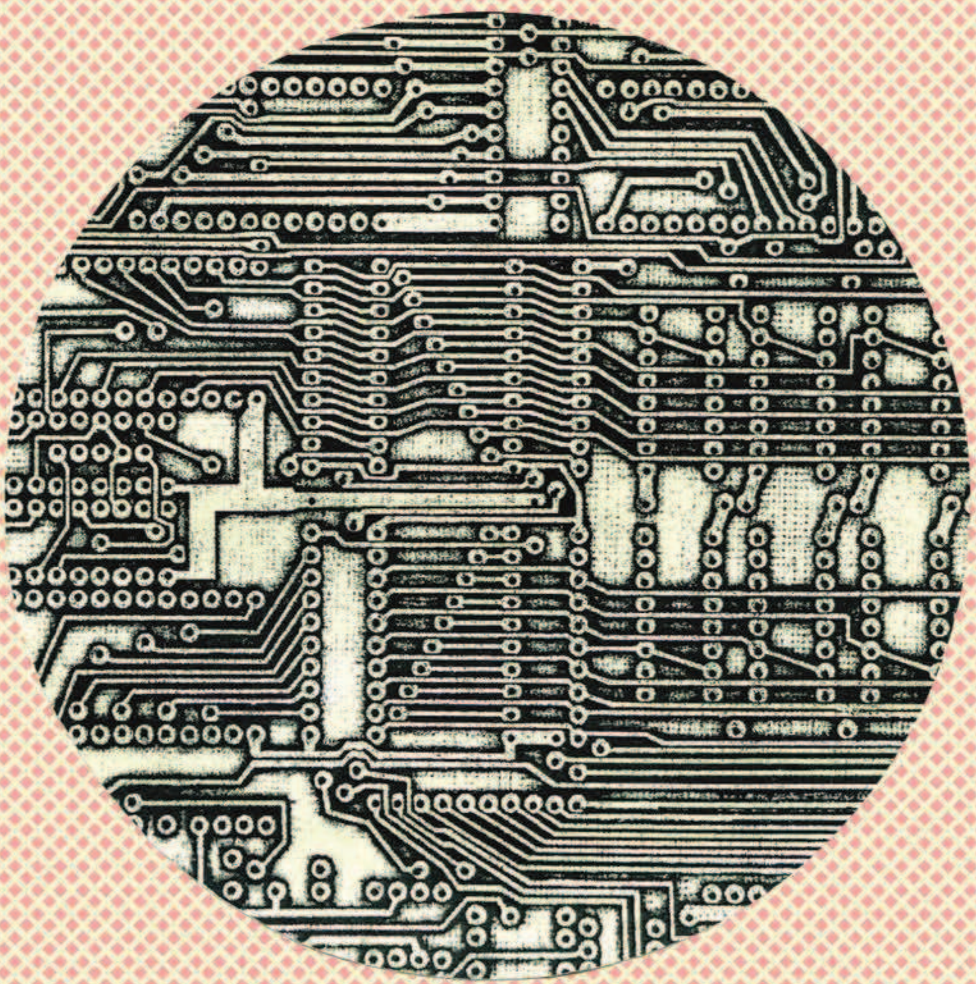
МАРТ
ISSN 0130-2221
2017 · № 3

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



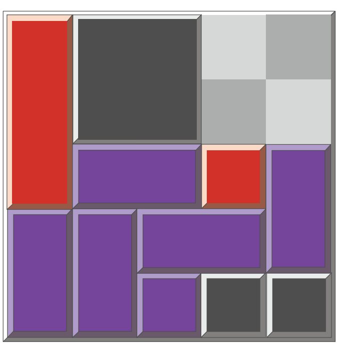
Место встречи изменить нельзя

В «Кванте» № 4 за 2015 год рассказывалось о головоломке греческого изобретателя Михаила Тулузаса. В ней из начального положения брусочков в квадратной рамке 5 на 5 (рис. 1) требовалось, путем передвижения брусочков, добиться того, чтобы три темных оказались в левом нижнем углу рамки (рис. 2). Важная особенность головоломки: два брусочка, показанные красным на рисунках, зафиксированы и поэтому они мешают передвигать другие брусочки.

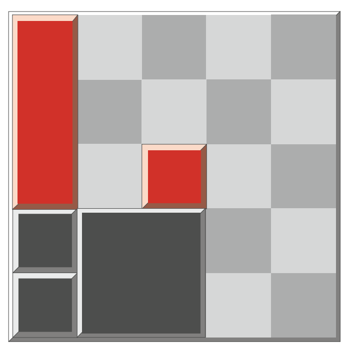
Замечательное свойство подобных головоломок состоит в том, что, имея одну удачную головоломку, легко получать новые интересные задачи: достаточно лишь немного изменить начальное положение брусков.

(Продолжение – на странице 16 внутри журнала)

1.



2.



КВАНТ

МАРТ 2017 № 3

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

2 Массоперенос. *Л.Ашкинази*
10 Блуждания по цепям. *А.Гиль, А.Петрунин*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

17 Задачи М2454–М2457, Ф2461–Ф2464
18 Решения задач М2441–М2445, Ф2448–Ф2452

НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

25 Июльский град. *Ю.Носов*

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

26 Задачи
27 Почему гравитационная энергия отрицательна. *С.Дворянинов*

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

29 Задачи 20–23

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

30 Полет в кристаллическом облаке. *А.Кашеваров, А.Стасенко*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

32 Молекулярно-кинетическая теория и характеристики вещества. *С.Варламов*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

39 Переключения рядов. *Е.Бакаев*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

46 Шунты и добавочные сопротивления в задачах. *Б.Мукушев*

ОЛИМПИАДЫ

50 Региональный этап XLIII Всероссийской олимпиады школьников по математике
52 Региональный этап LI Всероссийской олимпиады школьников по физике

58 Ответы, указания, решения

НА ОБЛОЖКЕ

I *Иллюстрация к статье «Массоперенос»*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

Массоперенос

Л.АШКИНАЗИ

Какой он бывает вообще

Массоперенос (некоторые его примеры проиллюстрированы на приведенных в статье рисунках) – это не только съезжание тела с наклонной плоскости и качание маятника, не только полет Земли вокруг Солнца и Солнца вокруг центра Галактики и даже не только электрический ток в электролите и электроплите. Ведь и свет отклоняется Солнцем, и электромагнитное излучение давит на крылышки в приборе Лебедева и на «солнечный парус». Все эти виды массопереноса осуществляются отдельными макроскопическими телами, элементарными частицами, квантами. Его анализируют, применяя законы механики и пользуясь для квантов понятием импульса фотона. Если же массоперенос осуществляется непрерывной средой, газом или жидкостью, его анализируют, используя другой язык – понятия давления, плотности, вязкости, конвекции и т.д., а также уравнения газо- и гидродинамики. Разумеется, в газе и жидкости есть отдельные частички, но даже те из вас, кто знает, что воздух состоит из молекул, говорят о температуре, скорости ветра, давлении и влажности. Вообще же, переход от описания частиц к описанию ансамбля – вопрос непростой и интересный.

Так вот, для массопереноса в жидкости и газе из параметров вещества первостепенное значение имеет вязкость – именно она определяет, какие нужны силы, т.е. перепады давлений, чтобы вызвать те или иные движения газа или жидкости. Тут ситуация проста: среди газов самый вязкий (при атмосферном давлении и температуре $20\,°\mathrm{C}$) это неон Ne, его вязкость равна $3{,}1\cdot10^{-5}$ кг/(м · с), вязкость жидкости сверху ничем не ограничена – стекло в окне тоже ведь жидкость. Самая малая вязкость среди газов – у водорода H_2 ($0{,}88\cdot10^{-5}$ кг/(м · с)), среди нормальных жидкостей – у диэтилового эфира $(C_2H_2)_2O$ ($0{,}22\cdot10^{-3}$ кг/(м · с)) и пентана C_5H_{12} ($0{,}23\cdot10^{-3}$ кг/(м · с)), а среди «жидкостей вообще» – у сверхтекучего гелия ^4H.

При испарении плотность уменьшается на три порядка, значит, вещество должно сильно расшириться, значит – переместиться. Например, кубический сантиметр воды, испарившись при атмосферном давлении, займет почти кубический дециметр – это ли не перемещение. Поэтому причислим испарение к процессам массопереноса и спросим, у каких веществ наименьшая и наибольшая скорости испарения. Так вот, наибольшая

– у гелия He, точнее у его изотопа ^3He, а у изотопа ^4He она меньше. Они кипят при атмосферном давлении при температуре 3,2 K и 4,2 K соответственно. Или можно сказать так – слой толщиной в один атом (монослой) ^4He испаряется за секунду при 0,4 K, а монослой ^3He – при 0,2 K.

Медленнее всего из элементов испаряются тантал Ta, вольфрам W и рений Re, они кипят при температуре примерно 5460 °C, 5560 °C и 5600 °C, а монослой за секунду испаряется с них, соответственно, при 2600 °C, 2700 °C и 2750 °C. Однако нет ли среди тугоплавких соединений (упомянутых выше карбидов) достойных им конкурентов? Подозрение законное: в общем, чем выше температура плавления, тем меньше при одной и той же температуре скорость испарения. Это правило не соблюдается жестко: например, олово Sn и галлий Ga имеют меньшую, чем «положено», скорость испарения, а цинк Zn и кадмий Cd – бóльшую, но проверить не мешает. К сожалению, данные в этой области температур вообще не слишком надежны, но скорее всего HfC и TaC кипят при 5400 °C и 5500 °C, т.е. почти не уступают своим металлическим конкурентам. Правда, последние могут им бросить упрек – мы-де испаряемся добросовестно, а вы при этом разлагаетесь.

Еще и ионная бомбардировка

Для массопереноса, при котором вещество отделяется от твердого или жидкого материала, должны разрываться межатомные связи. Значит, для этого у атомов должна быть энергия. Естественно, она у них есть, причем средняя энергия растет линейно с увеличением температуры. При этом растет и доля атомов (или молекул), которые имеют энергию, достаточную для разрыва связей, т.е. для испарения. Но сообщить энергию атомам можно и без нагрева – например, обрушив на поверхность поток частиц: атомов, ионов, элементарных частиц. И это весьма важная проблема для современной техники, потому что во многих устройствах поверхности работают именно в таких условиях и при этом не должны разрушаться. Соответствующие ситуации бывают трех типов.

Первая ситуация характерна для электронных вакуумных приборов, например ламп бегущей волны (спутниковая связь), клистронов (телевидение, радиолокация) и магнетронов (радиолокация, СВЧ-печи). В этих случаях работоспособность прибора связана с работой выхода катода, создающего поток электронов в приборе. А работа выхода сильно зависит от состава поверхности катода, причем влияние на уровне десятых долей монослоя выводит катод и прибор из строя. С материалом катода здесь сделать почти никогда ничего нельзя – можно лишь попытаться сделать менее вредным поток ионов. Для этого надо либо уменьшить концентрацию газов в приборе (особенно газов с большими атомными массами, они вреднее), либо уменьшить энергию бомбардирующих катод ионов, либо попытаться отвести поток ионов от катода.

Вторая ситуация – когда мы можем выбирать материал и структуру части прибора, разрушаемой ионами или иными частицами, причем нам важно только, чтобы материал не разрушался. Дать здесь какие-либо общие рекомендации трудно – уж очень разнообразны условия работы. Ориентировочно можно считать, что к разрушению потоками ионов более устойчивы следующие элементы: C, B, Be, Al, Ti, V, Zr, Nb, Ta, Mo, W, Fe, а также их сплавы и соединения.

Третья ситуация – когда мы можем выбирать материал и структуру части прибора, разрушаемой ионами или иными частицами, причем нам важно, и чтобы материал не разрушался, и какие именно продукты его разрушения попадают в прибор. Это ситуация Токамака – реактора для получения управляемого термоядерного синтеза, причем там эта проблема столь важна, что она получила имя собственное: «Проблема первой стенки». Дело в том, что для его работы очень вредны примеси тяжелых ионов в плазме. Это немедленно сокращает список подходящих элементов до C, B, Be, Al, Ti, V, их сплавов и соединений. После множества исследований для строящегося во Франции по международному проекту Токамака выбран бериллий. Эта история настолько важна и интересна, что о ней стоит рассказать немного подробнее.

Требования, предъявленные к материалу первой стенки Токамака, открыли новую страницу в материаловедении. Записи на этой странице лишь начаты. Поэтому пока ограничимся перечнем основных процессов, происходящих при таких воздействиях. Во-первых, распыление потоками ионов. Во-вторых, распыление под действием потоков нейтронов. В-третьих, при нейтронной бомбардировке из поверхности стенки вылетают «куски» примерно по 10 мкм^3 – так называемые «чанги». В-четвертых, вколоченные в материал атомы гелия и водорода собираются в пузыри, и в результате материал «распухает» – такой процесс называется «свеллинг». Если пузырь образуется близко к поверхности, она вспучивается – такой процесс называется «блистеринг». В-пятых, шелушение поверхности – верхняя корка на этом пузыре отваливается, этот процесс называется «флекинг». Получающаяся в результате блистеринга пористая, губчатая поверхность тормозит флекинг, и после разрушения материала на некоторую глубину процесс замедляется. Предложено и целенаправленное применение этого эффекта – использование поверхности с губчатой, игольчатой (щетка) и сотовой структурой. В последнем случае замедляется и распыление, так как часть материала перепыляется со стенки на стенку, не вылетая в объем. И, наконец, в-шестых, радиационная сегрегация – под действием облучения ионами меняется состав сплавов, т. е. облучение вызывает диффузию. Ни про один из этих процессов нельзя сказать, что он достаточно изучен и понят. Рассмотрим наиболее изученный из них – ионное распыление.

Коэффициент распыления, т.е. отношение количества распыленных атомов к числу попавших на поверхность ионов, увеличивается с увеличением массы иона и с уменьшением энергии испарения (энергии, необходимой для испарения атома) материала мишени. С увеличением энергии падающих ионов до величин порядка 10 кэВ коэффициент распыления сначала растет, потом начинает убывать. Однако строгой теории катодного распыления, которая могла бы надежно предсказать экспериментальные данные до их получения, нет. Впрочем, для физики поверхности эта ситуация не нова.

Многочисленные существующие теории катодного распыления можно разбить на две группы: тепловые и механические. Тепловые объясняют распыление нагревом поверхности в месте удара иона и испарением; механические – столкновением иона с атомами мишени, в результате которого атомы мишени (соударяясь и друг с другом) получают импульс, направленный к поверхности мишени, и вылетают в вакуум. Механические теории отличаются одна от другой гипотезами о конкретном механизме взаимодействия иона с атомами и дают разные результаты, согласующиеся с теми или иными экспериментальными данными. Понятно, почему при больших энергиях коэффициент распыления невелик: падающий ион слишком глубоко забирается в глубь материала и выбитые им со своих мест атомы не добираются до поверхности. Понятно, почему коэффициент распыления мал при малых энергиях. Но гораздо большее количество фактов непонятно или понятно не совсем.

Например, при ионной бомбардировке на поверхности может появиться рельеф, причем довольно сложный. А возможна и полировка, сглаживание поверхности при бомбардировке ионами малых энергий. Это связано, видимо, с тем, что атомы, находящиеся на выступах, имеют меньшую энергию связи (их нужно оторвать от меньшего количества атомов) и поэтому можно так выбрать энергию ионов, что эти атомы будут распыляться сильно, а остальные – слабо. При высокой плотности потока ионов, бомбардирующих электрод, концентрация внедренных в него атомов и возникших в нем дефектов решетки достигает таких значений, что кристаллическая решетка полностью разрушается и материал переходит в аморфное состояние. При этом исчезает четко выраженная температура плавления, и эта непонятная смесь металла и газа начинает ползти, оплывать (как свеча) под действием силы тяжести.

Но то, что происходит при катодном распылении многокомпонентных соединений, устроено еще сложнее. Можно еще догадаться, почему примесь одного металла к другому иногда вызывает образование рельефа при распылении: слабо распыляющаяся примесь, если ее атомы сосредоточены на каких-то участках, защищает от распыления находящийся под ней материал. Но почему добавка нескольких процентов висмута к меди увеличивает коэффициент распыления наполовину или почему добавление нескольких процентов алюминия к золоту снижает распыление в десять раз – неизвестно. Для распыления сплавов существует несколько теорий, иногда то одна, то другая способна правильно предсказать результаты отдельных экспериментов.

Массоперенос при протекании тока

Самое очевидное – это массоперенос при электролизе расплава. Он тем больше, чем больше масса ионов и меньше их заряд, и тем меньше, чем ионы легче, а заряд больше. В первом случае наше внимание привлекает CsI, он плавится примерно при $630\ ^\circ\mathrm{C}$, во втором – BN, он плавится при $3000\ ^\circ\mathrm{C}$. При этих температурах они уже прилично проводят ток, но вообще-то для массопереноса при ионной проводимости расплав не обязателен. В твердой фазе массоперенос происходить тоже будет – числу Фарадея безразлично, о каком состоянии идет речь. А если говорить не о расплавах, а о растворах, то массоперенос будет только больше за счет сольватации (электростатического взаимодействия между частицами растворенного вещества и растворителя) – каждый ион будет волочить за собой оболочку из молекул растворителя. Правда, у BN плохо с растворимостью, так что придется ограничиться LiF.

Теперь посмотрим на электронные проводники. При самом обычном токе в проводе переносится не только заряд, но и масса, хотя отношение массы к заряду – это отношение массы электрона к его заряду, т.е. примерно $5{,}7 \cdot 10^{-12}$ кг/Кл. Ровно то же происходит при протекании электронного тока в вакууме, а при протекании ионного тока в вакууме перенос массы будет того же порядка, что и в электролите.

Сложнее ситуация в плазме, где текут одновременно и электронный ток, и ионный. Если длины свободного пробега и энергии ионов и электронов примерно равны, то (попробуйте показать это расчетом) добавка к тепловой скорости, которую приобретают частицы под действием электрического поля, обратно пропорциональна корню из массы, а «поток массы», соответственно, просто пропорционален корню из массы. Ток в такой плазме – это преимущественно ток электронный, но массу переносят в основном ионы. В неравновесной плазме, когда энергия электронов может превосходить энергию ионов, например на два порядка, тепловые скорости электронов оказываются больше, время между соударениями и влияние на их скорость внешнего поля, соответственно, меньше, превосходство электронного тока над ионным уменьшается, и их роль в переносе массы может быть и сравнимой.

Но в обычных металлах тоже есть свои хитрости. Электроны, разогнанные полем, тормозятся ионами и отдают им не только энергию, нагревая проводник, но также и часть импульса. Это приводит к явлению, называемому электропереносом. Эффект растет с увеличением плотности тока, а большую плотность тока человек использует в микросхемах – токи там небольшие, но проводники с каждым годом делаются все тоньше. Электроперенос приводит к возникновению дефектов в проводящих дорожках и может вызвать выход микросхемы из строя. В промышленности электроперенос применяется для очистки жидких металлов от примесей: поскольку ионы основного металла и примеси взаимодействуют с электронами по-разному, то ионы примеси будут перемещаться, но к аноду или катоду – зависит от многих причин. Кроме того, эффект может применяться для разделения изотопов – ионы более легкого изотопа сильнее увлекаются электронами и поэтому перемещаются к аноду.

Диффузия и не только

Что такое диффузия, мы вроде бы знаем из учебника, но знаем плохо. Диффузию часто путают с другими механизмами перемещения вещества. Из книги в книгу повторяется одна и та же ошибка – объяснение диффузией распространения запаха духов в комнате. Между тем, характерная длина диффузии в газе за 10 секунд – около 3 миллиметров. Из книги в книгу приводятся примеры диффузии в жидкостях, но не говорится, что и конвекция, и вызванные другими причинами движения газа и жидкости запросто маскируют диффузию. В жидкости характерное расстояние диффузии за 20 минут – около 1 миллиметра. А тут стакан становится синим за минуту.

С диффузией в твердых телах тоже не все хорошо. Например, обычно приводится пример с прижатием двух брусков – из свинца Pb и золота Au. Возможно, что по традиции, поскольку именно на этой паре металлов была впервые (в 1896 году) обнаружена диффузия. Одно из необходимых условий – высокий коэффициент диффузии, и в данном случае это условие выполнено, но есть еще одно условие. Какое? Подумайте, а пока вернемся к газам и жидкостям.

Диффузию характеризуют коэффициентом диффузии. Сначала дадим точное определение, а потом объясним «на пальцах», что это значит. Коэффициент диффузии D связывает поток вещества N и градиент концентрации, т.е. величину, показывающую, как с координатой x меняется концентрация C, а именно: $N = D\frac{\Delta C}{\Delta x}$. Посмотрим на размерности: $[N] = \text{кг}/\left(\text{м}^2\cdot\text{с}\right)$, $[C] = \text{кг}/\text{м}^3$, $[x] = \text{м}$, следовательно, $[D] = \text{м}^2/\text{с}$. Для газов коэффициент диффузии тем больше, чем легче и меньше атом (или молекула), поэтому на одном конце шкалы располагаются He ($D = 1{,}6\cdot10^{-4}\ \text{м}^2/\text{с}$) и H_2 ($1{,}3\cdot10^{-4}\ \text{м}^2/\text{с}$), а на другом – например, Xe ($0{,}048\cdot10^{-4}\ \text{м}^2/\text{с}$) и UF_6 ($0{,}016\cdot10^{-4}\ \text{м}^2/\text{с}$). Эти величины характеризуют поток атомов однородного газа; казалось бы, о каком градиенте здесь может идти речь – газ однороден, $\Delta C = 0$, каким ни выбирай Δx. Но ведь атомы-то продолжают двигаться, просто мы этого не замечаем, поскольку они одинаковы. Вот если сделать их разными, используя изотопы, то мы сможем оценить, как диффундирует вещество само в себе; соответствующее D называется коэффициентом самодиффузии. Если же у нас имеется смесь двух газов, то мы можем измерять концентрации газов по отдельности, и окажется, что D зависит от обоих газов. Например, в смеси Kr + H_2 он равен $0{,}6\cdot10^{-4}\ \text{м}^2/\text{с}$, а в смеси Kr + Xe – $0{,}08\cdot10^{-4}\ \text{м}^2/\text{с}$.

Интуитивно понятно, что коэффициент диффузии в жидкостях может быть очень мал – т.е. так же мал, как в твердых телах, потому что аморфное твердое тело и жидкость это почти одно и то же. Например, коэффициент диффузии воды в глицерине равен $0{,}008 \cdot 10^{-9}$ м^2/с. Но может он быть и относительно велик – например, коэффициент диффузии иода в уксусной кислоте равен $3{,}6 \cdot 10^{-9}$ м^2/с.

Теперь – обещанное «D на пальцах». Среднее расстояние, которое проходит диффундирующая частица за время t, или характерное расстояние диффузии, равно $\sqrt{Dt}$. Поэтому мы всегда можем пересчитать D в расстояние, которое будет охвачено процессом за время t. Например, для газов при D от $0{,}016 \cdot 10^{-4}$ м^2/с до $1{,}6 \cdot 10^{-4}$ м^2/с и времени процесса $t = 10$ с расстояние составит 4–40 мм, а для жидкостей при D от $0{,}008 \cdot 10^{-9}$ м^2/с до $3{,}6 \cdot 10^{-9}$ м^2/с и времени процесса $t =$ $= 100$ с расстояние составит 0,03–0,6 мм. Если, конечно, не взбалтывать…

Жизнь в твердом теле

Прежде всего, возможны сложности на границе: процессы на границе объекта или материала могут влиять на диффузию. Например, помните цилиндр из свинца и цилиндр из золота – их прижимали для того, чтобы был хороший контакт. Именно для увеличения площади контакта брали мягкие металлы и прижимали их друг к другу. Правда, тут есть еще проблема, и не одна. На поверхности свинца в воздухе образуется слой оксида, который может тормозить переход атомов из одного металла в другой. Но и это не все – для диффузии атому надо как-то перемещаться внутри решетки своего или чужого металла, а для перехода в чужой металл атому надо оторваться от своей решетки и втиснуться в чужую. Любой из этих процессов – отрыв от своих, внедрение в чужие, внедрение в оксид, диффузия в оксиде, отрыв от оксида – может оказаться ограничивающим диффузию. Причем все эти процессы по-разному зависят от температуры, а собственно диффузия (до нее мы еще не добрались!) с ними не советуется и зависит от температуры по-своему. Поэтому может прекраснейшим образом оказаться, что при одних температурах доминирует один процесс, а при других – другой.

Теперь обратимся к собственно диффузии внутри твердого тела. Существует много механизмов диффузии. Если это не монокристалл или аморфное вещество, то твердое тело состоит из отдельных маленьких кристалликов, а у них есть грани, границы. Так вот, по этим граням-границам и может в глубь монолитного, казалось бы, материала идти диффузия – сначала вдоль граней, а потом и внутрь кристалликов. Причем миграция по границам преобладает при низких температурах, примерно до половины температуры плавления (естественно, в кельвинах). В этом случае говорить о конкретных значениях коэффициента диффузии придется с оговоркой – для материала с кристаллами такого-то размера. А еще кроме граней есть ребра, и некоторые работы отмечают ускоренную диффузию именно вдоль ребер.

В твердом теле, даже если не обращать внимания на грани и ребра, тоже есть несколько механизмов диффузии. Атом может просто протискиваться между дру-

гими атомами – диффузия по «междоузлиям», причем эти междоузлия, «пустые места» внутри кристалла, бывают разные. Атом может пробираться также по вакансиям, и учтите, что вакансии тоже бывают разные. А еще атом может обмениваться местами с соседями. «Ты на мое место, а я – на твое. Обойдемся без риэлторов», – говорит один атом другому. «Ты что, энергии много потребуется», – отвечает тот.

Раз диффузия связана с разрывом связей в решетке и перемещением атомов, как и при плавлении, то следует ожидать, что наиболее медленной она будет в тугоплавких веществах. Это действительно примерно так и есть: принято считать, что при температуре $0{,}7T_{пл}$ коэффициент диффузии равен $10^{-14}-10^{-16}$ м^2/с (разброс еще два порядка), а поблизости от $T_{пл}$ – около 10^{-12} м^2/с (и разброс меньше). Например, при 2000 °С у вольфрама $D=10^{-16}$ м^2/с, а у углерода – на три порядка меньше. Еще медленнее идет диффузия в сверхтугоплавких соединениях, наших старых знакомых ZrC и HfC. На другом конце шкалы находится, например, натрий Na, у него $D=10^{-12}$ м^2/с при 95 °С – для натрия это близко к плавлению. Но это все самодиффузия, а диффузия примесей зависит от свойств примеси, например от размера атома.

Рекордсменом по скорости диффузии, как кажется, должен быть водород H – у него самый маленький атом. Наиболее шустро диффундирует он в железе Fe и палладии Pd – вблизи 1000 °С для этих пар D будет около 10^{-7} м^2/с и 10^{-6} м^2/с соответственно. Но бывают и загадочные ситуации – например, на порядки быстрее других металлов диффундируют медь Cu и никель Ni в германии Ge и олове Sn. Известно много ситуаций аномально быстрой диффузии, и трудно сказать, когда она быстрее всего, – слишком разнообразны условия. Но вообще-то чем больше в кристалле «пустого места», тем быстрее пойдет диффузия, и вот почему. «Очень пустое место» – это открытая поверхность. А для перемещения атома по поверхности ему нужно отрываться от меньшего количества соседей, т.е. ему достаточно иметь в несколько раз (точнее, в 2–3 раза) меньшую энергию. Поэтому, например, можно ожидать быстрой диффузии в графите – вдоль плоскостей, а также в конструкциях из графена, т.е. из углеродных плоскостей, из моноатомных слоев.

Здесь было бы логично привести данные по диффузии по поверхности, или, как ее иногда называют, поверхностной миграции. Известны несколько ее механизмов – например, атомы могут ползать поодиночке, а могут группами. Если сорбированные атомы сильно притягиваются подложкой, то первый слой «примерзает» к подложке и перемещение будет идти не по подложке, а по этому слою. Могут ползать по поверхности и двумерные образования, нечто вроде очень маленьких кристаллов. Характер диффузии зависит от того, кто на ком сорбирован, сколько атомов на подложке и от температуры. Однако все данные, касающиеся поверхности, имеют очень большой разброс. Можно лишь ориентировочно сказать, что соответствующий коэффициент диффузии при температурах, близких к плавлению, будет порядка 10^{-8} м^2/с.

И еще один вопрос касательно водорода. У водорода H самый маленький атом, но его молекула больше атома гелия He. И действительно, в диэлектриках лучше всего диффундирует именно гелий – например, через кварц при комнатной температуре он диффундирует лишь на порядок медленнее, чем водород через железо. Что может быть этому причиной? Подсказка – водороду недостаточно ле-

тать над металлом, чтобы оказаться диффундирующим в металле. По дороге он должен побывать на поверхности металла, в зале прилета аэропорта. Что может там с ним произойти?

Кое-что о роли диффузии в жизни

Мы не обсуждали роль электропроводности и теплопроводности в жизни – потому, что она, хоть отчасти, но очевидна. Ток идет – лампочка светится, лифт едет, монитор показывает картинки. Тепло распространяется – нам делается холодно или тепло. С диффузией дело обстоит сложнее – распространение запаха духов и окраски жидкости в стакане – некорректные примеры, а корректные – не очевидны.

Диффузия играет важную роль в различных областях науки и техники, во многих процессах, происходящих в живой и неживой природе. Например, она влияет на протекание многих химических реакций и процессов, на испарение, конденсацию, кристаллизацию, растворение, набухание, сушку, горение. Диффузия влияет на работу атомных реакторов, электронных ламп и полупроводниковых приборов, батареек и аккумуляторов. И даже на работу конструкций – ползучесть металлов, изменение размеров деталей под нагрузкой это тоже диффузия. На диффузии основаны многие технологические операции – спекание порошков, многие процессы обработки металлов (азотирование и цементация сталей, гомогенизация сплавов, сварка, очистка от некоторых примесей), дубление кожи, крашение волокон и тканей. Именно диффузия водорода через палладий используется для получения особо чистого водорода.

Диффузия газов в металлах и диэлектриках важна для работы вакуумных приборов, причем по двум причинам. Во-первых, растворенные в материалах газы при работе прибора диффундируют к поверхности деталей, десорбируются с нее, попадают в вакуумный объем и начинают плохо себя там вести: взаимодействовать с материалами других деталей, а при большой концентрации – попросту рассеивать электронный поток. Во-вторых, диффузия газов из атмосферы, в первую очередь натекание гелия через стекло и водорода через металлы, вполне способна повлиять на работу прибора.

