

ИЮЛЬ / АВГУСТ

ISSN 0130-2221

2016 · № 4

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ







## СЛОЖИТЕ ЭТО!

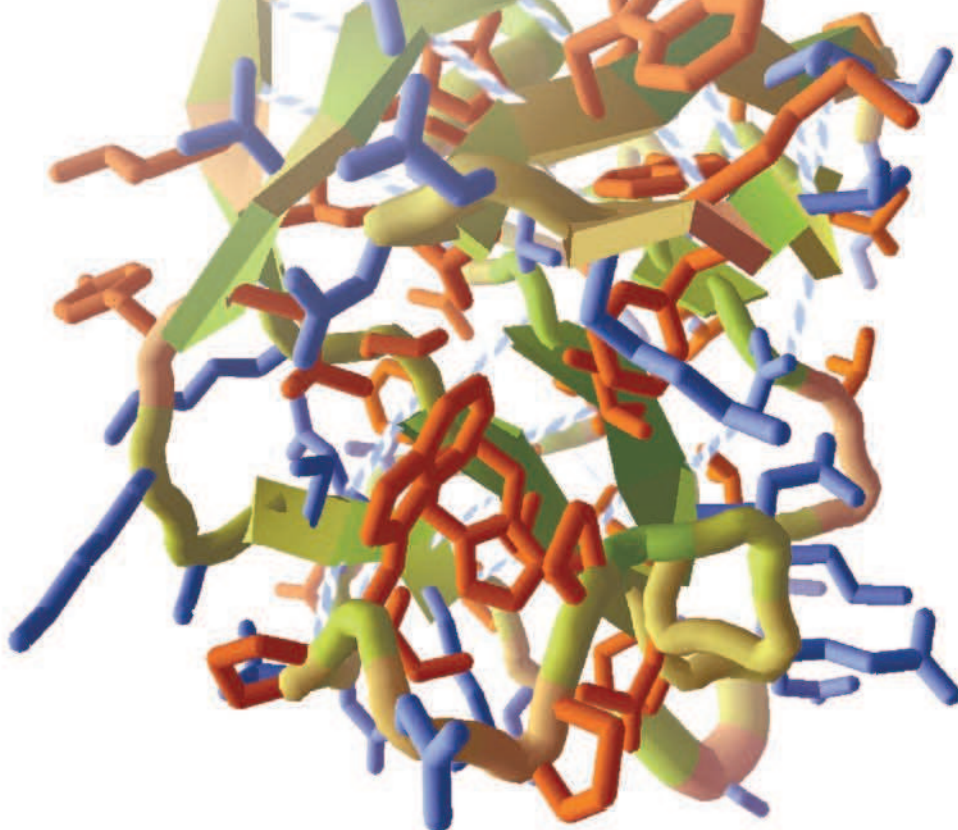
Обычно в компьютерные игры играют, чтобы развлечься и отдохнуть. Но бывает и так, что в игровую форму облечены серьезные и полезные занятия. Например, все чаще в интернете можно встретить образовательные программы, построенные по такому принципу.

А вот другой пример: головоломка Foldit, основная цель которой – поиск правильной пространственной структуры разных белков. Оказывается, что в этом даже человек без специального биологического образования после определенной тренировки может принести больше пользы, чем сложные алгоритмы на современных суперкомпьютерах!

В качестве заданий игрокам регулярно предлагается складывать белки, со структурой которых не могут разобраться ученые. И это часто приносит свои плоды. Например, в 2011 году игроки меньше чем за три недели справились с протеазой вируса, вызывающего СПИД у обезьян (показана на рисунке). Ученым не хватило на это 15 лет!

Присоединиться к этому интересному и полезному проекту вы можете на сайте [fold.it](http://fold.it).

Е.Епифанов



# КВАНТ

ИЮЛЬ  
АВГУСТ

2016

№4

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

## УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук

Математический институт им.  
В.А.Стеклова Российской академии наук  
Физический институт им. П.Н.Лебедева  
Российской академии наук

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**А.Л.Семенов**

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Н.Н.Андреев, А.Я.Белов,  
Ю.М.Брук, А.А.Варламов, С.Д.Варламов,  
А.Н.Виленин, В.И.Голубев,  
Н.П.Долбилин, С.А.Дориченко,  
В.Н.Дубровский,  
А.А.Егоров, А.А.Заславский,  
П.А.Кожевников (заместитель главного  
редактора), С.П.Коновалов, А.А.Леонович,  
Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, В.Ю.Протасов,  
А.М.Райгородский, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский,  
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров,  
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан  
(заместитель главного редактора)**

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,  
В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,  
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков,  
Л.Д.Фаддеев**

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**И.К.Кикоин**

## ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

**А.Н.Колмогоров**

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,  
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,  
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,  
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,  
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,  
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,  
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант,  
Я.Е.Шнайдер**

- 2 Математика и компьютеры: проблемы и перспективы (окончание). *Р.Грэхем*  
8 Радуга Декарта–Ньютона–Юнга (окончание). *А.Панов*

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 13 Задачи M2429–M2435, Ф2435–Ф2442  
14 Решения задач M2414–M2419, Ф2420–Ф2427  
20 Футбольные турниры и арифметические прогрессии.  
*А.Заславский*

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 22 Задачи  
23 XXII Турнир математических боев имени А.П.Савина  
24 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 7–9»

## ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 25 Вспомогательные квадраты. *Е.Бакаев, А.Блинков*

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 30 В тире и рядом. *С.Варламов*

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Как доказать неравенство?

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 35 Камень в  $\pi$ -огород. *И.Акулич, В.Дубровский*

## ИНФОРМАЦИЯ

- 39 Дни физики в Дубне

## ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 40 В начале было слово, или Что делать, когда задача не решается. *М.Бондаров*

## ОЛИМПИАДЫ

- 45 Заключительный этап XLII Всероссийской олимпиады школьников по математике  
47 Заключительный этап L Всероссийской олимпиады школьников по физике  
50 Заключительный этап I Всероссийской олимпиады по физике имени Дж.К.Максвелла

- 53 Ответы, указания, решения

## НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье С.Варламова*  
II *Кванты интернета*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогулки с физикой*

# Математика и компьютеры: проблемы и перспективы

Р. ГРЭХЕМ

**О**БРАТИМСЯ ТЕПЕРЬ К ТЕОРИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ: она также относится к теме «компьютеры и математика». Через  $P$  обозначается класс задач, которые можно решить за полиномиальное время. Через  $NP$  («недетерминированные полиномиальные») обозначается класс задач с таким свойством: если некто утверждает, что он нашел решение, то мы можем проверить это решение за полиномиальное время.<sup>1</sup> Например, если кто-то говорит: «У этого графа хроматическое число равно трем», то он может предъявить нам свою раскраску в три цвета, и за полиномиальное время можно проверить, правильна ли она. Самые трудные задачи являются  $NP$ -полными. (Это такие  $NP$ -задачи, к которым можно свести любую другую  $NP$ -задачу за полиномиальное время. – Прим. ред.) Важность этих проблем в следующем: всякая  $NP$ -полная задача в некотором смысле равносильна любой другой  $NP$ -полной задаче, т.е. если хотя бы одну  $NP$ -полную задачу можно решить за полиномиальное время, то и все  $NP$ -полные задачи можно так решить. Можно представить себе вот такую карту  $NP$ -задач (рис.9).

$NP$ -полных задач существуют тысячи, их уже тридцать лет изучают; задача о том, можно ли раскрасить вершины графа в три цвета, задача о числе независимости, задача коммивояжера – все они  $NP$ -полные.

В нижней части карты собраны задачи класса  $P$ . Например, сортировку списка из  $n$  элементов можно провести за время  $n \log n$ . Задача линейного программирования и задача о выпуклой оболочке также принадлежат классу  $P$ .

В средней части приведена задача об изоморфизме графов (выяснить, являются ли два данных графа изоморфными), про нее неизвестно,

*Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.*

<sup>1</sup> Время работы алгоритма (программы) называется *полиномиальным*, если оно ограничено сверху некоторым многочленом от размера входных данных. Неполиномиальные по времени работы алгоритмы (например, осуществляющие полный перебор вариантов) при больших объемах входных данных работают астрономически долго и поэтому не годятся для практического применения. (Прим. ред.)

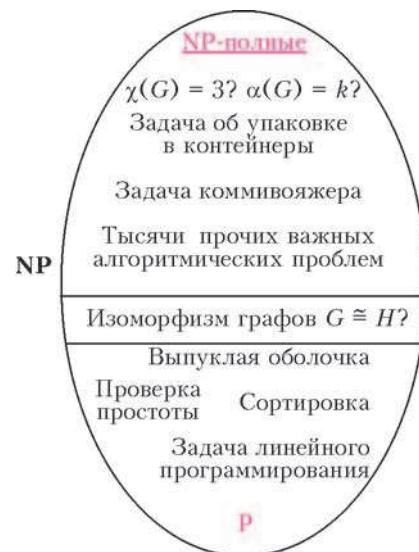


Рис. 9 Карта  $NP$ -задач

является ли она  $NP$ -полной, но неизвестно и то, лежит ли она в классе  $P$ . А вот задачу о проверке простоты недавно перевели из этой средней части в нижнюю: профессор из Индии и два студента доказали, что для этой задачи есть полиномиальный алгоритм. Впрочем, время работы этого алгоритма порядка  $n^5$ , где  $n$  – число знаков, так что он, возможно, не самый удобный.

А вот пример задачи об упаковке в контейнеры. Мы имеем сто десятизначных чисел (рис.10); можно ли разбить их на десять подмножеств по десять чисел таким образом, чтобы сумма чисел в каждом подмножестве не превосходила 50 миллиардов? Собственно говоря, сумма вообще всех чисел равна 500 миллиардам, так что тут будут не неравенства, а равенства. Так вот, никто не знает, можно ли это сделать: объем вычислений слишком велик. Кстати, вы узнаете эти числа? Ну, смотрите: три, запятая, один, четыре, один, пять, девять, два... – это знаки после запятой в числе  $\pi$  (ну, правда, не все).

Это был пример  $NP$ -полной задачи. Каждая  $NP$ -полная задача является частным случаем любой другой  $NP$ -полной задачи: если вы найдете полиномиальное решение задачи коммивояжера, или задачи о хроматическом числе три, или о



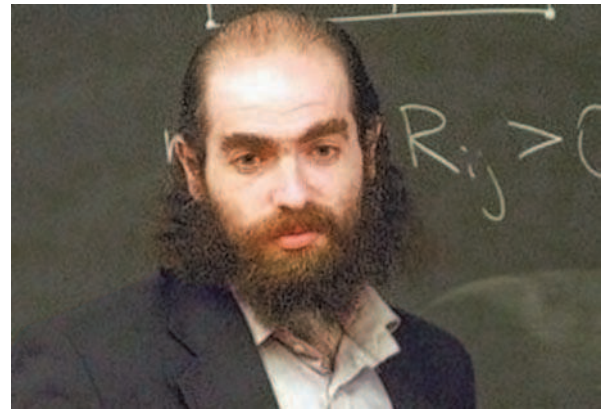
1415926535 8979323846 2643383279 5820974944 5923078164  
 8214808651 3282306647 0938446905 4811174502 8410270193  
 4428810975 6659334461 2847564823 4565856692 3460348610  
 7245870066 0631558817 4881520920 7892590360 0113305305  
 3305727036 5759591953 0921861173 0744623799 6274956735  
 9833673362 4406566430 8602139494 6094370277 0539217176  
 0005681271 4526356082 7785771342 1468440901 2249534301  
 4201995611 2129021960 8640344181 5187072113 4999999837  
 5024459455 3469083026 4252230825 7101000313 7838752886  
 5982534904 2875546873 1159562863 8903894223 2858849455  
 0628620899 8628034825 3421170679 5028841971 6939937510  
 8521105559 6446229489 5493038196 5058223172 5359408128  
 4543266482 1339360726 0249141273 3786783165 2712019091  
 4882046652 1384146951 9415116094 9628292540 9171536436  
 1885752724 8912279381 8301194912 8193261179 3105118548  
 2931767523 8467481845 7669405132 6395224737 1907021798  
 4654958537 1050792279 6892589235 7577896091 7363717872  
 2978048851 0597317328 1609631859 2981362877 4771309960  
 5875332083 8142061717 7669147303 3344685035 2619311881  
 9550031194 6252505467 4157424218 8823537875 9375195778

Рис. 10

числе независимости, то вы найдете полиномиальное решение всех остальных  $NP$ -полных задач. Важный вопрос состоит в том, совпадают ли классы  $P$  и  $NP$ . Может быть, все задачи из класса  $NP$  на самом деле решаются алгоритмами, работающими за полиномиальное время? Например, для задачи линейного программирования долгое время не было известно полиномиального алгоритма, но затем Кармакар и Хачиян его нашли!

Большинство специалистов считают, что классы  $P$  и  $NP$  разные: если вы можете проверить решение за полиномиальное время, это еще не обязательно значит, что и найти вы его можете за полиномиальное время.

В 2000 году Математический институт Клея опубликовал список из семи проблем, которые считаются достойными рассмотрения; за решение каждой из них обещана премия в миллион долларов. Под первым номером в этом списке идет как раз проблема совпадения классов  $P$  и  $NP$ . Другая проблема, о которой вы, возможно, слышали, — это гипотеза Пуанкаре. Очень талантливый российский математик Григорий Перельман опубликовал несколько статей, в которых более или менее указал, как ее можно решить, и предоставил остальным довести свои идеи до конца: дескать, доделайте, кто хочет, а мне это не очень-то интересно. Ему присудили эту премию в миллион долларов, но он человек очень необычный, и он сказал: «Не нужен мне этот миллион, забудьте, меня это не интересует». Может быть, слушатели про него что-нибудь знают? Он же был на между-



Григорий Перельман

народной математической олимпиаде. Кажется, он живет в Москве<sup>2</sup> с матерью.

Итак, после Перельмана в этом списке осталось только шесть проблем.

Теперь немного геометрии. Вот «заузленный двойной тор» (рис.11, слева). Представьте себе, что это камера для велосипедного колеса, такой вот странной формы, и что вы хотите продеформировать ее так, как показано на рисунке 11 справа. Интуиция

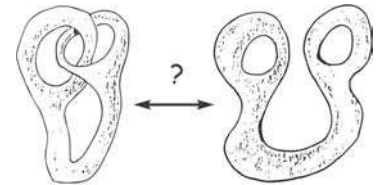


Рис. 11

говорит вам: «Это же невозможно!» А вот компьютер говорит: «Да, это возможно!» Как это можно сделать, показано на рисунке 12. Как видите, компьютерам интуиция не мешает.

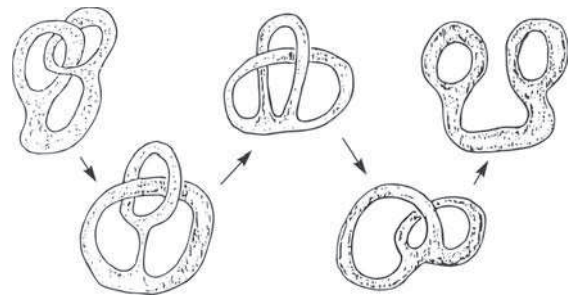


Рис. 12

А вот еще одна геометрическая задача: можно ли уместить квадраты со сторонами  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$  в прямоугольник размером  $1 \times \frac{\pi^2}{6}$ ? Сумма площадей всех этих квадратов равна  $\frac{\pi^2}{6}$ : дело в том, что квадрат со стороной  $\frac{1}{n}$  имеет площадь  $\frac{1}{n^2}$ , и можно показать, что если все эти числа сложить,

<sup>2</sup> На самом деле Григорий Перельман живет в Санкт-Петербурге.

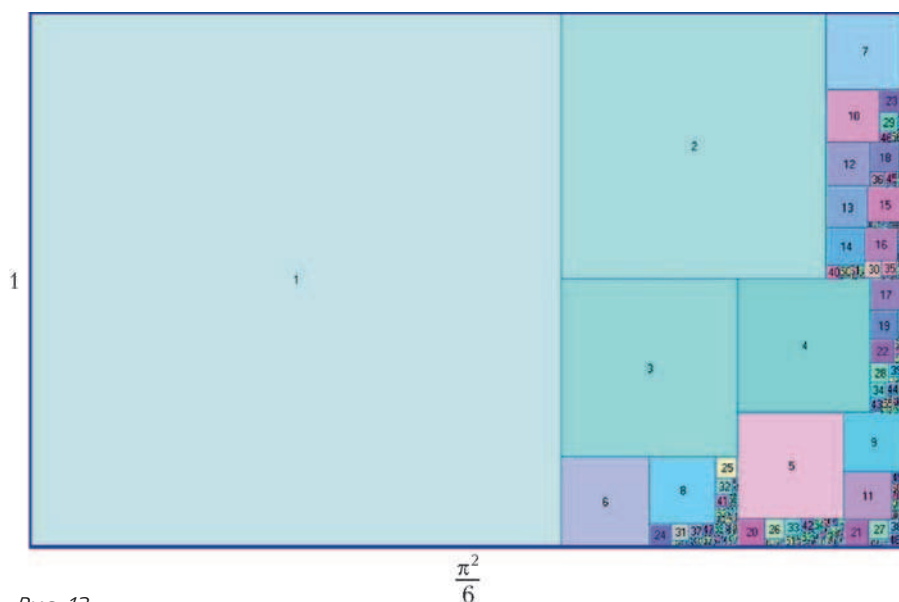


Рис. 13

то получится  $\frac{\pi^2}{6}$ , так что, может быть, удастся их все упаковать в этот прямоугольник? Вот с чего можно начать (рис.13): укладываем последовательно квадраты  $1 \times 1$ ,  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ , ... Край получается неровным. Я не знаю, можно ли так разместить все квадраты или в какой-то момент для очередного квадрата места не найдется. Клайв Тут (Clive Tooth; это специалист по Computer Science) смог так упаковать первые 100000 квадратов, но он не смог доказать, что его алгоритм позволяет продвинуться сколь угодно далеко. Я предлагаю небольшой приз (250 долларов) тому, кто сможет решить эту задачу.

Теперь посмотрим на задачу о египетских дробях. Эта задача впервые встречается в папирусе Ринда, датированном 1850 годом до н.э. Древние египтяне любили представлять дроби в виде суммы дробей с числителем единица и разными знаменателями. Например,  $\frac{4}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14}$ . Я спрашивал Андре Вейля, который был не только великим математиком, но и великим историком, почему, по его мнению, египтянам нравилось такое представление дробей, и он ответил, что это объясняется очень просто. «И каково же объяснение?» – поинтересовался я. Он ответил: «Они пошли по неверному пути». Ну, как бы то ни было, именно по этому пути египтяне и пошли. Леонардо Пизанский, известный как Фибоначчи, показал, что такое представление всегда возможно, если воспользоваться «жадным алгоритмом»: надо все время брать наибольшую из дробей со знаменателем единица, которой еще можно воспользоваться, и тогда в конце концов

числители остающейся дроби начнут уменьшаться, и мы придем к искомому представлению.

Пусть теперь мы захотели, чтобы знаменатели всех дробей, участвовавших в разложении, были нечетными: нам дана дробь с нечетным знаменателем, а хочется представить ее в виде суммы дробей с числителем единица и различными нечетными знаменателями. Такое всегда возможно, но можно ли найти такое разложение с помощью жадного алгоритма? Этот вопрос чем-то похож на знаменитую гипотезу Коллатца о  $3n + 1$  – и ответ на него никому не известен! Вот пример: для дроби

$\frac{1}{5}$  жадный алгоритм оста-

навливается через 37 шагов, и наибольший из возникающих по ходу дела знаменателей содержит 384122451172 десятичных знаков. Имеется гипотеза, что жадный алгоритм останавливается всегда, но никто не знает, как ее доказать. Подумайте, о чем все это нам говорит.

Следующий случай – попробовать представить данную дробь в виде суммы дробей с числителем единица и различными знаменателями, являющимися полными квадратами. Иными словами, надо найти представление вида

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} + \dots + \frac{1}{n_r^2}, \quad 1 \leq n_1 < \dots < n_r.$$

Я уже давно доказал, что если

$$\frac{p}{q} \in \left[0; \frac{\pi^2}{6} - 1\right) \cup \left[1; \frac{\pi^2}{6}\right),$$

то такое представление возможно (оно заведомо невозможно, если  $\frac{p}{q}$  в этом множестве не лежит, потому что сумма обратных ко всем полным квадратам равна  $\frac{\pi^2}{6}$ ). Но всегда ли останавливается жадный алгоритм для этой задачи? Неизвестно, и эта задача, возможно, решению поддается.

А вот пример задачи о рекуррентной последовательности, в которой вычисления помогают очень мало, да, собственно говоря, и вообще не помогают. Итак, пусть  $x_1 = 2$  и  $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{x_n}$ . Например,  $x_2 = \frac{3}{2}$ ,  $x_3 = \frac{5}{6}$ ,  $x_4 = -\frac{11}{30}$  и так далее. Если изобразить эту последовательность на графике (рис.14), то что мы в конце концов увидим? Ее

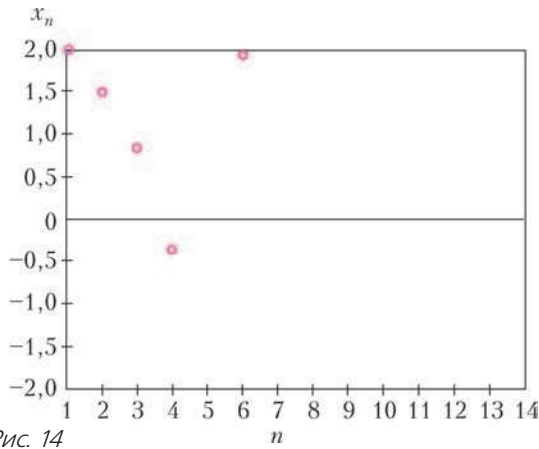


Рис. 14

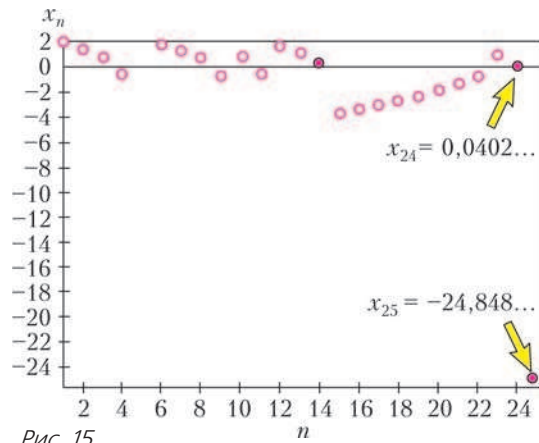


Рис. 15

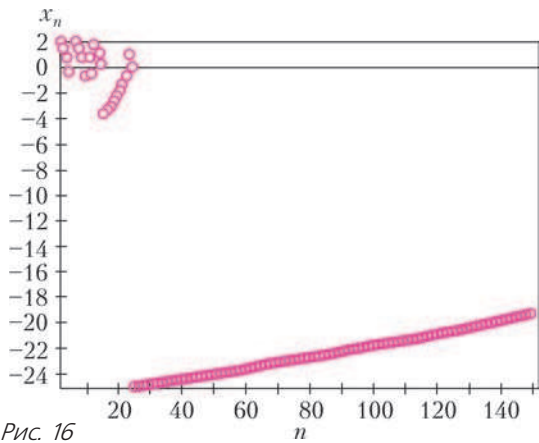


Рис. 16

24-й член оказывается очень маленьким, это примерно 0,0402...; тогда  $x_{25} = x_{24} - \frac{1}{x_{24}}$  — это уже большое по модулю число (ведь  $x_{24}$  стоит в знаменателе): примерно оно равно  $-25$  (рис.15). Если продолжать эти вычитания и дальше (рис.16), то последовательность начинает снова возвращаться ближе к нулю... Так вот, вопрос следующий: эта последовательность ограничена или нет? Могут в ней встретиться сколь угодно большие по модулю числа или она не выходит за какие-то границы?

Вычисления в этой ситуации совершенно безнадежны, и ответ неизвестен. Можно показать, что во всяком открытом интервале найдутся значения  $x_1$ , для которых последовательность ограничена, и значения  $x_1$ , для которых она неограничена, но конкретно для  $x_1 = 2$  ответа мы не знаем.

А вот рекуррентная последовательность, которая возникает при анализе задачи сортировки. Она строится так. Если у нас есть  $x_n$ , мы берем квадратный корень из  $2x_n(x_n + 1)$ , а затем целую часть от этого квадратного корня:

$x_{n+1} = \left[ \sqrt{2x_n(x_n + 1)} \right]$ . При этом  $x_1 = 1$ . Последовательные члены этой последовательности будут 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9 — тут последовательность начинает расти немного быстрее — но вопрос, которым интересуются (в частности, в Bell Labs), таков. Рассмотрим остатки от деления на 2 членов этой последовательности с нечетными номерами. Начиная с  $x_3$ , это будет 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0... Что можно сказать об этой последовательности? Оказывается, если поставить запятую после первой единицы, то получится  $\sqrt{2}$ , записанный в двоичной системе. Так что эта последовательность заведомо непериодическая. Но как же можно распознать это действительное число? Вот аналогичная рекуррентная последовательность, в определении которой 2 заменено на 3:  $y_1 = 1$ ,

$y_{n+1} = \left[ \sqrt{3y_n(y_n + 1)} \right]$ . Если рассмотреть ее члены с нечетными номерами и заменить их на остатки от деления на 3, то получится 1, 0, 1, 0, 2, 2, ... Что это за число? Никто не отождествил его ни с чем известным. Есть программы, которые по записи числа пытаются выяснить, похоже ли оно на что-то известное вроде  $\pi^2/6$ , но с этим числом не получилось. Так что важный вопрос такой: как опознать действительное число? Это вычислительно сложная задача.

Теперь займемся большими числами. Вот, например, большое число 41. Можно записать 41 в виде суммы степеней двойки, но не будем на этом останавливаться, а каждый из показателей степени также запишем в виде суммы степеней двойки:

$$41 = 2^5 + 2^3 + 1 = 2^{2^2+1} + 2^{2^1+1} + 1.$$

Это — «супердвоичное представление» числа 41. Первый шаг интересующего нас алгоритма — вычесть единицу и заменить все двойки на тройки, чтоб получилось «супертроичное разложение» какого-то числа:

$$41 \rightarrow 3^{3^3+1} + 3^{3^1+1} = 22876792455042.$$

Это число уже побольше, чем 41.



$$5^{5^5+1} + 3 \cdot 5^5 + 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2 =$$

955506298972738760178202279851982299599040524495047168569756394623260265121307  
 901506029693259869925132793220077897231117679606394336903486144205073457993301  
 043980948378597850919640830169023805612987766813050500741325561706573884126205  
 746547223588482641378142598368757197678771239546609603320941505893584561276210  
 535025354532337191435425724975128293097230771591755689924566845889964063716920  
 215774618427763391798187051052665773015676862662874318454579889345164133229591  
 491907615143468286436845711324065645871881068162865160822641489743431288122681  
 109008836612470283821409680039360356918536177652723178076973200592674246896359  
 757297252754116374610802924456455472594979974343099771573833469006518588081796  
 297239873082110025442539734902243566602566580369567115270099436285019164900623  
 025098506733698587954513694746961908657893498422949897390534021411218046891973  
 167632711407852151416221192757541158245483642856085854061616395240908634163755  
 056373391158705492944341854261000355866746126956661150378073590214503763838896  
 676153100309143006227627121530503447402723292352410325491332159680480194368129  
 255373537170318143488288351349629324976778988159086951275445665611647371965171  
 978080664167036415831749129072613431002153899542344051902093684162400451936798  
 106459816801291560390836836871266661439648453602745297810703444412995622290921  
 189798931738242157836880461812545185755899470712131135110033143243433934355091  
 490436401280346550974640415412522099212398396029454408556163596150727791458373  
 397598715274013202323427001366996930399297232980750876293482905723784255020784  
 343865451856241267671919642698799374729248525019112506244642000913295028125643  
 093814969022203670071173531027892652662517459094794853599652831094256481593750  
 871767980141100519105808024272560519656656128166130383218118344148425104419748  
 071415242369556995834811324974281842617356436647398340442254702946975552325472  
 06895475113827282656650933531676066151423025971719069990528070032629750365895  
 38635532891747087321342360478067323663874292119137449834377526252197109116095  
 6786115270333576866871242718228318910222850827296609077026774196807125332249292  
 701653733234270945074067173857325157518977087889311405888292938470840454102546

7

Рис. 17

А теперь заменим все тройки на четверки и вычтем единицу – получится «суперчетверичное» разложение:  $3^{3^3+1} + 3^{3+1} \rightarrow 4^{4^4+1} + 4^{4+1} - 1$ . Точнее, чтоб получилось настоящее суперчетверичное разложение, просто так вычесть единицу нельзя. По-настоящему получится вот как:

$$4^{4^4+1} + 4^{4+1} - 1 = \\ = 4^{4^4+1} + 3 \cdot 4^4 + 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3.$$

В общем случае очередной шаг выглядит так: заменить «супероснование системы счисления»  $b$  на  $b + 1$ , вычесть единицу и результат представить в виде «супер- $(b + 1)$ -ичного» разложения. Если, например, перейти еще от 4 к 5, то получится число

$$5^{5^5+1} + 3 \cdot 5^5 + 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2,$$

которое еще больше: оно выписано на рисунке 17. На него нужно смотреть очень внимательно: оно не может оканчиваться на 6 – на самом деле за этой шестеркой есть еще одна цифра. Итак, похоже на то, что числа растут. Но есть поразительная теорема, принадлежащая Гудстейну (Goodstein), что если мы, начиная с супердво-

ичного разложения, будем все время увеличивать супероснование на единицу, а затем вычитать из числа единицу, то в конце концов мы дойдем до нуля! Обозначим через  $G(n)$  число шагов, за которое мы дойдем до нуля, начиная с числа  $n$ . Имеем  $G(2) = 3$ ,  $G(3) = 5$ . Как обстоят дела с  $G(4)$ ?

$$4 = 2^2 \rightarrow 3^3 - 1 = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2 \rightarrow \\ \rightarrow 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 1 \rightarrow \\ \rightarrow 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 \rightarrow 2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 - 1 = \\ = 2 \cdot 6^2 + 1 \cdot 6 + 5 \rightarrow \dots$$

Если запрограммировать этот алгоритм и запустить его перед обедом, чтоб после обеда посмотреть на результат, то ждать придется долго:  $G(4) = 3 \cdot 2^{27} (2^{3 \cdot 2^{27}} - 1) + 44$ , и это больше чем  $10^{100000}$ . Для тех, кто знаком с логикой, скажу, что это пример функции, которая растет быстрее, чем любая функция, которую можно определить в арифметике Пеано. Эту теорему можно доказать в арифметике Пеано первого порядка (т.е. необходимо использовать понятие бесконечного множества). А точное значение  $G(6)$  вообще не



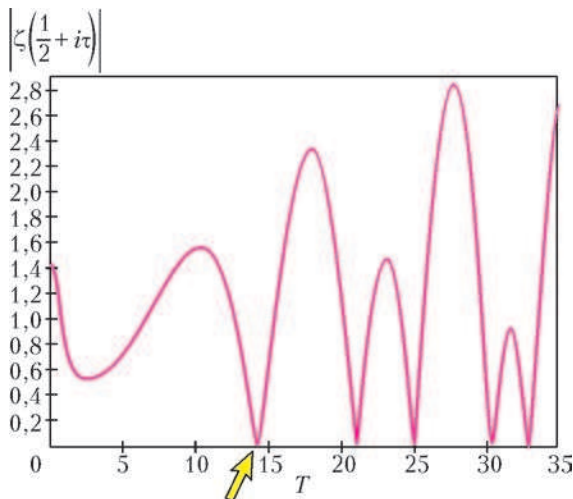


Рис. 18

известно. Я предлагаю за его вычисление скромную награду в 25 долларов. Я бы предложил награду и за  $G(5)$ , но один аспирант уже это сделал.

Ну и самая желанная – гипотеза Римана. Рассмотрим дзета-функцию  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ , где  $s = \sigma + it$  – комплексное число. Как мы уже видели,  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ , но  $\zeta(2 + i)$  – уже некоторое комплексное число, а  $\zeta\left(\frac{1}{2} + 14,134725\dots i\right) = 0$  – это первый интересный нуль дзета-функции Римана. Нули дзета-функции тесно связаны с простыми числами. На графике (рис.18) видно несколько первых нулей. Гипотеза состоит в том, что все нетривиальные нули дзета-функции лежат на вещественной прямой, заданной уравнением  $\sigma = \frac{1}{2}$ . Это проверено для первых десяти миллиардов нулей – уже неплохо! Гипотеза Римана – одна из тех, за которые Институт Клея назначил премию в миллион долларов.

Теперь в заключение я сформулирую две «более простые» проблемы.

Сначала – еще одна гипотеза о четырех цветах. Предположим, мы покрасили каждую точку на плоскости в один из четырех цветов. Всегда ли можно найти две точки одного цвета, находящиеся на расстоянии 1? Или можно поставить вопрос по-другому: можно ли раскрасить плоскость в четыре цвета так, чтоб любые две точки, находящиеся на расстоянии 1, были окрашены в разные цвета? Ответ неизвестен! Известно, что ответ «нельзя», если цветов всего три, и ответ «можно», если цветов семь. Я подозреваю, что в пять цветов так раскрасить тоже можно.

Последняя проблема относится к *гармоническим числам*. Гармоническое число – это число

$H(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$  (сумма обратных к первым  $n$  натуральным числам). Рассмотрим еще теоретико-числовую функцию «сумма делителей данного числа  $n$ ». Есть такой невинно выглядящий вопрос: верно ли, что

$$\sum_{d|n} d \leq H(n) + e^{H(n)} \ln H(n) \quad (*)$$

при всех  $n \geq 1$ ?

Так этот вопрос формулируется. Чем он интересен? А тем, что он стоит миллион долларов! Этот вопрос эквивалентен гипотезе Римана. Если хотя бы для одного  $n$  это неравенство не выполнено, то бесконечно много нетривиальных нулей дзета-функции лежит вне критической прямой. Вспомним в связи с этим, что говорил Гильберт: с первого взгляда нельзя понять, легкой или трудной окажется задача.

Неравенство (\*) проверено для  $n < 10^{100}$ . Мой бывший коллега Эндрю Одлыжко нашел с помощью компьютера  $10^{22}$ -й по счету нуль дзета-функции Римана и миллиард его соседей. Из своих вычислений он сделал такой вывод: если гипотеза Римана верна, то она верна «на грани».

Ричард Хемминг говорил: «Цель вычислений – понять, а не вычислить». Некто неизвестный переиначил это его высказывание, заявив, что, напротив, цель вычислений не понять.

