за 2009 г.).

⁵ Например, о применении сферической геометрии в астрономии можно почитать в книге В.П.Цесевича «Что и как наблюдать на небе».

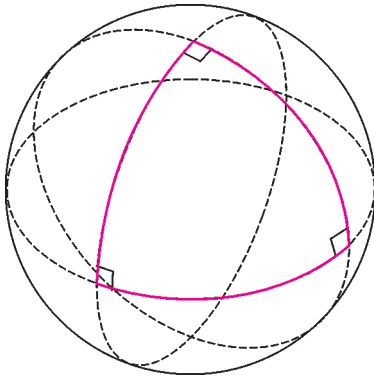


Рис. 5

Начнем доказывать теорему Шаля так, как это делается в евклидовом случае, и попробуем продвинуться как можно дальше так, чтобы наши рассуждения сохраняли свою силу и в двух других геометриях.

Лемма о трех гвоздях. Если движение \mathcal{F} имеет три неподвижные точки, не лежащие на одной прямой, то \mathcal{F} – тождественное преобразование.

Доказательство. Пусть это не так: $\mathcal{F}(D) = D' \neq D$ для некоторой точки D . Тогда, поскольку для любой неподвижной точки A верно равенство $AD = AD'$, все неподвижные точки лежат на одной прямой – серединном перпендикуляре к отрезку DD' . Противоречие.

Теорема о трех симметриях. Всякое движение плоскости есть или тождественное преобразование, или осевая симметрия, или композиция двух осевых симметрий, или композиция трех осевых симметрий.

Идея доказательства в следующем: с помощью симметрий можно «возвращать» точки на их исходное место, т.е. «создавать» неподвижные точки в нужном нам количестве.

Доказательство. Если движение \mathcal{F} тождественное, то теорема доказана. В противном случае $\mathcal{F}(A) = A' \neq A$ для некоторой точки A . Обозначим через a серединный перпендикуляр к отрезку AA' (рис.6) и положим

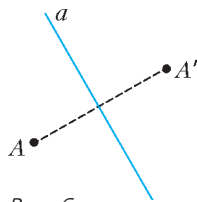


Рис. 6

$\mathcal{G} = \mathbf{S}_a \circ \mathcal{F}$. Тогда A – неподвижная точка движения \mathcal{G} .

Если оказалось, что \mathcal{G} тождественное, то $\mathcal{F} = \mathbf{S}_a$ (осевая симметрия).

В противном случае $\mathcal{G}(B) = B' \neq B$ для некоторой точки B . Пусть b – серединный перпендикуляр к отрезку BB' ; поскольку $AB = AB'$ (A – неподвижная точка), точка A лежит на прямой b (рис.7). Положим $\mathcal{H} = \mathbf{S}_b \circ \mathcal{G} = \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_a \circ \mathcal{F}$. У движения \mathcal{H} уже две неподвижные точки: A и B .

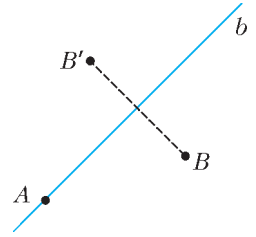


Рис. 7

Снова, если \mathcal{H} – тождественное, то $\mathcal{F} = \mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b$ (композиция двух симметрий). В противном случае $\mathcal{H}(C) = C' \neq C$, и неподвижные точки A и B составляют прямую c – серединный перпендикуляр к отрезку CC' (рис.8). Из этого, кстати, следует, что

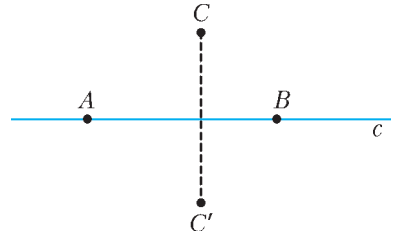


Рис. 8

сама точка C на прямой c не лежит. Значит, у движения $\mathbf{S}_c \circ \mathcal{H} = \mathbf{S}_c \circ \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_a \circ \mathcal{F}$ три неподвижные точки (A , B и C), и они не лежат на одной прямой. По лемме о трех гвоздях это движение тождественное. Следовательно, $\mathcal{F} = \mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_c$ (композиция трех симметрий).

Если внимательно посмотреть на доказательство леммы о трех гвоздях и теоремы о трех симметриях, можно заметить, что из всего арсенала геометрических средств мы использовали только **теорему о серединном перпендикуляре**: *серединный перпендикуляр к отрезку AB есть геометрическое место точек, расположенных на равных расстояниях от то-*

чек A и B . Классическое евклидово доказательство этого факта не использует аксиому о параллельных – оно, как говорится, принадлежит *абсолютной геометрии*, т.е. общей части геометрий Евклида и Лобачевского. Теорема о серединном перпендикуляре верна также и на сфере. Таким образом, остается понять, как устроены композиции двух или трех осевых симметрий в каждой из трех геометрий.

Композицию двух симметрий, $S_a \circ S_b$, вычислить относительно просто. В евклидовом случае возможны две ситуации: (1) прямые a и b пересекаются, и тогда $S_a \circ S_b$ есть поворот относительно точки их пересечения на удвоенный угол меж-

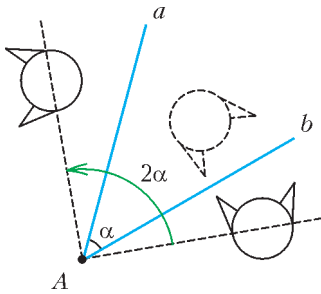


Рис. 9

ду этими прямыми (рис.9); (2) прямые a и b параллельны – тогда $S_a \circ S_b$ есть

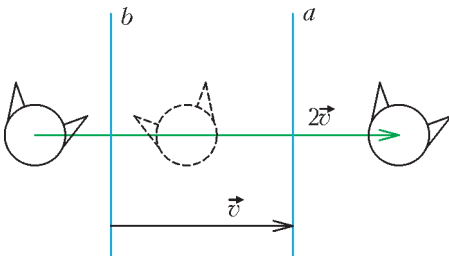


Рис. 10

параллельный перенос (рис.10). На сфере все еще проще: любые две «прямые» (т.е. два больших круга) пересекаются в двух диаметрально противоположных точках, и $S_a \circ S_b$ есть вращение сферы вокруг проходящей через эти две точки оси (рис.11).

Чтобы разобраться со случаем геометрии Лобачевского, нам будет удобно иметь наглядное представление плоскости Ло-

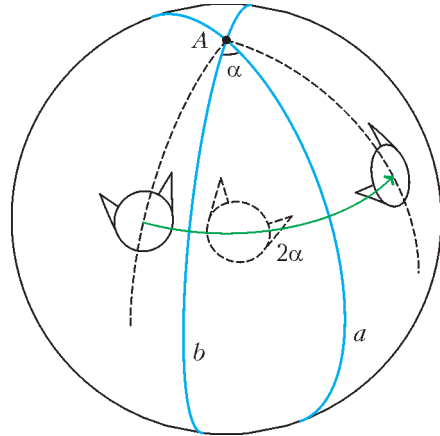


Рис. 11

бачевского, иначе говоря, построить модель плоскости Лобачевского на материале евклидовой плоскости. Для этого нужно придать новый смысл основным геометрическим понятиям – по-новому объяснить, что такое точка, прямая, равенство отрезков, равенство углов, и сделать это таким образом, чтобы при этом остались верны все евклидовы аксиомы, кроме аксиомы о параллельных. Сделать это можно многими разными способами; у нас будет один из них – *модель Пуанкаре в верхней полуплоскости*.

Точками, принадлежащими плоскости Лобачевского, будут считаться только точки, расположенные строго выше некоторой выбранной прямой, называемой *абсолютом*. (Если абсолют считать осью Ox , то мы будем рассматривать только точки с $y > 0$.) Роль *прямых* в этой модели будут играть полуокружности с центром на абсолютном, а также вертикальные лучи. Вторая разновидность прямых называется *особой*.

Сразу видно, что в этой модели нарушается евклидова аксиома о параллельных: через данную точку A можно провести бесконечно много прямых, не имеющих общих точек с данной прямой a (рис.12). Все эти прямые можно было бы считать параллельными прямой a – однако общепринятая терминология считает параллельными прямой a только «крайние» прямые b_1 и b_2 , имеющие с ней общие точки на абсолютном; остальные

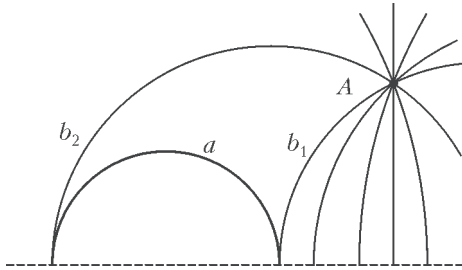


Рис. 12

прямые называются *расходящимися* с прямой a . В случае когда прямая a особая, одна из параллельных ей прямых тоже будет особой (рис.13).

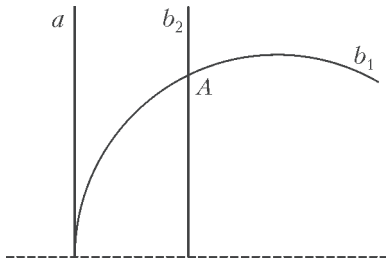


Рис. 13

В модели Пуанкаре симметрия относительно особой прямой определяется евклидовым образом (рис.14); роль же сим-

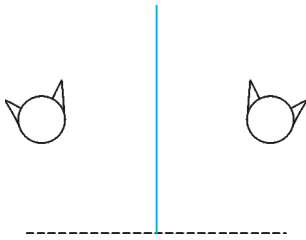


Рис. 14

метрии относительно неособой прямой играет замечательное преобразование плоскости, называемое *инверсией* (рис.15).

При инверсии относительно окружности (прямой в смысле Лобачевского) с центром O на абсолюте и радиусом R точка A переходит в точку A' , лежащую на луче OA и такую, что $OA \cdot OA' = R^2$. Инверсия определена для всех точек плоскости, кроме O – к счастью, точка O лежит вне точек плоскости Лобачевского и поэтому нас не интересует. Инверсия

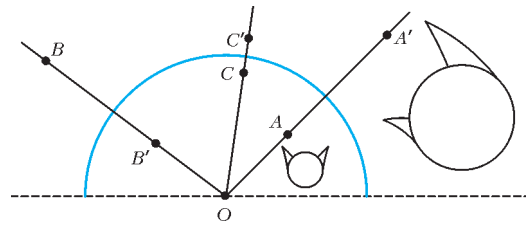


Рис. 15

обладает всеми свойствами⁶, которые мы ожидаем от осевой симметрии:

- инверсия переводит верхнюю полуплоскость в верхнюю полуплоскость;
- инверсия относительно полуокружности (прямой в смысле Лобачевского) a сохраняет точки, лежащие на самой a , на месте;
- инверсия переводит прямые (в смысле Лобачевского) в прямые (в смысле Лобачевского);
- инверсия сохраняет углы (угол между прямыми в смысле Лобачевского считается равным евклидову углу между касательными, проведенными в точке пересечения);
- если два раза применить одну и ту же инверсию, получится тождественное преобразование.

Далее, определив с помощью инверсий равенство отрезков в модели Пуанкаре, можно доказать в ней, как теоремы, аксиомы абсолютной геометрии и тем самым обосновать, что это действительно модель геометрии Лобачевского. Но об этом, как говорят исландцы, не говорится в этой саге.

О том же, как все-таки выглядят композиции двух и трех симметрий в геометрии Лобачевского, мы расскажем в следующем номере журнала.

⁶ Подробнее о свойствах инверсии и ее применении в геометрических задачах можно прочитать в брошюре И.Д.Жижилкина «Инверсия» (Библиотека «Математическое просвещение», вып.35, МЦНМО, 2009).

(Продолжение следует)

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задача M2479 предлагалась на XIII Олимпиаде имени И.Ф.Шарыгина, задача M2481 – на LVIII Международной математической олимпиаде.

Задачи M2478–M2481, Ф2485–Ф2488

M2478. Дана «таблица умножения» $n \times n$ (т.е. таблица, в которой на пересечении строки с номером k и столбца с номером m записано число km (на рисунке 1 показана

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Рис. 1

таблица умножения 6×6). Клетки таблицы покрасили в шахматном порядке так, что клетка с числом 1 – черная. Найдите сумму чисел во всех черных клетках.

Фольклор

M2479. Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC , точка M – середина стороны AC , а точка W – середина дуги AB описанной окружности, не содержащей C (рис.2). Оказалось, что $\angle AIM = 90^\circ$. В каком отношении I делит отрезок CW ?

С.Берлов, А.Полянский

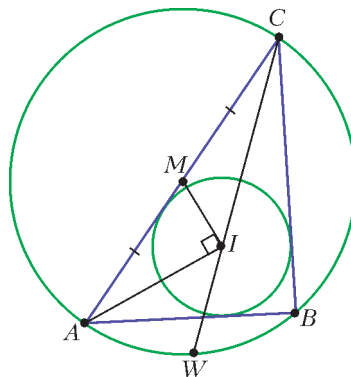


Рис. 2

M2480. Для любых натуральных чисел m и n докажите неравенства:

а) $\frac{1}{2 \cdot \sqrt[m]{1}} + \frac{1}{3 \cdot \sqrt[m]{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1) \cdot \sqrt[m]{n}} < m$;

б) $\frac{1}{1 \cdot \sqrt[m]{2}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt[m]{3}} + \dots + \frac{1}{n \cdot \sqrt[m]{n+1}} < \frac{1}{\sqrt[m]{2} - 1}$.

А.Егоров

M2481*. Дано натуральное число $N > 2$. В шеренгу выстроена команда из $N(N+1)$ футболистов, среди которых нет двух футболистов одинакового роста. Сэр Алекс хочет удалить из шеренги $N(N-1)$ игроков так, чтобы остался ряд из $2N$ игроков, для которого выполнены следующие N условий: (1) никто не стоит между двумя самыми высокими игроками, (2) никто не стоит между третьим и четвертым по росту

игроками, ..., (N) никто не стоит между двумя самыми низкими игроками. Докажите, что желание сэра Алекса можно осуществить.

Г. Челноков

Ф2485. Тяжелый однородный бильярдный шар массой m «застрял» в горизонтальной решетке (рис.3), протянутой (для

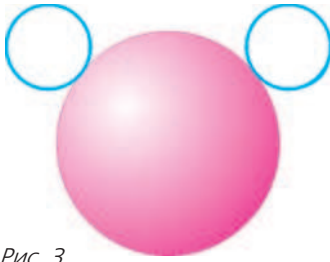


Рис. 3

безопасности ламп) под потолком над игровым столом. При каком минимальном значении коэффициента трения μ такое возможно? Радиус шара R , «шаг» решетки $2a$, диаметр прутка решетки l . Ускорение свободного падения равно g .

А. Бузов

Ф2486. Теплоизолированный цилиндр разделен подвижным невесомым теплонепроницаемым поршнем на две части. Слева от поршня находятся N_0 атомов гелия при температуре $2T_0$, справа – $2N_0$ атомов аргона при температуре T_0 . В некоторый момент произошла «разгерметизация» поршня: он стал пропускать атомы гелия.

1) Как будет изменяться (повышаться или понижаться) температура газа, находящегося слева от поршня, в процессе перехода системы к равновесному состоянию?

2) Какая часть β атомов гелия пройдет сквозь поршень к моменту, когда температура левого газа изменится на $\alpha = 0,01$ от начальной?

Считайте, что все процессы протекают медленно, а энергия проходящих сквозь перегородку атомов равна средней энергии атомов газа, находящегося слева от поршня.

Ю. Рогальский

Ф2487. В схеме, показанной на рисунке 4, все сопротивления одинаковы и равны R ,

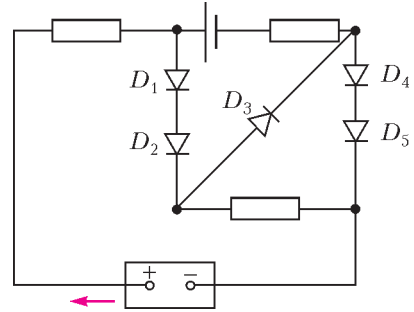


Рис. 4

все диоды имеют вольт-амперную характеристику, приведенную на рисунке 5, ЭДС источника $\mathcal{E} = 1,5U_0$. На схему подают напряжение от источника.

Постройте график зависимости силы тока, протекающего через источник, от напряжения на нем, считая положительным ток, изображенный на рисунке 4 красной стрелкой. Обозначьте на графике координаты всех особых точек (изломов).

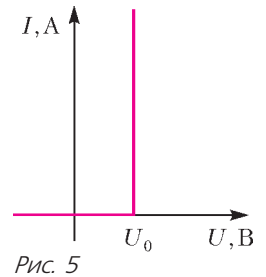


Рис. 5

А. Воронцов

Ф2488. Виток тонкого уранового провода в форме квадрата (рис. 6,а) имеет индуктивность L_1 . Другой виток из такого же провода, идущего по 6 ребрам (двух соседних квадратов) куба (рис. 6,б), имеет ин-

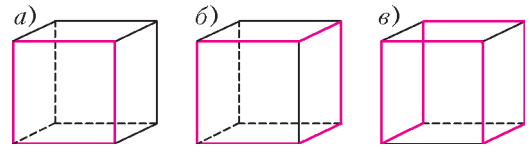


Рис. 6

дуктивность L_2 . Найдите индуктивность третьего витка из этого же провода, идущего по 8 ребрам (трех в ряд соседних квадратов) куба (рис. 6,в).

Г. Кузнецов

**Решения задач M2466–M2469,
Ф2473–Ф2476**

M2466. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD (рис. 1). Окружность ω проходит через вершины B и C

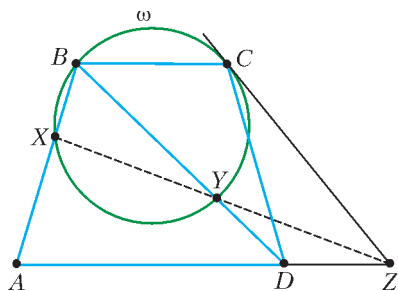


Рис. 1

и вторично пересекает сторону AB и диагональ BD в точках X и Y соответственно. Касательная, проведенная к окружности ω в точке C , пересекает луч AD в точке Z . Докажите, что точки X , Y и Z лежат на одной прямой.

Поскольку $BC \parallel AD$, а прямая ZC касается окружности ω , имеем $\angle ADB = \angle YBC = \angle YCZ$. Следовательно, $\angle YDZ + \angle YCZ = 180^\circ$, т.е. четырехугольник $CYDZ$ – вписанный (рис. 2).

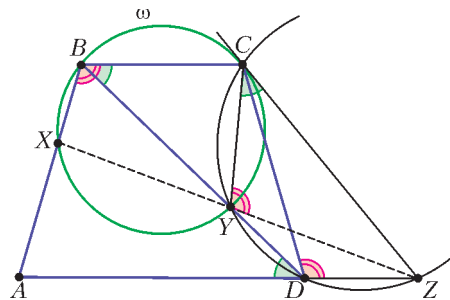


Рис. 2

Значит,

$$\angle CYZ = \angle CDZ = \angle XBC = 180^\circ - \angle CYX,$$

где последние два равенства следуют из того, что трапеция $ABCD$ равнобокая, а четырехугольник $XBCY$ вписан в ω . Таким образом, $\angle CYZ + \angle CYX = 180^\circ$, поэтому точки X , Y и Z лежат на одной прямой.

А.Кузнецов

M2467. а) Пусть $P(x)$ – многочлен степени $n \geq 2$ с неотрицательными коэффициентами, a , b и c – длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что числа $\sqrt[n]{P(a)}$, $\sqrt[n]{P(b)}$ и $\sqrt[n]{P(c)}$ также являются длинами сторон некоторого треугольника.

б) Та же задача, где «треугольник» заменен на «остроугольный треугольник».

а) Пусть, без ограничения общности, $a \geq b \geq c$; эти три положительных числа являются длинами сторон треугольника тогда и только тогда, когда $a < b + c$. Поскольку коэффициенты $P(x)$ неотрицательны, имеем $P(a) \geq P(b) \geq P(c) > 0$; значит, нам надо проверить, что

$$\sqrt[n]{P(a)} < \sqrt[n]{P(b)} + \sqrt[n]{P(c)}.$$

Пусть $P(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_0$. Обозначим $G(x) = P(x)/x^n$. Заметим, что

$$\begin{aligned} G(a) &= p_n + \frac{p_{n-1}}{a} + \dots + \frac{p_0}{a^n} \leq \\ &\leq p_n + \frac{p_{n-1}}{b} + \dots + \frac{p_0}{b^n} = G(b) \end{aligned}$$

и, аналогично, $G(a) \leq G(c)$. Значит,

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{P(a)} &= a \sqrt[n]{G(a)} < (b+c) \sqrt[n]{G(a)} \leq \\ &\leq b \sqrt[n]{G(b)} + c \sqrt[n]{G(c)} = \sqrt[n]{P(b)} + \sqrt[n]{P(c)}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

б) Три положительных числа $a \geq b \geq c$ являются длинами сторон остроугольного треугольника тогда и только тогда, когда $a^2 < b^2 + c^2$. Из последнего неравенства достаточно вывести неравенство $\sqrt[n]{P(a)^2} < \sqrt[n]{P(b)^2} + \sqrt[n]{P(c)^2}$. Это делается такой же выкладкой, как в решении задачи а).

В завершение отметим, что функция $\sqrt[n]{P(x)}$, вообще говоря, не является выпуклой при положительных x , поэтому многие стандартные методы (применение неравенства Йенсена и т.д.) в этой задаче не работают.

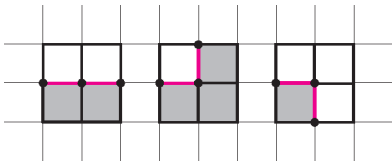
Н.Агаханов

M2468. Каждая клетка доски 100×100 окрашена либо в черный, либо в белый

цвет, причем все клетки, примыкающие к границе доски, – черные. Оказалось, что нигде на доске нет одноцветного клетчатого квадрата 2×2 . Докажите, что на доске найдется клетчатый квадрат 2×2 , клетки которого окрашены в шахматном порядке.

Предположим противное: на доске нет ни одноцветных, ни шахматно окрашенных квадратов 2×2 . Рассмотрим все отрезки сетки, разделяющие две разноцветные клетки (назовем их *разделителями*); пусть их количество равно N .

В любом квадрате 2×2 есть либо ровно одна клетка одного из цветов и три клетки другого, либо две соседние белые клетки и две соседние черные. В обоих случаях внутри квадрата есть ровно два разделителя (см. рисунок). Всего квадратов 2×2



имеется 99^2 , а каждый разделитель лежит внутри ровно двух из них (поскольку к границе разделители не примыкают). Значит, $N = 2 \cdot (99^2) / 2 = 99^2$.

С другой стороны, N должно быть четным. Действительно, в каждой строке и каждом столбце первая и последняя клетки – черные; поэтому там должно быть четное число перемен цвета. Противоречие.

Замечания. Вместо подсчета количества разделителей можно считать количество разноцветных «доминошек» (прямоугольников 1×2) – это то же самое количество, либо же количество одноцветных «доминошек» – оно равно $2 \cdot 100 \cdot 99 - N$.

Четность общего количества разделителей можно доказать разными методами. Например, можно заметить, что если все внутренние клетки белые, то число разделителей равно $4 \cdot 98$, а при любой перекраске внутренней клетки оно может измениться только на четную величину.

Можно также заметить, что все разделители разбиваются на несколько замкнутых ломаных (в рассматриваемом случае через каждый внутренний узел проходит ровно два разделителя, так что эти ломаные даже не имеют общих вершин), а в каждой замкнутой ломаной из отрезков сетки их количество четно (поскольку четны количества горизонтальных и вертикальных отрезков).

М. Антипов

M2469*. На доске выписаны в ряд n положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n . Вася хочет выписать под каждым числом a_i число $b_i \geq a_i$ так, чтобы для любых двух из чисел b_1, b_2, \dots, b_n отношение одного из них к другому было целым. Докажите, что Вася может выписать требуемые числа так, чтобы выполнялось неравенство

$$b_1 b_2 \dots b_n \leq 2^{\frac{n-1}{2}} a_1 a_2 \dots a_n.$$

Мы докажем, что существуют даже числа b_1, b_2, \dots, b_n , удовлетворяющие следующим (более сильным) условиям:

(1) $b_i \geq a_i$ при всех $i \leq n$;

(2) $b_1 b_2 \dots b_n \leq 2^{\frac{n-1}{2}} a_1 a_2 \dots a_n$;

(3) отношение любых двух из чисел b_i является степенью двойки (с целым показателем).

Заметим, что доказываемое утверждение не изменится, если какое-то из чисел a_k (а с ним и соответствующее b_k) умножить на некоторую степень двойки. Умножим каждое из чисел a_k на степень двойки так, чтобы все полученные числа лежали в промежутке $[1; 2)$.

Не умаляя общности, можно считать, что $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n < 2$. Покажем теперь, что всем трем условиям удовлетворяет одна из следующих n последовательностей:

$$\begin{array}{cccccccc} a_1, & 2a_1, & 2a_1, & 2a_1, & \dots, & 2a_1, & 2a_1; \\ a_2, & a_2, & 2a_2, & 2a_2, & \dots, & 2a_2, & 2a_2; \\ a_3, & a_3, & a_3, & 2a_3, & \dots, & 2a_3, & 2a_3; \\ & & & & & & \dots \\ a_{n-1}, & a_{n-1}, & a_{n-1}, & a_{n-1}, & \dots, & a_{n-1}, & 2a_{n-1}; \\ a_n, & a_n, & a_n, & a_n, & \dots, & a_n, & a_n. \end{array}$$

Поскольку для любых k и l выполнено неравенство $2a_l \geq 2 > a_k$, каждая из последовательностей удовлетворяет (1). Кроме того, каждая из последовательностей, очевидно, удовлетворяет (3). Осталось показать, что хотя бы одна из них удовлетворяет (2).