Диффузия, которая во многих случаях определяет срок службы материала и изделия, ускоряется при воздействии на материал потоков частиц. Поэтому понятен интерес к ней со стороны разработчиков атомных и термоядерных реакторов. Облучение потоками частиц используют как инструмент и химики – в этом случае тоже немедленно возникает вопрос о воздействии этого облучения на материалы, из которых сделано оборудование. Куда ни кинь – везде или клин, или диффузия (причем последняя – чаще).

Закономерностям диффузии подчиняются процессы миграции элементов в недрах планет и звезд (о Земле уж не говорим), а также внутри вас, уважаемый читатель. Внутри вас идут многие тысячи процессов диффузии, без некоторых мы не прожили бы и нескольких минут. Как вы думаете, почему?

Блуждания по цепям

А.ГИЛЬ, А.ПЕТРУНИН

Вероятность и математическое ожидание

Подкинув игральный кубик, мы можем выбросить с равными шансами 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. *Исход* (результат) такого испытания (число очков, выпавшее на верхней грани кубика) является простым примером *случайной величины*. Естественно предположить, что исход одного испытания (подкидывания кубика) не зависит от исходов других таких же испытаний.

Давайте записывать значения нашей случайной величины, много раз подкидывая кубик, и вычислять долю испытаний, давших конкретный исход, например 5 очков. При неограниченном увеличении числа испытаний эта доля стремится к числу, которое называется *вероятностью* этого исхода. Поскольку шансы каждого из шести исходов одинаковы, вероятность каждого исхода равна $\frac{1}{6}$ – сумма долей шести возможных исходов всегда равна 1, и в пределе все эти шесть долей уравниваются.

Давайте теперь не только записывать результат каждого испытания, но и считать среднее арифметическое всех записанных на данный момент результатов. Если эта последовательность стремится к определенному числу, это число называется *математическим ожиданием* или *средним значением* случайной величины (или просто *средним*).

В нашем примере искомое среднее значение числа очков можно посчитать по формуле

$$\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 2+\frac{1}{6}\cdot 3+\frac{1}{6}\cdot 4+\frac{1}{6}\cdot 5+\frac{1}{6}\cdot 6=3\frac{1}{2}.$$

Действительно, в пределе на долю каждого исхода 1, 2, 3, 4, 5 и 6 приходится $\frac{1}{6}$ количества всех исходов, а значит, их среднее арифметическое должно стремиться к левой части равенства. Иначе говоря, для вычисления среднего значения мы должны вычислить *взвешенную сумму* значений нашей величины для каждого исхода (1, 2, 3, 4, 5 и 6), взяв вероятность каждого исхода $\left(\frac{1}{6}\right)$ в качестве его веса.

Хотя изложенные выше утверждения и кажутся очевидными, для того чтобы придать им точный математический смысл, требуется развить теорию, которая останется за рамками нашей статьи. Мы обсудим только способы нахождения вероятностей и средних значений в чуть более сложных ситуациях.

Вообще говоря, может оказаться, что среднее значение (математическое ожидание), вычисляемое как предел для неограниченно продлеваемой серии испытаний, не существует для данной схемы испытаний. Такое может случиться, поскольку у бесконечной последовательности чисел предельного значения может и не существовать.

Знаменитым примером ситуации без предельного значения является «Санкт-Петербургская лотерея», состоящая в следующем. Банкомет подбрасывает монету несколько раз, пока не выпадает орел. Если орел выпадает на первом броске, банкомет выплачивает игроку 1 дукат; если орел выпадает при втором броске, то 2 дуката; если при третьем – 4 дуката и так далее, т.е. на каждом новом броске ставка

Статья основана на лекции, прочитанной первым автором в школьном кружке «Northwest Academy of Sciences» в Сиэтле. Авторы признательны А.Акопяну, А.Бураго, А.Ващилло, А.Новикову и С.Табачникову за помощь при написании этой статьи.

удваивается. Средний выигрыш в такой лотерее оказывается бесконечным. Об этом парадоксе и его истории можно прочитать в статье [1]. В наших задачах такого происходить не будет, но мы не будем это строго доказывать.

Робот Чебуратор на коротком столе

Электромеханическая игрушка «Робот Чебуратор», будучи включенной, через равные интервалы времени делает шаги одинаковой длины налево или направо, случайно выбирая между этими двумя направлениями с одинаковой вероятностью $\frac{1}{2}$.

Предположим, Чебуратор стоит на левом краю короткого стола (рис.1): шагая влево (для читателя), он чебурахнется со стола. Однако он может шагнуть вправо и остаться на столе (на правом краю) – но чебурахнется после второго шага направо. Нас интересуют следующие две задачи.

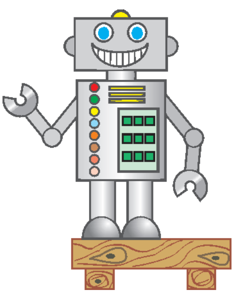


Рис. 1

Задача 1. *Зная начальное положение Чебуратора, какова вероятность того, что робот чебурахнется с левого края стола, и какова – что с правого?*

Задача 2. *Сколько в среднем шагов сделает робот, чебурахнувшись на последнем шаге?*

При этом мы полагаем, что существование требуемых чисел в обоих вопросах обосновано (это действительно верно, хотя требует доказательства); нам остается лишь найти значения этих чисел.

Решение первой задачи. Пусть p_1 и p_2 обозначают вероятности чебураханья с правого края стола из первого (на левом краю стола) и второго (на правом краю стола) положения Чебуратора. Заметим, что

$$p_1 = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot p_2 .$$

Действительно, на первом шаге с вероятностью $\frac{1}{2}$ робот чебурахнется налево, и, значит, шансов чебурахнуться направо у него уже не будет; отсюда слагаемое $0 = \frac{1}{2}\cdot 0$. С той же вероятностью $\frac{1}{2}$ он перейдет на второе место (на правом краю стола), где вероятность чебурахнуться направо мы обозначили p_2; отсюда слагаемое $\frac{1}{2}\cdot p_2$.

Таким образом, зная две вероятности чебураханья направо после двух вариантов первого шага (0 и p_2), мы посчитали их взвешенную сумму, взяв в качестве весов вероятности соответствующих вариантов первого шага $\left(\frac{1}{2} \text{ и } \frac{1}{2}\right)$.

Аналогично, рассмотрев два возможных исхода шага робота из второй позиции (на правом краю стола), получаем уравнение

$$p_2 = \frac{1}{2}\cdot p_1 + \frac{1}{2}\cdot 1 .$$

Систему из этих двух уравнений с двумя неизвестными (p_1 и p_2) легко решить алгебраически, но мы сделаем это по-другому (этот другой способ пригодится нам позже при решении более сложной задачи).

Первое уравнение говорит нам, что p_1 равно среднему арифметическому 0 и p_2; второе уравнение говорит нам, что p_2 равно среднему арифметическому p_1 и 1. Значит, в последовательности из четырех чисел

$$0,\ p_1,\ p_2,\ 1$$

каждое из чисел, кроме 0 и 1 на краях, является средним арифметическим своих соседей, и, следовательно, эта последовательность является арифметической прогрессией. Интервал от 0 до 1 разбит на три равных промежутка между членами последовательности; значит,

$$p_1 = \frac{1}{3} \text{ и } p_2 = \frac{2}{3} .$$

Заметим, что если q_1 и q_2 – вероятности чебураханья налево (при первом и втором начальных положениях), то, проведя аналогичные вычисления, мы получим $q_1 = \frac{2}{3}$

и $q_2 = \frac{1}{3}$. Этот же результат можно получить, посмотрев на задачу в зеркало, меняющее местами право и лево.

Таким образом, из первой (левой) позиции робот чебурахается направо и налево с вероятностями $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$. Задача решена.

Заметим, что

$$p_1 + q_1 = p_2 + q_2 = 1,$$

а значит, вероятность того, что робот никогда не чебурахнется (строго чередуя шаги направо и налево), равна нулю. К этому же выводу мы бы пришли, вычислив вероятность того, что Чебуратор останется на столе после шага номер n, напрямую: эта вероятность равна $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ и приближается сколь угодно близко к нулю с возрастанием n – т.е. равна нулю в пределе при неограниченном росте n.

Аналогично решается и вторая задача.

Решение второй задачи. Обозначим через s_1 и s_2 средние количества шагов, которые сделает робот, чебурахнувшись на последнем шаге, начиная с первой или второй позиции соответственно. Взглянув на робота через зеркало, меняющее местами право и лево, мы убеждаемся, что $s_1 = s_2$ – но мы и так это скоро увидим из вычислений.

Заметим, что

$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (1 + s_2).$$

Действительно, на первом шаге с первой позиции с вероятностью $\frac{1}{2}$ робот чебурахнется налево, т.е. он сделает всего один шаг; отсюда слагаемое $\frac{1}{2} \cdot 1$. С той же вероятностью он шагнет вправо на вторую позицию, откуда в среднем он пройдет еще s_2 шагов. Учтя начальный шаг, получаем второе слагаемое $\frac{1}{2} \cdot (1 + s_2)$.

Аналогично получаем равенство

$$s_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 + s_1) + \frac{1}{2} \cdot 1.$$

Мы опять получили систему из двух уравнений с двумя неизвестными s_1 и s_2. Решив эту систему, находим $s_1 = s_2 = 2$.

Попробуйте решить тем же способом следующую задачу.

Упражнение 1. На рисунке 2 вы видите кусок, вырезанный из плана города, с отмеченными на нем собакой, ее забывчивым хозяином и их домом. Хозяин ищет свой дом, выбирая с равной вероятностью одну из сходящихся на перекрестке дорог, и идет до следующего перекрестка ровно одну минуту. Дойдя до следующего перекрестка, он опять выбирает с равной вероятностью одну из дорог (возможно, ту же, по которой только что шел) и идет по ней – и так далее, пока не попадет на тот перекресток, на котором стоит его дом. Собака двигается по тому же принципу, но бегает в полтора раза быстрее хозяина. Докажите, что из данного начального положения собака в среднем прибежит домой на 20 секунд раньше хозяина, независимо от устройства остальной части города.

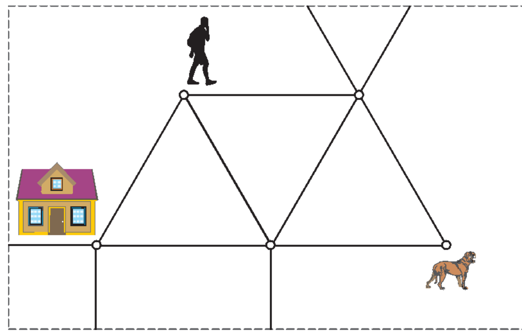


Рис. 2

Решения прямым подсчетом

Две задачи про Чебуратора, рассмотренные выше, допускают решения прямым подсчетом вероятностей. Мы опишем их, используя те же обозначения, что и раньше.

Решая вторую задачу, заметим, что робот чебурахается на n-м шаге либо влево, либо вправо с вероятностью $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Значит, среднее значение числа шагов можно найти, просуммировав ряд

$$s_1 = s_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 3 + \ldots$$

Для суммирования такого ряда требуется некоторое умение; однако ряд действительно сходится к сумме, равной 2. И неудивительно, ведь это же значение было получено выше.

Далее заметим, что если робот начинает движение с левой позиции, то он может чебурахнуться направо только на четных шагах, а если он начинает с правой позиции, то только на нечетных. Таким образом,

$$p_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \ldots$$

и

$$p_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \ldots$$

Применив формулу для суммы геометрической прогрессии, получаем те же результаты: $p_1 = \frac{1}{3}$ и $p_2 = \frac{2}{3}$.

Как видите, этот способ оказался сложней. Кроме того, он не допускает легкого обобщения на случай длинного стола (на котором Чебуратор может сделать более одного шага). Как мы увидим ниже, в этом случае наше первое решение остается практически без изменений.

То, что среднее значение числа шагов с чебураханьем на последнем шаге равно двум, можно также увидеть, поставив следующий мысленный эксперимент. Представьте себе, что при каждом чебураханьи мы ставим робота обратно на стол. Тогда вероятность того, что робот чебурахнется на шаге n, равна $\frac{1}{2}$, т.е. робот будет чебурахаться в среднем на каждом втором шаге. Значит, среднее количество шагов между чебураханьями равно 2.

Робот Чебуратор на длинном столе

Представим теперь, что Чебуратор стоит на длинном столе (рис.3). Предположим, что робот чебурахнется с левого края стола, сделав i шагов налево, и с правого края стола, сделав j шагов направо. Нас интересуют те же задачи.

Задача 1′. *Какова вероятность того, что робот чебурахнется с левого края стола, и какова – что с правого?*

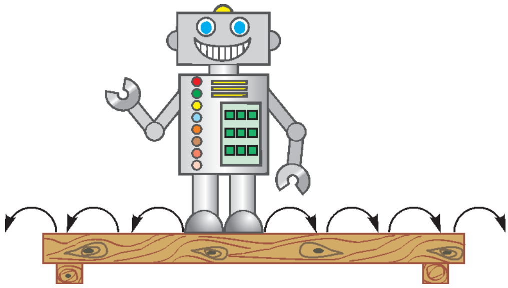


Рис. 3

Задача 2′. *Сколько шагов в среднем сделает робот, чебурахнувшись на последнем шаге?*

Решение задачи 1′. Заметим, что сумма $m = i + j$ – одна и та же для всех позиций и число позиций равно $m - 1$. Пронумеруем возможные положения Чебуратора числами от 1 до $m - 1$, по числу шагов налево, которые Чебуратору нужно сделать, чтобы чебурахнуться.

Нам будет удобно добавить еще два положения под номерами 0 и m: первое соответствует тому, что робот чебурахнулся налево, а второе соответствует тому, что робот чебурахнулся направо (из этих позиций выхода нет).

Пусть p_i – вероятность того, что Чебуратор чебурахнется направо, если начинает с позиции под номером i. Естественно, мы имеем

$$p_0 = 0 \text{ и } p_m = 1.$$

Применим тот же метод, что и раньше. Стоя на позиции номер i, с вероятностью $\frac{1}{2}$ Чебуратор перейдет на позицию номер $i + 1$. В этом случае вероятность того, что он чебурахнется вправо, будет p_{i+1}. С той же вероятностью $\frac{1}{2}$ он перейдет на позицию номер $i - 1$. В последнем случае вероятность того, что он чебурахнется вправо, будет p_{i-1}. Итак,

$$p_i = \frac{1}{2} \cdot p_{i-1} + \frac{1}{2} \cdot p_{i+1}.$$

Иначе говоря, в последовательности из $m + 1$ числа

$$0 = p_0, p_1, p_2, \ldots, p_m = 1$$

каждое число, кроме двух крайних, является средним арифметическим соседей; мы получили арифметическую прогрессию, делящую интервал от 0 до 1 на m промежутков. Отсюда получаем

$$p_i = \frac{i}{i+j}.$$

Решение задачи 2′. Давайте использовать ту же нумерацию позиций, как и в решении первой задачи.

Пусть s_i – среднее количество шагов робота с чебураханьем на последнем шаге, если он начинает с позиции под номером i. Естественно предположить, что $s_0 = s_m = 0$ – ведь попадание на позиции 0 и m означает, что робот уже чебурахнулся.

Попробуем, как и раньше, посчитать значение s_i новым способом. После одного шага с i-й позиции Чебуратор окажется на позиции $i-1$ или $i+1$ с равными вероятностями $\frac{1}{2}$. После этого ему останется в среднем пройти s_{i-1} и s_{i+1} шагов соответственно. Не забыв учесть уже пройденный шаг, получаем

$$s_i = \frac{1}{2}\cdot(s_{i-1}+1) + \frac{1}{2}\cdot(s_{i+1}+1),$$

или

$$s_{i+1} = 2\cdot s_i - s_{i-1} - 2.$$

Применяя эти равенства, последовательно двигаясь по позициям слева направо, получаем $s_i = i\cdot(s_1 - i + 1)$ для любого i. Поскольку $s_m = 0$, то $s_1 = m - 1$ и, значит, $s_i = i\cdot j$.

Заметим, что если Чебуратор начинает на середине стола, т.е. $i = j$, то он чебурахнется в среднем за i^2 шагов.

Для закрепления материала советуем решить следующую задачу.

Упражнение 2. Пьяница вышел из бара, расположенного в 10 кварталах от своего дома на той же улице, и идет домой (рис.4). Чтобы сделать дорогу веселее, он разнообразит ее следующим образом. Дойдя до перекрестка, он подкидывает монетку. Если она выпадает орлом, он продолжает путь в том же направлении; если же она выпадает решкой, он разворачивается и идет в противоположном направлении. Если ему случается вернуться к бару, он всегда разворачивается в сторону дома; если же он дошел до своего дома, то завершает свой путь. Докажите, что в среднем за такую прогулку пьяница проходит 100 кварталов, а среднее число его возвращений к бару равно 9.

Рис. 4

Бактерии в пробирке

Задача 3. *В пробирке живут 10 бактерий: 3 зеленых и 7 желтых. Каждую минуту происходит следующее: равновероятно выбирается пара из 10 бактерий, после чего первая бактерия пары погибает, а вторая делится на две свои точные копии. Таким образом, в конце минуты в пробирке снова остается ровно 10 бактерий. Какова вероятность того, что через некоторое время все 10 бактерий будут зелеными?*

Решение. Мы сведем задачу к уже решенной.

Предположим, что через несколько минут число зеленых бактерий стало i (где $0 < i < 10$). Тогда спустя минуту их число может стать $i-1$, i или $i+1$. При этом вероятности первого и последнего исходов равны. Действительно, исход с $i-1$ зеленой бактерией происходит, когда первая бактерия случайно выбранной пары оказалась зеленой, а вторая – желтой. Исход с $i+1$ зеленой бактерией происходит, наоборот, когда первая бактерия случайно выбранной пары желтая, а вторая зеленая. Эти две ситуации симметричны и случаются с одинаковыми вероятностями. Исход i, когда выбраны бактерии одного цвета, можно считать «пропусканием хода».

Таким образом, наша задача становится похожей на задачу про робота Чебуратора – только теперь Чебуратор ходит направо и налево с равными положительными вероятностями, меньшими $\frac{1}{2}$, и с оставшейся вероятностью пропускает ход. Однако заметим, что пропуск хода можно вовсе не учитывать. Так что ответ в задаче можно получить, подставив $i = 3$ и $j = 7$ в задаче про Чебуратора на длинном столе. (Точнее, состояние, когда в пробирке ровно i зеленых бактерий, соответствует i-й позиции Чебуратора на длинном столе; пометим это состояние номером i. Два состояния одноцветности бактерий – состояния под номером 0 и под номером 10 – соответствуют состояниям робота, чебурахнувшегося с левого и правого края стола; состояния под номерами от 1 до 9 будут соответствовать всем 9 позициям робота на столе.)

Таким образом, с вероятностью $\frac{3}{10}$ все бактерии станут зелеными и с вероятностью $\frac{7}{10}$ все станут желтыми.

Еще одно решение. Эту же задачу (а значит, и первую задачу про Чебуратора) можно решить без вычислений.

Сначала докажем, что с вероятностью 1 через некоторое время все бактерии в пробирке будут потомками одной. Для начала заметим, что с положительной вероятностью это может случиться за первые 10 минут. Вероятность этого события – обозначим это число p – мала, но вероятность того, что за достаточно длинный промежуток времени найдутся такие 10 минут, в пределе равна 1.

Действительно, вероятность противоположного исхода (того, что после 10 минут в пробирке будут потомки более чем одной из первоначально находившихся там бактерий) равна $1 - p$, и это число меньше 1. Значит, вероятность того, что никакой из n последовательных 10-минутных интервалов не завершился тем, что в пробирке остались только потомки одной из бактерий, бывших в пробирке в начале этого интервала, равна $(1-p)^n$. При увеличивающемся n это число приближается сколь угодно близко к нулю, значит, предельная вероятность того, что рано или поздно такой 10-минутный интервал случится – при неограниченном увеличении времени ожидания такого интервала, – равна 1.

При этом в самом начале каждая из десяти бактерий имеет равные шансы на то, чтобы стать прародителем всех выживших. Поэтому в трех из десяти случаев все станут зелеными, и в семи из десяти случаев все станут желтыми.

Броуновское движение

Рассмотрим случай, когда Чебуратор стоит на середине длинного стола с четным $m = 2n$ – чтобы чебурахнуться, ему необходимо сделать или n шагов вправо, или столько же влево. Как мы выяснили, среднее количество шагов, которое он делает, чебурахаясь на последнем из них, равно n^2. Это наблюдение можно использовать в обратном направлении: повторив это испытание много раз и оценив среднее значение числа шагов до чебураханья, мы, зная размер стола, сможем оценить длину шага Чебуратора. Последнее может оказаться полезным, если шаги Чебуратора настолько мелки, что не поддаются прямому измерению.

Поведение Чебуратора на столе мало чем отличается от хаотического движения малых твердых частиц, плавающих в жидкости, под действием ударов молекул этой жидкости. Это хаотическое движение открыл и исследовал Р.Броун в начале XIX века, а в начале XX века А.Эйнштейн и М.Смолуховский объяснили его теоретически. В частности, по параметрам броуновского движения удалось оценить среднее значение числа молекул в единице количества вещества. Броуновское движение послужило убедительным аргументом в утверждении атомной теории строения вещества; при этом для его наблюдения оказалось достаточно обычного микроскопа.

Конечно, эта физическая задача сложнее наших задач о Чебураторе. Тем не менее, идея решения этих задач одна и та же.

Да, а о чем мы говорили?

Мы рассмотрели частный случай *цепей Маркова*, названных так в честь Андрея Андреевича Маркова-старшего (его сына тоже звали Андреем Андреевичем, и он тоже занимался математикой). А именно, мы рассматривали *конечные цепи Маркова с поглощающими состояниями*. Каждое *поглощающее состояние* соответствует чебураханью нашего Чебуратора – с левого или с правого края стола.

Цепь Маркова задается ориентирован-

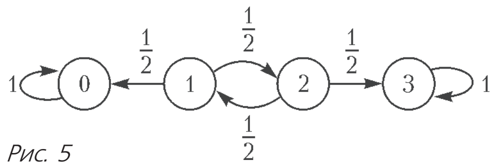


Рис. 5

ным графом, на каждом ребре которого написана вероятность перехода из одного состояния в другое. Например, задача о Чебураторе на коротком столе может быть описана таким графом (рис.5). Состояниям 0, 1, 2 и 3 соответствуют состояния Чебуратора «чебурахнулся налево», «стоит на левом краю стола», «стоит на правом краю стола» и «чебурахнулся направо». Заметим, что сумма вероятностей на стрелках, исходящих из какого-то состояния, всегда равна единице.

Ключевым свойством цепи Маркова является то, что на каждом шаге мы полностью забываем «прошлое». Иначе говоря, «будущее» не зависит от «прошлого» при известном «настоящем».

Цепи Маркова оказались удобной и очень востребованной моделью. Например, ранжирование веб-страниц, используемое поисковыми системами, основано на цепях Маркова. С помощью цепей Маркова создаются алгоритмы для автоматического написания музыки. Есть важные приложения в физике, химии, биологии, лингвистике, экономике.

Про цепи Маркова можно почитать в популярной книжке [2]. Затронутая нами тема случайных блужданий рассматривается более подробно в популярных книгах и статьях [3], [4], [5], [6]; последняя статья основана на интересной физической интерпретации случайных блужданий.

Список литературы

1. *А.Кудрявцев*. Санкт-Петербургский парадокс и его значение для экономической теории. – «Вестник Санкт-Петербургского университета», 3 (2013).

2. *Е.Дынкин*, *В.Успенский*. Математические беседы. – М.: Физматлит, 2004.

3. *А.Колмогоров*, *И.Журбенко*, А.*Прохоров*. Введение в теорию вероятностей. – Библиотечка «Квант», вып. 23 и 135.

4. *Ф.Мостеллер*. 50 занимательных вероятностных задач с решениями. – М.: Наука, 1975.

5. *С.Соболев*. О случайных блужданиях. – «Квант», №5, 1987.

6. *М.Скопенков*, *В.Смыкалов*, *А.Устинов*. Случайные блуждания и электрические цепи. – «Математическое просвещение», сер. 3, 16 (2012).

Место встречи изменить нельзя

(Начало см. на 2-й странице обложки)

Предлагаем вам четыре новых варианта исходной задачи (рис. 3). В них осталось неизменным начальное положение черных брусочков, положение зафиксированных брусочков, а также квадратная форма пустого пространства. Цель в каждой новой головоломке та же: собрать черные брусочки в левом нижнем углу (см. рис.2). Интересно, что новые задачи довольно сильно отличаются по сложности: минимальное число ходов в них составляет 40, 51, 60 и 70 (в порядке слева направо на рисунке 3). В исходной головоломке Михаила Тулузаса минимальное решение требовало 67 ходов.

На рисунке 4 предложен еще один вариант, в котором пустое место разбито на две части. В этом случае в минимальном решении уже 102 хода.

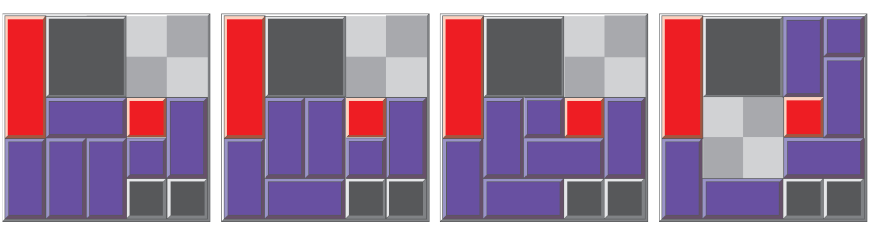


Рис. 3

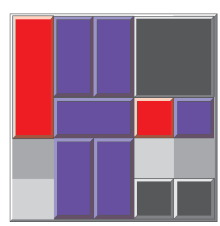


Рис. 4

Попробуйте поэкспериментировать – вдруг у вас получится найти еще более трудоемкий вариант?

Желаем успеха в решении и составлении новых головоломок!

В.Журавлев

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи М2454–М2457 предлагались на региональном этапе XLIII Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Задачи Ф2461–Ф2464 предлагались на Олимпиаде имени Я.Б.Зельдовича в городе Сарове.

Задачи М2454–М2457, Ф2461–Ф2464

М2454. Изначально на доске записаны несколько (больше одного) натуральных чисел. Затем каждую минуту на доску дописывается число, равное сумме квадратов всех уже записанных на ней чисел (так, если бы на доске изначально были записаны числа 1, 2, 2, то на первой минуте было бы дописано число $1^2+2^2+2^2$). Докажите, что сотое дописанное число имеет хотя бы 100 различных простых делителей.

И.Богданов, П.Кожевников

М2455. Равносторонний треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан вокруг окружности ω. На сторонах AC и AB выбраны точки P и Q соответственно так, что отрезок PQ касается ω (рис.1). Окружность Ω_b с центром P проходит через B, а окружность Ω_c с центром Q проходит через C. Докажите, что окружности Ω, Ω_b и Ω_c имеют общую точку.

А.Акопян, П.Кожевников

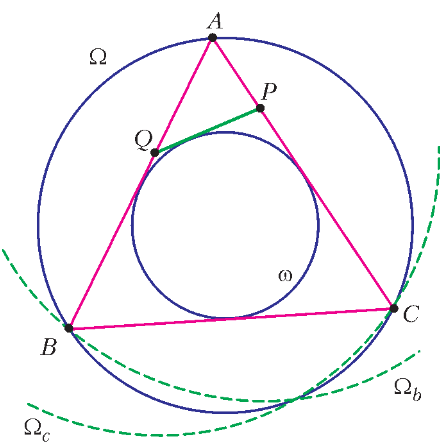


Рис. 1

М2456. Выпуклый многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в этом многоугольнике найдутся две равные стороны.

А.Грибалко

М2457. Существует ли треугольник со сторонами x, y и z такой, что $x^3+y^3+z^3=(x+y)(y+z)(z+x)$?

В.Сендеров

Ф2461. В цилиндрический стакан с площадью основания $S = 400$ см^2 налита вода, в которую погружен кубик льда со стороной $a = 2$ см (рис.2). В стакан наливают такое количество керосина, что верхняя грань кубика совпадает с поверхностью керосина. Кубик вынимают из стака-

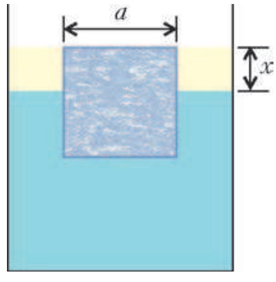


Рис. 2

на, а вместо него помещают другой ледяной кубик со стороной $b = 6$ см. Какой объем керосина необходимо долить в стакан, чтобы кубик вновь был доверху покрыт керосином? Считайте, что оба кубика не касаются дна, а жидкость из стакана не выливается. Плотности льда, воды и керосина равны $\rho = 0{,}9\ \text{г/см}^3$, $\rho_0 = 1{,}0\ \text{г/см}^3$ и $\rho_1 = 0{,}8\ \text{г/см}^3$ соответственно.

А.Мусин

Ф2462. На рисунке 3 изображен график зависимости пройденного муравьем пути

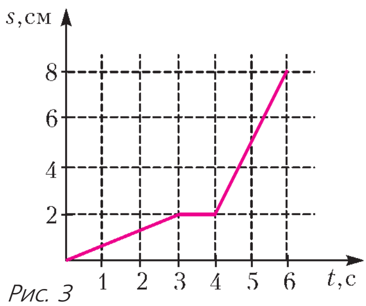


Рис. 3

от времени за первые 6 с его движения по прямой в одном направлении. Известно, что на последнем участке пути, не показанном на графике, т.е. в промежутке между шестой и восьмой секундами, муравей двигался равномерно, а его средняя скорость за все 8 с движения составила 1,5 см/с. Найдите скорости муравья в промежутках времени 0–3 с, 3–4 с, 5–6 с и 6–8 с.

А.Мусин

Ф2463. Металлический прут массой M согнули пополам так, что его части образуют прямой угол. Прут подвесили за середину одной из сторон угла на длинной нити, закрепленной на потолке. На другом конце этой стороны угла дизайнер закрепил маленький шарик, подобрав массу шарика таким образом, что верхняя сторона угла стала занимать горизонтальное положение.

1) Чему равна масса m этого шарика?