Узнаем ли мы когда-нибудь, верна ли гипотеза Римана? Я убежден, что прав был Гильберт с его высказыванием: «Мы должны знать, и мы будем знать!» Разумеется, он-то это сказал на своем родном языке: «Wir müssen wissen, wir werden wissen».

А если вы спросите, действительно Гильберт такое говорил или это всего лишь апокриф, я отвечу, что он это сказал это в 1930 году и что аудиозапись этого выступления сохранилась. Вот ее фрагмент в переводе:

*Мы не смеем верить тем, кто нынче покровительственным тоном и с философским выражением лица предсказывают грядущий упадок культуры и придерживаются доктрины «ignorabimus»<sup>3</sup>. Нет для нас никакого ignorabimus, и я считаю, что нет его и в естественных науках. Вместо этого дурацкого ignorabimus выдвинем наш собственный лозунг: мы должны знать, и мы будем знать.*

<sup>3</sup> Мы не узнаем (лат.)

# Радуга Декарта–Ньютона–Юнга

А. ПАНОВ

## Ньютонова радуга

Хотя Декарт в своих «Рассуждениях о методе» и пытался дать объяснение цветам радуги, но эта попытка была неудовлетворительной. Решающее слово тут сказано Ньютоном. В 1704 году вышла его знаменитая «Оптика», в начале которой он описал свои опыты с призмами, потом изложил свою теорию цвета и тут же использовал ее для объяснения цветов радуги.

Если на призму падает луч солнечного света, то из призмы выходит целый веер – спектр световых лучей (рис. 17). Каждый из этих лучей имеет свой цвет и преломляется призмой на свой угол. Ньютон исследует эти лучи и называет их однородными, а мы сейчас называем их монохроматическими. По Ньютону, луч солнечного света является смесью монохроматических лучей, каждый из

которых удовлетворяет закону преломления. Но если раньше для перехода светового луча из воздуха в воду мы записывали его в виде  $\sin i = \frac{4}{3} \sin r$ , то теперь нужно учитывать, что показатель преломления для воды не является постоянной величиной ( $n = 4/3$ ), а зависит от цвета монохроматического луча.

По нынешним представлениям, изменение показателя преломления воды можно представить графически так, как показано на рисунке 18. На этом рисунке горизонтальная ось имеет двойную маркировку. С одной стороны, она раскрашена в цвета видимого спектра, и так мог сделать сам Ньютон. С другой стороны, она размечена длинами волн, соответствующих этим цветам. Вот этого Ньютон сделать не мог, так как волновой теории света тогда еще не существовало.

Согласно измерениям Ньютона, показатель преломления света для крайнего красного участка спектра равен  $n_k = 4/3 = 1,33333$ , а для крайнего фиолетового участка он составляет  $n_f = 109/81 = 1,34568$ . И то, и другое слегка отличается от того, что мы видим на рисунке 18. Теперь мы можем сказать, что все предыдущие расчеты для декартовой радуги мы проводили с лучами красного цвета с показателем преломления  $n_k = 4/3$ . Мы установили, что первая красная дуга имеет угловой радиус  $42^\circ 2'$ , а вторая красная дуга –  $50^\circ 59'$  (см. упражнения 5 и 6). Это совпадает с результатами Ньютона.

Все то же самое нужно проделать и с фиолетовыми лучами. Если грубо, то для этого на рисунках 1–9, 12–15 надо поменять красный цвет на

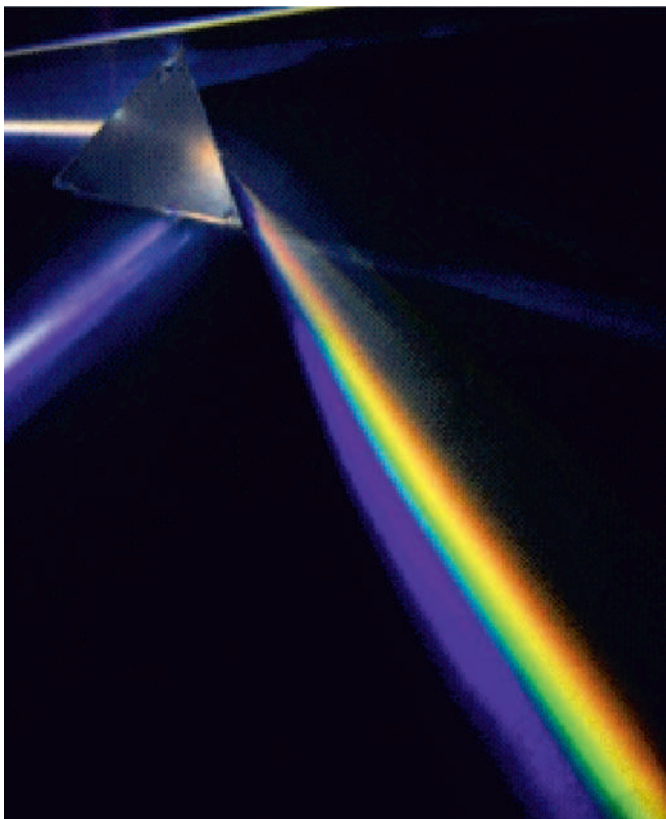


Рис. 17. Призма разлагает белый свет в целый спектр разноцветных лучей

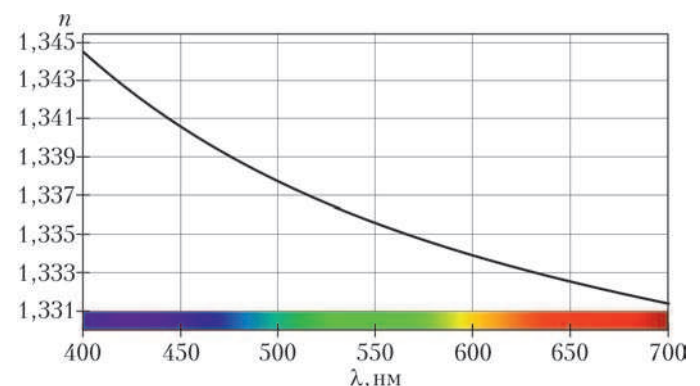


Рис. 18. Зависимость показателя преломления воды от длины волны видимого спектра и от соответствующего цвета



фиолетовый. А если быть более точными, то расчеты, сделанные в упражнениях 5 и 6 для показателя преломления  $n_k = 4/3$ , надо повторить для показателя преломления  $n_{\phi} = 109/81$ .

**Упражнение 7.** Вернитесь к упражнениям 5 и 6, замените там показатель преломления  $4/3$  на  $109/81$  и докажите, что угловой радиус первой фиолетовой дуги равен  $40^{\circ}16'$ , а радиус второй фиолетовой дуги –  $54^{\circ}10'$ .

Результаты, указанные в упражнении 7, совпадают с полученными Ньютоном. Таким образом, Ньютон считает, что первая радуга заключена между фиолетовой дугой с угловым радиусом  $40^{\circ}16'$  и красной с радиусом  $42^{\circ}02'$ , а вторая – между красной дугой с угловым радиусом  $50^{\circ}59'$  и фиолетовой с радиусом  $54^{\circ}10'$ . Разности первых двух величин дают ширину первой радуги, разность двух других – ширину второй радуги (см. табл.). В первой радуге цвета изнутри наружу идут от фиолетового к красному, во второй радуге порядок цветов обратный.

	Цвет	Угловой радиус	Угловая ширина
Первая радуга	фиолетовый	$40^{\circ}16'$	$1^{\circ}46'$
	красный	$42^{\circ}02'$	
Вторая радуга	красный	$50^{\circ}59'$	$3^{\circ}11'$
	фиолетовый	$54^{\circ}10'$	

Ньютон делает еще некоторые поправки к этим результатам, но мы на них останавливаться не

будем. Итак, ширина обеих дуг вычислена, порядок цветов в каждой из них определен, и теория Декарта–Ньютона завершена.

Пожалуй, стоит еще добавить, что Декарт, по видимому, проводил все свои расчеты для фиксированного показателя преломления  $n = 250/187 = 1,33680$ . Если посмотреть на рисунок 18, то видно, что это соответствует зеленой части спектра. Таким образом, радуга Декарта должна была выглядеть тонкой зеленой дугой окружности.

### Радуга Юнга

На самом деле и Декарт, и Ньютон пропустили один существенный элемент радуги, а именно – *дуги высших порядков*. Они довольно часто бывают видны внутри первой дуги, вплотную прилегая к ней (рис. 19). К сожалению, геометрическая оптика слишком прямолинейна, чтобы дать объяснение этому явлению.

В 1801 году Юнг провел свой знаменитый двухщелевой эксперимент, послуживший решающим аргументом в пользу волновой теории света. (В этом опыте пучок света направляется на непрозрачную ширму с двумя параллельными щелями, за которой устанавливается проекционный экран. На нем получается целый ряд чередующихся интерференционных полос.) Одно из первых применений волновой теории – это объяснение интерференционной природы дуг высших порядков, которое содержится в Бейкеровской лекции Юнга «Опыты и исчисления, относящиеся к физической оптике» («Experiments and calculations



Рис. 19. Дуги высших порядков

relative to physical optics»), прочитанной в 1803 году. (Бейкеровская лекция – награда, ежегодно присуждаемая Лондонским Королевским обществом за вклад в развитие естествознания. Юнг был удостоен этой награды три раза.)

**Световые пучки и волновые фронты.** В геометрической оптике одним из основных объектов исследования является точечный источник, от которого в разные стороны расходятся световые лучи. Говоря современным языком, это что-то вроде маленького светодиода, на который мы смотрим с расстояния в несколько метров, не различая его размеров.

Важна и другая ситуация, когда источник ограниченных размеров удален от нас на гигантское расстояние. Тогда лучи, идущие от него, практически параллельны. Такой источник называется бесконечно удаленным, а пучок лучей, исходящих от него, является параллельным. Именно такие пучки приходят к нам от удаленных звезд, и почти такой пучок приходит от солнца.

*Волновым фронтом* в геометрической оптике называется поверхность (в плоском случае – кривая), которая перпендикулярна всем лучам из данного светового пучка. Для пучка параллельных лучей волновой фронт плоский. В случае точечного источника волновой фронт представляет собой сферу (окружность), центр которой совпадает с местом положения источника. На рисунке 20 видно, что для каждого и этих световых пучков любые два фронта *эквидистантны*,

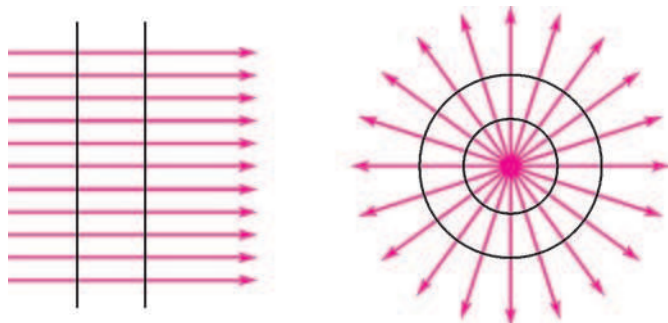


Рис. 20. Пучки и фронты перпендикулярны, фронты эквидистантны

т.е. отрезки световых лучей, заключенные между этими фронтами, равны между собой.

**Монохроматическая световая волна.** Если у нас имеется монохроматический пучок световых лучей, то можно сказать, что соответствующая световая волна – это совокупность волновых фронтов, удаленных друг от друга на одно и то же расстояние, равное длине волны. Для точечного источника это будет что-то вроде рисунка 21.

Если считать, что световая волна распространяется в плоскости рисунка, то ее естественно называть *круговой*. Если волна от точечного источни-

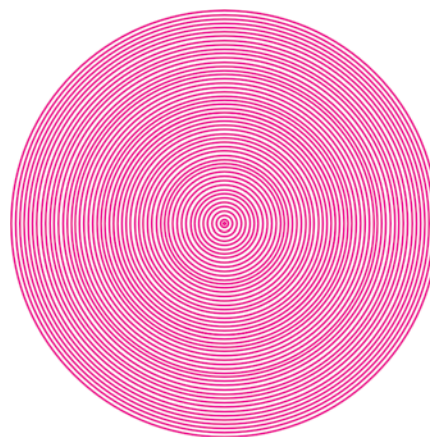


Рис. 21. Световая волна, соседние фронты эквидистантны, расстояние между ними равно длине волны

ка распространяется в пространстве, то это *сферическая* волна. Но на тот же рисунок можно взглянуть и по-другому. Можно считать, что начальный волновой фронт – это прямая, перпендикулярная плоскости рисунка и проходящая через его центр. Тогда мы имеем дело с *цилиндрической* волной.

**Интерференция.** Рисунок 21 крайне прост. А что получится при наложении двух таких рисунков со сдвигом? Иными словами, что происходит при наложении двух монохроматических волн с одной и той же длиной волны? Оказывается, картина мгновенно преобразуется – мы наблюдаем интерференцию.

На рисунке 22 два источника смещены друг относительно друга на несколько длин волн по горизонтали. Уже при небольшом удалении точки наблюдения от обоих источников волновые фронты приходят в нее почти параллельными. А вблизи точки, куда фронты приходят со сдвигом в целое число длин волн, они просто совпадают. С одной стороны, амплитуда волны там возрастает вдвое, с другой стороны, вблизи этой точки мы видим много белого цвета. Окрашенные в белый

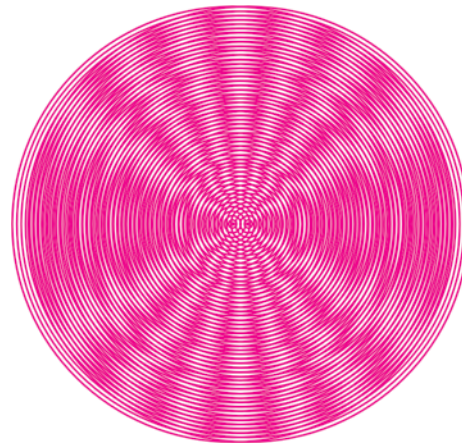


Рис. 22. Интерференция (опыт Юнга, кольца Ньютона, дуги высших порядков)



цвет области – это области *конструктивной интерференции*, где интенсивность света возрастает. Если же в некоторую точку наблюдения волновые фронты приходят со сдвигом в нечетное число полуволн, то там волны гасят друг друга, а плоскость оказывается целиком окрашенной в красный цвет. Здесь мы наблюдаем области с *деструктивной интерференцией*. Можно сказать, что на рисунке 22 области конструктивной интерференции кодируются белым цветом, а области деструктивной интерференции – красным.

**Упражнение 8.** Покажите, что на рисунке 22 области конструктивной и деструктивной интерференции расположены вдоль гипербол, фокусами которых служат два точечных источника, от которых расходятся круговые волны. Для доказательства этого факта воспользуйтесь геометрическим определением гиперболы.

В лекциях Юнга, изданных в 1807 году, есть подобный рисунок, который он использует одновременно и для описания интерференции волн на воде, и для описания интерференции световых волн.

**Двухщелевой опыт Юнга и кольца Ньютона.** Это два известнейших интерференционных эксперимента, объяснение которым дал Юнг и которые мы проиллюстрируем с помощью рисунка 22.

- Можно представить себе, что две щели в эксперименте Юнга – это две прямые, перпендикулярные плоскости рисунка 22, от которых распространяются две цилиндрические волны. В пространстве расположим плоский экран, который перпендикулярен плоскости рисунка и параллелен прямой, соединяющей источники. Цилиндрические волны интерферируют, и, как показывает рисунок 22, на экране должно возникнуть чередование светлых и темных полос.

- Теперь представим себе, что мы имеем дело с двумя точечными источниками, от которых распространяются две сферические волны. Плоский экран расположим перпендикулярно прямой, соединяющей источники. На этот раз интерферируют две сферические волны, и, как показывает рисунок 22, на экране должно возникнуть чередование светлых и темных колец. Примерно так образуются кольца Ньютона. Только там интерферируют не расходящиеся сферические волны, а сходящиеся – каждая в своем центре.

**Радуга Юнга – дуги высших порядков.** На самом деле радуга тоже представляет собой некоторый фрагмент рисунка 22. Сейчас мы покажем это.

Сначала вернемся к рисункам 7 и 8 (см. первую часть статьи) и запустим на каплю не 101 луч, а

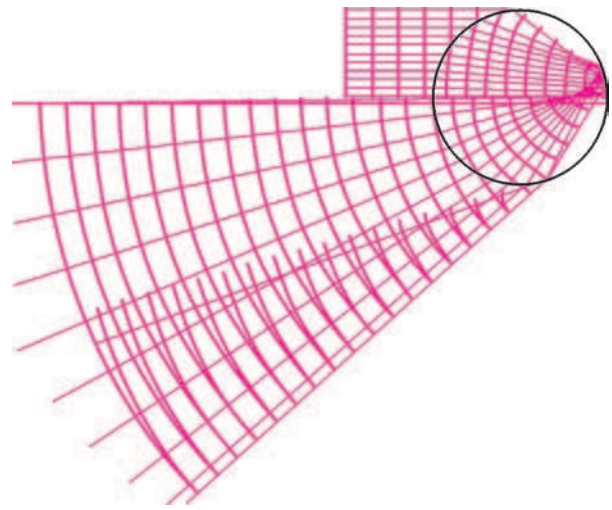


Рис. 23. Лучи и фронты перпендикулярны, фронты эквидистантны

всего 11. И сразу же нарисуем волновые фронты, *перпендикулярные* световым лучам (рис.23). На входе в каплю единичного радиуса мы имеем пучок параллельных лучей и, соответственно, семейство параллельных между собой фронтов, отстоящих друг от друга на расстояние длины волны. Входя в каплю, лучи преломляются, а фронты искривляются. Причем внутри капли расстояние между фронтами уменьшается в  $n$  раз, где  $n = 4/3$  – показатель преломления воды. Но ровно во столько же раз уменьшается и длина световой волны. Так что и в воде волновые фронты тоже эквидистантны и расстояние между ними тоже равно длине световой волны.

Теперь посмотрим на волновые фронты по выходе из капли. Каждый такой фронт состоит из двух дуг (см. рис.23). Большая дуга перпендикулярна тем выходящим лучам, которые имеют высоту входа в каплю от 0 до 0,86 от радиуса капли (см. рис.7). А меньшая дуга перпендикулярна выходящим лучам с высотой входа от 0,86 до 1 (см. рис.8). Система больших дуг похожа на дуги окружностей с общим центром, расположенным справа от капли. Система меньших дуг тоже похожа на дуги окружностей, но с общим центром, расположенным внизу капли. Таким образом, выходящие фронты образуют фрагмент некоторой картины, аналогичной изображенной на рисунке 22, и должны интерферировать. Единственная причина, по которой мы не наблюдаем интерференцию, – та, что на рисунке мы взяли слишком большую длину волны.

Стоит уменьшить длину волны, и сразу же возникает интерференционная картина (рис.24). Тут светлая интерференционная полоса, прилегающая к угловым точкам волновых фронтов, идет под углом  $42^\circ$  и определяет направление первой

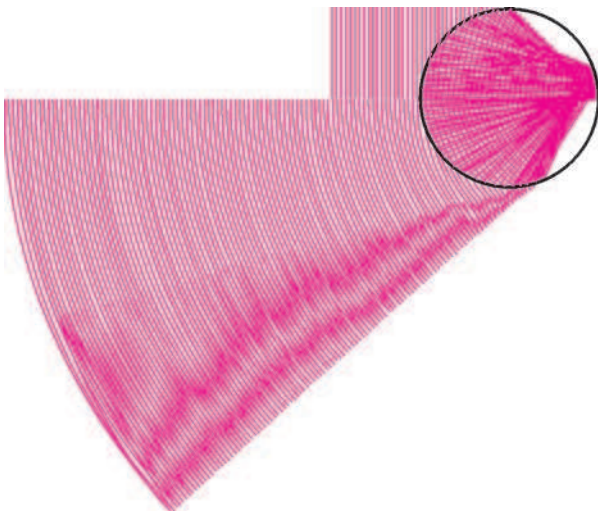


Рис.24. Радуга Юнга

дуги. Следующие светлые зоны конструктивной интерференции указывают направление на дуги высших порядков. Так что рисунок 19 получил свое объяснение.

### Добавление

В заключение – два слова о теориях радуги, появившихся после Юнга, и еще одно упражнение

**Теория Эйри.** В 1838 году Джорж Эйри опубликовал статью, в которой использовал дифракционную теорию, основанную на принципе Гюйгенса–Френеля, и создал новую теорию радуги. В ней были уточнены расположения дуг, в том числе и высших порядков. Кроме того, на границах дуг отсутствовала бесконечная интенсивность света, присущая всем предыдущим теориям, и за счет дифракции свет проникал в темное пространство Александра.

**Теория Ми.** Когда Максвелл создал теорию электромагнитного поля, выяснилось, что как раз ее и нужно использовать для точного описания радуги. А именно, нужно решить уравнения Максвелла для случая взаимодействия плоской электромагнитной волны со сферической каплей воды. Это было сделано в 1908 году почти одновременно Густавом Ми и Питером Дебаем, а намного позже выяснилось, что та же самая задача была решена Людвигом Лоренцем еще в 1890 году. Решение оказалось достаточно сложным, и ему присвоили название *теория Ми*. Для реализации этого решения требовалось гигантское количество вычислений, практически не доступное до появления компьютеров. (Обсуждение теории Ми есть на двух сайтах, указанных в ссылках.)

**Радуга Птолемея.** Теперь мы возвращаемся на много лет назад. При изложении декартовой теории радуги мы использовали закон преломле-

ния  $\sin i = \frac{4}{3} \sin r$  (для лучей красного цвета, переходящих из воздуха в воду). Перепишем его в виде

$$r = \arcsin\left(\frac{3}{4} \sin i\right).$$

Во второй половине II века, проводя свои эксперименты, Птолемей нашел очень хорошее приближение к этому закону:

$$r = \frac{i(33 - i/10)}{40}.$$

Он измерял углы в градусах, а мы переведем градусы в радианы. Тогда закон Птолемея запишется так:

$$r = i\left(\frac{33}{40} - \frac{9i}{20\pi}\right),$$

и мы сформулируем последнее упражнение.

**Упражнение 9.** Используя вместо точного закона преломления приближенный закон Птолемея, повторите все, что мы проделали в первой части статьи, обсуждая радугу Декарта. Интересно, возникнет ли в этом случае первая дуга? А вторая?

### Ссылки

Работы классиков:

- *Р. Декарт.* Рассуждение о методе с приложениями. Диоптрика, метеоры, геометрия. (М.: АН СССР, 1953)

- *И. Ньютон.* Оптика, или Трактат об отражениях, преломлениях, изгибаниях и цветах света. (М.: Гостехиздат, 1954)

- *И. Ньютон.* Лекции по оптике. (М.: АН СССР, 1946)

- *T. Young.* Bakerian Lecture [1803]: Experiments and calculations relative to physical optics. (Philosophical Transactions of the Royal Society, 94, 1804)

На русском языке также имеются:

- отличная статья Х. Нуссенцвейга «Теория радуги» (Успехи физических наук, № 125, 1978)

- отличная книга М. Миннарта «Свет и цвет в природе» (М.: ФМЛ, 1969)

А вот два сайта с изложением современной теории радуги, с общедоступными программами для расчета радуги и с большим количеством картинок:

- *Les Cowley:* Atmospheric Optics (<http://atoptics.co.uk/>)

- *Philip Laven:* The optics of a water drop (<http://www.philiplaven.com/>)



# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4–2016» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «M2429» или «Ф2435». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru) и [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru) соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи M2429–M2432, M2433а, M2434, M2435 предлагались на заключительном этапе XLII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задача Ф2440 предлагалась на XXIII Международной олимпиаде «Туймаада» (физика).

## Задачи M2429–M2435, Ф2435–Ф2442

**M2429.** В Национальной баскетбольной ассоциации 30 команд, каждая из которых проводит за год 82 матча с другими командами в регулярном чемпионате. Сможет ли руководство Ассоциации разделить команды (не обязательно поровну) на восточную и западную конференции и составить расписание игр так, чтобы матчи между командами из разных конференций составляли ровно половину от общего числа матчей?

*А.Грибалко*

**M2430.** Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составлены девять (не обязательно различных) девятизначных чисел; каждая из цифр использована в каждом числе ровно один раз. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться сумма этих девяти чисел?

*Н.Агаханов*

**M2431.** Окружность  $\omega$  касается сторон угла  $BAC$  в точках  $B$  и  $C$ . Прямая  $l$  пересекает отрезки  $AB$  и  $AC$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно. Окружность  $\omega$  пересекает  $l$  в точках  $P$  и  $Q$ . Точки  $S$  и  $T$  выбраны на отрезке  $BC$  так, что  $KS \parallel AC$  и  $LT \parallel AB$ . Докажите, что точки  $P$ ,  $Q$ ,  $S$  и  $T$  лежат на одной окружности.

*И.Богданов, П.Кожевников*

**M2432.** Квадрат разбит на  $n^2 \geq 4$  прямоугольников  $2(n-1)$  прямыми, из которых  $n-1$  параллельны одной стороне квадрата, а остальные  $n-1$  – другой. Докажите, что можно выбрать  $2n$  прямоугольников разбиения таким образом, что для любых двух выбранных прямоугольников один из них можно поместить в другой (возможно, предварительно повернув).

*С.Берлов*

**M2433.** Дан кубический многочлен  $f(x)$ . Назовем циклом тройку различных чисел  $(a, b, c)$  таких, что  $f(a) = b$ ,  $f(b) = c$  и  $f(c) = a$ . Известно, что нашлись

восемь циклов  $(a_i, b_i, c_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ , в которых участвуют 24 различных числа. Докажите, что среди восьми чисел вида  $a_i + b_i + c_i$  есть хотя бы: а) три различных; б) четыре различных.

*А.Голованов, Ф.Петров*

**M2434.** Окружность  $\omega$  вписана в треугольник  $ABC$ , в котором  $AB < AC$ . Вневписанная окружность этого треугольника касается стороны  $BC$  в точке  $A'$ . Точка  $X$  выбирается на отрезке  $A'A$  так, что отрезок  $A'X$  не пересекает  $\omega$ . Касательные, проведенные из  $X$  к  $\omega$ , пересекают отрезок  $BC$  в точках  $Y$  и  $Z$ . Докажите, что сумма  $XY + XZ$  не зависит от выбора точки  $X$ .

*И.Митрофанов*

**M2435.** Внутри выпуклого 100-угольника выбрана точка  $X$ , не лежащая ни на одной его стороне или диагонали. Исходно вершины многоугольника не отмечены. Петя и Вася по очереди отмечают еще не отмеченные вершины 100-угольника, причем Петя начинает и первым ходом отмечает сразу две вершины, а далее каждый своим очередным ходом отмечает по одной вершине. Проигрывает тот, после чьего хода точка  $X$  будет лежать внутри многоугольника с отмеченными вершинами. Докажите, что Петя может выиграть, как бы ни ходил Вася.

*С.Берлов, Ф.Петров*

**Ф2435.** Камень бросают с начальной скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту, и он всегда удаляется от точки броска. При каких углах  $\alpha$  это возможно? Трения нет.

*А.Зильберман*

**Ф2436.** Мост между берегами реки в профиль имеет форму выпуклой вверх дуги радиусом  $R = 200$  м. Расстояние между крайними опорами моста на берегах реки составляет  $R/2 = 100$  м. Дорога на берегах плавно сопрягается с поверхностью моста. Коэффициент тре-

ния между полотном дороги и колесами автомобиля  $\mu = 0,7$ . С какой максимальной постоянной по величине скоростью  $v$  полноприводной автомобиль небольших размеров может проехать по такому мосту? Каким будет ответ, если автомобиль имеет привод только на одну пару колес? Считайте, что расстояние от центра масс автомобиля до всех четырех колес одинаково, а расстояние между дорогой и центром масс настолько мало, что им можно пренебречь даже в сравнении с расстоянием между осями передних и задних колес. Сопротивление воздуха не учитывайте.

*С. Дмитриев*

**Ф2437.** Две одинаковые по размерам книжки соединили так, что листы книжек переложены через один и при этом половина площади каждой страницы соприкасается с соответствующей половиной страницы другой книги (рис. 1). Корешки книг параллельны друг другу. К корешкам присоединены длинные стороны листов,



Рис. 1

имеющих размеры  $L \times D = 15 \times 22$  см. Толщина каждого листа  $d = 0,1$  мм. Коэффициент трения листов бумаги друг о друга  $\mu = 0,3$ . При каком количестве листов в книгах их не удастся развязать, прикладывая к корешкам силы, направленные в противоположные стороны?

*Фольклор*

**Ф2438.** Плоская квадратная стеклянная пластинка площадью  $S$  и толщиной  $d = 30$  см лежит на плоском горизонтальном дне высокого цилиндрического стеклянного сосуда очень большого сечения. Пластинка не касается стенок этого сосуда. Несколько песчинок (шариков) одинакового диаметра  $D$  не дают возможности пластине лечь на дно своей нижней поверхностью. В сосуд очень медленно наливают ртуть. Сначала постепенно увеличивалась плотность ртутной лужицы на дне сосуда, а затем начал повышаться уровень ртути. Пластинка всплыла, как только уровень ртути в сосуде сравнялся с уровнем, на котором находилась верхняя поверхность пластины. Каковы размеры песчинок  $D$ ? Какова площадь пластины  $S$ ?

*Справочные данные:* плотность стекла  $\rho_{\text{ст}} = 2500$  кг/м<sup>3</sup>, плотность ртути  $\rho_{\text{рт}} = 13600$  кг/м<sup>3</sup>, коэффициент поверхностного натяжения ртути  $\sigma = 0,466$  Н/м, атмосферное давление  $p_0 = 10^5$  Па, ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

*С. Ртутный*

**Ф2439.** К горизонтальному потолку вблизи одной из вертикальных стен на невесомой и непроводящей нитке подвешен маленький шарик массой  $m$  и электрическим

зарядом  $Q$ . Стены, пол и потолок комнаты проводящие. Шарик в положении равновесия находится на одинаковом расстоянии  $L$  и от потолка и от ближайшей стены. Расстояния от шарика до остальных стен комнаты и до пола во много раз больше  $L$ . На каком расстоянии  $s$  от ближайшей стены находится точка крепления нити к потолку? Считайте, что при заданных величинах  $m$ ,  $Q$  и  $L$  это положение равновесия устойчиво.

*А. Старов*

**Ф2440.** Имеется изолированная равномерно заряженная с поверхностной плотностью  $\sigma$  пластина в виде правильного треугольника  $ABC$  со стороной  $\sqrt{2}a$  (рис. 2). Най-

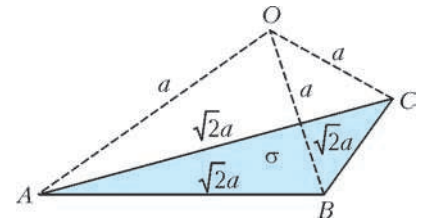


Рис. 2

дите напряженность электрического поля в точке  $O$ , если расстояния от нее до вершин пластины равны  $a$ .

*А. Бычков*

**Ф2441\*.** Незаряженный медный цилиндр с радиусом поперечного сечения  $R$  и длиной  $L \gg R$  раскрутили вокруг его оси симметрии до угловой скорости  $\omega$  и оставили крутиться в космосе ( $\omega R \ll c$ ). Как распределены электрические заряды внутри цилиндра и как зависят электрическое и магнитное поля вблизи середины цилиндра от расстояния до оси вращения?

*С. Варламов*

**Ф2442.** Каков коэффициент преломления  $n$  прозрачного пластика, из которого сделана изображенная на фотографии (рис. 3) половинка шара, лежащая на

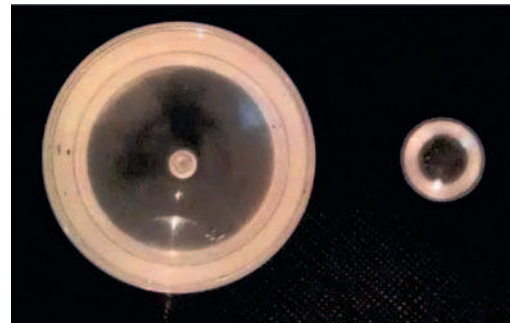


Рис. 3

ткани черного цвета? (В центре выпуклой поверхности имеется небольшое углубление.) Фотоаппарат при съемке находился далеко от половинки шара, стены и потолок комнаты были хорошо освещены.

*Д. Сергеев*

### Решения задач М2414–М2419, Ф2420–Ф2427

**М2414.** В строку выписаны положительные числа. Известно, что каждое число, начиная со второго, равно полусумме среднего арифметического и среднего геометрического двух соседних с ним чисел. Найдите



те 333-е число, если известно, что первое число равно  $2/7$ , а 11-е число равно  $7/2$ .

**Ответ:** 2016.

Пусть  $x_1, x_2, \dots$  – данные числа. Тогда по условию

$$x_k = \frac{\frac{x_{k-1} + x_{k+1}}{2} + \sqrt{x_{k-1}x_{k+1}}}{2} = \frac{(\sqrt{x_{k-1}} + \sqrt{x_{k+1}})^2}{4}.$$

Отсюда

$$\sqrt{x_k} = \frac{\sqrt{x_{k-1}} + \sqrt{x_{k+1}}}{2},$$

значит, последовательность  $y_1, y_2, \dots$ , где  $y_k = \sqrt{x_k}$ , является арифметической прогрессией.

Имеем  $y_1 = \sqrt{2/7}$ ,  $y_{11} = \sqrt{7/2}$ . Тогда разность прогрессии

$$d = \frac{\sqrt{7/2} - \sqrt{2/7}}{10} = \frac{1}{2\sqrt{14}},$$

и

$$y_{333} = y_1 + 332d = \sqrt{2/7} + \frac{332}{2\sqrt{14}} = \frac{4 + 332}{2\sqrt{14}} = 12\sqrt{14},$$

откуда

$$x_{333} = y_{333}^2 = 2016.$$

С.Костин

**M2415.** На одной стороне прямого угла с вершиной  $A_0$  выбрана точка  $B$  такая, что  $A_0B = 4$ , а на другой стороне выбраны точки  $A_1, A_2, \dots$  так, что для любого  $n = 1, 2, \dots$  радиус окружности, вписанной в треугольник  $BA_{n-1}A_n$ , равен 1. Найдите длину отрезка  $A_0A_n$ .

**Ответ:**  $2^{n+1} - \frac{1}{2^{n-1}}$ .

Нам понадобятся два вспомогательных утверждения.

**Утверждение 1.** Пусть общая внешняя касательная, проведенная к двум непересекающимся окружностям

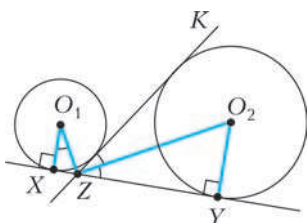


Рис. 1

радиусов  $r_1$  и  $r_2$ , касается их в точках  $X$  и  $Y$ , а общая внутренняя касательная пересекает отрезок  $XY$  в точке  $Z$  (рис.1). Тогда  $XZ \cdot YZ = r_1r_2$ .