Для этого заметим, что произведение всех n^2 чисел во всех n последовательностях равно

$$2^{(n-1)+(n-2)+\dots+0} \cdot a_1^n a_2^n \dots a_n^n = \left(2^{\frac{n-1}{2}} a_1 a_2 \dots a_n \right)^n.$$

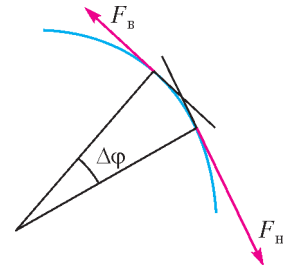
Следовательно, произведение чисел хотя бы в одной из последовательностей не превосходит $2^{\frac{n-1}{2}} a_1 a_2 \dots a_n$, что и требовалось.

Ф.Петров

Ф2473. На горизонтальной поверхности стола лежит вытянутая в длину цепочка с равномерным распределением массы по длине. Цепочка расположена перпендикулярно краю стола. Столешница имеет закругленный край с радиусом кривизны, который значительно меньше длины цепочки, но значительно больше размеров звеньев цепочки. К ближайшему к краю стола концу цепочки прикреплена невесомая нить, за которую цепочку очень медленно начинают «стаскивать» со стола, причем конец нити движется вертикально под краем стола. В тот момент когда на горизонтальной поверхности осталось только 60% длины, цепочка неудержимо заскользила и упала со стола. Каков коэффициент трения цепочки о поверхность стола?

В момент когда началось «неудержимое проскальзывание», со стола свешивалась часть цепочки длиной $0,4L$, где L – длина всей цепочки. Длиной участка цепочки, касающегося закругленного края столешницы, можно, в соответствии с условием задачи, пренебречь. Однако нельзя пренебрегать трением на этом участке, ибо оно присутствует на всей поверхности стола, в том числе и на закругленном участке сто-

лешницы на краю стола. Поэтому сила натяжения звена цепочки, которое в данный момент находится на границе раздела горизонтальной поверхности и закругленного участка, не равно силе натяжения самого верхнего звена цепочки, которое принадлежит участку, не касающемуся стола. Рассмотрим два близких звена цепочки, находящиеся на закругленном участке (см. рисунок). Касательные к цепочке, проведенные через эти два звена, образуют друг



с другом малый угол $\Delta\phi$. Силы натяжения этих двух звеньев цепочки \vec{F}_H и \vec{F}_B направлены вдоль соответствующих касательных и образуют между собой тот же малый угол $\Delta\phi$. Поскольку участок цепочки между этими двумя звеньями неподвижен, но «готов» начать скольжение, то сумма сил натяжения компенсируется силой, с которой на выделенный участок действует закругленная поверхность столешницы, точнее, двумя силами – трения и реакции опоры. Разница величин сил натяжения $\Delta F = F_H - F_B$ невелика, силы примерно одинаковы: $F_H \approx F_B = F$. Касательная составляющая этих сил, равная ΔF , компенсируется силой трения $F_{тр}$, а перпендикулярная составляющая, равная примерно $F\Delta\phi$, компенсируется силой нормальной реакции со стороны столешницы. Скольжение вот-вот начнется, поэтому сила трения равна произведению силы нормальной реакции и коэффициента трения, который и нужно найти. Иными словами,

$$\mu F \Delta\phi = \Delta F.$$

Разделим правую и левую части этого равенства на F и получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\Delta F}{F} = \mu \Delta\phi.$$

Решением этого уравнения является зависимость силы натяжения от величины угла поворота:

$$e^{\mu\phi} F_B = F_H.$$

Это так называемая формула Эйлера. Угол между направлением силы в самом верхнем звене цепочки, находящемся на закругленном участке столешницы, и горизонталью равен нулю. Угол между горизонталью и силой натяжения самого нижнего звена цепочки, касающегося закругленного участка столешницы, равен $\pi/2$. Сила трения, которую нужно преодолеть, чтобы сдвинуть участок цепочки, лежащий на столе, равна $\mu \cdot 0,6mg$. Сила натяжения самого нижнего звена «закругленного» участка цепочки равна $0,4mg$. Это означает, что выполняется соотношение

$$e^{\mu\pi/2} F_{\text{в}} = e^{\mu\pi/2} \mu \cdot 0,6mg = F_{\text{н}} = 0,4mg,$$

или

$$e^{\mu\pi/2} \mu = \frac{2}{3}.$$

Решив такое уравнение для неизвестной величины μ , например с помощью компьютера или калькулятора, получим

$$\mu = 0,37178 \approx 0,372.$$

Ц.Почкин

Ф2474. Тонкий легкий круглый диск радиусом $R = 10$ см с крючком посередине положили на поверхность чистой жидкости, которая хорошо смачивает нижнюю поверхность диска. Диск начинают медленно приподнимать, прикладывая к крючку постепенно растущую вертикальную силу. Какой максимальной величины F достигнет сила, прежде чем диск оторвется от поверхности жидкости? Коэффициент поверхностного натяжения жидкости $\sigma = 0,1$ Дж/м². Плотность жидкости $\rho = 10^3$ кг/м³.

Когда начнется отрыв диска от жидкости, уровень жидкости в сосуде будет ниже, чем нижняя поверхность диска, на величину h , которая определяется поверхностным натяжением жидкости. Условие равновесия жидкости под диском вблизи его края в этот момент таково:

$$2\sigma L = \frac{\rho gh}{2} Lh,$$

где L – длина небольшого (почти прямого, $L \ll R$) участка диска вдоль его края. Это условие равенства нулю проекций сил на

горизонтальное направление. Давление жидкости под нижней поверхностью диска меньше внешнего атмосферного давления на величину ρgh . Площадь нижней поверхности диска равна πR^2 . Отсюда получается ответ:

$$\begin{aligned} F &= \rho gh \cdot \pi R^2 = \\ &= \rho g \sqrt{\frac{4\sigma}{\rho g}} \cdot \pi R^2 = \sqrt{4\sigma \rho g} \pi R^2 = 2 \text{ Н}. \end{aligned}$$

А. Старов

Ф2475. В огромном газовом облаке в межзвездном пространстве находится газообразный гелий при температуре $T_0 = 10$ К. Концентрация молекул газа $n = 10^9$ м⁻³, радиус молекул $R = 0,1$ нм. В какой-то момент в каждом кубическом сантиметре облака одна молекула внезапно получает такой импульс, что ее скорость оказывается равной по величине $v = 10^5$ м/с. Импульсы, полученные молекулами, направлены хаотически. Оцените время установления теплового равновесия. Какой будет установившаяся температура? Как изменится ответ на вопрос про температуру, если все полученные молекулами импульсы будут направлены в одну и ту же сторону?

Из условия задачи следует, что на одну энергичную молекулу приходится 10^3 штук медленных молекул. Для оценки времени установления теплового равновесия предположим, что после каждого столкновения энергичной молекулы с медленной молекулой их суммарная энергия делится между участниками столкновения в среднем пополам. Иными словами, после первого соударения вместо одной энергичной молекулы получаются две молекулы с вдвое меньшей энергией. Во втором поколении вместо двух энергичных молекул получаются четыре с энергиями в четыре раза меньше энергии первой молекулы и так далее. В десятом поколении молекул, получивших дополнительную энергию, будет уже $2^{10} = 1024$. Это означает, что в десятом поколении энергия, полученная в начальный момент одной молекулой, распределится по тысяче молекул, т.е. прак-

тически все молекулы в облаке получают свою порцию дополнительной энергии. Между двумя последовательными столкновениями энергичной молекулы проходит время, равное в среднем отношению длины свободного пробега к той скорости, с которой эта молекула двигалась в данном промежутке времени. Длина свободного пробега молекулы равна $\lambda = 1/(4\pi R^2 n)$. Так как после каждого столкновения скорости энергичных молекул уменьшаются в $2^{0,5}$ раза, в каждом новом поколении время между столкновениями увеличивается в $2^{0,5}$ раза. Для оценки времени установления теплового равновесия получим

$$t = \frac{\lambda}{v} (1 + 2^{0,5 \cdot 1} + 2^{0,5 \cdot 2} + 2^{0,5 \cdot 3} + \dots + 2^{0,5 \cdot 10}) = \frac{\lambda}{v} \frac{2^{0,5 \cdot 11} - 1}{2^{0,5} - 1} = \frac{112}{4\pi R^2 n v} = 9 \cdot 10^6 \text{ с.}$$

Это примерно 100 суток.

Температуру T_1 найдем из закона сохранения энергии. Для одного моля молекул, каждая из которых имеет массу m , запишем

$$\frac{3}{2} N_A k T_0 + N_A \cdot 10^{-3} \frac{m v^2}{2} = \frac{3}{2} N_A k T_1.$$

Отсюда найдем

$$T_1 = 1614 \text{ К.}$$

Если все молекулы получают импульсы в одном и том же направлении, то температура T_2 будет, очевидно, ниже, но совсем немного. Учтем, что $N_A m = M$ — это молярная масса газа, а $N_A k = R$ — это универсальная газовая постоянная. В целом облако приобретет скорость $v \frac{m}{1000m}$, что следует из закона сохранения импульса. Суммарная энергия сложится из энергии упорядоченного движения всех молекул с найденной скоростью и энергии их хаотического движения по отношению к системе отсчета, движущейся с найденной скоростью. Температуру T_2 найдем из закона сохранения энергии:

$$\frac{3}{2} R T_0 + 10^{-3} \frac{M v^2}{2} = \frac{3}{2} R T_2 + \frac{(10^{-3} M v)^2}{2M},$$

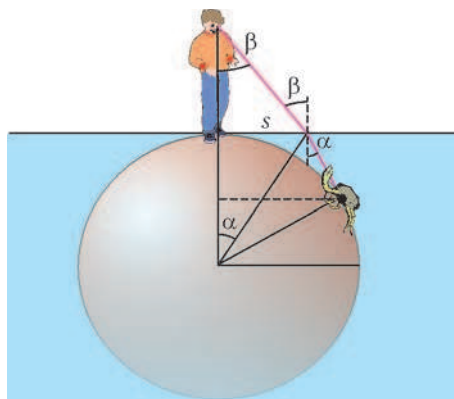
откуда

$$T_2 = 1613 \text{ К.}$$

С.Варламов

Ф2476. Недалеко от берега моря на дне лежит большой камень, имеющий форму шара радиусом R . Его верхняя точка находится как раз на уровне воды. Вася встал на самый верх этого камня и, не шевелясь, с высоты своего роста $h = 1,7 \text{ м}$ рассматривает поверхность камня, находящуюся под прозрачной водой. Маленький краб ползет по поверхности этого камня, спускаясь вниз. В тот момент когда краб оказался на глубине, равной половине радиуса шара, Вася перестал его видеть. Каков радиус шара R ? Коэффициент преломления воды $n = 4/3$.

Лучи света, которые позволяют Васе видеть краба за мгновение до его «пропажи», падают из воды на границу раздела с воздухом под углом $\alpha = 30^\circ$ (см. рисунок). Угол β , который составляют с вер-



тикалю эти же лучи в воздухе, имеет значение синуса, равное $n \sin \alpha$, т.е. $2/3$. Расстояние s , на котором находится точка выхода этих лучей из воды от ног Васи, равно $R \operatorname{tg} \alpha$. Рост Васи h , поделенный на это расстояние, это $\operatorname{ctg} \beta$. Следовательно, выполняется соотношение

$$R \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{\operatorname{ctg} \beta}.$$

Отсюда находим искомый радиус шара:

$$R = \frac{h}{\operatorname{ctg} \beta \operatorname{tg} \alpha} = \frac{h \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = h \frac{2/\sqrt{5}}{1/\sqrt{3}} = 2\sqrt{\frac{3}{5}} h = 2,63 \text{ м.}$$

Р.Шаров

Задачи

1. Чебурашка записал словами все четные трехзначные числа («сто, сто два, сто четыре, ..., девятьсот девяносто восемь»), а Незнайка — все нечетные трехзначные числа. Кто из них написал больше слов и на сколько?

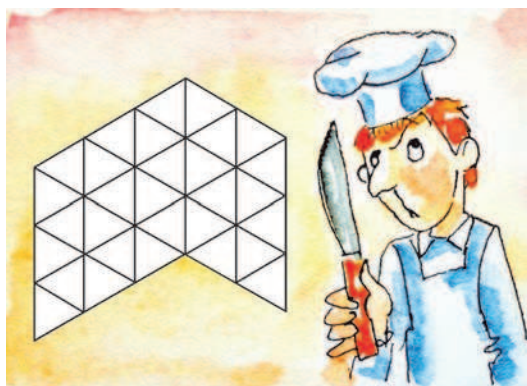
К.Кноп, А.Солынин



2. а) Покажите, как разрезать нарисованную ниже фигуру по линиям на две равные (по форме и размеру) части.

б) Покажите, как это сделать еще одним способом.

Г.Струков



Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Эти задачи предлагались на XXI Олимпиаде Юношеской математической школы.

3. 22 футболиста сыграли три тренировочных игры (разбиваясь каждый раз на два состава по 11 человек). Докажите, что какие-то два футболиста все три раза были соперниками.

К.Кноп

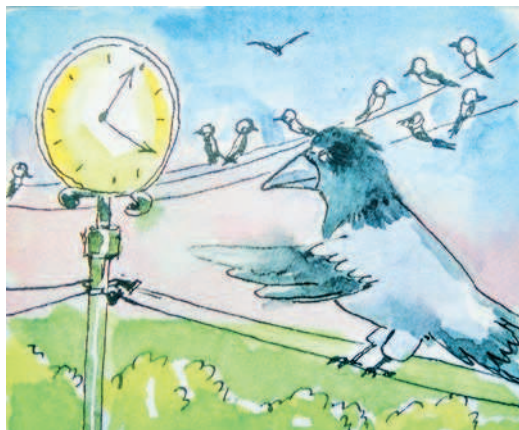


4. На проводе сидят в ряд 1000 ворон. В конце каждой минуты каждая третья (третья, шестая, девятая и так далее) ворона улетает.

а) Какими изначально по счету были вороны, которые останутся на проводе в конце концов?

б) Сколько минут пройдет до момента, когда вороны перестанут улетать?

Д.Черкашин



Почти правильные многоугольники на клетчатой бумаге

А.КАРПОВ

СИДЕЛ Я КАК-ТО ВЕЧЕРОМ ДОМА И пытался придумать задачу для школьников. Было не так много тем, по которым я хотел бы это сделать, – из «кружковской» программы меня не особенно впечатляли ни комбинаторика, ни графы, ни прочие популярные темы. Поэтому выбор пал на любимую с 8 класса геометрию на клетчатой бумаге. Я взял листок и стал рисовать.

Начал я с одного отрезка (рис. 1). И стал думать, что можно сделать с одним отрезком. Можно пытаться, например, рисовать многоугольники, причем такие, чтобы все их стороны были равны этому отрезку, а вершины лежали в узлах сетки. Да еще и выпуклые, чтобы не было слишком большой свободы действий. О, это кажется интересным! Из школы я помнил, что треугольник с такими свойствами построить нельзя. Можете попробовать это доказать самостоятельно; вам помогут следующие два утверждения:

а) квадрат стороны такого треугольника (если бы он существовал) – целое число; б) площадь такого треугольника – целое или полуцелое число.

Потом я попробовал нарисовать квадрат и в этом, естественно, преуспел (рис. 2).

После этого получилось нарисовать шестиугольник (рис. 3) (естественно, неправильный – правильный нельзя построить по тем же соображениям, что и правильный треугольник).

После этого получилось нарисовать шестиугольник (рис. 3) (естественно, неправильный – правильный нельзя построить по тем же соображениям, что и правильный треугольник).

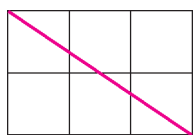


Рис. 1

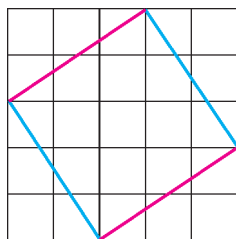


Рис. 2

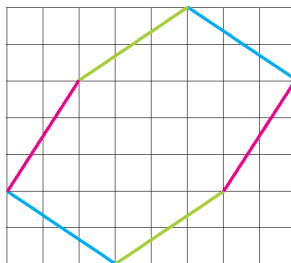


Рис. 3

Ага, подумал я, тут и до восьмиугольника недалеко! Его я тоже нарисовал (рис. 4).

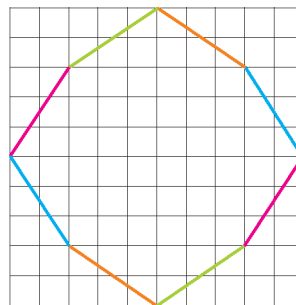


Рис. 4

Теперь настало время задуматься. Что позволяет нам строить такие выпуклые многоугольники? Тот факт, что один и тот же отрезок можно расположить под разными углами. Например, для отрезка на рисунке 1 возможны 4 попарно не параллельных положения, получаемых из него всеми возможными симметриями относительно линий сетки (рис. 5).

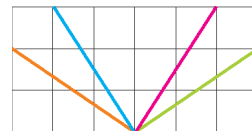


Рис. 5

Заметьте: рисуя восьмиугольник, мы использовали каждое положение отрезка, причем ровно по два раза (на рисунке 4 параллельные отрезки имеют один и тот

же цвет). Когда же мы строили шестиугольник и квадрат, мы тоже не использовали никакое из положений отрезков более двух раз. Интересно, а эта закономерность сохраняется для больших многоугольников? Давайте докажем, что сохраняется.

Предположим противное – пусть нашелся выпуклый многоугольник хотя бы с тремя сторонами, параллельными друг другу. Повернем для удобства многоугольник так, чтобы эти стороны стали вертикальными, и через каждую из них проведем прямую (красные линии на рисунке). Поскольку многоугольник выпуклый, он

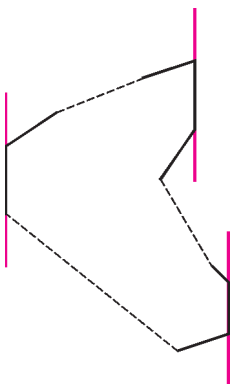


Рис. 6

целиком лежит по одну сторону от каждой из прямых – либо слева, либо справа. Раз прямых три, то для двух из них он лежит по одну и ту же сторону, скажем слева (как на рисунке 6). Тогда эти прямые должны совпадать (иначе часть многоугольника будет лежать справа от одной из них). Однако в таком случае и стороны будут совпадать, многоугольник же выпуклый!

«Ну вот и все! – радостно воскликнул я. – У любого отрезка не более четырех попарно не параллельных положений, и каждое положение встречается в многоугольнике не больше двух раз. Значит, нельзя построить выпуклый многоугольник с равными сторонами и вершинами в узлах сетки, если количество вершин больше восьми!» Но тут оказалось, что на кухне давно уже сидит папа и независимо от меня пытается решить ту же задачу. «А как же пифагоровы тройки?» – спросил он.

Я сразу все понял. Пифагоровой тройкой называется такая тройка натуральных чисел a , b и c , что $a^2 + b^2 = c^2$. Тогда, взяв отрезок длины c , мы смо-

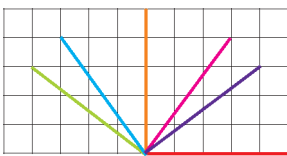


Рис. 7

жем расположить его вертикально, горизонтально или четырьмя способами под разными углами. На рисунке 7 показан пример для отрезка длины 5 ($5^2 = 3^2 + 4^2$). Поскольку различных положений шесть, количество вершин в выпуклом многоугольнике могло бы равняться аж 12. Вот и пример такого многоугольника (рис.8).

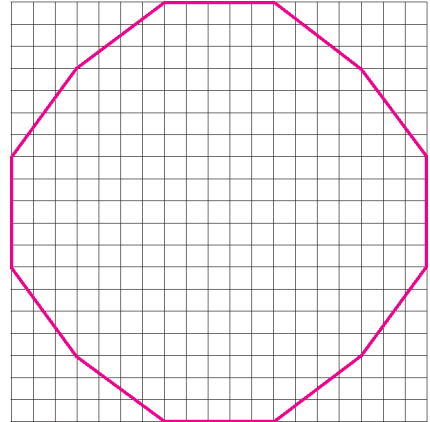


Рис. 8

А что дальше? Как получить большее возможное число сторон, т.е. большее число различных положений отрезка? Я думаю, вы уже догадались: надо искать натуральные числа, которые имеют как можно большее количество разложений в сумму двух квадратов натуральных чисел. Действительно, если $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = e$, то отрезок длины \sqrt{e} можно построить, например, так, как показано на рисунке 9. В этом примере $a = 7, b = 4, c = 8, d = 1, e = 65$. Заметьте, что

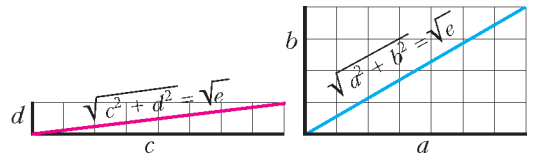


Рис. 9

симметриями относительно прямых, параллельных координатным осям, нельзя перевести один отрезок в другой. Тем самым эти отрезки дадут нам восемь различных положений и возможность построить вот такой (похожий на правильный) шестнадцатиугольник, как на рисунке 10.

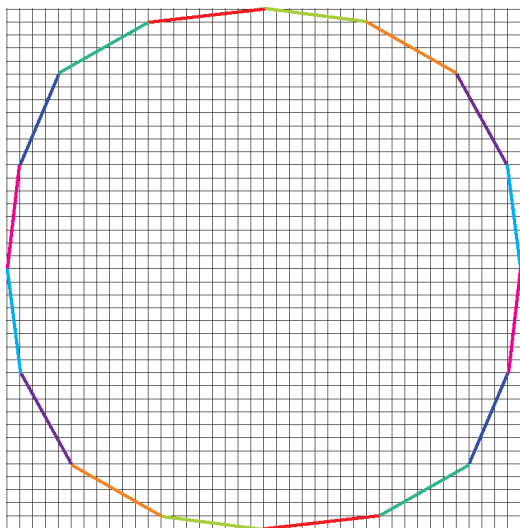


Рис. 10

Перебором на компьютере можно показать, что 65 – это наименьшее из чисел, нетривиальным образом раскладывающееся в сумму двух квадратов двумя различными способами.

Хорошо, с этим тоже понятно – можно перебирать на компьютере и искать подходящие числа. А проще можно? Можно! Для этого нам понадобятся различные пифагоровы тройки, которые дают треугольники с разными наборами углов. Например, тройки (3, 4, 5) и (5, 12, 13) (рис.11).

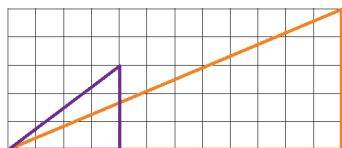


Рис. 11

Давайте подумаем, что можно сделать, скажем, с двумя такими тройками, если мы их получим. В соответствующих прямоугольных треугольниках длины катетов и гипотенуз целые. Понятно, что если увеличить все стороны первого треугольника в одно и то же число раз x , получится новый треугольник с теми же углами, что и у первого. А что если в качестве x взять длину второй гипотенузы? Ведь тогда можно «раздуть» и второй треугольник, но в y раз, где y – длина гипотенузы первого

треугольника. В итоге мы получим два разных прямоугольных треугольника с равными гипотенузами (длины xy)!

Другими словами, пусть есть две пифагоровы тройки: $a^2 + b^2 = c^2$ и $d^2 + e^2 = g^2$. Рассмотрим отрезок длины cg . Его длина – целое число, а значит, его можно расположить по горизонтали и вертикали так, чтобы его концы были в узлах сетки. А еще как? Благодаря тому что $a^2 + b^2 = c^2$ и $d^2 + e^2 = g^2$, такие отрезки найти довольно легко: это отрезок с концами $(0, 0)$ и (ag, bg) , а также отрезок с концами $(0, 0)$ и (dc, ec) . Проверьте, что их длины действительно равны cg . Получается, что у нас есть как минимум три различных варианта расположения отрезка длины cg с вершинами в узлах сетки, которые не переводятся друг в друга симметриями относительно линий сетки. А это дает не менее 10 вариантов расположения отрезка (два параллельных осям координат и восемь наклонных) и, как следствие, возможность построить не менее чем 20-угольник. Попробуйте построить его с помощью пифагоровых троек (3,4,5) и (5,12,13).

Может быть, набрав больше троек, удастся получить больше углов в выпуклом многоугольнике? И максимальное количество этих углов не ограничено ничем, если найти бесконечное количество разных (с точки зрения углов в соответствующих прямоугольных треугольниках) пифагоровых троек?

Рассмотрим бесконечный набор троек вида $(2n, n^2 - 1, n^2 + 1)$ при натуральных n . Во-первых, они пифагоровы: $(2n)^2 + (n^2 - 1)^2 = (n^2 + 1)^2$. Во-вторых, отношение катетов в соответствующих треугольниках равно $\frac{2n}{n^2 - 1}$. Эти дроби уменьшаются с ростом n (проверьте!), и, если брать n все больше и больше, мы получим все более тощие треугольники со все меньшим углом при длинном катете.