2) Через некоторое время злоумышленники украли шарик. Из-за этого оставшаяся конструкция перешла в новое положение равновесия. Найдите угол α, который стал образовывать верхний стержень с горизонтом (концы стержня до пола или потолка не достают).

И.Шморин

Ф2464. На плоский лист парафиновой бумаги (бумаги, пропитанной парафином), лежащий на горизонтальном столе, капнули воду, которая парафин не смачивает и поэтому собирается в каплю. Высота этой капли h, коэффициент поверхностного натяжения воды σ, радиус кривизны капли вблизи ее верхней точки R. Найдите площадь S_0 горизонтального участка поверхности капли, если масса капли m, плотность воды ρ, а ускорение свободного падения g.

Г.Насыров

Решения задач М2441–М2445, Ф2448–Ф2452

М2441. *Положительные числа x и y таковы, что $x + y^{2016} \ge 1$. Докажите, что $x^{2016} + y > 1 - 1/100$.*

В решении будем пользоваться известным *неравенством Бернулли*: $(1+a)^n > 1 + an$ для любого натурального $n \ge 2$ и действительного $a > -1$. Рассмотрим два случая.

Пусть $x \ge 1 - \dfrac{1}{100 \cdot 2016}$. Тогда

$$x^{2016} \ge \left(1 - \frac{1}{100\cdot 2016}\right)^{2016} >$$
$$> 1 - 2016 \cdot \frac{1}{100\cdot 2016} = 1 - \frac{1}{100}.$$

Пусть теперь $x < 1 - \dfrac{1}{100 \cdot 2016}$. Тогда

$$y \ge (1-x)^{\frac{1}{2016}} > (100\cdot 2016)^{-\frac{1}{2016}},$$

поэтому достаточно доказать, что

$$(100\cdot 2016)^{-\frac{1}{2016}} > 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100},$$

или, эквивалентно,

$$\left(\frac{100}{99}\right)^{2016} > 100\cdot 2016.$$

Снова применяя неравенство Бернулли,

имеем

$$\left(\frac{100}{99}\right)^{2016} = \left(1+\frac{1}{99}\right)^{2016} > \left(1+\frac{1}{99}\right)^{99\cdot 20} >$$

$$> \left(1+99\cdot\frac{1}{99}\right)^{20} = 2^{20} > 100\cdot 2016 .$$

Замечание. Хотя константа $1-1/100$ из условия задачи и не дает точной оценки, ее нельзя заменить на число, которое слишком близко к 1. Пример $x = 1-1/210$, $y = 1-1/380$ показывает, что константа $1-1/400$ в правой части уже не подходит.

И.Богданов

М2442*. *Выпуклый шестиугольник $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ вписан в окружность Ω радиуса R. Диагонали A_1B_2, A_2B_3 и A_3B_1 пересекаются в точке X. Для i = 1, 2, 3 обозначим через ω_i окружность, касающуюся отрезков XA_i и XB_i и дуги A_iB_i окружности Ω, не содержащей других вершин шестиугольника (рис.1).*

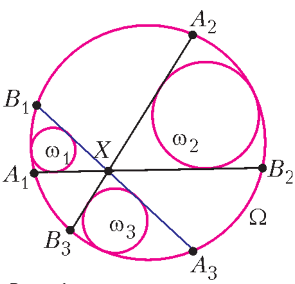


Рис. 1

Пусть радиус окружности ω_i равен r_i.

а) Докажите, что $R \ge r_1 + r_2 + r_3$.

б) Пусть $R = r_1 + r_2 + r_3$. Докажите, что шесть точек касания окружностей ω_i с диагоналями A_1B_2, A_2B_3, A_3B_1 лежат на одной окружности.

а) Пусть l_1 – касательная к Ω, параллельная прямой A_2B_3 и лежащая по одну сторону от этой прямой вместе с окружностью ω_1. Аналогично проведем касательные l_2 и l_3. Обозначим через C_1, C_2, C_3 точки попарного пересечения прямых l_1, l_2 и l_3 (рис.2). Пусть прямая C_2C_3 пересекает лучи XA_1 и XB_1 в точках S_1 и T_1 соответственно. Точки S_2 и T_2, S_3 и T_3 определяются аналогично.

Каждый из треугольников XS_1T_1, T_2XS_2, S_3T_3X подобен треугольнику $C_1C_2C_3$ (поскольку их соответствующие стороны параллельны), при этом коэффициенты подобия равны $k_1 = XS_1/C_1C_2 = C_2T_3/C_1C_2$,

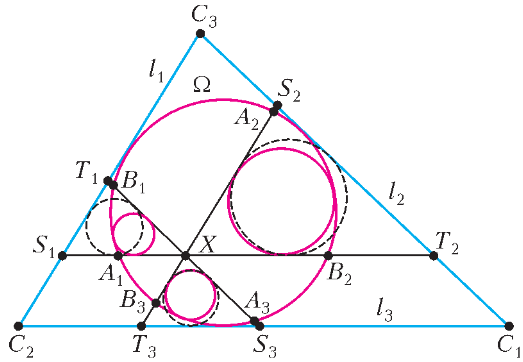


Рис. 2

$k_2 = T_2X/C_1C_2 = S_3C_1/C_1C_2$, $k_3 = S_3T_3/C_1C_2$ соответственно. Тем самым, сумма коэффициентов подобия равна $(C_2T_3 + S_3C_1 + S_3T_3)/C_1C_2 = 1$. С другой стороны, $k_1 = \rho_1/R$, $k_2 = \rho_2/R$, $k_3 = \rho_3/R$, где ρ_1, ρ_2, ρ_3 – радиусы окружностей, вписанных в треугольники XS_1T_1, T_2XS_2, S_3T_3X соответственно. Таким образом, $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = R$. Наконец заметим, что $r_1 \le \rho_1$, $r_2 \le \rho_2$, $r_3 \le \rho_3$, так как окружности ω_1, ω_2, ω_3 находятся внутри треугольников XS_1T_1, T_2XS_2, S_3T_3X соответственно. Отсюда следует решение пункта а).

б) Из доказанного мы видим, что равенство $r_1 + r_2 + r_3 = R$ выполнено тогда и только тогда, когда $r_1 = \rho_1$, $r_2 = \rho_2$, $r_3 = \rho_3$, иначе говоря, окружности ω_1, ω_2, ω_3 являются вписанными окружностями треугольников XS_1T_1, T_2XS_2, S_3T_3X. Пусть K_i, L_i, M_i – точки, в которых окружность ω_i касается отрезков XS_i, XT_i, S_iT_i соответственно (рис.3). Покажем, что все точки K_i и L_i равноудалены от X. Ясно, что $XK_1 = XL_1$, $XK_2 = XL_2$, $XK_3 = XL_3$, значит, нам достаточно доказать, что $XK_2 = XL_1$ и

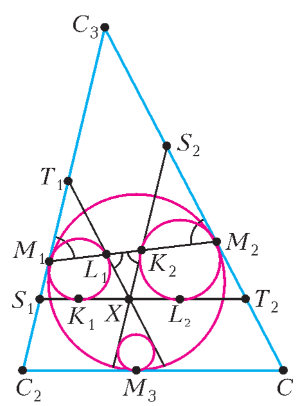


Рис. 3

$XK_3 = XL_2$. Из подобия вытекает, что $\angle T_1M_1L_1 = \angle C_3M_1M_2$ и $\angle S_2M_2K_2 =$

$= \angle C_3M_2M_1$, значит, точки M_1, M_2, L_1, K_2 лежат на одной прямой. Следовательно,

$$\angle XK_2L_1 = \angle C_3M_1M_2 = = \angle C_3M_2M_1 = \angle XL_1K_2,$$

значит, $XK_2 = XL_1$. Аналогично доказываем, что $XK_3 = XL_2$.

Замечание. В условиях пункта б) точка M_i является центром гомотетии, переводящей ω_i в Ω. Так как гомотетия переводит X в C_i, точки M_i, C_i, X лежат на одной прямой, таким образом, X является *точкой Жергонна* треугольника $C_1C_2C_3$. Это условие эквивалентно равенству $R = r_1 + r_2 + r_3$.

И.Митрофанов

M2443*. *В стране n городов и две авиакомпании A и B. Некоторые пары городов соединены односторонними беспосадочными авиалиниями (каждая авиалиния принадлежит либо A, либо B, между двумя городами может быть более одной авиалинии). Назовем слово w из букв A и B реализуемым, если найдется маршрут из последовательных авиаперелетов, названия авиакомпаний в котором идут в том же порядке, как и буквы в слове w. Известно, что все слова длины 2^n из букв A и B реализуемы. Докажите, что любое слово конечной длины из букв A и B реализуемо.*

Предположим противное: пусть нереализуемые слова существуют. Из множества всех нереализуемых слов выберем слово $w = a_1a_2\ldots a_N$ наименьшей длины. Из условия следует, что $N > 2^n$. Для каждого целого $i = 0, 1, 2, \ldots, N$ определим множество A_i концов всех возможных маршрутов, соответствующих слову $a_1a_2\ldots a_i$. В частности, A_0 – множество всех городов, A_N – пустое множество. Так как всего имеется 2^n подмножеств множества городов, какие-то два из множеств $A_0, A_1, \ldots, A_N$ совпадают. Пусть $A_i = A_j$, где $i < j$. Рассмотрим слово $w_0 = a_1a_2\ldots a_{i-1}a_ia_{j+1}a_{j+2}\ldots a_N$. Оно реализуемо, так как имеет длину меньше N. Этому слову соответствует какой-то маршрут S. Пусть первые i авиалиний этого маршрута образуют маршрут S_1, а последние $N - j$ авиалиний – маршрут S_2. Обозначим за T конец маршрута S_1. По определению наших множеств, $T \in A_i$. Так как $A_i = A_j$, то существует маршрут S_3, соответствующий слову $a_1a_2\ldots a_j$ и заканчивающийся в T. Но тогда маршрут S_3S_2 соответствует слову $a_1a_2\ldots a_N$. Противоречие.

И.Митрофанов

M2444. *На доске записано уравнение*

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-2016) = = (x-1)(x-2)\ldots(x-2016).$$

Таким образом, в каждой его части записано по 2016 линейных сомножителей. Найдите наименьшее возможное значение k, при котором можно стереть ровно k из этих 4032 линейных сомножителей так, чтобы в каждой части осталось хотя бы по одному из сомножителей и получившееся уравнение не имело вещественных корней.

Каждый множитель вида $x - i$ должен быть удален хотя бы из одной части равенства (если такой множитель присутствует в обеих частях равенства, то число i является корнем получившегося уравнения). Значит, нужно вычеркнуть не менее 2016 множителей. Приведем способ вычеркнуть ровно 2016 множителей так, чтобы полученное уравнение не имело вещественных корней.

Рассмотрим уравнение

$$(x-1)(x-4)(x-5)(x-8)\ldots \ldots(x-2013)(x-2016) = = (x-2)(x-3)(x-6)(x-7)\ldots \ldots(x-2014)(x-2015).$$

В его левой части оставлены множители, у которых вычитаемое число кратно 4 или дает при делении на 4 остаток 1, а в правой части вычитаемое число дает при делении на 4 остаток 2 или 3.

Докажем, что это уравнение не имеет вещественных корней. Для этого покажем, что

$$(x-2)(x-3)(x-6)(x-7)\ldots \ldots(x-2014)(x-2015) >$$

$$>(x-1)(x-4)(x-5)(x-8)\ldots$$

$$\ldots(x-2013)(x-2016) \quad (1)$$

при всех вещественных x.

Заметим, что при всех вещественных x выполнены неравенства вида

$$\big(x-(4k+2)\big)\big(x-(4k+3)\big)>$$

$$>\big(x-(4k+1)\big)\big(x-(4k+4)\big), \quad (2)$$

где $k=0, 1, \ldots, 503$ (эти неравенства легко проверить непосредственным раскрытием скобок).

При $x<1$ или $x>2016$ рассмотренные выше квадратичные выражения будут положительны, а значит, неравенство (1) получается умножением 503 доказанных неравенств (2) с положительными левыми и правыми частями.

Если x является корнем левой части неравенства (1), то в правой части будет нечетное число отрицательных множителей, значит, правая часть будет отрицательной, и неравенство (1) будет выполнено.

Если x – корень правой части неравенства (1), то в левой части будет четное число отрицательных множителей, значит, левая часть будет положительной, и неравенство (1) будет выполнено.

Если $4k<x<4k+1$, где $k=0, 1, \ldots, 503$, то обе части неравенств (2) при всех рассматриваемых k будут положительны, а значит, неравенство (1) получается умножением 503 доказанных неравенств (2) с положительными левыми и правыми частями.

Если $4k+1<x<4k+2$ или $4k+3<x<$ $<4k+4$, где $k=0, 1, \ldots, 503$, то все левые части неравенств (2) будут положительны и ровно одна из правых частей этих неравенств (для соответствующего k) будет отрицательна. Значит, при рассматриваемых x левая часть неравенства (1) положительна, а правая отрицательна, и это неравенство верно.

Если $4k+2<x<4k+3$, где $k=0, 1,\ldots$ $\ldots, 503$, то вместо неравенств (2) будем рассматривать аналогичные неравенства вида

$$\big(x-(4k+4)\big)\big(x-(4k+5)\big)>$$

$$>\big(x-(4k+3)\big)\big(x-(4k+6)\big)$$

для $k=0, 1, \ldots, 502$. У этих неравенств при рассматриваемых x левые и правые части будут положительными. Поэтому, перемножив такие неравенства, получаем верное неравенство

$$(x-4)(x-5)(x-8)(x-9)\ldots$$

$$\ldots(x-2012)(x-2013)>$$

$$>(x-3)(x-6)(x-7)(x-10)\ldots$$

$$\ldots(x-2011)(x-2014). \quad (3)$$

Заметим теперь, что

$$(x-1)(x-2016)<(x-2)(x-2015)$$

при всех вещественных x, а при рассматриваемых x обе части этого неравенства отрицательны. Умножив неравенство (3) на неравенство

$$-(x-1)(x-2016)>(x-2)(x-2015)$$

с положительными левой и правой частями, а затем умножив полученное неравенство на -1 со сменой знака неравенства, получим требуемое неравенство (1).

Итак, неравенство (1) доказано при всех вещественных значениях x, что и требовалось.

Н.Карагодин

M2445*. *Пусть $P=A_1A_2\ldots A_k$ – выпуклый многоугольник на плоскости. Вершины $A_1, A_2, \ldots, A_k$ имеют целые координаты и лежат на одной окружности. Обозначим через S площадь многоугольника P. Нечетное натуральное n таково, что квадраты длин всех сторон многоугольника P являются целыми числами, делящимися на n. Докажите, что $2S$ – целое число, делящееся на n.*

Предварительно заметим, что достаточно доказать утверждение задачи для чисел n вида $n=p^{\alpha}$, где p – простое число, большее 2. Докажем утверждение задачи индукцией по количеству вершин многоугольника.

База индукции для треугольника. Пусть все вершины треугольника $A_1A_2A_3$ имеют целочисленные координаты и квадрат каждой из его сторон делится на число n. Передвинем треугольник (или систему координат) так, чтобы вершина A_1 попала в начало координат. Обозначим координаты (очевидно, являющиеся целыми числами) оставшихся вершин $A_2(x_2;y_2)$, $A_3(x_3;y_3)$. Хорошо известно, что удвоенная площадь треугольника выражается формулой $2S=|x_2y_3-x_3y_2|$; таким образом, она является целым числом. Покажем, что это число кратно n.

Имеем $A_1A_2^2=x_2^2+y_2^2\,⋮\,n$, $A_1A_3^2=x_3^2+y_3^2\,⋮\,n$, $A_2A_3^2=(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2\,⋮\,n$, откуда $A_1A_2^2+A_1A_3^2-A_2A_3^2=2(x_2x_3+y_2y_3)\,⋮\,n$, а так как n нечетно, то и $x_2x_3+y_2y_3\,⋮\,n$.

Заметим теперь, что

$$A_1A_2^2\cdot A_1A_3^2=\left(x_2^2+y_2^2\right)\left(x_3^2+y_3^2\right)⋮\,n^2$$

и

$$(x_2x_3+y_2y_3)^2\,⋮\,n^2,$$

откуда их разность

$$x_2^2y_3^2+x_3^2y_2^2-2x_2x_3y_2y_3=(x_2y_3-x_3y_2)^2\,⋮\,n^2,$$

а тогда $|x_2y_3-x_3y_2|\,⋮\,n$, что и требовалось.

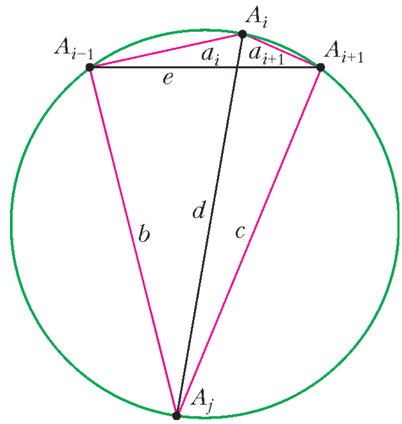
Переход. Докажем, что если утверждение задачи верно для многоугольников с числом вершин, меньшим m, то оно верно и для m-угольника.

Пусть квадраты длин всех сторон m-угольника, вершины которого лежат на одной окружности, кратны числу $n=p^\alpha$, где p – нечетное простое число.

Если найдется диагональ этого m-угольника, квадрат длины которой делится на p^α, то эта диагональ разбивает m-угольник на два многоугольника с меньшим m числом вершин, удовлетворяющих условию задачи (их вершины лежат на одной окружности и квадраты длин всех сторон делятся на n), поэтому, согласно индукционному предположению, удвоенная площадь каждого из них делится на n, а тогда и удвоенная площадь исходного многоугольника делится на n.

Таким образом, достаточно доказать, что квадрат длины какой-то диагонали m-угольника делится на $n=p^\alpha$.

Пусть это не так. Тогда квадраты длин всех диагоналей не делятся на p^α. Выберем диагональ A_iA_j, квадрат длины которой в разложении на простые множители содержит p в наименьшей степени. Ниже



степень, в которой простое число p входит в разложение на простые множители натурального числа a, обозначаем $\nu_p(a)$. Рассмотрим четырехугольник $A_{i-1}A_iA_{i+1}A_j$, обозначив длины его сторон и диагоналей так, как показано на рисунке. Так как этот четырехугольник вписанный, применим для него теорему Птолемея: $de=ca_i+ba_{i+1}$. Возведя обе части равенства в квадрат, получим

$$d^2e^2=c^2a_i^2+b^2a_{i+1}^2+2bca_ia_{i+1},$$

откуда

$$2bca_ia_{i+1}=d^2e^2-c^2a_i^2-b^2a_{i+1}^2.$$

Из этого равенства следует, что $2bca_ia_{i+1}$ – целое число.

Так как $\nu_p\left(d^2\right)\le\nu_p\left(c^2\right)$ и $\nu_p\left(d^2\right)\le\nu_p\left(b^2\right)$ по выбору диагонали d, а $\nu_p\left(e^2\right)<\nu_p\left(a_i^2\right)$ и $\nu_p\left(e^2\right)<\nu_p\left(a_{i+1}^2\right)$ (поскольку мы предположили, что никакой квадрат длины диагонали не делится на p^α, а квадраты длин сторон делятся на p^α), то $\nu_p(2bca_ia_{i+1})=\nu_p\left(d^2e^2\right)$, а тогда и $\nu_p(bca_ia_{i+1})=\nu_p\left(d^2e^2\right)$, откуда

$$\nu_p\left(b^2c^2a_i^2a_{i+1}^2\right)=\nu_p\left(d^4e^4\right).\qquad (*)$$

Но, с другой стороны, в силу написанных выше неравенств, $\nu_p\left(b^2c^2\right)\ge\nu_p\left(d^4\right)$, а $\nu_p\left(a_i^2a_{i+1}^2\right)\ge\nu_p\left(e^4\right)$, но тогда $\nu_p\left(b^2c^2a_i^2a_{i+1}^2\right)>\nu_p\left(d^4e^4\right)$, что противоречит равенству $(*)$.

Полученное противоречие доказывает, что

среди диагоналей m-угольника есть та, квадрат длины которой кратен p^{α}, значит, возможно осуществить индукционный переход.

Г.Юргин

Ф2448. *В летнем лагере в домике есть кран, к которому по трубам подают холодную и горячую воду. При нормальной работе холодная вода имеет температуру $T_х = +20$ °C, а горячая – $T_г = +70$ °C. За ночь из-за холодной погоды температура воды в обеих трубах опустилась до $T_0 = +10$ °C. Утром одновременно открывают вентили и холодной, и горячей воды. После этого температура воды в каждой из труб, подходящих к крану, начинает повышаться с постоянной скоростью (количество градусов в единицу времени), причем эта скорость для обеих труб одинакова. Через 1 минуту после открывания вентилей температура вытекающей из крана воды достигла $T_1 = 24$ °C, а еще через 1 минуту температура воды перестала изменяться. Какова установившаяся температура вытекающей воды? Расход воды считайте постоянным.*

Если температура воды, вытекающей из крана, перестает меняться, то это означает, что в обеих трубах значения температуры воды уже стали номинальными, т.е. $T_х = +20$ °C и $T_г = +70$ °C. Вода в горячей трубе дольше увеличивала свою температуру, и полное время изменения составило, согласно условию, 2 минуты. Следовательно, скорость нарастания температуры для обеих труб равна $(T_г - T_0)/120$ с $= 0{,}5$ °C/с. Значит, вода в холодной трубе стала иметь температуру 20 °C уже через 20 секунд после открытия кранов и затем уже не изменялась. В этот же момент вода в горячей трубе имела температуру $T_3 = 40$ °C.

Составим уравнение теплового баланса, в которое входят масса $M_х$ воды, притекающей *в единицу времени* по холодной трубе, масса $M_г$ воды, притекающей за тот же промежуток времени по горячей трубе, а также известная из условия промежуточная температура $T_1 = 24$ °C:

$$M_х(T_1 - T_х) = M_г(T_3 - T_1).$$

Отсюда находим соотношение между массами: $M_х/M_г = 4$, т.е. вентиль холодной воды открыт сильнее.

Теперь составим уравнение теплового баланса для момента, когда температура вытекающей, т.е. смешанной из разных труб, воды достигла установившегося значения T_4:

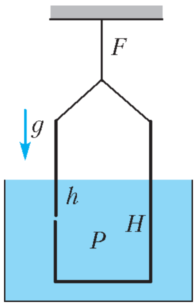
$$M_х(T_4 - T_х) = M_г(T_г - T_4),$$

откуда находим

$$T_4 = 30 \text{ °C}.$$

В.Боровков

Ф2449. *Стакан с малым отверстием сбоку погружен на глубину H в холодную воду (см. рисунок). Отверстие находится ниже уровня воды на $h = H/3$. Вес воды в стакане P, а сила натяжения нити, на которой подвешен стакан, равна $F = P/75$. Воду в стакане начинают нагревать. На какую долю уменьшилась плотность воды в нем в момент, когда стакан стал всплывать? Уровень и температура воды снаружи неизменны.*



Пусть ρ_0 и ρ – плотности холодной и горячей воды соответственно, а x – подъем уровня воды в стакане. Тогда из равенства давлений на уровне отверстия: $\rho_0 h = \rho(h + x)$ находим

$$x = \frac{(\rho_0 - \rho)h}{\rho}.$$

Начальная масса воды в стакане была $m_0 = \rho_0 SH$, конечная стала $m = \rho S(H + x)$, и из стакана вытекла масса

$$\Delta m = m_0 - m = m_0\left(\frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0}\right)\left(1 - \frac{h}{H}\right).$$

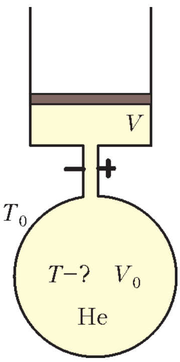
Выталкивающая сила не изменяется, вне стакана все остается по-прежнему. Натяжение же нити при начале всплытия обращается в ноль. Значит, уменьшение веса воды в стакане равно $\Delta P = F$. Но

$\Delta P/P = \Delta m/m_0$. Отсюда находим искомую долю уменьшения плотности воды:

$$\frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} = \frac{\Delta m}{m_0}\frac{1}{1-(h/H)} = \frac{FH}{P(H-h)} = 0,02 .$$

И.Воробьев

Ф2450. *Сосуд объемом V_0 заполнен гелием с температурой T_0. Он соединен трубкой с цилиндром, на дне которого лежит массивный поршень, а выше – вакуум. Кран в трубке открывают, и поршень начинает медленно подниматься. Когда в цилиндре оказался объем гелия V (см. рисунок), поршень остановился. Найдите конечную температуру гелия. Трения между поршнем и цилиндром нет. Теплообменом гелия с поршнем, цилиндром и сосудом пренебречь.*



Начальная внутренняя энергия гелия равна $U_0 = (3/2)\nu RT_0$, конечная равна $U = (3/2)\nu RT$, где ν – число молей, а T – конечная температура. За счет убыли внутренней энергии гелий совершает работу $A = mgH$ по подъему поршня, т.е.

$$U_0 - U = mgH$$

(или убыль внутренней энергии идет на увеличение потенциальной энергии поршня в поле тяжести). Из условия равновесия поршня,

$$pS = mg, \text{ или } pV = mgH,$$

где давление газа p находим из уравнения состояния идеального газа:

$$p = \frac{\nu RT}{V_0 + V}.$$

После подстановки имеем условие энергетического баланса:

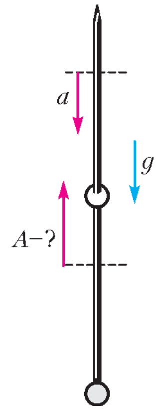
$$\frac{3}{2}\nu RT_0 - \frac{3}{2}\nu RT = \frac{\nu RTV}{V_0 + V},$$

откуда находим искомую температуру:

$$T = \frac{3T_0(V_0 + V)}{3V_0 + 5V}.$$

И.Воробьев

Ф2451. *На вертикальной спице снизу закреплен точечный заряд, а вдоль спицы колеблется маленькая заряженная бусинка (см. рисунок). Найдите ее ускорение A в нижней точке, если в верхней точке ускорение равно a. Трения нет, ускорение свободного падения равно g.*



Раз происходят колебания, то бусинка и закрепленный снизу заряд одноименны и имеет место их отталкивание (иначе движущаяся вниз бусинка не развернулась бы). Пусть R и r – расстояния от бусинки до закрепленного заряда в верхней и нижней точке соответственно. Из второго закона Ньютона и закона Кулона имеем следующие выражения для ускорений:

$$a = g - \frac{\alpha}{R^2}, \quad A = \frac{\alpha}{r^2} - g,$$

где α – положительный коэффициент.

В верхней и нижней точках скорость бусинки нулевая. Из закона сохранения энергии следует, что в этих точках совпадают суммы потенциальной энергии тяготения и потенциальной энергии кулоновского взаимодействия:

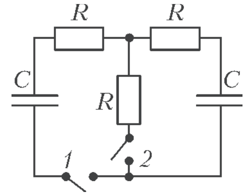
$$gR + \frac{\alpha}{R} = gr + \frac{\alpha}{r}, \text{ или } \frac{\alpha}{rR} = g.$$

Отсюда находим искомое ускорение:

$$A = \frac{ga}{g-a}.$$

И.Воробьев

Ф2452. *Исходно на левом конденсаторе напряжение равно U_0, правый конденсатор не заряжен и оба ключа разомкнуты (см. рисунок). Сначала замыкают ключ 1, затем, дождавшись установления равновесия, замыкают ключ 2. Найдите количество теплоты, выделившееся на каждом из сопротивлений.*



Когда замыкают ключ *1* (ключ *2* разомкнут), напряжения на конденсаторах становятся одинаковыми. Их можно найти из закона сохранения заряда:

$$CU_0 = 2CU \text{ , и } U = \frac{U_0}{2}.$$

Суммарное выделившееся количество теплоты равно разности начальной и конечной энергий конденсаторов:

$$Q = \frac{CU_0^2}{2} - 2\frac{CU^2}{2} = \frac{CU_0^2}{4}.$$

Через два верхних сопротивления течет один и тот же ток (а через третье сопротивление ток не течет), поэтому на них выделяются одинаковые количества теплоты:

$$Q_{11} = Q_{21} = \frac{CU_0^2}{8}.$$

Когда замыкают ключ *2* (при замкнутом ключе *1*), через верхние сопротивления текут равные токи $I_1 = I_2$, через нижнее сопротивление течет суммарный ток $I_3 = I_1 + I_2 = 2I_1$. В каждый момент времени выделяющиеся в сопротивлениях мощности равны $P_1 = I_1^2 R = P_2$, $P_3 = 4P_1$. Выделяющиеся количества теплоты, соответственно, равны $Q_{21} = Q_{22}$, $Q_{23} = 4Q_{21}$ и в сумме равны оставшейся после первого этапа энергии конденсаторов:

$$Q_{21} + Q_{22} + Q_{23} = 2\frac{CU^2}{2} = \frac{CU_0^2}{4},$$

откуда находим

$$Q_{21} = Q_{22} = \frac{CU_0^2}{24}, \quad Q_{23} = \frac{CU_0^2}{6}.$$

Окончательно, на каждом сопротивлении выделится такое количество теплоты:

$$Q_1 = Q_2 = Q_{21} + Q_{22} = \frac{CU_0^2}{6},$$

$$Q_3 = Q_{23} = \frac{CU_0^2}{6}.$$

Д.Медведев

НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

Июльский град

В один из июльских дней в Санкт-Петербурге была сильная гроза с ветром, дождем и градом. Градины падали и гремели прямо под окнами нашей лаборатории в Физико-техническом институте. За окном было $+21\,^\circ\mathrm{C}$.

Я вышел на улицу и, пряча фотоаппарат под зонтом, сделал несколько фотографий этого события. На одном из снимков виден двор и белые пятна выпавшего града на земле, на остальных (см. также 4-ю с. обл.) изображен собственно град. Снимки градин сделаны с большим увеличением, для масштаба на некоторых фотографиях присутствует рублевая монета. Иголки, видимые на фото, упали с растущих во дворе елей и пихт, по которым бил дождь с градом.

Что можно сказать о граде по этим снимкам? Можно оценить размеры градин и заметить, что они не всегда сферической формы. Но самое важное – что большинство градин имеют вид снежных комков, причем некоторые из них прозрачны.