**Доказательство.** Пусть  $O_1$  и  $O_2$  – центры окружностей. Тогда нужное утверждение

вытекает из подобия прямоугольных треугольников  $XO_1Z$  и  $YZO_2$ . (Если  $\angle YZO_2 = \angle KZO_2 = \alpha$ , то  $\angle XZO_1 = \angle KZO_1 = 90^\circ - \alpha$ .)

**Утверждение 2.** Пусть в треугольнике  $ABC$  вписанная окружность касается стороны  $BC$  в точке  $K$  (рис.2).

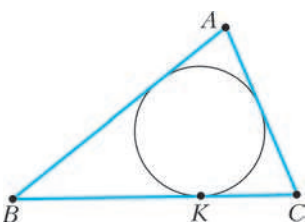


Рис. 2

Тогда произведение  $BK \cdot CK$  равно  $\frac{r^2h}{h-2r}$ , где  $h$  – длина высоты из вершины  $A$ , а  $r$  – радиус вписанной окружности.

**Доказательство.** Как известно,  $BK = p - b$ ,  $CK = p - c$  (здесь и ниже ис-

пользуем стандартные обозначения:  $a = BC$ ,  $b = CA$ ,  $c = AB$ ,  $p$  – полупериметр,  $S$  – площадь). Имеем  $S = pr = ah/2$  и, по формуле Герона,

$$(p-b)(p-c) = \frac{S^2}{p(p-a)} = \frac{prah}{2p(p-a)} = \frac{rh}{2\left(\frac{p}{a}-1\right)} = \frac{rh}{2\left(\frac{h}{2r}-1\right)} = \frac{r^2h}{h-2r}.$$

Перейдем к решению задачи. Обозначим через  $K_i$  точку касания окружности, вписанной в треугольник  $BA_{i-1}A_i$ , со стороной  $A_{i-1}A_i$ . По утверждению 1,  $K_iA_i \cdot A_iK_{i+1} = 1$ . У треугольников  $BA_{i-1}A_i$  высота из вершины  $B$  равна 2, а радиус вписанной окружности равен 1, значит, по утверждению 2,  $A_{i-1}K_i \cdot K_iA_i = 2$ . Очевидно,  $A_0K_1 = 1$ . Поочередно пользуясь утверждениями 2 и 1, получаем (рис.3):  $K_1A_1 = 2$ ,  $A_1K_2 = \frac{1}{2}$ ,

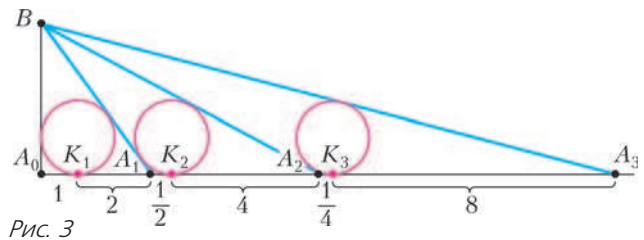


Рис. 3

$K_2A_2 = 4$ ,  $A_2K_3 = \frac{1}{4}$ , ...,  $K_nA_n = 2^n$ . Отсюда

$$\begin{aligned} A_0A_n &= (A_0K_1 + A_1K_2 + \dots + A_{n-1}K_n) + \\ &+ (K_1A_1 + K_2A_2 + \dots + K_nA_n) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) + (2 + 4 + \dots + 2^n) = \\ &= \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) + (2^{n+1} - 2) = 2^{n+1} - \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

П.Кожевников, В.Расторгуев

**M2416.** Для конечных множеств  $A$  и  $B$ , состоящих из нескольких положительных чисел, строится множество  $C$  всех чисел, представимых в виде  $ab$ , где  $a \in A$ ,  $b \in B$ . (Например, если  $A = \left\{\frac{1}{2}, 4, 6\right\}$ ,  $B = \left\{\frac{1}{3}, 4\right\}$ , то  $C = \left\{\frac{1}{6}, \frac{4}{3}, 2, 16, 26\right\}$ .) Могут ли все элементы множества  $C$ , выписанные в порядке возрастания, образовывать арифметическую прогрессию, если в каждом из множеств  $A, B$  хотя бы два числа?

**Ответ:** не могут.

Упорядочим числа в множествах: пусть  $a_1 > a_2 > \dots$  – элементы множества  $A$ ,  $b_1 > b_2 > \dots$  – элементы множества  $B$ ,  $c_1 > c_2 > \dots$  – элементы множества  $C$ . Тогда  $c_1 = a_1b_1$ , а  $c_2$  равно одному из произведений  $a_1b_2$  или  $a_2b_1$ . Для определенности пусть  $c_2 = a_1b_2$ .

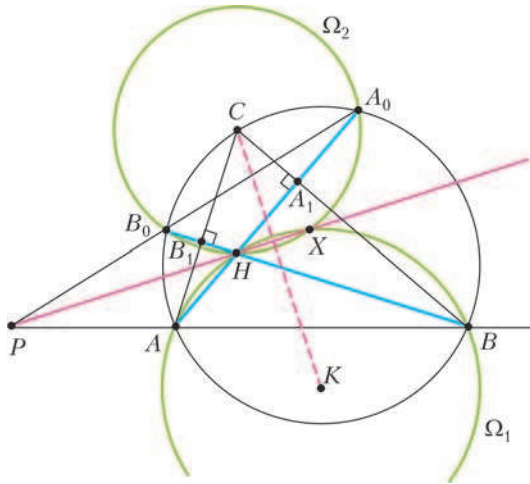
Предположим, что условие задачи выполнено и  $c_1 - c_2 = c_2 - c_3 = \dots = d$ . Тогда  $d = a_1b_1 - a_1b_2 = a_1(b_1 - b_2)$ . Так как  $a_2b_1 > a_2b_2$  – различные элементы мно-

жества  $C$ , то разность между ними не меньше чем  $d$ :  $a_2b_1 - a_2b_2 \geq d$ . Но  $a_2b_1 - a_2b_2 = a_2(b_1 - b_2) < a_1(b_1 - b_2) = d$ . Противоречие.

М.Иванов

**M2417.** В остроугольном неравностороннем треугольнике  $ABC$  продолжения высот  $AA_1$  и  $BB_1$  пересекают его описанную окружность в точках  $A_0$  и  $B_0$  соответственно. Прямая  $A_0B_0$  пересекает прямую  $AB$  в точке  $P$ . Пусть  $H$  – ортоцентр треугольника  $ABC$ ,  $K$  – центр описанной окружности треугольника  $ABH$ . Докажите, что  $RH \perp SK$ .

Пусть  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  – окружности, описанные около треугольников  $ABH$  и  $A_0B_0H$  (см. рисунок). Пусть



$RH$  пересекает  $\Omega_1$  вторично в точке  $X$ . Тогда  $PX \cdot PH = PA \cdot PB$ . Кроме того,  $PA \cdot PB = PA_0 \cdot PB_0$ , поскольку точки  $A, B, A_0, B_0$  лежат на одной окружности. Значит,  $PX \cdot PH = PA_0 \cdot PB_0$ , откуда следует, что  $A_0, B_0, H, X$  лежат на одной окружности. Иначе говоря,  $X$  лежат на окружности  $\Omega_2$ , т.е.  $HX$  – общая хорда окружностей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ .

Как известно,  $A_0$  и  $H$  симметричны относительно  $BC$ . (Это следует, например, из того, что  $\angle A_0CB = \angle A_0AB = 90^\circ - \angle ABC = \angle HCB$  и, аналогично,  $\angle A_0BC = \angle HBC$ .) Отсюда  $CA_0 = CH$ . Аналогично,  $CB_0 = CH$ . Поэтому  $C$  – это центр окружности  $\Omega_2$ . Тем самым,  $CK$  – линия центров окружностей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Значит,  $SK \perp HX$  или  $SK \perp PH$ , что и требовалось доказать.

Н.Богачев

**M2418.** По кругу стоят  $n$  мальчиков и  $n$  девочек. Назовем пару из мальчика и девочки хорошей, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах.

Обозначим всех детей по часовой стрелке  $K_1, K_2, \dots, K_{2n}$  так, что  $K_1$  – это данная девочка, участвующая в 10 хороших парах, и продолжим нумерацию циклически (например,  $K_0 = K_{2n}$  и  $K_{2n+1} = K_1$ ) (рис. 1). При  $i =$

$= 1, 2, \dots, 2n$  обозначим через  $d_i$  разность между количествами девочек и мальчиков среди  $K_1, K_2, \dots, K_i$ ; в частности,  $d_1 = 1 - 0 = 1$  и  $d_{2n} = 0$  (поэтому можно продолжить эту последовательность, полагая  $d_{2n+1} = d_1$  и т.д.).

Заметим, что любые два числа  $d_{i-1}$  и  $d_i$  отличаются на единицу, причем  $d_i - d_{i-1} = 1$ , если  $K_i$  – девочка, и  $d_i - d_{i-1} = -1$ , если  $K_i$  – мальчик.

Нарисуем «график» последовательности  $(d_i)$  (рис.2), предполая, что график «замыкается», т.е. есть отрезок графика между  $K_{2n}$  и  $K_1$ . Появление хорошего напарника  $K_s$  у девочки  $K_1$  означает, что отрезок графика между  $K_{s-1}$  и  $K_s$  пересекает прямую  $d = 1/2$  сверху вниз. По

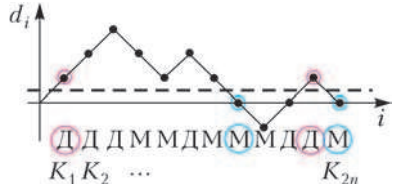


Рис. 2

условию, у нас ровно 10 таких пересечений. Значит, график также пересекает прямую  $d = 1/2$  ровно 10 раз снизу вверх. А каждое такое пересечение соответствует появлению хорошей напарницы у любого из мальчиков, образующих хорошую пару с девочкой  $K_1$ .

Н.Власова

**M2419.** См. статью А.Заславского «Футбольные турниры и арифметические прогрессии».

**Ф2420.** Первую половину пути автобус ехал со скоростью, в 8 раз большей, чем вторую. Средняя скорость автобуса на всем пути оказалась равной 16 км/ч. Найдите среднюю скорость автобуса за первую треть времени движения.

Пусть длина всего пути равна  $s$ , а скорости автобуса на второй и на первой половине пути равны  $v$  и  $8v$  соответственно. Тогда, по определению средней скорости,

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{\frac{s/2}{8v} + \frac{s/2}{v}} = \frac{16v}{9}, \text{ откуда } v = \frac{9v_{\text{ср}}}{16}.$$

Продолжительность всего путешествия равна  $t = s/v_{\text{ср}}$ . Первую половину пути автобус проехал за  $1/9$  этого времени, а вторую половину – за  $8/9$  этого времени. Одна треть времени путешествия составляет

$$\frac{t}{3} = \frac{s}{3v_{\text{ср}}} = \frac{3s}{9v_{\text{ср}}}.$$

Значит, в течение времени  $\frac{s}{9v_{\text{ср}}}$  автобус ехал со скоростью  $8v$  и проехал за это время расстояние  $s/2$ , а в течение времени  $\frac{2s}{9v_{\text{ср}}}$  автобус ехал со скоростью  $v$  и проехал за это время расстояние  $v \frac{2s}{9v_{\text{ср}}}$ . Поэтому средняя скорость за первую треть времени движения



равна

$$u_{\text{ср}} = \frac{\frac{s}{2} + v}{\frac{9v_{\text{ср}}}{3s}} = \frac{1}{2} + \frac{9v_{\text{ср}}}{16} \cdot \frac{2}{9v_{\text{ср}}} = \frac{15}{18} v_{\text{ср}} = 30 \text{ км/ч.}$$

М.Замятнин

**Ф2421.** Маленький шарик массой  $m$ , закрепленный на легкой нерастяжимой нити длиной  $L$  под потолком, движется, оставаясь все время в одной и той же горизонтальной плоскости (конический маятник). Сила натяжения нити в  $N$  ( $>1$ ) раз больше силы тяжести. Какова кинетическая энергия шарика?

Нить во время движения шарика все время составляет с вертикалью один и тот же угол  $\alpha$ . Косинус этого угла равен  $1/N$ , а синус равен  $\sqrt{N^2 - 1}/N$ . Центробежное ускорение шарика обеспечивается горизонтальной составляющей силы натяжения нити:

$$a_{\text{ц}} = \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{L \sin \alpha} = Ng \sin \alpha.$$

Следовательно, кинетическая энергия шарика равна

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{mgL(N^2 - 1)}{2N}.$$

С.Окс

**Ф2422.** Из четырех одинаковых однородных ледяных кирпичиков длиной  $L$  каждый сложена симметричная стопка (рис.1). На какое максимальное расстояние  $x$  можно выдвинуть правый кирпичик, чтобы стопка не развалилась? Кирпичики очень гладкие.

Изобразим силы, действующие на верхний и правый кирпичики массами  $m$  в момент, когда правый кирпичик выдвинут на максимально возможное расстояние  $x$  (рис.2). Запишем для верхнего и правого кирпичиков уравнения моментов относительно точек  $A$  и  $B$  соответственно:

$$mg \frac{L}{2} = N_1 \left( \frac{L}{2} + x \right), \quad mgx = N_1 \left( \frac{L}{2} - x \right).$$

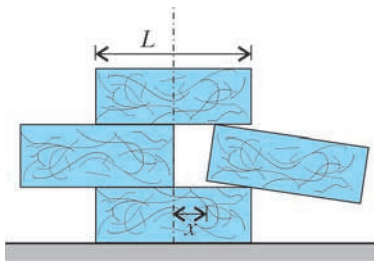


Рис. 1

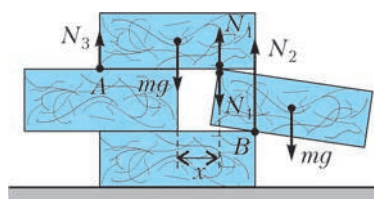


Рис. 2

Решая полученную систему уравнений, приходим к квадратному уравнению

$$x^2 + Lx - \frac{L^2}{4} = 0.$$

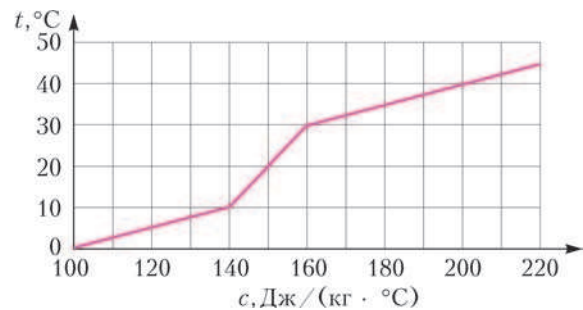
Его положительный корень равен

$$x = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} L \approx 0,21L.$$

Следовательно, правый кирпичик можно выдвинуть на максимальное расстояние  $x \approx 0,21L$ .

М.Замятнин

**Ф2423.** В некоей лаборатории было получено новое вещество неполитропен с удельной теплоемкостью  $c$ , изменяющейся в зависимости от температуры  $t$  так, как показано на рисунке. Какая температура установится в калориметре, если в нем смешать равные



массы неполитропена, взятые при температурах  $0^\circ\text{C}$  и  $+40^\circ\text{C}$ ? Удельная теплоемкость калориметра мала, потерями тепла можно пренебречь.

Если удельная теплоемкость вещества в интервале изменения температуры от  $t_1$  до  $t_2$  меняется линейно в пределах от  $c_1$  до  $c_2$ , то количество теплоты  $\Delta Q$ , полученное массой  $m$  такого вещества при нагревании от  $t_1$  до  $t_2 > t_1$ , можно найти по формуле

$$\Delta Q = c_{\text{ср}} m (t_2 - t_1),$$

где  $c_{\text{ср}} = \frac{c_1 + c_2}{2}$  – средняя удельная теплоемкость в температурном интервале от  $t_1$  до  $t_2$ . Эту формулу можно применять для каждого отдельного участка графика с линейной зависимостью теплоемкости от температуры. Предположим, что при смешивании двух равных масс  $m$  неполитропена конечная температура смеси  $t_x$  будет находиться в диапазоне от  $+10^\circ\text{C}$  до  $+30^\circ\text{C}$ . Пусть удельная теплоемкостью неполитропена при этой температуре равна  $c_x$ . С учетом этого и с использованием данных, полученных из графика, уравнение теплового баланса для смешивания порций неполитропена примет вид

$$\begin{aligned} 180m(40 - 30) + \frac{160 + c_x}{2} m(30 - t_x) &= \\ &= 120m(10 - 0) + \frac{140 + c_x}{2} m(t_x - 10), \end{aligned}$$

где  $c_x$  и  $t_x$  связаны соотношением  $t_x = -130 + c_x$  (все физические величины выражены в единицах СИ). После подстановки и упрощения получается квадрат-

ное уравнение относительно неизвестной температуры  $t_x$ :

$$t_x^2 + 260t_x - 6300 = 0.$$

Его положительный корень равен

$$t_x = 10(2\sqrt{58} - 13) \text{ }^\circ\text{C} \approx 22,3 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Эта температура принадлежит интервалу от  $+10 \text{ }^\circ\text{C}$  до  $+30 \text{ }^\circ\text{C}$ , следовательно, сделанное предположение было верным.

А.Бычков, М.Замятнин

**Ф2424.** В цилиндре под поршнем находится воздух. В стенках цилиндра есть два клапана: впускной  $K_1$  и выпускной  $K_2$  (рис.1). Впускной клапан открывается, когда разность давлений воздуха снаружи и внутри цилиндра превышает  $\Delta_1 = 0,2p_0$ , где  $p_0$  – атмосферное давление. Выпускной клапан открывается, когда разность давлений внутри и снаружи превышает  $\Delta_2 = 0,4p_0$ . Поршень совершает очень медленные колебания так, что объем воздуха в цилиндре изменяется в пределах от  $V_0$  до  $2V_0$ . Температура снаружи и внутри цилиндра постоянна и равна  $T_0$ .

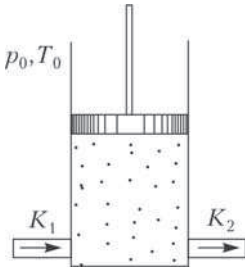


Рис. 1

1) Определите наименьшее и наибольшее количество воздуха в цилиндре при колебаниях поршня.

2) Изобразите в координатах  $p$ – $V$  процесс, происходящий с воздухом в цилиндре после того, как поршень уже совершил достаточно много колебаний.

Ответьте на оба вопроса задачи, если  $\Delta_1 = 0,4p_0$ , а  $\Delta_2 = 0,2p_0$ .

Запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для газа в цилиндре:  $pV = \nu RT_0$ , где  $p$ ,  $V$  и  $\nu$  – давление, объем и количество воздуха соответственно. По условию задачи температура  $T_0$  постоянна, но количество воздуха  $\nu$  в цилиндре может меняться, если воздух либо входит в цилиндр через впускной клапан, либо выходит наружу через выпускной клапан.

1) Впускной клапан открыт, когда давление воздуха в цилиндре удовлетворяет условию  $p < p_0 - \Delta_1 = 0,8p_0$ . Выпускной клапан открыт, когда давление воздуха в цилиндре удовлетворяет условию  $p > p_0 + \Delta_2 = 1,4p_0$ . Если бы ни один из клапанов не открывался при колебаниях поршня, то давление в цилиндре изменялось бы в два раза при движении поршня от верхнего положения к нижнему и наоборот. Но тогда не могло бы выполняться условие  $0,8p_0 \leq p \leq 1,4p_0$ , которое необходимо для того, чтобы клапаны не открывались. Следовательно, существуют промежутки времени, когда воздух медленно поступает в цилиндр через впускной клапан и когда воздух медленно выходит из цилиндра через выпускной клапан.

Когда воздух поступает в цилиндр через впускной клапан, количество воздуха увеличивается с увеличением объема и достигает максимального значения тогда, когда поршень находится в верхнем положе-

нии. Это максимальное значение равно

$$\nu_{\max} = \frac{0,8p_0 \cdot 2V_0}{RT_0} = \frac{1,6p_0V_0}{RT_0}.$$

Когда воздух выходит из цилиндра через выпускной клапан, количество воздуха уменьшается и достигает минимального значения тогда, когда поршень находится в нижнем положении, поэтому

$$\nu_{\min} = \frac{1,4p_0V_0}{RT_0}.$$

2) Процесс, происходящий с воздухом в цилиндре, состоит из изотермического расширения от объема  $V_0$  при постоянном количестве воздуха, дальнейшего изобарического расширения до объема  $2V_0$  при увеличивающемся количестве воздуха, изотермического сжатия от объема  $2V_0$  при другом постоянном количестве воздуха и, наконец, изобарического сжатия до исходного объема  $V_0$  при уменьшающемся количестве воздуха. В координатах  $p$ – $V$  этот процесс выглядит так, как показано на рисунке 2.

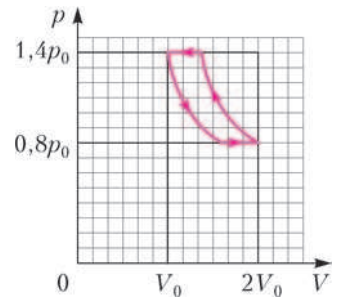


Рис. 2

Теперь рассмотрим второй случай, когда  $\Delta_1 = 0,4p_0$  и  $\Delta_2 = 0,2p_0$ . Впускной клапан открыт, когда давление воздуха в цилиндре удовлетворяет условию  $p < p_0 - \Delta_1 = 0,6p_0$ , а выпускной клапан открыт, когда давление воздуха в цилиндре удовлетворяет условию  $p > p_0 + \Delta_2 = 1,2p_0$ . Видно, что при изменении объема воздуха в два раза может выполняться условие  $0,6p_0 \leq p \leq 1,2p_0$ , при котором клапаны не открываются. Следовательно, в этом случае количество воздуха в цилиндре остается постоянным и равным

$$\nu = \frac{1,2p_0V_0}{RT_0}.$$

Процесс, происходящий в этом случае с воздухом в цилиндре, состоит из одной изотермы, проходимой то в прямом, то в обратном направлении (рис.3).

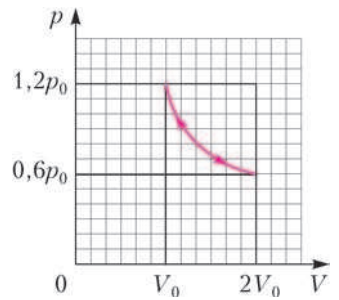


Рис. 3

М.Ромашка

**Ф2425.** Уединенный куб из непроводящего материала заряжен равномерно по объему. Вершины (углы) куба имеют одинаковые потенциалы  $\Phi$ . Векторы напряженности электрического поля вблизи вершин куба (вне объема куба) имеют одинаковые величины  $E$ . Каков потенциал точки в самом центре куба? Куб распилили на 8 равных частей тремя взаимно перпендикулярными плоскими разрезами (на 8 одинаковых кубиков) и одну из частей удалили. Каким будет потенциал той же точки в центре (бывшего) куба? Каким будет по величине вектор напряженности электрического поля в этой же точке?



Предположим, что объемная плотность электрических зарядов внутри куба равна  $\rho$  и ребра куба имеют длину  $R$ . Тогда методом размерностей находим, чему пропорциональны потенциалы  $\Phi$  вершин куба и напряженности поля  $E$  вблизи этих вершин:

$$\Phi \sim \frac{kq}{R} \sim \frac{k\rho R^3}{R} = k\rho R^2, \quad E \sim \frac{kq}{R^2} \sim \frac{k\rho R^3}{R^2} = k\rho R.$$

Для каждого из 8 кубиков, составляющих целый большой куб, соответствующие величины равны  $\Phi/4$  и  $E/2$ . Следовательно, потенциал в центре куба равен

$$\Phi_0 = 8 \frac{\Phi}{4} = 2\Phi,$$

а напряженность поля равна нулю:  $E_0 = 0$ .

После удаления  $1/8$  части куба потенциал и напряженность в его бывшем центре станут равными

$$\Phi_1 = \frac{7}{8}\Phi_0 = \frac{7}{4}\Phi \quad \text{и} \quad E_1 = \frac{1}{2}E.$$

С.Варламов

**Ф2426\***. Радиус кольца из тонкой проволоки с равномерно распределенной по его длине массой равен  $R = 1$  м. По кольцу течет постоянный ток  $I = 100$  А. Это кольцо расположилось неподвижно на высоте  $h = 3$  мм над большой плоской горизонтальной поверхностью из сверхпроводника. Какова масса кольца  $m$ ?

Магнитное поле внутри сверхпроводника равно нулю, т.е. поле не проникает внутрь сверхпроводника. Следовательно, необходимым условием является отсутствие на границе сверхпроводника перпендикулярной к поверхности составляющей магнитного поля. Подберем такую комбинацию проводников с токами, которая создаст магнитное поле именно с таким условием на границе. Представим, что в разрыв нашего кольца вставлен миниатюрный и невесомый амперметр с отмеченными клеммами «плюс» и «минус». Если зеркально отразить от поверхности висящее кольцо с этим амперметром и пропустить по этому «мнимому» проводу ток противоположного направления, то такие проводники создадут магнитное поле, которое действительно во всех точках отражающей поверхности будет направлено вдоль этой поверхности. Структура магнитного поля над сверхпроводником будет такой же, как и у поля, созданного этими проводниками. Следовательно, такой же будет и сила, действующая на реальный проводник. Такие проводники с токами будут отталкиваться друг от друга. Радиус кольца  $R$  значительно больше расстояния между проводниками  $2h$  (действительным и «мнимым»). Поэтому можно считать, что поле, созданное одним проводником, в месте расположения другого проводника очень близко к полю бесконечно длинного прямого провода с током:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi 2h},$$

и суммарная сила, действующая на кольцо со стороны этого магнитного поля, составляет

$$F = 2\pi RIB = \frac{\mu_0 RI^2}{2h}.$$

Эта сила в точности компенсирует силу тяжести, откуда получаем

$$\frac{\mu_0 RI^2}{2h} = mg, \quad \text{и} \quad m = \frac{\mu_0 RI^2}{2hg} = 0,2 \text{ кг}.$$

С.Кольцов

**Ф2427\***. Понижающий идеальный трансформатор подключен к сети (220 В, 50 Гц) и имеет коэффициент трансформации напряжения 3:1. Если к вторичной обмотке подключен резистор сопротивлением  $R$ , то в первичной обмотке течет ток 0,3 А. При подключении к вторичной обмотке еще одного такого же резистора ток в первичной обмотке стал 0,5 А. Каково сопротивление этого резистора? Каким будет ток в первичной обмотке, если оба резистора отключить? Какой по емкости конденсатор нужно подключить к вторичной обмотке, чтобы входной ток трансформатора стал равным нулю?

Для идеального трансформатора с числами витков в первичной обмотке  $n_1$  и во вторичной  $n_2$  ток первичной обмотки складывается из тока холостого хода и тока, обусловленного наличием нагрузки во вторичной цепи. Дополнительный ток в первичной обмотке и ток во вторичной обмотке вместе создают в сердечнике трансформатора нулевое магнитное поле, т.е. созданные этими токами магнитные поля полностью компенсируют друг друга. Напряжение на выводах вторичной обмотки до подключения нагрузки и после подключения нагрузки одно и то же, так как трансформатор по условию идеальный. Пересчет сопротивления нагрузки вторичной цепи  $Z_2$  в эквивалентное полное сопротивление первичной цепи  $Z_{\text{ЭКВ}}$  дает  $Z_{\text{ЭКВ}} = 9Z_2$ . Поскольку по условию задачи нагрузка во вторичной цепи активная (резисторы), то ток холостого хода и дополнительный ток в первичной цепи сдвинуты по фазе на  $90^\circ$ . Следовательно,

$$I_{\text{ХХ}}^2 + \left(\frac{U}{9R}\right)^2 = I_1^2, \quad I_{\text{ХХ}}^2 + \left(\frac{U}{9R/2}\right)^2 = I_2^2, \quad I_{\text{ХХ}} = \frac{U}{\omega L},$$

где угловая частота изменения напряжения  $\omega = 2\pi\nu$ . Из приведенных соотношений можно найти

$$R \approx 106 \text{ Ом}, \quad I_{\text{ХХ}} \approx 0,19 \text{ А}, \quad \omega L \approx 1,15 \text{ кОм}.$$

Если нагрузка во вторичной обмотке будет отключена, то, для того чтобы ток в первичной цепи не тек, нужно во вторичную цепь включить конденсатор такой емкости, чтобы выполнялось условие резонанса

$$\omega L = \frac{9}{\omega C}.$$

Отсюда находим искомую емкость конденсатора:

$$C = \frac{9}{\omega^2 L} \approx 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ Ф}.$$

С.Дмитриев

## Футбольные турниры и арифметические прогрессии

В 2012 году на LXXV Московской математической олимпиаде была предложена следующая задача.

*В однокруговом футбольном турнире (победа – 3 очка, ничья – 1, поражение – 0) участвовали 75 команд. Каков минимально возможный разрыв в очках между первой и последней командами, если никакие две команды не набрали поровну очков?*

Поскольку минимальный разрыв между командами, занявшими соседние места, равен одному очку, очевидно, что разрыв между первой и последней командами не может быть меньше 74 очков. Однако понять, достижима ли эта оценка, довольно сложно. Чтобы это выяснить, естественно для начала рассмотреть турниры с небольшим числом участников.

Перебрав все турниры с 2 или 3 участниками, легко убедиться, что искомого среди них нет. Но для 4 команд такой турнир построить удается (табл.1).

Таблица 1

	A	B	C	D	Сумма
A	–	3	1	1	5
B	0	–	1	3	4
C	1	1	–	1	3
D	1	0	1	–	2

Успешными оказываются попытки и при нескольких следующих значениях числа команд  $n$ . Поэтому возникает предположение, что соответствующие турниры существуют для всех  $n > 3$ . Это действительно так, точнее, верно следующее утверждение.

*Для любого  $n \geq 4$  существует круговой турнир из  $n$  команд, в котором команды набирают  $n - 2$ ,  $n - 1$ ,  $n$ , ...,  $2n - 3$  очков.*

Докажем его по индукции. Для  $n = 4$  искомым турниром мы уже построили. Предположим, что у нас есть такой турнир для  $n$  команд, и покажем, как добавить к нему одну новую команду.

Упорядочим старые команды по убыванию очков и пусть новая команда выигрывает у первой, проигрывает второй и третьей, выигрывает у четвертой, проигрывает пятой и шестой и т.д. (с периодом 3), пока ей не останется сыграть с одной, двумя или тремя командами (в зависимости от остатка  $n$  при делении на 3). В первом случае новая команда играет с последней вничью. Во втором – играет вничью с предпоследней и проигрывает последней, в третьем – играет вничью с последней, проигрывает предпоследней и выигрывает у третьей с конца. Непосредственным вычислением убеждаемся, что во всех трех случаях получится нужное нам распределение очков.

**Упражнение 1.** Проверьте это.

Теперь обобщим задачу и поставим следующий вопрос.

**M2419.** *В однокруговом футбольном турнире участвует  $n$  команд. За победу команда получает 3 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0 очков. При каких*

*натуральных  $d$  набранные командами очки могут образовать арифметическую прогрессию с разностью  $d$ ?*

Для полноты можно позволить  $d$  быть равным 0, и тогда нужный турнир, очевидно, существует (например, если все игры заканчиваются вничью). При всех  $n$  возможен случай  $d = 3$  (если первая команда выигрывает у всех, вторая – у всех, кроме первой, и т.д.). Ясно также, что больше 3 разность быть не может (почему?). Таким образом, далее нам остается исследовать случай  $d = 2$ .

Начнем опять с малых значений  $n$ . При  $n = 2$  и  $n = 3$  искомого турниров нет, при  $n = 4$  есть (табл.2).

Таблица 2

–	1	3	3	7
1	–	3	1	5
0	0	–	3	3
0	1	0	–	1

Но при  $n = 5$  построить турнир не получается. Докажем, что это действительно невозможно. Если набранные очки образуют арифметическую прогрессию с разностью 2, то их сумма делится на 5. Поскольку общее количество игр в турнире пяти команд равно десяти, получаем, что сумма набранных очков равна 30, если все игры завершились победой одной из команд, а каждая ничья уменьшает эту сумму на 1. Следовательно, вничью должно завершиться 0, 5 или 10 игр. Если ничьих нет, то количество очков у каждой команды кратно 3 и разность 2 невозможна, а при 10 ничьих все команды набирают по 4 очка. Рассмотрим случай 5 ничьих. Тогда общая сумма равна 25, т.е. команды должны набрать 9, 7, 5, 3 и 1 очко. Но набрать в четырех играх 9, 7, 5 и 1 очко можно единственным способом: соответственно, три победы и одно поражение; две победы, одна ничья и одно поражение; одна победа, две ничьи и одно поражение; одна ничья и три поражения. Так как суммарное количество побед должно равняться суммарному количеству поражений, у оставшейся команды побед и поражений должно быть поровну, что при 3 очках невозможно.

Продолжив рассматривать малые значения  $n$ , убеждаемся, что при  $n = 6$ ,  $n = 7$  и  $n = 8$  искомого турниры существуют (табл. 3, 4, 5).

Таблица 3

–	0	3	3	3	3	12
3	–	0	3	3	1	10
0	3	–	3	1	1	8
0	0	0	–	3	3	6
0	0	1	0	–	3	4
0	1	1	0	0	–	2

$n = 6$

Поэкспериментировав еще с несколькими значениями  $n$ , можно сформулировать следующую гипотезу.

1) *При всех четных  $n = 2m$ ,  $m \geq 2$ , существует турнир, в котором команды набирают  $m - 1$ ,  $m + 1$ ,  $m + 3$ , ...,  $5m - 3$  очков.*



Таблица 4

-	1	1	3	3	3	3	14
1	-	3	1	1	3	3	12
1	0	-	3	3	0	3	10
0	1	0	-	1	3	3	8
0	1	0	1	-	3	1	6
0	0	3	0	0	-	1	4
0	0	0	0	1	1	-	2

$n = 7$

Таблица 5

-	3	1	1	3	3	3	3	17
0	-	3	3	3	3	3	0	15
1	0	-	3	3	0	3	3	13
1	0	0	-	3	3	1	3	11
0	0	0	0	-	3	3	3	9
0	0	3	0	0	-	1	3	7
0	0	0	1	0	1	-	3	5
0	3	0	0	0	0	0	-	3

$n = 8$

2) При всех нечетных  $n = 2m + 1$ ,  $m \geq 3$ , существует турнир, в котором команды набирают  $m - 1$ ,  $m + 1$ ,  $m + 3$ , ...,  $5m - 1$  очков.

Докажем, что это действительно так. Начнем с четного случая.