Теперь, взяв сколько нужно троек из этого набора, мы построим большой многоугольник с равными сторонами так же, как делали до этого. Сначала расположим

все треугольники, как на рисунке 12. Так как угол в общей вершине уменьшается с

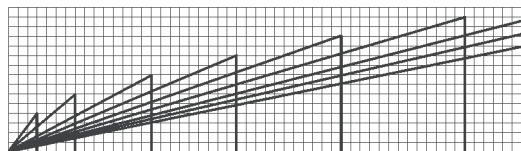


Рис. 12

увеличением n , все гипотенузы наклонены к горизонтали под разными углами. А теперь, чтобы сделать гипотенузы равными, растянем каждый треугольник в целое

число раз. Если это число-масштаб выбрать как произведение длин гипотенуз всех остальных треугольников (целое число!), то после такого растяжения длина каждой гипотенузы окажется равной произведению длин всех исходных гипотенуз. Осталось лишь, как обычно, расположить эти отрезки (и их отражения) друг за другом, и они выстроятся в равносторонний многоугольник!

Так что число сторон в таких многоугольниках ничем не ограничено.

КОНКУРС ИМЕНИ А. П. САВИНА

Мы начинаем очередной конкурс по решению математических задач. Они рассчитаны в первую очередь на учащихся 7–9 классов, но мы будем рады участию школьников всех возрастов.

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64–А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором Вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

Желаем успеха!

1. У Умного Кролика есть участок квадратной формы 8×8 , состоящий из 64 одинаковых грядок 1×1 . На некоторых грядках он выращивает капусту, а на остальных – морковь (пустых грядок нет). Известно, что рядом с каждой капустной грядкой ровно две капустные, а рядом с каждой морковной – ровно две морковные (грядки находятся рядом, если они соседние по стороне). Может ли доля капустных грядок составлять: а) ровно половину, б) более 60% от общего числа грядок?

М.Евдокимов

2. Натуральное число n больше 1 и не делится на 10. Могут ли его последняя цифра и предпоследняя цифра числа n^4 быть одинаковой четности? (Последняя

цифра – в разряде единиц, предпоследняя – в разряде десятков.)

С.Дворянинов

3. Можно ли разрезать прямоугольник 2×5 : а) на четыре части, б) на три части, из которых можно сложить квадрат? (Прикладывать части друг к другу можно только без просветов и наложений.)

Фольклор

4. В ряд выписаны миллион чисел: первое число 123456789, а 999999 чисел – нули. За ход разрешается выбрать число, если оно хотя бы на 10 меньше, чем соседнее слева, и увеличить его на 1, а все числа левее уменьшить на 9. Так делают, пока можно сделать ход. Какой набор чисел может получиться в конце? (Требуется найти все варианты и доказать, что других нет.)

Е.Бакаев

Что такое геликоид и как раскручивается юла

С.ДВОРЯНИНОВ

Немного о волчке

Интересная все-таки эта детская игрушка – волчок. Если для каждой игрушки рассматривать отношение $\frac{\text{удивительность}}{\text{простота}}$, то для волчка эта величина окажется, пожалуй, наибольшей на множестве всех игрушек. Оно и понятно: удивительность волчка велика, а простота – минимальна. Прочитать о волчке можно и в журнале «Квант» – в недавней статье «Про волчок и гироскоп» («Квант» №1 за 2015 г.).

Волчок состоит из двух частей: это ось с острием внизу и жестко закрепленный на оси диск. Зажимаем ось кончиками указательного и большого пальцев и, двигая пальцы в противоположных направлениях, «прокачиваем» по ним волчок. Волчок закручивается, а если его выпустить, то он удивительным образом – не падая! – крутится на столе. Это его вертикальное положение устойчиво. Если мы, приложив силу к оси, попытаемся

волчок наклонить-уронить, то он продолжит свое вращение. А если волчок крутится на картонке, то его даже можно подбросить вверх и снова поймать на картонку. И это вращение завораживает.

Можно было бы долго наблюдать за крутящимся волчком, так же как мы не устаем наблюдать за набегающими на берег морскими волнами, пламенем костра, мерцающими на ночном небе звездами. Причем тут не скажешь – «остановись, мгновение, ты прекрасно». Если волчок остановится, то он упадет. Волчок может стоять на своей единственной ножке, лишь вращаясь. Однако со временем кружение волчка прекращается. Ясно, почему. Приданная нами волчку кинетическая энергия тратится (переходя в тепло) на преодоление трения в опоре и сопротивления воздуха. Заметив, что скорость вращения волчка уменьшается, мы чувствуем свое бессилие в стремлении поддержать и продлить его движение. Мы не можем повторить раскручивание волчка до той поры, пока он не остановится.

Рассчитаем, с какой начальной скоростью вращается наш волчок. Пусть диаметр оси волчка 3 мм, тогда длина его окружности около 9,5 мм, и пусть по пальцам ось проходит путь 30 мм. Значит, на этом пути волчок делает примерно 3 оборота. Будем считать, что время закручивания волчка составляет треть секунды. В итоге получаем, что наш волчок начинает вращение со скоростью примерно 10 оборотов в секунду. Допустим, что скорость уменьшилась до 5 оборотов в секунду. При этом две диаметрально противоположные точки оси волчка движутся в противоположных направлениях. Очевидно, что совместить пальцы с осью волчка, чтобы ускорить его вращение, практически невозможно.

Итак, осуществить подпитку энергии волчка, передать ему энергию в буквальном смысле на пальцах – невозможно. Для этого надо использовать некоторый механизм. И такой механизм есть у другой детской игрушки, а именно – у юлы. Мы надавливаем на ручку юлы, и юла увеличивает скорость вращения. Как же это происходит? Каким образом поступательное движение нашей руки превращается во вращательное движение юлы?



Сначала рассмотрим, как можно изменить направление действия силы с одной прямой на другую.

Как захлопывается дверь

Давайте вспомним один эпизод из книги (и из фильма) «Двенадцать стульев». В поисках очередного стула Великий комбинатор Остап Бендер отправляется к инженеру Шукину. Неожиданно Остап застает того на лестничной площадке и в мыле. Оказывается, перед этим инженер был в душе, вдруг вода прекратилась, и он выбежал на площадку узнать, в чем дело. А дверь неожиданно захлопнулась.

Такие самозакрывающиеся замки действительно были очень популярны. Спешашишь утром на учебу или на работу, каждая секунда дорога. Вот для того, чтоб с ключами не возиться и время на это не тратить, и выпускались замки с защелкой. Вышел из квартиры, хлопнул дверью, а замок сам по себе и закрылся. Устройство несложное.

Чтобы разобраться, как работает такой замок, рассмотрим клинышек, лежащий на столе. Клинышек – это прямоугольный параллелепипед, у которого один край срезан (рис.1). Такую же форму имеет защелка у замка. Пусть на этот клинышек вдоль вертикальной прямой сверху вниз действует по-

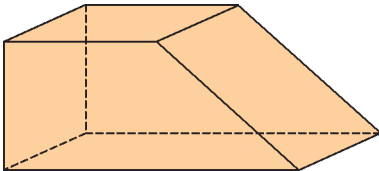


Рис. 1

стоянная сила \vec{F} . Разложим эту силу по двум направлениям – вдоль наклонной плоскости клинышка и вдоль поверхности стола (рис.2). Первая составляющая никакого действия на клинышек не производит, а вторая составляющая заставляет его двигаться. Заметим, что по мере смещения клинышка, точка приложения силы меняется.

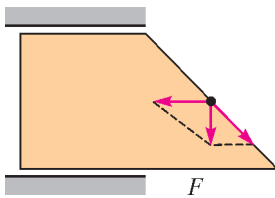


Рис. 2

Как может быть на деле реализовано действие силы \vec{F} ? Оказывается, в нашем самозакрывающемся замке

на клинышек-защелку действует другой клин, их наклонные плоскости совпадают, и одна скользит по другой. Причем этот другой клин неподвижен, а на него наезжает наш клинышек-защелка. Когда мы захлопываем дверь, защелка наезжает на дверной косяк, который утапливает защелку внутрь замка. А когда защелка оказывается напротив гнезда на дверном косяке, пружина выталкивает защелку в это гнездо. Дверь оказывается запертой на замок.

От поступательного движения к вращательному

Начнем с винтовой линии. Ее увидеть – нарисовать своими руками – очень просто. Вырежем из плотной бумаги прямоугольник, высота которого h , а основание $2\pi r$ (рис.3). Для склеивания цилиндра, высота которого h и радиус основания r , оставим еще небольшой язычок. Склеить цилиндр – это значит совместить противоположные точки двух боковых сторон прямоугольника.

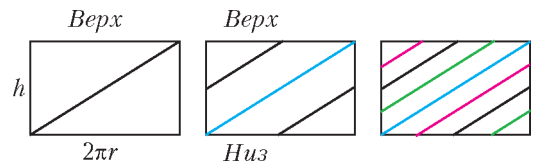


Рис. 3

Тогда диагональ прямоугольника превратится в винтовую линию на поверхности цилиндра, точнее – в один виток этой линии. Если в прямоугольнике в дополнение к диагонали провести еще два отрезка, то на цилиндре получим две винтовые линии. А можно получить и три винтовые линии, и четыре...

На рисунке 4 показаны пары диаметрально противоположных точек двух витков.

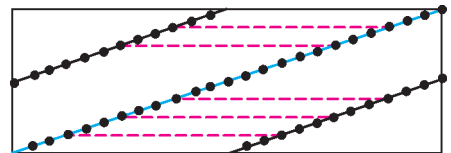


Рис. 4

Число таких пар равно 24. Если теперь проткнуть цилиндр спицами, каждая из которых проходит через две такие точки, то эти спицы образуют две винтовые лестницы, окружающие цилиндр снаружи. Они

похожи на пожарные лестницы. Ступени таких лестниц – прямолинейные отрезки длиной $R - r$, где $2R$ – длина спицы. Каждая следующая ступенька получается из предшествующей поворотом вокруг оси цилиндра на угол $\frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$ и сдвигом вверх на высоту $\frac{h}{24}$. А внутри цилиндра отрезки спиц лежат на особой поверхности – на *геликоиде* радиусом r .

Бумажный цилиндр мы использовали именно для построения модели, для того, чтобы ступени располагались горизонтально, параллельно плоскости стола, на котором стоит наш цилиндр. Мысленно удалим этот цилиндр, оставив его ось. Мы увидим ось цилиндра – вертикальный отрезок, разделенный на 24 равные части. Через каждую точку деления проходит отрезок длиной $2R$, перпендикулярный оси цилиндра. Проекция всех этих отрезков на плоскость стола – радиусы окружности, угол между соседними радиусами 15° . Вообразим теперь, что количество спиц неограниченно возрастает (ясно, что при этом их толщина должна неограниченно уменьшаться). Две соседние ступени станут неразличимыми на глаз, в пределе получится гладкая поверхность. Она образована движением прямой, вращающейся вокруг перпендикулярной к ней оси и одновременно движущейся поступательно в направлении этой оси. Эта поверхность и есть геликоид (рис.5).

Получить начальное представление о геликоиде можно так. Возьмите полоску клетчатой бумаги шириной 1 см и длиной 10–

16 см с клетками $0,5 \times 0,5$ см. Ее короткие стороны зажмите пальцами двух рук и расположите полоску вертикально. Эти стороны легко повернуть относительно друг друга на угол 90° (подобным образом заворачивают конфетную обертку, но там делают много оборотов). На полоске легко увидеть и ось вращения, и «ступени» геликоида. Конечно, при такой деформации ступени не будут прямолинейными отрезками, но этот дефект мал и незаметен. Если взять в четыре раза более длинную полоску, то ее можно закрутить на полный оборот. Тут вам может потребоваться помощь товарища, чтобы закручивание было равномерным на всем протяжении полоски. Поворачивать верхний край полоски относительно нижнего края будем (для определенности) против часовой стрелки, если смотреть на эту полоску сверху.

Впрочем, можно изготовить и другую модель, если у вас под рукой окажется кусок проволоки, которой завязывают пакет с хлебом на некоторых хлебозаводах. Проволока эта не круглая, а плоская (обычно ее длина 6 см, ширина 0,5 см). Этой проволоочной полоске можно придать форму геликоида, она жесткая и сохраняет деформацию (рис.6). Теперь возьмите полоску бумаги 1×4 см и проткните ее посередине этим проволоочным геликоидом. Перемещая полоску вдоль проволоки, т.е. вдоль геликоида, вы можете легко наблюдать вращение этой полоски бумаги. Именно так устроена одна популярная детская игрушка, когда вдоль пластмассового геликоида перемещается насаженный на геликоид пропеллер. Пропеллер надо

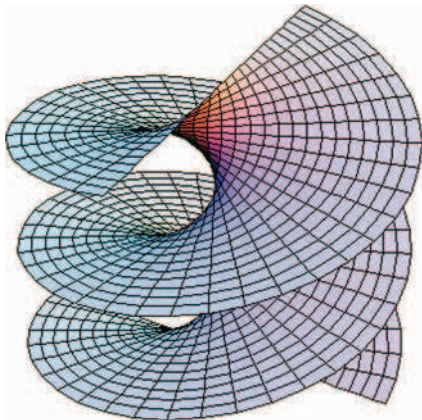


Рис. 5



Рис. 6

очень быстро толкать снизу вверх шариком, насаженным на геликоид, в результате пропеллер начинает очень быстро вращаться и, срываясь с геликоида, поднимается вверх довольно высоко. В этой игрушке геликоид неподвижен, а перемещается пропеллер – он же отрезок, он же ступенька.

Как геликоид раскручивает юлу

Принципиальное устройство юлы (рис.7) таково. Корпус юлы – это два конуса с совпадающими основаниями. Вершина ниж-



Рис. 7

него конуса, т.е. острие, располагается на столе или на полу. Вершина верхнего конуса чуть срезана, так что получается усеченный конус. Его верхнее основание – круглая пластина некоторой толщины. В этой пластине имеется прорезь, получается она так. Представим пересечение нашего геликоида и верха юлы. Реальный геликоид имеет толщину, поэтому в пересечении с круглой пластиной оказывается часть геликоида. Вот эта часть и выбрасывается из основания. Если юла неподвижна, то через эту щель геликоид можно протолкнуть сверху вниз. Геликоид при этом вращается по часовой стрелке. Итак, в этом случае прорезь неподвижна, геликоид движется вниз и вращается. Взаимное вращение геликоида и прорези можно представить и по-другому: геликоид (без вращения!) движется вниз, а прорезь вращается против часовой стрелки. Но прорезь – это корпус юлы,

тем самым, юла вращается против часовой стрелки. При этом геликоид скользит по поверхности прорези.

Можно увидеть некоторую аналогию с тем, как велосипедная цепь набегаёт на звездочку. Когда одно звено цепи покидает звездочку, на смену ему приходит другое звено и так далее. Так же две шестерни цепляются одна за другую: один зубец уходит, тут же приходит следующий, за ним еще один...

Сила, которую мы прикладываем к штоку-геликоиду, передается на корпус юлы. Касающиеся (совпадающие) поверхности геликоида и прорези можно приближенно считать поверхностями двух клиньев, о которых мы говорили раньше. Поверхность прорези – это полоска, движущаяся по геликоиду-штоку. Раскручиваем мы юлу непостоянно. Вдвинув шток-геликоид на максимальную глубину, мы выпускаем его из рук – юла крутится. Заметив замедление вращения, мы поднимаем шток вверх. При этом он никак с юлой не взаимодействует. Затем мы снова надавливаем на шток. Процесс повторяется циклически.

Подобным же образом происходит подпитка энергии при движении велосипеда. Мы крутим педали, прикладываем к ним силу, велосипед ускоряется. Потом мы можем не крутить педали – велосипед движется по инерции. Устройство сцепления штока с юлой похоже на сцепление ведомой звездочки с задним колесом велосипеда. При вращении в одну сторону есть зацепление, в другую – его нет.

В заключение предлагаем вам своими руками сделать модель юлы (рис.8). Вам потребуется стеклянный пузырек, лист бумаги с прорезью и кусок упомянутой выше проволоки. Ставим пузырек на стол, сверху кладем лист бумаги, в прорезь вставляем нашу проволоку. Теперь надавливаем сверху на шток-геликон – и лист бумаги вращается, как юла.



Рис. 8

Размышляем, решая задачу

М. БОНДАРОВ

Как-то раз, просматривая задачи ЕГЭ, я наткнулся на следующую задачу:

Пластичный шарик в момент $t = 0$ бросают с горизонтальной поверхности земли с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Одновременно с некоторой высоты над поверхностью земли начинает падать из состояния покоя другой такой же шарик. Шарик абсолютно неупруго сталкиваются в воздухе. Сразу после столкновения скорость шариков направлена горизонтально. В какой момент времени τ шарик упадет на землю? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Довольно быстро я понял, как ее следует решать стандартным образом. Но у меня давно выработалась привычка анализировать решенную задачу. И сразу возник вопрос: «А нельзя ли решить задачу иначе?» Тут же в голову пришло желание угадать, каким должен быть ответ в нашей задаче. «Зачем это нужно? – может спросить читатель. – Неужели серьезная наука физика похожа на детскую игру «Угадайку?»»

В качестве аргумента «за» не откажу себе в удовольствии сослаться на авторитет знаменитого американского физика Дж. Уилера. «Никогда не начинай вычислений, пока не знаешь ответа, – писал известный теоретик и выдающийся педагог. – Каждому вычислению предпосылай оценочный расчет: привлеки простые физические соображения (симметрию!, инвариантность!, сохранение!) до того, как начинаешь подробный вывод; продумай возможные ответы на каждую загадку. Будь смелее, ведь никому нет дела до того, что именно ты предположил. Поэтому делай предположения быстро, интуитивно. Удачные предположения укрепляют эту интуицию. Ошибочные предположения дают полезную встряску». Это высказывание ученого широко известно в научных кругах и даже получило специальное название: «Основное правило Уилера».

Соображения размерности помогут достаточно быстро сконструировать примерный вид конечной формулы. Действительно, из размерных величин в условие входит лишь начальная скорость v_0 да ускорение свободного падения g – вот и весь небогатый набор. Из него можно составить только одну комбинацию величин, имеющую размерность времени: v_0/g . Ясно, что заданный в условии угол α должен появиться в виде аргумента функции синуса, поскольку время полета тела, движущегося по параболе, определяется проекцией $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$ его начальной скорости на вертикальную ось y . Таким образом, мы приходим к выводу, что ответ должен иметь вид

$$\tau = k \frac{v_0 \sin \alpha}{g}, \quad (1)$$

где k – некий безразмерный числовой коэффициент. Его-то поиском нам и придется заняться для получения окончательного ответа.

Изобразим траектории шариков от момента начала их движения из точек A и B до столкновения в точке D , а затем до совместного падения в точке E (рис. 1). При столкновении шариков одинаковой массы проек-

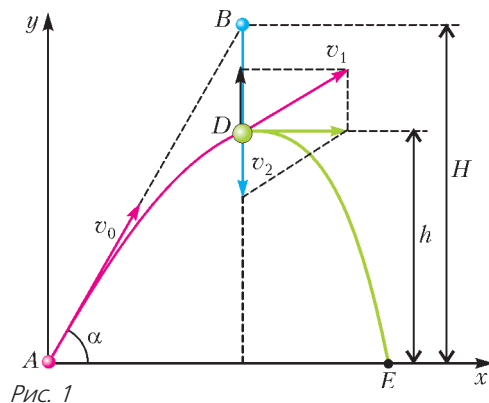


Рис. 1

ции векторов их скоростей \vec{v}_1 и \vec{v}_2 на вертикальную ось y должны быть равны по модулю и противоположны по знаку. Только в этом случае, согласно закону сохранения импульса, скорость слипшегося комка будет направлена горизонтально.

Замечание. Критически настроенный читатель может потребовать обоснования при-

(Продолжение см. на с. 34)

Трисекторы

Шарнирный механизм

Шарнирные механизмы – это системы из прямых жестких стержней, соединенных на концах шарнирами, которые позволяют стержням поворачиваться друг относительно друга. Такие механизмы используются в технике, по-видимому, с XVIII века. И сейчас они едва ли не повсеместны: от выдвигающего зеркала в ванной до некоторых типов автомобильной подвески.

Для нашей задачи они тоже пригодились. На рисунке 7 показан «веер», придуманный математиком Дж. Дж. Сильвестром в 1875 году.

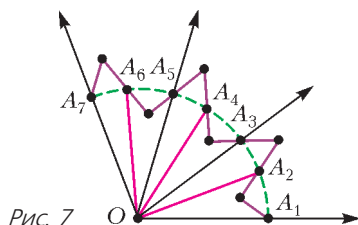


Рис. 7

Точки A_1, \dots, A_7 всегда находятся на одной окружности с центром O , и в этих точках фиолетовые звенья не поворачиваются друг относительно друга.

Другой вариант трисекции при помощи шарнирного механизма можно найти на сайте «Математические этюды» (www.etudes.ru/ru/etudes/angle-trisection/). Узнать больше о шарнирных механизмах можно в статьях Ю. Соловьева «Инверсоры» («Квант» №4 за 1990 г.) и Н. Андреева «Инверсоры» («Квант» №2 за 2017 г.).

Оригами

Да-да, это древнее искусство складывания причудливых фигурок из листа бумаги нашло свое отражение и в математике. Подробно о математическом оригами можно прочитать в статье А. Петрунина «Оригами и построения» в «Кванте» №1 за 2008 год. Мы же лишь приведем последовательность действий, которая позволяет разделить данный угол на три части (рис. 8). Этот способ предложил японец Хисаси Абэ.

Окончание. Начало см. в «Кванте» №8.

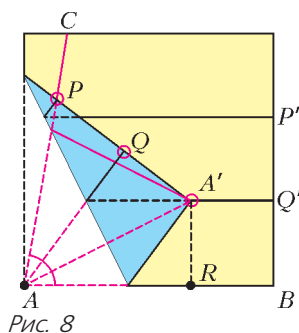


Рис. 8

Пусть на листе бумаги дан угол BAC , который требуется разделить на три равные части. Сначала нужно построить складки PP' и QQ' , параллельные AB , так, чтобы QQ' была посередине между PP' и AB . Затем нужно согнуть лист так, чтобы точка A (на рисунке 8 ее обрез обозначен A') попала на QQ' , а точка P одновременно с этим попала на AC . Тогда угол $A'AB$ будет равен трети исходного угла BAC .

Упражнение 8. Докажите это. Объясните, почему это построение нельзя воспроизвести при помощи циркуля и линейки (нельзя использовать аргумент, что это противоречило бы невозможности трисекции).

Вспомогательные кривые

Оказывается, выполнить трисекцию можно и обычными циркулем и линейкой. Но для этого нужно, чтобы на плоскости, на которой происходит построение, уже была нарисована вспомогательная кривая. Для этого годятся довольно много разных кривых, вот лишь пара простых примеров.

Гипербола $y = 2/x$. Пусть точка X – вершина ветви гиперболы, O – начало координат, а точки A и B расположены на прямой OX так, что $BA = AO = OX$ (рис. 9).

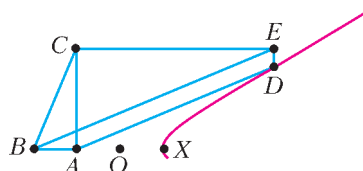


Рис. 9

Нужно разбить на три равные части угол ABC , причем точка C выбрана так, что угол BAC прямой. Для этого достаточно построить на гиперболе точку D такую, что $AD = = 2BC$. Тогда угол ABE – искомый.

Упражнение 9. Докажите это.

Парабола $y = x^2$. Пусть O – начало координат, а угол AOB – тот, который нужно разбить на три равные части (рис.10).

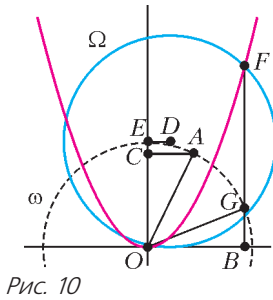


Рис. 10

Построим окружность ω радиуса 2 с центром в O . Последовательно строим: C – основание перпендикуляра, опущенного из точки A на ось параболы; точки D и E такие, что $OE = 2$, $ED \parallel AC$ и $AC = 2ED$; окружность Ω с центром D и радиусом DO , которая пересекает параболу в точке F . Тогда точка G , которая является точкой пересечения окружности ω и перпендикуляра из F на OB , будет лежать на трисектрисе угла AOB .

Упражнение 10. Докажите это.

Улитка Паскаля $r = \frac{1}{2} + \cos \varphi$. Эта кривая задана в полярных координатах. В декартовых координатах она задается уравнением $(x^2 - x + y^2)^2 = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$. Эту кривую можно получить, прокатывая окружность радиуса $1/2$ с жестко прикрепленной точкой на расстоянии 1 от центра по такой же неподвижной окружности, – точка как раз и прочертит улитку (рис. 11).

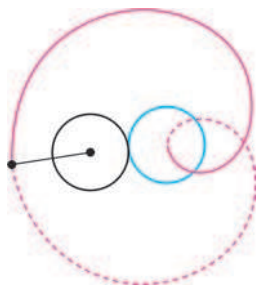


Рис. 11

Трисекцию острого угла при помощи улитки Паскаля мож-

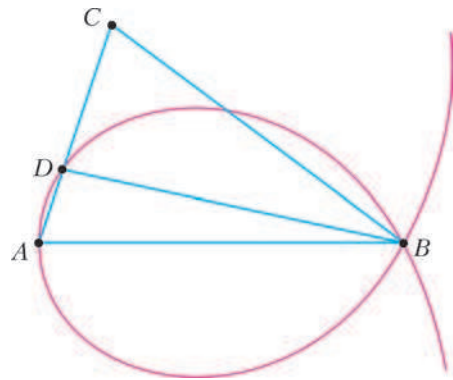


Рис. 12

но проделать, например, так. Пусть угол ABC – тот, который нужно разделить на три части (рис. 12), причем $AB = BC$. Тогда точка D , в которой отрезок AC пересекает петлю улитки, лежит на трисектрисе BD .