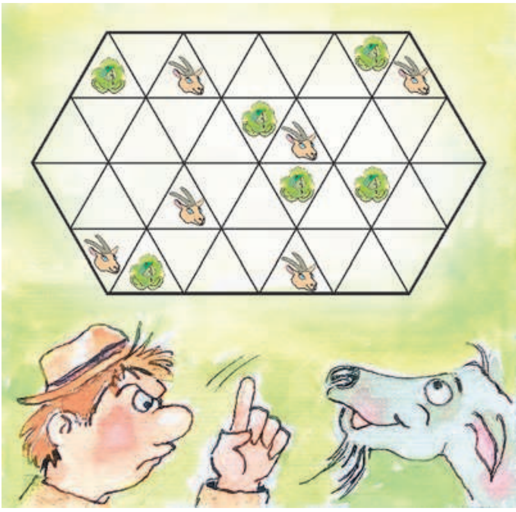
Могли ли эти льдинки образоваться при кристаллизации водяного пара высоко в атмосфере и в таком виде достичь поверхности земли? Или при движении в атмосфере эти ледяные ядра покрылись вторичными снежными кристаллами и только на земле, под действием капель дождя, обнажилась их ледяная сердцевина?

А какое объяснение могли бы предложить вы?

Ю.Носов

Задачи

1. Фермер огородил снаружи участок земли и разделил его на треугольники со стороной 50 м. В некоторых треугольниках он высадил капусту, а в некоторые пустил пастись коз. Помогите фермеру построить по линиям сетки дополнительные заборы как можно меньшей общей длины, чтобы защитить всю капусту от коз.



М.Хачатурян

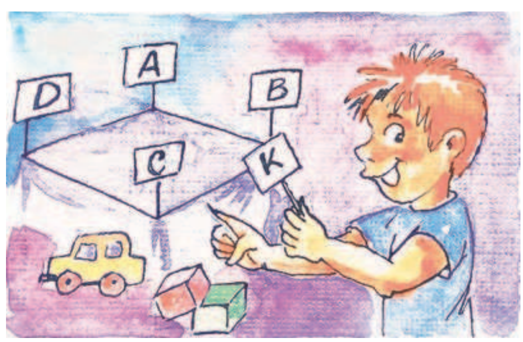
2. У аптекаря есть три гирьки, с помощью которых он одному покупателю отвесил 100 г йода, другому – 101 г меда, а третьему – 102 г перекиси водорода. Гирьки он ставил всегда на одну чашу весов, а товар – на другую. Могло ли быть так, что каждая гирька легче 90 г?

А.Шаповалов

3. Группа туристов делит печенье. Если туристы разделят поровну две одинаковые пачки, останется одно лишнее печенье. А если разделят поровну три такие же пачки, останется 13 лишних печений. Сколько туристов в группе?

И.Раскина

4. Дан квадрат *ABCD*. На продолжении диагонали *AC* за точку *C* отмечена такая точка *K*, что $BK = AC$. Найдите угол *BKC*.



Е.Бакаев

Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Эти задачи предлагались на XXVIII Математическом празднике.

Почему гравитационная энергия отрицательна

С.ДВОРЯНИНОВ

— Папа Карло, у тебя есть время обсудить один вопрос? — спросил Буратино, заметив, что старый Карло собирается сделать перерыв в своей привычной работе за верстаком.

— Да, конечно, — улыбнулся Папа Карло, стряхивая стружки с фартука и присаживаясь к столу. — Я вижу у тебя в руках учебник физики. Что же тебя заинтересовало на этот раз?

— Скажу сразу — формула потенциальной энергии. Раньше, в седьмом классе, была очень простая формула $\Pi = mgh$. А теперь появилась новая, более сложная: $\Pi(R) = -G\dfrac{mM}{R}$, — и Буратино открыл нужную страницу.

— Так, ясно, — промолвил Папа Карло, взглянув в книгу. — Это действительно предмет, достойный неспешного разговора. Давай-ка сначала вспомним, что такое потенциальная энергия.

— Она связана с взаимным положением каких-либо тел либо с взаимным положением частей одного тела, — бойко, словно отвечая хорошо выученный урок, начал Буратино. — Вот примеры. Тетива лука натянута, лук деформирован, он находится в напряжении. Когда лучник оттягивает тетиву, то лук сжимается еще сильнее. Он накапливает энергию, которая затем переходит в кинетическую энергию стрелы — стрела приобретает скорость. Когда я завожу свой будильник, то скручиваю одну пружину, за счет ее энергии часы идут. А другая пружина хранит энергию, и в нужный момент за счет ее энергии звенит звонок. Если я подниму шарик массой m на высоту h и брошу, например, на пружину, то этот шарик совершит работу — он сожмет пружину.

— Верно. Только в случае с шариком лучше говорить о гравитационной энергии как частном случае энергии потенциальной, — остановил Папа Карло усердного школяра.

Известно, что две точечные массы m и M притягиваются одна к другой с силой $F = G\dfrac{mM}{R^2}$, где G — так называемая гравитационная постоянная, а R — расстояние между точками. Их взаимное тяготение и порождает гравитационную энергию. Кстати сказать, если взаимодействуют два однородных материальных шара, то их можно заменить точечными массами, сосредоточенными в центрах этих шаров.

Пусть тело массой m перемещается, оставаясь вблизи поверхности Земли. В этом случае силу притяжения можно считать постоянной и равной $F = G\frac{mM}{R_З^2}$, где $R_З$ – радиус Земли. Величина $G\frac{M}{R_З^2}$ называется ускорением свободного падения, обозначается буквой g и равна примерно $9{,}8\ \text{м}/\text{с}^2$. Если тело находится на поверхности Земли, т.е. $R = R_З$, то его потенциальная энергия считается равной нулю. Если же тело под действием внешней силы переместилось на высоту h, то в новом положении его потенциальная энергия равна mgh.

– Эту простую формулу я хорошо знаю, – заметил Буратино. – Зачем же еще нужна сложная «двухэтажная» формула?

– Не спеши, сейчас будет ответ. Он требует внимания. Скажи-ка, можно ли с помощью обычной линейки измерить расстояние между двумя близкими точками на поверхности шара, например на поверхности глобуса?

– Конечно, можно! Но ясное дело, что результат будет не точный, а приближенный.

– Примечательно, что чем больше радиус шара, тем точнее будут измерения. Но в любом случае к диаметрально противоположным точкам линейку никак не приложить. Так и с формулой $П = mgh$. Она применима лишь для небольших значений h.

– Ограничения в применении этой формулы мне понятны. Но что еще мне не нравится, так это знак минус в новой формуле. Нельзя ли обойтись без него? Вот, к примеру, масса. Она всегда выражается положительным числом. Это, я бы сказал, приятно. С другой стороны, я понимаю и полезность отрицательных величин. Скажем, если точка может двигаться по прямой линии в двух противоположных направлениях, то скорость в одну сторону положительная, в другую – отрицательная. Но скорость – величина векторная, тут знак указывает направление. А вот энергия – величина сугубо скалярная. Нельзя ли сделать ее положительной? Вот ведь на температурной шкале Кельвина все значения температуры положительные!

– Это так, но есть еще и ноль градусов по Кельвину. Как ты думаешь, а в какой точке пространства гравитационная энергия равна нулю? – задал вопрос Папа Карло.

– Сейчас скажу. Мы должны в пространстве найти такую точку X, что тело, будучи помещенным в эту точку и находящимся под действием силы тяготения, никакой работы совершить не может. Например, не может, начав движение под действием силы притяжения, сжать пружину, которая находится между телом и центром Земли...– начал размышлять Буратино. – Но... такой точки нет! Ведь в любой точке пространства на тело действует сила тяготения.

– Ты не совсем прав. В физике принято считать, что гравитационная энергия равна нулю в бесконечности – там, где тела практически не взаимодействуют друг с другом. Эта означает, что если R стремится к бесконечности, то гравитационная энергия стремится к нулю. Именно так ведет себя функция $П(R) = -G\frac{mM}{R}$. График этой функции – ветвь гиперболы – тебе хорошо известен. Эта функция возрастает: если $R_2 > R_1$, то $П(R_2) > П(R_1)$. Это естественно: чем дальше от Земли находится тело, тем больше его гравитационная энергия.

– А как же все-таки из отрицательных значений этой функции получается положительная величина mgh? – повторил свой вопрос Буратино.

– Давай поднимем тело с поверхности Земли на высоту h. Ради краткости записи радиус Земли обозначим R. Тогда приращение гравитационной энергии этого тела будет равно

$$П(R+h) - П(R) = -G\frac{mM}{R+h} + G\frac{mM}{R} =$$

$$= G\frac{mMh}{R^2+Rh} = G\frac{mM}{R^2}h\cdot\frac{1}{1+\frac{h}{R}}.$$

Если величина h мала по сравнению с R, то отношение $\frac{h}{R}$ много меньше 1, и последняя дробь оказывается равной 1. Следовательно,

$$\Pi(R+h)-\Pi(R)\approx G\frac{mM}{R^2}h=mgh$$

Получается, что величина mgh – это приращение гравитационной энергии $\Pi(R)$ при перемещении тела с поверхности Земли на небольшую высоту h. Сама функция $\Pi(R)$ отрицательна, но ее приращение положительно, и никакого противоречия здесь нет.

– Теперь мне это понятно, – с удовлетворением произнес Буратино.

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Задачи

Мы продолжаем конкурс по решению математических задач. Они рассчитаны в первую очередь на учащихся 7–9 классов, но мы будем рады участию школьников всех возрастов.

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

Желаем успеха!

20. а) Заполните таблицу 3×3 девятью различными целыми числами так, чтобы произведения чисел в каждой строке, каждом столбце и на обеих диагоналях были одинаковы.

б) Можно ли это сделать так, чтобы среди чисел были 15 и 25?

М.Евдокимов

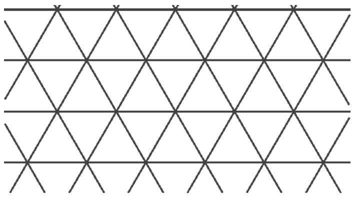
21. Есть 12 карточек, на каждой написана одна ненулевая цифра. Известно, что из этих карточек можно составить два шестизначных числа, сумма которых равна 1099999. Докажите, что из этих карточек можно составить два шестизначных числа, сумма которых равна 1000000.

Г.Гальперин

22. Продавцу нужен набор гирь, с помощью которого он мог бы набрать любой вес от 3 до 6 кг, кратный 100 г. Каким наименьшим количеством гирь можно обойтись?

П.Кожевников

23. На бесконечной сетке из равносторонних треугольников (ее фрагмент изображен на рисунке)



проведен отрезок с вершинами в узлах сетки, длина которого равна a. Докажите, что можно провести другой отрезок с вершинами в узлах, длина которого равна: а) $\sqrt{3}a$; б) $\sqrt{37}a$.

Е.Бакаев

Конкурс проводится совместно с журналом «Квантик».

Полет в кристаллическом облаке

А.КАШЕВАРОВ, А.СТАСЕНКО

У них средняя температура двадцать градусов, а у нас ноль: в двадцать раз меньше!

В.В.Жириновский

Давно известно, что встреча с переохлажденными капельными облаками приводит к обледенению самолета – по этому поводу написаны тысячи статей, монографий, инструкций. Но сравнительно недавно было обнаружено, что немалую опасность для авиации представляют и льдистые облака.

Оказывается, на высотах до 13 км встречаются протяженные области атмосферы, содержащие немалые (до 20 г в 1 $м^3$) количества кристаллов льда. Конечно, сталкиваясь с «холодным» самолетом, холодные кристаллы дробятся и отскакивают от его поверхности. Но, попадая в поток воздуха, захватываемый более «теплым» двигателем (хотя температура его поверхностей на входе остается ниже $0\ ^\circ C$), они могут примерзать к поверхности лопаток самолета, дробиться, образовывать жидкие пленки, что уже не раз приводило к нарушению нормальной работы моторов. А иногда после приземления в воздухозаборниках двигателей обнаруживались целые пригоршни кристаллов.

Кроме того, существуют «теплые» водно-кристаллические облака, содержащие, наряду с водяными каплями, нерастаявшие снежинки, которые образуют на поверхности обтекаемого тела клиновидные «бороды» влажных кристаллов. А еще... Впрочем, и сказанного довольно, чтобы осознать широкий диапазон условий полета (температур, скоростей, высот), в которых может возникнуть опасность взаимодействия летательного аппарата с частицами атмосферы.

Рассмотрим, прежде всего, столкновение отдельного кристалла с поверхностью твердого тела. Тут нам понадобятся понятия физико-механических свойств обоих участников взаимодействия. Среди этих свойств в нашем случае наиболее важным является так называемый предел текучести σ, который измеряется силой, приходящейся на единицу площади ($[\sigma] = Н/м^2 = Па$), и приводит к необратимому разрушению структуры твердого тела. Причем небезразлично, как направлена эта сила, – она может работать на сжатие, растяжение, сдвиг. Например, для льда характерным значением предела текучести в случае сжатия является $\sigma_n \approx 2{,}5$ МПа ,а для сдвига – $\sigma_\tau \approx 0{,}6$ МПа . Для алюминия или титана, из которых делают самолеты, эти значения гораздо больше, поэтому такие материалы можно считать абсолютно твердыми и недеформируемыми по сравнению со льдом.

Итак, пусть кристалл со скоростью v падает под углом α на поверхность твердого тела, например крыла летательного аппарата, имеющего полуцилиндрическую переднюю кромку (рис.1). Разложим эту скорость на две компоненты: нормальную $u_n = v\cos\alpha$ и тангенциальную (касательную) $u_\tau = v\sin\alpha$. Из соображений размерности можно предположить, что кинетическая энергия кристалла в результате неупругого взаимодействия с твердым телом пойдет на разрушение части объема $\Delta W/W$ кристалла как в результате нормальных, так и сдвиговых напряжений:

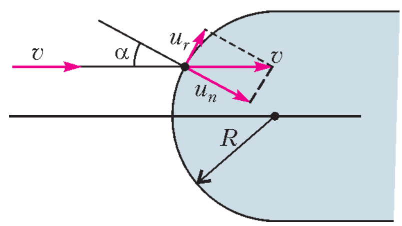


Рис. 1. Модель профиля крыла с полуцилиндрической передней кромкой

$$\frac{\Delta W}{W} = \rho\left(\frac{u_n^2}{2\sigma_n} + \frac{u_\tau^2}{2\sigma_\tau}\right),$$

где ρ – плотность льда. Здесь мы предположили, что оба напряжения – нормальное (индекс n) и касательное (индекс τ) – действуют независимо друг от друга. Конечно, этот процесс будет зависеть и от формы ледяного кристалла, и от ориентации его осей по отношению к нормали к поверхности твердого тела в точке соударения, так что выписанное выше соотношение – всего лишь оценка порядка величины.

А что происходит затем с этой разрушенной массой? Она, например, может превратиться в жидкость и в виде капельки продолжить путь по «теплой» поверхности. А может и примерзнуть тут же, если поверхность недостаточно «теплая», т.е. ее температура ниже $0\,°C$. Рассмотрим последний случай, который, как говорят математики, дает «оценку сверху» для возможного роста массы, намерзающей на твердое тело.

Разумеется, наш кристалл не один. Пусть концентрация кристаллов равна n ($[n] = 1/м^3$). Если самолет летит со скоростью v и кристаллы достаточно крупные, так что их траектории не искривляются при приближении к телу, то плотность потока их массы в точке соударения равна $mnv\cos\alpha = \rho_\infty v\cos\alpha$. Здесь m – масса одного кристалла; умноженная на концентрацию n, она дает плотность $\rho_\infty = mn$ массы всех кристаллов вдали от тела – «на бесконечности». Значит, умножив изменение объема кристалла на плотность потока массы, мы получим скорость прироста ледяной массы на поверхности твердого тела:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\rho_\infty v\cos\alpha}{\rho}\frac{\Delta W}{W} = \rho_\infty v^3\cos\alpha\left(\frac{\cos^2\alpha}{2\sigma_n} + \frac{\sin^2\alpha}{2\sigma_\tau}\right).$$

Но ведь о поверхность летательного аппарата, признанного абсолютно жестким, ударяются только первые порции примерзающего льда; в дальнейшем кристаллы будут сталкиваться со слоем наледи. Следовательно, их энергия может расходоваться и на эрозию части этого слоя, которая будет, по нашему предположению, тут же вновь отвердевать. Считая массы разрушающихся кристаллов и наледи при каждом соударении одинаковыми, можно правую часть уравнения для скорости прироста толщины слоя уменьшить вдвое. (А можно и так оставить – ведь речь идет об оценке порядков величин.)

Итак, принимая $\rho_\infty = 10$ г/м^3, $v = 50$ м/с, $\sigma_n = 2{,}5$ МПа, $\sigma_\tau = 0{,}5$ МПа, мы получим

$$\frac{dh}{dt} = 0{,}25\cos\alpha\left(\cos^2\alpha + 5\sin^2\alpha\right)\text{ мм/с} = 0{,}25\cos\alpha\left(1 + 4\sin^2\alpha\right)\text{ мм/с}.$$

Эта функция (она качественно изображена на рисунке 2) имеет максимум при $\sin^2\alpha = 7/12$.

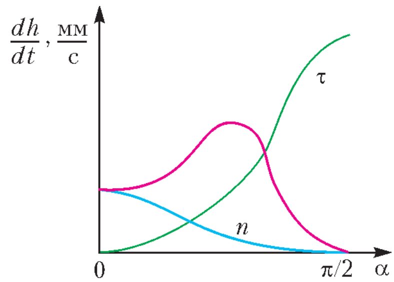


Рис. 2. Качественный вид зависимости от угла падения частиц скорости роста наледи за счет нормального (синяя кривая) и тангенциального (зеленая кривая) разрушающих напряжений, а также их суммы (красная кривая)

Кстати, а почему можно считать, что процесс произойдет вблизи точки соударения? Оценим расстояние, на которое кристалл проскользнет вдоль твердой поверхности. Из соображений размерности можно оценить скорость c распространения «волны разрушения» в теле кристалла:

$$c \sim \sqrt{\frac{\sigma_n}{\rho}}.$$

Если представить кристалл в виде стержня или кубика с характерным размером a, то длину Δa его разрушенного участка можно оценить из соотношения

$$\frac{\Delta a}{a} \sim \frac{\Delta W}{W}.$$

Тогда время столкновения Δt и длина проскальзывания s будут порядка

$$\Delta t \sim \frac{\Delta a}{c} \quad\text{и}\quad s \sim \Delta t u_\tau \sim \left(\frac{\rho}{\sigma_n}\right)^{3/2}\frac{u_n^2 u_\tau a}{2} \sim a,$$

значит, процесс столкновения закончится на расстоянии, сравнимом с размером самого кристалла. Здесь мы приняли $u_n \sim u_\tau \sim v$. Желающие могут уточнить оценку: например, взять $\alpha = 45°$, тогда $u_n = u_\tau = \frac{v}{\sqrt{2}}$; вместо σ_n взять среднее между σ_n и σ_τ ... Но это не изменит полученного порядка величины s.

Однако не забудем, что при росте наледи передняя кромка нашего твердого тела уже не будет цилиндрической. Ее форма непрерывно изменяется со временем – значит, изменяется в каждой точке растущего слоя льда нормальная компонента плотности потока массы (ее размерность $кг/\left(м^2 \cdot с\right)$). Да и сам поток воздуха вокруг непрерывно изменяющегося тела тоже будет непрерывно изменяться, так что могут изменяться и траектории подлетающих льдинок. Поэтому для расчета всего этого явления уже нужно знать и аэрогидродинамику, и методы численного исследования. Используя их, мы смогли построить эволюцию формы наледи со временем (рис.3). А как мы это сделали, можно будет узнать, поступив в Московский физико-технический институт на факультет аэрокосмических технологий.

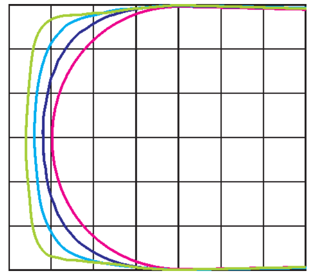


Рис. 3. Эволюция наросшего слоя льда на передней кромке тела со временем. Шаг по времени 5 с, радиус передней кромки 15 мм, радиус сферических кристаллов 0,55 мкм

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Молекулярно-кинетическая теория и характеристики вещества

С.ВАРЛАМОВ

Основы молекулярно-кинетической теории обычно формулируются в виде трех утверждений (положений).

- Все, что нас окружает (и мы сами в том числе), состоит их мельчайших частиц вещества – молекул, которые имеют ненулевые размеры D и массы m.
- Эти молекулы непрерывно хаотически движутся, такое движение называют тепловым и его характеризуют специальным параметром – температурой T.
- Эти молекулы (частицы вещества) взаимодействуют друг с другом.

Для описания взаимодействия молекул вводится представление о потенциальной энергии взаимодействия двух молекул, которая зависит от расстояния R между центрами этих молекул. В некотором диапазоне небольших расстояний эта энергия положительна и быстро растет с уменьшением R. При расстояниях, больших некоторой величины, потенциальная энергия становится отрицательной и остается таковой вплоть до очень больших расстояний. Но по мере удаления молекул на бесконечно большое расстояние эта энергия постепенно приближается к нулю. Таким образом, имеется некое расстояние между молекулами, которому соответствует минимальная отрицательная потенциальная энергия $-U_0$. Расстояние D, при котором достигается минимальная энергия, можно считать характерным размером молекул.

Одним из возможных способов задания зависимости потенциальной энергии U от расстояния R является функция (потенциал) Леннарда–Джонса:

$$U(R) = U_0\left(\left(\frac{D}{R}\right)^{12} - 2\left(\frac{D}{R}\right)^6\right).$$

Эта функция подходит к приведенному выше словесному описанию, причем лучше всего ею описываются «симметричные» молекулы – например, молекулы благородных газов, метана и им подобные. Поскольку потенциальная энергия молекул в этой модели зависит только от расстояния между их центрами, то понятно, что взаимодействие сложных молекул, например H_2O, NH_3, CH_3OH, она описывает только приближенно. Однако для целей качественного описания свойств веществ этого, как видно будет в дальнейшем, вполне достаточно.

Плотность конденсированного вещества

Масса молекулы m и ее характерный размер D определяют порядок величины плотности ρ вещества в конденсированном состоянии. Напомним, что конденсированное состояние вещества – это понятие, объединяющее твердые тела и жидкости в противопоставлении их газу. Для твердых тел при небольшом внешнем давлении и низкой температуре $\rho_т \sim j\frac{m}{D^3}$. Безразмерный множитель j введен для того, чтобы учесть, что молекулы заполняют не весь предоставленный им объем. Например, при самой плотной упаковке шариков коэффициент заполнения объема равен примерно 0,74. В этом случае плотность вещества $\rho_т \approx 1{,}41\frac{m}{D^3}$.

Понятно, что плотность зависит от того, какой порядок занимают молекулы в пространстве, т.е. от того, какой тип кристаллической решетки образуют молекулы при низкой температуре. При плавлении вещества в условиях постоянного внешнего давления в большинстве случаев плотность вещества уменьшается: $\rho_ж < \rho_т$. Это уменьшение плотности интерпретируют как появление в объеме вещества значительной доли вакансий, т.е. мест, где могли бы находиться молекулы, но не находятся. Если в твердом состоянии у каждой молекулы имеется Z_0 находящихся в непосредственном соприкосновении с ней соседок-молекул, а после плавления их в среднем только Z_1, то это означает, что плотности твердого и жидкого веществ относятся друг к другу примерно так:

$$\frac{\rho_ж}{\rho_т} = \frac{Z_1 + 1}{Z_0 + 1}.$$

Это соотношение получено в предположении, что в кристаллической решетке с прежними расположениями узлов в пространстве не все узлы заняты молекулами. На самом деле ситуация не такая простая, т.е. сделанное предположение только качественно объясняет изменение плотности вещества при плавлении. Кроме того, существуют вещества, для которых плавление при постоянном давлении сопровождается не ростом объема, а ростом плотности. Самый известный пример – плавление льда (плотность $900\ кг/м^3$) и превращение его в воду (плотность $1000\ кг/м^3$).

Внутренняя энергия

Тепловое движение характеризуется температурой T и внутренней энергией. В классической молекулярно-кинетической теории на каждую степень свободного движения молекул приходится в среднем тепловая энергия $kT/2$, где k – постоянная Больцмана. Одноатомные молекулы в составе газа имеют $i_1 = 3$ степени свободы, и молярная внутренняя энергия одноатомного газа равна $3RT/2$. Двухатомные газы имеют $i_2 = 5$ степеней свободы и молярную внутреннюю энергию $5RT/2$. А если в состав молекул вещества (которые считаются жесткими) входят три или более атомов, то такой газ имеет $i_3 = 6$ степеней свободы и молярную внутреннюю энергию $6RT/2$.

Если молекулы входят в состав конденсированного вещества, то они взаимодействуют со своими соседками, причем как с ближайшими, так и с удаленными. Каждая молекула, находящаяся в глубине объема, окружена наиболее близко расположенными к ней молекулами-соседками, каждая из которых обеспечивает ей пребывание в потенциальной яме глубиной U_0. В среднем одна молекула с числом соседок Z находится в потенциальной яме глубиной ZU_0. Если в составе конденсированного вещества большое количество N_0 молекул, то их суммарная стартовая, т.е. соответствующая нулевой температуре, потенциальная энергия равна $-\frac{NZ_0U_0}{2}$, где Z_0 – это максимально возможное число соседок. Деление на 2 соответствует тому, что мы учитываем «парное» взаимодействие – каждой паре соседок-молекул соответствует потенциальная энергия, равная $-U_0$. Будем считать, что N_0 – это число Авогадро, т.е. число частиц в одном моле вещества.

Тепловое движение молекул в составе конденсированного вещества – это колебания вблизи положения равновесия, соответствующего минимуму потенциальной энергии. Каждому независимому колебательному движению (одной колебательной степени свободы молекулы) соответствует средняя кинетическая энергия $kT/2$, и средняя добавочная к минимуму, т.е. к $-ZU_0$, потенциальная энергия тоже равна $kT/2$. Таким образом, на одну колебательную степень свободы приходится средняя тепловая энергия, равная $2kT/2 = kT$, а внутренняя энергия одного моля вещества, находящегося в конденсированном состоянии, равна

$$U = N_0kTi - \frac{N_0ZU_0}{2} = RTi - \frac{N_0ZU_0}{2},$$

где i – число степеней свободы одной молекулы.

Для одноатомных молекул $i_1 = 3$, для двухатомных молекул $i_2 = 5$, для трехатомных молекул $i_3 = 6$. Тогда молярная внутренняя энергия конденсированного вещества, состоящего из одноатомных молекул, равна

$$U = 3RT - \frac{N_0ZU_0}{2},$$

для вещества из двухатомных молекул –

$$U = 5RT - \frac{N_0ZU_0}{2},$$

для вещества из трехатомных молекул –

$$U = 6RT - \frac{N_0ZU_0}{2}.$$

Будем обозначать величину $\frac{N_0Z_0U_0}{2}$, т.е. взятую со знаком минус величину потенциальной энергии одного моля вещества при нулевой температуре, символом L.

Молярные теплоемкости при постоянном объеме

Выпишем, чему равны значения C_V – молярной теплоемкости при постоянном объеме – для газов и конденсированных веществ.

Для одноатомного газа $C_V = 3R/2$, для двухатомного газа $C_V = 5R/2$, для трехатомного газа $C_V = 6R/2$.

Для конденсированного вещества с одноатомными молекулами $C_V = 3R$ (закон Дюлонга и Пти), для конденсированного вещества с двухатомными молекулами $C_V = 5R$, для конденсированного вещества с трехатомными молекулами $C_V = 6R$.

Поскольку конденсированное вещество при фиксированном внешнем (атмосферном, например) давлении весьма слабо расширяется при повышении температуры, можно считать, что для него теплоемкости при постоянном давлении и при постоянном объеме близки друг другу: $C_V = C_p$. Чего нельзя сказать про газы. Например, для идеальных газов $C_p = C_V + R$.

Теплота плавления

Температуры твердой и жидкой фаз вещества при плавлении одинаковы, поэтому вклады во внутреннюю энергию их кинетической энергии и дополнительной потенциальной энергии (связанной с колебаниями молекул вблизи положений равновесия) при плавлении не изменяются. Плавление приводит к тому, что у каждой молекулы внутри объема вещества после перехода из твердого состояния в жидкое изменилось число ближайших соседок – вместо Z_0 стало Z_1.

Предположим сначала, что в жидкости места, на которых могут располагаться молекулы, остались прежними, т.е. такими же, как и до плавления, но не все эти места оказались занятыми. Для совершения такого преобразования требуется теплота. В расчете на один моль она равна

$$L_{N\to N_1} = \frac{N_0(Z_0 - Z_1)U_0}{2} = \frac{L(Z_0 - Z_1)}{Z_0}.$$

Суммарная теплота плавления равна сумме изменения внутренней энергии и работы против внешнего давления:

$$Q_{\text{пл}} = \frac{L(Z_0 - Z_1)}{Z_0} + p_{\text{вн}}(V_{\text{ж}} - V_{\text{т}}).$$

Конечно, сделанное предположение на самом деле не выполняется, так как при плавлении разрушается так называемый дальний порядок расположения частиц в пространстве. На разрушение этого порядка тоже требуется энергия.