Поскольку мы уже построили турниры для 4, 6 и 8 команд, достаточно показать, как добавить к турниру  $2k$  команд шесть новых команд. Пусть каждая из верхних  $k$  старых команд проигрывает первой новой команде и выигрывает у остальных пяти новых, а каждая из нижних  $k$  старых, наоборот, выигрывает у первой новой команды и проигрывает остальным пяти новым. Между собой новые команды играют, как в примере для 6 команд. Нетрудно убедиться, что в результате получится нужное распределение очков.

**Упражнение 2.** Сделайте проверку.

Перейдем к нечетному случаю. Для начала покажем, как добавить к турниру из семи команд еще две. Пусть новые команды играют со старыми так, как показано в таблице 6 (в верхней строчке очки, набранные старыми командами в играх между собой).

Таблица 6

	14	12	10	8	6	4	2
A	3	3	3	3	3	1	3
B	0	0	0	0	0	3	1

Тогда у старых команд становится 17, 15, 13, 11, 9, 5 и 3 очка, а у новых – 19 и 4 очка. Если теперь первая новая команда A проиграет команде B, то получится искомый турнир для 9 команд.

Добавим теперь к этому турниру еще две команды (табл.7). И опять пусть первая новая команда C проигрывает второй новой команде D. В результате получаем искомый турнир 11 команд.

Таблица 7

	19	17	15	13	11	9	7	5	3
C	3	3	3	3	3	3	0	3	3
D	0	0	0	0	0	0	3	1	1

Операцию добавления двух команд можно провести для любого нечетного  $n$ . Пусть все старые команды, кроме двух последних, набирают против новых по 3 очка, а две последние – по одному, причем если остаток от деления  $n$  на 3 равен 0 или 2, то обе эти команды набирают свои очки против одной из новых команд, а если 1, то против разных команд. Тогда можно распределить очки между новыми командами так, что одна из них окажется на первом месте, а другая – на третьем с конца.

**Упражнение 3.** Докажите это.

Однако, поскольку у нас уже есть турниры для 7, 9 и 11 команд, проще действовать аналогично четному случаю и добавлять к турниру для  $2k + 1$  команд еще шесть новых команд. Пусть каждая из верхних  $k$  старых команд проигрывает первой новой команде и побеждает остальных, а каждая из  $k$  нижних, наоборот, выигрывает у первой новой и проигрывает пяти остальным. Наконец, пусть средняя старая команда проигрывает первым трем новым и выигрывает у трех остальных новых. Между собой новые команды пусть сыграют так, как показано в таблице 8.

Таблица 8

-	1	1	3	3	3	11
1	-	1	3	3	1	9
1	1	-	3	1	1	7
0	0	0	-	3	3	6
0	0	1	0	-	3	4
0	1	1	0	0	-	2

В результате получаем нужное распределение очков. Утверждение полностью доказано.

**Упражнение 4.** Убедитесь в этом.

Теперь можно подвести итог и дать полный ответ на поставленный вопрос: при  $d = 0$  и  $d = 3$  искомый турнир существует для всех  $n$ , при  $d = 1$  – для всех  $n$ , кроме 2 и 3, при  $d = 2$  – для всех  $n$ , кроме 2, 3 и 5.

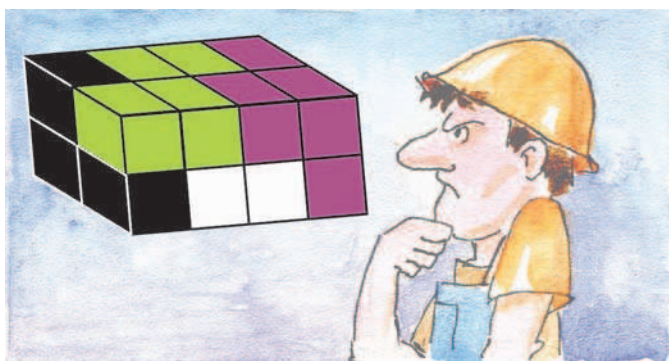
В заключение предлагаем подумать над тем, как изменится ответ, если вместо футбольных рассматривать турниры по другим видам спорта, например по волейболу, где при победе одной из команд со счетом 3:0 или 3:1 выигравшая и проигравшая команды получают 3 и 0 очков соответственно, а при счете 3:2 – 2 и 1.

А.Заславский

# Задачи

1. Имеются 4 детали, каждая склеена из четырех кубиков и окрашена в свой цвет. Из них сложили кирпич размером  $2 \times 2 \times 4$  без дырок (как показано на рисунке). Как выглядит белая деталь?

*Фольклор*



2. Семь девочек стоят в ряд, как показано на рисунке, и держат в руках конфеты. У девочек, которых вы видите справа от Тани, 13 конфет, справа от Ксюши — 33, справа от Ани — 23, справа от Иры — 8, справа от Вали — 27, справа от Нади — 16. Сколько конфет у Кати?

*Фольклор*



3. Две гоночные машины — красная и зеленая — выехали из города *A* в город *B* по одной и той же дороге, стартовав и финишировав одновременно. При этом зеленая машина ни разу не обогнала красную. Могло ли быть так, что не менее 90% времени зеленая машина ехала быстрее красной?

*Фольклор*

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Задачи 1–3 публикуются совместно с журналом «Квантик», задачи 4 и 5 взяты из XIV Московской устной олимпиады по математике для 6–7 классов.



4. Мальвина велела Буратино разрезать квадрат на 7 прямоугольников (не обязательно различных), у каждого из которых одна сторона в два раза больше другой. Выполнимо ли это задание?

*Фольклор*



5. В магазине продают коробки карандашей. Среди них есть не менее пяти коробок разной цены (никакие две из них не стоят одинаково). Какие бы две коробки ни купил Вася, Петя всегда сможет также купить две коробки, потратив столько же денег. Какое наименьшее количество коробок карандашей должно быть в продаже?

*Н.Мартынова*





# XXII Турнир математических боев имени А.П.Савина

*XXII Турнир имени А.П.Савина прошел с 26 июня по 2 июля 2016 года на базе отдыха «Берендеевы Поляны» (Костромская область) для школьников, закончивших 6–9 классы. Подробнее об этих турнирах мы писали, например, в «Кванте» №1 за 2015 год.*

*С вопросами об участии обращайтесь к председателю оргкомитета А.Д.Блинкову по электронной почте [blinkov@mcste.ru](mailto:blinkov@mcste.ru).*

## Избранные задачи

**1 (7).** Стопку из девятнадцати листов бумаги согнули пополам и сшили двумя маленькими скрепками так, что получилась тетрадка. На «обложке» Саша нарисовал вертикальные и горизонтальные линии (от края до края, не задевая скрепок). Когда он разрезал тетрадку по этим линиям, она распалась на 2016 отдельных частей. Какое наименьшее количество линий мог провести Саша?

*А.Хачатурян*

**2 (7–8).** Начав с некоторого натурального числа, Петя каждым шагом увеличивает или уменьшает его на какую-нибудь из его цифр (возможно, на цифру 0), строго чередуя сложение и вычитание. Первая операция – сложение. Из какого наименьшего натурального числа Петя может так получить 2016?

*А.Шаповалов*

**3 (8).** В квадрат  $ABCD$  вписана окружность, которая касается сторон  $AB$  и  $AD$  в точках  $K$  и  $M$  соответственно. Прямая  $CK$  вторично пересекает окружность в точке  $N$ . Найдите угол  $BMN$ .

*М.Волчкевич*

**4 (8).** В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BB'$ . Точка  $N$  – пересечение описанной окружности треугольника  $ABB'$  и внешней биссектрисы угла  $A$ , точка  $M$  – пересечение описанной окружности треугольника  $BB'C$  и внешней биссектрисы угла  $C$ . Прямая  $NM$  пересекает отрезок  $BB'$  в точке  $K$ . Докажите, что описанные окружности треугольников  $ANK$  и  $CMK$  пересекаются на  $BB'$ .

*Л.Попов*

**5 (8).** В равностороннем выпуклом шестиугольнике шесть диагоналей между собой равны. Обязательно ли равны между собой все его углы?

*М.Евдокимов*

**6 (7–8).** Можно ли разрезать куб на кубики 2016-ти различных размеров так, чтобы кубиков каждого размера было поровну?

*А.Шаповалов, И.Раскина*

**7 (7).** Какое наименьшее количество полей шахматной доски нужно испачкать смолой, чтобы на чистые клетки нельзя было поставить пять не бьющих друг друга ладей?

*Е.Бакаев*

**8 (7–8).** Клетки доски размером  $10 \times 10$  заполнены числами. Четырехклеточный уголок назовем *упорядоченным*, если в этом уголке каждое из двух чисел, имеющих двух соседей, больше одного из своих соседей и меньше другого. Какое наибольшее количество упорядоченных уголков (возможно, перекрывающихся) может оказаться на доске?

*Е.Бакаев*

**9 (6–7).** На столе лежит кучка из 55 орехов. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход надо разделить одну из имеющихся кучек на две меньшие и добавить еще две кучки орехов, равные одной из полученных (запас дополнительных орехов неограничен). Кто не может сделать ход, платит штраф. Сможет ли кто-то из мальчиков играть так, чтобы наверняка не платить штраф?

*А.Шаповалов*

**10 (8).** Равносторонний треугольник со стороной  $N$  разбит линиями, параллельными сторонам, на равносторонние треугольники со стороной 1. В вершине исходного треугольника стоит фишка. Петя и Вася играют в игру (начинает Петя). Каждым своим ходом разрешается сдвинуть фишку в соседний (находящийся на расстоянии 1) узел треугольной сетки, в котором фишка до этого не была. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из мальчиков может гарантировать себе победу?

*Р.Крутовский*

*Материал подготовил А. Блинков*

В скобках после номера задачи указаны классы, в которых она предлагалась.

# Конкурс имени А.П.Савина «Математика 7–9»

*Мы начинаем очередной конкурс по решению математических задач. Они рассчитаны в первую очередь на учащихся 7–9 классов, но мы будем рады участию школьников всех возрастов.*

*Высылайте решения задач, с которыми справитесь, не позднее 1 декабря 2016 года электронной почтой по адресу: [savin.contest@gmail.com](mailto:savin.contest@gmail.com) или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.*

*Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.*

*Желаем успеха!*

1. Можно ли разложить несколько яблок по 10 тарелкам так, чтобы на любых двух тарелках было вместе либо 5, либо 8, либо 11 яблок, и все три



варианта встречались? Если да, то сколько всего могло быть яблок? Укажите все возможности.

*О.Зайцева-Иври*

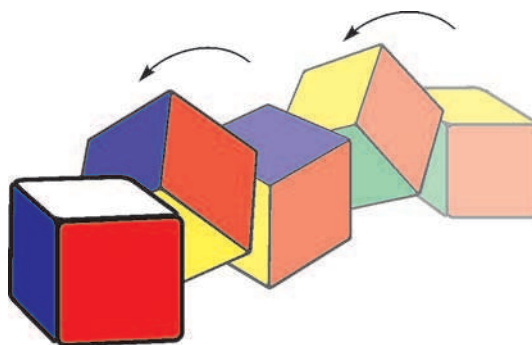
2. В трапеции  $ABCD$  точка  $M$  — середина боковой стороны  $CD$ . Докажите, что если точка  $M$  лежит на биссектрисе угла  $A$ , то она лежит и на биссектрисе угла  $B$ .

*Е.Бакаев*

3. Четыре логика  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  сидят за круглым столом в таком порядке (если двигаться по часовой стрелке). Девять карт одной масти (шестерка, семерка, ..., король, туз) перемешали и четыре из них раздали логикам (каждому по карте). Все логики знают это, но каждый видит лишь свою карту. Логикам задали один и тот же вопрос: «Ваша карта старше, чем у вашего соседа справа?» После этого  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  по очереди (именно в таком порядке) сказали «не знаю». Какая карта у  $D$ ? (Логика слышат ответы друг друга.)

*М.Евдокимов*

4. а) Куб перекачивают по плоскости, поворачивая его вокруг ребер (без проскальзывания). После нескольких перекачиваний куб оказался в точности на



прежнем месте. Обязательно ли каждая вершина куба оказалась там, где была вначале?

б) Тот же вопрос для правильного тетраэдра (все четыре грани — равносторонние треугольники).

*Фольклор*

5. а) У каждого из 12 пиратов есть некоторое количество золотого песка. Они могут встречаться по двое или по трое; при встрече весь имеющийся у участников встречи песок делится поровну. Докажите, что пираты могут добиться, чтобы после нескольких встреч у всех было поровну песка.



б) Верно ли аналогичное утверждение для 13 человек, если разрешается встречаться в любом составе, только не всем вместе, и делить песок поровну?

*Фольклор*



# Вспомогательные квадраты

Е. БАКАЕВ, А. БЛИНКОВ

**В** МАТЕМАТИКЕ ВСЕГДА ИНТЕРЕСНО НАХОДИТЬ КАкие-то общие закономерности при решении, казалось бы, не очень похожих задач. В предлагаемом материале рассматривается серия геометрических задач, при решении которых используются схожие дополнительные построения. Идея использования таких построений возникает при рассмотрении свойств, которыми обладают различные конструкции из квадратов на плоскости. Эти свойства будем рассматривать постепенно, по мере необходимости, и называть леммами.

**Лемма 1.** *Четырехугольник, переходящий в себя при повороте на  $90^\circ$  вокруг точки пересечения его диагоналей, является квадратом.*

**Упражнение 1.** Докажите эту лемму.

Решение ряда задач будет сводиться к следующей конструкции: вершины одного квадрата лежат на сторонах другого. В подобных случаях принято говорить, что один из квадратов описан вокруг другого (такой же термин применяется и для других многоугольников с одинаковым количеством вершин в аналогичных ситуациях).

**Лемма 2.** *Прямоугольник, описанный около данного квадрата, является квадратом.*

**Доказательство.** Пусть вершины квадрата  $KLMN$  лежат на сторонах прямоугольника  $ABCD$  (рис.1). Рассмотрим поворот на  $90^\circ$  вокруг центра  $O$  квадрата  $KLMN$ , например, по часовой стрелке. образом точки  $K$  является точка  $L$ , поэтому прямая  $AB$ , содержащая  $K$ , переходит в прямую, ей перпендикулярную и содержащую точку  $L$ , т.е. в прямую  $BC$ . Аналогично, образами прямых  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  являются прямые  $CD$ ,  $DA$  и  $AB$  соответственно.

Следовательно, каждая вершина прямоугольника переходит в соседнюю (по часовой стрелке), значит,  $ABCD$  – квадрат.

Отметим два очевидных следствия, которые помогут при решении задач:

- 1) точка  $O$  – общий центр двух квадратов;
- 2) отрезки  $KM$  и  $LN$ , пересекаясь, делят квадрат  $ABCD$  на четыре равные фигуры.

**Упражнение 2.** На сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  квадрата  $ABCD$  отмечены точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  соответственно так, что  $AK = BL = CM = DN$ . Докажите, что  $KLMN$  – квадрат.

Разберем несколько задач.

**Задача 1** (В.Произволов, книга «Задачи на вырост»). *В четырехугольнике  $ABCD$ :  $AB = BC$ ,  $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ . Найдите его площадь, если расстояние от вершины  $B$  до прямой  $AD$  равно 1.*

**Решение.** Построим точки  $A'$  и  $C'$ , симметричные  $A$  и  $C$  относительно точки  $B$  (рис.2,а). Тогда  $ACA'C'$  – квадрат. Опишем вокруг него прямоугольник, начав с

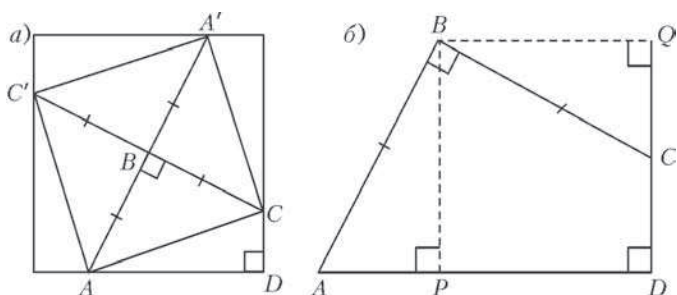


Рис. 2

вершины  $D$ . По лемме 2 этот прямоугольник является квадратом. Тогда площадь  $ABCD$  равна четверти площади квадрата со стороной 2 (см. следствие 2 леммы 2), т.е. равна 1.

### Упражнения

**3.** По рисунку 2,б восстановите другой способ решения задачи 1.

**4** (М.Волчкевич). В квадрате  $ABCD$  на стороне  $CD$  и на продолжении стороны  $DA$  за точку  $A$  отмечены точки  $M$  и  $K$  соответственно. Докажите, что  $AK = CM$  тогда и только тогда, когда  $\angle BKM = 45^\circ$ .

**Задача 2.** *На гипотенузе  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  во внешнюю сторону построен квадрат с центром в точке  $O$ . Докажите, что  $CO$  – биссектриса прямого угла.*

**Решение.** Построим вспомогательный квадрат с вершиной  $C$ , описанный около данного (рис.3,а). Тогда  $CO$  содержит диагональ построенного квадрата, которая делит угол  $C$  пополам.

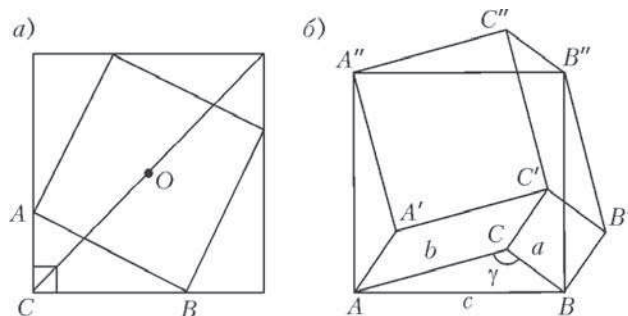


Рис. 3

Конечно, эта задача (как и многие последующие) имеет и другие способы решения, но мы сосредоточимся на построении вспомогательного квадрата.

Отметим, что чертеж квадрата, описанного около квадрата, который встретился уже несколько раз, может служить иллюстрацией одного из многочисленных доказательств теоремы Пифагора, использующих площадь. Действительно, если  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$  (см. рис. 3,а), то  $(a + b)^2 = c^2 + 2ab$ , откуда  $c^2 = a^2 + b^2$ .

Более сложная конструкция, использующая вспомогательные квадраты, позволяет сделать обобщение.

**Упражнение 5** (Г.Шарыгин, «Лекции по элементарной геометрии»). Используя рисунок 3,б, восстановите доказательство теоремы косинусов:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ .

**Задача 3.** На сторонах прямоугольного треугольника с катетами  $a$  и  $b$  построены квадраты, лежащие вне треугольника. Найдите площадь треугольника с вершинами в центрах квадратов.

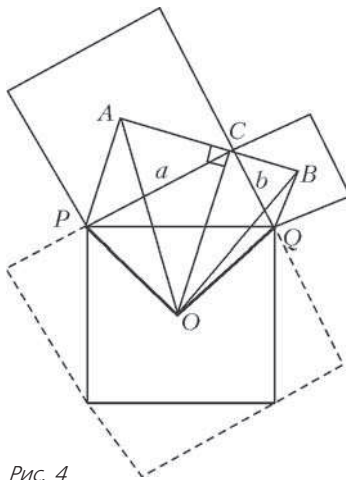


Рис. 4

Решение. Пусть  $C$  – вершина прямого угла данного треугольника  $PCQ$ ,  $A, B$  и  $O$  – центры квадратов, построенных на его катетах и гипотенузе соответственно (рис.4).

Так как  $CA$  и  $CB$  – биссектрисы углов квадратов, то точка  $C$  лежит на отрезке  $AB$ . Опишем вспомогательный квадрат вокруг квадрата, построенного на гипотенузе, пролив катеты исходного

треугольника. Тогда точка  $O$  является центром этого квадрата, поэтому  $CO$  – биссектриса его прямого угла. Следовательно,  $OC \perp AB$ . Так как  $PA \perp AB$ , то  $PA \parallel OC$ , значит, площадь треугольника  $ACO$  равна площади треугольника  $PCO$ . Аналогично, равны площади треугольников  $BCO$  и  $QCO$ . Следовательно, площадь треугольника  $AOB$  равна площади четырехугольника  $PCQO$ , который составляет четверть от построенного квадрата со стороной  $a + b$ . Таким образом,

$$S_{\Delta AOB} = \frac{(a+b)^2}{4}.$$

**Задача 4** (В.Произволов, «Задачи на вырост»). Квадраты  $ABCD$  и  $AKLM$  расположены так, как показано на рисунке 5,а. Докажите, что: а)  $CL \parallel BD$ ; б) точка  $M$  лежит на прямой  $CD$ .

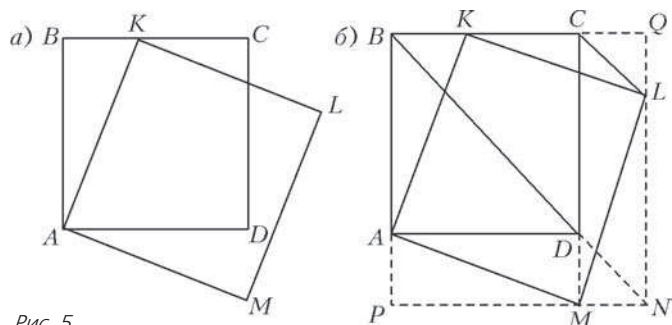


Рис. 5

**Решение.** Построим вспомогательный квадрат  $BQNP$  (рис.5,б). Тогда  $CQ$  и  $AP$  равны как разности сторон двух квадратов. Также  $AP = BK = QL = MN$  по лемме 2. Из равенства  $CQ = QL$  следует утверждение пункта а), а из равенства  $CQ = MN$  – утверждение пункта б).

**Задача 5** (В.Расторгуев, Конкурс имени А.П.Савина, «Квант» №5–6 за 2015 г.). Дан квадрат  $ABCD$ . Через

вершину  $C$  проведена прямая  $m$ , не имеющая с квадратом других общих точек (рис.6,а). Точки  $E$  и  $F$  – проекции вершин  $B$  и  $D$  на прямую  $m$ . Отрезки  $BF$  и  $DE$  пересекаются в точке  $K$ . Докажите, что прямая  $AK$  перпендикулярна прямой  $m$ .

**Решение.** Построим вспомогательный квадрат  $EFGH$  (рис.6,б). Из точки  $A$  опустим перпендикуляр  $AN$  на

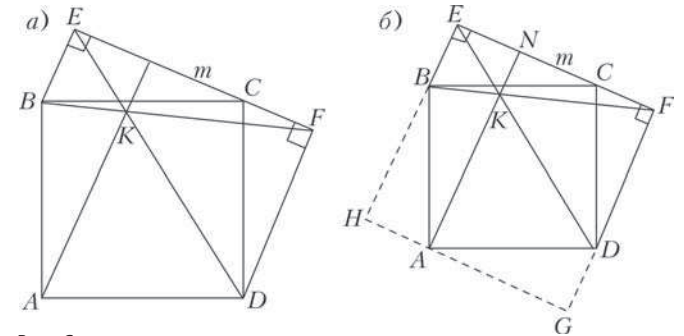


Рис. 6

прямую  $m$ . Тогда  $EN = HA = BE$  и  $FD = GA$  (свойства квадрата, описанного около квадрата).

Из подобия треугольников  $BEK$  и  $FDK$  следует, что  $\frac{BK}{FK} = \frac{BE}{FD} = \frac{HA}{GA}$ . Следовательно, прямая  $AN$ , параллельная  $HE$ , проходит через точку  $K$ , т.е.  $AK \perp m$ .

Рассмотрим теперь другое взаимное расположение двух квадратов, а именно, когда два квадрата в пересечении образуют восьмиугольник. Такая конструкция также обладает интересными свойствами

**Лемма 3.** Квадраты  $ABCD$  и  $KLMN$  расположены так, что в пересечении образуется восьмиугольник (рис.7,а). Тогда диагонали  $PQ$  и  $RT$  этого восьмиугольника равны и перпендикулярны.

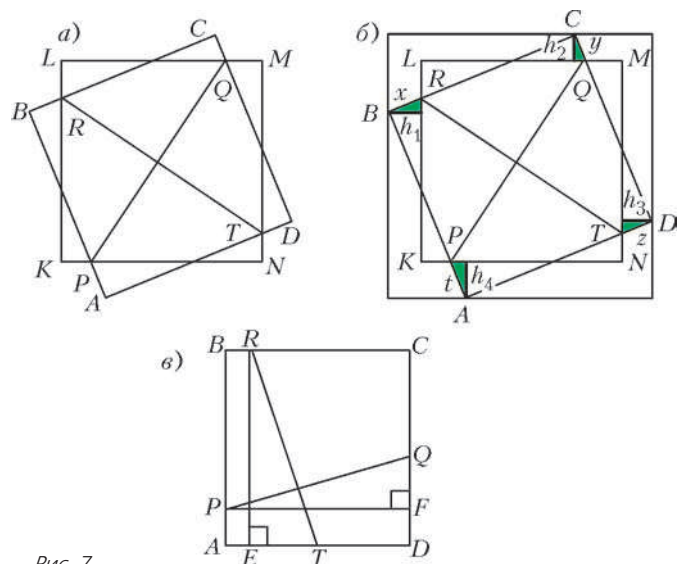


Рис. 7

**Доказательство.** Через вершины квадрата  $ABCD$  проведем прямые, соответственно параллельные сторонам квадрата  $KLMN$  (рис.7,б). По доказанному выше, образовавшийся прямоугольник является квадратом. Введем обозначения:  $AP = t$ ,  $BR = x$ ,  $CQ = y$  и  $DT = z$ . Из вершин



квадрата  $ABCD$  проведем перпендикуляры  $h_1, h_2, h_3$  и  $h_4$  к ближайшим сторонам квадрата  $KLMN$ . Тогда  $h_1 + h_3 = h_2 + h_4$  (каждая сумма равна разности сторон двух квадратов: вспомогательного и  $KLMN$ ).

Заметим, что углы в зеленых треугольниках равны между собой, так как их соответствующие стороны попарно параллельны или перпендикулярны. Тогда, разделив почленно все слагаемые полученного равенства на косинус этого угла, получим  $x + z = y + t$ . Следовательно, равны проекции  $FQ$  и  $ET$  отрезков  $PQ$  и  $RT$  на соседние стороны квадрата  $ABCD$  (рис.7,б). Значит, равны прямоугольные треугольники  $QPF$  и  $TRE$  (по двум катетам). Из равенства этих треугольников следует как равенство их гипотенуз, так и равенство соответствующих острых углов, что обеспечивает перпендикулярность  $PQ$  и  $RT$ .

### Упражнения

6. Найдите другой способ доказательства леммы 3, используя поворот.

7. а) Докажите, что если два отрезка, соединяющие точки на противоположных сторонах квадрата перпендикулярны, то они равны. б) Верно ли обратное утверждение?

**Задача 6** (Е.Бакаев, LXXVII Московская математическая олимпиада). На квадратном столе лежит квадратная скатерть так, что ни один угол стола не закрыт, но с каждой стороны стола свисает треугольный кусок скатерти. Известно, что какие-то два соседних куска равны. Докажите, что и два других куска тоже равны.

**Решение.** Пусть квадрат  $ABCD$  – это скатерть, а закрашенные треугольники – ее куски, «свисающие» со стола (рис.8). В этих треугольниках равны соответствующие острые углы (у них стороны либо соответственно параллельны, либо соответственно перпендикулярны), значит, эти четыре треугольника подобны.

Проведем через вершины квадрата  $ABCD$  прямые, соответственно параллельные сторонам квадрата-стола. Получим квадрат  $KLMN$ .

Рис. 8

Из вершин квадрата  $ABCD$  проведем высоты в закрашенных треугольниках. Как было показано выше, сумма высот, проведенных из  $A$  и  $C$ , равна сумме высот, проведенных из  $B$  и  $D$ . Пусть известно, что равны зеленые треугольники, тогда равны их высоты. Следовательно, равны и высоты серых треугольников, а так как эти треугольники подобны, то равны и сами серые треугольники.

**Упражнение 8.** Найдите другой способ решения задачи 6, использующий поворот.

Если к следующим двум задачам подходить формально, то квадраты там выступают не в роли вспомогательных, но их решения основаны на применении леммы 3, при доказательстве которой уже использовались вспомогательные квадраты.

**Задача 7** (Л.Штейнгарц, XIV Устная олимпиада по геометрии). Два квадрата расположены так, как показано на рисунке 9,а. Докажите, что площади закрашенных четырехугольников равны.

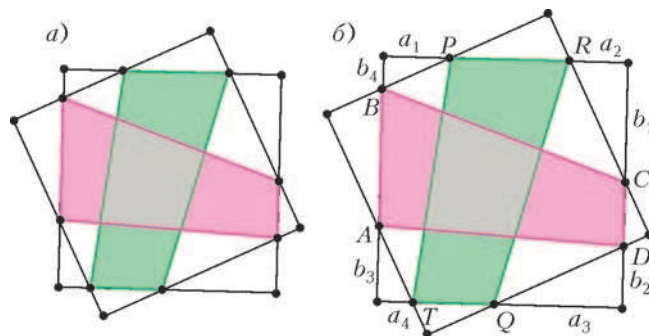


Рис. 9

**Решение.** Введем обозначения так, как показано на рисунке 9,б. Далее можно рассуждать по-разному.

*Первый способ.* По лемме 3 получим, что  $AC = PQ$  и  $AC \perp PQ$ . Аналогично,  $BD = RT$  и  $BD \perp RT$ . Таким образом, в четырехугольниках  $ABCD$  и  $PRQT$  соответственно равны диагонали и равны углы между диагоналями (острые углы с соответственно перпендикулярными сторонами). Так как площадь четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними, то  $S_{ABCD} = S_{PRQT}$ .

*Второй способ.* Воспользуемся тем, что  $ABCD$  и  $PRQT$  – трапеции с равными высотами (стороны квадрата). Тогда требуемое утверждение будет выполняться, если будет верным равенство:  $AB + CD = PR + QT$ .

В справедливости этого равенства несложно убедиться, если использовать промежуточный результат, полученный при доказательстве леммы 3:  $a_1 + a_3 = b_1 + b_3$  и  $a_2 + a_4 = b_2 + b_4$ .

**Задача 8** (Д.Терешин, I Олимпиада по геометрии имени И.Ф.Шарыгина, заочный тур). Вокруг выпуклого четырехугольника  $PRQT$  описаны три прямоугольника. Известно, что два из этих прямоугольников являются квадратами. Верно ли, что и третий обязательно является квадратом?

**Решение.** Пусть квадраты  $ABCD$  и  $KLMN$  описаны около данного четырехугольника, тогда образуется конструкция, показанная на рисунке 7,а. По лемме 3,  $PQ = RT$  и  $PQ \perp RT$ , т.е. диагонали данного четырехугольника равны и перпендикулярны.

Докажем, что любой прямоугольник, описанный около такого четырехугольника, является квадратом. Действительно, пусть вокруг  $PRQT$  описан прямоугольник  $EFGH$  (рис.10). Через центр симметрии  $O$  этого прямоугольника проведем отрезки  $P'Q'$  и  $R'T'$ , соответственно параллельные  $PQ$  и  $RT$ . Понятно, что  $P'Q' = PQ$ ,  $R'T' = RT$ ,  $O$  – середина отрезков  $P'Q'$  и  $R'T'$ . Тогда параллелограмм  $P'R'Q'T'$ , в котором

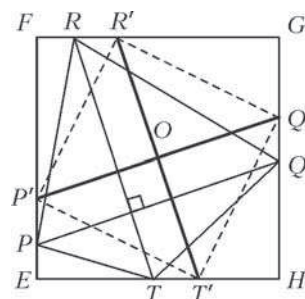


Рис. 10

диагонали равны и перпендикулярны, является квадратом, поэтому доказываемое утверждение следует из леммы 2.

Теперь рассмотрим несколько задач, в которых построение вспомогательного квадрата далеко не очевидно. При решении этих задач существенным образом используются движения.

**Задача 9.** На сторонах  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  во внешнюю сторону построены квадраты  $ABDE$  и  $ACFG$ . Докажите, что прямые  $BF$  и  $CD$  пересекаются на высоте треугольника  $ABC$ .

**Решение.** Построим вспомогательный квадрат на третьей стороне данного треугольника –  $BCKL$  (рис.11). Из

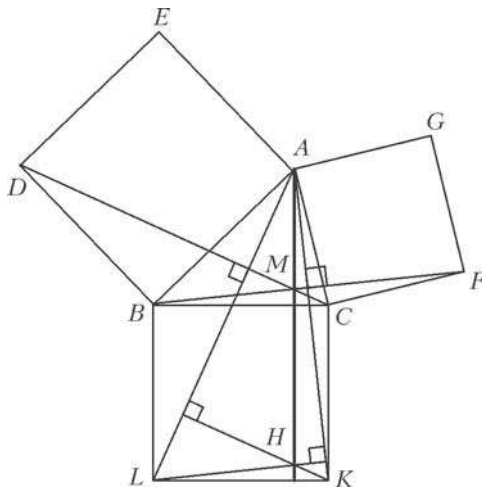


Рис. 11

вершин  $K$  и  $L$  треугольника  $AKL$  проведем его высоты, которые пересекутся в точке  $H$ . Тогда  $AH \perp KL$ .

Так как  $BC = BL$ ,  $BD = BA$  и  $\angle DBC = 90^\circ + \angle ABC = \angle ABL$ , то при повороте на  $90^\circ$  против часовой стрелки треугольник  $ABL$  перейдет в треугольник  $DBC$ . Следовательно,  $DC \perp AL$ . Аналогично доказывается, что  $FB \perp AK$ .

Таким образом,  $CD \parallel KH$  и  $BF \parallel LH$ , поэтому при параллельном переносе «вверх» на расстояние, равное стороне квадрата  $BCKL$ , точка  $H$  перейдет в точку  $M$  пересечения прямых  $BF$  и  $CD$ . При этом  $M$  лежит на прямой  $AH$ , которая содержит высоту треугольника  $ABC$ , откуда и следует утверждение задачи.

**Задача 10** (Е.Бакаев, XXII Турнир математических боев имени А.П.Савина). В остроугольном треугольнике  $ABC$ :  $H$  – ортоцентр. На сторонах  $AC$  и  $BC$  отмечены

точки  $K$  и  $L$  соответственно так, что  $AK = BH$  и  $BL = AH$ ,  $M$  – середина отрезка  $KL$ . Докажите, что угол  $AMB$  – прямой.