Упражнение 11. Докажите это.

Последовательные приближения

Мы начали с того, что решить задачу трисекции при помощи циркуля и линейки нельзя. Это означает, что в общем случае невозможно построить трисектрису *абсолютно точно*. Вместе с тем, циркуль и линейка вполне позволяют построить луч, который будет *сколь угодно близок* к трисектрисе данного угла. И делается это совсем просто.

Поскольку циркулем и линейкой можно построить биссектрису, то можно делить угол и на четыре части. Остается вспомнить, что сумма геометрической прогрессии $\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots = \frac{1}{3}$. Поэтому построение выглядит так: делим угол на 4 части, крайнюю «четвертинку» оставляем, а соседнюю снова делим на 4 части. Ту из новых маленьких частей, которая прилегает к большой «четвертинке», объединяем с ней, а соседнюю с ней снова делим на 4 части и так далее. «Четвертинка», которую мы все время пополняем, будет все ближе и ближе к трети исходного угла. Например, после пятого шага относительная погрешность будет составлять всего примерно 0,01%.

Материал подготовил
Е.Епифанов

(Начало см. на с. 31)

менения этого закона при столкновении шариков, ведь система из двух шариков не является замкнутой – на них действует ничем не скомпенсированная сила тяжести. Отметим, однако, что время взаимодействия шариков мало, а сила тяжести имеет ограниченную величину, вот почему закон сохранения импульса в нашем случае можно применять.

Мы уже говорили, что время полета шариков не зависит от горизонтальной составляющей начальной скорости первого тела. Поэтому для решения уместно **переформулировать задачу**. Давайте изменим ее условие так, чтобы она превратилась в задачу о столкновении тел, движущихся по вертикали (вычеркнем из условия лишние слова, добавив в него новые):

Пластиковый шарик в момент $t = 0$ бросают с горизонтальной поверхности земли вертикально вверх с начальной скоростью v_{0y} под углом α к горизонту. Одновременно с некоторой высоты над поверхностью начинает падать из состояния покоя другой такой же шарик. Шарик абсолютно неупруго сталкиваются в воздухе. Сразу после столкновения скорость шариков направлена горизонтально равна нулю. В какой момент времени τ шарик упадет на землю? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ясно, что при $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$ ответы обеих задач совпадут.

Разобьем решение нашей переформулированной задачи на два этапа: движение шариков до встречи; движение слипшегося комка. Определим сначала, в какой момент времени t_1 шарик встретятся в точке D (рис.2). Ответ на этот вопрос можно дать, зная, например, высоту H , на которой находится точка B . В точке D шарик имеют равные по модулю и направленные противоположно скорости. При этом второй шарик за время t_1 набрал скорость v_1 , т.е. изменил свою скорость на величину v_1 . Но ведь и первый шарик двигался с тем же ускорением \vec{g} , поэтому изменение его скорости

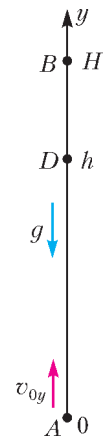


Рис. 2

также равно по модулю v_1 , правда он при этом уменьшал свою скорость. Попробуем представить, что бы произошло, если бы шарик не столкнулся. Тогда первый шарик продолжал бы свое движение вверх до остановки на мгновение в верхней точке B . Причем это движение от D до B заняло бы столько же времени, сколько продолжалось его движение от A до D , т.е. t_1 . В этом можно убедиться, мысленно засняв на киноплёнку движение второго шарика, а затем прокрутив ее обратно. Тогда в обратном движении второй шарик долетел бы, тормозя, от D до B за то же время t_1 . Однако и первый шарик летел бы так же, если бы не встретил на своем пути второй шарик. Следовательно, время подъема первого шарика на высоту H равно $2t_1$. Теперь мы легко определяем время t_1 :

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{2g} = \frac{v_0 \sin \alpha}{2g}, \quad (2)$$

а также высоту подъема H :

$$H = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (3)$$

Найденное время t_1 позволит нам лишний раз убедиться в том, что перед столкновением в точке D шарик имеют одинаковые по модулю скорости. Действительно, первый шарик к этому моменту уменьшает свою скорость до величины

$$v_{1y} = v_{0y} - gt_1 = v_{0y} - g \frac{v_{0y}}{2g} = \frac{v_{0y}}{2} = \frac{v_0 \sin \alpha}{2},$$

а второй – увеличивает свою до значения

$$v_{2y} = -gt_1 = -g \frac{v_{0y}}{2g} = -\frac{v_{0y}}{2} = -\frac{v_0 \sin \alpha}{2}.$$

Стоп! По ходу наших рассуждений «запустили» формулы! Но ведь хотелось рассказать о красивом решении задачи, которое, как правило, подразумевает сокращение математических преобразований, а еще лучше – решение задачи в уме. Попробуем возразить: во-первых, формулы (2) и (3) не являются настолько сложными, чтобы было трудно удерживать их в голове без записи, а во-вторых, – и это главное! – мы выберем сейчас другой путь решения, где преобразовывать формулы не придется. Добавим, что в дальнейшем ходе решения формула (3) нам вообще не понадобится. Для выхода на окончательный ответ будет использована

только простейшая формула

$$h = \frac{gt^2}{2}. \quad (4)$$

Как только мы узнаем, во сколько раз β высота H точки B больше высоты h встречи шариков в точке D , задача будет решена. Действительно, из формулы (4) следует, что если высоты отличаются в β раз, то времена падения тел отличаются в $\sqrt{\beta}$ раз. Для определения величины β используем закон нечетных чисел, который гласит: тело, движущееся без начальной скорости с постоянным ускорением, за равные промежутки времени проходит расстояния, отношения которых образуют последовательность нечетных чисел. Мы уже выяснили, что если бы второе тело не столкнулось в точке D с первым, то время его полета от B до D равнялось бы времени полета от D до A . Тогда из закона нечетных чисел следует, что $DA = 3BD$, т.е. $h = \frac{3}{4}H$. Таким образом, шарики после столкновения двигались до падения на землю время

$$t_2 = \sqrt{3}t_1,$$

а общее время движения равно

$$\tau = t_1 + t_2 = t_1(1 + \sqrt{3}).$$

Подставив сюда выражение для t_1 из формулы (2), получим

$$\tau = \frac{v_0 \sin \alpha}{2g} (1 + \sqrt{3}). \quad (5)$$

Итак, ответ нами найден, причем действительно практически устно. Неплохо бы проверить его, выбрав иной путь решения. Для этого используем надежный **графический способ решения**.

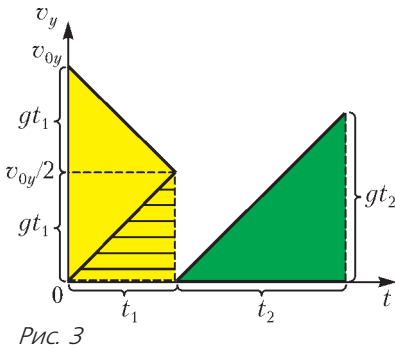


Рис. 3

Построим график зависимости проекций на вертикальную ось y скоростей шариков от времени (рис.3). При построении было учтено, что ускорение тел одинаково (\bar{g}), поэтому наклон графиков также одинаков. Графики делают очевидными те соотношения, которые были получены в первом способе решения. Рассмотрим это подробнее по пунктам.

1) Из графика ясно видно, что модуль изменения проекции скорости каждого из тел до встречи равен $v_{0y}/2$.

2) Главное достоинство графиков скорости – наглядное определение пройденных расстояний и соотношений между ними, поскольку площадь под графиком скорости численно равна пройденному пути. Площадь трапеции, выделенной желтым цветом, численно равна расстоянию, пройденному первым шариком до встречи. Расстояние, на которое переместился за это время второй шарик, совпадает с площадью заштрихованного треугольника. Очевидно, что вторая площадь втрое меньше первой. Таким образом, мы легко приходим к соотношению $h = \frac{3}{4}H$, откуда сразу получается закон нечетных чисел.

3) И наконец, график позволяет установить соотношение между временем t_1 полета до столкновения и временем t_2 движения слипшегося комка до падения. Сумма площадей трапеции и заштрихованного треугольника равна площади прямоугольника со сторонами v_{0y} и t_1 , в то же время она численно равна первоначальному расстоянию H по вертикали между шариками, т.е.

$$H = v_{0y}t_1.$$

С другой стороны, эта площадь вчетверо больше площади заштрихованного треугольника:

$$H = 4 \frac{gt_1^2}{2}.$$

После столкновения слипшиеся шарики начнут падать и по вертикали пройдут расстояние

$$h = \frac{3}{4}H.$$

Геометрически это расстояние представлено площадью зеленого прямоугольного треугольника, катеты которого равны gt_2 и t_2 ,

т.е.

$$h = \frac{gt_2^2}{2}.$$

Из последних трех равенств получим соотношение между временами t_1 и t_2 :

$$t_2 = t_1\sqrt{3},$$

после чего снова выходим на конечный ответ (5).

Таким образом, нами получены два независимых способа решения задачи. Однако существует и третий способ решения: **изучение движения центра масс системы**.

Рассматривать движение центра масс системы двух шариков очень удобно, поскольку не требуется разбивать решение на два этапа: до и после столкновения, ведь движение центра масс системы не зависит от взаимодействий тел этой системы друг с другом, а определяется только действием внешних сил.

Напомним, что координата y_C и скорость v_{Cy} центра масс C системы двух материальных точек с массами m_1 и m_2 , расположенных в точках с координатами y_1 и y_2 и имеющих скорости v_{1y} и v_{2y} соответственно, определяются по формулам

$$y_C = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2},$$

$$v_{Cy} = \frac{m_1v_{1y} + m_2v_{2y}}{m_1 + m_2},$$

что для нашего случая равных масс дает

$$y_C = \frac{H}{2} \text{ и } v_{Cy} = \frac{v_{0y}}{2}.$$

Центр масс движется из точки C с ускорени-

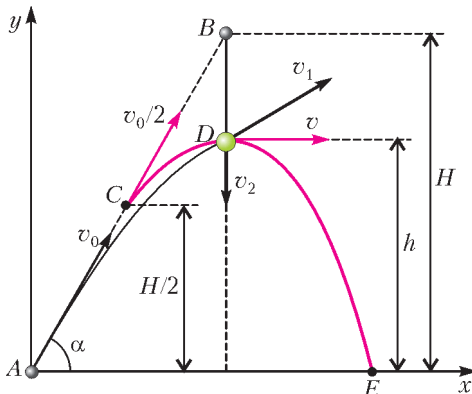


Рис. 4

ем \vec{g} , направленным вертикально вниз, и до падения на землю в точке E перемещается вниз по вертикали на расстояние $H/2$ (на рисунке 4 красным цветом показаны траектория движения центра масс и векторы его скоростей в начальный момент $t = 0$ и в момент t_1 столкновения). Запишем уравнение движения центра масс:

$$-\frac{H}{2} = \frac{v_{0y}}{2}\tau - \frac{g\tau^2}{2},$$

а затем приведем его к виду

$$\tau^2 - \frac{v_{0y}}{g}\tau - \frac{H}{g} = 0.$$

В решении этого квадратного уравнения

$$\tau = \frac{v_{0y}}{2g} \pm \sqrt{\frac{v_{0y}^2}{4g^2} + \frac{H}{g}}$$

необходимо отбросить знак «минус», как противоречащий физическому смыслу, а также подставить в него величину $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$ и найденное ранее выражение (3) для H , после чего мы в третий раз приходим к ответу (5).

Заметим, что и в этом случае решение можно выполнить без расчетов на бумаге. Правда, имеется вероятность потерять в преобразованиях какую-либо из букв, входящих в уравнение. Чтобы по возможности избежать подобных ошибок, применим так называемое обезразмеривание физических величин. Для этого перейдем от абсолютных величин v_{0y} и g к относительным, преобразовав сначала уравнение движения центра масс с помощью выражения (3) к виду

$$\tau^2 - \frac{v_{0y}}{g}\tau - \frac{v_{0y}^2}{2g^2} = 0,$$

а затем умножив на $\frac{g}{v_{0y}}$. Тогда для безразмерного времени x получим

$$x^2 - x - \frac{1}{2} = 0.$$

С этим уравнением, несомненно, без труда справится каждый читатель журнала и придет к ответу

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}).$$

Осталось лишь, отбросив, как и в предыдущем случае, знак «минус», добавить размер-

ную комбинацию $\frac{v_0 \sin \alpha}{g}$, и мы в очередной раз приходим к ответу (5).

Конечно, найти корни уравнения вида $x^2 + px + q = 0$ нетрудно. Я же привык решать его с помощью песенки, услышанной мною в детстве в передаче «Радионяня»:

Чтобы решить уравнение,
корни его отыскать,
надо немного терпения,
ручку, перо и тетрадь.
Минус напишем сначала.
Рядом с ним – пэ пополам,
плюс-минус знак радикала,
с детства знакомого нам.
Ну, а под корнем, приятель,
сводится все к пустяку:
пэ пополам и в квадрате
минус несчастное ку.

Настало время подвести итоги. Задача решена тремя различными способами. Вместе с тем, существует и четвертый, о котором я вспоминал в самом начале и которым, по-видимому, и решали большинство сдававших экзамен. В чем его особенность? Попробуем лучше назвать те из перечисленных ранее приемов решения, которые в нем отсутствуют. В четвертом способе не используются графики, не нужно рассматривать движение центра масс, а также обезразмеривать физические величины. Достаточно лишь записать уравнения зависимости координат y движущихся шариков и проекций их скоростей на ту же ось от времени, а затем приравнять, соответственно, эти координаты и проекции скоростей в момент времени t_1 . Далее, конечно, понадобится закон сохранения импульса и кинематическая формула падения тела с известной высоты без начальной скорости. Не сомневаюсь, что читатель без труда сумеет восстановить этот способ решения.

Может возникнуть вопрос: все ли подходы к решению были рассмотрены? Конечно, нет. Вот, к примеру, еще один независимый способ нахождения величин t_1 и H . Как известно, при равноускоренном движении зависимость скорости от времени имеет вид

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t.$$

Используя эту формулу для описания движения центра масс системы шариков в тече-

ние времени t_1 до столкновения, получим выражение

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}_0}{2} + \vec{g}t_1.$$

Изобразив это векторное равенство наглядно на рисунке 5, определим нужное время:

$$\sin \alpha = \frac{gt_1}{v_0/2},$$

$$\text{и } t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{2g}.$$

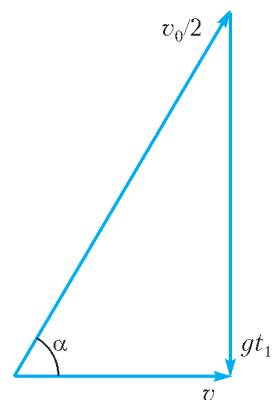


Рис. 5

А высоту H можно найти из рисунка 1. Обратите внимание, что вектор \vec{v}_0 начальной скорости первого шарика нацелен на точку B . Это не случайно. Особенно очевидным становится такой выбор направления скорости, если перейти в систему отсчета, связанную со вторым шариком. В ней первый шарик движется прямолинейно и равномерно по направлению ко второму со скоростью \vec{v}_0 . За время t_1 до столкновения первый шарик должен пролететь расстояние $H/\sin \alpha$, поэтому

$$\frac{H}{\sin \alpha} = v_0 t_1, \text{ и } H = v_0 t_1 \sin \alpha.$$

Подставив сюда найденное ранее выражение для t_1 , получим

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Заметно подуставший от всех описанных выше способов читатель вправе спросить: «Ну, а теперь-то можно поставить точку в решении этой задачи?» Думаю, что, действительно, способов нахождения времени τ приведено достаточно. Однако есть и другие величины, которые небезынтересно было бы поискать в нашей задаче. Приведем только два возможных вопроса, на которые любознательный читатель несомненно сумеет найти правильные ответы.

1. С какой скоростью (по величине и направлению) шарики упадут на землю?
2. На каком расстоянии от места старта первого шарика находится их общая точка падения E ?

Изогональное сопряжение и педальные треугольники

Д.ПРОКОПЕНКО

В ПЕРВОЙ ЧАСТИ ЭТОЙ СТАТЬИ МЫ ПОВТОРИМ некоторые понятия и факты, связанные с изогональным сопряжением. Большинство из этих фактов известны и содержатся во многих источниках (см., например, недавнюю статью [1], для более глубокого изучения изогонального сопряжения рекомендуем статью [5]). Во второй части мы сконцентрируем свое внимание на замечательном факте о том, что изогонально сопряженные точки имеют общую педальную окружность. Оказывается, этот факт можно связать с сюжетами многих олимпиадных задач.

Основные свойства изогоналей и геометрия треугольника

Изогоналями относительно сторон угла (или изогональными прямыми) называются прямые, проходящие через вершину угла и симметричные относительно биссектрисы этого угла (рис. 1). Часто используется следующее свойство изогоналей.

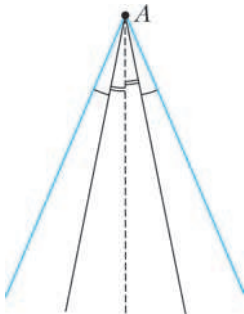


Рис. 1

Свойство 1. Пусть AP и AQ – изогонали угла с вершиной A , а B_1 и C_1 – проекции

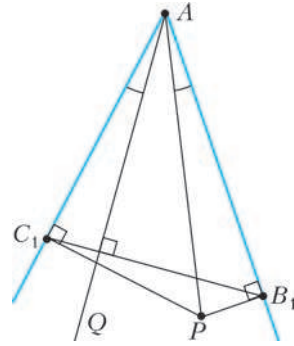


Рис. 2

точки P на стороны угла (рис. 2). Тогда $AQ \perp B_1C_1$.

Упражнение 1. Докажите это свойство.

Пусть из точки P на прямые BC , AC и AB опущены перпендикуляры PA_1 , PB_1 и PC_1 (рис. 3). Треугольник $A_1B_1C_1$ называется

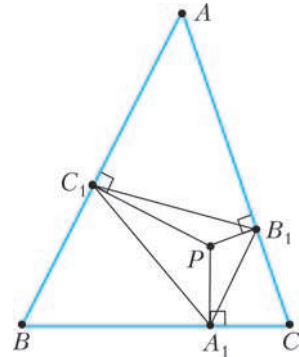


Рис. 3

педальным треугольником точки P относительно треугольника ABC , а его описанная окружность – педальной окружностью точки P . Если точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC , то педальный треугольник вырождается и точки A_1 , B_1 , C_1 лежат на одной прямой.

Будем использовать обозначения: O – центр описанной окружности, H – точка пересечения высот (ортоцентр) треугольника ABC . В следующем утверждении мы встречаем важный пример изогоналей в треугольнике:

Радиус описанной окружности и высота, проведенные из одной вершины треугольника, изогональны относительно угла треугольника (рис. 4).

Упражнение 2. Докажите это.

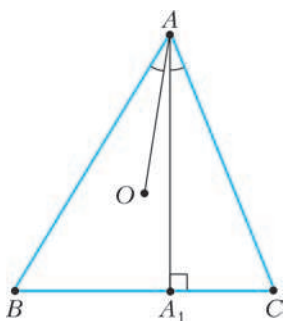


Рис. 4

Пусть в треугольнике ABC провели высоты. Треугольник с вершинами в основаниях высот называется *ортотреугольником*. Ортотреугольник является *педальным* треугольником ортоцентра H . Тогда по свойству 1 получаем:

Радиус описанной окружности, проведенный из вершины треугольника, перпендикулярен соответствующей стороне ортотреугольника (рис.5).

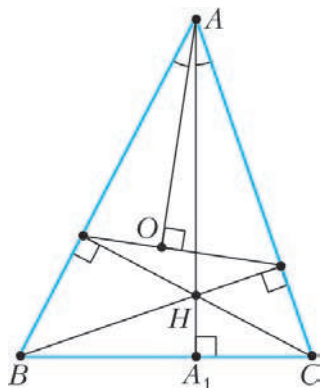


Рис. 5

Упражнение 3. Из точки K внутри треугольника ABC опущены перпендикуляры KA_1 , KB_1 и KC_1 на стороны BC , AC , AB соответственно. Через точку A_1 проведена прямая l_1 , параллельная прямой, симметричной прямой AK относительно биссектрисы угла A . Прямые l_2 , l_3 определяются аналогично. Докажите, что прямые l_1 , l_2 , l_3 пересекаются в одной точке.

Указание. Пусть прямые l_A и AK – изогоналы $\angle BAC$, тогда по условию $l_1 \parallel l_A$. По свойству 1 имеем $l_A \perp B_1C_1$.

Отметим еще одно свойство изогоналей.

Свойство 2. Пусть AP и AQ – изогоналы относительно угла, а точки X и Y симметричны P относительно сторон угла (рис.6).

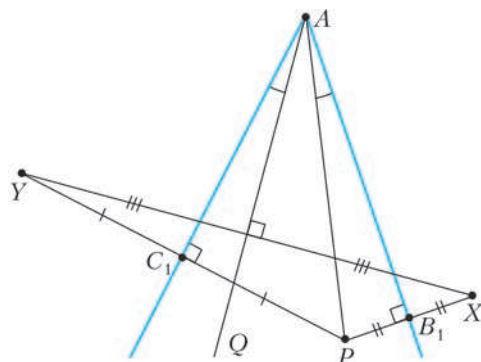


Рис. 6

Тогда AQ является *серединным перпендикуляром* к отрезку XY .

Доказательство. Согласно свойству 1, $AQ \perp B_1C_1$, $B_1C_1 \parallel XY$ (как средняя линия). Тогда $AQ \perp XY$. Теперь заметим, что в точке A пересекаются серединные перпендикуляры к сторонам PX и PY треугольника PXY . Или чуть иначе: $YA = AP = AX$, тогда треугольник AXY – равнобедренный, и перпендикуляр к стороне XY является *серединным перпендикуляром* к XY .

Пусть точки X , Y и Z симметричны P относительно прямых AC , AB и BC (рис.7). Треугольник XYZ будем называть *удвоенным педальным треугольником* точки P относительно треугольника ABC . Из свойства 2 вытекает такое следствие:

Изогоналы являются серединными перпендикулярами к сторонам удвоенного педального треугольника.

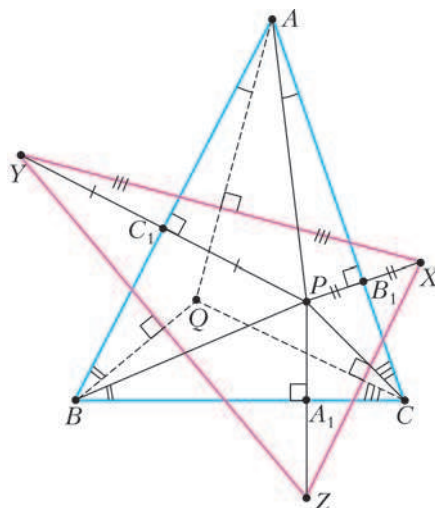


Рис. 7

Изогональное сопряжение

Теорема 1. Пусть точка P не лежит на описанной окружности треугольника ABC . Тогда прямые, изогональные к прямым AP , BP и CP , пересекаются в одной точке (рис.8,а).

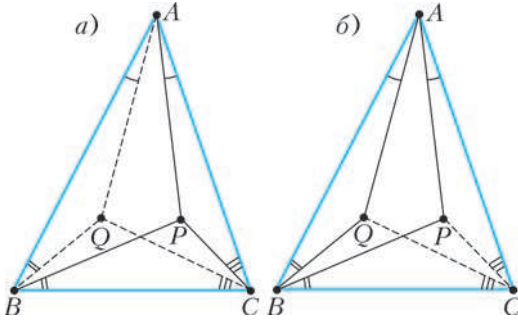


Рис. 8

Обозначим точку пересечения Q . Точка Q называется *изогонально сопряженной* для точки P . Можно также говорить, что точки P и Q *изогонально сопряжены*.

Пользуясь следствием из свойства 2, мы можем доказать теорему и сразу получить *геометрический смысл точки Q*: это центр описанной окружности удвоенного педального треугольника XYZ .

Теорему 1 используют и в немного другой формулировке.

Теорема 1'. Если AP и AQ , BP и BQ – две пары изогоналей в треугольнике ABC , то CP и CQ – тоже изогонали (рис.8,б).

Отметим, что если точка P лежит на описанной окружности и отлична от вершин треугольника ABC , то изогонали к AP , BP и CP параллельны друг другу.

Упражнение 4. Докажите это.

Очевидно, биссектриса изогональна сама себе. Тогда центр вписанной и центры вне-вписанных окружностей изогонально сопряжены сами себе.

Упражнение 5. а) На биссектрисе угла A треугольника ABC внутри треугольника взяты точки D и F так, что $\angle DBC = \angle FBA$. Докажите, что $\angle DCB = \angle FCA$.