Температура плавления

Известно, что для большинства простых веществ переход от твердого состояния к жидкому при небольшом внешнем давлении сопровождается уменьшением плотности, которое связано с появлением внутри объема вещества заметной доли вакансий (пустых мест), на которых могли бы находиться молекулы, но не находятся. При таком изменении пространственного расположения молекул внутреннее, или собственное, давление вещества становится в среднем меньше на соответствующую долю. Эта доля α имеет разные значения для разных веществ. Например, для благородных газов она составляет примерно $\alpha = 15\%$. Это означает, что вместо $Z_0 = 12$, как в твердом веществе, в жидкостях $Z_1 = 10$, т.е. у каждой молекулы благородных газов в жидком состоянии в среднем рядом находятся две вакансии. Если в окружении молекулы есть 2 или, что еще выгоднее, 3 вакансии и они располагаются рядом, то, для того чтобы перескочить со своего места на место этой вакансии, молекуле требуется преодолеть энергетический барьер, который по порядку величины равен $3U_0$. Если средняя энергия поступательного теплового движения, приходящаяся на одну молекулу, равна величине этого барьера, то он преодолевается достаточно часто. Можно сказать, что при такой тепловой энергии молекулы приобрели мобильность, или подвижность, т.е. они могут перескакивать со своих мест на места вакансий. Отсюда следует оценка для температуры плавления:

$$T_{\text{пл}} \approx \frac{U_0}{k} = \frac{2L}{Z_0 R}.$$

Теплота парообразования

Предположим, что плотность конденсированного вещества во много раз больше плотности его насыщенного пара, т.е. температура значительно меньше критической. Тогда при внешнем давлении, равном давлению насыщенного пара $p_{\text{нп}}$, переход одного моля вещества из конденсированного состояния в газообразное сопровождается работой газа

$$A = p_{\text{нп}}\Delta V = p_{\text{нп}}\left(V_{\text{г}} - V_{\text{к}}\right) \approx p_{\text{нп}}V_{\text{г}} = RT.$$

В соответствии с первым началом термодинамики $Q = \Delta U + A$, полученная веществом теплота испарения или парообразования Q пошла на изменение внутренней энергии ΔU вещества и на совершение паром работы A:

$$Q = \left(\frac{RTi}{2} - \left(RTi - \frac{N_0 Z U_0}{2}\right)\right) + RT =$$

$$= \frac{N_0 Z U_0}{2} - RT\left(\frac{i}{2} - 1\right) = \frac{LZ}{Z_0} - RT\left(\frac{i}{2} - 1\right).$$

Для твердого вещества $Z = Z_0$, а для жидкого $Z = Z_1$. В соответствии с полученной формулой, теплота испарения вещества зависит от температуры: она линейно уменьшается с ростом температуры. Понятно также, что теплота испарения зависит от среднего числа молекул-соседок Z. Например, теплота испарения твердого вещества при температуре плавления больше теплоты испарения этого же, но жидкого вещества при той же температуре плавления.

Критическая температура

Плотность вблизи критического состояния у всех веществ в несколько раз меньше плотности конденсированного вещества при низких температурах и небольших внешних давлениях. Например, для благородных газов это отношение равно примерно 3, а для щелочных металлов – 4,5. Поэтому среднее число молекул-соседок Z_2 у каждой молекулы гораздо меньше Z_0. При некоторой температуре теплота испарения вещества становится равной нулю. Эта температура (ее оценка) находится из предыдущей формулы при среднем числе ближайших соседок Z_2:

$$T_{\text{кр1}} \approx \frac{N_0 Z_2 U_0}{2R\left(i/2 - 1\right)} = \frac{Z_2 L}{Z_0 R\left(i/2 - 1\right)} = T_{\text{пл}}\frac{Z_2}{i - 2}.$$

Например, для веществ с одноатомными молекулами $T_{\text{кр1}} \approx Z_2 T_{\text{пл}}$.

Безразмерная величина $T_{\text{кр1}}/T_{\text{пл}}$ принимает разные значения для групп веществ, обладающих примерно одинаковыми химическими свойствами. Как видно из таблицы 1, для благородных газов (за исключением гелия) эта величина равна примерно 1,8; для многоатомных органических молекул эта величина принимает значения от 2 до 3; для щелочных металлов (за исключением лития) она находится в узком диапазоне 6,74–6,78. По этим данным можно судить о структуре вещества в критическом состоянии. Если для благородных газов в среднем у одной молекулы имеется всего две молекулы-соседки, то это означает, что большая часть вещества существует в виде фрагментов линейных

Таблица 1

Xe	Ar	Kr	Ne	Rn	CBr_4	C_6H_{12}	H_2S	N_2
1,80	1,80	1,80	1,82	1,87	1,95	1,98	1,99	2,00
C_6H_6	Br_2	CH_4	I_2	CCl_4	C_7H_{14}	H_2O	H_2	Cl_2
2,02	2,08	2,11	2,14	2,22	2,32	2,37	2,39	2,42
CF_4	C_8H_{18}	F_2	C_3H_6	O_2	C_5H_{10}	$O{=}C{=}Me_2$	P_2	Pt
2,55	2,63	2,70	2,73	2,86	2,86	2,86	3,05	3,15
He	W	S_2	C_2H_6	Ag	Au	Zn	Mo	Cu
3,25	3,25	3,35	3,41	3,49	3,61	3,74	3,85	3,97
Cd	Zr	Pb	Rb	Na	K	Cs	Hg	Li
4,18	4,21	6,61	6,74	6,75	6,78	6,78	7,53	8,43

цепочек атомов (молекул), которые могут изгибаться, и между цепочками имеются промежутки. Если для щелочных металлов $Z_2 \approx 7$, то это означает, что значительная часть вещества в среднем по времени пребывает в составе неких трубок-цилиндров-струй с заполнением. На каждую молекулу, находящуюся на поверхности такой трубки, приходится по шесть таких же соседок, живущих на поверхности, и одна – внутри трубки. А в промежутках между трубками – пустота. Это можно представить как структуру пены с тонкими стенками и толстыми участками, на которых стенки соединяются друг с другом под неким углом в пространстве, или как модель кристаллической решетки, у которой стерженьки, соединяющие узлы решетки, являются теми самыми цилиндрами-трубками-струями.

Каждая молекула, входящая в состав конденсированного вещества, при невысоких внешних давлениях и при температуре значительно меньше критической занимает объем, примерно равный D^3. А кинетическая энергия поступательного движения молекулы равна $E_{кин} = 3kT/2$. Таким образом, давление, связанное с тепловым движением, которое молекула оказывает на стенки своей «ячейки/клетки», равно $(2/3)E_{кин}/D^3 = kT/D^3 = RT\rho/\text{M}$. Когда эта величина сравняется с собственным давлением вещества при числе соседок Z_2, вещество не сможет находиться в конденсированном состоянии, т.е. это равенство дает еще один критерий нахождения критической температуры: $RT\rho/\text{M} = 2Z_2L\rho/(Z\text{M})$. Отсюда следует

$$T_{кр2} = \frac{2Z_2L}{Z_0R}.$$

Если разделить критическую температуру $T_{кр2}$ на критическую температуру $T_{кр1}$, то получится безразмерное число: $T_{кр2}/T_{кр1} \approx i-2$. Заметим, что при $i = 3$, т.е. для веществ с одноатомными молекулами, это отношение равно единице, значит, разные подходы дают один и тот же результат для критической температуры.

Поверхностная энергия и коэффициент поверхностного натяжения

Молекулы конденсированного вещества, которые живут на границе раздела с паром этого же вещества, имеют меньшее количество ближайших соседок Z_3, чем молекулы, живущие внутри объема и имеющие число соседок Z. Поэтому потенциальная яма, в которой находится каждая молекула на поверхности, имеет меньшую глубину.

При невысоких температурах, когда взаимодействием молекулы на поверхности с молекулами пара можно пренебречь, у каждой молекулы на поверхности в среднем число соседок меньше на определенную долю от максимального числа соседок: $\Delta Z = Z - Z_3$. Например, если $Z = 12$ при плотной упаковке шариков, то у молекул на плоской поверхности соседок всего $Z_3 = 9$. Следовательно, потенциальная энергия в положении равновесия у таких молекул равна $-9U_0$, а избыточная энергия равна $3U_0 = ZU_0/4$. Каждая молекула на поверхности занимает площадь, которая по порядку величины равна D^2. Для самой плотной упаковки шариков эта площадь составляет $\sqrt{3}D^2/2$. Поэтому избыточная энергия, приходящаяся на единицу площади, равна примерно

$$\sigma_0 = \frac{ZU_0}{2\sqrt{3}D^2}.$$

Это и есть коэффициент поверхностного натяжения при невысоких температурах.

По мере роста температуры давление и плотность насыщенного пара растут, и молекулы пара создают для каждой молекулы, живущей на поверхности конденсированного вещества, дополнительную глубину потенциальной ямы. Кроме того, с ростом температуры при внешнем давлении, равном давлению насыщенного пара вещества, убывает плотность вещества в конденсированном состоянии. Из этого следует, что коэффициент поверхностного натяжения σ убывает с температурой и при критической температуре обращается в ноль, так как при этой температуре пропадает различие плотностей конденсированного вещества и его насыщенного пара. Коэффициент поверхностного натяжения составляет определенную долю от теплоты испарения при данной температуре, а теплота испарения с ростом температуры убывает. Качественно описать поведение коэффициента поверхностного натяжения можно, например, такой формулой:

$$\sigma(T) = \sigma_0\left(1 - \frac{T}{T_{\text{кр}}}\right).$$

Данные из справочника физических величин дают основание для выбора именно такой зависимости (рис. 1). Если нужно

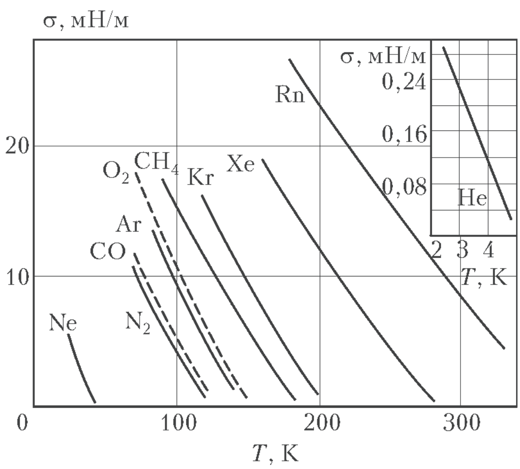


Рис. 1. Поверхностное натяжение сжиженных газов

найти коэффициент поверхностного натяжения при некоторой температуре T, а известна величина этого коэффициента при другой температуре T_0, то можно его вычислить, пользуясь приблизительной формулой

$$\sigma(T) = \sigma(T_0)\frac{1-(T/T_{\text{кр}})}{1-(T_0/T_{\text{кр}})}.$$

Обычно в справочники попадают значения σ для жидких веществ, а величина $Z_0 > Z_1$. Поэтому для температур T, меньших температуры плавления вещества, нужно вводить дополнительный множитель Z_0/Z_1.

Давление газов и собственное давление конденсированного вещества

Основным уравнением молекулярно-кинетической теории в школьной физике называют соотношение, справедливое для разреженных газов:

$$p = \frac{NkT}{V} = \frac{N}{V}\frac{2\langle E\rangle}{3}.$$

Здесь p – давление, V – объем, занимаемый молекулами, N – число молекул в этом объеме, k – постоянная Больцмана, $\langle E\rangle$ – средняя кинетическая энергия, связанная с тепловым хаотическим поступательным движением молекул.

Молекулы, принадлежащие конденсированному веществу, не разлетаются в окружающее пространство и не переходят в пар, потому что создают друг для друга глубокие потенциальные ямы. Потенциал Леннарда–Джонса описывает парное взаимодействие молекул, причем область взаимодействия простирается до бесконечности. Вещество находится в равновесии – как в тепловом, так и в механическом. Получается, что *ближайшие* соседки-молекулы друг от друга отталкиваются, а расположенные *не рядом* молекулы притягиваются. Поэтому конденсированное вещество оказывается сжатым за счет взаимного притяжения удаленных молекул. Это состояние можно описать с помощью понятия «собственное сжимающее вещество давление». Метод размерностей дает для величины этого давления такую размерную составляющую: U_0/D^3. Численный коэффициент при этой составляющей определяется степенями m и n слагаемых $(1/R)$ в формуле, задающей потенциальную энергию взаимодействия молекул, и числом Z ближайших соседок-молекул. Для потенциала Леннарда–Джонса $m = 12$, $n = 6$, $Z = 12$. Если считать что силы отталкивания возникают только при соприкосновении соседок-молекул и они обусловлены наличием слагаемого со степенью 12, то основной вклад в собственное давление вещества дает слагаемое со степенью 6, а все остальные молекулы обеспечивают только малую добавку к этой величине. Относительная доля этой добавки равна примерно удвоенной сумме ряда от $i = 2$ до бесконечности, т.е. $\approx 0{,}165$. Этой добавкой можно пока и пренебречь. Подсчеты собственного давления дают такую формулу:

$$p_{\text{соб}} \approx \frac{12U_0}{D^3} \approx \frac{2L\rho}{\text{M}}.$$

Напомним, что ρ – это плотность вещества, а M – его молярная масса.

Тепловое движение молекул в объеме конденсированного вещества вблизи положений равновесия

Потенциал Леннарда–Джонса или другая модель, описывающая взаимодействие молекул, содержит в себе информацию об «упругости» молекул, подвергающихся сжатию. За эту упругость, в частности, отвечает слагаемое со степенью 12. При достаточно низких температурах (значительно меньших критической) и невысоких внешних давлениях объем вещества определяется балансом собственного давления вещества и упругости молекул. При росте температуры растет вклад теплового движения и, соответственно, теплового давления, которое вместе с упругостью молекул противостоит суммарному внешнему и внутреннему давлениям. Каждая молекула в составе конденсированного вещества колеблется в ячейке, созданной для нее молекулами-соседками. Силы, которые возвращают молекулу к ее положению равновесия, создаются за счет отталкивания молекул-соседок, которые обступают нашу молекулу со всех сторон. Для 12 ближайших соседок на одно независимое направление смещения – на x, или y, или z – приходятся в среднем 4 молекулы, т.е. по 2 молекулы с одной и с другой стороны. А рост потенциальной энергии при смещении молекулы от положения равновесия на x, как это заложено в модели Леннарда–Джонса, зависит от величины смещения x примерно как сумма двух величин:

$$U(x) = 2U_0\left(\left(\frac{D}{D+x}\right)^{12} - 2\left(\frac{D}{D+x}\right)^{6}\right) + 2U_0\left(\left(\frac{D}{D-x}\right)^{12} - 2\left(\frac{D}{D-x}\right)^{6}\right) \approx$$

$$\approx 72U_0\left(\frac{x}{D}\right)^2 + 2226U_0\left(\frac{x}{D}\right)^4 + \ldots .$$

Функция получилась симметричной относительно величины и знака смещения x. Это самое первое приближение для описания потенциальной энергии молекулы при ее смещении от положения равновесия. Другие слагаемые зависят от более высоких степеней x (6, 8 и т.д.). Первое слагаемое, пропорциональное x^2, соответствует средней силе взаимодействия с окружающими молекулами, равной нулю. А все слагаемые с более высокими степенями как раз и обеспечивают появление дополнительного, того самого «теплового давления» внутри конденсированного вещества. При невысоких температурах, в сравнении с критической температурой, среднее значение кинетической энергии и среднее значение дополнительной потенциальной энергии, связанные с движением молекул вдоль одного из трех независимых направлений, одинаковы и равны $kT/2$. Иными словами,

$$72U_0\left(\frac{x_{\max}}{D}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{kT}{2}.$$

Отсюда следует, что средняя амплитуда и частота колебаний молекул вблизи положения равновесия равны, соответственно,

$$x_{\max} = D\sqrt{\frac{kT}{72U_0}} \text{ и } \omega = \sqrt{\frac{144U_0}{mD^2}}.$$

Понятно, что молекулы, живущие на границе конденсированного вещества, испытывают со стороны разреженного пара меньшее воздействие, чем со стороны ближайших соседок-молекул. Поэтому амплитуды колебаний таких молекул в направлении «свободы», конечно, имеют бóльшую величину.

(Окончание следует)

Переключения рядов

Е.БАКАЕВ

Начнем с такой задачи

Задача 1. *Все клетки таблицы 8×8 заполнены плюсами и минусами (по одному знаку в клетке). Одной операцией разрешается выбрать любой ряд (строку или столбец) и в каждой из его клеток поменять знак на противоположный. Сначала все знаки были плюсами. Может ли после нескольких таких операций оказаться, что в таблице ровно один минус?*

На рисунке 1 показан пример проведения такой операции.

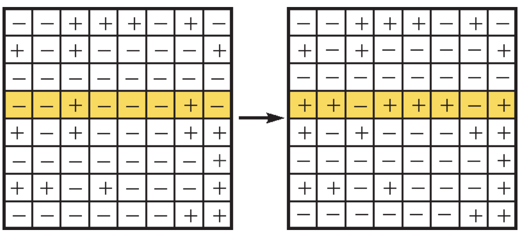


Рис. 1

Мы не только решим эту задачу, но и вообще разберемся, какие таблицы из каких можно получить с помощью этих операций.

Строки и столбцы будем называть *рядами*. Операцию, описанную в задаче 1, будем называть *переключением ряда*.

Таблица 2×2

Вместо того чтобы решать задачу про таблицу 8×8, разберемся сначала с таблицей маленького размера, для которой все возможные варианты перекрашивания можно перебрать вручную. Наименьшая таблица, которую разумно рассматривать, это 2×2. Выясним, какие ее заполнения из каких можно получить.

Всего существует $2^4 = 16$ способов заполнить клетки таблицы 2×2 плюсами и минусами. Можно все их рассмотреть и составить схему (граф). Два заполнения будем соединять линией (ребром), если одно можно получить из другого одним переключением ряда (рис.2).

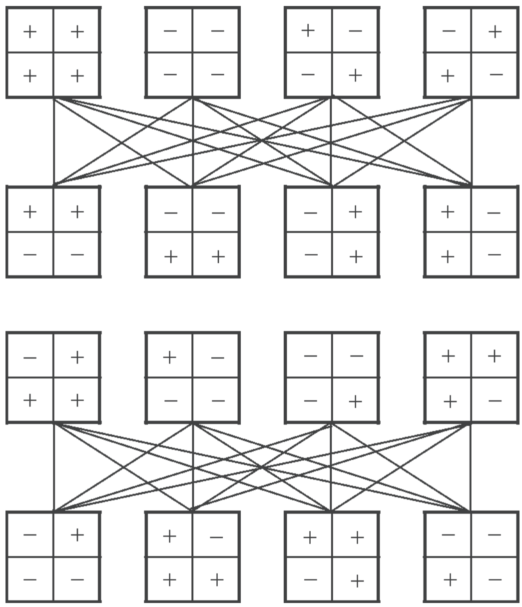


Рис. 2

Видно, что все заполнения разбились на две группы (две компоненты связности графа): заполнения одной группы нельзя получить из заполнений другой.

Что общего у заполнений каждой группы? Чем отличаются заполнения разных групп?

Можно заметить, что в заполнениях одной группы четное количество плюсов, а в заполнениях другой – нечетное. Это можно доказать и не перебирая все варианты заполнений. Действительно, каждым ходом мы меняем два знака, т.е. либо 2 плюса меняем на 2 минуса, либо 2 минуса меняем на 2 плюса, либо количество плюсов и минусов не меняется. Значит, количество плюсов при переключениях рядов сохраняет свою четность.

Упражнение 1. На столе стоят 5 стаканов донышком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые 2 стакана. Можно ли, повто-

---

К задачам в статье даны решения, но стоит самостоятельно подумать над задачей перед тем, как читать ее решение, – это принесет больше пользы. Также в статье даны упражнения, они зачастую проще задач, их тоже стоит решать, это может помочь разобраться с последующим материалом. Ответы и указания к упражнениям даны в конце номера.

ряя эту операцию, поставить все стаканы правильно?

Четность количества плюсов

С таблицами 2×2 полностью разобрались. Аналогичные соображения помогут в решении задачи 1.

Действительно, и в этом случае четность количества плюсов во всей таблице не будет меняться. Докажем это. Пусть в каком-то ряду x плюсов, тогда после его переключения в этом ряду станет $8-x$ плюсов, а во всей остальной таблице плюсы останутся на месте. Но числа x и $8-x$ одной четности. Значит, четность количества плюсов во всей таблице не поменяется – она является инвариантом. (*Инвариантом* называют свойство, которое не меняется при заданных преобразованиях.)

Итак, сначала в таблице было 64 плюса, значит, их количество всегда будет четным и не сможет стать равным 63. Задача 1 решена.

Упражнения

2. На столе стоят 15 стаканов донышком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любое четное количество стаканов. Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы правильно?

3. Из таблицы А переключениями рядов получили таблицу Б. Докажите, что из таблицы Б переключениями рядов можно получить таблицу А.

4. Таблицу 8×8 заполнили плюсами и минусами, после чего сделали несколько переключений рядов.

а) Может ли оказаться, что конечное заполнение таблицы знаками отличается от начального ровно в одной клетке?

б) Могут ли конечное и начальное заполнения отличаться во всех клетках?

в) Можно ли из заполнения одними плюсами получить «шахматную раскраску», т.е. такое заполнение, в котором любые два соседних по стороне знака различны?

Рассмотрим еще две задачи, похожие на первую.

Задача 2. *В таблице 3×3 в одной угловой клетке стоит минус, а в остальных стоят плюсы. Можно ли с помощью переключений рядов добиться того, чтобы все знаки стали плюсами?*

Задача 3. *В таблице 8×8 в четырех угловых клетках стоят минусы, в остальных клетках – плюсы. Можно ли с помощью переключений рядов добиться того, чтобы все знаки стали плюсами?*

Работает ли для них решение, аналогичное решению первой задачи?

Нет: в задаче 2 каждый раз меняется 3 знака, значит, четность количества плюсов каждый раз меняется и может оказаться любой. В задаче 3 четность количества плюсов действительно является инвариантом, но это не дает противоречия – в начальном и конечном положениях их четность одинакова.

Как же решать задачу 2? Посмотрим на начальное и конечное положения (рис.3). Предположим, что из одного можно получить другое.

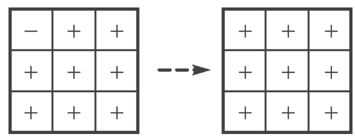


Рис. 3

Рассмотрим левую верхнюю клетку. В ней был минус, а должен оказаться плюс. Значит, ее надо поменять нечетное количество раз. Знак меняется, когда переключается один из двух рядов, на пересечении которых он находится, поэтому один из рядов должен быть изменен нечетное количество раз, а другой – четное. Благодаря симметричности ситуации можно считать, что нечетное количество раз переключали строку, а четное количество раз – столбец (рис.4,*а*).

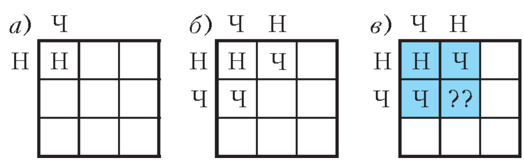


Рис. 4

Рассмотрим теперь средний знак в верхнем ряду. Он был плюсом и должен им и остаться. Значит, его надо поменять четное количество раз. Но первая строка меняется нечетное количество раз, а значит, второй столбец – тоже нечетное количество раз. Рассуждая аналогично, но рассмотрев теперь среднюю клетку первого столбца, можно сделать вывод, что вторая строка изменяется четное количество раз (рис.4,*б*).

Но тогда средний столбец и средняя строка изменятся в совокупности нечетное количество раз, значит, центральный знак таблицы поменяется нечетное количество раз и станет минусом, а не плюсом (рис.4,*в*). Получили противоречие – из одного положения нельзя получить другое переключениями рядов. Задача 2 решена.

Заметим, что для получения противоречия нам достаточно было рассмотреть 4 знака, образующих квадрат 2×2, а знаки в остальных клетках для решения были не важны.

Вспомним, что при переключениях рядов в квадрате 2×2 четность количества плюсов в нем не меняется, потому что каждый раз меняется по 2 знака. Но это верно и для квадрата 2×2, выделенного внутри большего квадрата! Соответственно, решение задачи 2 можно изложить короче, рассмотрев квадрат 2×2 (см. рис.4,*в*) и заметив, что четность количества плюсов в нем является инвариантом.

Упражнение 5. Убедитесь в том, что задача 3 решается аналогично.

Некоторые задачи решаются с помощью такого же, казалось бы, незамысловатого инварианта, как в задачах 2 и 3 (четность количества плюсов), но догадаться, для какой именно области (в нашем случае это был некоторый квадрат 2×2) такой инвариант работает, бывает непросто. Такие задачи можно найти в статье Ю.Ионина, Л.Курляндчика «Поиск инварианта» в «Кванте» №2 за 1976 год, смотрите также дополнительные задачи 2 и 3 в конце этой статьи.

Упражнения

6. В таблице 8×8 изначально все знаки были плюсами. Затем сделали несколько переключений рядов. Сколько плюсов может оказаться на главной диагонали после нечетного количества операций?

7. В таблице 8×8 изначально все знаки были плюсами. Затем сделали несколько переключений рядов, после чего часть знаков скрыли.

а) Некоторые знаки известны (рис.5,*а*). Найдите знаки, отмеченные знаками вопроса.

б) Аналогичный вопрос для таблицы на рисунке 5,*б*.

в) Некоторые знаки известны (рис.5,*в*). Можно ли по этой информации выяснить, четное или нечетное количество операций было сделано?

г) Некоторые знаки известны (рис.5,*г*). Найдите знак, отмеченный знаком вопроса.

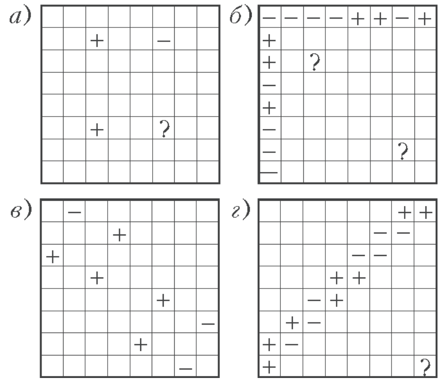


Рис. 5

Количество действий

Как мы уже выяснили, знак в клетке поменяется, только если операций, содержащих эту клетку, было сделано нечетное количество. Отсюда следует, во-первых, что порядок операций не влияет на результат. Во-вторых, имеет значение только четность количества таких операций, т.е. результат не поменяется, например, если менять ряд не 13 раз, а 1 раз. Значит, можно считать, что каждый ряд можно либо вообще не переключать, либо переключить один раз, а переключать его большее количество раз бессмысленно.

Получается, что если какое-то заполнение таблицы $n\times n$ возможно получить из другого, то это можно сделать не более чем за $2n$ операций (так как всего рядов $2n$). Но верна и более сильная оценка.

Задача 4 (А.Канель-Белов, XXXIII Турнир городов, 2012 г.). *В клетках таблицы $n\times n$ стоят плюсы и минусы. За один ход разрешается в произвольной строке или в произвольном столбце поменять все знаки на противоположные. Известно, что из начальной расстановки можно получить такую, при которой во всех ячейках стоят плюсы. Докажите, что этого можно добиться не более чем за n ходов.*

Мы уже показали, что всегда можно уложиться в $2n$ ходов. Но когда нам может понадобиться ровно $2n$ ходов? Когда мы переключили каждый ряд по одному разу. Но тогда каждый знак поменяется 2 раза, ведь менялись его строчка и его столбец. А значит, заполнение таблицы останется прежним, поэтому его можно было получить быстрее – не делая ни одного хода! Таким образом, мы доказали, что $2n$ ходов делать излишне.

Идем дальше. Когда может понадобиться ровно $2n-1$ ходов? Когда переключали все ряды, кроме одного. Тогда знаки этого ряда поменяются по 1 разу, а остальные знаки – по 2 раза. Опять же, такое заполнение можно было получить быстрее – достаточно переключить только один ряд, который мы не переключали.

Но то же можно сделать и в других случаях! Предположим, что мы переключили какие-то x рядов. Если переключать не эти ряды, а все остальные, то ходов станет $2n-x$, а результат не поменяется (если знак менялся 2 раза, то теперь не будет меняться; если не менялся, то он будет меняться 2 раза; если знак менялся 1 раз, то он и сейчас поменяется 1 раз).

Соответственно, если ходов было больше n, то после такой «инверсии» наших действий мы получим тот же результат меньше чем за n действий. Задача 4 решена.

Упражнение 8. Можно ли усилить оценку в задаче 4? Иными словами, всегда ли желаемого можно добиться не более чем за $n-1$ ходов?

Критерий реализуемости

Вернемся к вопросу, какие заполнения из каких можно получить.

Будем называть заполнение *реализуемым*, если его можно получить с помощью переключений рядов из заполнения, в котором все знаки – плюсы. При решении задачи 2 мы уже выяснили, что если в заполнении есть квадрат 2×2, в котором нечетное количество плюсов, то оно не реализуемое.

Вместо квадрата 2×2 можно рассматривать любые 4 клетки, являющиеся вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам таблицы (пример таких четырех клеток – на рисунке 5,*а*). В таких четырех клетках четность количества плюсов также не меняется, так что если изначально они все были плюсами, то среди них всегда будет четное количество плюсов. Значит, если найдутся такие 4 клетки, в которых стоит нечетное количество плюсов, то заполнение не реализуемое.

Но если они не найдутся, значит ли это, что оно реализуемое?

Да, оказывается, что верен следующий *критерий реализумости*. Равносильны такие три свойства заполнения (т.е. если одно из этих свойств выполняется, то выполняются и два других):

1) оно реализуемо;

2) в любом квадрате 2×2 четное количество плюсов;

3) в любых 4 клетках, являющихся вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам таблицы, четное количество плюсов.

Второе свойство прямо следует из третьего, ведь квадрат 2×2 – частный случай такого прямоугольника. Как из первого свойства следуют второе и третье, мы уже показали. Для завершения доказательства равносильности трех свойств покажем, как из второго следует первое.

Рассмотрим произвольное заполнение, для которого выполняется второе свойство: в нем в любом квадрате 2×2 четное количество плюсов. Докажем, что оно реализуемо, т.е. покажем, что переключениями рядов его можно привести к ситуации, когда все знаки – плюсы. Сделаем такие переключения рядов, чтобы все знаки первого столбца и первой строки стали плюсами. Смотрите пример на рисунке 6.

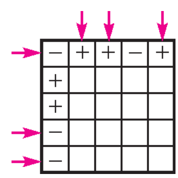


Рис. 6

Упражнение 9. Докажите, что такие переключения всегда можно сделать.

Теперь докажем, что после таких переключений и все остальные знаки таблицы стали плюсами. В любом квадрате 2×2 по-прежнему четное количество плюсов, так как переключения рядов не нарушают этого свойства. Теперь рассмотрим левый верхний квадрат 2×2 (рис.7,*а*). Три его знака – плюсы,

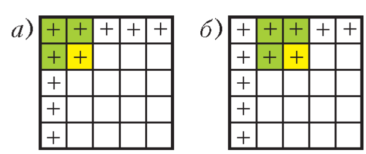


Рис. 7

значит и четвертый – плюс. Рассмотрим следующий квадрат 2×2, сдвинувшись на клетку вправо (рис.7,*б*), для него ситуация аналогична. Рассматривая последовательно все такие квадраты, получим, что все знаки таблицы – плюсы.

Упражнения

10. Равносильность второго и третьего свойств можно доказать, не используя ни первое свойство, ни переключения знаков вообще. Попробуйте это сделать.