**Решение.** На стороне  $AB$  данного треугольника построим квадрат (рис.12). Рассмотрим поворот вокруг центра этого квадрата на угол  $90^\circ$ , например, против часовой стрелки. Образом вер-

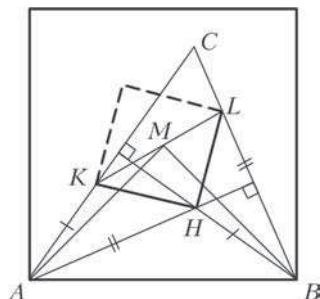


Рис. 12

шины  $A$  при таком повороте является вершина  $B$ , образом луча  $AK$  – луч  $BH$  (в силу их перпендикулярности), тогда образом точки  $K$  будет точка  $H$ , так как  $AK = BH$ . Аналогично, образом точки  $H$  при этом повороте является точка  $L$ . Тогда центр поворота является серединой отрезка  $KL$ , т.е. он совпадает с точкой  $M$ . Так как сторона квадрата видна из его центра под прямым углом, то угол  $AMB$  – прямой.

Отметим, что треугольник  $KHL$  – равнобедренный и прямоугольный, поэтому является «половиной» квадрата с тем же центром  $M$ .

В заключение докажем так называемую «теорему о пицце».

**Теорема.** Из точки, лежащей внутри круга, провели 8 лучей так, что углы между соседними лучами равны  $45^\circ$  градусам. Части, на которые круг оказался разделен, раскрасили, чередуя два цвета. Тогда площадь, закрашенная одним цветом, равна площади, закрашенной другим цветом (рис.13,а).

Таким образом, двое людей могут разделить круглую пиццу поровну, разрезав ее на 8 частей классическим способом, причем для этого не обязательно находить ее центр. Отсюда теорема и получила свое название.

**Доказательство.** Сначала сформулируем и докажем аналог этой теоремы для квадрата:

Через произвольную точку внутри квадрата проведем прямые, параллельные его сторонам и диагоналям, которые разбили квадрат на части. Эти части закрасили через одну (рис.13,б). Тогда закрашенная площадь равна половине площади квадрата.

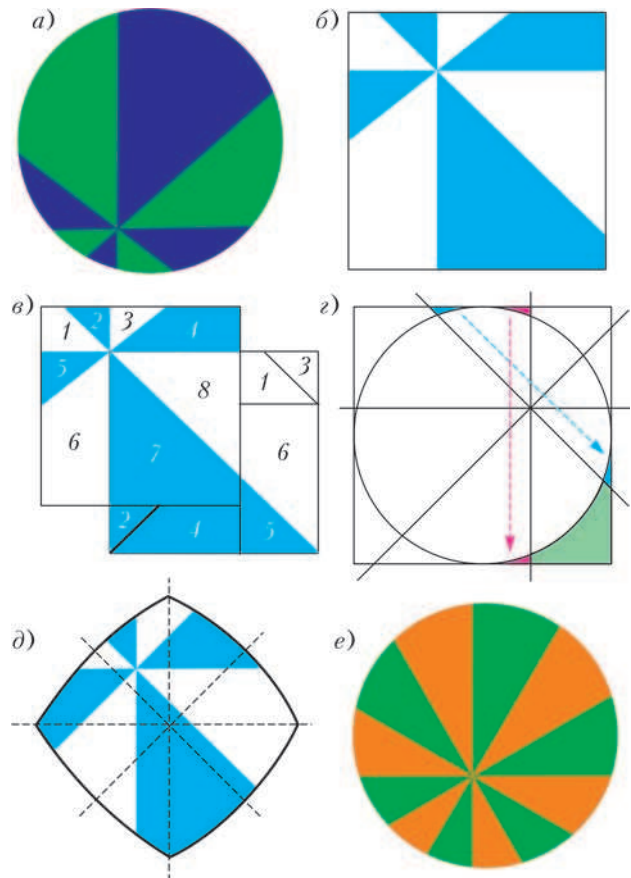


Рис. 13



Действительно, пронумеруем полученные части квадрата цифрами от 1 до 8. «Сдвинем» его так, как показано на рисунке 13,в, сохранив части 7 и 8 и переложив остальные части так, чтобы все закрашенные части оказались под диагональю нового квадрата, а не закрашенные – над диагональю.

Перейдем к доказательству самой теоремы. Рассмотрим квадрат, описанный около данного круга, со стороной, параллельной одной из линий разреза. Так как равенство площадей разноцветных частей квадрата уже доказано, то достаточно доказать равенство таких площадей в фигуре, получаемой из квадрата вырезанием из него круга. Сделать это можно, опять-таки, используя перегруппировку частей. Рассмотрим противоположные части этой фигуры (см. пример на рис.13,з). Нетрудно заметить, что их кусочки можно переложить так, что получится четверть такой фигуры.

**Упражнение 9.** Проверьте это и доведите до конца доказательство теоремы.

Приведенное выше доказательство изложено в уже упомянутой книге В.В.Произволова «Задачи на вырост», но в ней автор доказывает более сильное утверждение: *Выпуклая фигура имеет четыре оси симметрии (углы между соседними осями составляют 45 градусов). Через внутреннюю точку фигуры проведены параллельные этим осям четыре прямые, которые делят фигуру на восемь частей, закрашенных через одну (рис.13,д). Тогда сумма площадей закрашенных частей равна сумме площадей белых частей.*

**Упражнение 10.** Убедитесь в том, что намеченное выше доказательство «теоремы о пицце» работает и в этом случае.

Завершая разговор, отметим, что «теорема о пицце» верна даже в тех случаях, когда пицца режется не на 8 частей, а на любое большее количество, кратное четырем (если углы между соседними разрезами по-прежнему равны между собой; см., например, рис.13,е).

Но доказательство этого утверждения уже выходит за рамки нашей статьи.

В следующих задачах читателям предлагается самим поискать вспомогательные квадраты.

#### Задачи для самостоятельного решения

**1** (Е.Бакаев, XXXVII Турнир имени М.В.Ломоносова). На сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  квадрата  $ABCD$  отмечены точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  соответственно так, что  $AK = BL = CM = AN$ . Докажите равенство углов  $LMC$  и  $MKN$ .

**2** (Н.Стрелкова, XIV Устная олимпиада по геометрии). Внутри прямоугольника проведена ломаная, звенья которой равны меньшей стороне прямоугольника, а соседние звенья

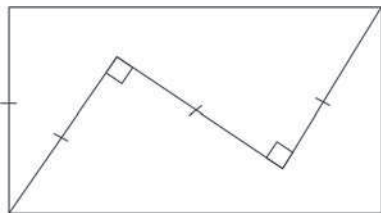


Рис. 14

перпендикулярны (рис.14). Найдите отношение сторон прямоугольника.

**3** (Е.Бакаев, XIV Московская устная олимпиада для 6–7 классов). Квадраты  $ABCD$  и  $BEFG$  расположены так, как показано на рисунке 15. Оказалось, что точки  $A$ ,  $G$  и  $E$  лежат на одной прямой. Докажите, что тогда точки  $D$ ,  $F$  и  $E$  также лежат на одной прямой.

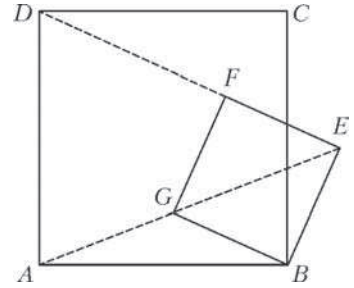


Рис. 15

**4** (В.Произволов, «Задачи на вырост»). Квадраты  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$  расположены так, что вершины  $A$  и  $D$  первого квадрата лежат на сторонах  $A'B'$  и  $A'D'$  второго, а вершина  $C'$  второго – на стороне  $BC$  первого (рис.16). Докажите, что отрезок  $MN$ , соединяющий две общие точки границ квадратов, проходит через центр  $O$  квадрата  $ABCD$ .

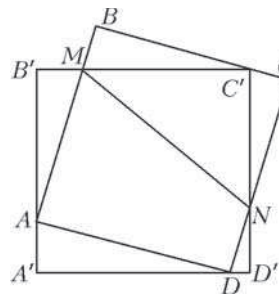


Рис. 16

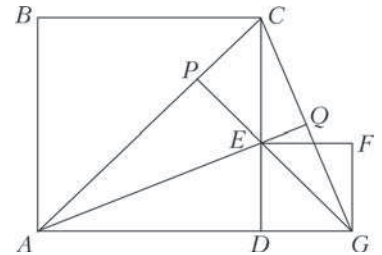


Рис. 17

**5.** Квадраты  $ABCD$  и  $DEFG$  расположены так, как показано на рисунке 17. Прямые  $AC$  и  $GE$  пересекаются в точке  $P$ , а прямые  $AE$  и  $CG$  – в точке  $Q$ . Докажите, что точки  $B$ ,  $P$ ,  $Q$  и  $F$  лежат на одной прямой.

**6** (Е.Бакаев, XXXIX Турнир имени М.В.Ломоносова). Две противоположные стороны четырехугольника равны и перпендикулярны, а две другие имеют длины  $a$  и  $b$  ( $a > b$ ). Найдите его площадь.

**7.** Дан равнобедренный прямоугольный треугольник  $ABC$ . На продолжениях катетов  $AB$  и  $AC$  отложены равные отрезки  $BK$  и  $CL$ . Из точек  $A$  и  $B$  проведены перпендикуляры к  $KC$ , которые пересекли  $KL$  в точках  $F$  и  $E$  соответственно. Докажите, что  $EF = FL$ .

**8** (Ю.Блинков, X Устная олимпиада по геометрии). В выпуклом пятиугольнике  $ABCDE$ :  $\angle A = \angle C = 90^\circ$ ,  $AB = AE$ ,  $BC = CD$ ,  $AC = 1$ . Найдите площадь пятиугольника.

**9** (Е. Ермакова, XII Творческий конкурс учителей по математике). Постиранный квадратный платок площади  $1 \text{ м}^2$ . Для просушки его вешают на веревку так, чтобы центр платка был на веревке. За час успевают высохнуть только те части платка, которые не перекрывают друг друга. Какова наибольшая суммарная площадь этих частей?

**10** (И.Шарыгин, LVI Московская математическая олимпиада). На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  во внешнюю сторону построен квадрат с центром  $O$ . Точки  $M$  и  $N$  – середины сторон  $AC$  и  $BC$  соответственно, а длины этих сторон равны соответственно  $b$  и  $a$ . Найдите наибольшее значение суммы  $OM + ON$ , если угол  $ACB$  является переменной величиной.

**11** (И.Челябов, журнал «Математика в школе» №3 за 2014 г.). Разрежьте прямоугольный треугольник с гипотенузой длины  $c$  на три части, из которых можно сложить прямоугольник, разность длин сторон которого равна  $c$ .

# В тире и рядом

**С.ВАРЛАМОВ**

*Шишка отскочила  
Прямо мишке в лоб!  
Мишка рассердился...*

НА ФОТОГРАФИИ, ПРИВЕДЕННОЙ НА РИСУНКЕ 1, изображен участок поверхности толстого (10 мм) листа фанеры размером примерно 15×15 мм. В середине снимка видна ямка – след от удара свинцовой пульки



Рис. 1

массой 0,68 г калибра 4,5 мм, выпущенной из пневматического пистолета. Диаметр ямки приблизительно 3 мм, это меньше калибра пули, т.е. пуля не застряла в фанере. Выстрел был произведен с небольшого расстояния – около 2 м. Пуля упруго отразилась от листа фанеры и попала стрелку прямо в лоб. Шишка на лбу не появилась, так как при ударе и отскоке пуля потеряла большую часть своей кинетической энергии.



Первый вывод из случившегося: проводить такого рода эксперименты нужно, соблюдая правила техники безопасности. Стрелять можно, находясь за прозрачной, например стеклянной, стенкой (прозрачной – чтобы все-таки что-то видеть). Можно также в несколько раз увеличить расстояние от стрелка до мишени.

А теперь – количественные оценки полученных в эксперименте результатов.

Измеренная (методом баллистического маятника) скорость пулек после вылета из ствола пистолета составляет около 100 м/с, что соответствует кинетической энергии порядка 3,4 Дж. Как тратится начальная кинетическая энергия пули? На фотографии видна ямка – это неупругая деформация фанеры, т.е. разрушение материала, на которое требуется энергия. А вот фанера вокруг ямки была деформирована упруго и восстановила свою форму, при этом энергия упругой деформации превратилась в энергию звуковых волн и частично была возвращена пуле. Скорость распространения звуковых волн в фанере (в дереве) гораздо больше, чем начальная скорость пули, поэтому размеры области фанеры, вовлеченной в удар, были во много раз больше размеров пули. Время удара можно оценить так: глубина ямки составляет примерно 1 мм, на этом участке пути скорость пули уменьшилась со 100 м/с до нуля. Если, например, взять среднее арифметическое этих скоростей, то получится средняя скорость 50 м/с, а это соответствует времени движения пули в фанере около 20 мкс. Толщина фанерного листа 10 мм. При скорости поперечных звуковых волн в сплошном дереве около 2 км/с расстояние, пройденное звуковыми волнами за такое время в направлении вдоль поверхности фанерного листа, составит примерно 4 см, что в 4 раза превышает толщину слоя фанеры. Скорость продольных волн (в направлении полета пули) больше скорости поперечных волн примерно в два раза, поэтому продольные волны успевают несколько раз пробежать расстояние 10 мм, и можно считать, что в продольном направлении произошел «абсолютно неупругий удар». Размеры листа фанеры (20×30 см), в который попала пуля, были гораздо больше 4 см. Поэтому, когда пуля перестала двигаться относительно фанеры, волны по листу фанеры продолжили движение, и через некоторое время то место фанеры, куда попала пуля, вернулось к положению равновесия. После этого пуля полетела в обратную сторону. Причем ее скорость оказалась равной скорости прохождения положения равновесия этим участком фанеры.

Разобьем мысленно лист фанеры на такие участки: первый – это цилиндр с радиусом  $R$ , второй – кольцо с внутренним радиусом  $R$  и внешним радиусом  $2R$ , третий – кольцо с внутренним радиусом  $2R$  и внешним радиусом  $3R$  и так далее. Между этими участками имеется механическая связь, которую можно смоделировать пружинками, распределенными по периметрам всех участков. Эквивалентная механическая система, обладающая свойствами, похожими на свойства объектов, участвовавших в эксперименте, выглядит так, как показано на рисунке 2. Масса первого груза, в который пуля ударяется абсолютно неупруго, равна  $1 \cdot M$ , масса второго груза равна  $M \cdot (2^2 - 1^2) = 3 \cdot M$ , третьего груза –  $M \cdot (3^2 - 2^2) =$



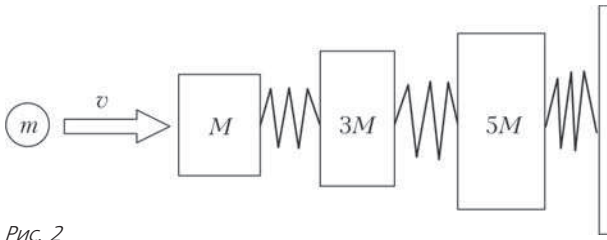


Рис. 2

$= 5 \cdot M$ , четвертого  $- M \cdot (4^2 - 3^2) = 7 \cdot M$  и так далее (последовательность нечетных чисел с множителем  $M$ ). Жесткости пружин, соединяющих грузы, пропорциональны длинам участков контакта соответствующих грузов, т.е. первая пружина имеет жесткость  $k_1 \sim 2\pi R$ , вторая  $- k_2 \sim 4\pi R$ , третья  $- k_3 \sim 6\pi R$ , четвертая  $- k_4 \sim 8\pi R$  и так далее (последовательность четных чисел с одинаковым множителем  $\pi R$ ).

Для упрощения анализа достаточно рассмотреть только два первых груза массами  $M$  и  $3M$  с пружиной между ними. Скорость первого груза после попадания в него пули (при абсолютно неупругом соударении) равна  $vm/(m + M) \approx vm/M$ , так как масса пули  $m$  существенно меньше массы  $M$ . После взаимодействия со вторым грузом скорость первого груза оказывается равной  $(vm/M) \cdot (M - 3M)/(M + 3M) = -vm/(2M)$ . Вот с этой скоростью и отскакивает от системы больших грузов пуля массой  $m$ . Точный расчет дает поправочный коэффициент немного больше единицы.

Поскольку после отскока пуля имела скорость около 5 м/с (что было найдено в последующих и уже безопасных для стрелка экспериментах), то отношение масс  $m:M$  можно оценить как 1:10. При плотности фанеры  $0,8 \text{ г/см}^3$  диаметр круга на листе фанеры, который «составил» первый груз массой  $M$ , равен примерно 3,3 см. Диаметр (внешний) кольца, «составляющего» второй груз, равен 6,6 см. Это значение по порядку величины соответствует полученной раньше оценке для размеров области, занятой волнами:  $2 \cdot 4 \text{ см} = 8 \text{ см}$ .

Итак, при неупругом ударе пули о лист фанеры на разрушение материала фанеры (на образование ямки) было потрачено примерно 90% энергии, около 9% в виде кинетической энергии достались фанере и порядка 1% – пуле. После того как завершился контакт пули с фанерой, у пули осталась кинетическая энергия, составляющая только 0,25% от ее первоначальной величины.

Эксперименты с пневматическим пистолетом были, естественно, продолжены. В частности, выяснялось, сколько слоев упаковочного картона пробивает пуля. Оказалось, что новая пуля пробивает в среднем 6–7 слоев картона, а пуля, которую использовали второй или третий раз (после пробивания стопки листов картона), проходила через 12–15 слоев картона. Это связано с тем, что все неровности и шероховатости на поверхности пули, которые обеспечивали большое сопротивление при первом ее использовании, после прохождения через несколько слоев картона стирались, сглаживались и при повторных выстрелах пуля тратила меньше энергии на пробивание одного листа картона.

Во время опытов пули направлялись также в пластиковые бутылки от газированных напитков, заполненных

водой. Пуля пробивала только первую стенку бутылки, а вторая стенка всегда оставалась целой, т.е. после пробивания первой стенки кинетическая энергия пули уменьшается настолько, что на пробой второй стенки ее уже не хватало. А если стрелять в пустую бутылку, то в большинстве случаев стенка бутылки не пробивалась. Почему? Это хорошая тема для самостоятельного исследования.

Впечатляющее зрелище получалось, когда пуля пробивала стенки жестяной банки с газированным пенным напитком. Сначала банка подвешивалась на прочной нитке к ветке дерева. Нитка начинала раскручиваться, и, когда банка приобретала максимальную угловую скорость, производился выстрел в нижнюю часть банки. Банка продолжала вращаться, а из двух образовавшихся в стенках отверстий начинали бить две пенные струи.

В других экспериментах пули выпускались в воду, причем выстрелы производились в направлении, составлявшем небольшой угол с горизонтом. Прямыми наблюдениями (зрителей вокруг на берегу собиралось много) было установлено, что пули «пробивают», двигаясь почти горизонтально по прямой, слой воды толщиной примерно 2 м и только потом уходят в глубину.

Известно, то при движении тела с большой скоростью  $v$  в среде с плотностью  $\rho$  сила сопротивления пропорциональна динамическому давлению  $\rho v^2/2$  и площади поперечного сечения  $S$ , а коэффициент пропорциональности  $C_x$  зависит от числа Рейнольдса  $Re = \rho vl/\eta$ , где  $l$  – это характерный размер тела:  $l \sim \sqrt{S}$ , а  $\eta$  – это вязкость материала среды (для воды, например,  $\eta \sim 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$ ). В диапазоне чисел Рейнольдса от  $10^2$  до  $10^5$  для тела в форме шарика коэффициент  $C_x$  равен примерно 0,4, при числах Рейнольдса от  $2 \cdot 10^5$  до  $10^6$  он принимает значение около 0,1. Таким образом, имеет место существенное уменьшение относительных потерь кинетической энергии тела в диапазоне чисел Рейнольдса от  $10^5$  до  $2 \cdot 10^5$ . При значениях  $Re$  больших  $10^6$  этот коэффициент увеличивается. На рисунке 3 графически показана зависимость  $C_x$  от  $Re$  для шарика.

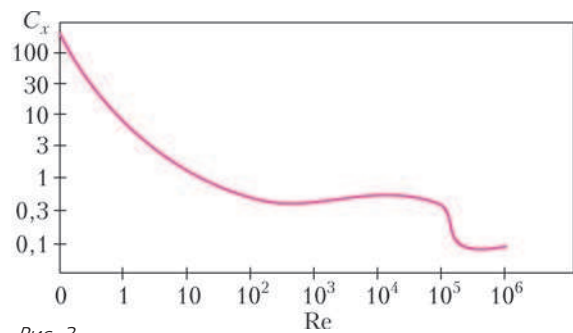


Рис. 3

Но пуля вовсе не шарик, на рисунке 4 показано ее сечение. Понятно, для чего у свинцовой пули такая хвостовая часть – за счет деформации относительно мягкого свинца обеспечиваются отсутствие зазора между пулей и стенками ствола, в котором пуля разгоняется сжатым воздухом, а также зацепление пули за так называемые «нити нарезки» в стволе. Ствол имеет винтовую нарезку, что придает движущейся вдоль ствола пуле

(Продолжение см. на с. 34)

# Как доказать неравенство?

(путеводитель по методам доказательства)

В этом «Калейдоскопе» мы напомним некоторые основные методы доказательства неравенств, а заодно укажем статьи в «Кванте», где эти методы подробно описаны.<sup>1</sup> Мы продемонстрируем разные приемы на классическом неравенстве

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca. \quad (*)$$

Оно выполняется для любых действительных чисел  $a, b, c$ , причем равенство достигается только в случае  $a = b = c$  (это также будет видно при применении разных методов).

**1. Группировка-1.** Для удобства домножим неравенство на 2 и перенесем слагаемые в левую часть:  $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0$ . Теперь сгруппируем слагаемые в левой части так, чтобы получилась сумма квадратов:

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2.$$

Каждый квадрат не меньше нуля, а значит, и их сумма тоже, и наше неравенство доказано.

Мы использовали простое соображение: если разбить сумму на слагаемые и отдельно найти минимум каждого из них, то минимум всей суммы будет не меньше суммы найденных минимумов. Этот принцип имеет много важных следствий (например, неравенства Коши, Гельдера и др., подробнее см. статью [1]).

**2. Группировка-2.** Подходящую группировку в выражении  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$  можно сделать и по-другому: домножив (\*) на 4, дополним все слагаемые, содержащие одну из переменных (скажем,  $a$ ), до полного квадрата:

$$\begin{aligned} 4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) &= \\ &= 4a^2 - 4a(b + c) + 4b^2 + 4c^2 - 4bc = \\ &= (4a^2 - 4a(b + c) + (b + c)^2) - \\ &\quad - (b + c)^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4bc = \\ &= (2a - b - c)^2 + 3b^2 + 3c^2 - 6bc = \\ &= (2a - b - c)^2 + 3(b - c)^2. \end{aligned}$$

Подобный способ выделения полных квадратов при

<sup>1</sup> Рекомендуем также книгу А.В.Арбита «Неравенства и основные способы их доказательства. Часть 1» (приложение к журналу «Квант» №3 за 2016 г.).

работе с произвольными квадратичными формами называют *методом Лагранжа*.

**3. Исследование функции.** Рассмотрим выражение  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$  как функцию одной переменной  $a$  (другие переменные считаем параметрами). Итак, пусть

$$f(a) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = a^2 - (b + c)a + (b^2 + c^2 - bc)$$

— квадратичная функция со старшим коэффициентом 1. Достаточно убедиться в том, что дискриминант неположительный:

$$\begin{aligned} D &= (b + c)^2 - 4(b^2 + c^2 - bc) = \\ &= -3b^2 - 3c^2 + 6bc = -3(b - c)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Исследование функций часто помогает установить интересные неравенства (см. статью [2]).

**4. Однородность.** Если все три переменные равны 0, то (\*) очевидно. Иначе, пусть для определенности  $c \neq 0$ . Разделив обе части (\*) на  $c^2$  и обозначив  $x = a/c$ ,  $y = b/c$ , получим неравенство с меньшим числом переменных:

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y.$$

Его можно доказать способами, о которых говорилось выше, но выкладки становятся короче. Такой прием, уменьшающий число переменных, работает для *однородных*<sup>2</sup> неравенств.

**5. Условный экстремум.** Случай  $a = b = c = 0$  очевиден. Далее положим  $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  и перейдем к переменным  $x = a/r$ ,  $y = b/r$ ,  $z = c/r$ , так что  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . После сокращения на  $r^2$  неравенство (\*) примет вид  $1 \geq xy + yz + zx$  (сыграла однородность!). Осталось доказать, что наибольшее значение функции  $f(x, y, z) = xy + yz + zx$  не превосходит 1 при условии  $g(x, y, z) = 0$ , где  $g(x) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ . Это можно сделать с помощью техники поиска условного экстремума (см., например, статью [3]).

**6. Симметрические многочлены.** Рассмотрим многочлен  $a^k b^l c^m$ , где показатели упорядочены:  $k \geq l \geq m$ . Вместе с ним рассмотрим его *симметризацию*  $T_{(k,l,m)}$ , т.е. сумму всех одночленов, полученных

<sup>2</sup> Понятие однородности можно объяснить так: если предположить, что все переменные выражены в каких-то единицах, то имеется согласие в размерности. Скажем, если в (\*) переменные  $a, b, c$  выражены в метрах, то левая и правая части выражены в метрах квадратных.

перестановками переменных:

$$T_{(k,l,m)} = a^k b^l c^m + b^k c^l a^m + c^k a^l b^m + b^k a^l c^m + c^k b^l a^m + a^k c^l b^m.$$

Нетрудно заметить, что удвоенные левая и правая части неравенства (\*) – это  $T_{(2,0,0)}$  и  $T_{(1,1,0)}$ , поэтому для неотрицательных  $a, b, c$  неравенство (\*) является частным случаем *неравенства Мюрхеда* о симметрических многочленах (см. статью [4]). Неравенство (\*) для любых  $a, b, c$  нетрудно свести к случаю неотрицательных переменных заменой  $a, b, c$  на  $|a|, |b|, |c|$ .

**7. Упорядоченные наборы.** Для доказательства неравенства (\*) можно использовать неравенство об упорядоченных наборах – так называемое *транспервенство* (см., например, статью [5]). В нашем случае в силу симметрии можно считать, что  $a \leq b \leq c$ , и положить  $x_1 = y_1 = a, x_2 = y_2 = b, x_3 = y_3 = c$ . Тогда (\*) примет вид  $x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \geq x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1$ , а это частный случай *транспервенства*.

**8. Векторы и неравенство Коши–Буняковского–Шварца.** В пространстве рассмотрим два вектора  $\vec{u}(a, b, c)$  и  $\vec{v}(b, c, a)$  в прямоугольной декартовой системе координат. Тогда скалярное произведение  $(\vec{u}, \vec{v})$  равно  $ab + bc + ca$ , а длины векторов равны  $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, |\vec{v}| = \sqrt{b^2 + c^2 + a^2}$ . Теперь (\*) следует из неравенства  $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \geq (\vec{u}, \vec{v})$  (которое сразу вытекает из определения скалярного произведения  $(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \varphi$ , где  $\varphi$  – угол между векторами  $\vec{u}$  и  $\vec{v}$ ). Тем самым, неравенство (\*) – частный случай неравенства Коши–Буняковского–Шварца  $\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2} \geq x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ , которое выполнено для любых действительных чисел  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ . Об этом неравенстве, а также о других знаменитых неравенствах (Минковского, Гельдера) можно прочитать в статье [6].

**9. Метод Штурма.** Как мы уже говорили выше, достаточно доказать неравенство (\*) для переменных  $0 < a \leq b \leq c$ . Идея метода Штурма состоит в том, чтобы свести (\*) к очевидному случаю равенства переменных, последовательно сближая переменные. В нашем случае удобно зафиксировать сумму  $a + b + c$  и приближать переменные к среднему арифметическому  $s = \frac{a+b+c}{3}$ . Например, поскольку изначально  $a \leq s \leq c$ , можно менять пару  $a, c$  на пару  $a+t, c-t$ , непрерывно увеличивая  $t$ , пока одно из чисел  $a, c$  не станет равным  $s$ . При этом левая часть (\*) будет уменьшаться, в правая – увеличиваться (проверьте). Значит, (\*) достаточно доказать в случае, когда одна из переменных равна  $s$ . После этого можно тем же приемом добиться, чтобы все переменные стали равны  $s$ .

О методе Штурма можно прочитать в статье [7]. Попробуйте применить к неравенству (\*) метод Штурма, выполнив замену  $x = a^2, y = b^2, z = c^2$  и

зафиксировав сумму  $x + y + z$ .

**10. pqr-метод.** Введем обозначения  $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc$  ( $p, q, r$  называются *элементарными симметрическими функциями* от переменных  $a, b, c$ ). Тогда  $a, b, c$  – корни кубического многочлена  $f(x) = x^3 - px^2 + qx - r$ . Прибавив к обеим частям неравенства (\*) выражение  $2(ab + bc + ca)$ , приходим к неравенству  $p^2 \geq 3r$ . Теперь идея состоит в том, чтобы менять  $a, b, c$  так, чтобы  $p$  и  $q$  оставались неизменными. Изменению  $r$  соответствует сдвиг графика  $y = f(x)$  по вертикали. При помощи такого сдвига можно добиться того, чтобы два из корней многочлена совпали (см. рисунок). Тем самым, неравенство (\*) сводится к случаю равенства двух из трех переменных, который уже легко разбирается. Действительно, если  $a = b$ , то (\*) принимает вид  $2a^2 + c^2 \geq a^2 + 2ac$ , или  $(a - c)^2 \geq 0$ .

Подробнее о pqr-методе мы планируем рассказать в одном из ближайших номеров журнала.

Предлагаем вам доказать разными способами неравенство

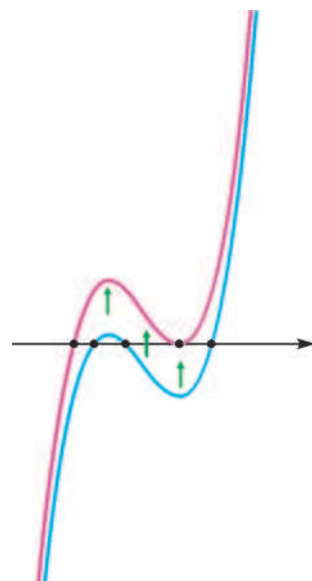
$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} \quad (**)$$

(на самом деле, оно эквивалентно неравенству (\*\*)). Некоторые подходы см. в конце журнала.

#### Литература

1. Р.Алексеев, Л.Курляндчик. Сумма минимумов и минимум суммы. «Квант» №3 за 1991 г.
2. В.Овсиенко. Анализ и неравенства. «Квант» №3 за 1991 г.
3. М.Горелов. Метод множителей Лагранжа. «Квант» №5/6 за 2015 г.
4. С.Дворянинов, Э.Ясиновий. Как получаются симметрические неравенства. «Квант» №7 за 1985 г.
5. Л.Пинтер, Й.Хегедыш. Упорядоченные наборы чисел и неравенства. «Квант» №12 за 1985 г.
6. О.Ижболдин, Л.Курляндчик. Неравенство Йенсена. «Квант» №4 за 2000 г.
7. Л.Курляндчик. Приближение к экстремуму. «Квант» №1 за 1981 г.
8. М.Шкапенюк. Выпуклость функций и неравенства. «Квант» №3 за 1980 г.
9. Д.Немировский. Неравенство Караматы. «Квант» №4 за 2000 г.

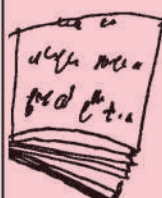
Материал подготовили  
С.Дворянинов, П.Кожевников



$$2a^2 + y^2 + 1$$



$$\begin{aligned} &4bc - \\ &+ (c^2)^2 - \\ &- 4bc + \\ &2 - 6bc + \\ &+ 3(b-c)^2 \end{aligned}$$



$$(2a-b-c)^2 + 3b^2 + 3c^2 - 6bc = 1$$

$$a(b-c)^2$$



(Начало см. на с. 30)

вращательное движение вокруг ее оси симметрии. При таком движении (поступательное плюс вращательное)

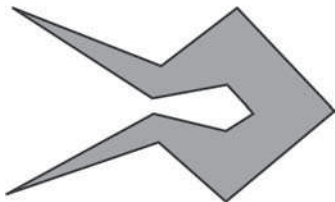


Рис. 4

пуля в воздухе сохраняет стабильное положение по отношению к направлению выстрела и этим обуславливается большая дальность и точность стрельбы.

Коэффициент  $C_x$  для пули описанной формы явно больше соответствующего коэффициента для

шарика с таким же максимальным сечением. Попробуем его оценить. В начале полета пули в воде число Рейнольдса составляет примерно  $4,5 \cdot 10^5$ . После того как пуля потеряет 80% кинетической энергии (скорость ее уменьшится до 45 м/с), число Рейнольдса составит  $2 \cdot 10^5$ . Это означает, что большую часть пути в воде пуля движется при относительно малых потерях энергии. Только потеряв 96% энергии (скорость уменьшилась до 20 м/с), пуля начинает испытывать сопротивление с коэффициентом в 4 раза больше, чем при начальной скорости. Можно считать, что движение вниз (падение) пули начинается с момента, когда сила сопротивления сравняется по величине с силой тяжести (архимедовой силой, в связи с ее относительной малостью, можно пренебречь). Это соответствует скорости пули в воде порядка 1 м/с. При этом число Рейнольдса составляет примерно  $7 \cdot 10^3$ .

Из второго закона Ньютона получаем уравнение движения пули в горизонтальном направлении (в пренебрежении силой тяжести):

$$Md \left( \frac{v^2}{2} \right) = -C_x \rho \left( \frac{v^2}{2} \right) S v dt = -C_x \left( \frac{v^2}{2} \right) dm,$$

где  $dm = \rho S v dt$  – это масса воды, которую пуля «замела» своим сечением при проходе через воду, или:

$$\frac{d \left( \frac{v^2}{2} \right)}{\left( \frac{v^2}{2} \right)} = -C_x \frac{dm}{M}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\ln \left[ \frac{v_k^2}{v_n^2} \right] = -C_x \frac{m}{M} = -C_x \frac{L \rho S}{M},$$

где  $L$  – это путь, пройденный пулей в воде. Если считать, что от начальной скорости пули  $v_n = 100$  м/с вплоть до конечной скорости  $v_k = 1$  м/с коэффициент  $C_x$  остается одним и тем же, то его значение можно найти так:

$$2 \ln \left( \frac{100}{1} \right) = C_x \frac{2 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot (0,00225)^2}{6,8 \cdot 10^{-4}}, \quad C_x = 0,197 \approx 0,2.$$

Полученное значение  $C_x$  для пули примерно в 2 раза больше, чем для шарика с таким же максимальным сечением. Отметим, что даже начальная скорость пули в 15 раз меньше скорости звука в воде, а вода обладает малой сжимаемостью: при максимальном динамическом давлении, создаваемом пулей, в 50 атм плотность воды перед пулей увеличивается только на 0,05%.