б) Точка M расположена внутри треугольника ABC , A_1 – точка, симметричная M относительно внешней биссектрисы угла A ; аналогично определяются точки B_1 , C_1 . Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

в) Пусть AA_0 , BB_0 , CC_0 – высоты в треугольнике ABC , M – произвольная точка, A_1 – точка, симметричная M относительно стороны BC ; аналогично определяются точки B_1 , C_1 . Докажите, что прямые B_0B_1 , C_0C_1 , A_0A_1 пересекаются в одной точке.

Указания. б) Прямые пересекаются в точке, изогонально сопряженной M относительно треугольника ABC ; в) докажите, что стороны треугольника ABC лежат на внешних биссектрисах для треугольника $A_0B_0C_0$, и воспользуйтесь п.б).

Центр описанной окружности и ортоцентр

Вспомним, что радиус описанной окружности и высота, проведенные из одной вершины треугольника, изогональны. Тогда точки O и H – изогонально сопряжены.

Упражнение 6. а) Пусть прямая a проходит через вершину A треугольника ABC и перпендикулярна стороне B_1C_1 ортотреугольника. Прямые b и c определяются аналогично. Докажите, что прямые a , b и c пересекаются в одной точке.

б) Пусть H_1, H_2, H_3 – точки, симметричные H относительно сторон треугольника ABC . Докажите, что точки H_1, H_2, H_3 лежат на описанной окружности треугольника ABC .

в) Через основание высоты AA_1 треугольника ABC проведена прямая l_1 , параллельная прямой AO . Прямые l_2, l_3 определяются аналогично. Докажите, что прямые l_1, l_2, l_3 пересекаются в одной точке.

Точка пересечения касательных и удвоенная медиана

Пусть AM – медиана треугольника ABC . Сделаем стандартное построение. Удвоим медиану AM за точку M и получим точку D . Построим точку P , изогональную к D . Для этого достаточно построить изогонали к BD и CD . Пусть углы треугольника равны $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Отложим от стороны BA угла ABC изогональ к BD (рис. 9,а). Тогда эта прямая образует со стороной BC угол α . Аналогично построим изогональ к CD . Пусть полученные прямые пересекаются в точке P . Мы получили, что $\angle PBC = \angle PCB = \angle BAC = \alpha$. По известному признаку (угол между касательной и хордой) PB и CP – касательные к описанной окружности треугольника ABC . Тогда по теореме 1' AP является изогональю для медианы AM относительно угла BAC . Эта изогональ называется *симедианой*. Мы получили основное свойство симедианы:

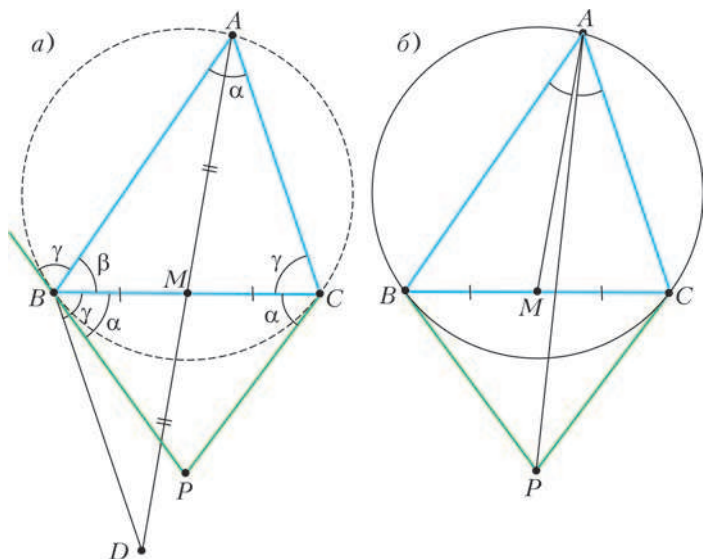


Рис. 9

Симедиана, проведенная через вершину A , проходит через точку пересечения касательных, проведенных в точках B и C к описанной окружности треугольника ABC (рис. 9,б).

Подробнее о свойствах симедианы можно прочитать в статье [4].

Упражнение 7. а) (Устная олимпиада по геометрии, 2004 г.) Пусть C_1 и B_1 – проекции точки P пересечения касательных, проведенных в точках B и C к описанной окружности треугольника ABC , AM – медиана. Тогда $AM \perp B_1C_1$.

б) (Всероссийская олимпиада, 2013 г.) Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность Ω . Касательные, проведенные к Ω в точках B и C , пересекаются в точке P . Точки D и E – основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые AB и AC . Докажите, что точка пересечения высот треугольника ADE является серединой отрезка BC .

Общая педальная окружность

Вернемся к изучению свойств изогоналей угла. Пусть AP и AQ – изогонали угла BAC .

Свойство 3. Проекции точек P и Q на стороны угла AB и AC лежат на одной окружности (рис.10), причем центр этой окружности – середина отрезка PQ .

Упражнение 8. Докажите это свойство.

Теперь мы готовы доказать основную теорему этого раздела.

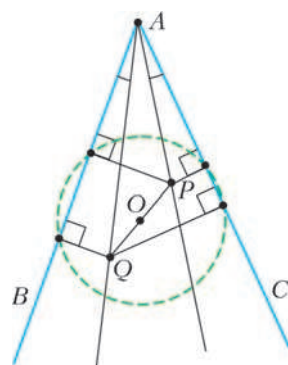


Рис. 10

Теорема 2. Педальные окружности изогонально сопряженных точек P и Q совпадают.

Доказательство. По свойству 3 проекции точек P и Q на прямые AB и BC лежат на одной окружности (рис.11). То же верно и для проекций точек P и Q на прямые AB и AC . Но эти две окружности имеют общий

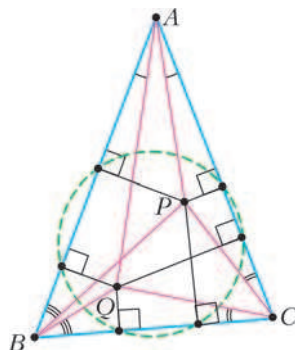


Рис. 11

центр – середину отрезка PQ . Кроме того, они имеют общую точку, значит, эти окружности совпадают.

Упражнение 9 (финальный тур Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина, 2006 г.). Дан треугольник ABC и точка P внутри него. Точки A', B', C' – проекции P на прямые BC, CA, AB . Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника $A'B'C'$, лежит внутри треугольника ABC .

Посмотрим, какой результат даст теорема 2 для уже знакомой пары изогонально сопряженных точек O и H . Вершины педального треугольника точки O – середины сторон, а для точки H – основания высот. Тогда по теореме 2 все эти шесть точек лежат на

одной окружности. Эта окружность называется *окружностью Эйлера*.

Далее применим нашу теорию для решения задач.

Четырехугольник с двумя равными противоположными углами

Задача 1. *Диагонали параллелограмма $ABCD$ (отличного от прямоугольника) пересекаются в точке M (рис.12). Докажите, что точка M , а также основания*

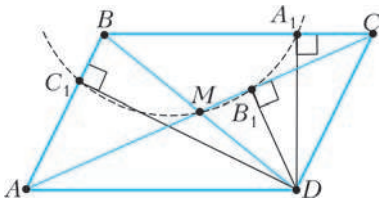


Рис. 12

перпендикуляров, опущенных из точки D на прямые BC , CA и AB , лежат на одной окружности.

Переформулируем задачу. Надо доказать, что точка M лежит на pedalной окружности точки D относительно треугольника ABC ($A_1B_1C_1$ – pedalный треугольник точки D). По теореме 2 на этой же окружности лежат проекции на стороны треугольника ABC изогонально сопряженной точки. Если мы докажем, что одна из проекций совпала с M , то задача решена.

Решение. Построим точку P , изогонально сопряженную к D . Поскольку BD – удвоенная медиана, то, по свойству симедианы, P – точка пересечения касательных к описанной окружности треугольника ABC , проведен-

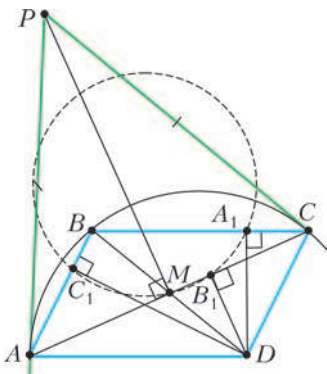


Рис. 13

ных в точках A и C (рис.13). По теореме 2 точки P и D имеют общую pedalную окружность. Точка M – проекция точки P на AC . Следовательно, точка M лежит на окружности $A_1B_1C_1$.

Оказывается, что эту задачу можно обобщить.

Задача 2 (о четырехугольнике). *В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A и C равны (рис.14). Докажите, что основания*

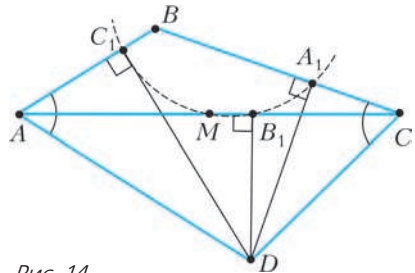


Рис. 14

перпендикуляров, опущенных из точки D на прямые AB , BC , AC , и середина отрезка AC лежат на одной окружности или на одной прямой.

Упражнения

10. Докажите это.

Указание. Пусть точка P – изогонально сопряженная к D относительно треугольника ABC . Докажите, что M – проекция P на AC .

11 (M991). В треугольнике ABC точка M – середина BC , H – основание высоты, проведенной из A на BC . Точки P и Q внутри угла BAC выбраны так, что $\angle BAP = \angle CAQ$, $BP \perp PA$, $AQ \perp QC$ (рис.15). Докажите, что точки P , Q , M и H лежат на одной окружности.

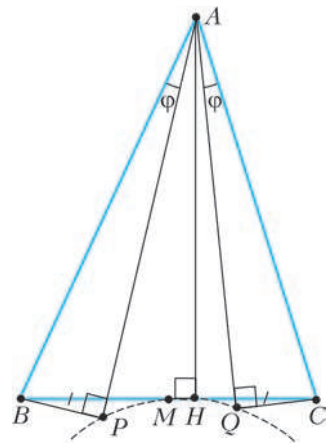


Рис. 15

Указание. Эта конструкция похожа на задачу о четырехугольнике.

12 (Московская математическая олимпиада, 1987 г.). Точка P внутри треугольника ABC такова, что $\angle PBA = \angle PCA$ (рис.16). Пусть C_1 и B_1 – проекции точки P на стороны AB и AC

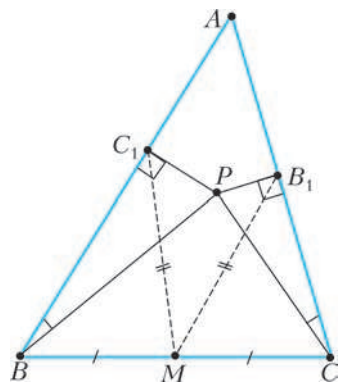


Рис. 16

соответственно, M – середина BC . Докажите, что $MB_1 = MC_1$.

Указание. Заметим, что в условии уже есть проекции точки P на две стороны и середина стороны. Добавим еще точку A_1 – проекцию точки P на сторону BC . Таким образом можно построить конструкцию из задачи 2 (для случая невыпуклого четырехугольника $ABPC$). Останется доказать равенство хорд в окружности, проходящей через A_1, B_1, C_1, M .

Снова точка пересечения касательных и удвоенная медиана

Рассмотрим точку P пересечения касательных к описанной окружности треугольника ABC , проведенных в точках B и C , и удвоенную медиану AD (рис.17). Воспользуемся теперь теоремой об общей pedalной окружности, чтобы «придумать» задачу. Мы уже знаем, что точки P и D изогонально сопряжены и у них общая pedalная окружность. А теперь «спрячем» некоторые элементы конструкции. Именно, попробуем избавиться в условии задачи от точки D (которая была бы подсказкой к решению). Проведем высоту AH . Поскольку $ABDC$ – параллелограмм, то проекция X точки D на BC и точка H симметричны относительно середины M отрезка BC , т.е. $CX = BH$. Теперь мы готовы сформулировать задачу, которая практически эквивалентна сложной олимпиадной задаче (упражнение 13).

Задача 3. В остроугольном неравнобед-

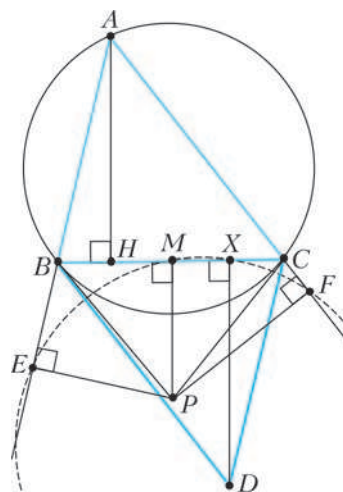


Рис. 17

ренном треугольнике ABC проведена высота AH , точка M – середина BC . Касательные к описанной окружности треугольника ABC , проведенные в точках B и C , пересекаются в точке P . На стороне BC отложили отрезок $CX = BH$. Точки E и F – проекции точки P на стороны AB и AC . Докажите, что точки E, F, M и X лежат на одной окружности.

Упражнения

13 (Всероссийская олимпиада, 2015 г.). В остроугольном неравнобеденном треугольнике ABC проведены медиана AM и высота AH . На прямых AB и AC отмечены точки Q и P соответственно так, что $QM \perp AC$ и $PM \perp AB$ (рис.18). Окружность, описанная около треугольника PMQ , пересекает прямую BC вторично в точке X . Докажите, что $BH = CX$.

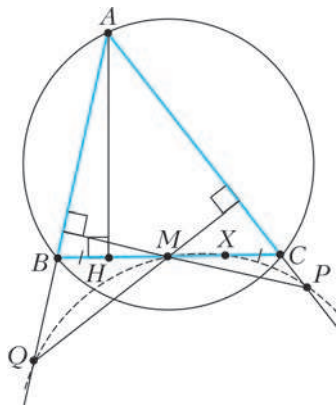


Рис. 18

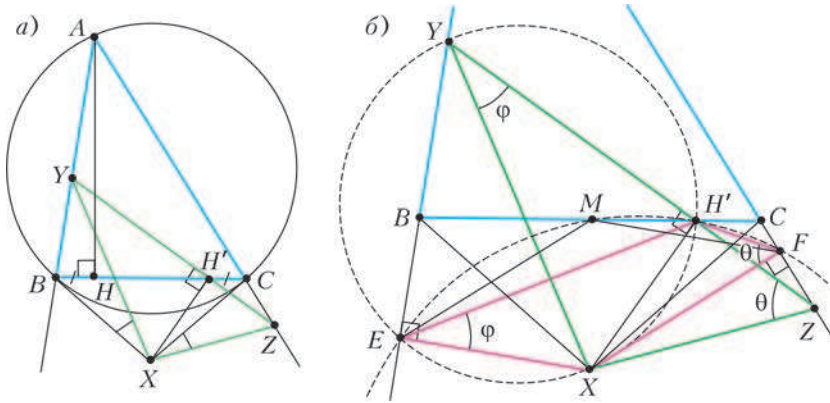


Рис. 19

Указание. «Верните» на чертеж точку пересечения касательных к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C и воспользуйтесь результатом упражнения 7,6.

14 (заочный тур Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина, 2017 г.). Касательные к описанной окружности треугольника ABC , проведенные в точках A и B , пересекаются в точке D . Окружность, проходящая через проекции D на прямые BC , CA , AB , повторно пересекает AB в точке C' . Аналогично строятся точки A' , B' . Докажите, что прямые AA' , BB' , CC' пересекаются в одной точке.

В завершение попробуем решить еще одну довольно сложную задачу.

Задача 4 (Иранская олимпиады по геометрии, 2014 г.). Пусть H – основание высоты из вершины A треугольника ABC и H' – точка, симметричная точке H относительно середины стороны BC (рис. 19,а). Касательные к описанной окружности треугольника ABC , проведенные в точках B и C , пересекаются в точке X . Перпендикуляр к XH' , проведенный в точке H' , пересекает прямые AB и AC в точках Y и Z соответственно. Докажите, что $\angle YXB = \angle ZXC$.

Решение. Рассмотрим случай остроугольного треугольника (другие случаи читатель может разобрать аналогично).

Поскольку BX и CX – касательные, имеем $\angle CBX = \angle BCX = \angle A$, откуда $\angle BXC = 180^\circ - 2\angle A$.

Пусть $\angle XYZ = \varphi$, $\angle XZY = \theta$. Для решения достаточно доказать, что $\angle YXZ = 2\angle A$ или, эквивалентно, $\varphi + \theta = 2\angle A$.

Пусть E и F – проекции точки X на AB и AC (рис.19,б). Заметим, что четырехуголь-

ник $XH'YE$ – вписанный, следовательно, $\angle XYH' = \angle XEH' = \varphi$. Аналогично, $\angle XZH' = \angle XFH' = \theta$. Из четырехугольника $AEXF$ найдем $\angle EXF = 180^\circ - \angle A$. Остается убедиться, что $\angle EH'F = 180^\circ - \angle A$ (тогда по сумме углов в четырехугольнике $XFH'E$ получим, что $\varphi + \theta = 2\angle A$).

Пришла пора применить полученные знания про эту конструкцию. Нам уже известно, что точки E , M (середины BC), H' , F лежат на одной окружности. Тогда $\angle EH'F = \angle EMF$. Кроме того, согласно упражнению 7,6, $EM \perp AC$, $FM \perp AB$, откуда легко получаем, что $\angle EMF = 180^\circ - \angle A$.

Задача решена.

Список литературы

1. П.Кожевников. Изогонально сопряженные точки. – «Квант», 2016, №1.
2. В.В.Прасолов. Точки Брокера и изогональное сопряжение. – М.: МЦНМО, 2000.
3. А.В.Акопян. Геометрия в картинках. – М.: МЦНМО, 2011.
4. Ю.Блинков. Симедиана. – «Квант», 2015, №4.
5. А.Акопян, А.Заславский. Разные взгляды на изогональное сопряжение. – «Математическое просвещение», 2007, вып. 11.

ЕГЭ по физике

Структура вариантов ЕГЭ по физике 2017 года существенно отличалась от вариантов двух последних лет. Каждый вариант содержал 26 заданий с проверкой только ответа и 5 заданий с проверкой решения (с развернутым ответом). Полностью исчезли задания с выбором одного ответа из четырех. За 17 заданий из 26 можно было получить максимум по 1 первичному баллу, за 9 заданий из 26 – максимум по 2 балла, а за последние 5 заданий с развернутым ответом – максимум по 3 балла.

Ниже приводятся один полный вариант и несколько избранных задач открытого сегмента ЕГЭ по физике 2017 года.

Вариант 1

Инструкция по выполнению работы

Для выполнения экзаменационной работы по физике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из 2 частей, включающих в себя 31 задание.

В заданиях 1–4, 8–10, 14, 15, 20, 24–26 ответом является целое число или конечная десятичная дробь. Число запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите по приведенному ниже образцу в бланк ответов №1. Единицы измерения физических величин писать не нужно.

Ответ: 7,5 см.

Ответом к заданиям 5–7, 11, 12, 16–18, 21 и 23 является последовательность двух цифр. Ответ запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите по приведенному ниже образцу без пробелов, запятых и других дополнительных символов в бланк ответов №1.

Ответ:

А	Б
4	1

Ответом к заданию 13 является слово. Ответ запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите по приведенному ниже образцу в бланк ответов №1.

Ответ: вправо.

Ответом к заданиям 19 и 22 являются два числа. Ответ запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите по приведенному ниже образцу, не разделяя числа пробелом, в бланк ответов №1.

Ответ: (1,4 ± 0,2)н.

Ответ к заданиям 27–31 включает в себя подробное описание всего хода выполнения задания. В бланке ответов №2 укажите номер задания и запишите его полное решение.

При вычислениях разрешается использовать непрограммируемый калькулятор.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими черными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ниже приведены справочные данные, которые могут понадобиться Вам при выполнении работы.

ДЕСЯТИЧНЫЕ ПРИСТАВКИ

Наименование	Обозначение	Множитель
гига	Г	10^9
мега	М	10^6
кило	к	10^3
гекто	г	10^2
деци	д	10^{-1}
санти	с	10^{-2}
милли	м	10^{-3}
микро	мк	10^{-6}
нано	н	10^{-9}
пико	п	10^{-12}

КОНСТАНТЫ

число π

$$\pi = 3,14$$

ускорение свободного падения на Земле

$$g = 10 \text{ м/с}^2$$

гравитационная постоянная

$$G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$$

универсальная газовая постоянная

$$R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$$

постоянная Больцмана

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$$

постоянная Авогадро

$$N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

скорость света в вакууме

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

коэффициент пропорциональности в законе Кулона

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2$$

модуль заряда электрона
(элементарный электрический заряд)

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

постоянная Планка

$$h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ
ЕДИНИЦАМИтемпература $0 \text{ К} = -273 \text{ }^\circ\text{С}$

атомная единица

массы $1 \text{ а.е.м.} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$

1 атомная единица

массы эквивалентна $931,5 \text{ МэВ}$ 1 электронвольт $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$

МАССА ЧАСТИЦ

электрона $9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг} \approx 5,5 \cdot 10^{-4} \text{ а.е.м.}$ протона $1,673 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \approx 1,007 \text{ а.е.м.}$ нейтрона $1,675 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \approx 1,008 \text{ а.е.м.}$

ПЛОТНОСТЬ

воды 1000 кг/м^3 древесины (сосна) 400 кг/м^3 керосина 800 кг/м^3 подсолнечного масла 900 кг/м^3 алюминия 2700 кг/м^3 железа 7800 кг/м^3 ртути 13600 кг/м^3

УДЕЛЬНАЯ ТЕПЛОЕМКОСТЬ

воды $4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ льда $2,1 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ железа $460 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ свинца $130 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ алюминия $900 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ меди $380 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ чугуна $500 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$

УДЕЛЬНАЯ ТЕПЛОТА

парообразования

воды $2,3 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$ плавления свинца $2,5 \cdot 10^4 \text{ Дж/кг}$ плавления льда $3,3 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$

НОРМАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

давление $- 10^5 \text{ Па}$, температура $- 0 \text{ }^\circ\text{С}$

МОЛЯРНАЯ МАССА

азота $28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ аргона $40 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ водорода $2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ воздуха $29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ воды $18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ гелия $4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ кислорода $32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ лития $6 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ неона $20 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ углекислого газа $44 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$

ЧАСТЬ 1

Ответами к заданиям 1–23 являются слово, число или последовательность цифр или чисел. Запишите ответ в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждый символ пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерения физических величин писать не нужно.

1. На рисунке 1 приведен график зависимости проекции скорости тела v_x от времени t . Определите проекцию ускорения этого тела a_x в интервале времени от 10 до 15 с.

2. В инерциальной системе отсчета некоторая сила сообщает телу массой 8 кг ускоре-

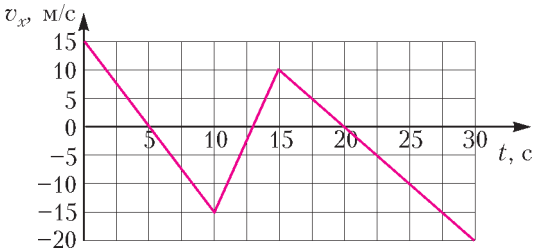


Рис. 1

ние 5 м/с^2 . Какое ускорение в той же системе отсчета сообщит та же сила телу массой 5 кг ?

3. У основания гладкой наклонной плоскости шайба массой 10 г обладает кинетической энергией $0,04 \text{ Дж}$. Определите максимальную высоту, на которую шайба может подняться по плоскости относительно основания. Спротивлением воздуха пренебречь.

4. Груз массой $0,16 \text{ кг}$, подвешенный на легкой пружине, совершает вертикальные свободные гармонические колебания. Груз какой массы нужно подвесить к пружине вместо первого груза, чтобы период свободных колебаний уменьшился в 2 раза?

5. В инерциальной системе отсчета вдоль оси x движется тело массой 20 кг . На рисунке 2 приведен график зависимости проекции

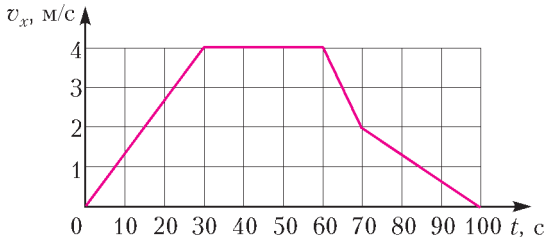


Рис. 2

скорости этого тела v_x от времени t . Из приведенного ниже списка выберите **два** правильных утверждения, описывающих этот процесс.

1) Кинетическая энергия тела в промежутке времени от 60 до 70 с уменьшилась в 2 раза.

2) За промежуток времени от 0 до 30 с тело переместилось на 20 м .

3) В момент времени 40 с равнодействующая сил, действующих на тело, равна 0 .

4) Модуль ускорения тела в промежутке времени от 0 до 30 с в 2 раза больше модуля ускорения тела в промежутке времени от 70 до 100 с .

5) В промежутке времени от 70 до 100 с импульс тела уменьшился на $60 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$.

6. В результате перехода спутника Земли с одной круговой орбиты на другую скорость его движения уменьшается. Как изменяются при этом центростремительное ускорение спутника и период его обращения вокруг Земли?

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

1) увеличивается; 2) уменьшается; 3) не изменяется.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

Центростремительное ускорение спутника	Период обращения спутника вокруг Земли

7. Шайба массой m съезжает без трения из состояния покоя с вершины горки. У подножия горки потенциальная энергия шайбы равна нулю, а модуль ее импульса равен p . Каковы высота горки и потенциальная энергия шайбы на ее вершине? Ускорение свободного падения равно g .