11. В одной из строк реализуемого заполнения таблицы 8×8 стоит x плюсов. Докажите, что в каждой строке этого заполнения x или $8-x$ плюсов.

12. Рассмотрим некоторое реализуемое заполнение таблицы 8×8. Пусть в одной из его строк x минусов, а в одном из столбцов – y минусов, причем на их пересечении стоит плюс. Сколько всего минусов в этом заполнении?

13. Существует ли реализуемое заполнение таблицы 8×8, в котором ровно 6 плюсов?

Количество реализуемых заполнений

Заполним первую строку и первый столбец таблицы $m\times n$ произвольным образом. Тогда:

во-первых, оставшиеся клетки можно заполнить так, чтобы заполнение было реализуемым;

во-вторых, это можно сделать единственным образом.

Упражнение 14. Докажите эти утверждения.

Указание. Используйте критерий реализуемости и результат упражнения 9.

Таким образом, количество способов заполнить таблицу плюсами и минусами так, чтобы заполнение было реализуемым, равно количеству способов заполнить произвольным образом ее первую строку и первый столбец.

В первой строке и первом столбце таблицы $m\times n$ в совокупности $m+n-1$ клеток, значит, реализуемых заполнений такой таблицы существует 2^{m+n-1}.

Графы заполнений

В разделе про таблицу 2×2 мы строили граф, в котором ребром соединялись вершины, соответствующие таким заполнениям таблицы, которые можно получить друг из друга одним переключением ряда. Можно рассмотреть такой же граф, но для таблицы $m\times n$ (в нем 2^{mn} вершин).

Каждое заполнение принадлежит какой-то компоненте связности этого графа. Два заполнения относятся к одной компоненте, если одно можно получить из другого переключениями рядов.

Упражнения

15. Сколько заполнений в компоненте связности, в которой находится заполнение, где все знаки – плюсы?

16. Сколько в этом графе компонент связности и сколько в каждой из них заполнений?

Указание. Любое заполнение можно привести переключениями рядов к заполнению, в котором в первой строке и первом столбце все знаки – плюсы. При этом не поменяется четность количества плюсов в любых 4 клетках, являющихся вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам таблицы.

Нахождение количества реализуемых заполнений составляет пункт б) задачи М665 «Задачника «Кванта». Ее решения смотрите в «Кванте» №9 за 1981 год.

Вспомогательные переключения знаков

В условии следующей задачи ничего не говорится об операциях, меняющих знаки, тем не менее можно рассмотреть такие операции, и тогда задачу поможет решить критерий реализуемости.

Задача 5 (Е.Бакаев, XXXIV Турнир городов, 2012 г., М2289). *В некоторых клетках квадрата 11×11 стоят плюсы, причем всего плюсов четное количество. В каждом квадратике 2×2 тоже четное число плюсов. Докажите, что четно и число плюсов в 11 клетках главной диагонали квадрата.*

Для таблицы из этой задачи выполняется второе свойство, а значит, ее заполнение реализуемо. Тогда можно рассмотреть последовательность переключений рядов, которые позволяют получить данное заполнение из заполнения одними плюсами.

Рассмотрим количество плюсов во всей таблице. Каждое переключение ряда меняет 11 знаков, а значит, меняет четность количества плюсов во всей таблице. Раз по условию плюсов во всей таблице четное количество, а изначально число плюсов $11^2=121$ – нечетно, то операций было нечетное количество.

Каждая операция меняет один знак на диагонали и, тем самым, меняет четность числа плюсов на диагонали. Раз плюсов изначально было 11, а операций было нечетное количество, то на диагонали будет четное количество плюсов.

Упражнение 17. Решите задачу 5 по-другому, не рассматривая операции смены знаков.

Попробуйте решить с помощью вспомогательного переключения рядов следующую задачу.

Упражнение 18 (В.Произволов, XXIII Всесоюзная олимпиада, М1181). На шахматной доске расставлены 8 ладей так, что они не бьют друг друга. Докажите, что на черных полях расположено четное число ладей.

Стертые знаки

Как мы уже выяснили, по $m+n-1$ знакам таблицы можно восстановить остальные, если известно, что заполнение реализуемо. Например, это можно сделать по знакам одной строки и одного столбца.

Но $m+n-1$ знаков, по которым можно восстановить реализуемое заполнение, могут быть расположены иначе, в чем можно убедиться, решив упражнение 19.

Упражнения

19. Докажите, что все неизвестные знаки заполнения на рисунке 5,*г* восстанавливаются однозначно.

20. По любым ли 50 знакам таблицы 8×8 заполнение восстанавливается однозначно?

Итак, при некоторых расположениях $m+n-1$ известных знаков по ним можно однозначно восстановить остальные знаки. Но верно ли, что это наименьшее необходимое количество знаков? Да, верно, и именно об этом была задача 15 Конкурса имени А.П.Савина (см. «Квант» №1 за 2017 г.).

Задача 6. *Петя нарисовал таблицу 10×10 и заполнил все ее клетки плюсами. Затем он сделал несколько действий по следующему правилу. Каждым действием он наугад выбирал ряд (строку или столбец) и менял каждый из 10 его знаков на противоположный (плюс на минус, минус на плюс). Когда после этого Петя вышел, хулиган Вася часть знаков стер – осталось только N знаков. Для какого наименьшего N может оказаться, что получившуюся у Пети таблицу можно однозначно восстановить по оставшимся данным?*

Приведем решение более общего случая – для таблицы $m\times n$.

Ответ: $m+n-1$ (соответственно, для таблицы 10×10 ответ: 19).

Итак, осталось доказать, что если известно меньше $m+n-1$ знаков, то заполнение нельзя однозначно восстановить.

Рассмотрим граф, в котором вершины соответствуют рядам (всего $m+n$ вершин) и две вершины соединены ребром в том и только в том случае, когда на пересечении этих двух рядов стоит известный знак. В этом графе $m+n$ вершин, а ребер столько же, сколько известных знаков, значит, их меньше $m+n-1$. Из такого соотношения количества вершин и ребер можно сделать вывод, что граф несвязный. Рассмотрим одну из компонент связности, назовем все ее вершины (и все соответствующие им ряды) красными, а все остальные вершины (и их ряды) – синими. Предположим, что по известным знакам получилось однозначно восстановить все заполнение. Рассмотрим его. Последовательно переключим знаки в каждом из красных рядов. Каждый известный знак стоит либо на пересечении двух синих рядов, либо двух красных, значит, при такой последовательности действий каждый известный знак либо не поменяется вообще, либо поменяется 2 раза, в любом случае он останется прежним. При этом заполнение не осталось прежним, так как каждый знак, стоящий на пересечении красного и синего рядов, поменялся. Таким образом, мы получили другое заполнение, в котором известные знаки точно такие же. Значит, заполнение нельзя однозначно восстановить по известным знакам.

Разным задачам с такой идеей решения (рассмотрение вспомогательного графа и использование его связности или несвязности) посвящена статья П.Кожевникова, А.Шаповалова «Свяжитесь с графом» в «Кванте» №4 за 2014 год.

Рассмотрим теперь похожую задачу М112 «Задачника «Кванта».

Задача 7. *В таблице размером $m\times n$ записаны числа так, что для любых двух строк и любых двух столбцов сумма чисел в двух противоположных вершинах образуемого ими прямоугольника равна сумме чисел в двух других его вершинах. Часть чисел стерли, но по оставшимся можно восстановить стертые. Докажите, что осталось не менее $(n+m-1)$ чисел.*

В задаче 6 речь шла о реализуемом заполнении, а значит, в нем во всех таких же четверках клеток, стоящих на пересечении 2 строк и 2 столбцов, количество плюсов четно. Здесь же не идет речь о перекрашиваниях или о плюсах и минусах, но снова накладывается условие на все такие четверки клеток.

Попробуем решить эту задачу аналогично. Рассмотрим такой же несвязный граф. Снова назовем вершины одной компоненты красными, а все остальные синими. В предыдущей задаче речь шла о переключениях рядов, здесь же ни о каких операциях в условии не сказано, но мы сами можем ввести некоторые вспомогательные операции с рядами. Что мы хотим от этих операций? Хотим, чтобы числа в клетках на пересечении одноцветных рядов не поменялись, а на пересечении разноцветных – поменялись. При этом операция не должна нарушать то свойство, что для любых двух строк и любых двух столбцов сумма чисел в двух противоположных вершинах образуемого ими прямоугольника равна сумме чисел в двух других его вершинах. Например, подойдет такая операция: для столбца – все числа в столбце увеличиваем на 1, а для строки – все числа в строке уменьшаем на 1. Несложно проверить, что эта операция удовлетворяет необходимым требованиям. Следовательно, проведя по одной такой операции с каждым красным рядом, получим таблицу, в которой известные знаки те же, а некоторые неизвестные поменялись. Значит, таблицу нельзя восстановить однозначно, зная менее $n + m - 1$ чисел.

Эта задача – о единственности решения системы линейных уравнений. Другое решение этой задачи, как раз использующее линейную алгебру, приведено в «Кванте» №8 за 1972 год. Предыдущая задача – это, по сути, та же задача, но вместо привычных линейных уравнений – сравнения по модулю 2.

Этому подходу (рассмотрению задач про переключение знаков с точки зрения линейной алгебры) посвящена статья В.Дорофеева, А.Спивака «Раскраски графов и линейные уравнения» в «Кванте» №4 за 2011 год. Рекомендуем ее для дальнейшего изучения вопроса.

Дополнительные задачи

1. 30 пятаков лежат гербом вверх. Разрешено за раз перевернуть любые 29 из них. Можно ли добиться, чтобы все пятаки лежали гербом вниз?

2 (IX Турнир городов, 1987 г.). Правильный треугольник разбит прямыми, параллельными его сторонам, на равные между собой правильные треугольники. Один из маленьких треугольников черный, остальные – белые. Разрешается перекрашивать одновременно все треугольники, пересекаемые прямой, параллельной любой стороне исходного треугольника. Всегда ли можно с помощью нескольких таких перекрашиваний добиться того, чтобы все маленькие треугольники стали белыми?

3 (Е.Бакаев, Турнир матбоев памяти А.П.Савина, 2015 г.). Дан клетчатый квадрат: а) 5×5; б) 8×8. Одной операцией можно выбрать любой квадрат 3×3, или любую строку, или любой столбец и поменять цвета всех клеток этой области на противоположные. С помощью таких операций из полностью белого квадрата получили квадрат, в котором ровно одна черная клетка. Где может оказаться эта клетка? Укажите все варианты.

4. Сколькими способами можно раскрасить клетки таблицы 10×10 в черный и белый цвета так, чтобы в любом квадрате 3×3 было четное число черных клеток?

5 (А.Зелевинский, Московская олимпиада, 1970 г., М32). Во всех клетках таблицы размером 100×100 стоят плюсы. Разрешено одновременно изменить знаки во всех клетках одной строки или во всех клетках одного столбца. Можно ли, проделав такие операции несколько раз, получить таблицу, где ровно 1970 минусов?

6 (В.Алексеев, Московская олимпиада, 2007 г.). В таблице размером $n\times n$ клеток две противоположные угловые клетки черные, а остальные – белые. Какое наименьшее количество белых клеток достаточно перекрасить в черный цвет, чтобы после этого с помощью преобразований, состоящих в перекрашивании всех клеток какого-либо столбца или какой-либо строки в противоположный цвет, можно было сделать черными все клетки таблицы?

7 (А.Быстриков, XXV Турнир городов, 2003 г.). В таблице $m\times n$ расставлены плюсы и минусы. За один ход разрешается поменять знаки на противоположные в любой строке или столбце или на любой диагонали (угловые клетки тоже считаются диагоналями). Докажите, что если таблица такими действиями не приводится к таблице из одних плюсов, то в ней есть квадрат 4×4, который тоже не приводится.

Шунты и добавочные сопротивления в задачах

Б.МУКУШЕВ

Известно, что шунты и добавочные сопротивления используются для расширения пределов измерения амперметра и вольтметра соответственно. Основную часть этих электроизмерительных приборов представляет собой легкая рамка, обмотанная большим числом витков из тонкого провода, который рассчитан на очень маленький ток. Рамка находится в магнитном поле и может свободно вращаться вокруг специальной оси. В электроизмерительных приборах крутящий момент рамки создается силой Ампера – силой взаимодействия между магнитным полем и током, который проходит через обмотку рамки. Этот ток обычно составляет несколько миллиампер. С рамкой соединена стрелка, которая перемещается по шкале. Угол поворота стрелки устанавливается при равенстве вращающего момента силы Ампера и момента силы упругости пружины, которая прикреплена к корпусу прибора.

Силу тока в цепи измеряют амперметром, который включается в цепь последовательно (рис.1). Чтобы амперметр не вносил существенных изменений в режим работы цепи,

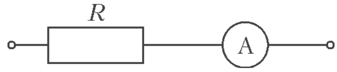


Рис. 1

его сопротивление должно быть очень малым, т.е. $R_а \ll R$. Каждый амперметр рассчитан на некоторую максимальную силу тока, обозначим ее $I_а$, при превышении которой прибор может перегореть. Как же быть, если нужно измерить значительно больший ток, чем $I_а$? Может быть, перемотать обмотку прибора более толстым проводом? Нет, такое решение будет неудачным – обмотка прибора станет очень тяжелой, возрастут трение в ее опорах и погрешность прибора. Кроме того, придется поставить спиральные пружины из более толстой проволоки. Они будут иметь бóльшую жесткость, и силы электромагнитного взаимодействия не смогут повернуть стрелку прибора.

Пойдем по другому пути. Как в реке делают отводной канал, так и в электрической цепи можно отвести часть тока в боковой участок, в который и включить амперметр. Для этого применяют шунт – резистор с очень малым сопротивлением, который включают параллельно амперметру (рис.2). Поскольку сопротивление шунта $R_ш$ много меньше сопротивления амперметра $R_а$, по амперметру протекает малая часть общего тока в цепи. Пусть $R_а$ в n раз больше $R_ш$, т.е. $\frac{R_а}{R_ш} = n$. Силы тока в цепи, амперметре и шунте обозначим I, $I_а$ и $I_ш$ соответственно. Разность потенциалов (напряжение) между точками 1 и 2 можно записать двумя способами:

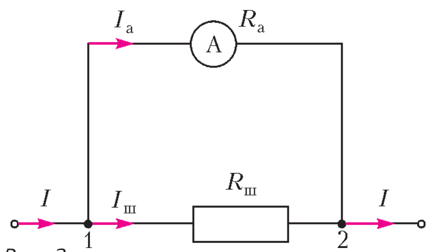


Рис. 2

$$\varphi_1 - \varphi_2 = I_а R_а, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = I_ш R_ш .$$

Отсюда получаем

$$\frac{I_ш}{I_а} = \frac{R_а}{R_ш} = n, \text{ или } I_ш = I_а n .$$

Полный ток I в цепи равен

$$I = I_а + I_ш = I_а + I_а n = I_а (n+1),$$

откуда

$$I_а = I \frac{1}{n+1} .$$

Таким образом, ток в амперметре $I_а$ в $n+1$ раз меньше тока I в главной цепи. Значит, с помощью амперметра с шунтом мы можем измерить токи в $(n+1)$ раз большие, чем те, на которые он рассчитан. При этом прибор регистрирует только $\left(\frac{1}{n+1}\right)$-ю часть измеряемого тока, т.е. чувствительность его уменьшается в $(n+1)$ раз, а цена каждого деления амперметра увеличивается $(n+1)$ раз. Следовательно, сопротивление шунта должно быть $R_ш = \frac{R_а}{n}$. Вообще же, если мы хотим уменьшить чувствительность прибора в n раз, то мы должны взять шунт с сопротивлением

$$R_ш = \frac{R_а}{n-1}.$$

Вольтметр включается параллельно тому участку цепи – резистору сопротивлением R, напряжение на котором мы хотим измерить

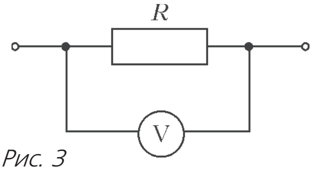


Рис. 3

(рис.3), и поэтому на него ответвляется некоторый ток от основной цепи. Напряжение на вольтметре такое же, как и на резисторе. Однако при его включении и ток, и напряжение в основной цепи несколько меняются, так как теперь мы имеем уже другую цепь проводников, состоящую из резистора и вольтметра. Сопротивление нашего участка цепи становится равным

$$R' = \frac{RR_в}{R+R_в} < R,$$

где $R_в$ – сопротивление вольтметра. Из-за этого вольтметр показывает меньшее напряжение, чем значение истинного напряжения на резисторе. Для того чтобы вольтметр не вносил заметных искажений в истинное напряжение, его сопротивление должно быть большим по сравнению с сопротивлением того участка цепи, параллельно которому он включается. В этом легко убедиться, записав выражение для R' в виде

$$R' = \frac{R}{1+\frac{R}{R_в}}.$$

Если $R_в \gg R$, то $\frac{R}{R_в} \approx 0$ и $R' \approx R$.

Любой вольтметр рассчитан на измерение напряжения, не превышающего некоторого предела – номинального напряжения $U_в$. Нередко случается, что измеряемое напряжение U может оказаться больше номинального напряжения имеющегося в нашем распоряжении вольтметра. Но если к вольтметру последовательно присоединить добавочное сопротивление $R_д$ (рис.4), то предел

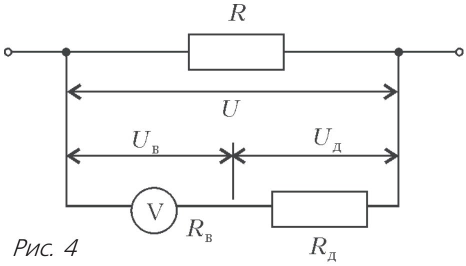


Рис. 4

измерения напряжения вольтметра расширится. Действительно, теперь измеряемое напряжение U делится на две части: одна часть $U_в$ приходится на вольтметр, другая $U_д$ – на добавочное сопротивление:

$$U = U_в + U_д.$$

Через вольтметр идет ток

$$I_в = \frac{U_в}{R_в} = \frac{U}{R_в+R_д},$$

откуда,

$$\frac{U}{U_в} = \frac{R_в+R_д}{R_в} = 1+\frac{R_д}{R_в}.$$

Отношение $\frac{U}{U_в} = n$ показывает, во сколько раз расширяется предел измерения напряжения вольтметром. Таким образом, при подсоединении добавочного сопротивления чувствительность вольтметра уменьшается в n раз, а цена деления вольтметра соответственно увеличивается в n раз. Отсюда найдем значение добавочного сопротивления к вольтметру:

$$R_д = R_в(n-1).$$

Теперь обсудим некоторые вопросы шунтирования амперметра и подключения добавочного сопротивления к вольтметру на конкретных физических задачах.

Задача 1. *Многопредельный амперметр высокой точности содержит для каждого предела измерений отдельный шунт. Амперметр включают в цепь на пределе 10 мА, и он показывает $I_1 = 2{,}95$ мА. Когда амперметр переключили на предел 3 мА, он показал $I_2 = 2{,}90$ мА. Какова была сила тока в цепи до подключения амперметра?*

Решение. На рисунке 5 представлена электрическая схема, где через I обозначен ток, протекающий через миллиамперметр, а через $I_{общ}$ – ток в электрической цепи с

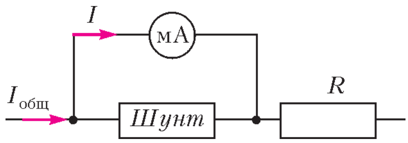


Рис. 5

некоторым сопротивлением R. Обозначим сопротивление миллиамперметра через $R_а$ и запишем выражения для напряжения источника тока U для двух режимов включения амперметра:

$$U = I_{а1}R_а + I_1R,$$

$$U = I_{а2}R_а + I_2R.$$

Здесь $I_а$ – величина тока, при котором стрелка амперметра отклоняется полностью. В первом случае через амперметр проходит ток

$$I_{а1} = \frac{2,95}{10}I_а = 0,295I_а,$$

во втором случае –

$$I_{а2} = \frac{2,90}{3}I_а = 0,967I_а.$$

Приравняем напряжения для обоих случаев:

$$0,295I_аR_а + 2,95R = 0,967I_аR_а + 2,90R,$$

откуда находим

$$I_аR_а = \frac{0,05}{0,672}R = 0,074R,$$

где ток измеряется в миллиамперах, сопротивление – в килоомах. Это значение подставим в выражение общего напряжения:

$$U = 0,295 \cdot 0,074R + 2,95R = 2,97R.$$

Пользуясь законом Ома, получим

$$I = \frac{U}{R} = 2,97\ мА.$$

Задача 2. *К гальванометру с сопротивлением r = 290 Ом присоединили шунт, понижающий чувствительность гальванометра в 10 раз. Какой резистор надо включить последовательно с шунтированным гальванометром, чтобы общее сопротивление осталось неизменным?*

Решение. Нарисуем электрическую схему (рис.6) и запишем условие равенства напряжений на шунте и гальванометре:

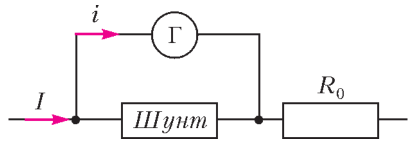


Рис. 6

$$ir = (I - i)r_ш,$$

где I – ток во внешней цепи, $r_ш$ – сопротивление шунта, i – ток через гальванометр. Следовательно,

$$r_ш = \frac{ir}{I - i} = \frac{r}{n - 1},$$

где n – число, показывающее, во сколько раз понизилась чувствительность гальванометра. Согласно условию,

$$\frac{r_ш r}{r_ш + r} + R_0 = r,$$

откуда получаем

$$R_0 = \frac{r^2}{r_ш + r} = \frac{r(n-1)}{n} = 261\ Ом.$$

Задача 3. *Имеется прибор с ценой деления i_0 = 10 мкА. Шкала прибора имеет N = 100 делений, внутреннее сопротивление прибора r = 50 Ом. Как из этого прибора сделать вольтметр с пределом измерения напряжения U = 200 В или миллиамперметр с пределом измерения тока I = 800 мА?*

Решение. Очевидно, что вся шкала прибора соответствует току через прибор $I_0 = i_0N = 10^{-3}$ А.

Чтобы сделать из этого прибора вольтметр, необходимо включить последовательно с ним добавочное сопротивление $R_д$. Из уравнения

$$U = U_в + U_д$$

находим

$$R_д = \frac{U - I_0r}{I_0} \approx 2 \cdot 10^5\ Ом = 200\ кОм.$$

Чтобы сделать из прибора миллиамперметр, необходимо зашунтировать прибор. Вспомним уравнение $I_аR_а = I_шR_ш$. По условию задачи, $I_ш = I - I_0$. Тогда

$$I_0r = (I - I_0)R_ш,$$

откуда получаем

$$R_ш = \frac{I_0r}{I - I_0} \approx 0,0625\ Ом.$$

Задача 4. *При включении шунта, имеющего сопротивление* $r_{ш} = 100$ *Ом, параллельно измерительному прибору стрелка отклоняется на всю шкалу при токе во внешней цепи* $I_1 = 3$ *А. При включении добавочного сопротивления* $R_{д} = 300$ *Ом к незашунтированному гальванометру шкала прибора становится в четыре раза грубее, чем без добавочного сопротивления и шунта. Какое сопротивление шунта надо взять для того, чтобы стрелка прибора отклонялась на всю шкалу при токе внешней цепи* $I_2 = 7{,}5$ *А?*

Решение. Сопротивление шунта $R_{ш}$, при котором стрелка отклонится на всю шкалу при токе внешней цепи I_2, определится из соотношения

$$I_{п} r = (I_2 - I_{п}) R_{ш},$$

где $I_{п}$ – ток через прибор, при котором стрелка отклоняется на всю шкалу, r – сопротивление прибора. Необходимо теперь определить $I_{п}$ и r. Нам известно, что при включении шунта с сопротивлением $r_{ш}$ стрелка прибора отклоняется на всю шкалу при токе внешней цепи I_1. Следовательно,

$$I_{п} r = (I_1 - I_{п}) r_{ш}.$$

Далее, при включении добавочного сопротивления $R_{д}$ стрелка отклоняется на всю шкалу, когда напряжение равно

$$U = 4U_{п} = 4I_{п} r, \text{ или } I_{п} R_{д} + I_{п} r = 4I_{п} r,$$

откуда следует

$$r = \frac{R_{д}}{3} = 100 \text{ Ом}.$$

Из выражения $I_{п} r = (I_1 - I_{п}) r_{ш}$ находим

$$I_{п} = \frac{I_1 r_{ш}}{r + r_{ш}} = 1{,}5 \text{ А}.$$

Окончательно из выражения

$$I_{п} r = (I_2 - I_{п}) R_{ш}$$

получаем

$$R_{ш} = 25 \text{ Ом}.$$

Задача 5. *Гальванометр с сопротивлением* $R_{г}$*, шунтированный сопротивлением* $R_{ш}$ *и соединенный последовательно с сопротивлением R, применен в качестве вольтметра (рис.7). Он дает отклонение стрелки на одно деление при напряжении* $U_1 = 1$ *В. Как надо изменить сопротивление R, чтобы гальванометр давал отклонение на одно деление при напряжении* $U_2 = 10$ *В?*

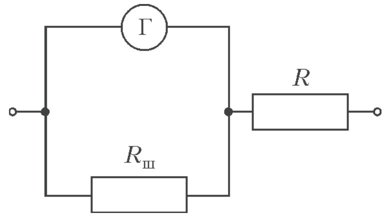


Рис. 7

Решение. Очевидно, что общее сопротивление данной схемы равно

$$R + \frac{R_{ш} R_{г}}{R_{ш} + R_{г}}.$$

Чтобы отклонение стрелки гальванометра не изменилось при увеличении напряжения в n раз, нужно ввести дополнительное сопротивление $R_{д}$, в $(n-1)$ раз большее сопротивления схемы:

$$R_{д} = \left(R + \frac{R_{ш} R_{г}}{R_{ш} + R_{г}}\right)(n-1),$$

где по условию задачи $n = \frac{U_2}{U_1} = 10$. Тогда измененное сопротивление будет равно

$$R_{изм} = R_{д} + R = 10R + \frac{9R_{ш} R_{г}}{R_{ш} + R_{г}}.$$

Задача 6. *Для исследования солнечной батареи используется многопредельный вольтметр, который состоит из чувствительного микроамперметра и набора добавочных сопротивлений. Подключив вольтметр к батарее на пределе 1 В, мы получаем показание* $U_1 = 0{,}7$ *В. Переключив вольтметр на предел 10 В, мы получим показание* $U_2 = 2{,}6$ *В. Что получилось бы на пределе 100 В?*

Решение. Обозначим сопротивление вольтметра на пределе 1 В через R_1. Тогда на пределе 10 В его сопротивление равно $R_2 = 10R_1$, а на пределе 100 В оно равно $R_3 = 100R_1$. Пусть ЭДС батареи $\mathcal{E}$, ее внутреннее сопротивление r. Имеем

$$U_1 = \frac{\mathcal{E}}{r + R_1} R_1 = \frac{\mathcal{E}}{1 + \frac{r}{R_1}}, \quad U_2 = \frac{\mathcal{E}}{1 + \frac{r}{10R_1}},$$

$$U_3 = \frac{\mathcal{E}}{1 + \frac{r}{100R_1}}.$$

(Продолжение см. на с. 57)

Региональный этап XLIII Всероссийской олимпиады школьников по математике

Региональный этап XLIII Всероссийской олимпиады поводился одновременно во всех регионах нашей страны 30 и 31 января 2017 года.

Задачи олимпиады

9 класс

1. В произведении трех натуральных чисел каждый сомножитель уменьшили на 3. Могло ли произведение при этом увеличиться ровно на 2016?

Н.Агаханов, И.Богданов

2. Вася задумал 8 клеток шахматной доски, никакие две из которых не лежат в одной строке или в одном столбце. За ход Петя выставляет на доску 8 ладей, не бьющих друг друга, а затем Вася указывает все ладьи, стоящие на задуманных клетках. Если количество ладей, указанных Васей на этом ходе, четно (т.е. 0, 2, 4, 6 или 8), то Петя выигрывает; иначе все фигуры снимаются с доски и Петя делает следующий ход. За какое наименьшее число ходов Петя сможет гарантированно выиграть?

И.Богданов

3. См. задачу М2457 «Задачника «Кванта».

4. См. задачу М2455 «Задачника «Кванта».

5. Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причем 50 из них рациональные, а остальные 50 – иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал сумму чисел, написанных около ее строки и ее столбца («таблица сложения»). Какое наибольшее количество сумм в этой таблице могли оказаться рациональными числами?

О.Подлипский

6. В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана AM и высота BH. Перпендикуляр, восстановленный в точке M к прямой AM, пересекает луч HB в точке K. Докажите, что если $\angle MAC = 30°$, то $AK = BC$.

Б.Обухов

7. См. задачу М2456 «Задачника «Кванта».

8. Изначально на стол положили 100 карточек, на каждой из которых записано по натуральному числу; при этом было ровно 43 карточки с нечетными числами. Затем каждую минуту проводилась следующая процедура. Для каждых трех карточек, лежащих на столе, вычислялось произведение записанных на них чисел, все эти произведения складывались и полученное число записывалось на новую карточку, которая добавлялась к лежащим на столе. Через год после начала процесса выяснилось, что на столе есть карточка с числом, делящимся на 2^{10000}. Докажите, что число, делящееся на 2^{10000}, было на одной из карточек уже через день после начала.

И.Богданов

10 класс

1. В произведении пяти натуральных чисел каждый сомножитель уменьшили на 3. Могло ли произведение при этом увеличиться ровно в 15 раз?

Н.Агаханов, И.Богданов

2. Окружность с центром в точке I вписана в четырехугольник $ABCD$. Лучи BA и CD пересекаются в точке P, а лучи AD и BC пересекаются в точке Q. Известно, что точка P лежит на окружности ω, описанной около треугольника AIC. Докажите, что точка Q тоже лежит на окружности ω.

А.Кузнецов

3. Паша выбрал 2017 (не обязательно различных) натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$

$\ldots, a_{2017}$ и играет сам с собой в следующую игру. Изначально у него есть неограниченный запас камней и 2017 больших пустых коробок. За один ход Паша добавляет в любую коробку (по своему выбору) a_1 камней, в любую из оставшихся коробок (по своему выбору) – a_2 камней, …, наконец, в оставшуюся коробку – a_{2017} камней. Пашина цель – добиться того, чтобы после некоторого хода во всех коробках стало поровну камней. Мог ли он выбрать числа так, чтобы цели можно было добиться за 43 хода, но нельзя – за меньшее ненулевое число ходов?