Далее. При выстреле из пневматического пистолета в воздух в вертикальном направлении (от уровня земли) новая свинцовая пуля падает на землю в среднем через 9,4 с, а стреляная свинцовая пуля – через 10 с (первые выстрелы такими пулями производились в стопку картонных листов). Эксперименты со стрельбой в вертикальном направлении проводились возле бассейна достаточно больших размеров (конечно, стрельба велась, когда в бассейне никого не было). С момента выстрела до момента появления всплеска на поверхности воды (на расстоянии 2–5 м от места выстрела) проходили в среднем эти самые секунды. Начальная скорость свинцовой пули порядка 100 м/с. При такой скорости движения пули в воздухе с плотностью  $\rho = 1,3$  кг/м<sup>3</sup> и вязкостью  $\eta \approx 2 \cdot 10^{-5}$  число Рейнольдса равно примерно  $1,3 \cdot 10^4$ , т.е. коэффициент  $C_x$  находится на горизонтальном участке зависимости от числа Рейнольдса (когда он примерно постоянен). Шарик на аналогичном участке соответствует значению коэффициента приблизительно 0,4. Для пули этот коэффициент, наверняка, будет больше. Подберем такое значение этого коэффициента, чтобы рассчитанное время полета пули соответствовало полученному экспериментально. Проще всего это сделать не аналитически, а с помощью компьютера. Подобранные коэффициенты для полета новых и стреляных пуль в воздухе у нас получились такими:

$$C_{xn} = 0,88, \quad C_{xc} = 0,72.$$

При этом новые гильзы поднимались на высоту 105 м, а стрелянные – на 120 м. Отметим, что и в этих случаях коэффициент  $C_x$  для данного диапазона чисел Рейнольдса больше, чем для круглого шарика с таким же максимальным сечением. Максимальная скорость пули примерно в 3 раза меньше скорости звука в воздухе, а динамическое давление, создаваемое пулей, ровно 0,06 атм и увеличивает плотность воздуха перед пулей примерно на 6%.

Естественно, что выстрелы производились и под значительными углами к горизонту. Экспериментально подбирался, например, такой угол, чтобы дальность полета по горизонтали была максимальной. В этом случае пули выпускались над поверхностью медленно текущей реки в безветренную погоду – всплески при падении пуль в воду были видны на большом расстоянии. «На глаз» это расстояние было порядка 150 м, и достигалась такая дальность стрельбы при наклоне ствола пистолета к горизонту около 30°. Подсчеты с помощью компьютера при использовании значения  $C_x = 0,72$  давали такие результаты: угол наклона  $\approx 32,3^\circ$ , а максимальная дальность  $\approx 168$  м.

Выстрелы в горизонтальном направлении над поверхностью воды с высоты около 2 м приводили к тому, что пуля в первый раз падала на середине реки (примерно в 50 м от берега) и несколько раз отскакивала от поверхности воды, всякий раз создавая всплеск. Это напоминало прыжки на воде плоских камешков, которые все мы в детстве бросали в воду с берега.

Итак, мораль – любая механическая игрушка может послужить экспериментальным оборудованием для многочисленных физических экспериментов.

# Камень в $\pi$ -огород

И. АКУЛИЧ, В. ДУБРОВСКИЙ

Вот так возникают нездоровые сенсации, подумал я.  
А. и Б. Стругацкие.  
Понедельник начинается в субботу

**РАНО УШЕДШИЙ** ОТ НАС АЛЕКСАНДР ВЛАДИМИРОВИЧ Жуков успел написать замечательную книгу «Вездесущее число  $\pi$ », выдержавшую несколько переизданий. Среди множества интереснейших сведений в книге

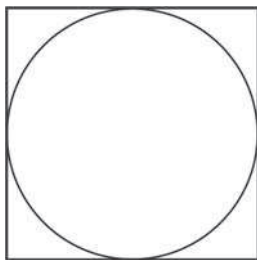


Рис. 1

есть глава, посвященная различным способам экспериментальной оценки значения  $\pi$ . Один из них – бросание камней. Вот что пишет по этому поводу автор:

«На этот раз мы камешки будем бросать не в воду, а на специальный геометрический рисунок (рис. 1), начерченный на спортивной площадке.

Если постараться бросать камешки так, чтобы они равномерно распределились по квадрату, то результат этого эксперимента также может быть использован для оценки числа  $\pi$ .

Пусть из  $n$  брошенных камешков  $m$  камешков попали внутрь вписанного в квадрат круга. Тогда очевидно, что  $\frac{m}{n} \approx \frac{S_{\text{круга}}}{S_{\text{квадрата}}}$ , где буквой  $S$  обозначается площадь соответствующей фигуры. Отсюда  $\frac{m}{n} \approx \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4}$ . Очень простая формула!»

В приведенном отрывке привлекают внимание слова «...бросать камешки так, чтобы они равномерно распределились по квадрату...». А как это сделать?

Представим себе нарисованный на земле круг радиусом, допустим, 1 метр, вписанный в квадрат (см. рис. 1). Если мы стоим совсем рядом с ним и бросаем камень, даже загнув глаза, то вряд ли такой бросок можно считать случайным. В самом деле – мы будем подсознательно стараться бросить камень так, чтобы он попал либо в круг, либо в часть квадрата, не покрытую кругом. Значит, и о равномерности распределения камешков по квадрату говорить не приходится. А в итоге заслужим лавры итальянца Марио Лаццарини<sup>1</sup>, который затратил нереально мало бросков иголки на разлинованную плоскость, получив в итоге значение  $\pi$  с невероятной точностью.

Конечно, если бы мы могли разделить квадрат на большое количество (скажем, миллион) одинаковых квадратиков и бросить камешки точно в середины всех квадратиков, то такой подход был бы безупречен.<sup>2</sup> Но в реальности мы такой возможности, конечно, лишены. А покидаться камнями хочется – тем более с научной целью. Что тогда остается? Прежде всего – отойти от нарисованного квадрата подальше (метров хотя бы на двадцать)<sup>3</sup>. Далее закрываем глаза, немного покружимся (чтобы окончательно потерять ориентировку), после чего расшвыриваем добрую кучу камней во все стороны под разными углами и с разными скоростями. А возле квадрата стоит наш ассистент<sup>4</sup>, фиксирующий попадания в квадрат, и в том числе – во вписанный в него круг. Вот тогда уж мы железно обеспечим случайность (и как следствие, равномерность) попадания камней в нарисованные фигуры и безупречно вычислим «экспериментально-статистическое» значение  $\pi$ .

Нет возражений? Вперед!

И все-таки, чтобы не уподобиться героям старинной поговорки «пировали – веселились, подсчитали – прослезились», давайте сначала смоделируем задуманный нами технологический процесс вычисления  $\pi$ , так сказать, на бумаге. Итак, имеем круг радиусом  $r$ , вписанный в квадрат  $ABCD$  (сторона которого, естественно, равна  $2r$ ). Место, откуда мы будем забрасывать все это камнями, отстоит от их общего центра на величину  $L$ . Но в каком направлении? Для простоты пусть точка бросания  $O$  лежит на оси симметрии квадрата, параллельной какой-то паре его сторон (в нашем случае –  $BC$  и  $AD$ ). Тогда

<sup>1</sup> О нем мы еще поговорим в конце статьи.

<sup>2</sup> Простейший компьютерный расчет показывает, что для миллиона квадратиков «экспериментальное» значение  $\pi$  при этом составит 3,141676.

<sup>3</sup> Чрезмерно далеко отходить нежелательно, а то вообще не добросим!

<sup>4</sup> Желательно – в каске и толстой ватной одежде (из соображений безопасности).



направления<sup>5</sup> бросков в плане (т.е. вид сверху) представляют собой как бы веер. Изобразим это схематично на рисунке 2.

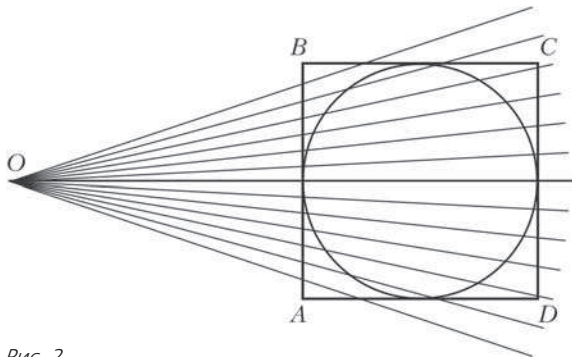


Рис. 2

Если смотреть на рисунок 2, создается впечатление, что  $ABCD$  вовсе не квадрат, но это лишь оптическая иллюзия (можете измерить линейкой, кто сомневается!). Она обусловлена тем, что выходящие из точки  $O$  линии (те самые направления бросков) около ближайшей к ней стороны  $AB$  расположены *гуще*, чем возле удаленной стороны  $CD$ . Следовательно, уже по этой причине равномерности распределения упавших камней в квадрате не будет! И, значит, мы получим заведомо искаженное значение  $\pi$ .

Размышляя дальше, мы, к своему удивлению и негодованию, обнаруживаем, что это, оказывается, не единственный фактор, нарушающий желанную равномерность. Еще две причины – скорость броска и угол к горизонту, под которым производится бросок. Любой учебник физики<sup>6</sup> сообщит нам, что если тело бросить со скоростью  $v$  под углом  $\alpha$  к горизонту, то точка падения отстоит от точки бросания на расстояние  $x = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$ , где  $g$  – ускорение свободного падения. Как видим, зависимости  $x$  от  $v$  и  $\alpha$  весьма неравномерные!

Правда, указанная формула верна только при бросках с «нулевой» высоты, т.е. как бы прямо с поверхности земли – из положения лежа, что не вполне удобно и к тому же негигиенично. Хотя, с другой точки зрения, это, наоборот, хорошо: ведь лежа мы не видим того самого квадрата, и потому случайность направлений наших бросков повышается. Кроме того, если использовать более громоздкую формулу, в которой учтена высота, с которой брошен камень, то и в ней, поверьте, равномерности в зависимости  $x$  от  $v$  и  $\alpha$  тоже нет.

Поэтому вместо того чтобы кидаться камнями, был выполнен компьютерный расчет. Не будем приводить подробное описание алгоритма или, более того, текст программы. Ограничимся краткими пояснениями. Во-первых, не было необходимости моделировать бросание камней по *всем* возможным азимутам – ведь большинство из них вообще не пересекают квадрат. Так что достаточно было ограничиться внутренностью угла, образуемого отрезками  $OA$  и  $OB$ . Он разбивался на  $n$  равных частей (где  $n$  – достаточно большое натуральное число). Диапазон

значений угла к горизонту  $\alpha$  менялся в пределах от  $5^\circ$  до  $85^\circ$  – вполне «бытовой» диапазон, с разбивкой на те же  $n$  равных частей. Наконец, величины минимальной и максимальной скорости  $v$  были подобраны таким образом, чтобы для любых значений  $r$ ,  $L$  и  $\alpha$  «кусочек» любого азимута, попавший внутрь пересекаемого им квадрата, лежал между точками падения «самого быстрого» и «самого медленного» камней. Как легко убедиться, при этом для любого угла  $\alpha$  должно выполняться двойное неравенство

$$L - r \leq \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g} \leq \sqrt{(L+r)^2 + r^2}$$

и потому наименьшее и наибольшее значения  $v$  таковы:

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{g(L-r)}{\sin 90^\circ}} = \sqrt{g(L-r)}, \quad v_{\max} = \sqrt{\frac{g\sqrt{(L+r)^2 + r^2}}{\sin 10^\circ}}.$$

Интервал от  $v_{\min}$  до  $v_{\max}$  разбивался на те же  $n$  равных частей.

Результаты расчета впечатляют. Прежде всего, как и следовало ожидать, даже при  $n = 1000$  (что соответствует *миллиарду* бросков!) «экспериментальное» значение  $\pi$  соответствовало истинному в лучшем случае в двух знаках после запятой (как мы помним, при простом разделении квадрата лишь на миллион квадратиков точность оказалась более чем на порядок выше). Но, самое главное, обнаружена явная монотонная зависимость расчетного значения  $\pi$  от  $n$  – количества частей, на которые делились интервалы. Вот в качестве иллюстрации расчетные значения  $\pi$  для двух «типовых» пар  $(r, L)$ :

$n$	Расчетное значение $\pi$ для:	
	$r = 1 \text{ м}, L = 10 \text{ м}$	$r = 1 \text{ м}, L = 20 \text{ м}$
100	3,1650...	3,1529...
200	3,1475...	3,1525...
500	3,1391...	3,1427...
1000	3,1388...	3,1411...

Обратим внимание на общую закономерность. При малых  $n$  расчетное значение  $\pi$  получается заметно больше «настоящего», но с ростом  $n$  оно становится все меньше и при этом не стремится к истинной величине, а «перешагивает» ее и пытается уйти куда-то вниз. Куда именно? И почему? Ответа, к сожалению, пока нет.

С учетом вышеизложенного в сознании укрепляется мысль, что попытка оценить более-менее точно число  $\pi$  с помощью бросания *реальных* камней в *реально* нарисованные фигуры, скорее всего, окажется безрезультатной. И причина тому – в практической (да и теоретической) невозможности обеспечить равномерное распределение точек попадания по площади квадрата.

Тем не менее, идею можно спасти! Давайте не будем ограничиваться единственными квадратом и кругом, а поделим *всю* поверхность земли на квадраты и в *каждый* квадрат впишем круг. Впрочем, всю-то не обязательно, а только ближайшие окрестности – в пределах максимальной дальности полета камня. Конечно, это потребует немалых трудозатрат, но никуда не денешься: за удо-

<sup>5</sup> Топографы сказали бы «азимуты».

<sup>6</sup> Раздел «Механика»; еще точнее – «Кинематика».



вольствия надо платить! Зато здесь не может быть никаких промахов, недолетов и перелетов: куда ни кинь – обязательно угодишь в какой-нибудь квадрат. Ну, а дальше, опять-таки поделив число попаданий в круги на общее количество бросков и умножив результат на 4, вычислим экспериментальное значение  $\pi$ . Вдруг и впрямь получится точнее?

Попробуем. Для численных расчетов были взяты все те же размеры кругов: радиус каждого – 1 метр при стороне описанного квадрата 2 метра и тот же диапазон углов бросания к горизонтали  $\alpha$ : от  $5^\circ$  до  $85^\circ$ . Что касается углов направления бросков (т.е. азимутов), то здесь пришлось брать *полный* угол – от 0 до  $360^\circ$ , поскольку квадраты теперь со всех сторон! Диапазон же скоростей был выбран «бытовой»: от 5 до 30 м/с.<sup>7</sup> Казалось бы, теперь можно и приступить к компьютерным расчетам, но... не получилось! Почему? Да потому, что последние два диапазона (азимут и скорость) возросли по сравнению с прежними значениями в десятки раз, и при разбивке их на столь же мелкие части объем перебора возрастает уже в сотни и даже тысячи раз! За разумное время компьютер выполнить его не сможет.

Как быть? Попытаемся по-другому. Большинство языков программирования содержат генератор случайных чисел. Используя его, можно успешно имитировать броски «наугад», с произвольными углами и скоростью. А раз так, то, бросив камень много раз (скажем, сто миллионов), мы должны получить вполне представительный результат. А чтобы окончательно убедиться, что он действительно представительный, выполним такую серию случайных бросков многократно. Если вычисленное значение  $\pi$  в итоге не будет сильно «скакать», а окажется лежащим в сравнительно узком диапазоне, то такой подход следует признать удовлетворительным.

Что ж, сказано – сделано. Выяснилось, что при таком количестве бросков (10000000) расчетное значение  $\pi$  действительно слабо «колеблется» вокруг среднего значения, но... неожиданно вылез новый фактор, ранее не замеченный: огромное влияние на результат оказывает положение стартовой точки, из которой вылетает камень. Если это, скажем, вершина квадрата (естественно, *любого* – они все равнозначны), то значение  $\pi$  выходит изрядно *заниженное*: 3,09... При переносе ее в центр квадрата (и одновременно круга) получаем, наоборот, завышенную величину: 3,16... Среди остальных точек – кто в лес, кто по дрова (например, для точки касания двух кругов имеем 3,15...).

Что же делать? Здесь можно предложить два варианта. В первом из них перед каждым броском сделаем наугад несколько шагов в произвольном направлении (глаз-то у нас по-прежнему закрыты!). В этом случае стартовая точка каждый раз занимает случайное положение (опять-таки с помощью генератора случайных чисел), и это приводит к существенному улучшению результата: при тех же десяти миллионах бросков четыре-пять верных

значащих цифр обеспечиваются «железно». Второй вариант чуть экзотичней: каждый новый бросок надо выполнять из точки приземления камня от предыдущего броска, что дает практически такую же случайность и итоговую точность.

Теперь несколько слов об упомянутом нами Лаццарини. Он использовал другой способ экспериментального вычисления  $\pi$  – посредством случайного бросания иголки на лист бумаги, расчерченный параллельными равноотстоящими линиями. Оказывается, если расстояние между линиями равно  $a$  при ширине иголки  $l$  и после  $n$  бросков игла пересеклась с какой-либо линией ровно  $m$  раз, то можно оценить  $\pi$  по формуле  $\pi \approx \frac{2n}{m} \cdot \frac{l}{a}$  (в книге Жукова приводится тому доказательство)<sup>8</sup>. Различные экспериментаторы бросали иглу до пяти тысяч раз, добившись лишь одного точного знака после запятой и более-менее близкой величины второго знака (т.е. у них выходило что-то вроде  $\pi = 3,15\dots$ ). Лаццарини же, согласно опубликованным им в 1901 году результатам своего эксперимента, получил  $\pi = 3,1415929\dots$ , обойдясь всего 3408 бросками. Результат, что и говорить, несусветно превосходный и потому, естественно, вызывает сомнения. В весьма поучительной статье А.Н.Зайделя «Обман или заблуждение» («Квант» №5 за 1983 г.) этот подозрительный результат подробно обсуждается. Прежде всего, как пишет автор статьи, даже если число пересечений, дающее такую точность, и было получено, добросовестный экспериментатор не должен был бы публиковать его как приближение  $\pi$  просто потому, что длину иглы и расстояние между линиями невозможно измерить с нужной точностью. Тем более, что даже изменение температуры иглы на 1–2 градуса приводит к ошибке в третьем-четвертом знаке. Но и смысла в том, чтобы каким-то образом добиться сверхточных измерений, нет по другой, чисто вероятностной причине. По оценке А.Н.Зайделя для того, чтобы полученная в эксперименте частота могла с достаточной достоверностью служить приближением теоретического значения вероятности с заявленной точностью, иглу пришлось бы бросать около 4 миллионов лет! Правда, при этом считалось, что производится один бросок за 5 секунд. Очевидно, автор не был знаком с оригинальной статьей Лаццарини, согласно которой броски выполнялись вдвое быстрее. «Возможно ли это? – спросит читатель. – Да еще и с фиксацией числа пересечений?» Ответ любопытный. Лаццарини пишет, что построил специальный «бросательный аппарат»: часовой механизм приводил во вращение с постоянной скоростью металлический цилиндр, который раз за разом «бросал» тонкий пруттик, но не на твердую поверхность, а на рамку с туго натянутыми на ней металлическими нитями; число бросаний, благодаря часам, фиксировалось автоматически. Если происходило «пересечение», т.е. пруттик задевал струну, то отклонение рамки пере-

<sup>7</sup> Последнее значение скорости позволяет при угле броска к горизонту  $45^\circ$  запустить камень на расстояние около 65 метров – для тренированного человека вполне достижимо.

<sup>8</sup> Там, правда, вместо  $a$  и  $l$  используются величины  $2a$  и  $2l$ , но мы здесь отказываемся от множителей-двоек, чтобы они нас не отвлекали – на результат это все равно не влияет (ибо эти самые двойки сокращаются).

давалось на перо, чертившее непрерывную линию на пробежавшей под ним телеграфной ленте, и в этот момент оно приподнималось. Так что после серии бросаний у экспериментатора был готов своего рода протокол испытаний. Рисунка этого остроумного механизма в статье нет, и непонятно, как и насколько хорошо обеспечивалась случайность бросаний, но, так или иначе, 2 миллиона лет – тоже многовато...

Стоит сказать и об еще одном обстоятельстве. Лаццарини приводит результаты не одного, а целой серии опытов. Во всех из них число испытаний было «круглым» (100, 200, 1000, 2000, 3000, 4000) и только в одном указано это странное число 3408. О последнем мы поговорим чуть ниже, но и результаты «нормальных» опытов, приведенные, кстати, с относительно разумной точностью в 3–4 знака после запятой, с точки зрения теории вероятностей оказались ничуть не менее, если не более, подозрительными. Американец Ли Бэдджер<sup>9</sup> обратил внимание на то, что количества «благоприятных исходов» (пересечений) в одной из двух серий опытов Лаццарини оказались максимально близкими к их математическим ожиданиям, и оценил вероятность этого события. Она оказалась меньше 0,00003! Таким образом, если Лаццарини и проводил свои опыты на самом деле (что кажется вполне вероятным, судя по достаточно подробному описанию его экспериментальной установки), то уж их результаты он почти наверняка подтасовал.

И все-таки, почему именно 3408? Опыт Бюффона дает в качестве приближения для  $\pi$  дробь  $\frac{2n \cdot l}{m \cdot a}$ . Расстояние между соседними дробями со знаменателем  $q$  равно  $\frac{1}{q}$ , и подобраться с их помощью к данному числу с существенно более высокой точностью, вообще говоря, невозможно. Но для некоторых специальных значений  $q$  можно получить гораздо более точные приближения, для которых отклонение от данного числа будет меньше  $\frac{1}{q^2}$ . Мы не будем здесь вдаваться в теорию таких приближений; укажем только несколько первых наилучших приближений для числа  $\pi$ . Это архимедово приближение  $\frac{22}{7} \approx 3,1429$ , приближение  $\frac{377}{120} \approx 3,14166$  и замечательное приближение  $\frac{355}{113} \approx 3,1415929 \dots$ , найденное китайским ученым V века Цзу Чун-чжи, дающее 6 верных знаков  $\pi$  при знаменателе дроби 113. Именно это значение и привел Лаццарини, получивший – по его утверждению – 1808 пересечений при бросании иглы длиной  $l = 2,5$  см и расстоянии между линиями  $a = 3$  см:

$$\frac{2 \cdot 3408 \cdot 2,5}{1808 \cdot 3} = \frac{48 \cdot 71 \cdot 5}{3 \cdot 16 \cdot 113} = \frac{355}{113}.$$

Такое же приближение для тех же  $l$  и  $a$  получается и при других значениях  $n$  и  $m$ , пропорциональных 213 = 3 · 71 и 113 с одинаковым множителем:  $n = 213k$ ,  $m = 113k$ . Упомянутый выше Л.Бэдджер оценил вероятность полу-

чить эту дробь, но не ровно после 3408 бросаний, а *хотя бы один раз* в серии из 4000 бросаний, если вычисление выполнялось после каждого броска. (Столько бросков и указано в отчете Лаццарини, причем его «протокол результатов» позволял без труда выполнить эти вычисления, тем более что сделать это было достаточно только после каждого 213-го броска, т.е. всего 18 раз.) Оказалось, что эта вероятность не столь уж мала – она больше 0,3. Так что нельзя исключать, что именно в этом случае Лаццарини был честен. Но ссылаться на этот результат как на подтверждение возможности достаточно точно вычислить  $\pi$  с помощью опыта Бюффона все равно нельзя, ведь он был получен, исходя из заранее известного значения  $\pi$ .

Чтобы убедиться в правомочности приведенной реконструкции опыта Лаццарини, была выполнена ее проверка (при разных значениях  $l$  и  $a$ ). Разумеется, бросать иглу «вживую» не было необходимости – компьютер-то куда не делся! Как уже отмечалось, многие языки программирования имеют встроенный генератор случайных чисел. А раз так, то не составило труда бросить виртуальную иглу на столь же виртуальную разлинованную поверхность 5000 раз, подсчитывая при этом  $\pi$  после каждого броска (и такие 5000-бросковые серии были для надежности повторены многократно). Результат весьма показателен: довольно часто (примерно в каждой четвертой-пятой серии) после какого-то очередного броска, номер которого, конечно, *всегда* был кратен 71, получалось то, что надо.

Вот как образуются не вполне здоровые сенсации.

И в заключение, после того как мы успешно раздраковали несчастного Лаццарини, вернемся к нашим баранам, т.е. в данном случае к квадратам. Обдумаем еще раз формулу  $\pi \approx \frac{4m}{n}$ . Исходя из только что изложенного, это отношение двух не очень больших натуральных чисел может стать близким к  $\pi$ , если  $\frac{4m}{n} = \frac{355}{113}$ . К сожалению, 355 не делится на 4, но кто мешает умножить на 4 и числитель, и знаменатель? Тогда  $\frac{355}{113} = \frac{4 \cdot 355}{4 \cdot 113} = \frac{4 \cdot 355}{452}$ . Поэтому если мы кинем камень лишь 452 раза и при этом попадание в круг произойдет ровно 355 раз, то получится значение  $\pi$ , как у Лаццарини! И нет необходимости тратить силы на миллионы бросков. Компьютерная проверка это подтверждает. Применяя последний указанный в тексте способ (когда точка падения камня становится стартовой точкой следующего броска), компьютер выполнил много серий из 452 бросков. В 4-5 процентах из них камень угодил в круг, как и мечталось, 355 раз. Вот вам и  $\pi$  с отличной липовой точностью! Главное – умело забраковать остальные 95–96 процентов исходов.

P.S. А кто еще не прочел упомянутую книгу А.В.Жукова – настоятельно рекомендуем это сделать. Удовольствие от прочтения гарантируем.

<sup>9</sup> Lee Badger. Lazzarini's Lucky Approximation of  $\pi$ . – Mathematics Magazine 67, 1994, 83–91.



## Дни физики в Дубне

С 27 по 29 марта 2016 года в ДК «Мир» подмосковной Дубны проходили Дни физики, организованные Межшкольным физико-математическим факультативом и Учебно-научным центром Объединенного института ядерных исследований.

Первое впечатление от происходящего в залах Дома культуры – хаотическое, броуновское движение. Очень много посетителей, в основном детей, перемещающихся, любопытствующих, переливающих жидкости, запускающих металлические шарики, наблюдающих оптические эффекты. Среди них можно заметить (по одинаковым футболкам) организаторов и волонтеров. К ним, как к магнитам, притягиваются стайки зрителей – подходят, слушают, пытаются повторить, переходят к следующим. И только после более детального знакомства с участниками праздника возникает аналогия с нейронной сетью – все так или иначе связано с физической наукой, но каждый пришел к ней своим путем.

Вот один из алгоритмов вовлечения в дубненский экспериментариум. Учитель физики московской школы 2086 В.В.Щавелев, осенью прошлого года побывавший на Школе для учителей в ЦЕРНе, приехал со своими учениками в Дубну демонстрировать опыты. Один из его учеников, Дима Григорьев, рассказал: «Мы с классом решили сделать *неньютоновскую* жидкость. Это крахмал, который смешан с водой в определенной пропорции. Молекулы крахмала скрепляются между собой, и если воздействовать на поверхность нашей жидкости, то возникает ощущение того, что соприкасаешься с твердым телом. А если опустить в жидкость руку, то она погружается. Получается интересный эффект».

А на сцене малого зала расположились гости из Чехии, одной из гимназий Остравы. Восемь учеников девятого класса и с ними две учительницы русского языка демонстрировали опыты с плазменным шаром, объясняли процессы,



рассказывали о гимназии и заодно практиковались в русской речи.

По общему мнению, инициатором Дней физики признан М.С.Нитишинский, преподаватель Факультатива. В этом году ему удалось вовлечь в круговорот математических задач и физических опытов школы Дубны, клуб будущих ученых, музей ОИЯИ, математический кружок, международную компьютерную школу, университет «Дубна», универсальную библиотеку. В программе праздника – демонстрация опытов старшими школьниками и «Тропа исследователей», где опыты предстоит делать ребятам самостоятельно, научное шоу с жидким азотом и математические бои, лекция по истории ускорителей, прочитанная вице-директором ОИЯИ членом-корреспондентом РАН Г.В.Трубниковым, и турнир по робототехнике.

Ближайшие соратники М.С.Нитишинского – дубненские преподаватели физики И.А.Ломаченков и А.А.Леонович. По их мнению, с каждым годом на празднике появляются все новые и новые эксперименты, в работу вовлекаются все больше и больше волонтеров. Эта площадка не только помогает школьникам усваивать знания по предмету, здесь и учителя могут поделиться наболевшим, посоветоваться, «подсмотреть» новые приемы и методы.

Дни физики в этом году проходили под эгидой 60-летия ОИЯИ. Большое число посетителей, дубненских и приезжих участников, разнообразных экспериментов свидетельствуют о том, что найден правильный вектор, правильная форма общения со школьниками. В каком-то смысле Дни физики – это проекция деятельности ОИЯИ на мир детей и подростков, знакомство с моделью международного научного центра, когда научный поиск происходит в содружестве ученых из разных организаций.

Материал подготовила  
Г.Мялковская, фото представила Е.Пузынина





# В начале было слово, или Что делать, когда задача не решается

М. БОНДАРОВ

КОГДА В ШКОЛЬНЫЕ ГОДЫ МНЕ НЕ УДАВАЛОСЬ решить задачу, иногда я шел за помощью к своим родителям. Независимо от условия задачи, их советы не отличались разнообразием. Мама каждый раз говорила: «Сходи и покушай!», папа советовал иначе: «Еще раз прочитай условие задачи!» Как это ни удивительно, обе рекомендации почти всегда помогали. Теперь я понимаю, что оба совета сводились к одному: к задаче имеет смысл вернуться еще раз, подкрепившись в прямом и переносном смысле. Повторное прочтение условия частенько позволяет заметить в нем то, что было упущено сначала.

В этой статье мы коснемся лишь некоторых способов работы с условием задачи, попытаемся научить находить в нем скрытые от неискушенного читателя подсказки, которые автор задачи посылает тем, кто собирается ее решать. «Sapienti sat», – сказали бы в таком случае в Древнем Риме. Мы же выразим ту же мысль по-русски: «Умный поймет с полуслова».

Ну что ж, вступление закончено, давайте перейдем к конкретным примерам.

## Перевод единиц измерения

Начнем с мелочи, на которую, конечно же, надо обратить внимание. Это согласованность единиц измерения. Нередко школьные учителя советуют своим ученикам уже при записи «дано» сразу переводить единицы измерения в СИ. Совет, несомненно, дельный, но не универсальный. По-видимому, универсальных советов в решении физических задач, не существует. Практически к каждому, даже самому полезному, совету можно найти контрпример, демонстрирующий его бесполезность (а иногда даже вредность). И это замечательно. Представьте, как скучен был бы процесс решения задачи, если бы она решалась строго по алгоритму. Какая уж тут радость от находки пути ее решения?!

Обсудим вопрос о целесообразности перевода единиц измерения, рассмотрев известную школьную задачу.

**Задача 1.** При скорости 15 км/ч тормозной путь автомобиля составляет 1,5 м. Каким будет тормозной путь при скорости 90 км/ч, если торможение в обоих случаях происходит с одинаковым ускорением?

**Решение.** Сразу бросается в глаза несогласованность единиц измерения пути (м) и скорости (км/ч). Как поступить? Попробуем перейти в СИ: 90 км/ч = 25 м/с, 15 км/ч = 25/6 м/с. Как видим, появляется

несократимая обыкновенная дробь. Если переводить ее в десятичную, получится приближенное значение, что, естественно, неудобно. Постойте, а нужно ли вообще осуществлять перевод единиц в СИ в данной задаче?

Начнем решать задачу в общем виде. Для определения искомого тормозного пути  $s_2$  удобно использовать формулу

$$s_2 = \frac{v_2^2 - v_{02}^2}{-2a},$$

где  $v_{02} = 90$  км/ч – известная начальная скорость во втором случае,  $a$  – модуль ускорения автомобиля (он по условию одинаков в обоих случаях, а знак «минус» «отвечает» за торможение), конечная скорость  $v_2 = 0$ . О конечной скорости в условии явно не написано, но очевидно, что тормозной путь завершается остановкой в конце движения – вот первый в данной статье пример использования «скрытой» в тексте информации. Если теперь записать аналогичную формулу для тормозного пути  $s_1$  в первом случае:

$$s_1 = \frac{v_1^2 - v_{01}^2}{-2a},$$

где  $v_{01} = 15$  км/ч,  $v_1 = 0$ , то мы легко приходим к ответу в общем виде (например, поделив верхнее уравнение на нижнее):

$$s_2 = s_1 \frac{v_{02}^2}{v_{01}^2} = s_1 \left( \frac{v_{02}}{v_{01}} \right)^2 = 1,5 \text{ м} \left( \frac{90 \text{ км/ч}}{15 \text{ км/ч}} \right)^2 = 54 \text{ м}.$$

Мы видим, что перевод единиц в СИ в данной задаче действительно не понадобился. Таким образом, можно сформулировать *1-е правило работы с текстом задачи*: перевод единиц измерения в СИ нужно осуществлять не всегда, а только по мере необходимости. Отметим также и *2-е правило работы с текстом задачи*: в тексте условия полезно как-то выделить слова, хранящие некий скрытый от непритязательного взгляда смысл. Для удобства по ходу разбора задач начнем заполнять *таблицу* (она помещена в конце статьи), в которую будем заносить слова, таящие важный для решения физический смысл, и его расшифровку. Таким термином в первой задаче был *тормозной путь*.

## Начальные условия

Как известно, характер движения тел определяется не только действующими на него силами, но и начальными условиями. Например, тело, брошенное вертикально вниз, будет двигаться прямолинейно и равноускоренно. Если же тело брошено вертикально вверх, то сначала оно будет тормозиться с постоянным по модулю ускорением, двигаясь вертикально вверх, а затем начнет разгоняться с тем же ускорением вниз. Изменив направление начальной скорости так, чтобы она была направлена под углом к горизонту, получим движение по параболе. Как видим, ускорение во всех случаях одинаково (при отсутствии сопротивления воздуха), а характер движения различен.

Попробуем на конкретных примерах показать, как может повлиять учет начальных условий на решение задачи.

**Задача 2.** Через какое время от начала движения точка, совершающая колебания по гармоническому закону, сместится от начального положения на половину амплитуды? Период колебаний 6 с.

**Решение.** Начинаем работать с условием по 2-му правилу. В первую очередь обращаем внимание на информацию о физических величинах: период  $T = 6$  с, смещение  $|x - x_0| = \frac{A}{2}$ . Что нам дают слова «колебания по гармоническому закону»? Так называют колебания, происходящие по закону синуса или косинуса. Что же выбрать: синус или косинус? Вновь обращаемся к условию: нужно найти время от начала движения. Точка начинает свое движение в одном из крайних положений. Для определенности, пусть в этот момент ее координата  $x_0 = A$ . Тогда гармонический закон примет вид:  $x = A \cos \omega t$ , где циклическая частота  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Теперь соберем все в одно уравнение:

$$|A \cos \omega t - A| = \frac{A}{2},$$

которое приводит к ответу:  $t = 1$  с.