Установите соответствие между физическими величинами и формулами, по которым их можно рассчитать. К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию из второго столбца и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

ФОРМУЛЫ

А) высота горки

1) $\frac{p^2}{2m}$

Б) потенциальная энергия

2) $\frac{p^2}{2m^2g}$

шайбы на вершине горки

3) $\frac{mp^2}{2g}$

4) $\frac{p^2}{2mg}$

8. Концентрация атомов гелия, находящегося в сосуде под подвижным поршнем, увеличилась в 6 раз. Давление газа при этом возросло в 2 раза. Во сколько раз уменьшилась при этом средняя энергия теплового движения атомов гелия?

9. Рабочее тело тепловой машины за цикл работы получает от нагревателя количество теплоты, равное 50 Дж, и отдает холодильнику количество теплоты, равное 20 Дж. Чему равен КПД тепловой машины?

10. В воздухе школьного класса при относительной влажности 20% парциальное давление водяного пара равно 800 Па. Определите давление насыщенного водяного пара при данной температуре.

11. На рисунке 3 показан график циклического процесса, проведенного с одноатомным идеальным газом, в координатах p - T , где p – давление газа, T – абсолютная температура газа. Количество вещества газа постоянно. Из приведенного ниже списка выберите два правильных утверждения, характеризующих процессы на графике.

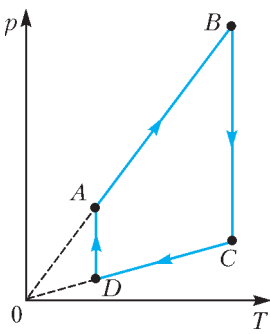


Рис. 3

1) Газ за цикл не совершает работу.
 2) В процессе AB газ отдает положительное количество теплоты.
 3) В процессе BC внутренняя энергия газа увеличивается.
 4) В процессе CD работа газа равна нулю.
 5) В процессе DA газ изотермически сжимают.

12. В сосуде неизменного объема при комнатной температуре находилась смесь неона и аргона, по 1 моль каждого. Половину содержимого сосуда выпустили, а затем добавили в сосуд 1 моль аргона. Как изменились в результате парциальное давление неона и давление смеси газов, если температура газов в сосуде поддерживалась неизменной?

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:
 1) увеличилась; 2) уменьшилась; 3) не изменилась.

Запишите в таблицу выбранные цифры

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

1) увеличилась; 2) уменьшилась; 3) не изменилась.

Запишите в таблицу выбранные цифры

Парциальное давление неона	Давление смеси газов в сосуде

для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

13. Электрон e влетел в зазор между полюсами электромагнита со скоростью \vec{v} , направленной влево (рис.4). Вектор индукции \vec{B} магнитного поля направлен вверх. Куда направлена относительно рисунка (*вправо, влево, вверх, вниз, к наблюдателю, от наблюдателя*) действующая на электрон сила Лоренца \vec{F} ? Ответ запишите словом (словами).

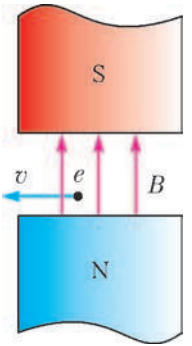


Рис. 4

14. На сколько уменьшится сопротивление участка цепи AB , изображенного на рисунке 5, после замыкания ключа K , если сопротивление каждого резистора $R = 6$ Ом?

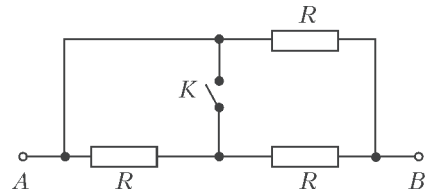


Рис. 5

15. Какая точка является изображением точки S (рис.6), создаваемым тонкой собирающей линзой с фокусным расстоянием F ?

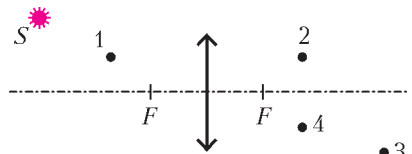


Рис. 6

16. На уединенной неподвижной проводящей сфере радиусом R находится положительный заряд Q . Сфера находится в вакууме. Напряженность электростатического поля сферы в точке A равна 36 В/м. Все расстояния указаны на рисунке 7.

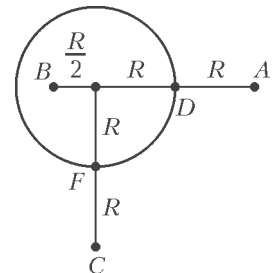


Рис. 7

Выберите **два** верных утверждения, описывающих данную ситуацию.

- 1) Напряженность поля в точке C равна $E_C = 36 \text{ В/м}$.
- 2) Потенциал электростатического поля в точке B выше, чем в точке D : $\varphi_B > \varphi_D$.
- 3) Потенциал электростатического поля в точках D и F одинаков: $\varphi_D = \varphi_F$.
- 4) Напряженность поля в точке B равна $E_B = 576 \text{ В/м}$.
- 5) Потенциал электростатического поля в точке C выше, чем в точке F : $\varphi_C > \varphi_F$.

17. К концам отрезка медного провода приложено напряжение U . Этот отрезок заменили отрезком медного провода той же длины, но вдвое большего поперечного сечения и приложили к проводу прежнее напряжение U . Как вследствие этого изменились сопротивление провода и сила тока в нем?

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

- 1) увеличилась; 2) уменьшилась; 3) не изменилась.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

Сопротивление провода	Сила тока в проводе

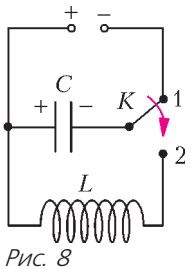


Рис. 8

18. Конденсатор идеального колебательного контура длительное время подключен к источнику постоянного напряжения (рис.8). В момент $t = 0$ переключатель K переводят из положения 1 в положение 2. Графики А и Б (рис.9) представляют из-

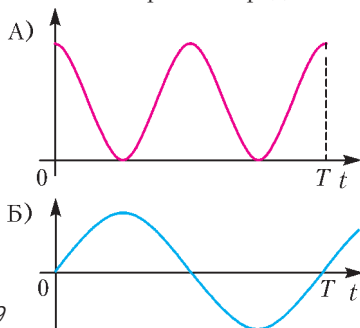


Рис. 9

менения физических величин, характеризующих колебания в контуре после этого (T – период электромагнитных колебаний в контуре).

Установите соответствие между графиками и физическими величинами, зависимости которых от времени эти графики могут представлять.

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию из второго столбца и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

ГРАФИКИ ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

- | | |
|------------------|---|
| <p>А)
Б)</p> | <p>1) энергия электрического поля конденсатора
2) энергия магнитного поля катушки
3) сила тока в катушке
4) заряд левой обкладки конденсатора</p> |
|------------------|---|

19. В результате цепной реакции деления урана $^1_0n + ^{235}_{92}\text{U} \rightarrow ^A_Z\text{X} + ^{139}_{56}\text{Ba} + 3^1_0n$ образуется ядро химического элемента ^A_ZX . Каковы заряд образовавшегося ядра Z (в единицах элементарного заряда) и его массовое число A ?

В бланк ответов №1 перенесите только числа, не разделяя их пробелом или другим знаком.

20. Период T полураспада изотопа калия $^{38}_{19}\text{K}$ равен 7,6 мин. Изначально в образце содержалось 2,4 мг этого изотопа. Сколько этого изотопа останется в образце через 22,8 мин?

21. Монохроматический свет с длиной волны λ падает на поверхность металла, вызывая фотоэффект. При изменении энергии падающих фотонов увеличился модуль запирающего напряжения $U_{\text{зап}}$. Как изменились при этом длина волны λ падающего света и длина волны $\lambda_{\text{кр}}$, соответствующая «красной границе» фотоэффекта?

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

- 1) увеличилась; 2) уменьшилась; 3) не изменилась.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

Длина волны λ падающего света	Длина волны $\lambda_{кр}$, соответствующая «красной границе» фотоэффекта

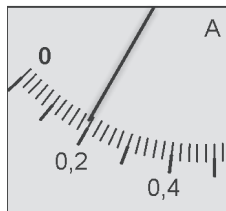


Рис. 10

22. Определите показания амперметра (рис. 10), если погрешность прямого измерения силы тока равна цене деления амперметра.

В бланк ответов № 1 перенесите только числа, не разделяя их пробелом или другим знаком.

23. Ученику необходимо на опыте обнаружить зависимость периода свободных колебаний пружинного маятника от жесткости пружины. У него имеется пять пружинных маятников, характеристики которых приведены в таблице. Какие два маятника необходимо взять ученику, чтобы провести данное исследование? Запишите номера выбранных маятников.

№ маятника	Жесткость пружины, Н/м	Объем груза, см ³	Материал, из которого сделан груз
1	40	30	алюминий
2	40	60	алюминий
3	60	30	медь
4	80	30	алюминий
5	60	60	медь

ЧАСТЬ 2

Ответом к заданиям 24–26 является число. Запишите это число в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждый символ пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерения физических величин писать не нужно.

24. Снаряд массой 2 кг, летящий со скоростью 200 м/с, разрывается на два осколка.

Первый осколок массой 1 кг летит под углом 90° к первоначальному направлению со скоростью 300 м/с. Найдите скорость второго осколка.

25. В цилиндре под поршнем находится гелий. Газ расширился при постоянном давлении, совершив работу 2 кДж. Какое количество теплоты сообщили газу?

26. На дифракционную решетку, имеющую 400 штрихов на 1 мм, перпендикулярно ее поверхности падает луч света, длина волны которого равна 470 нм. Каков максимальный порядок дифракционного максимума, доступного для наблюдения?

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи ответов на задания 27–31 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер задания (27, 28 и т. д.), а затем решение соответствующей задачи. Ответы записывайте четко и разборчиво.

27. На столе установили два незаряженных электрометра и соединили их металлическим стержнем с изолирующей ручкой

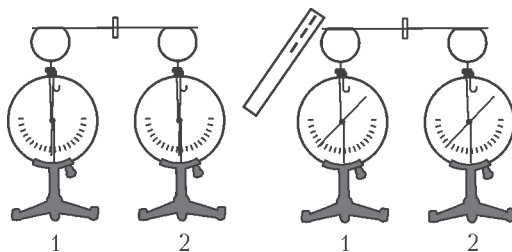


Рис. 11

Рис. 12

(рис.11). Затем к первому электрометру поднесли, не касаясь шара, отрицательно заряженную палочку (рис.12). Не убирая палочки, убрали стержень, а затем убрали палочку. Ссылаясь на известные законы и явления, объясните, почему электрометры оказались заряженными, и определите знаки заряда каждого из электрометров после того, как палочку убрали.

Полное правильное решение каждой из задач 28–31 должно содержать законы и формулы, применение которых необходимо и достаточно

для решения задачи, а также математические преобразования, расчеты с численным ответом и при необходимости рисунок, поясняющий решение.

28. Небольшой кубик массой $m = 1$ кг начинает скользить с нулевой начальной скоростью по гладкой горке, переходящей в «мертвую петлю» радиусом $R = 2$ м (рис. 13). С какой высоты H был отпущен кубик, если на высоте $h = 2,5$ м от нижней точки петли сила давления кубика на стенку петли равна

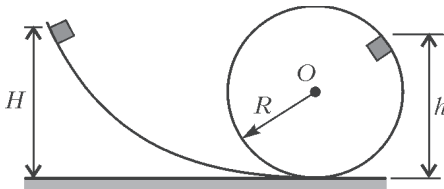


Рис. 13

$F = 5$ Н? Сделайте рисунок с указанием сил, поясняющий решение.

29. В запаянной с одного конца длинной горизонтальной стеклянной трубке постоянного сечения (рис. 14) находится столбик воздуха длиной $l_1 = 30,7$ см, закрытый столбиком ртути. Если трубку поставить вертикально отверстием вверх, то длина воздушного столбика под ртутью будет равна $l_2 = 23,8$ см. Какова длина ртутного столбика? Атмосферное давление 747 мм рт. ст. Температуру воздуха в трубке считать постоянной.

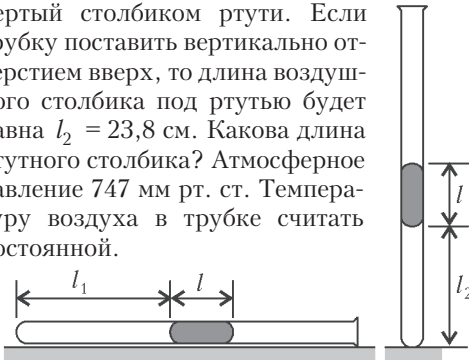


Рис. 14

30. По горизонтально расположенным шероховатым рельсам с пренебрежимо малым сопротивлением могут скользить два одинаковых стержня массой $m = 100$ г и сопротивлением $R = 0,1$ Ом каждый (рис. 15). Расстояние между рельсами $l = 10$ см, а коэффициент трения между стержнями и рельсами $\mu = 0,1$. Рельсы со стержнями находятся в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл. Под действием горизонтальной силы, действующей на первый стержень вдоль рельс, оба стержня

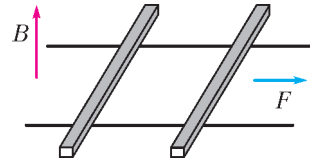


Рис. 15

движутся поступательно и равномерно с разными скоростями. Какова скорость движения первого стержня относительно второго? Самоиндукцией контура пренебречь.

31. В опыте по изучению фотоэффекта свет частотой $\nu = 6,1 \cdot 10^{14}$ Гц падает на поверхность катода, в результате чего в цепи возникает ток. График зависимости силы тока I от напряжения U между анодом и катодом приведен на рисунке 16. Какова

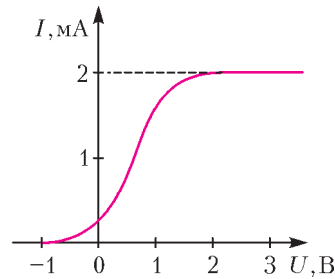


Рис. 16

мощность падающего света P , если в среднем один из 20 фотонов, падающих на катод, выбивает электрон?

Избранные задачи открытого сегмента

1. На вертикальной оси укреплена гладкая горизонтальная штанга, по которой могут перемещаться два груза массами $m_1 = 200$ г и $m_2 = 300$ г, связанные нерастяжимой невесомой нитью длиной $l = 20$ см (рис. 17). Нить закрепили на

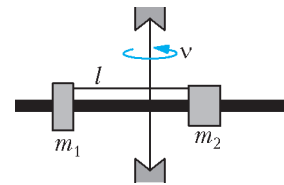


Рис. 17

оси так, что грузы располагаются по разные стороны от оси и натяжение нити с обеих сторон от оси при вращении штанги одинаково. Определите модуль силы натяжения T нити, соединяющей грузы, при вращении штанги с частотой $\nu = 600$ об/мин.

2. На шероховатой наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$, ле-

жит маленькая шайба массой $m = 500$ г (рис. 18). Коэффициент трения шайбы о плос-

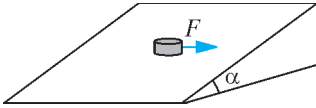


Рис. 18

кость $\mu = 0,7$. Какую минимальную силу F_{\min} в горизонтальном направлении вдоль плоскости надо приложить к шайбе, чтобы она сдвинулась с места?

3. Небольшая шайба массой $m = 10$ г, начав движение из нижней точки закрепленного

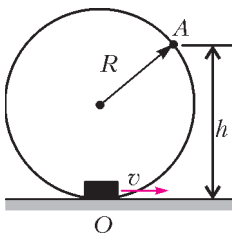


Рис. 19

вертикального гладкого кольца радиусом $R = 0,14$ м, скользит по его внутренней поверхности (рис.19). На высоте $h = 0,18$ м она отрывается от кольца и свободно падает. Какую кинетическую энергию имела шайба в начале движения? Сделайте рисунок с указанием сил, действующих на шайбу в точке А.

4. Деревянный шар привязан нитью к дну цилиндрического сосуда с площадью дна $S = 100$ см². В сосуд наливают воду так, что шар полностью погружается в жидкость, при этом нить натягивается и действует на шар с силой T . Если нить перерезать, то шар всплывет, а уровень воды изменится на $h = 5$ см. Найдите силу натяжения нити T .

5. В тепловом двигателе 1 моль одноатомного разреженного газа совершает цикл 1-2-3-4-1, показанный на графике в коор-

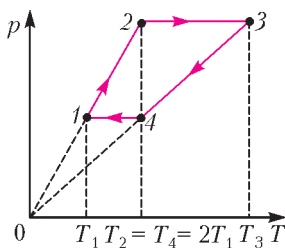


Рис. 20

динах $p-T$, где p – давление газа, T – абсолютная температура (рис.20). Температуры в точках 2 и 4 равны и превышают

температуру в точке 1 в 2 раза. Определите КПД цикла.

6. В комнате размером $4 \times 5 \times 3$ м, в которой воздух имеет температуру 10°C и относительную влажность 30%, включили увлажнитель воздуха производительностью 0,2 л/ч. Чему станет равна относительная влажность воздуха в комнате через 1,5 ч? Давление насыщенного водяного пара при температуре 10°C равно 1,23 кПа. Комнату считать герметичным сосудом.

7. Квадратная рамка со стороной $L = 10$ см подключена к источнику постоянного тока серединами своих сторон так, как показано на рисунке 21. На участке AC течет

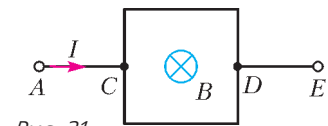


Рис. 21

ток $I = 2$ А. Сопротивление всех сторон рамки одинаково. Найдите полную силу Ампера, которая будет действовать на рамку в однородном магнитном поле, вектор индукции которого направлен перпендикулярно плоскости рамки и по модулю равен $B = 0,2$ Тл. Сделайте рисунок, на котором укажите силы, действующие на рамку.

8. На горизонтальном столе лежат два параллельных друг другу рельса: a и b , замкнутых двумя одинаковыми металлическими проводниками: AC и ED (рис.22). Вся

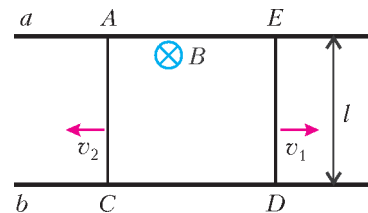


Рис. 22

система проводников находится в однородном магнитном поле, направленном вертикально вниз. Модуль индукции магнитного поля равен B , расстояние между рельсами l , скорости проводников v_1 и v_2 , сопротивление каждого из проводников R . Какова сила тока в цепи? Сопротивлением рельсов пренебречь.

Публикацию подготовили
М.Демидова, А.Черноуцан

Олимпиада «Покори Воробьевы горы!»

МАТЕМАТИКА

Олимпиада «Покори Воробьевы горы!» по математике в 2016/17 учебном году состояла из двух этапов: отборочного и заключительного. Отборочный этап проводился в ноябре – декабре 2016 года и состоял из блиц-тура (5 задач онлайн, 3 часа на решение) и творческой части (5 задач, решение которых нужно было отправить в течение недели). Победители и призеры отборочного этапа приглашались к участию в заключительном (очном) этапе, который проводился в марте 2017 года в Москве и ряде городов России.

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

Блиц-тур

Каждый участник отборочного этапа получал свой набор задач, отличающийся от наборов задач других участников. Ниже приводится типичный набор из пяти задач.

1. Решите неравенство

$$(\pi - 3)^{\ln(x^2 - 2x)} < (2 - x)^{\ln(\pi - 3)}.$$

В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x , удовлетворяющих данному неравенству и принадлежащих интервалу $(-10; 10)$.

2. Решите уравнение

$$\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = \frac{12}{\cos 2x}.$$

Найдите сумму его корней, принадлежащих отрезку $[-\pi; 3\pi]$, и укажите ее в ответе, при необходимости округлив до двух знаков после запятой.

3. В треугольнике ABC проведены медиана AE и биссектриса CD , O – точка пересечения AE и CD . Найдите отношение площади четырехугольника $BEOD$ к площади треугольника ABC , если $BC : AC = 2 : 3$.

4. Найдите наибольшее значение величины $2x + y$, если $x^2 + 4y^2 = 4$. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответе поставьте 0.

5. Имеются два сплава меди и олова. В первом сплаве меди в 2 раза больше, чем олова, а во втором – в 5 раз меньше. Во сколько раз больше надо взять второго сплава, чтобы получить новый сплав, в котором меди было бы в 2 раза меньше, чем олова?

Творческое задание

1. Сумма 28218 натуральных чисел равна $2016 \cdot 15$, а их произведение равно $(2016^2 + 15)$. Найдите все возможные наборы таких чисел. В ответе укажите сумму наибольшего и наименьшего из чисел всех найденных наборов. Если таких чисел не существует, то в ответе укажите число 0.

2. Решите уравнение

$$(1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x)^4 + (\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x)^4 = \frac{3}{4} + \frac{\cos 8x}{4}.$$

Найдите сумму всех корней на промежутке $[2\pi m; \pi + 2\pi m]$, $m = 1017$, округлив ее при необходимости до целого числа. Если корней нет или их на этом промежутке бесконечно много, в ответе запишите цифру 0.

3. Внутри треугольника ABC взята точка M , о которой известно: если к сумме квадратов всех сторон треугольника прибавить утроенную сумму всех квадратов расстояний от точки M до вершин треугольника, то получится число, которое не превосходит $24x$. При этом площадь треугольника ABC не меньше чем $\sqrt{3}x$. Найдите сторону AC треугольника при $x = 2017$. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

4. Определим $f(a)$ как функцию, равную количеству различных корней уравнения

$$\sin \frac{a\pi x}{x^2 + 1} + \cos \frac{\pi(x^2 + 4ax + 1)}{4x^2 + 4} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Например, $f(a_1) = 3$ означает, что при $a = a_1$ это уравнение имеет три различных корня x_1, x_2, x_3 . Если при $a = a_0$ уравнение корней не имеет, то положим $f(a_0) = 0$.

Решите неравенство $f(a) \leq 5$. В ответ запишите суммарную длину получившихся интервалов, округлив ее, при необходимости, до двух знаков после запятой. Если решений нет, то напишите число 0; если получившаяся длина бесконечна, то напишите число 9999.

5. Найдите число a_{35} , где a_n – количество таких перестановок (k_1, k_2, \dots, k_n) чисел $(1, 2, \dots, n)$, что выполнены два условия: а) $k_1 = 1$; б) для любого $i = 1, 2, \dots, n - 1$ выполнено неравенство $|k_i - k_{i-1}| \leq 2$.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

Варианты, предлагавшиеся участникам заключительного этапа в разных городах России, отличались друг от друга. Здесь приводятся один из вариантов полностью и избранные задачи из других вариантов.

Вариант 1

1. Брюки дешевле куртки, куртка дешевле пальто, пальто дешевле шубы, а шуба дешевле бриллиантового кольца на один и тот же процент. На сколько процентов шуба дороже брюк, если бриллиантовое кольцо дороже пальто в 6,25 раза?

2. В кошельке у купца Ганса лежат 20 серебряных монет по 2 кроны, 15 серебряных монет по 3 кроны и 3 золотых дуката (1 дукат равен 5 крон). Сколькими способами Ганс может уплатить сумму в 10 дукатов? Монеты одного достоинства неразличимы.

3. Определите, при каких значениях n и k уравнение $\sin x + \sin y = \frac{\pi k}{2017}$ является следствием уравнения $x + y = \frac{\pi n}{48}$.

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC и $\angle ABC = \frac{\pi}{9}$ на стороне AB выбрана точка D так, что $BD = AC$. Найдите величину угла DCB (в радианах) и сравните ее с 0,18.

5. Решите неравенство

$$x + \sqrt{x^2 + 4} \geq (2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 4x + 2}) \cdot 8^{x+1}.$$

Избранные задачи других вариантов

1. Сколько натуральных чисел, делящихся на 4 и меньших 1000, не содержат в

десятичной записи ни одной из цифр 3, 4, 5, 7 и 9?

2. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если ее второй член равен -3 , а сумма первых трех ее членов равна -13 .

3. Между пунктами A и B с постоянной скоростью курсирует один автобус (время на остановки пренебрежимо мало). Из пункта A в пункт B со скоростью 11 км/ч выехал велосипедист и за время пути строго между этими пунктами ровно 5 раз поравнялся с автобусом. В каких пределах может находиться скорость автобуса при этих условиях?

4. Две бригады рабочих выполнили одинаковую работу. Вторая бригада работала на полчаса больше первой. Если бы в первой бригаде было на пять человек больше, то она могла бы закончить работу на два часа раньше. Найдите число рабочих в бригадах, если производительности всех рабочих одинаковы.

5. Скорость парама линейно зависит от веса переправляемого груза так, что при нагрузке в 50 тонн скорость на 10% больше, чем при нагрузке в 60 тонн. При нагрузке в 70 тонн скорость парама равна 6 км/ч. Найдите скорость парама при наибольшем грузообороте. Грузооборотом называется произведение скорости (в км/ч) парама на вес перевозимого груза (в тоннах).

6. Что больше:

$$\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ \quad \text{или} \quad \frac{200}{157} \pi ?$$

7. Решите уравнение

$$\begin{aligned} \log_3(2x^2 + 4x + 29) + \log_{\frac{1}{2}}(31 - 2x - x^2) = \\ = \log_{\frac{1}{5}}(3x^2 + 6x + 28). \end{aligned}$$

8. Решите неравенство

$$3 \sin\left(\frac{2x}{3}\right) \geq 5 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3}\right).$$

9. Медиана AM треугольника ABC перпендикулярна его биссектрисе BL . Найдите площадь треугольника ABM , если площадь треугольника ABL равна 10.

10. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CK . Периметр треугольника ABC равен 13, а периметр треугольника BCK равен 5. Найдите периметр треугольника ACK .

11. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство $a \log_3 x + \log_{1/2} x > 1$ имеет решения, причем среди решений нет больших 1.

12. Найдите все целочисленные значения a, b, c такие, что существуют три различных корня уравнения $x^3 + (8+b)x^2 + (b+4)x + (c+3) = 0$, которые являются корнями уравнения $x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

13. В треугольной пирамиде длины перпендикуляров, опущенных из четырех вершин на противоположные грани, равны 3, 4, 7 и $84/37$ соответственно. Найдите радиус вписанного в эту пирамиду шара.

14. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ сторона основания равна $\frac{2}{\sqrt{3}}$, а боковая сторона $AA_1 = 2$.

а) Докажите, что в призму можно вписать шар, и найдите его радиус.

б) Найдите объем наименьшей части шара, которую отсекает плоскость, проходящая через точки B, A_1 и E .

Публикацию подготовили

*Д.Горяшин, А.Зеленский, А.Козко,
Л.Крицков, В.Панферов, А.Разборов,
И.Сергеев, И.Шейнак, М.Юмашев*

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №8)

1. а) Например, 4, 5, 1, 6, 2, 3; б) 16.

Обозначим числа, стоящие на месте пропусков в тексте, через A, B, C, D, E, F . Обратим внимание на то, что количество плодов, которые слоны взяли на прогулку, равно $C \times D = E \times F = N$. Несложно понять, что такое равенство достигается с помощью чисел от 1 до 6 только двумя способами: $1 \times 6 = 2 \times 3 = 6 = N$ или $2 \times 6 = 3 \times 4 = 12 = N$ (однако в каждом из этих способов можно менять местами левую и правую части равенства и множители в каждой из частей равенства). Но есть еще одно условие: две трети от собранных плодов – это N . Для обоих случаев эта сумма определяется однозначно: неиспользованными остаются только два числа: 4 и 5 в первом случае и 1 и 5 во втором. Таким образом, в первом случае после съедания трети плодов остается 6 плодов, а во втором случае – 4. Во втором случае мы пришли к противоречию ($4 \neq 12$), значит, возможен только первый случай. Теперь подсчитаем количество способов. На места A и B можно вписать 5 и 4 в любом порядке. Затем нужно выбрать, какая часть равенства будет левой, а какая правой. После этого надо для каждой из частей равенства выбрать порядок множителей. Таким образом, искомого количество равно $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$.

2. 6.

Так как центр каждой грани является вершиной каждого из четырех квадратов 1×1 в этой грани, то в каждой грани можно закрасить не более

одного квадрата, а всего – не более шести. Пример расположения 6 квадратов показан на развертке куба на рисунке 1.

3. 6.

Существует только шесть различных однозначных и двузначных чисел, в десятичной записи которых используются две цифры a и b . Это $a, b, \overline{ab}, \overline{ba}, \overline{aa}$ и \overline{bb} . Поэтому больше 6 слагаемых быть не могло. Если сложить все такие числа, то получится $23(a+b)$. Такая сумма равна 92 при $a+b=4$. Возьмем $a=1, b=3$. Получаем пример: $1+3+13+31+11+33$.

4. 3.

Два треугольника быть не могло: у каждого треугольника две стороны (те, которыми они не соприкасаются) должны быть сторонами шестиугольника, и тогда среди них обязательно будут равные. Для трех треугольников есть пример: можно расположить равносторонние треугольники со сторонами 6, 4 и 3, как на рисунке 2.

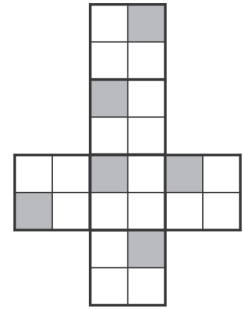


Рис. 1

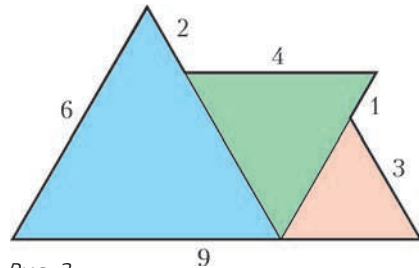


Рис. 2

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

(см. «Квант» №8)

1. 36° .

Можно воспользоваться тем, что $2 \cdot 36^\circ = 72^\circ = 60^\circ + 12^\circ$, а угол 60° можно построить циркулем и линейкой. Таким же способом можно найти и другие углы α , допускающие триангуляцию: они должны удовлетворять уравнению $n\alpha = \beta + \alpha/3$, где β – какой-нибудь «хороший» угол, который строится циркулем и линейкой.

2. Если угол построен и он не прямой, то можно выбрать на одной из его сторон произвольную точку и опустить из нее перпендикуляр на другую сторону (или ее продолжение, если угол тупой). Получится прямоугольный треугольник, в котором отношение катета к гипотенузе равно косинусу данного угла. Если исходный угол прямой, то его косинус равен 0 и ничего делать не надо.

Если же даны два отрезка и они не равны друг другу, то не составляет труда построить прямоугольный треугольник, в котором больший из них будет гипотенузой, а меньший – катетом. Это даст нужный острый угол в построенном треугольнике. Если же отрезки равны, то их отношение

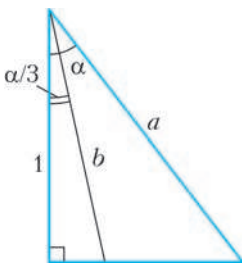


Рис. 3

равно 1 и угол с таким косинусом нулевой. Пусть угол α поддается трисекции. Тогда, имея прямоугольный треугольник с углом α , гипотенузой a и прилежащим к этому углу катетом, равным 1, можно построить отрезок b (рис. 3). Значит, b должно выражаться в квадратных радикалах через a и, как следствие, через $\cos \alpha$. Так как $\cos \alpha/3 = 1/b$, используя формулу косинуса тройного угла, получаем $\cos \alpha = 4/b^3 - 3/b$. Замена $x = 2/b$ приводит уравнение к требуемому виду.

Допустим, можно выполнить трисекцию угла 60° . Тогда у многочлена $x^3 - 3x - 1$ должен быть корень, который выражается через его коэффициенты с помощью обычных арифметических операций и извлечения квадратного корня. Поэтому этот многочлен должен раскладываться на множители и у него обязательно должен быть рациональный корень. Поскольку свободный член и старший коэффициент равны -1 и 1 , то этот корень сам должен быть равен 1 или -1 . Но легко проверить, что эти числа не являются корнями данного многочлена.

3. Равенство $\beta = \alpha/3$ следует из рисунка 4.

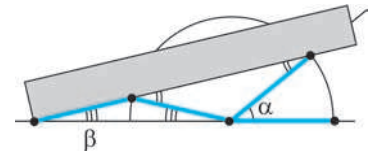


Рис. 4

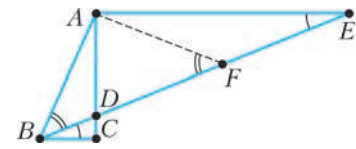


Рис. 5

4. Пусть F – середина DE (рис. 5). Тогда $AF = DE/2 = AB$. Поэтому

$$\angle CBD = \angle DEA = \frac{1}{2} \angle AFD = \frac{1}{2} \angle ABF = \frac{1}{3} \angle ABC.$$

5. На рисунке 6 показано, как выполнить трисекцию при помощи томагавка.

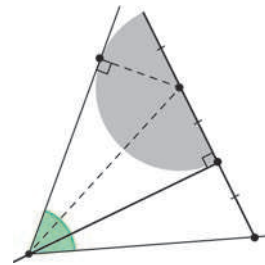


Рис. 6

6. Противоречия с теоремой Ванцеля нет по той причине, что трисекция при помощи томагавка, по сути, аналогична невсису: чтобы расположить томагавк правильным образом, нужно двигать его с проскальзыванием. А это действие запрещено при построениях циркулем и линейкой (в этом месте как раз неявно и возникает необходимость решать кубическое уравнение).

7. В описании соответствующего построения в статье была допущена неточность: не было указано, что между отмеченными точками должны быть одинаковые расстояния, равные ширине угольника. Правильность трисекции следует из равенства прямоугольных треугольников ABC , ACD и ADE (рис. 7).

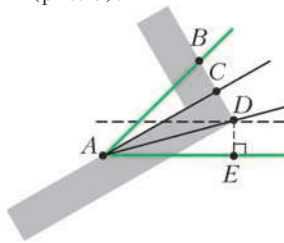


Рис. 7

ЕГЭ ПО ФИЗИКЕ

Вариант 1

Ответы к заданиям 1–26

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	8	0,4	0,04	34 или 43	21	21	3	60	4000
11	12	13	14	15	16	17			
45 или 54	23	к наблю- дателю	1	4	13 или 31	21			
18	19	20	21	22	23	24	25	26	
13	3694	0,3	23	0,200,02	14 или 41	500	5	5	

Задание 27. При поднесении отрицательно заряженной палочки свободные заряды проводника перераспределяются так, чтобы потенциал всех точек проводника остался одинаковым (явление электростатической индукции). В данном случае отрицательные свободные заряды (электроны) переместятся с левого электрометра на правый. Правый электрометр зарядится отрицательно (избыток электронов), левый – положительно (недостаток электронов).

Если бы мы удалили заряженную палочку не убирая стержня, то свободные заряды вернулись бы на прежнее место и электрометры стали бы вновь не заряженными. Но поскольку мы сначала убрали стержень, то при удалении заряженной палочки заряды не смогли переместиться с электрометра на электрометр. В конечном состоянии правый электрометр окажется заряженным отрицательно, а левый – положительно.

Задание 28. На высоте h на кубик действуют две силы: сила тяжести, равная mg , и сила реакции опоры, численно равная силе давления кубика F . Из второго закона Ньютона в проекции на радиальное направление (ось x ; рис.8)

$$F + mg \cos \alpha = m \frac{v^2}{R},$$

где $\cos \alpha = (h - R)/R$, выразим v^2 и подставим в закон сохранения энергии

$$mgH = mgh + \frac{mv^2}{2}.$$

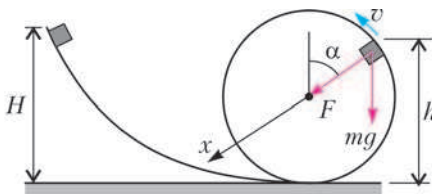


Рис. 8

Получим

$$H = \frac{3h - R}{2} + \frac{FR}{2mg} = 3,25 \text{ м.}$$

Задание 29. Объем и давление столбика воздуха в начальном состоянии равны

$$V_1 = Sl_1, \quad p_1 = p_0 + \rho_{\text{рт}}gh_0,$$

где S – площадь внутреннего сечения трубки, $h_0 = 747 \text{ мм} = 74,7 \text{ см}$. Объем и давление в конечном состоянии равны

$$V_2 = Sl_2, \quad p_2 = p_0 + \rho_{\text{рт}}gl = \rho_{\text{рт}}g(h_0 + l),$$

где l – искомая длина ртутного столбика. Подставив эти выражения в уравнение изотермического процесса

$$p_1V_1 = p_2V_2,$$

получим равенство

$$l_1h_0 = l_2(h_0 + l),$$

откуда найдем

$$l = h_0 \left(\frac{l_1}{l_2} - 1 \right) \approx 21,7 \text{ см.}$$

Задание 30. В первом стержне возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_1 = Bv_1l$, во втором – $\mathcal{E}_2 = Bv_2l$. Ток в контуре определяется законом Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{2R} = \frac{Blv_{\text{отн}}}{2R}.$$

На первый стержень действует сила Ампера, равная $F_A = IBl$ и направленная назад, на второй стержень действует такая же сила, но направленная вперед. Кроме того, на каждый стержень действует направленная назад сила трения $F_{\text{тр}} = \mu mg$. Второй закон Ньютона для первого и второго стержней имеет вид

$$F - IBl - \mu mg = 0, \quad IBl - \mu mg = 0.$$

Сложив эти уравнения, получим $F = 2\mu mg$ – только при таком значении внешней силы возможно равномерное движение стержней. Тогда из уравнения движения второго стержня и выражения для силы тока получим

$$\frac{B^2l^2v_{\text{отн}}}{2R} = \mu mg,$$

откуда найдем

$$v_{\text{отн}} = \frac{2\mu mgR}{B^2l^2} = 2 \text{ м/с.}$$

Задание 31. Сила тока перестает зависеть от напряжения, когда анода достигают все электроны, выбитые светом с катода. Через ток насыщения выражается число электронов, выбитых с катода за 1 с:

$$N_{\text{эл}} = \frac{I_{\text{нас}}}{e}.$$

Число фотонов, попадающих на катод за 1 с, в 20 раз больше числа вылетающих электронов:

$$N_{\phi} = 20 \frac{I_{\text{нас}}}{e}.$$

Поскольку энергия каждого фотона составляет $E_{\phi} = h\nu$, то мощность потока фотонов равна

$$P = h\nu N_{\phi} = 20 \frac{h\nu N_{\text{нас}}}{e} \approx 0,1 \text{ Вт}.$$

Избранные задачи открытого сегмента

1. Запишем второй закон Ньютона для каждого из грузов:

$$T = m_1 \omega^2 l_1, \quad T = m_2 \omega^2 l_2,$$

где $\omega = 2\pi\nu = 20\pi \text{ с}^{-1}$ – угловая скорость, T – сила натяжения нити. Видно, что натяжение нити будет одинаковым, если ее закрепить на оси в точке, которая делит ее в отношении

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

При этом, хотя воздействие нити на ось будет нулевым, ее нельзя отсоединить от оси, так как расположение грузов станет неустойчивым: небольшое смещение грузов приведет к их дальнейшему смещению в том же направлении.

Выражая из записанных соотношений l_1 и l_2 и складывая, получим

$$l = \frac{T}{m_1 \omega^2} + \frac{T}{m_2 \omega^2}, \text{ и } T = \frac{m_1 m_2 \omega^2 l}{m_1 + m_2} = 94,7 \text{ Н}.$$

2. Сила трения покоя направлена вдоль наклонной плоскости и имеет две взаимно перпендикулярные составляющие. Одна из них направлена горизонтально и равна по величине приложенной силе F , другая направлена вверх вдоль ската наклонной плоскости и компенсирует проекцию силы тяжести $mg \sin \alpha$ (рис.9). Получаем

$$F_{\text{тр}} = \sqrt{(mg \sin \alpha)^2 + F^2}.$$

В момент начала проскальзывания сила трения покоя достигает значения $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$,

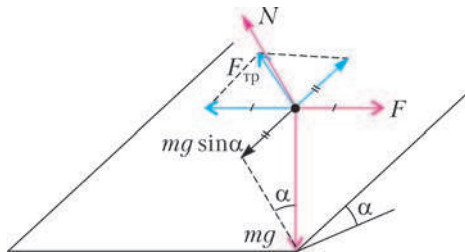


Рис. 9

поэтому

$$\sqrt{(mg \sin \alpha)^2 + F^2} = \mu mg \cos \alpha.$$

Отсюда находим

$$F = \sqrt{(\mu mg \cos \alpha)^2 - (mg \sin \alpha)^2} = 1,7 \text{ Н}.$$

3. В момент отрыва шайбы сила реакции обращается в ноль. Из проекции второго закона Ньютона на радиальное направление (рис.10)

$$mg \cos \alpha = \frac{mv_1^2}{R},$$

где $\cos \alpha = (h - R)/R$, выразим квадрат скорости

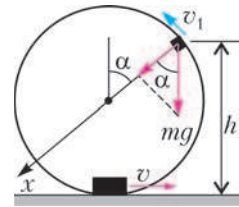


Рис. 10

ти в момент отрыва и подставим в закон сохранения энергии

$$E_k = \frac{mv_1^2}{2} + mgh.$$

Получим

$$E_k = \frac{mgR \cos \alpha}{2} + mgh = \frac{mg(h - R)}{2} + mgh = mg(1,5h - 0,5R) = 0,02 \text{ Дж}.$$

4. Запишем второй закон Ньютона для всего содержимого сосуда до перерезания нити и после этого:

$$p_1 S - T - mg = 0, \quad p_2 S - mg = 0,$$

где m – масса всего содержимого (воды и шара). Учитывая, что $p_1 = \rho gh_1$ и $p_2 = \rho gh_2$, получим

$$T = (p_1 - p_2) S = \rho gh S = 5 \text{ Н}.$$

5. Поскольку $T_3/T_4 = T_2/T_1 = 2$, то $T_3 = 2T_4 = 4T_1$. Газ получает тепло в изохорном процессе 1-2 и изобарном процессе 2-3, а отдает в изохорном процессе 3-4 и изобарном процессе 4-1. Количество теплоты, полученное газом, равно

$$Q_1 = \frac{3}{2} \nu R (2T_1 - T_1) + \frac{5}{2} \nu R (4T_1 - 2T_1) = 6,5 \nu RT_1,$$

а отданное количество теплоты равно

$$Q_2 = \frac{3}{2} \nu R (4T_1 - 2T_1) + \frac{5}{2} \nu R (2T_1 - T_1) = 5,5 \nu RT_1.$$

Для КПД цикла получаем

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{1}{6,6} = 0,154.$$

6. Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона (уравнение состояния идеального газа) для начального и конечного состояний воздуха:

$$(\varphi_1 p_n) V = \frac{m}{M} RT,$$

$$(\varphi_2 p_n) V = \frac{m + \Delta m}{M} RT,$$

где $\Delta m = 0,3$ кг – масса испаренной воды. Из первого уравнения вычислим начальную массу водяных паров в комнате:

$$m = \frac{(\varphi_1 p_n) VM}{RT} = 0,170 \text{ кг}.$$

Поделив уравнения состояния друг на друга, получим

$$\varphi_2 = \varphi_1 \frac{m + \Delta m}{m} \approx 0,83.$$

7. По верхней и нижней сторонам квадрата текут одинаковые токи $I_1 = I/2$ в одном направлении (рис.11). На эти две стороны действуют одина-

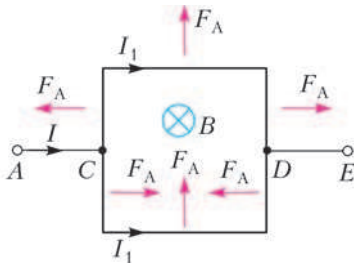


Рис. 11

ковые силы Ампера $F_A = (I/2)BL$, направленные вверх в плоскости рисунка. Из рисунка видно, что силы Ампера, действующие на вертикальные стороны квадрата, в сумме дают ноль. Поэтому полная сила, действующая на рамку, равна

$$F = 2F_A = IBL = 0,04 \text{ Н}.$$

8. На свободные заряды в проводнике ED действует сила Лоренца, направленная от D к E и создающая в этом проводнике ЭДС $\mathcal{E}_1 = Bv_1l$, а в проводнике AC сила Лоренца направлена от A к C и создает ЭДС $\mathcal{E}_2 = Bv_2l$. Указанные ЭДС в контуре $ACDE$ действуют согласованно и создают ток, направленный против часовой стрелки и равный

$$I = \frac{B(v_1 + v_2)l}{2R}.$$

**ОЛИМПИАДА
«ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!»**

МАТЕМАТИКА

Отборочный этап

Блиц-тур

1. -44.

При $x < 2$ неравенство равносильно

$$\begin{aligned} (\pi - 3)^{\ln(x^2 - 2x)} &< (\pi - 3)^{\ln(2-x)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x &> 2 - x \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty) \end{aligned}$$

(знак неравенства меняется, поскольку $\pi - 3 < 1$).

При $x \geq 2$ значение $(2-x)^{\ln(\pi-3)}$ не определено. Значит, $x \in (-\infty; -1)$. В промежуток $(-10; 10)$ входят числа $-9, -8, \dots, -2$. Их сумма равна -44 .

2. 50,27.

$$\text{Так как } \operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = \frac{4 \cos 2x}{\sin^2 2x},$$

то исходное уравнение при $\sin 2x \neq 0, \cos 2x \neq 0$ равносильно уравнению

$$\begin{aligned} \frac{4 \cos 2x}{\sin^2 2x} = \frac{12}{\cos 2x} &\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 2x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} 2x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, &n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ввиду симметрии сумма корней на отрезке $[-\pi; \pi]$ равна нулю. На отрезок $[\pi; 3\pi]$ попадают 8 корней, образующих 4 пары, симметричных относительно 2π . Поэтому сумма всех корней равна $2\pi \cdot 8 = 16\pi \approx 50,27$.

3. 0,275.

Обозначим $BE = EC = n$, тогда $AC = 3n$. Так как

AE – медиана, то $S_{ABE} = \frac{1}{2} S_{ABC}$. По теореме о

биссектрисе, $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}; \frac{AO}{OE} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{S_{ADO}}{S_{ABE}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4};$

$S_{ADO} = \frac{9}{40} S_{ABC}$. Тогда

$$\frac{S_{BEOD}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABE} - S_{ADO}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2} - \frac{9}{40} = \frac{11}{40} = 0,275.$$

4. 4,12. Точное значение: $\sqrt{17}$.

Обозначим $2x + y = a$. Тогда $y = a - 2x$, и $x^2 + 4(a - 2x)^2 = 4 \Leftrightarrow 17x^2 - 16ax + 4a^2 - 4 = 0$.

Это уравнение имеет решения, если

$$64a^2 - 17(4a^2 - 4) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 \leq 17 \Leftrightarrow |a| \leq \sqrt{17}.$$

Значит, наибольшим значением величины $a = 2x + y$ будет $\sqrt{17} \approx 4,1231\dots$

5. 2.

Если взяли a (кг) первого сплава и na (кг) второго, то в первом сплаве меди будет $\frac{2a}{3}$,

олова $\frac{a}{3}$, во втором сплаве – меди $\frac{na}{6}$, олова $\frac{5na}{6}$. Тогда в новом сплаве – меди $\frac{2a}{3} + \frac{na}{6} = \frac{a(4+n)}{6}$, олова $\frac{a}{3} + \frac{5na}{6} = \frac{a(2+5n)}{6}$. По условию,

$$\frac{a(2+5n)}{6} = \frac{2a(4+n)}{6} \Leftrightarrow 2+5n = 2(4+n) \Leftrightarrow n = 2.$$

Творческое задание

1. 1894. Набор: 1, 1, ..., 1, 19, 113, 1893.

Так как $2016^2 + 15 = 3 \cdot 19 \cdot 113 \cdot 631$, то в системе уравнений

$$\begin{cases} a_1 + \dots + a_{28218} = 2016 \cdot 15, \\ a_1 \cdot \dots \cdot a_{28218} = 2016^2 + 15 = 3 \cdot 19 \cdot 113 \cdot 631 \end{cases}$$

чисел a_k , не равных 1, может быть не более четырех (т.е. не более, чем количество простых делителей числа $2016^2 + 15$). Поэтому задача сводится к системе

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2026, \\ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = 3 \cdot 19 \cdot 113 \cdot 631, \\ a_5 = a_6 = \dots = a_{28218} = 1. \end{cases}$$

Нужный набор a_1, a_2, a_3, a_4 состоит из чисел 1, 19, 113, $3 \cdot 631$. Остается вычислить $(3 \cdot 631) + 1 = 1894$.

2. 25568.

Так как

$$(1 + \cos 4x) + (\cos x + \cos 3x) + \cos 2x = \cos 2x (2 \cos 2x + 2 \cos x + 1),$$

$$\sin 2x + \sin 4x + (\sin x + \sin 3x) = \sin 2x (1 + 2 \cos 2x + 2 \cos x),$$

то получаем

$$(2 \cos 2x + 2 \cos x + 1)^4 (\cos^4 2x + \sin^4 2x) = \frac{3}{4} + \frac{1 - 2 \sin^2 4x}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4 \cos^2 x + 2 \cos x - 1)^4 \left(1 - \frac{\sin^2 4x}{2}\right) = 1 - \frac{\sin^2 4x}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4 \cos^2 x + 2 \cos x - 1)^4 = 1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 4 \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = \pm 1.$$

Решая получившиеся квадратные уравнения, находим $\cos x \in \left\{\frac{1}{2}; -1; 0; -\frac{1}{2}\right\}$. Решения:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad x = \pi + 2\pi n; \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n;$$

$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Сумма корней на данном множестве равна $\frac{5\pi}{2} + 8\pi n = 8138,5\pi \approx 25568$.

3. 89,82. Точное значение: $AC = 2\sqrt{2017}$.