И.Богданов

4. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что задумал многочлен $P(x)$ степени 2017 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит k целых чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$ и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1)P(n_2)\ldots P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным?

Г.Жуков

5. Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по ненулевому числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причем 50 из них рациональные, а остальные 50 – иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около ее строки и ее столбца («таблица умножения»). Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами?

О.Подлипский

6. См. задачу М2454 «Задачника «Кванта».

7. См. задачу 7 для 9 класса.

8. Окружность ω описана около остроугольного треугольника ABC. На стороне AB выбрана точка D, а на стороне BC – точка E так, что $AC \parallel DE$. Точки P и Q на меньшей дуге AC окружности ω таковы, что $DP \parallel EQ$. Лучи QA и PC пересекают прямую DE в точках X и Y соответственно. Докажите, что $\angle XBY + \angle PBQ = 180°$.

А.Кузнецов

11 класс

1. В произведении семи натуральных чисел каждый сомножитель уменьшили на 3. Могло ли произведение при этом увеличиться ровно в 13 раз?

Н.Агаханов, И.Богданов

2. См. задачу 2 для 9 класса.

3. См. задачу 4 для 10 класса.

4. Равносторонний треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан вокруг окружности ω. На сторонах AC и AB выбраны точки P и Q соответственно так, что отрезок PQ проходит через центр треугольника ABC. Окружности Γ_b и Γ_c построены на отрезках BP и CQ как на диаметрах. Докажите, что окружности Γ_b и Γ_c пересекаются в двух точках, одна из которых лежит на Ω, а другая – на ω.

А.Акопян

5. Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причем 50 из них рациональные, а остальные 50 – иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около ее строки и ее столбца («таблица умножения»). Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами?

О.Подлипский

6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность Γ с центром в точке O. Его диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P, причем точка O лежит внутри треугольника BPC. На отрезке BO выбрана точка H так, что $\angle BHP = 90°$. Окружность ω, описанная около треугольника PHD, вторично пересекает отрезок PC в точке Q. Докажите, что $AP = CQ$.

А.Кузнецов

7. На плоскости проведено несколько прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что в областях, на которые прямые поделили плоскость, можно расставить положительные числа так, чтобы суммы чисел по обе стороны относительно любой из проведенных прямых были равны.

О.Орлов

8. Изначально на стол кладут 100 карточек, на каждой из которых записано по натуральному числу; при этом среди них ровно 28 карточек с нечетными числами. Затем каждую минуту проводится следующая процедура. Для каждых 12 карточек, лежащих на столе, вычисляется произведение записанных на них чисел, все эти произведения складываются и полученное число записывается на новую карточку, которая добавляется к лежащим на столе. Можно ли выбрать исходные 100 чисел так, что для любого натурального d на столе рано или поздно появится карточка с числом, делящимся на 2^d?

И.Богданов

Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, П.Кожевников, О.Подлипский

Региональный этап LI Всероссийской олимпиады школьников по физике

В региональном этапе олимпиады приняли участие 2124 девятиклассника, 2067 десятиклассников и 2095 одиннадцатиклассников.

Задачи олимпиады

9 класс

Задача 1. Два осколка

Небольшую петарду подвесили на нити на высоте H над горизонтальной поверхностью. В результате взрыва петарда распалась на два осколка, которые полетели в противоположные стороны с одинаковыми начальными скоростями v_0, направленными вдоль одной прямой. Какое наибольшее расстояние L может оказаться между осколками после их падения? С места падения осколки не смещаются.

В.Слободянин

Задача 2. Шарик на нитях

Небольшой шарик массой m движется в горизонтальной плоскости по окружности радиусом $R = 25{,}0$ см вокруг вертикальной оси. Шарик удерживают две нити (рис.1), составляющие с осью вращения углы $\alpha = 30°$ и $\beta = 60°$. Найдите значения угловой скорости ω, при которых силы натяжения нитей отличаются в 2 раза. Ускорение свободного падения $g = 9{,}81$ м/с^2.

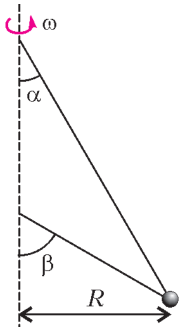


Рис. 1

С.Варламов

Задача 3. Два шарика на нитях

Легкий цилиндрический сосуд с жидкостью стоит на двух симметричных опорах (рис. 2). Над одной из них внутри сосуда привязан к дну полностью погруженный в жидкость поплавок объемом $V = 10$ см^3 и плотностью $\rho = 500$ кг/м^3. Над другой опорой висит привязанный снаружи шарик такого же объема V, но плотностью 3ρ. Плотность жидкости в сосуде $\rho_0 = 1200$ кг/м^3. Найдите модуль разности сил реакции опор. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

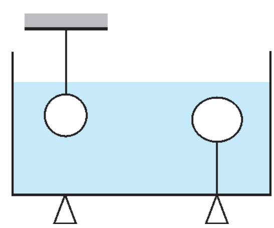


Рис. 2

М.Замятнин

Трудная задача

Теоретик

Задача 4. Архимед и температура

Плоская льдинка плавает в сосуде с водой, имеющей температуру $t_0 = 0$ °C. Минимальная масса груза, который необходимо положить на льдинку, чтобы она полностью погрузилась в воду, равна $m_1 = 100$ г. Если эту льдинку охладить до температуры t_1 и снова положить в тот же сосуд с водой, по-прежнему имеющей температуру t_0, то после установления теплового равновесия для полного погружения льдинки в воду на нее необходимо будет положить груз минимальной массы $m_2 = 110$ г. Определите температуру t_1.

Примечание. Удельная теплоемкость льда $c = 2100$ Дж/(кг · °C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 340$ кДж/кг.

С.Кармазин

Задача 5. Кольца Ауди

N одинаковых колец соединены так, что между всеми точками их пересечения обеспечен электрический контакт (рис.3; места контактов отмечены жирными точками). Центры всех колец лежат на одной прямой. Какое сопротивление R покажет омметр, подключенный к точкам A и B этой цепи, если при подключении к диаметрально противоположным точкам уединенного кольца он показывает сопротивление R_0? Считать $N > 3$.

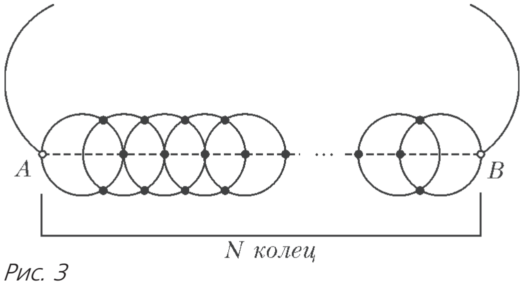


Рис. 3

С.Кармазин

10 класс

Задача 1. Стакан-поплавок

В цилиндрическом сосуде, площадь дна которого S_2, плавает тонкостенный цилиндрический стакан с площадью дна S_1 и высотой $h = 24$ см (рис.4). Стакан начинают медленно погружать в воду, измеряя зависимость приложенной силы F от перемещения x стакана вниз относительно дна сосуда. Оказалось, что силе $F_1 = 1{,}0$ Н соответствуют два значения x: $x_{1,1} = 1{,}5$ см и $x_{1,2} = 7{,}5$ см, а силе $F_2 = 2{,}0$ Н – значения $x_{2,1} = 3{,}0$ см и $x_{2,2} = 7{,}0$ см. Полагая, что плотность воды $\rho = 1{,}0$ г/см^3, а ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, вычислите:

а) массу m стакана;

б) площадь S_1 дна стакана;

в) площадь S_2 дна сосуда.

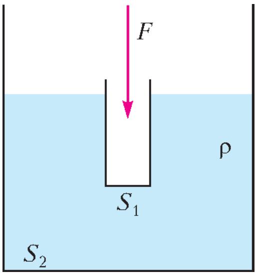


Рис. 4

Объемом стекла, из которого изготовлен стакан, можно пренебречь по сравнению с объемом воды, которой можно наполнить стакан.

А.Аполонский

Задача 2. Вязкий валик

Однородный цилиндр массой m и радиусом R касается двух параллельных длинных вертикальных пластин, движущихся с постоянными скоростями v_1 и v_2 вверх (рис.5). Между пластинами и поверхностью цилиндра существует вязкое трение, сила его пропорциональна относительной скорости соприкасающихся поверхностей: $\vec{F}_{тр} = -\gamma\vec{v}_{отн}$. Коэффициенты вязкого трения для первой и второй пластин равны γ_1 и γ_2 соответственно.

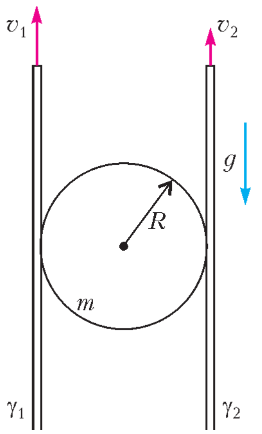


Рис. 5

1) Найдите установившуюся угловую скорость ω цилиндра, а также скорость v его центра.

2) При каком условии цилиндр будет двигаться вверх?

Н.Семенин

Задача 3. Два шарика на двух нитях

Легкий цилиндрический сосуд с жидкостью стоит на двух симметричных опорах (рис.6). Над одной из них внутри сосуда привязан к дну полностью погруженный в жидкость поплавок объемом $V = 10\ см^3$ и плотностью $\rho = 500\ кг/м^3$. Над другой опорой висит привязанный к верху сосуда шарик такого же объема V и плотностью 3ρ. Найдите модуль разности сил реакции опор.

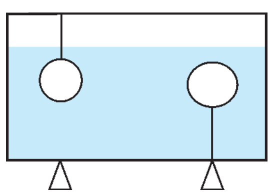


Рис. 6

М.Замятнин

Задача 4. Сосуд Мариотта

Сосуд Мариотта представляет собой герметически закрытый цилиндрический сосуд с площадью дна S, в верхнюю крышку которого вставлена открытая с обоих концов тонкая трубка (рис.7). Нижний конец трубки расположен на расстоянии H от верхней крышки сосуда. Около дна сосуда в его боковую стенку вставлена горизонтальная трубка с краном. В начальный момент времени высота уровня воды относительно нижнего конца вертикальной трубки равна x_0, а сама эта трубка полностью заполнена воздухом. Кран при этом закрыт. В момент времени $t = 0$ кран открывают, и вода начинает вытекать из сосуда, а пузырьки воздуха начинают проникать в сосуд через вертикальную трубку. Расход вытекающей жидкости равен ω (объем в единицу времени). Температура сосуда T, атмосферное давление p_0 и молярная масса M воздуха известны и остаются постоянными. Давлением насыщенных паров воды пренебречь. Считайте, что в ходе всего эксперимента уровень жидкости в сосуде не опустился ниже конца вертикальной трубки. Плотность воды равна ρ.

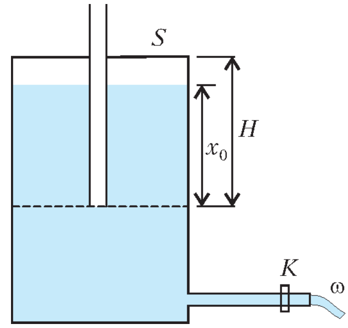


Рис. 7

1) Чему равна масса m_0 воздуха в сосуде над водой в начальный момент времени?

2) Чему равна скорость μ_0 изменения массы воздуха в сосуде в начальный момент времени?

3) С какой скоростью β изменяется μ (скорость изменения массы воздуха в сосуде) в процессе вытекания воды из сосуда?

С.Кармазин

Задача 5. Зацепился!

На электродвигатель постоянного тока установили датчик температуры. На верхнем этаже стройки поставили лебедку, приводимую в движение этим двигателем. В начале рабочего дня лебедка стала поднимать груз массой $M = 67{,}5$ кг. Не доехав всего один этаж до лебедки, груз зацепился. На каком этаже это произошло? Зависимость температуры двигателя от времени $T(t)$ изображена на рисунке 8. Известно,

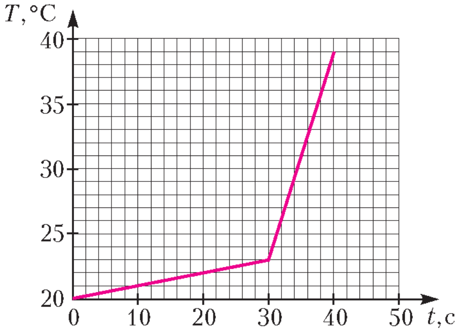


Рис. 8

что на двигатель всегда подается одно и то же напряжение; трением в подшипниках двигателя и лебедки пренебречь. Принять $g = 10$ м/с^2, высоту одного этажа h = = 3 м, теплоемкость электродвигателя $C = 4{,}5$ кДж/°С.

И.Юдин

11 класс

Задача 1. Сообщающиеся сосуды

В двух одинаковых сообщающихся вертикальных цилиндрических сосудах находится жидкость плотностью ρ (рис.9). Первоначальный уровень жидкости в сосудах l = 10 см от дна. Сосуды соединены через отверстия в их дне маленькой трубочкой пренебрежимо малого объема. В левом сосуде на высоте $2l$ от дна имеется легкий поршень, который может свободно перемещаться без трения о стенки. Под поршнем находится воздух при атмосферном давлении $p_0 = 2\rho gl$. С момента времени t = 0 в левый сосуд в пространство над поршнем

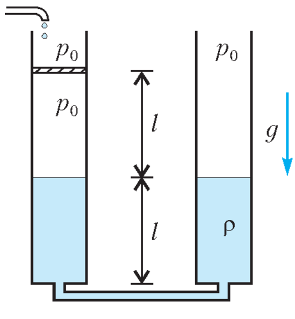


Рис. 9

начинает поступать жидкость плотностью ρ, причем скорость прироста ее уровня над поршнем составляет v = 0,2 мм/с.

1) С какой скоростью $v_п$ движется поверхность жидкости в правом сосуде в начале процесса?

2) С какой скоростью $v_л$ и в каком направлении (вверх или вниз) движется поверхность жидкости над поршнем в начале процесса?

3) На какой высоте h от дна сосуда будет находиться поверхность жидкости над поршнем: а) через 600 с; б) через 1100 с?

Температуру в сосудах можно считать постоянной. Жидкость из сосудов не выливается.

А.Аполонский

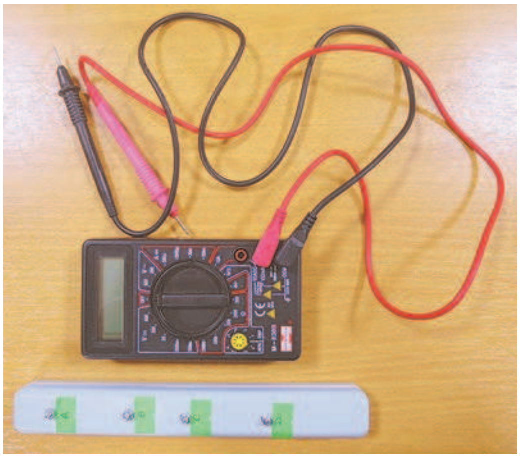
Задача 2. Стеклоподъемники

При включении электродвигателя стеклоподъемника одной двери автомобиля стекло поднимается из нижнего в верхнее положение за время t_1. Если включить одновременно два стеклоподъемника, то стекла поднимутся за время t_2 ($t_2 > t_1$).

1) За какое время t_3 поднимутся три стекла автомобиля при одновременной работе трех стеклоподъемников?

2) За какое время t_4 поднимутся все четыре стекла автомобиля при одновременной работе всех четырех стеклоподъемников?

Примечание. Считайте, что сила, необходимая для подъема стекла, не зависит от скорости подъема, а сила тяги мотора стек-



«Черный ящик»

лоподъемника пропорциональна силе тока, идущего через него.

С.Кармазин

Задача 3. Зарядка-разрядка

В электрической цепи (рис.10) все элементы можно считать идеальными. Конденсатор емкостью C не заряжен. ЭДС батареи

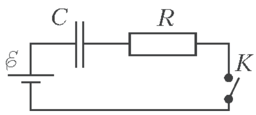


Рис. 10

$\mathscr{E}$ задана. Ключ K замыкают, а затем размыкают в тот момент, когда скорость изменения энергии, запасенной в конденсаторе, составляет 75% от максимальной. Найдите количество теплоты, выделившееся в цепи при замкнутом ключе.

А.Шеронов

Задача 4. Долго ли умеючи?

В глубинах Вселенной вдали от всех тяготеющих масс находится тонкий однородный стержень длиной $L = 10$ м и массой $M = 1{,}0$ кг. По нему без трения может скользить бусинка массой $m = 0{,}1$ кг. В начальный момент бусинка слегка смещена относительно центра стержня и система неподвижна. Через какое время τ бусинка впервые достигнет середины стержня? Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$.

В.Плис

Задача 5. Толстая линза

Вся поверхность плоского экрана, представляющего собой матовое стекло, освещается параллельным пучком лучей, направленным перпендикулярно экрану. Толстую линзу в виде половинки стеклянного шара расположили перед экраном так, что плоская поверхность линзы параллельна плоскости экрана (рис.11). Показатель преломления стекла линзы $n = 2{,}0$. Диаметр линзы меньше размеров экрана.

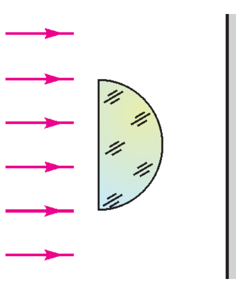


Рис. 11

1) Определите расстояние L_1 от плоской поверхности линзы до экрана, если на экране наблюдается картина, изображенная на рисунке 12. Здесь пунктирные линии касаются внешней границы области с переменной освещенностью.

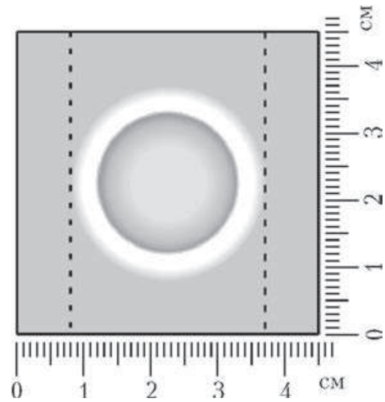


Рис. 12

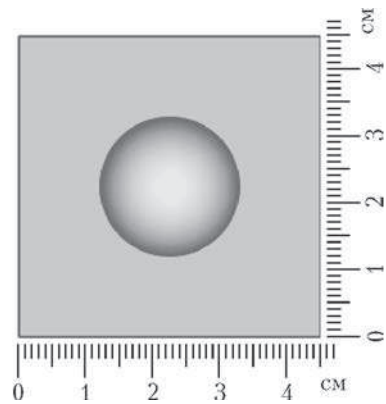


Рис. 13

2) Определите расстояние L_2 от плоской поверхности линзы до экрана, если на экране наблюдается картина, представленная на рисунке 13.

С.Варламов, М.Карманов

Публикацию подготовил В.Слободянин

(Начало см. на с. 46)

Решая совместно эти уравнения, находим

$$U_3 \approx 3{,}6\ \text{В}.$$

Упражнения

1. Вольтметр имеет четыре клеммы, рассчитанные на измерение напряжения до 3, 15 и 75 В (рис.8). Сопротивление вольтметра 300 Ом.

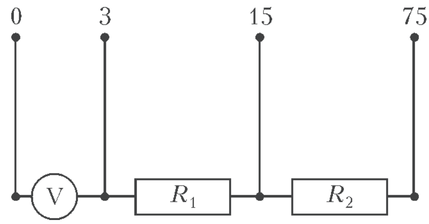


Рис. 8

Определите сопротивления добавочных резисторов, которые нужно подключить к вольтметру, чтобы расширить пределы измерения до 15 В и 75 В. Найдите ток полного отклонения стрелки вольтметра.

2. Многопредельный амперметр представляет собой миллиамперметр с набором сменных шунтов. Им измеряют ток в некоторой цепи. На пределе 1 мА прибор показал 1 мА; когда его переключили на предел 3 мА, он показал 1,5 мА. Тем не менее, прибор исправный – он точно показывает величину протекающего через него тока. Каков истинный ток в цепи (без амперметра)?

3. Имеются два сопротивления. Если амперметр зашунтировать одним из них, то цена его деления увеличится в n_1 раз, если же зашунтировать другим, то цена деления увеличится в n_2 раз. Как изменится цена деления амперметра, если в качестве шунта использовать оба сопротивления, включив их между собой : а) последовательно; б) параллельно?

4. Имеются два сопротивления. Если к вольтметру подключить одно из них, то цена его деления увеличится в n раз, если включить второе, то она увеличится в m раз. Как изменится цена деления вольтметра, если эти сопротивления использовать одновременно, включив их между собой : а) последовательно; б) параллельно?

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №2)

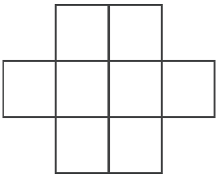


Рис. 1

1. Одна из подходящих фигур изображена на рисунке 1.

2. Нет.

Рассмотрим расстояния между соседними фишками. Сначала это 1, 3, 6, 4, 1. Заметим, что операции не меняют этот набор чисел, а только переставляют в нем числа местами. Предположим, что после нескольких операций фишка оказалась в центре. Тогда 10 клеток, которые слева от нее, это интервалы между соседними фишками, а также фишки, которые находятся слева от этих интервалов. Таким образом, число 10 оказалось представлено в виде суммы чисел 2, 4, 7, 5 и 2. Нетрудно проверить, что это невозможно. Полученное противоречие показывает, что никакую фишку нельзя поместить в центр.

3. 6.

Кондукторы разбивают весь круг на интервалы, состоящие из водителей. Докажем, что всегда выполняется следующее свойство (инвариант): в каждом таком интервале количество водителей дает остаток 2 при делении на 3. Изначально это верно – везде по 20 водителей. Если уходят 3 водителя, то количество водителей в каком-то интервале уменьшается на 3. Если уходят кондуктор и 2 водителя, то два интервала сливаются в один и суммарное количество водителей в них уменьшается на 2. Таким образом, свойство всегда выполняется, значит, оно выполняется и в конце. Осталось 3 кондуктора, значит, и 3 интервала, в каждом из которых не менее 2 водителей. Следовательно, водителей не меньше 6. Пример, когда их останется ровно 6, построить легко: пусть сразу уйдут все кондукторы, кроме троих, а потом каждый интервал будем уменьшать до 2 водителей.

4. 100.

Рассмотрим все вершины клеток, не примыкающие к границе. Их $10 \cdot 10 = 100$. В каждую из них может входить не более 2 единичных отрезков, входящих в границы фигурок. При этом каждый такой отрезок посчитан дважды, так как у него два конца. Значит, суммарный периметр фигурок не более $100 \cdot 2/2 = 100$.

Пример: пронумеруем все столбцы и строки подряд от 1 до 11. Пусть Максим нарисует 25 квадратиков 1×1, каждый из которых стоит на пересечении четной строки и четного столбца.

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

(см. «Квант» №1)

11. 39.

Шестиугольник состоит из 96 треугольничков, значит, площадь каждого из них 1. Вписанный треугольник состоит из треугольника площадью 9 и из трех треугольников, каждый из которых является половиной параллелограмма площадью 20 (рис. 2). Таким образом, площадь треугольника равна $9+(20/2)\cdot3=39$.

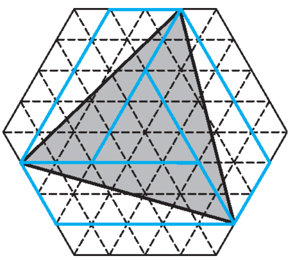


Рис. 2

12. а) Да.

Один из возможных примеров: 8, 16, 32.

б) Нет.

Пусть $a<b<c<d$ – данные натуральные числа, взятые в порядке возрастания. Тогда a^3 должно делиться на bcd, но $bcd>a^3$, значит, делимость невозможна.

13. Нет.

Предположим, что так могло оказаться при некотором заполнении куба черными и белыми кубиками. Посчитаем в нем количество черных кубиков двумя способами.

1) Во всех 300 рядах в совокупности $8\cdot200+5\cdot100=2100$ черных кубиков, при этом каждый кубик находится ровно в 3 рядах, поэтому всего кубиков $2100/3=700$.

2) Рассмотрим 100 параллельных рядов. Каждый кубик находится ровно в одном из них. Остаток при делении на 3 количества черных кубиков в каждом ряду равен 2, значит, остаток при делении на 3 общего количества кубиков такой же, как у числа $2\cdot100=200$, т.е. 2. Итак, кубиков черного цвета 700, но 700 при делении на 3 не дает остаток 2. Противоречие. Значит, так оказаться не могло.

14. $120°$.

Отразим точку C относительно прямых AB и AD – получим точки X и Y соответственно (рис.3). Из свойств симметрии следует, что $AX=AC=AY$, $\angle BAC=\angle BAX$, $\angle DAC=\angle DAY$. Значит, угол XAY в два раза больше угла BAD, т.е. $\angle XAY=60°$ и треугольник XAY равносторонний. Тогда его сторона XY равна периметру ΔBCD. Также из свойств симметрии следует, что $CB=XB$, $DC=DY$. Значит, $XY=CB+BD+DC=$ $=XB+BD+DY$. Следовательно, точки B и D лежат на отрезке XY. Тогда

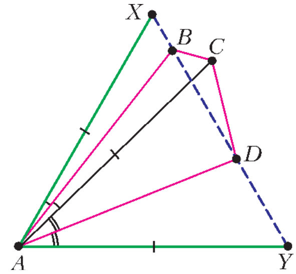


Рис. 3

$$\angle ACB=\angle AXB=60°,$$
$$\angle ACD=\angle AYD=60°,$$
$$\angle BCD=\angle ACB+\angle ACD=120°.$$

15. Решение см. в статье «Переключения рядов» в этом номере журнала.

ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ РЯДОВ

1. Нет, поскольку четность количества правильно стоящих стаканов не меняется.

2. Нет, аналогично упражнению 1.

4. а) Нет, четность количества плюсов не может поменяться. б) Да, можно переключить все строки по одному разу. в) Да, можно переключить столбцы и строки с четными номерами по одному разу.

6. 1, 3, 5 или 7.

7. а) Минус. б) Сверху плюс, снизу минус. в) Нечетное. г) Минус. Выделим 16 клеток – на которых стоят известные знаки и знак вопроса. Каждая операция меняет два знака на выделенных клетках. Поэтому на выделенных клетках всегда четное количество плюсов. Среди известных знаков 8 плюсов, значит, неизвестный знак – минус.

8. Нет.

С каждым ходом количество минусов увеличивается не более чем на n. Поэтому если сначала минусов было 0, а должно стать n^2, то потребуется не менее n ходов.

9. Рассмотрите два случая: когда левый верхний знак плюс и когда минус.

10. Рассмотрим прямоугольник, угловыми клетками которого являются данные 4 клетки. Рассмотрим всевозможные квадраты 2×2, которые можно выделить внутри него. В каждом из них четное количество плюсов, значит, в совокупности в них тоже четное число плюсов, но в этой совокупности угловые клетки учтены по одному разу, а все остальные – четное количество раз.

11. Воспользуемся критерием реализуемости. Каждая из строк либо такая же, как первая, либо все знаки в ней противоположны первой.
12. $xy+(8-x)(8-y)$.
13. Нет.
Воспользуйтесь предыдущим упражнением.
15. В этой компоненте находятся все реализуемые заполнения, их 2^{m+n-1}.
16. В каждой из $2^{(m-1)(n-1)}$ компонент по 2^{m+n-1} заполнений.
17. См. решение задачи М2289 «Задачника «Кванта».
18. Пусть на черных клетках стоят плюсы, а на белых минусы. Такое заполнение таблицы реализуемо, причем его можно получить переключениями рядов из заполнения одними плюсами ровно за 8 операций. Рассмотрим эту последовательность операций. С каждым переключением ряда меняется знак ровно в одной из клеток, на которых стоят ладьи. Значит, за 8 переключений знаки поменяются 8 раз и среди знаков в клетках, на которых стоят ладьи, будет четное количество плюсов. Таким образом, четное количество ладей будет стоять на черных клетках.
19. Да, можно последовательно восстановить знаки, так как в каждом квадрате 2×2 четное число плюсов.
20. Нет.
Например, если все известные знаки расположены в 7 строках.

ШУНТЫ И ДОБАВОЧНЫЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ

1. $R_{д1}=1200$ Ом, $R_{д2}=7500$ Ом; $I_в=10^{-2}$ А.
2. I = 2 мА.
3. а) $n_{посл}=\dfrac{n_1n_2-1}{n_1+n_2-2}$; б) $n_{пар}=n_1+n_2-1$.
4. а) $n_{посл}=n+m-1$; $n_{пар}=\dfrac{nm-1}{n+m-2}$.

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП XLIII ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

1. Да, могло.
В качестве примера подходит произведение $1\cdot 1\cdot 676$. После указанной операции получается $(-2)\cdot(-2)\cdot 673=2692=676+2016$.
2. За 2 хода.
Покажем сначала, как Пете выиграть за 2 хода. Первым ходом он выставит 8 ладей по диагонали доски. Если он еще не выиграл, то на диагонали есть нечетное число задуманных Васей клеток. В частности, на ней есть как клетка A, задуманная Васей, так и клетка B, не задуманная им.
Пусть на втором ходу Петя поставит ладьи на 6 диагональных клеток, кроме A и B, а также на клетки C и D, лежащие в тех же строках, что A и B соответственно, и в тех же столбцах, что B и A соответственно. Каждая новая ладья стоит или в одной строке, или в одном столбце с A, т.е. их клетки Вася задумать не мог. Значит, в новой конфигурации ладей количество клеток, задуманных Васей, уменьшилось ровно на одну, т.е. стало четным, и Петя выиграл.
Осталось показать, что Петя не может гарантированно выиграть за один ход. Пусть у него это получилось. Переставив столбцы доски, можно считать, что он сделал первый ход так, как показано на рисунке 4; тогда он не выиграет, если Васины клетки – отмеченные серым на том же рисунке.