**Задача 3** (НГУ). Грузик подвешен в точке D на трех одинаковых пружинах, закрепленных на горизонтальной линии в точках A, B, C, причем расстояние AB равно расстоянию BC и равно длине недеформированной пружины (рис.1). В положении равновесия  $\angle ADB = \angle BDC = \alpha = 30^\circ$ . Внезапно пружина AD разорвалась. Найдите модуль и направление ускорения грузика сразу после разрыва. Массой пружин пренебечь.

**Решение.** Обозначим силы натяжения пружин AD и CD через  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}'_1$  соответственно, причем их модули одинаковы и равны  $F_1$ , а модуль силы натяжения пружины BD равен  $F_2$  (рис.2). До разрыва пружины грузик неподвижен, поэтому из условия равновесия по вертикали следует

$$2F_1 \cos 30^\circ + F_2 = mg, \text{ или } F_1 \sqrt{3} + F_2 = mg.$$

По закону Гука имеем  $\frac{F_1}{F_2} = \frac{k(l_1 - l_0)}{k(l_2 - l_0)}$ , или  $F_2 = (\sqrt{3} - 1)F_1$ ,

поскольку  $l_1 = 2l_0$ ,  $l_2 = \sqrt{3}l_0$ . Тогда получим

$$F_1 = \frac{mg}{2\sqrt{3} - 1}.$$

Сразу после разрыва пружины AD ее сила упругости обратилась в ноль, зато силы упругости двух других пружин не могли измениться мгновенно, поэтому вектор ускорения будет определяться равнодействующей  $\vec{R}$  тех же сил  $m\vec{g}$ ,  $\vec{F}_2$  и  $\vec{F}'_1$ , которые существовали до разрыва

(кроме исчезнувшей  $\vec{F}_1$ ). Однако мы не будем заниматься достаточно трудоемкой работой нахождения  $\vec{R}$ , а поступим проще. Вспомним, что до разрыва пружины векторная сумма четырех сил равнялась нулю, т.е. до исчезновения силы  $\vec{F}_1$  векторная сумма сил  $m\vec{g}$ ,  $\vec{F}_2$  и  $\vec{F}'_1$  компенсировала ее. Другими словами, равнодействующая  $\vec{R}$  была равна по модулю силе  $\vec{F}_1$  и направлена в противоположную сторону. Туда же и будет направлен вектор ускорения  $\vec{a}$  грузика сразу после разрыва пружины. И, наконец, с помощью второго закона Ньютона определяем модуль этого ускорения:

$$a = \frac{F_1}{m} = \frac{g}{2\sqrt{3} - 1} \approx 0,4 \text{ м/с}^2.$$

**Задача 4** (МИФИ, 1972). К грузику массой  $m_1 = 10$  г, подвешенному с помощью двух нитей, из которых одна горизонтальна, а другая образует с вертикалью угол  $\alpha = 60^\circ$ , привязан на нити другой грузик массой  $m_2 = 20$  г (рис.3). Определите ускорение грузика массой  $m_2$  сразу после пережигания горизонтальной нити. Нити считать нерастяжимыми.

**Решение.** В этой задаче наиболее сложным, по-видимому, является выяснение направления векторов ускорений грузиков сразу после пережигания нити. Начальный момент времени выбран не случайно – в этот момент ускорения тел определить можно наиболее просто, поскольку известны направления действующих на тела сил.

В момент пережигания горизонтальной нити скорость грузика массой  $m_1$  равна нулю, следовательно, он начнет двигаться по дуге окружности с ускорением  $\vec{a}_1$ , направленным по касательной к окружности (рис.4). На грузик массой  $m_2$  в начальный момент действуют только направленные по вертикали силы тяжести и натяжения нити, поэтому он приходит в движение с ускорением  $\vec{a}_2$ , направленным вертикально вниз. Запишем уравнения второго закона Ньютона для каждого грузика в проекциях на направления их ускорений:

$$m_1 a_1 = (m_1 g + T) \sin \alpha, \\ m_2 a_2 = m_2 g - T,$$

где  $T$  – модуль силы натяжения нити, соединяющей грузики. Так как нить нерастяжима, ускорение нижнего грузика и вертикальная составляющая ускорения верхнего грузика одинаковы:

$$a_2 = a_1 \sin \alpha.$$

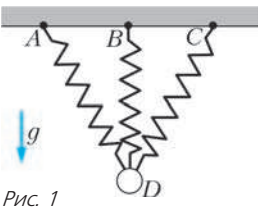


Рис. 1

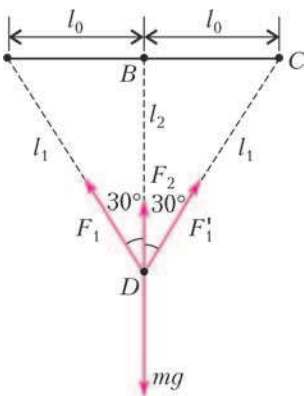


Рис. 2

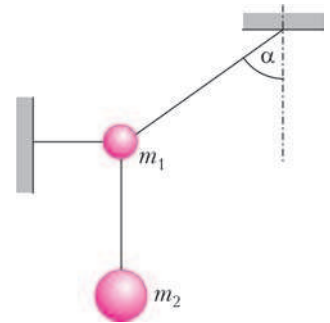


Рис. 3

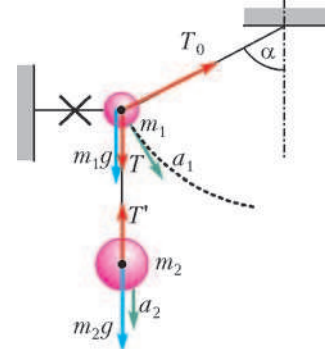


Рис. 4

Отсюда находим

$$a_2 = (g \sin^2 \alpha) \frac{\frac{m_1}{m_2} + 1}{\frac{m_1}{m_2} + \sin^2 \alpha} \approx 9 \text{ м/с}^2.$$

**Замечание.** Обратите внимание на существенное различие в поведении пружин и нитей в первый момент после серьезных изменений в состоянии системы. В то время как пружина в первое мгновение сохраняла свои свойства (ее натяжение мгновенно не менялось), идеальная нить вела себя иначе – она практически мгновенно изменяла силу натяжения, подстраиваясь под новые условия движения.

### Условие отрыва

Рассмотрим еще две задачи, в которых тело перестает испытывать действие одной из сил.

**Задача 5.** Какую минимальную горизонтальную скорость надо сообщить шарiku, чтобы он сделал полный оборот в вертикальной плоскости, если он висит на легкой нерастяжимой нити длиной  $l = 2 \text{ м}$ ?

**Решение.** В этом условии по меньшей мере четыре слова должны заставить задуматься, почему они включены в текст: *легкая нерастяжимая нить* и *минимальная скорость*. Давайте рассмотрим их по порядку. Нить *легкая*, следовательно, не будем учитывать массу; *нерастяжимая*, значит, когда шарик доберется до верхней точки, он поднимется на высоту  $h = 2l$ . *Минимальность* начальной скорости подразумевает наименьшую скорость в верхней точке. Мы ничего, вроде бы, не забыли, и пора приступить к математическому оформлению решения.

Будем считать, что в условии подразумевается отсутствие всех видов трения, поэтому выполняется закон сохранения механической энергии:

$$\frac{mv_{0\min}^2}{2} = mgh.$$

Отсюда находим искомую величину минимальной начальной скорости:

$$v_{0\min} = 2\sqrt{gl}.$$

Однако при сверке этого ответа с приводимым в задачнике нас ждет неприятный сюрприз: ответы не сходятся!

Что же нами не учтено? Попробуем разобраться в физике происходящего процесса. Для этого представим, как шарик, двигаясь по окружности, приближается к верхней точке и на мгновение замирает там. Стоп: вот где ошибка! Шарик не может находиться там в покое: нить – это не стержень, способный при сжатии компенсировать действие на шарик силы тяжести. Мало того, при рассчитанной нами минимальной скорости шарик вообще не доберется до верхней точки на высоте  $2l$ , а пролетит ниже, соскочив с окружности в тот момент, когда сила натяжения нити станет равной нулю. И случится это, заметим, на высоте  $h = 5l/3$  (см., например, задачу 4 из упражнений в конце статьи). Выходит, что мы решали совсем другую задачу: о движении шарика, прикрепленного к *невесомому стержню*.

Вернемся, однако, к шарiku *на нити*. Мы выяснили, что верхнюю точку шарик должен проходить на скорости так, чтобы сила натяжения нити раньше времени не стала

равной нулю. Зато в верхней точке (при *минимальной* начальной скорости) нить перестает быть натянута. Тогда центростремительное ускорение в верхней точке будет создаваться только силой тяжести. Записав для этого момента уравнение второго закона Ньютона в проекциях на вертикальную ось:

$$mg = m \frac{v^2}{l},$$

определим величину скорости  $v$  (для дальнейшего нам понадобится только ее квадрат) в верхней точке:

$$v^2 = gl.$$

Осталось лишь внести уточнение в первоначальную запись закона сохранения механической энергии:

$$\frac{mv_{0\min}^2}{2} = mg \cdot 2l + \frac{mv^2}{2}.$$

Отсюда находим искомую скорость:

$$v_{0\min} = \sqrt{4gl + v^2} = \sqrt{5gl} = 10 \text{ м/с}.$$

**Узелок на память.** Подчеркнем еще раз различие случаев, когда шарик прикреплен к *стержню* и когда шарик прикреплен к *нити*.

**Задача 6** (ЕГЭ). Система из грузов массами  $m$  и  $M$  и связывающей их легкой нерастяжимой нити в начальный момент покоится в вертикальной плоскости, проходящей перпендикулярно оси закрепленной цилиндрической трубы (рис. 5). Грузы находятся на горизонтальной прямой, пересекающей ось трубы. В ходе возможного движения груз массой  $m$  оторывается от поверхности трубы в ее верхней точке А. Найдите массу  $M$ , если  $m = 100 \text{ г}$ . Размеры грузов ничтожно малы по сравнению с радиусом трубы. Трением пренебречь.

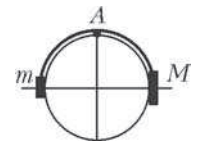


Рис. 5

**Решение.** Прежде чем приступить к непосредственному решению этой задачи, полезно задуматься над вопросом: каким может быть ответ? В условии из числовых величин задана только масса одного груза, а требуется найти массу другого. Значит, конечное выражение для  $M$  должно иметь вид  $M = km$ , где  $k$  – безразмерный коэффициент, который нам и предстоит найти в ходе решения. Другими словами, можно смело вводить нужные для записи уравнений физические величины, поскольку при правильном ходе решения они обязательно сократятся.

Теперь пора подумать о закономерностях, которым подчиняются происходящие в задаче процессы. Можно ли использовать закон сохранения механической энергии? *Трением пренебрегаем*, но ведь есть еще внешние силы, приложенные к грузам: это силы натяжения нити и силы реакции со стороны поверхности трубы. К счастью, силы реакции все время перпендикулярны направлению движения, значит, работы они не совершают. Сила натяжения, приложенная к грузу массой  $m$ , направлена вдоль его скорости и, следовательно, совершает положительную работу. А сила натяжения, действующая на груз массой  $M$ , направлена против его скорости, т.е. совершает отрицательную работу. Эти работы по модулю одинаковы: *нить нерастяжима* (модули скоростей грузов в



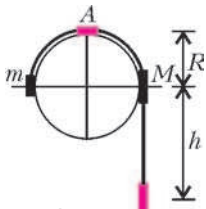


Рис. 6

любой момент времени одинаковы) и невесома (модули сил натяжения тоже одинаковы). Кроме того, нерастяжимость нити поможет найти высоту  $h$ , на которую опустится груз массой  $M$  (рис.6):

$$h = \frac{\pi R}{2},$$

где  $R$  – радиус трубы. Вот теперь можно уверенно использовать закон сохранения механической энергии:

$$0 = mgR + \frac{mv^2}{2} - Mg \frac{\pi R}{2} + \frac{Mv^2}{2},$$

где  $v$  – скорость каждого груза в момент отрыва. В этот момент груз массой  $t$  еще движется по окружности, значит, у него есть центростремительное ускорение  $a_{ц} = \frac{v^2}{R}$ . Оно вызывается только направленной вниз силой тяжести, поскольку груз уже перестал давить на опору, т.е. силы реакции нет, а сила натяжения нити направлена горизонтально. Запишем уравнение второго закона Ньютона в проекциях на вертикальную ось:

$$mg = m \frac{v^2}{R}.$$

Из двух последних уравнений находим

$$M = m \frac{3}{\pi - 1} \approx 140 \text{ г}.$$

Как видим, наше предположение о том, что все введенные величины обязательно сократятся, подтвердилось.

### Экстремальные условия

В задаче 5 мы уже столкнулись с одним из экстремальных условий – с определением минимальной скорости. Значительно чаще в задачах бывает нужно найти максимальные значения физических величин.

**Задача 7 (ЕГЭ).** Начальная скорость снаряда, выпущенного из пушки вертикально вверх, равна  $v_0 = 10 \text{ м/с}$ . В точке максимального подъема снаряд разорвался на два осколка, массы которых относятся как 2 : 1. Осколок большей массы первым упал на землю вблизи точки выстрела со скоростью  $v_1 = 2v_0$ . До какой максимальной высоты  $H$  поднялся осколок меньшей массы?

**Решение.** В точке максимального подъема снаряд на мгновение остановится на высоте  $h$ , которую легко найти из закона сохранения механической энергии:

$$\frac{Mv_0^2}{2} = Mgh, \text{ откуда } h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Здесь мы учли неявно прописанное в условии пренебрежимо малое сопротивление воздуха. Применим теперь закон сохранения импульса:

$$0 = mv_{01} - 2mv_{02},$$

где  $v_{01}$  и  $v_{02}$  – начальные скорости осколков сразу после разрыва снаряда. Теперь ясна связь между начальными скоростями осколков:

$$v_{01} = 2v_{02}.$$

Осколок большей массы упал на землю первым, значит,

он полетел вертикально вниз. Его скорость  $v_{02}$  (вернее, ее квадрат) определим из закона сохранения энергии:

$$2mgh + \frac{2mv_{02}^2}{2} = \frac{2m(2v_0)^2}{2}, \text{ откуда } v_{02}^2 = 4v_0^2 - 2gh = 3v_0^2.$$

Осколок меньшей массы полетит вверх, поднявшись от места разрыва снаряда на высоту

$$\Delta h = \frac{v_{01}^2}{2g} = \frac{4v_{02}^2}{2g} = 6 \frac{v_0^2}{g}.$$

Таким образом, максимальная высота  $H$  подъема осколка меньшей массы равна

$$H = h + \Delta h = \frac{13v_0^2}{2g} = 65 \text{ м}.$$

*Замечание.* Мы молчаливо предположили, что при разрыве снаряда в верхней точке вполне допустимо применение закона сохранения импульса. Однако здесь есть над чем поразмыслить (подробнее – в решении задачи 12).

**Задача 8.** На длинной нити висит тело массой  $M = 40 \text{ г}$ , в него попадает пластилиновый шарик массой  $m = 10 \text{ г}$ , летящий в горизонтальном направлении со скоростью  $v_0 = 2 \text{ м/с}$ . На какую максимальную высоту поднимется система после удара?

**Решение.** Эта задача представляется, на первый взгляд, совершенно стандартной. Кажется очевидным, что система достигнет максимальной высоты в тот момент, когда тела остановятся. Однако не следует попадать в небольшую ловушку, расставленную автором этой задачи. Нельзя приравнивать начальную кинетическую энергию шарика и потенциальную энергию тел в момент их остановки, поскольку во время прилипания шарика часть механической энергии переходит во внутреннюю. Если это учесть, дальше все будет просто.

Запишем закон сохранения импульса в проекциях на горизонтальную ось:

$$mv_0 = (M + m)v,$$

после чего можно использовать закон сохранения механической энергии:

$$\frac{(M + m)v^2}{2} = (M + m)gh.$$

Решая эту систему уравнений, находим максимальную высоту подъема:

$$h = \frac{m^2 v_0^2}{2g(M + m)} = 0,8 \text{ см}.$$

Вдумчивый читатель может заметить: а зачем же в условии сказано о том, что нить длинная? Оказывается, не случайно. Решая задачу, мы пренебрегали размерами висящего тела и шарика, считая их материальными точками. Насколько правомерно такое предположение? Чтобы ответить на этот вопрос, попробуем оценить размеры тел. Плотность пластилина примем равной  $1,5 \text{ г/см}^3$ , тогда объем шарика оказывается примерно  $7 \text{ см}^3$ , а его радиус – порядка 1 см. Из условия не известно, из чего сделано подвешенное на нити тело, однако ясно, что при массе 40 г его размер также порядка 1 см. Таким образом, длина нити действительно должна быть значительно больше этой величины.

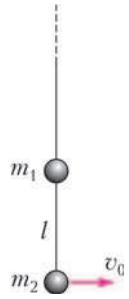


Рис. 7

**Задача 9.** На очень длинной нити подвешен шарик массой  $m_1$ , к которому на нити длиной  $l$  подвешен шарик массой  $m_2$  (рис.7). Какую минимальную начальную скорость  $v_0$  в горизонтальном направлении нужно сообщить нижнему шару, чтобы соединяющая шары нить отклонилась до горизонтального положения?

**Решение.** И на сей раз в условии не случайно сказано о нити, что она *очень длинная*. Это означает, что при любом движении нижнего шарика скорость верхнего направлена горизонтально, в то время как длинная нить остается вертикальной. Тогда все действующие на систему из двух шариков внешние силы – сила натяжения длинной нити и силы тяжести шариков – оказываются направленными по вертикали и можно использовать закон сохранения импульса в проекциях на горизонтальную ось  $x$ :

$$m_2 v_0 = (m_1 + m_2) v_x,$$

где  $v_x$  – проекция скорости второго шарика на эту ось, равная скорости первого шарика. Мы попутно учли *нерастяжимость* соединяющей шары нити, хотя напрямую об этом в тексте не сказано. При записи закона сохранения механической энергии надо не забыть, что у второго шарика есть еще и вертикальная проекция скорости  $v_y$ :

$$\frac{m_2 v_0^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) v_x^2}{2} + \frac{m_2 v_y^2}{2} + m_2 g l.$$

По *минимальности* начальной скорости соответствует остановка второго шарика по вертикали:  $v_y = 0$ . Поэтому окончательно получим

$$v_{0 \min} = \sqrt{2gl \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right)}.$$

**Соударения тел**

В заключение рассмотрим три задачи на столкновения тел. Хорошо известно, что при абсолютно упругих ударах можно использовать закон сохранения как энергии, так и импульса, а при абсолютно неупругих – только импульса. Однако при внешней простоте подходов к решениям в этих задачах таятся определенные тонкости. Некоторые из них мы и обсудим ниже.

**Задача 10** (Всероссийская олимпиада, 1994). Упругая шайба падает плашмя на горизонтальную абсолютно твердую поверхность таким образом, что в момент падения ее скорость равна  $v_0 = 4,5$  м/с и направлена под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту. Коэффициент трения скольжения между шайбой и поверхностью  $\mu = 0,5$ . На каком расстоянии от места падения шайба ударится о поверхность в пятый раз? Влиянием силы тяжести за время удара можно пренебречь.

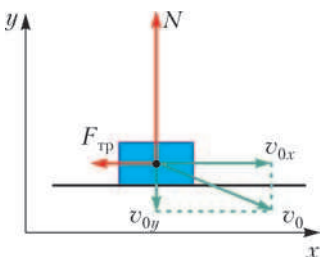


Рис. 8

**Решение.** В момент падения шайбы на нее действуют

две взаимно перпендикулярные силы (влиянием силы тяжести пренебрегаем): направленная вертикально вверх вдоль оси  $y$  сила реакции опоры  $\vec{N}$  и направленная горизонтально против оси  $x$  сила трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$  (рис.8). Импульс силы реакции опоры за время  $\Delta t$  изменяет проекцию импульса шайбы на ось  $y$ . Так как шайба *упругая* и поверхность *абсолютно твердая*, то модуль этой проекции после удара сохранится, а ее направление изменится на противоположное:

$$N \Delta t = \Delta p_y = 2m v_{0y}.$$

Изменение проекции импульса шайбы на ось  $x$  вызывает импульсом силы трения:

$$-F_{\text{тр}} \Delta t = \Delta p_x = m(v_{1x} - v_{0x}),$$

где  $v_{1x}$  – проекция скорости шайбы на ось  $x$  сразу после первого удара. Учитывая, что  $F_{\text{тр}} = \mu N$ , имеем систему

$$N \Delta t = 2m v_{0y},$$

$$\mu N \Delta t = m(v_{0x} - v_{1x}).$$

Разделив второе уравнение этой системы на первое, получим

$$v_{1x} = v_{0x} - 2\mu v_{0y} = v_0 (\cos \alpha - 2\mu \sin \alpha).$$

Выражение в скобках определяет характер движения шайбы после первого соударения с поверхностью. Если оно больше нуля, шайба после отскока продолжает движение по горизонтали. А как будет двигаться шайба, если  $\cos \alpha - 2\mu \sin \alpha < 0$ ? Физический смысл таков: очевидно, что шайба не станет двигаться назад, против оси  $x$ , она только погасит до нуля горизонтальную проекцию скорости и начнет просто подпрыгивать по вертикали.

Произведем расчет: при первом ударе  $\cos \alpha - 2\mu \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot 0,5 \cdot \frac{1}{2} > 0$ , значит, шайба продолжит движение вправо. Найдем теперь проекцию скорости шайбы после второго удара:

$$v_{2x} = v_{1x} - 2\mu v_{0y} = v_{0x} - 4\mu v_{0y} = v_0 (\cos \alpha - 4\mu \sin \alpha).$$

На этот раз выражение в скобках меньше нуля (убедитесь в этом), и шайба перестанет смещаться вправо. Для определения искомого расстояния  $s$  учтем, что время полета шайбы равно

$$t = \frac{2v_{0y}}{g}.$$

Таким образом, смещение шайбы вдоль горизонтальной оси составит

$$s = v_{1x} t = v_{1x} \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0^2}{g} (\cos \alpha - 2\mu \sin \alpha) \sin \alpha = 0,75 \text{ м}.$$

(Окончание следует)

# Заключительный этап XII Всероссийской олимпиады школьников по математике

Заключительный этап XII Всероссийской математической олимпиады школьников в этом году прошел в Санкт-Петербурге с 21 по 29 апреля.

Учитывая важность математических олимпиад и их популярность, два года назад была расширена квота на количество участников олимпиады, и в этом году в ней приняли участие 387 юных математиков страны. Кроме того, по традиции, гостями олимпиады стали команды Китая и Болгарии. Санкт-Петербург – крупнейший культурный и научный центр России, и в программу олимпиады были включены посещения театра и музеев, а также научно-популярные лекции известных ученых: лауреата Филдсовской премии Станислава Смирнова, лауреата Нобелевской премии Константина Новоселова и автора решения десятой проблемы Гильберта, председателя жюри олимпиады Юрия Матиясевича.

По окончании Всероссийской олимпиады была определена команда России на Международную математическую олимпиаду 2016 года в Гонконге. В нашу сборную вошли четверо выпускников: *Иван Фролов*, *Руслан Салимов*, *Григорий Юргин* (все из Москвы) и *Павел Губкин* (Санкт-Петербург), а также десятиклассники: *Никита Карагодин* (Санкт-Петербург) и *Георгий Вепрев* (Рыбинск).

Приводим условия задач и список победителей заключительного этапа XII Всероссийской олимпиады школьников по математике.

## ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

9 класс


1. У менялы на базаре есть много ковров. Он согласен взамен ковра размера  $a \times b$  дать либо ковер размера  $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}$ , либо два ковра размеров  $c \times b$  и  $\frac{a}{c} \times b$  (при каждом таком обмене число  $c$  клиент может выбрать сам). Путешественник рассказал, что изначально у него был один ковер, стороны которого превосходили 1, а после нескольких таких обменов у него оказался набор ковров, у каждого из которых одна сторона длиннее 1, а другая короче 1. Не обманывает ли он? (По просьбе клиента меняла готов ковер размера  $a \times b$  считать ковром размера  $b \times a$ .)

Г. Жуков

2. См. задачу M2431 «Задачника «Кванта».

3. Саша выбрал натуральное число  $N > 1$  и выписал в строчку в порядке возрастания все его натуральные делители:  $d_1 < \dots < d_s$  (так что  $d_1 = 1$  и  $d_s = N$ ). Затем для каждой пары стоящих рядом чисел он вычислил их наибольший общий делитель; сумма полученных  $s - 1$  чисел оказалась равной  $N - 2$ . Какие значения могло принимать  $N$ ?

А. Кузнецов

4. Из клетчатого бумажного квадрата  $100 \times 100$  вырезали по границам клеток 1950 двухклеточных прямоугольников. Докажите, что из оставшейся части можно вырезать по границам клеток четырехклеточную фигурку вида  – возможно, повернутую. (Если такая фигурка уже есть среди оставшихся частей, считается, что ее получилось вырезать.)

С. Берлов

5. См. задачу M2430 «Задачника «Кванта».

6. См. задачу M2432 «Задачника «Кванта».

7. См. задачу M2434 «Задачника «Кванта».

8. Сумма положительных чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \leq \frac{1}{a^2 b^2 c^2 d^2}.$$

А. Храбров

10 класс

1. См. задачу M2429 «Задачника «Кванта».

2. Диагонали  $AC$  и  $BD$  вписанного четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $P$ . Точка  $Q$  выбрана на отрезке  $BC$  так, что  $PQ \perp AC$ . Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей, описанных около треугольников  $APD$  и  $BQD$ , параллельна прямой  $AD$ .

А. Кузнецов

3. См. задачу M2433,а «Задачника «Кванта».

4. См. задачу M2435 «Задачника «Кванта».

5. См. задачу 5 для 9 класса.

6. См. задачу 6 для 9 класса.

7. На доске написаны четыре попарно различных целых числа, модуль каждого из которых больше миллиона. Известно, что не существует натурального числа, большего 1, на которое бы делилось каждое из четырех написанных чисел. Петя записал в тетрадку шесть попарных сумм этих чисел, разбил эти шесть сумм на три пары и перемножил числа в каждой паре. Могли ли все три произведения оказаться равными?

И. Богданов

8. Пусть  $ABC$  – остроугольный треугольник, в котором  $AC < BC$ ; пусть  $M$  – середина отрезка  $AB$ . В окружности  $\Omega$ , описанной около треугольника  $ABC$ , проведен диаметр  $CC'$ . Прямая  $CM$  пересекает прямые  $AC'$  и  $BC'$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно. Пусть перпендикуляр к прямой  $AC'$ , проведенный через точку  $K$ , перпендикуляр



к прямой  $BC'$ , проведенный через точку  $L$ , и прямая  $AB$  образуют треугольник  $\Delta$ . Докажите, что окружность, описанная около треугольника  $\Delta$ , касается окружности  $\Omega$ .

*М.Кунгожин*

*11 класс*

1. См. задачу 1 для 10 класса.

2. В пространстве даны три отрезка  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  и  $C_1C_2$ , не лежащие в одной плоскости и пересекающиеся в одной точке  $P$ . Обозначим через  $O_{ijk}$  центр сферы, проходящей через точки  $A_i$ ,  $B_j$ ,  $C_k$  и  $P$ . Докажите, что прямые  $O_{111}O_{222}$ ,  $O_{112}O_{221}$ ,  $O_{121}O_{212}$  и  $O_{211}O_{122}$  пересекаются в одной точке.

*П.Кожевников*

3. На клетчатый лист бумаги размера  $100 \times 100$  положили несколько попарно неперекрывающихся картонных равнобедренных прямоугольных треугольничков с катетом 1; каждый треугольничек занимает ровно половину одной из клеток. Оказалось, что каждый единичный отрезок сетки (включая граничные) накрыт ровно одним катетом треугольничка. Найдите наибольшее возможное число клеток, не содержащих ни одного треугольничка.

*Д.Храмцов*

4. В координатном пространстве провели все плоскости с уравнениями  $x \pm y \pm z = n$  (при всех целых  $n$ ). Они разбили пространство на тетраэдры и октаэдры. Пусть точка  $(x_0, y_0, z_0)$  с рациональными координатами не лежит ни в одной проведенной плоскости. Докажите, что

найдется натуральное  $k$ , при котором точка  $(kx_0, ky_0, kz_0)$  лежит строго внутри некоторого октаэдра разбиения.

*А.Глазырин*

5. Пусть  $n$  – натуральное число. На  $2n + 1$  карточках написано по ненулевому целому числу; сумма всех чисел также ненулевая. Требуется этими карточками заменить звездочки в выражении  $*x^{2n} + *x^{n-1} + \dots + *x + *$  так, чтобы полученный многочлен не имел целых корней. Обязательно ли это можно сделать?

*И.Богданов*

6. В стране есть  $n > 1$  городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиарейсами. При этом между любыми двумя городами существует единственный авиамаршрут (возможно, с пересадками). Мэр каждого города  $X$  подсчитал количество таких нумераций всех городов числами от 1 до  $n$ , что на любом авиамаршруте, начинающемся в  $X$ , номера городов идут в порядке возрастания. Все мэры, кроме одного, заметили, что их результаты подсчетов делятся на 2016. Докажите, что и у оставшегося мэра результат также делится на 2016.

*Ф.Петров*

7. См. задачу 8 для 9 класса.

8. В треугольнике  $ABC$  медианы  $AM_A$ ,  $BM_B$  и  $CM_C$  пересекаются в точке  $M$ . Построим окружность  $\Omega_A$ , проходящую через середину отрезка  $AM$  и касающуюся отрезка  $BC$  в точке  $M_A$ . Аналогично строятся окружности  $\Omega_B$  и  $\Omega_C$ . Докажите, что окружности  $\Omega_A$ ,  $\Omega_B$  и  $\Omega_C$  имеют общую точку.

*А.Якубов*

## Победители олимпиады

### 9 класс

*Абдрахманов Марат* – Челябинск, ФМЛ 31,  
*Крымский Станислав* – Санкт-Петербург, Академический лицей ФТШ,  
*Ложкин Михаил* – Ижевск, ИЭМЛ 29,  
*Герасименко Артур* – Москва, школа 2086,  
*Рябов Егор* – Москва, школа 2086;

### 10 класс

*Дмитриева Мария* – Москва, лицей «Вторая школа»,  
*Виравчев Арсений* – Санкт-Петербург, Президентский ФМЛ 239,  
*Мигрин Виктор* – Санкт-Петербург, Президентский ФМЛ 239,  
*Жуков Матвей* – Санкт-Петербург, Президентский ФМЛ 239,  
*Ягудин Амир* – Казань, лицей 131,  
*Богданова Екатерина* – Москва, Школа 1329,  
*Глуховский Даниил* – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,  
*Долгих Сергей* – Рыбинск, лицей 2,  
*Новиков Михаил* – Новосибирск, лицей 9,

*Рыбин Дмитрий* – Екатеринбург, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина,  
*Шубин Яков* – Набережные Челны, гимназия 26,  
*Ярцев Дмитрий* – Челябинск, ФМЛ 31,  
*Добронравов Никита* – Новосибирск, Лицей 130 имени академика М.А. Лаврентьева;

### 11 класс

*Фролов Иван* – Москва, школа 1329,  
*Салимов Руслан* – Москва, школа 1329,  
*Османкин Евгений* – Новороссийск, гимназия 5,  
*Юргин Григорий* – Москва, лицей «Вторая школа»,  
*Вепрев Георгий* – Рыбинск, лицей 2,  
*Карагодин Никита* – Санкт-Петербург, Президентский ФМЛ 239,  
*Алексеев Ярослав* – Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский губернаторский ФМЛ 30.

*Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, П.Кожевников, О.Подлипский*

# Заключительный этап I Всероссийской олимпиады школьников по физике

Заключительный этап пятидесятой Всероссийской олимпиады школьников по физике проходил с 11 по 17 апреля 2016 года в городе Сочи. В олимпиаде приняли участие 280 школьников (92 девятиклассника, 95 десятиклассников и 93 одиннадцатиклассника).

Олимпиада состояла из двух туров: первый – экспериментальный, второй – теоретический. Продолжительность каждого тура составляла 5 астрономических часов. Олимпиада проводилась для каждой из возрастных параллелей 9, 10 и 11 классов. На экспериментальном туре в каждом классе предлагалось выполнить 2 задания, а на теоретическом – решить 5 задач. Задания олимпиады охватывали основные разделы школьной программы по физике: механика, термодинамика и молекулярная физика, электродинамика, колебания и волны. В этом же порядке формировались и задачи теоретического тура олимпиады. В целом участники олимпиады успешно справились со всеми заданиями. Наиболее сложным оказался экспериментальный тур. Культура выполнения эксперимента все еще остается низкой: заметное число участников олимпиады неграмотно строили графики, не указывали единиц измерения, были и те, кто не умел работать с мультиметрами.

По окончании обоих туров для участников олимпиады был проведен разбор заданий, на котором члены Жюри уточнили критерии оценивания каждого из заданий и проанализировали типичные ошибки, допущенные участниками олимпиады. Затем был проведен показ работ, во время которого каждый ученик мог ознакомиться с выставленными оценками. В итоге Жюри приняло решение наградить дипломами Победителя олимпиады 20 участников и дипломами Призера – 96 участников. По результатам олимпиады была сформирована группа кандидатов Российской Федерации для участия в Международной олимпиаде по физике в 2017 году и группа кандидатов Российской Федерации для участия в Международной естественно-научной олимпиаде юниоров в 2016 году.

Ниже приводятся задачи теоретического тура и список победителей олимпиады.

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс

### Задача 1. Камни в колесах

Колеса велосипеда имеют одинаковый радиус  $R$ , а расстояние между центрами колес  $l = 3R$ . В протекторе покрышек переднего и заднего колес застряли два маленьких камня.

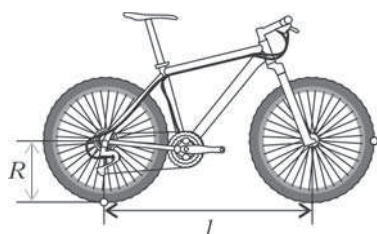


Рис. 1

В начальный момент камень на заднем колесе касается земли, а камень на переднем колесе находится в крайнем переднем положении (рис.1). Велосипед едет прямолинейно со скоростью  $v$ ,

колеса не скользят по дороге, камни не отрываются от покрышек.

1) Найдите максимальное  $L_{\max}$  и минимальное  $L_{\min}$  расстояния между камнями в процессе движения велосипеда.

2) Через какое минимальное время  $t$  после начала движения расстояние между камнями достигает максимального значения?