Обозначим через C_1 и B_1 проекции точек C и B на прямую AM (рис. 12). Тогда

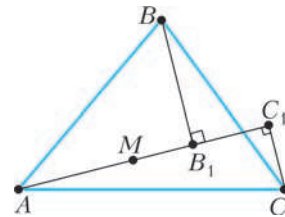


Рис. 12

$$\begin{aligned} 4(S_{AMB} + S_{AMC}) &= 2AM(BB_1 + CC_1) \leq 2AM \cdot BC = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(2\sqrt{3}AM \cdot BC) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}(3AM^2 + BC^2). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} 4(S_{BMC} + S_{BMA}) &\leq \frac{1}{\sqrt{3}}(3BM^2 + AC^2), \\ 4(S_{CMA} + S_{CMB}) &\leq \frac{1}{\sqrt{3}}(3CM^2 + AB^2). \end{aligned}$$

В итоге

$$\begin{aligned} 8\sqrt{3}S_{ABC} &\leq \\ &\leq AB^2 + AC^2 + BC^2 + 3(AM^2 + BM^2 + CM^2). \end{aligned}$$

Но по условию

$$\begin{aligned} 8\sqrt{3}S_{ABC} &\geq 24x \geq \\ &\geq AB^2 + AC^2 + BC^2 + 3(AM^2 + BM^2 + CM^2). \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место равенство. Однако равенство здесь достигается только в случае правильного треугольника. Докажем, например, что угол β (рис. 13) равен 60° (доказательство для остальных углов аналогично). Пусть O – центр описанной вокруг треугольника ABC окружности. Поскольку во всех переходах в неравенствах должно быть равенство, то $AC = BM\sqrt{3} \Leftrightarrow b = \sqrt{3}x$. Следовательно, из треугольника AON

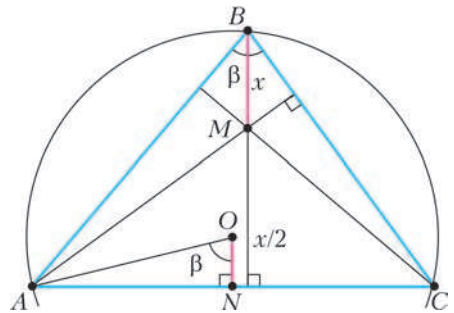


Рис. 13

получаем

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{AN}{ON} = \frac{b/2}{x/2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \beta = 60^\circ.$$

Значит, $\triangle ABC$ равносторонний, и $AC = 2\sqrt{x} = 2\sqrt{2017} \approx 89,82$.

4. $a \in \left[-\frac{17}{4}; \frac{17}{4}\right]$; длина интервала равна 8,5.

Пусть $t = \frac{a\pi x}{x^2 + 1}$. Тогда уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} \sin t + \cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right) &= \sqrt{2 - \sqrt{2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin t + \sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right) &= \sqrt{2 - \sqrt{2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\left(\frac{\pi}{8} - t\right) &= \sqrt{2 - \sqrt{2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{8} - t\right) &= 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{8} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$x^2 - \frac{a}{2k + 1/8}x + 1 = 0.$$

Неравенство $f(a) \leq 5$ означает, что у исходного уравнения должно быть не более 5 корней. При этом если $b_1 \neq b_2$, то уравнения $x^2 - b_1x + 1 = 0$ и $x^2 - b_2x + 1 = 0$ не имеют общих корней. При каждом фиксированном $k \in \mathbb{Z}$ имеется один корень, если $D = 0$, и два корня, если $D > 0$.

Условие $D \geq 0$ равносильно

$$\left(\frac{a}{2k + 1/8}\right)^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |a| \geq \left|2\left(2k + \frac{1}{8}\right)\right|.$$

Следовательно, $|a| < \frac{1}{4} \Rightarrow$ решений нет;

$|a| = \frac{1}{4} \Rightarrow 1$ решение; $|a| \in \left(\frac{1}{4}; \frac{15}{4}\right) \Rightarrow 2$ решения;

$|a| = \frac{15}{4} \Rightarrow 2$ решения; $|a| \in \left(\frac{15}{4}; \frac{17}{4}\right) \Rightarrow 4$ реше-

ния; $|a| = \frac{17}{4} \Rightarrow 5$ решений; $|a| > \frac{17}{4} \Rightarrow$ более 5 решений.

5. 664574.

Докажем, что $a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + 1$. Действительно, возможны следующие три вида начала перестановки чисел $(1, 2, \dots, n)$.

а) $(1, 2, \dots)$. Отбросим первую единицу, а остальные числа уменьшим на 1. Получившаяся перестановка удовлетворяет условиям задачи для перестановок длины $n - 1$. Следовательно, количество таких перестановок равно a_{n-1} .

б) $(1, 3, 2, 4, \dots)$. Отбросим первые три члена перестановки: $(1, 3, 2)$. Остальные числа умень-

шим на три. Получившаяся перестановка удовлетворяет условиям задачи для перестановок длины $n - 3$. Следовательно, количество таких перестановок равно a_{n-3} .

в) Еще одна перестановка имеет вид $(1, 3, 5, 7, \dots, 6, 4, 2)$. В середине – переход с последнего нечетного числа, не превосходящего n , к последнему четному числу, не превосходящему n . Таким образом, получили $a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + 1$.

Вычисляем начальные элементы последовательности. Очевидно, что $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$. Следующие элементы вычисляем последовательно по полученной рекуррентной формуле $a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + 1$:

$$a_4 = 4, \quad a_5 = 6, \quad a_6 = 9, \quad a_7 = 14, \dots$$

$$\dots, \quad a_{35} = 664574.$$

Заключительный этап

Вариант 1

1. На 1462,5%.

Обозначим стоимость брюк через B , куртки – через K , пальто – через $П$, шубы – через $Ш$, бриллиантового кольца – через $БК$. По условию,

$$\frac{БК}{Ш} = \frac{Ш}{П} = \frac{П}{K} = \frac{K}{B} = \alpha, \quad \text{причем } БК = П \cdot \alpha^2.$$

Тогда $\alpha = \sqrt{6,25} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$. Связь между стоимостью шубы и брюк определяется соотноше-

нием $Ш = B \cdot \alpha^3 = B \cdot \frac{125}{8}$. Отсюда $\frac{Ш}{B} = \frac{125}{8}$, и искомая величина определяется как

$$\left(\frac{125}{8} - 1\right) \cdot 100 = 1462,5.$$

2. 26.

Если купец заплатил x монет по 2 кроны, y монет по 3 кроны и z дукатов (т.е. z раз по 5 крон), то получается система $2x + 3y + 5z = 50$, $x \in [0; 20]$, $y \in [0; 15]$, $z \in [0; 3]$.

При $z = 0$ получаем уравнение $2x + 3y = 50$, имеющее подходящие по условию решения при $y = 4, 6, 8, 10, 12, 14$ – всего 6 решений.

При $z = 1$ получаем уравнение $2x + 3y = 45$, имеющее подходящие по условию решения при $x = 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18$ – всего 7 решений.

При $z = 2$ получается 7 решений, при $z = 3$ получим 6 решений. Эти два случая можно было бы разобрать аналогично предыдущим. Но этого не делать, используя тот факт, что оплачиваемая сумма равна ровно половине всех денег купца. Поэтому количество способов, использующих 2 дуката, равно количеству способов, использующих 1 дукат (так как 2 дуката останется в кошельке); аналогично, количество

способов, использующих 3 дуката, равно количеству способов без дукатов.

Таким образом, всего способов $6 + 7 + 7 + 6 = 26$.

3. $k = 0$, $n = 96m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Пара $\left(0; \frac{\pi n}{48}\right)$ является решением второго уравнения, следовательно, $\sin \frac{\pi n}{48} = \frac{\pi k}{2017}$. Пара

$\left(\pi; \frac{\pi n}{48} - \pi\right)$ также есть решение второго уравнения, следовательно, $-\sin \frac{\pi n}{48} = \frac{\pi k}{2017}$. С необходимостью должны выполняться условия $k = 0$,

$\sin \frac{\pi n}{48} = 0$, т.е. $n = 48l$, $l \in \mathbb{Z}$.

Проверим достаточность полученных значений. Подставим пару $(x; \pi l - x)$ в первое уравнение, получим $\sin x + \sin(\pi l - x) = \sin x + (-1)^{l-1} \sin x$, что равно 0 только для четных l , т.е. $l = 2m$.

4. $\angle DCB = \frac{\pi}{18}$; $\frac{\pi}{18} < 0,18$.

Выберем внутри $\triangle ABC$ на его высоте точку O так, чтобы $\triangle AOC$ был равнобедренным. Далее из равенства треугольников DBC и OCB вытекает $\angle DCB = \angle OCB$. Поэтому $\angle DCB = \frac{\pi}{18}$. При

этом $\frac{\pi}{18} < 0,18$, поскольку $\pi < 3,24$.

5. $x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$.

Исходное неравенство равносильно неравенству

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{x}{2} + \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1}\right) &\geq \\ &\geq \left(2x + 1 + \sqrt{(2x + 1)^2 + 1}\right) \cdot 8^{x+1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} &\geq \left(2x + 1 + \sqrt{(2x + 1)^2 + 1}\right) \cdot 2^{3x+2}. \end{aligned}$$

Функция $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1}$ всюду положительна и монотонно возрастает. При $t \geq 0$ это очевидно, при $t < 0$ это тоже верно, так как тогда $\frac{1}{f(t)} = \sqrt{t^2 + 1} - t$ положительна и убывает. Факт возрастания можно доказать и с помощью производной.

Если $\frac{x}{2} = 2x + 1$, то $x = -\frac{2}{3}$. Тогда $f\left(\frac{x}{2}\right) = f(2x + 1)$, $2^{3x+2} = 1$, и левая часть неравенства равна правой.

Если $x > -\frac{2}{3}$, то $\frac{x}{2} < 2x + 1$, $0 < f\left(\frac{x}{2}\right) < f(2x + 1)$, $2^{3x+2} > 1$,

$$\frac{x}{2} + \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} < \left(2x + 1 + \sqrt{(2x + 1)^2 + 1}\right) \cdot 2^{3x+2}$$

– неравенство не выполняется.

Если $x < -\frac{2}{3}$, то $\frac{x}{2} > 2x + 1$, $f\left(\frac{x}{2}\right) > f(2x + 1) > 0$, $2^{3x+2} < 1$,

$$\frac{x}{2} + \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} > \left(2x + 1 + \sqrt{(2x + 1)^2 + 1}\right) \cdot 2^{3x+2}$$

– неравенство выполняется.

Таким образом, $x \leq -\frac{2}{3}$.

Избранные задачи других вариантов

1. 49.

По условию, эти числа записываются только цифрами 0, 1, 2, 6, 8. Тогда трехзначные числа, кратные 4, могут иметь на конце в точности 10 вариантов: 00, 08, 12, 16, 20, 28, 60, 68, 80, 88. При этом на первом месте в каждом из этих 10 вариантов может стоять любая из четырех цифр 1, 2, 6, 8. Кроме того, последние 8 вариантов дают также двузначные числа, а второй вариант – однозначное. Значит, всего таких чисел $10 \cdot 4 + 8 + 1 = 49$.

2. -13,5.

Выразив b_1 из уравнений $b_1 q = -3$ и $b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = -13$, получим уравнение $3q^2 - 10q + 3 = 0$. Его корни: 3 и $\frac{1}{3}$, из которых подходит только $q = \frac{1}{3}$, откуда $b_1 = -\frac{3}{q} = -9$. Следовательно, $S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{-9}{1 - 1/3} = -\frac{27}{2}$.

3. $33 \text{ км/ч} < v \leq 77 \text{ км/ч}$.

Из рисунка 14 видно, что скорость v (км/ч) автобуса может быть больше скорости велосипедиста в k раз, где $k \in (3; 7]$.

4. В первой бригаде 25 рабочих, во второй – 24. Если n и m – число рабочих в первой и второй бригадах, производительность каждого рабочего равна 1, а t – время работы первой бригады, то

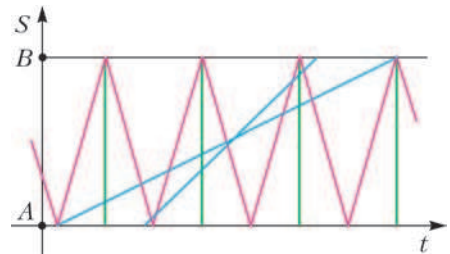


Рис. 14

$nt = m\left(t + \frac{1}{2}\right)$, $nt = (n+5)(t-2)$, где $n, m \in \mathbb{N}$.

Исключая переменную t , получаем

$$4n^2 - 4nm + 20n - 25m = 0 \Leftrightarrow 4m = 4n - 5 + \frac{125}{4n + 25}.$$

Так как $n \in \mathbb{N}$, то $4n + 25 = 125$, $n = 25$, $m = 24$.

5. $\frac{16}{3}$ км/ч.

Пусть $v(x) = kx + b$ – скорость парома в км/ч, x – вес груза в тоннах. По условию,

$$k \cdot 50 + b = \left(1 + \frac{10}{100}\right)(k \cdot 60 + b), \quad 6 = k \cdot 70 + b.$$

Отсюда $k = -\frac{1}{15}$, $b = \frac{32}{3}$. Грузооборот равен

$g(x) = x\left(-\frac{1}{15}x + \frac{32}{3}\right)$. Эта квадратичная функция максимальна при $x = 80$.

6. Второе число больше.

Вычислим первое число. Поскольку

$$\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ = \frac{\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ} + \frac{\cos 9^\circ}{\sin 9^\circ} = \frac{2}{\sin 18^\circ}$$

и (аналогично)

$$\operatorname{tg} 27^\circ + \operatorname{tg} 63^\circ = \frac{2}{\sin 54^\circ},$$

оно равно

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} &= \frac{2(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ \cdot \sin 54^\circ} = \\ &= \frac{2 \cdot 2 \sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ}{\sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ} = 4. \end{aligned}$$

При этом

$$\frac{200}{157} \pi = 4 \cdot \frac{100}{314} \pi = 4 \cdot \frac{\pi}{3,14} > 4.$$

7. $x = -1$.

Выделяя полные квадраты и переходя в логарифмах к другим основаниям, получаем

$$\begin{aligned} \log_3(27 + 2(x+1)^2) + \log_3(3(x+1)^2 + 25) = \\ = \log_3(32 - (1+x)^2). \end{aligned}$$

Левая часть не меньше 5, а правая не больше 5.

8. $x = \frac{3\pi}{4} + 6\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Положим $t = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{3}$. Тогда

$$3 \cos 2t + 2 \cos t - 5 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6(\cos t - 1) \left(\cos t + \frac{4}{3} \right) \geq 0.$$

Получаем $\cos t \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right] \cup [1; +\infty)$. Поэтому

$$\cos t = 1, \quad \frac{\pi}{4} - \frac{x}{3} = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Возможен другой способ решения: левая часть неравенства не больше 3, а правая не меньше 3.

9. 15.

Биссектриса треугольника ABM служит его высотой, поэтому $AB = BM = MC \equiv x$, а также $AL : LC = AB : BC = 1 : 2$, поэтому $S_{BCL} = 2S_{ABL} = 20$, $S_{ABC} = 30$, $S_{ABM} = \frac{1}{2}S_{ABC} = 15$.

10. 12.

Треугольники ABC , ACK и CBK подобны. Периметры подобных треугольников относятся также, как соответствующие стороны. Поэтому

$$\frac{P_{ACK}}{P_{ABC}} = \frac{AC}{AB}, \quad \frac{P_{CBK}}{P_{ABC}} = \frac{CB}{AB}.$$

По теореме Пифагора получаем $\frac{(AC)^2}{(AB)^2} + \frac{(CB)^2}{(AB)^2} = 1$, откуда

$$P_{CBK}^2 + P_{ACK}^2 = P_{ABC}^2. \text{ Поэтому } P_{ACK} = 12.$$

11. $a < \log_2 3$.

Исходное неравенство равносильно неравенству $\log_3 x \cdot (a - \log_2 3) > 1$. Если $a = \log_2 3$, то решение нет. Если $a > \log_2 3$, то $x > 3^{\frac{1}{a - \log_2 3}} > 1$.

Если $a < \log_2 3$, то $0 < x < 3^{\frac{1}{a - \log_2 3}} < 1$.

12. $a = 5$, $b = -5$, $c = -6$.

Условие означает, что многочлен $x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + c$ делится на многочлен третьей степени $x^3 + (8+b)x^2 + (b+4)x + (c+3)$ без остатка. Данное условие равносильно системе

$$\begin{cases} a - b - 4 = (8+b)(-3-b), \\ b - (c+3) = (4+b)(-3-b), \\ c = (c+3)(-3-b). \end{cases}$$

Из второго уравнения выражаем $c + 3$ и подставляем в правую часть третьего: $c = (b^2 + 8b + 12)(-3-b)$. Теперь полученное уравнение складываем со вторым и получаем уравнение $b^3 + 12b^2 + 44b + 45 = 0$. Его единственным целочисленным решением будет $b = -5$. Следовательно, $a = 5$, $c = -6$.

При этом уравнение $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$ имеет три решения: $\pm 1, -3$.

13. $\frac{6}{7}$.

С одной стороны,

$$V = \frac{1}{3}h_1S_1 = \frac{1}{3}h_2S_2 = \frac{1}{3}h_3S_3 = \frac{1}{3}h_4S_4.$$

С другой стороны, $V = \frac{S_{\text{полн.}} \cdot r}{3}$. Поэтому

$$r = \frac{3V}{S_{\text{полн.}}} = \frac{3V}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4} = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}} = \frac{6}{7}.$$

Заметим, что при данных значениях высот пирамида существует. На рисунке 15 она вписана в

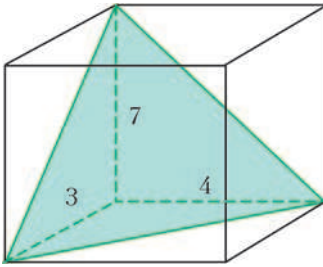


Рис. 15

прямоугольный параллелепипед со сторонами 3, 4 и 7.

14. Пусть a – сторона основания. Радиус вписанной в правильный шестиугольник окружности $R = \frac{\sqrt{3}a}{2}$. Расстояние между плоскостями основания равно $2R$. Поэтому в призму можно вписать шар радиуса R ; у нас $R = 1$.

Введем систему координат, как указано на рисунке 16. Тогда уравнение плоскости принимает

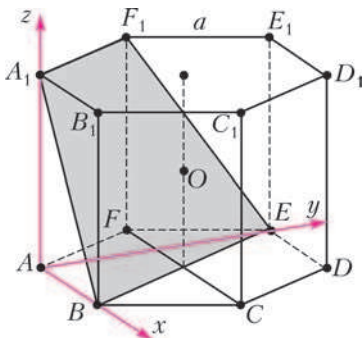


Рис. 16

вид $\frac{x}{a} + \frac{y}{a\sqrt{3}} + \frac{z}{a\sqrt{3}} = 1$, а координаты точки центра вписанного шара – $\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. Найдим расстояние от центра до плоскости:

$$\rho = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{a}\sqrt{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}.$$

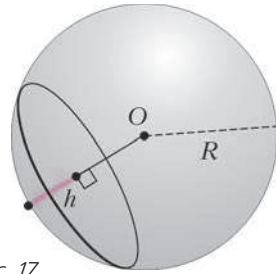


Рис. 17

Тогда (рис. 17) $h = R - \rho = \frac{a\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ и

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right) = \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{10\sqrt{5} - 14}{15\sqrt{5}} = \frac{2\pi(25 - 7\sqrt{5})}{75}.$$

КВАНТ

12+

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов,
В.А.Тихомирова, А.И.Чернуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**В.А.Аткарская, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во ПИ №ФС77-54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»

Тел.: (495) 930-56-48

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

в соответствии с предоставленными
материалами

в ООО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь
www.Pareto-print.ru

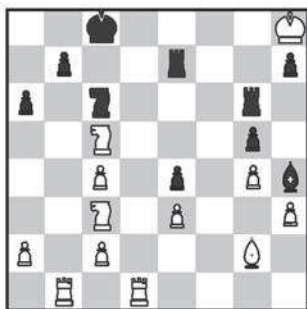
Отважный КОРОЛЬ

В первом выпуске шахматной странички 2017 года мы разобрали партии, в которых главной фигурой в атаке был король, смело ведущий за собой свои войска. Сегодня мы рассмотрим партии, в которых для достижения победы гроссмейстеры решались на смелые рейды королем далеко за пределы его привычного местоположения

Д.Навара – Р.Войташек Биль, 2015

1. e4 c5 2. ♘f3 d6 3. d4 cd 4. ♘:d4 ♘f6 5. ♘c3 a6 6. ♘e3 e5 7. ♘b3 ♘e6 8. h3 ♘e7 9. g4 d5 10. ed ♘:d5 11. ♘g2 ♘:e3 12. ♖:d8+ ♘:d8 13. fe ♘h4+ 14. ♖f1 ♘c6 15. ♘c5 ♘c4+ 16. ♖g1 0-0-0 17. b3 ♘g5 18. ♖e1 ♘h4 19. ♖b1 ♘g5. Разыгран один из наиболее популярных дебютов современности – вариант Найдорфа Сицилианской партии. Дебютная подготовка гроссмейстеров в нем, как правило, превышает 20 ходов. 20. ♖f2. Чтобы избежать повторения ходов, Д. Навара решает на смелый поход короля. Он был заготовлен заранее во время домашнего анализа 20... ♘h4+ 21. ♖f3 e4+ 22. ♖f4? g5+ 23. ♖f5 ♖he8 24. ♖hd1 ♖e5+? (Компьютерный анализ показал, что 24... ♘d3! могло поставить под сомнение замысел белых. Черные близки к тому, чтобы поймать короля. Например: 25. ♘:d3? ♘d6 26. ♘:e4 ♖e5+! 27. ♘:e5 ♘e7×!) 25. ♖f6 ♖g8 26. bc ♖g6+ 27. ♖:f7 ♖e7+ 28. ♖f8 ♖f6+ 29. ♖g8 ♖g6+ 30. ♖h8!

Чешский гроссмейстер второй раз уклоняется от повторения ходов, веря в правильность своего замысла. 30... ♖f6 31. ♖f1 ♘f2 32. ♖:f2 ♖:f2 33. ♖f1 ♖:g2 34. ♖f8+ ♖c7 35. ♘d5+ ♖d6 36. ♘:e7 ♖:c5 37. ♘:c6



b:c6 38. ♖f5+ ♖:c4 39. ♖:g5. Яркая партия пришла к ладейному эндшпилю ♖g3?! (39... ♖:c2 40. ♖:h7 ♖d3 с большими шансами на ничью благодаря проходной пешке e) 40. h4 h6? (40.. ♖:e3!). Данная партия – хороший пример того, как использование заранее заготовленного варианта, пусть и не полностью корректного, работает на практике: черные потратили почти все время на опровержение замысла белых и в цейтноте допускают две ошибки подряд. 41. ♖g6! ♖:e3 42. ♖g7 ♖g3 43. ♖:h6 e3 44. ♖g5 ♖d5 45. ♖f4 ♖h3 46. h5 c5 47. ♖g5+ ♖d4 48. ♖e5. Выигрыш белых.

А.Миста – Й.Дуда Росток, 2015

1. e4 c5 2. ♘f3 d6 3. d4 cd 4. ♘d4 ♘f6 5. ♘c3 a6 6. g3 e6 7. ♘g2 ♘d7 8. g4?! (8.0-0) h6 9. h4 ♘c6 10. g5 ♘d4 11. ♖d4 ♘g4 12. f4 ♖c8 13. ♘f3 h5 14. ♘g4 hg 15. ♘e3 b5 16. 0-0-0 ♖c7 17. ♖b1 ♖c4! Размен ферзей в пользу черных, так как после него не столь опасно оставлять короля не рокированным, а в эндшпиле может сказаться преимущество двух слонов и положение пешки g4 в случае, если удастся сделать ее защищенной проходной после f5 18. ♖d3 ♖d3 19. cd f6 20. ♖dg1 b4 21. ♘e2 ♘b5 22. ♘c1 f5 23. ef ef 24. ♘d4. В этой позиции напрашивается ход ♖h5 с целью блокировки и последующей атаки белых пешек на королевском фланге. Моло-

дой польский гроссмейстер находит более изящный план:

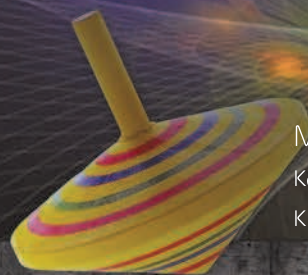


24... ♖f7! 25. h5 ♖e6 26. b3 ♖d5. Поскольку белопольный слон у белых уже разменян, а конь привязан к защите ферзевого фланга, черный король располагается в самом центре доски в абсолютной безопасности. Теперь любой размен будет в пользу черных, поскольку их король способен оперативно помочь продвижению пешек королевского фланга. 27. ♘b2 ♖h7 28. h6 gh 29. g6 ♖hc7 30. ♖h5 ♖c1! Необходимая жертва с целью расчищать черному королю дорогу на королевский фланг. 31. ♖c1 ♘d3 32. ♖a1 ♖c1 33. ♘c1 ♖e4 34. ♘b2 g3 35. ♖h3 ♖f4 36. g7 ♘g7 37. ♘g7 ♖g4. Черные пешки сильнее ладьи. Остальное – дело техники. 38. ♖h6 f4 39. ♖d6 f3 40. ♖d4 ♖f3 41. ♖f4 f2 42. ♘d4 ♖g2 43. a3 ♘e2 44. ♘f2 gf 45. ♖f2 ♖f2. Если бы у белых не было пешек, то получилась бы теоретическая ничейная позиция. Теперь задача черных состоит в том, чтобы вызвать ход b5 и переместить свою пешку на линию b. 46. ab ♖e1 47. ♖b2 ♖e2 48. ♖b1 ♘d3 49. ♖b2 ♘c2 50. ♖a1 ♖c1 51. ♖a2 ♘d3 52. ♖a1 ♘b1! Выигрыш черных.

А. Русанов

Индекс 90964

ЮЛА И ГЕЛИКОИД



Можно ли «подкрутить» волчок, чем отличается волчок от юлы, как перейти от поступательного движения к вращательному...



Продукты с физикой



(Подробнее – на с. 27 внутри журнала)