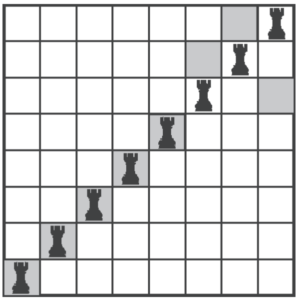


Рис. 4

5. 1250 сумм.
Сначала покажем, что иррациональных чисел в таблице не меньше 1250. Пусть вдоль левой стороны таблицы выписано x иррациональных и $50-x$ рациональных чисел. Тогда вдоль верхней стороны выписаны $50-x$ иррациональных и x рациональных чисел. Поскольку сумма рационального и иррационального чисел всегда иррациональна, в таблице стоят хотя бы $x^2+(50-x)^2$ иррациональных чисел. При этом

$$x^2+(50-x)^2=2x^2-100x+50^2=$$
$$=2(x-25)^2+2\cdot 25^2\ge 2\cdot 25^2=1250,$$

что и требовалось. Отсюда следует, что в таблице не более 2500 – 1250 = 1250 рациональных чисел.
Ровно 1250 рациональных чисел в таблице может быть, например, в таком случае. Вдоль левой стороны стоят числа 1, 2, …, 24, 25, $1+\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$, …, $25+\sqrt{2}$, а вдоль верхней стороны – числа 26, 27, …, 49, 50, $26-\sqrt{2}$, $27-\sqrt{2}$, …, $50-\sqrt{2}$. Тогда иррациональными будут только $2\cdot 25^2=1250$ сумм рационального и иррационального чисел.
6. Поскольку $\angle AHK=\angle AMK=90°$, точки A, H, M и K лежат на окружности ω с диаметром AK (рис.5). По условию, хорда HM этой ок-

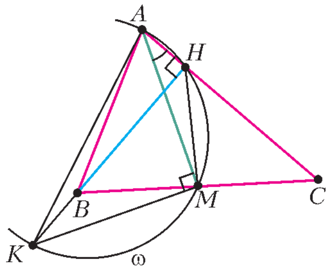


Рис. 5

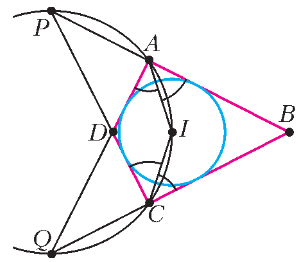


Рис. 6

ружности стягивает угол $\angle MAH = 30°$, поэтому $HM = 2R\sin 30° = AK/2$. С другой стороны, HM – медиана в прямоугольном треугольнике BHC, поэтому $BC = 2HM = AK$, что и требовалось доказать.

8. Если в некоторый момент среди чисел на карточках есть ровно k нечетных, то среди произведений троек чисел ровно C_k^3 нечетных; поэтому число на очередной добавляемой карточке будет нечетным ровно тогда, когда C_k^3 нечетно (и тогда k в эту минуту увеличится на 1). Заметим, что число $C_{43}^3 = \frac{43\cdot 42\cdot 41}{6}$ нечетно, а число $C_{44}^3 = \frac{44}{41}\cdot C_{43}^3$ четно. Значит, в первую минуту добавится нечетное число, а дальше будут добавляться только четные. Итак, после первой минуты среди чисел на карточках всегда будет ровно 44 нечетных.

Рассмотрим числа на карточках после n минут. Пусть T_n – сумма всех произведений троек этих чисел, а D_n – сумма всех произведений пар этих чисел. Число T_{n+1} отличается от T_n прибавлением всех произведений троек чисел, среди которых есть только что добавленное, т.е. прибавлением D_nT_n; итак, $T_{n+1} = T_n + D_nT_n = T_n(1+D_n)$. Заметим при этом, что $D_n \equiv C_{44}^2 = 22\cdot 43 \equiv 0 \pmod 2$ при $n \ge 1$. Значит, при $n \ge 1$ число $1 + D_n$ нечетно и степень двойки, на которую делится T_{n+1}, равна степени двойки, на которую делится T_n.

Итак, после первой минуты степень двойки, на которую делится добавляемое число T_n, всегда равна степени двойки, на которую делится T_1. Значит, если бы после второй минуты на карточках не было числа, делящегося на 2^{10000}, то и впоследствии такого числа бы не появилось. Отсюда и следует требуемое.

10 класс

1. Да, могло.

В качестве примера подходит произведение $1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 48$. После указанной операции получается

$$(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot 45 = 720 = 15\cdot 48 .$$

2. Так как четырехугольник $AICP$ вписанный, то $\angle PCI = 180° - \angle PAI = \angle BAI$; иначе говоря, $\angle DCI = \angle BAI$ (рис.6). Центр I вписанной окружности четырехугольника лежит на биссектрисах его углов, поэтому $\angle DCI = \angle BCI$ и $\angle DAI = \angle BAI$. Отсюда следует, что $\angle DAI = \angle BCI$, а значит,

$$\angle QAI = \angle BCI = 180° - \angle QCI .$$

Из полученного равенства вытекает, что четырехугольник $AICQ$ вписанный. Тем самым, точка Q лежит на окружности ω (проходящей через точки A, I и C).

3. Да, мог.

Заметим, что $2017 = 43\cdot 46 + 39$. Приведем пример Пашиных чисел, при которых требуемое выполняется. Пусть среди его чисел будут 39 двоек, 46 чисел, равных 44, а остальные – единицы.

Чтобы добиться требуемого за 43 хода, Паша выбирает 39 коробок, в которые он всегда кладет по 2 камня – через 43 хода в них окажется по $43\cdot 2 = 86$ камней. Остальные коробки он разбивает на 43 группы по 46 коробок; на i-м ходу он положит по 44 камня во все коробки i-й группы и по одному камню – в коробки остальных групп. Тогда через 43 хода в каждой коробке каждой группы будет по $44 + 42\cdot 1 = 86$ камней, т.е. во всех коробках будет поровну камней.

Осталось доказать, что за меньшее число ходов требуемое невыполнимо. Пусть Паша сделал $k < 43$ ходов. Тогда в какую-то коробку A попало 44 камня на одном ходу, и в ней будет не меньше чем $44 + (k-1)\cdot 1 = 43 + k$ камней. С другой стороны, поскольку $46k < 2017$, в какую-то коробку B ни на одном из ходов не попадет 44 камня, т.е. в ней будет не больше $2k$ камней. Поскольку $k < 43$, имеем $2k < k + 43$, а значит, в коробке B меньше камней, чем в A. Таким образом, Паша еще не добился требуемого.

Замечание. Приведенный пример – не единственный. Так, подойдет также набор чисел, состоящий из 42 единиц, 2017 – 43 = 1974 чисел, равных $a > 1$, и одного числа, равного $43a - 42$. Существуют даже примеры с попарно различными числами; однако проверка того, что они подходят, несколько труднее, чем для примеров, приведенных выше.

4. При $k = 2017$.

Сначала докажем, что $k > 2016$. Пусть учитель использовал некоторое $k \le 2016$, задумав многочлен $P(x)$. Рассмотрим многочлен

$$Q(x) = P(x) + (x - n_1)(x - n_2)\ldots(x - n_k).$$

Заметим, что степень многочлена $Q(x)$ также равна 2017, а его старший коэффициент также равен 1. При этом

$$P(n_1)P(n_2)\ldots P(n_k) = Q(n_1)Q(n_2)\ldots Q(n_k),$$

но $P(x) \ne Q(x)$. Значит, дети могли бы найти многочлен $Q(x)$ вместо $P(x)$, т.е. учитель не добился требуемого.

Осталось доказать, что при $k = 2017$ учитель сможет придумать требуемую задачу.

Лемма. *Пусть $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, и пусть a и b – различные целые числа. Тогда $P(a) - P(b)$ делится на $a - b$.*

Доказательство. В разности $P(a) - P(b)$ сгруппируем слагаемые по степеням: если

$$P(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0,$$

то

$$P(a) - P(b) = p_n\left(a^n - b^n\right) + \\ + p_{n-1}\left(a^{n-1} - b^{n-1}\right) + \ldots + p_1(a - b),$$

где каждое слагаемое делится на $a - b$.

Пусть $k = 2017$. Положим $n_i = 4i$ при $i = 1, 2, \ldots, k$; пусть учитель сообщит детям, что $P(n_1)P(n_2)\ldots P(n_k) = 1$. Тогда многочлен $P(x) = (x - n_1)(x - n_2)\ldots(x - n_k) + 1$ под условие подходит. Предположим, что еще какой-то многочлен $Q(x)$ также подходит под условие. Тогда так как $Q(n_1)Q(n_2)\ldots Q(n_k) = 1$ и коэффициенты многочлена $Q(x)$ – целые числа, то $Q(n_i) = \pm 1$ при любом $i = 1, 2, \ldots, k$.

Если найдутся i и j такие, что $Q(n_i) = 1$, а $Q(n_j) = -1$, то разность $Q(n_i) - Q(n_j) = 2$ не делится на $n_i - n_j$, что противоречит лемме. Поэтому все значения $Q(n_i)$ равны между собой и все равны либо 1, либо –1. Однако все значения не могут быть равны –1, так как в произведении $Q(n_1)Q(n_2)\ldots Q(n_k)$ множителей нечетное количество и произведение было бы равно –1. Значит, $Q(n_i) = 1$ при любом $i = 1, 2, \ldots, k$. Тогда разность $P(x) - Q(x)$ – многочлен степени менее k, имеющий хотя бы k корней, т.е. этот многочлен тождественно равен 0, и $P(x) = Q(x)$. Противоречие.

5. 1250 произведений.

Сначала покажем, что иррациональных чисел в таблице не меньше 1250. Пусть вдоль левой стороны таблицы выписано x иррациональных и $50 - x$ рациональных чисел. Тогда вдоль верхней стороны выписаны $50 - x$ иррациональных и x рациональных чисел. Поскольку произведение ненулевого рационального и иррационального чисел всегда иррационально, в таблице стоит хотя бы $x^2 + (50 - x)^2$ иррациональных чисел. При этом

$$x^2 + (50 - x)^2 = 2x^2 - 100x + 50^2 = \\ = 2(x - 25)^2 + 2\cdot 25^2 \ge 2\cdot 25^2 = 1250,$$

что и требовалось. Отсюда следует, что в таблице не более 2500 – 1250 = 1250 рациональных чисел.

Ровно 1250 рациональных чисел в таблице может быть, например, в таком случае. Вдоль левой стороны стоят числа 1, 2, …, 24, 25, $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, …, $25\sqrt{2}$, а вдоль верхней стороны – числа 26, 27, …, 49, 50, $26\sqrt{2}$, $27\sqrt{2}$, … …, $50\sqrt{2}$. Тогда иррациональными будут только $2\cdot 25^2 = 1250$ произведений рационального и иррационального чисел.

8. Так как четырехугольник $ABCQ$ вписан и $AC \parallel DE$, имеем

$$\angle BEX = \angle BCA = \angle BQA = \angle BQX$$

(рис.7). Следовательно, четырехугольник $XBEQ$ вписан, откуда $\angle XBQ = \angle XEQ = = \angle DEQ$. Аналогично, четырехугольник $YBDP$

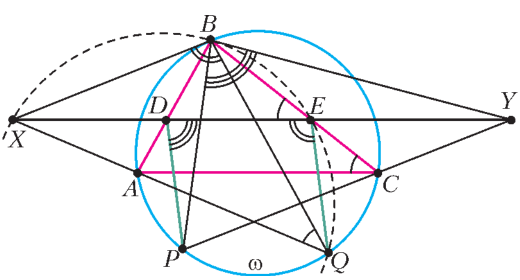


Рис. 7

вписан, и $\angle PBY = \angle PDE$. По условию, $PD \parallel EQ$. Значит,

$$180° = \angle PDE + \angle DEQ = \angle XBQ + \angle PBY.$$

Таким образом,

$$\angle XBY + \angle PBQ = \angle XPB + 2\angle PBQ + \angle QBY = \\ = \angle XBQ + \angle PBY = 180°.$$

11 класс

1. Да, могло.

В качестве примера подходит произведение

$1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 2\cdot 16=32$. После указанной операции получается

$$(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot 13=13\cdot 32 .$$

4. Пусть O – центр треугольника ABC. Обозначим через B_2 и C_2 точки касания ω с AC и AB соответственно, а через B_1 и C_1 – точки Ω, диаметрально противоположные точкам B и C соответственно (рис.8). Тогда точки B_1 и C_1

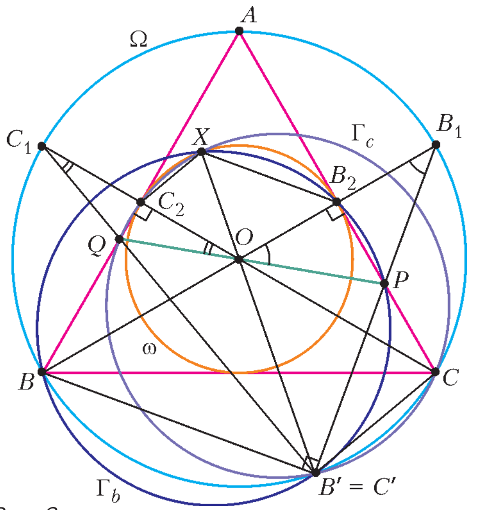


Рис. 8

симметричны O относительно сторон AC и AB соответственно, откуда $\angle OB_1P=\angle B_1OP$ и $\angle OC_1Q=\angle C_1OQ$.

Пусть лучи B_1P и C_1Q пересекают Ω в точках B' и C' соответственно; тогда $\angle PB'B=\angle B_1B'B=90^\circ$, т.е. B' лежит на Γ_b . Аналогично, C' лежит на Γ_c . С другой стороны,

$$\overset{\smile}{BB'}+\overset{\smile}{CC'}=2\left(\angle BB_1B'+\angle CC_1C'\right)=$$
$$=2\left(\angle B_1OP+\angle C_1OQ\right)=$$
$$=2\left(180^\circ-\angle B_1OC_1\right)=120^\circ-\overset{\smile}{BC} ;$$

это означает, что точки B' и C' совпадают.

Итак, Γ_b и Γ_c пересекаются в точке B' , лежащей на Ω .

Поскольку $\angle BB_2P=\angle CC_2Q=90^\circ$, точки B_2 и C_2 лежат на Γ_b и Γ_c соответственно. Пусть продолжение отрезка $B'O$ за точку O пересекает ω в точке X. Тогда $OX=OB_2=OC_2$ и $OB'=OB=OC$, откуда $OB\cdot OB_2=OB'\cdot OX=OC\cdot OC_2$. Первое из этих равенств означает, что точки B, B_2 , B' и X лежат на одной окружности, т.е. X лежит на окружности Γ_b . Аналогично, из второго равенства следует, что X лежит на Γ_c . Значит, X и является второй точкой пересечения Γ_b и Γ_c , лежащей на ω .

5. 1275 произведений.

Сначала покажем, что иррациональных чисел в таблице не меньше 1225. Предположим, что среди рациональных чисел есть ноль и он выписан у верхней стороны таблицы.

Пусть вдоль левой стороны таблицы выписано x иррациональных и $50-x$ рациональных чисел. Тогда вдоль верхней стороны выписаны $50-x$ иррациональных и x рациональных чисел (среди которых есть ноль). Заметим, что произведение ненулевого рационального и иррационального чисел всегда иррационально.

Тогда в таблице есть как минимум $x(x-1)+(50-x)^2$ иррациональных чисел. Заметим, что

$$f(x)=x(x-1)+(50-x)^2=2x^2-101x+50^2 .$$

Вершина параболы $f(x)$ находится в точке $101/4=25{,}25$, поэтому минимальное значение $f(x)$ в целой точке достигается при $x=25$ и оно равно $25\cdot 24+25^2=1225$.

Если же ноль заменить ненулевым рациональным числом, то количество иррациональных чисел может только увеличиться. Поэтому в таблице в любом случае не менее 1225 иррациональных чисел. Значит, в таблице не более $2500-1225=1275$ рациональных чисел.

Ровно 1275 рациональных чисел в таблице может быть, например, в таком случае. Вдоль левой стороны стоят числа 1, 2, …, 24, 25, $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, …, $25\sqrt{2}$, а вдоль верхней стороны – числа 0, 26, 27, …, 49, $26\sqrt{2}$, $27\sqrt{2}$, …, $50\sqrt{2}$.

Тогда иррациональными будут только $25\cdot 24+25^2=1225$ произведений ненулевого рационального и иррационального чисел.

6. Проведем в окружности Γ диаметр BT (рис.9). Заметим, что $\angle PDT=\angle BDT=90^\circ$. Значит, $\angle PHT+\angle PDT=180^\circ$, т.е. точка T лежит на окружности ω. Поэтому $\angle PQT=$

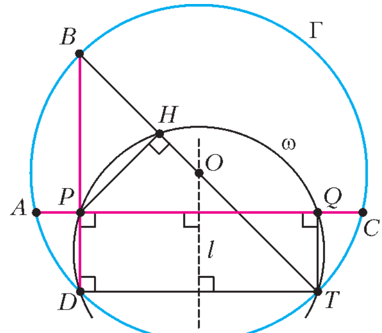


Рис. 9

$= \angle PHT = 90°$, и четырехугольник $PQTD$ – прямоугольник.

Рассмотрим общий серединный перпендикуляр l к отрезкам DT и PQ. Он проходит через O, а значит, является и серединным перпендикуляром к AC. Следовательно, отрезки AP и CQ симметричны относительно l и потому равны.

7. Обозначим проведенные прямые $l_1, l_2, \ldots, l_n$, упорядочив их направления по часовой стрелке (рис.10). Формально это означает следующее.

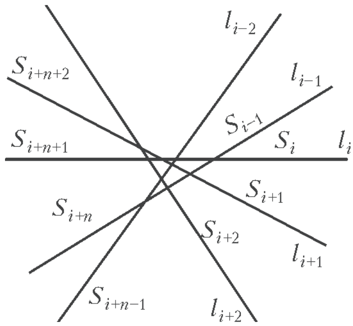


Рис. 10

Рассмотрим произвольную точку плоскости O. Проведем через нее прямые, параллельные нашим, занумеруем их по часовой стрелке, а потом присвоим нашим прямым те же номера, которые получили соответствующие им новые прямые.

Среди областей, на которые наши прямые разрезали плоскость, есть $2n$ бесконечных *кусков*; обозначим их по часовой стрелке $S_1, S_2, \ldots, S_{2n}$ так, что прямая l_i разделяет куски S_i и S_{i+1}, а также куски S_{i+n} и S_{i+n+1}. (Здесь и далее мы считаем, что $S_{2n+1} = S_1$.)

Для начала во все области (конечные и бесконечные) поставим по 1. Для каждой прямой l_i обозначим через Σ_i разность сумм чисел справа и слева от l_i (мы считаем, что куски S_i и S_{i+n+1} лежат слева от l_i). Если $\Sigma_i > 0$, то прибавим по $\frac{1}{2}\Sigma_i$ к числам, стоящим в S_i и S_{i+n+1}. При этом все числа Σ_j при $j \neq 1$ не изменились, поскольку области S_i и S_{i+n+1} лежат по разные стороны относительно любой прямой, кроме l_i. Число же Σ_i стало равно нулю. Аналогично, если $\Sigma_i < 0$, то прибавим по $\frac{1}{2}|\Sigma_i|$ к числам, стоящим в S_{i+1} и S_{i+n}; опять же, Σ_i станет равна 0, а остальные Σ_j не изменятся.

Такими операциями мы последовательно сделаем каждое Σ_i равным нулю, не меняя остальных.

8. Нет, нельзя.

Если в некоторый момент среди чисел на карточках есть ровно k нечетных, то среди произведений чисел по 12 ровно C_k^{12} нечетных; поэтому число на очередной добавляемой карточке будет нечетным ровно тогда, когда C_k^{12} нечетно (и тогда k в эту минуту увеличится на 1). Нетрудно заметить, что число C_{28}^{12} нечетно (это следует из того, что степени двойки, входящие в $28 \cdot 27 \cdot \ldots \cdot 17$ и $12 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 1$, равны). Далее, поскольку

$$C_{28+t}^{12} = \frac{(28+1)(28+2)\ldots(28+t)}{(16+1)(16+2)\ldots(16+t)} \cdot C_{28}^{12},$$

получаем, что наименьшее t, при котором C_{28+t}^{12} четно, равно 4. Итак, количество нечетных чисел на карточках будет расти, пока не достигнет 32 (на 4-й минуте), а после этого на карточках всегда будет ровно 32 нечетных числа.

Рассмотрим числа на карточках после $n \geq 4$ минут. Пусть T_n – сумма всех произведений 12 из этих чисел, а E_n – сумма всех произведений 11 из этих чисел. Число T_{n+1} отличается от T_n прибавлением всех произведений по 12 чисел, среди которых есть только что добавленное, т.е. прибавлением $T_n E_n$; итак,

$$T_{n+1} = T_n + E_n T_n = T_n(1 + E_n).$$

Заметим при этом, что $E_n \equiv C_{32}^{11} (\mathrm{mod}\, 2)$ при $n \geq 4$, а число $C_{32}^{11} = \frac{12}{21} \cdot C_{32}^{12}$ четно. Значит, при $n \geq 4$ число $1 + E_n$ нечетно и степень двойки, на которую делится T_{n+1}, равна степени двойки, на которую делится T_n.

Выберем теперь d так, чтобы после пятой минуты ни одно из чисел на карточках не делилось на 2^d; в частности, только что добавленное число T_4 также не будет делиться на 2^d. Значит, и все числа $T_5, T_6, \ldots$ не будут делиться на 2^d, а это в точности числа, написанные на карточках, добавляемых после пятой минуты. Итак, на карточках никогда не появится число, делящееся на 2^d.

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП LI ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

9 класс

1. Если $v_0^2 > 2gH$, то $L = \frac{v_0^2}{g} + 2H$; если $v_0^2 < 2gH$, то $L = 2v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$; если $v_0^2 = 2gH$, то $L = 4H$ (осколки полетели горизонтально).

2. Если сильнее натянута верхняя нить, то

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}\frac{2\sin\alpha + \sin\beta}{2\cos\alpha + \cos\beta}} \approx 0{,}914\sqrt{\frac{g}{R}} \approx 5{,}7\ \text{с}^{-1};$$

если сильнее натянута нижняя нить, то

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}\frac{\sin\alpha + 2\sin\beta}{\cos\alpha + 2\cos\beta}} \approx 1{,}09\sqrt{\frac{g}{R}} \approx 6{,}8\ \text{с}^{-1}.$$

3. $\Delta N = (\rho_0 - \rho)Vg = 70$ мН.

4. $t_1 = -\dfrac{\lambda(m_2 - m_1)}{cm_1} = -16{,}2\ °\text{C}$.

5. $R = \dfrac{2(N+4)}{9}R_0$ (в силу симметрии схемы относительно оси, проходящей через точки A и B, в цепи не будет токов, идущих из верхней половины цепи в нижнюю и наоборот).

10 класс

1. а) $m = 0{,}8$ кг; б) $S_1 = 50\ \text{см}^2$; в) $S_2 = 200\ \text{см}^2$ (до того как верхний край стакана сравняется с уровнем воды в сосуде, сила F увеличивается пропорционально x, а затем уменьшается до нуля тоже пропорционально x).

2. 1) $\omega = \dfrac{mg}{4R}\left(\dfrac{1}{\gamma_2} - \dfrac{1}{\gamma_1}\right) + \dfrac{v_1 - v_2}{2R}$,

$v = \dfrac{mg}{4}\left(\dfrac{1}{\gamma_1} + \dfrac{1}{\gamma_2}\right) - \dfrac{v_1 + v_2}{2}$;

2) $v_1 + v_2 > \dfrac{mg}{2}\left(\dfrac{1}{\gamma_1} + \dfrac{1}{\gamma_2}\right)$.

3. $\Delta N = 2\rho Vg = 0{,}1$ Н.

4. 1) $m_0 = \dfrac{\text{M}}{RT}S(H - x_0)(p_0 - 2\rho g x_0)$;

2) $\mu_0 = \dfrac{\text{M}}{RT}\omega(p_0 + \rho g H - 2\rho g x_0)$;

3) $\beta = 2\dfrac{\text{M}}{RT}\dfrac{\rho g \omega^2}{S}$.

5. Это произошло на высоте $H = 60$ м, т.е. на границе 20-го и 21-го этажей.

11 класс

1. 1) $v_{\text{п}} = \dfrac{v}{2} = 0{,}1$ мм/с;

2) $v_{\text{л}}$ близка к нулю;

3) $h = 22{,}25$ см через 600 с и $h = 22$ см через 1100 с (поршень при этом опустится на дно сосуда).

2. 1) $t_3 = \dfrac{t_1 t_2}{2t_1 - t_2}$;

2) $t_4 = \dfrac{t_1 t_2}{3t_1 - 2t_2}$.

3. Задача имеет два решения: $Q_1 = \dfrac{15}{32}C\mathcal{E}^2$ и $Q_2 = \dfrac{7}{32}C\mathcal{E}^2$.

4. Искомое время равно четверти периода гармонических колебаний бусинки:

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi L}{4}\sqrt{\frac{L}{2G(M+m)}} \approx 24\ \text{сут}.$$

5. 1) Более яркое кольцо создается как лучами, прошедшими мимо линзы, так и некоторыми лучами, прошедшими сквозь линзу. Внешняя граница яркого кольца определяется лучом, падающим на сферическую поверхность под предельным углом $\alpha_{\text{пр}} = \arcsin\dfrac{1}{n} = 30°$. Диаметр темного центрального круга равен диаметру линзы. Измерив внешний диаметр светлого кольца и диаметр внутреннего темного круга, находим $L_1 = 2{,}05$ см.

2) В этом случаем, когда на экране видно только темное пятно, $L_2 = 1{,}82$ см.

КВАНТ 12+

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

Е.В.Бакаев, С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов, С.Л.Кузнецов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: (495) 930-56-48
E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

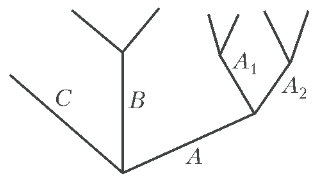
Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь
www.Pareto-print.ru

Как мыслиТ ШАХМАТИСТ

Один из самых интересных вопросов, связанных с игрой в шахматы: как именно мыслит шахматист за доской? Известный советский гроссмейстер А.Котов одним из первых попытался ответить на этот вопрос. В своей книге «Тайны мышления шахматиста» он описал «дерево вариантов» – метод анализа шахматной позиции, основанный на расчете вариантов. А.Котов детально описывает способ мышления во время анализа конкретной позиции. Он рекомендует формировать полный список возможных ходов и сравнивать их между собой, выбирать наиболее привлекательные («ходы-кандидаты») и двигаться дальше, анализируя возможные ответы на них.

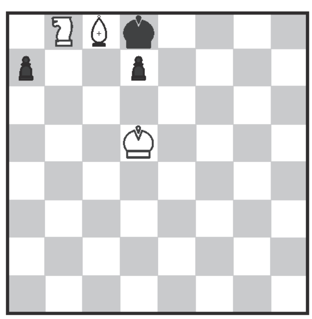
Конечно, в реальной шахматной партии нет необходимости рассматривать все возможные варианты, но даже если ограничить число рассматриваемых полуходов до 3, то через 3 полных хода число вариантов будет равно $3^6 = 729$. Если же рассматривать 5 полуходов, то их количество возрастет до $5^6 = 15625$. Из этого следует, что на практике анализ позиции только при помощи «дерева вариантов» возможен лишь в том случае, когда число разумных ходов значительно ограничено: например, в королевском эндшпиле, который, как правило, может быть просчитан до точного результата партии. Поэтому одним из самых главных навыков при игре в шахматы является умение правильно определять ходы-кандидаты, отсекая тем самым лишние варианты.

В своей книге «Секреты практических шахмат» известный шахматист и математик Дж. Нанн подробно разбирает способы шахматного мышления, одним из которых является «дерево вариантов». На рисунке показано, как, по его мнению, устроен расчет варианта человеком во время партии:



Шахматист начал анализировать ход A и нашел вариант A_1. Он ему не очень понравился, и он переключился на ход B. Этим ходом он также остался не совсем доволен и поэтому вернулся к анализу хода A, подключая к своему прежнему анализу вариант A_2. Ход C шахматист пока не рассматривал, а возможно, уже и вовсе забыл про него. Чтобы избежать такой проблемы, Дж.Нанн рекомендует сначала бегло рассмотреть ходы A, B и C, а затем уже приступать к более глубокому анализу.

Рассмотрим в качестве примера этюд Дж.Ганста:



Дж.Ганст, 1922

Выигрыш

Каким образом следует строить рассуждения, анализируя данную позицию? На первый взгляд, белым необходимо сохранить обе легкие фигуры для выигрыша, поэтому нужно ходить слоном. Соответственно, есть 3 хода-кандидата: A) ♗:d7, B) ♗b7 и C) ♗a6. Однако на каждый из этих ходов черные могут ответить ♚c7 с выигрышем фигуры. В связи с этим белым необходимо искать матовую идею: в данном примере она заключается в том, что черный король находится близко к углу поля, в котором его может заматовать белый слон, и, соответственно, задача белых состоит в том, чтобы загнать черного короля в этот угол при помощи своего короля. Находится вариант: 1. ♗a6 ♚c7 2. ♔c5 ♚:b8 3. ♔d6 ♚a8 4. ♔c7 и ♗b7×. Эта идея срабатывает и при ходе 1. ♗b7 ♚c7 2. ♗a6, и черным снова нельзя забирать коня из-за мата.

Как выбрать из этих двух вариантов правильный? Необходимо проанализировать защитные возможности черных: в приведенном выше матующем варианте в ответ на 4. ♔c7 у черных может ходит только пешка d. Соответственно, если избавиться от нее, то на доске получится пат. И действительно, при 1. ♗a6 ♚c7 2. ♔c5 у черных находится ответ d6+, и теперь 3. ♔d5 ♚:b8 4. ♔d6 ♚a8 5. ♔c7 ведет к пату. А это означает, что нужно не позволить черным отдать пешку d. Правильным решением задачи будет: 1. ♗b7! ♚c7 2. ♗a6! ♚:b8 (2…d6 3. ♘c6 с сохранением обеих легких фигур) 3. ♔d6 ♚a8 4. ♔c7 и ♗b7×.

Использовать «дерево вариантов» на практике желательно в совокупности с другими методами шахматного мышления, подробнее о которых будет рассказано позже.

А.Русанов

Индекс 90964

Прогулки с физикой

Июльский град

Санкт-Петербург, июль, на улице +21 $^{\circ}$C,
за окном сильная гроза со шквалистым ветром,
ливнем и ... градом.

(Продолжение – на с. 25 внутри журнала)