В.Муравьев

### Задача 2. Неожиданный поворот

На частицу массой  $m$ , имеющую скорость  $v$ , начинает действовать постоянная по модулю сила  $F$ , вектор которой за время действия  $\tau$  поворачивается с постоянной угловой скоростью на угол  $180^\circ$  (рис.2). Векторы скорости частицы и силы все время находятся в плоскости рисунка. В начальный момент угол между силой и скоростью частицы составлял  $90^\circ$ .

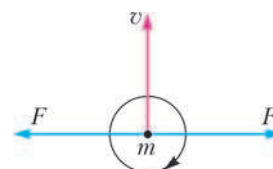


Рис. 2

Определите модуль и направление конечной скорости частицы  $\vec{v}$  через время  $\tau$  после начала действия приложенной силы. Влиянием других сил можно пренебречь.

М.Замятнин

### Задача 3. Перемещение скамейки

Скамейку, имеющую массу  $m$  и длину  $L$ , перемещают горизонтальной силой  $\vec{F}$  (неизвестной и не обязательно постоянной величины) с постоянной скоростью по гладкой горизонтальной поверхности через шероховатую область шириной  $s$  ( $s > L$ ). Сила приложена на уровне центра тяжести на высоте  $h$  над поверхностью (рис.3).

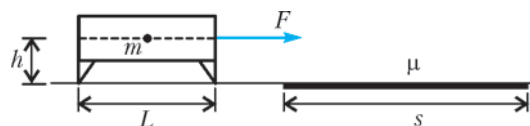


Рис. 3

Коэффициент трения между опорами скамейки и шероховатой областью  $\mu$ . Полагая, что опоры не отрываются от горизонтальной поверхности, определите работу силы  $F$  при перемещении скамейки через шероховатую область. При каком соотношении параметров  $L$ ,  $\mu$  и  $h$  возможно такое движение? Скамейку считайте однородной, а ее опоры – легкими.

З.Гордеев

### Задача 4. Кофе с молоком

Теплообменник состоит из двух тонких коаксиальных труб и имеет длину  $L = 5$  м. По внутренней трубе течет кофе, а по внешней во встречном направлении – молоко (рис.4). Молоко поступает в теплообменник при темпера-

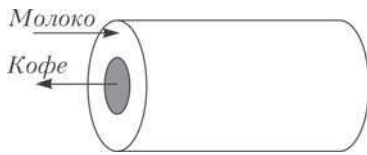


Рис. 4

каждую сторону протекает одинаковая масса жидкостей  $\mu$ , то к выходу из него молоко успевает нагреться до температуры  $t_3 = 60^\circ\text{C}$ .

1) Определите температуру  $t_4$  кофе на выходе из теплообменника.

2) На каком расстоянии  $s$  друг от друга находятся участки труб, в которых температуры кофе и молока одинаковы?

3) Какими станут температуры молока  $t'_3$  и кофе  $t'_4$ , вытекающих из теплообменника, если увеличить скорость обоих потоков в два раза, сохранив их температуры на входе?

*Указание.* Мощность теплопередачи через небольшую площадку внутренней трубы пропорциональна разности температур контактирующих с ней жидкостей. Теплообменом с окружающей средой можно пренебречь. Плотности и удельные теплоемкости кофе и молока считать одинаковыми.

А.Бычков, М.Замятнин

**Задача 5. Тетраэдр с прибором**

Электрическая цепь в форме тетраэдра содержит четыре одинаковых резистора, идеальный источник постоянного напряжения и идеальный амперметр, который показывает силу тока  $I = 2\text{ А}$  (рис.5,а). Если заменить

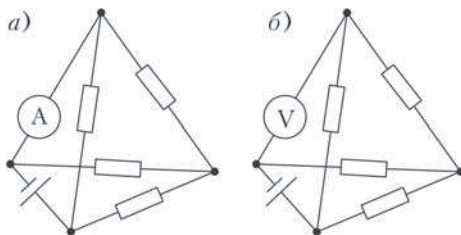


Рис. 5

амперметр идеальным вольтметром, он покажет напряжение  $U = 12\text{ В}$  (рис.5,б). Определите напряжение  $U_0$  источника и сопротивление  $R$  одного резистора.

М.Замятнин

10 класс

**Задача 1. Сферическая горка**

Над горизонтальной поверхностью выступает сферическая горка, профиль которой представляет собой четверть окружности радиусом  $R$  (рис.6). В верхнюю точку горки положили небольшую шайбу массой  $m$  и сообщили ей горизонтальную начальную скорость  $v_0$ . Коэффициент трения между горкой и шайбой зависит от угла  $\alpha$  по закону  $\mu = \text{tg } \alpha$ .

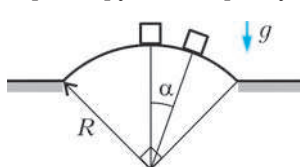


Рис. 6

1) Через какое время  $\tau$  тело достигнет горизонтальной поверхности при спуске без отрыва от горки?

2) Чему равна работа  $A_{\text{тр}}$  силы трения к этому моменту?

туре  $t_1 = 10^\circ\text{C}$ , а кофе – с противоположной стороны при температуре  $t_2 = 90^\circ\text{C}$ . Если в единицу времени по трубам теплообменника в

3) При каких величинах  $v_0$  шайба не оторвется от поверхности горки?

А.Бычков

**Задача 2. Гранулы**

В трубе сечением  $S$  течет взвесь – жидкость, переносящая с собой мелкие сжимаемые гранулы (рис.7). На участке с давлением  $p$  объем отдельной гранулы  $V$ , а на участке с пониженным давлением  $p - \Delta p$  объем гранулы  $V + \Delta V$ . Число гранул, проходящих за единицу времени через любое сечение трубы, равно  $\nu$ . Найдите массу взвеси  $\mu$ , проходящую через трубу за единицу времени при стационарном течении, если трения со стенками трубы нет, а скорость жидкости и гранул по всему сечению одинакова. Изменением плотности жидкости пренебречь.

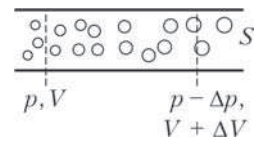


Рис. 7

И.Воробьев

**Задача 3. Вода и лед**

Как известно, при атмосферном давлении вода начинает замерзать, а лед таять при температуре  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ . При давлениях, больших атмосферного, вода может находиться в жидкой фазе и при более низких температурах. Увеличение давления на 133 атм понижает температуру плавления льда на  $1^\circ\text{C}$ . В начальном состоянии вода массой  $m_0 = 1\text{ кг}$  и очень малое количество льда находятся в равновесии в адиабатической оболочке под давлением  $p_1 = 200\text{ атм}$ . В адиабатическом процессе давление медленно уменьшают до атмосферного  $p_0 = 1\text{ атм}$ .

- 1) Найдите изменение массы льда  $\Delta m_{\text{л}}$ .
- 2) Найдите изменение объема системы вода–лед.
- 3) Какую работу совершает система против внешнего давления при его уменьшении от  $p_1$  до  $p_0$ ?

Удельная теплоемкость воды  $c_{\text{в}} = 4,2\text{ Дж}/(\text{г} \cdot ^\circ\text{C})$ , льда  $c_{\text{л}} = 2,1\text{ Дж}/(\text{г} \cdot ^\circ\text{C})$ . Удельная теплота плавления льда  $\lambda = 336\text{ Дж}/\text{г}$ . Плотности воды и льда при атмосферном давлении равны  $\rho_{\text{в}} = 1\text{ г}/\text{см}^3$  и  $\rho_{\text{л}} = 0,9\text{ г}/\text{см}^3$ . Сжимаемость воды  $G = -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p} = 5 \cdot 10^{-10}\text{ Па}^{-1}$ , сжимаемость льда меньше сжимаемости воды.

А.Шеронов

**Задача 4. Диодная цепочка**

Электрическая цепь объединяет 2016 звеньев, состоящих из одинаковых диодов и резисторов (рис.8). Вольт-амперная характеристика диода приведена на рисунке 9, напряжение  $U_D = 1\text{ В}$ . Сопротивление каждого резистора  $R = 1\text{ Ом}$ . На вход схемы подается постоянное напряжение  $U_0$ .

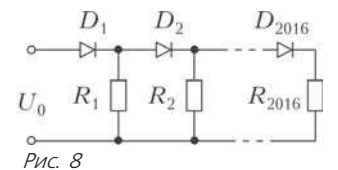


Рис. 8

1) Определите силы токов через диоды и через резисторы при входном напряжении  $U_0 = 4,4\text{ В}$ .

2) Постройте вольт-амперную характеристику схемы (зависимость тока  $I_0$  от  $U_0$ ) в диапазоне от  $0\text{ В}$  до  $3\text{ В}$ .

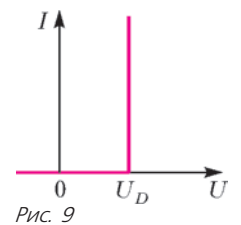


Рис. 9



3) Определите входное напряжение  $U_0$ , при котором ток через цепь равен  $I_0 = 14$  А.

*А.Аполонский*

**Задача 5. Дежа вю**

В электрической цепи (рис.10) все элементы можно считать идеальными. Вначале конденсатор емкостью  $C$  не заряжен. Ключ  $K$  замыкают, а затем, когда скорость изменения энергии в конденсаторе достигает максимума, размыкают.

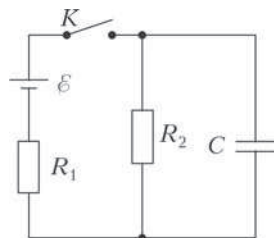


Рис. 10

1) Найдите мощность  $P$ , которую развил источник постоянного напряжения к моменту размыкания ключа.

2) Пусть сопротивления резисторов  $R_1 = R_2 = R$ . В этом случае скорость изменения энергии в конденсаторе достигает максимума через время  $t_0 = CR \ln \sqrt{2}$  (это время можно найти, решая соответствующее дифференциальное уравнение, которое вам решать не нужно). Определите количество теплоты  $Q$ , которое выделится в цепи при замкнутом ключе  $K$ .

*А.Шеронов*

11 класс

**Задача 1. Фрикционная передача**

Длинный цилиндрический валик радиусом  $R_0$ , вращающийся вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega_0$ , прижимают к свободно (без трения в оси) вращающемуся на оси диску радиусом  $R$  (рис.11). Линия касания диска и валика совпадает с радиусом диска.

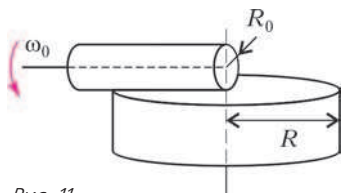


Рис. 11

1) Найдите установившуюся угловую скорость  $\omega_\mu$  вращения диска, если трение между валиком и диском сухое.

2) Найдите установившуюся угловую скорость  $\omega_\eta$  вращения диска, если трение вязкое. Считайте, что величина силы вязкого трения, приходящаяся на единицу длины соприкосновения, пропорциональна относительной скорости движения соприкасающихся поверхностей валика и диска.

3) Определите отношение  $k = \omega_\eta / \omega_\mu$ .

*Е.Мейлихов, А.Гуденко*

**Задача 2. Круговой процесс**

Над молем идеального многоатомного газа проводят круговой процесс, который на  $p$ - $V$ -диаграмме при некотором масштабе имеет вид окружности (рис.12). Центр

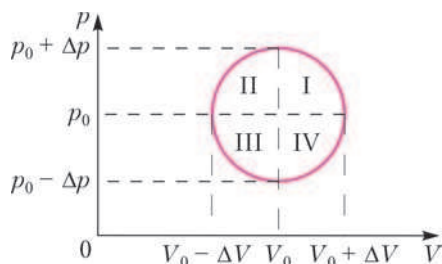


Рис. 12



Подготовка к экспериментальному туру

окружности имеет координаты  $p_0, V_0$ , диаметр вдоль оси давлений  $2\Delta p$ , а диаметр вдоль оси объемов  $2\Delta V$ .

1) Найдите все пары диаметрально противоположных точек окружности, в которых теплоемкости одинаковы. Вычислите эти теплоемкости.

2) Сравните теплоемкости двух произвольных диаметрально противоположных точек, лежащих в квадрантах II и IV окружности, т.е. определите, в какой из этих точек теплоемкость больше и почему.

*Примечание.* Считайте, что теплоемкость газа при постоянном объеме не зависит от температуры  $T$ .

*В.Слободянин*

**Задача 3. Звезда переменного тока**

Три элемента, среди которых могут быть резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности, соединены звездой (рис.13). При подключении источника переменного напряжения к выводам 1 и 2 цепи вольтметр переменного тока, подключенный к выводам 1 и 3, показывает 80 В. При подключении вольтметра к выводам 2 и 3 он показывает 45 В. При подключении того же источника к выводам 1 и 3 вольтметр показывает 21 В между выводами 2 и 3 и 28 В между 1 и 2. При подключении источника к выводам 2 и 3 вольтметр показывает 21 В между выводами 1 и 2 и 28 В между 1 и 3.

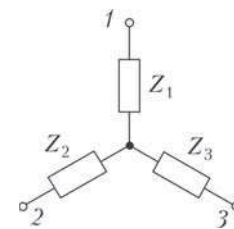


Рис. 13

1) Определите напряжение источника.

2) Определите элементы цепи, соответствующие лучам звезды. Можно ли однозначно установить тип элементов цепи?

3) Определите отношение силы токов  $I_{12} : I_{13} : I_{23}$  через источник при его подключении к выводам 1 и 2, 1 и 3, 2 и 3.

Источник, вольтметр и все элементы цепи можно считать идеальными.

*А.Аполонский*

#### Задача 4. МГД-насос

Магнитогидродинамический (МГД) насос представляет собой плоский конденсатор с размерами пластин  $h \times a$  и расстоянием между ними  $b$  ( $h \gg b$ ,  $a \gg b$ ). С боковых торцов конденсатор ограничен непроводящими стенками. К пластинам конденсатора подключен идеальный источник напряжением  $U$  (полярность указана на рисунке 14). Между пластинами конденсатора создано однородное магнитное поле индукцией  $\vec{B}$ , вектор которой горизонтален и параллелен проводящим пластинам. Нижними краями конденсатор касается поверхности слабопроводящей жидкости плотностью  $\rho_0$  и удельным сопротивлением  $\lambda$ . Сверху к конденсатору герметично присоединен непроводящий кожух. Посередине конденсатора на высоте  $h/2$  на тонкой нити подвешен небольшой непроводящий шарик, имеющий объем  $V$  и плотность  $\rho > \rho_0$ . Определите зависимость  $T(U)$  силы натяжения нити от напряжения на источнике. Постройте качественный график этой

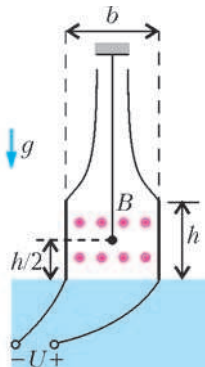


Рис. 14

зависимости, указав на нем характерные точки. Сверху кожух и поверхность проводящей жидкости сообщаются с атмосферой.

*М.Замятнин*

#### Задача 5. Солнечный парус

Солнечный парус представляет собой плоское зеркало массой  $m = 1,660$  г и площадью  $S = 1,000$  м<sup>2</sup>. Парус ориентирован перпендикулярно солнечным лучам и движется вдоль линии, проходящей через центр Солнца и центр зеркала. В начальный момент времени зеркало находится на расстоянии  $R_0 = 1$  а.е. от Солнца. На каком расстоянии  $R_1$  от Солнца будет находиться парус через  $t_1 = 1$  ч полета, если он двигался с постоянной, но неизвестной скоростью  $v \ll c$ ?

Одна астрономическая единица равна расстоянию от Земли до Солнца:  $1 \text{ а.е.} = 150,0 \cdot 10^6$  км. Импульс фотона  $p$  и его энергия  $E$  связаны соотношением  $pc = E$ , где  $c = 2,998 \cdot 10^8$  м/с – скорость света. Поток испускаемых протонов, нейтронов и других частиц, исходящих от Солнца, не учитывать. Солнечная постоянная  $W_0 = 1,367$  кВт/м<sup>2</sup> – это суммарный поток солнечного излучения, проходящий за единицу времени через единичную площадку, ориентированную перпендикулярно потоку, на расстоянии  $1$  а.е. от Солнца.

*Примечание.* Знаете ли вы, что продолжительность года равна  $\pi \cdot 10^7$  с с точностью полпроцента?

*С.Варламов*

## Победители олимпиады

### 9 класс

*Андрей Николаев* – Республика Мордовия,  
*Даниил Павлов* – Санкт-Петербург,  
*Алексей Шишкин* – Республика Мордовия,  
*Руслан Салимгареев* – Москва,  
*Алексей Ярков* – Санкт-Петербург,  
*Дмитрий Мельников* – Москва;

### 10 класс

*Владимир Малиновский* – Санкт-Петербург,  
*Егор Кулик* – Краснодарский край,  
*Михаил Олиференко* – Свердловская область,  
*Борис Билич* – Москва,  
*Станислав Крымский* – Санкт-Петербург,

*Артем Петров* – Санкт-Петербург;

### 11 класс

*Владимир Жилицкий* – Новосибирская область,  
*Максим Елисеев* – Республика Мордовия,  
*Антон Малинский* – Республика Башкортостан,  
*Александр Артемьев* – Кировская область,  
*Алексей Андреев* – Челябинская область,  
*Артемий Марченко* – Нижегородская область,  
*Никита Семенов* – Ханты-Мансийский автономный округ,  
*Иван Утешев* – Республика Мордовия.

*Публикацию подготовили А.Воронов, В.Слободянин*

# Заключительный этап I Всероссийской олимпиады по физике имени Дж.К.Максвелла

Заключительный этап олимпиады имени Дж. К. Максвелла для учащихся 7–8 классов проходил с 18 по 23 апреля 2016 года в Образовательном центре «Сириус» (г.Сочи). Организаторами олимпиады стали Образовательный фонд «Талант и успех», Центральная предметно-методическая комиссия по физике и Учебно-методическая лаборатория по работе с одаренными детьми Московского физико-

технического института. В олимпиаде приняли участие 197 школьников из 50 регионов России.

Следует отметить, что до начала олимпиады ее участники прошли двухнедельное обучение в Сириусе. Там ребятам читали лекции, решали с ними задачи и проводили занятия по экспериментальной физике. Это позволило «подтянуть» регионы, которые раньше не блистали по физике, до уровня

лидеров в физическом образовании (Санкт-Петербурга, Москвы, Челябинска...).

Олимпиада состояла из двух туров: экспериментального и теоретического. На экспериментальном туре в каждом классе предлагалось выполнить 2 задания, а на теоретическом – решить 4 задачи. Участники олимпиады успешно справились со всеми заданиями. На следующий день после теоретического тура был проведен разбор заданий, на котором члены Жюри уточнили критерии оценивания каждого из заданий и проанализировали типичные ошибки, допущенные участниками. Затем каждый ученик мог посмотреть свою работу, ознакомиться с выставленными оценками и обсудить с членами Жюри возникшие вопросы.

В итоге Жюри приняло решение наградить дипломами Победителя олимпиады 17 участников, дипломами Призера олимпиады – 71 участника. По результатам олимпиады была отобрана группа школьников, вошедшая в число кандидатов на Международную естественно-научную олимпиаду юниоров 2016 года.

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

7 класс

#### Задача 1. Вдоль да по речке

От пристани *A* к пристани *B* вниз по течению реки стартует катер, а одновременно с ним по берегу стартуют пешеход и велосипедист, которые движутся *неравномерно*. Капитану катера передается информация о скоростях движения пешехода и велосипедиста, и он, моментально реагируя, поддерживает скорость катера *относительно воды* равной среднему арифметическому скоростей пешехода и велосипедиста. К пристани *B* катер прибывает одновременно с велосипедистом через время  $t = 30$  мин после старта. Пешеход к этому моменту оказывается позади них на расстоянии  $s = 3$  км. Определите скорость течения реки.

Д.Подлесный

#### Задача 2. Золото?!

Два однородных стержня одинаковой длины с одинаковой площадью поперечного сечения  $S = 1 \text{ см}^2$  могут свободно вращаться вокруг неподвижных горизонтальных осей  $O_1$  и  $O_2$ , расположенных на одной вертикали (рис.1). Длина короткого участка каждого стержня

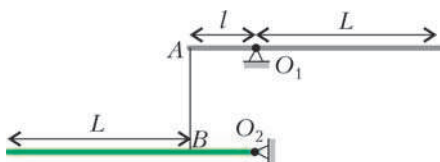


Рис. 1

$l = 51$  см, а длинного  $L = 105$  см. Стержни находятся в равновесии благодаря нити *AB*. Верхний стержень изготовлен из стали. Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ Н/кг}$ .

- Какова плотность материала нижнего стержня?
- С помощью таблицы определите, что это за материал.

Металл	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	Металл	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	Металл	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>
Магний	1,74	Сталь	7,80	Свинец	11,3
Алюминий	2,70	Никель	8,80	Золото	19,3
Цинк	7,14	Серебро	10,5	Платина	21,2

- Найдите силу натяжения нити *AB*.

В.Слободянин

#### Задача 3. Высыпайтесь!

Изначально банка объемом  $V_0 = 1000$  мл доверху заполнена маленькими одинаковыми металлическими шариками (рис.2). Одну пятую часть шариков высыпали в

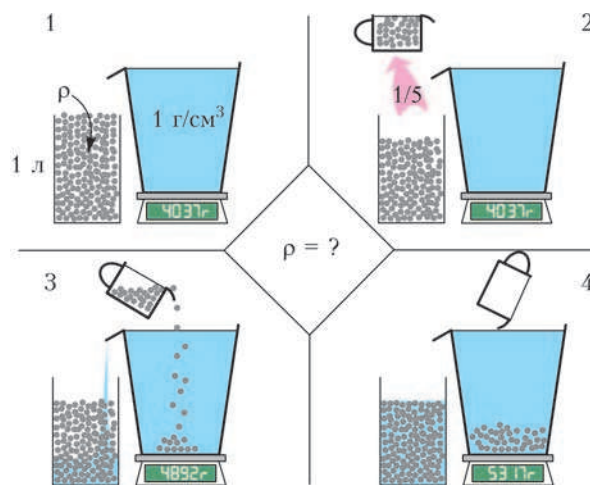


Рис. 2

стоящий на весах мерный цилиндрический сосуд, заполненный водой. В результате показания весов увеличились с  $m_0 = 4037$  г до  $m_1 = 5317$  г, а уровень вылившейся в банку воды сравнялся с уровнем оставшихся шариков. Определите плотность материала, из которого изготовлены шарики, если плотность воды  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ .

И.Ерофеев

#### Задача 4. Трасса

Исследования пропускной способности однополосной односторонней автомобильной дороги (рис.3) показали,



Рис. 3

что с ростом скорости потока машин пропускная способность дороги может уменьшаться. График зависимости скорости потока от интенсивности движения  $v(n)$  приведен на рисунке 4. В предположении, что основная причина изменения пропускной способности связана с изменением дистанции между машинами (расстояния от переднего бампера задней машины до заднего бампера перед-



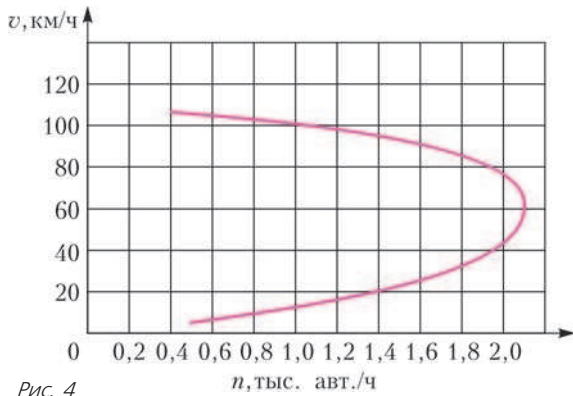


Рис. 4

ней), определите среднюю дистанцию  $s$  между автомобилями при скорости потока  $v$  и постройте график зависимости  $s(v)$ . Для упрощения можете считать, что все машины следуют с одинаковой скоростью и имеют одинаковую длину  $L = 4$  м.

*Примечание.* Интенсивностью движения  $n$  называется количество автомобилей, проезжающих мимо неподвижного наблюдателя в единицу времени.

М.Замятнин

8 класс

**Задача 1. Велосипед и катер**

От пристани  $A$  к пристани  $B$  вниз по течению реки стартует катер, а одновременно с ним по берегу стартует велосипедист, который движется *неравномерно*. Расстояние между пристанями  $L = 5$  км. Капитану катера передается информация о скорости велосипедиста, и он, моментально реагируя, поддерживает скорость катера *относительно воды* равной скорости велосипедиста. Доплыв до пристани  $B$ , катер быстро разворачивается и встречает велосипедиста на расстоянии  $s = 4$  км от пристани  $A$ . На сколько дольше катер плыл по течению реки, чем против течения до встречи с велосипедистом? Скорость течения реки  $u = 5$  км/ч.

Д.Подлесный

**Задача 2. График с вареньем**

При производстве варенья в большой бак постепенно наливают сироп. В первую порцию, имеющую плотность  $\rho_1$ , добавляют вторую, плотность которой  $\rho_2$ , затем третью с плотностью  $\rho_3$ . На графике (рис.5) показано, как изменяется *средняя* плотность находящегося в баке

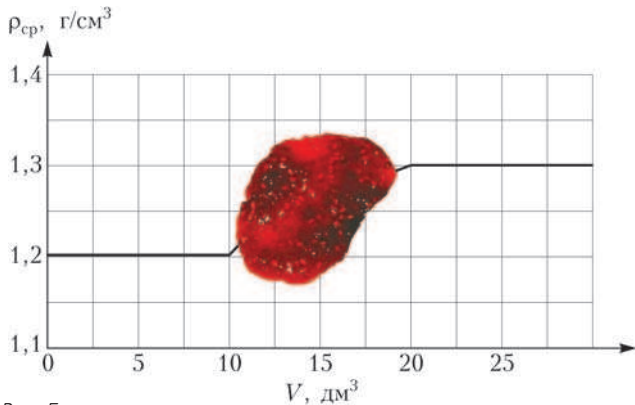


Рис. 5



Юный экспериментатор

сиропа по мере заполнения бака. К сожалению, на график капнули готовым вареньем, и часть информации пропала. Найдите массу каждой порции сиропа. До какого объема  $V_0$  был заполнен бак к тому моменту, когда средняя плотность содержимого составила  $\rho_0 = 1250$  кг/м<sup>3</sup>?

М.Замятнин

**Задача 3. Эврика**

Говорят, что однажды Архимед, найдя точку опоры, приподнял себя вместе с ванной, используя систему блоков (рис.6). Масса ванны с водой  $M = 120$  кг, масса Архимеда  $m = 90$  кг. Чему равна «сила Архимеда» – сила, которую Архимед прикладывал к веревке при подъеме? Какая минимальная часть объема Архимеда могла при этом находиться над водой? Считайте среднюю плотность Архимеда примерно равной плотности воды. Трением в осях блоков, массой блоков и веревки можно пренебречь. Ускорение свободного падения  $g = 10$  Н/кг.



Рис. 6

М.Замятнин

**Задача 4. Термоглюк Черникова**

Экспериментатор Глюк собрал демонстрационный термометр (рис.7). Для этого он взял стеклянную колбу с вставленной в нее тонкой трубкой, площадь поперечного сечения которой  $S = 25$  мм<sup>2</sup>. Колбу экспериментатор заполнил до самого верха подкрашенным спиртом, имеющим комнатную температуру  $t_0$ . После погружения в

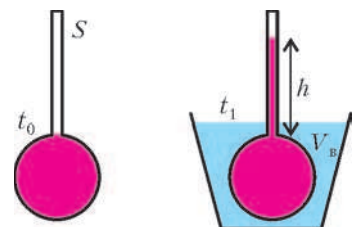
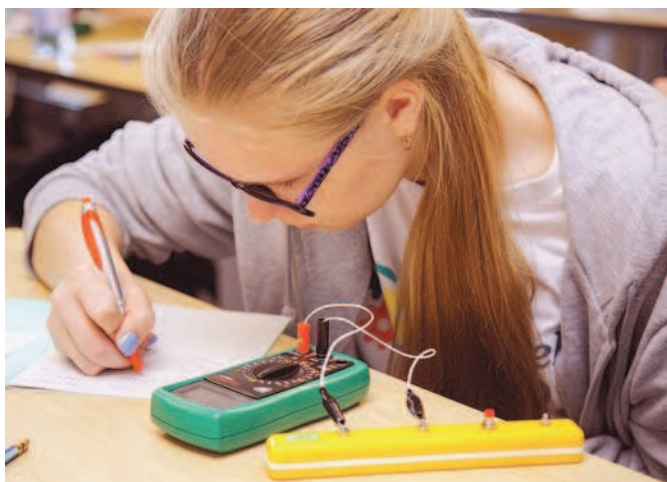


Рис. 7



Нелегко узнать тайну желтого футляра

банку, в которой находился  $V_в = 1$  л теплой воды, столбик спирта в трубке поднялся на  $h = 10$  см, а термометр показал температуру  $t_1 = 40$  °С. Определите температуру воды в банке до погружения в нее термометра. Теплоемкостью стекла, банки, а также потерями тепла в окружающую среду можно пренебречь. Теплоемкость воды  $c_в = 4200$  Дж/(кг·°С), теплоемкость спирта  $c_с = 2400$  Дж/(кг·°С), плотность воды  $\rho_в = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, плотность спирта при температуре  $t_0$ ,  $\rho_с = 790$  кг/м<sup>3</sup>.

*Указание.* В рассматриваемом диапазоне температур можно считать, что с ростом температуры  $t$  объем спирта  $V$  увеличивается по линейному закону  $V = V_0(1 + \beta(t - t_0))$ , где  $V_0$  – объем спирта при температуре  $t_0$ ,  $\beta = 1,1 \cdot 10^{-3}$  (°С)<sup>-1</sup> – температурный коэффициент объемного расширения спирта.

Ю. Черников

## Победители олимпиады

### 7 класс

Леонид Налимов – Санкт-Петербург,  
Дмитрий Вагин – Санкт-Петербург,  
Сергей Савельев – Москва,  
Илья Береговский – Мытищи,  
Герман Марарескул – Железногорск,  
Иван Харичкин – Санкт-Петербург,  
Николай Русскин – Долгопрудный;

### 8 класс

Антон Белецкий – Таганрог,

Антон Зыков – Саранск,  
Азат Гимаев – Саранск,  
Александр Морозов – Санкт-Петербург,  
Лев Дворкин – Раменское,  
Максим Еськин – Саранск,  
Павел Супрун – Королев,  
Александр Демин – Москва,  
Михаил Катунькин – Екатеринбург,  
Никита Морозов – Санкт-Петербург.

Публикацию подготовил В.Слободянин

## ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

### «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

#### ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №3)

- 532 и 14 ( $532:14 = 38$ ) или 215 и 43 ( $215:43 = 5$ ).
- 3.

Представим себе поверхность бублика, сделанную из бумаги (рис.1). Разрежем ее по пути первой улитки и разогнем.

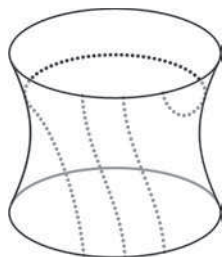


Рис. 1

Получится боковая поверхность цилиндра. Путь второй улитки при этом будет разрезан в трех местах. Таким образом, на получившейся поверхности след второй улитки представляет собой три линии, соединяющие нижнее основание цилиндра с верхним. Нетрудно сообразить, что они делят боковую поверхность цилиндра на 3 части.

3. Будем считать, что в таблице 5 строк и 8 столбцов, и предположим, что Ане расставить цифры удалось. Заметим, что каждая цифра в таблице может встретиться не более чем 4 раза. В самом деле, если среди четырех рядов, где она встречается, есть два вертикальных ряда и два горизонтальных, то на их пересечениях есть ровно четыре клетки для нашей цифры (написана она может быть в двух, трех или во всех четырех клетках), а если три ряда в одном направлении и один в другом, то только три клетки.

Однако цифр всего 10, а клеток 40, поэтому цифр каждого вида ровно по 4 и расположены они именно на пересечениях двух горизонтальных и двух вертикальных рядов. Это, в частности, означает, что в каждом столбце одинаковые цифры присутствуют парами, что невозможно, так как в столбце нечетное число цифр (пять).

4. Предположим противное. Пусть в треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $60^\circ$ ,  $BC = a$ ,  $AB = a - x$  (рис.2), тогда  $AC = a + x$ . Выберем на луче  $AB$  точку  $B'$ , а на луче  $AC$  точку  $C'$  так, что  $AB' = AC' = a$ .

Треугольник  $AB'C'$  – равнобедренный с углом  $60^\circ$ . Поэтому он является и равносторонним, т.е.  $B'C' = a$ .

Осталось заметить, что треугольники  $BC'B'$  и  $BC'C'$  равны по трем сторонам. Поэтому  $\angle BCC' = \angle BB'C' = 60^\circ$ . Итак, в треугольнике  $ABC$  не только угол  $A$ , но и угол  $C$  равен  $60^\circ$ , т.е. он равносторонний.

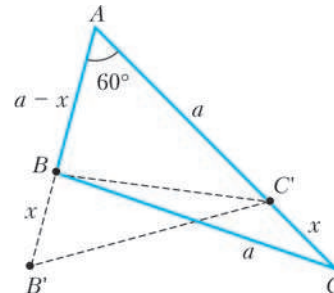


Рис. 2

5. Удобно изображать ряд драконов в виде графика: вместо каждого дракона нарисуем точку на высоте, соответствующей числу его голов, и соединим эти точки.

а) См. рис. 3.

б) Заметим, во-первых, что где-то в промежутке между каждыми двумя хитрыми драконами стоит сильный.

Действительно, если мы будем идти вдоль ряда драконов, то после того, как мы миновали хитрого дракона, количество голов начинает уменьшаться. В некоторый момент оно должно начать увеличиваться — это и есть позиция, где стоит силь-

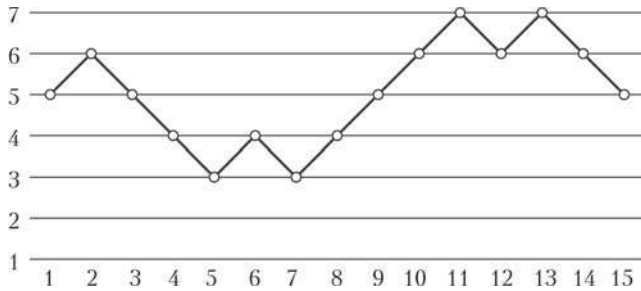


Рис. 3

ный дракон. Аналогично, далее увеличение когда-то закончится на хитром драконе.

Посмотрим, в каком порядке могут стоять сильные и хитрые драконы. Сильный дракон с 6 головами может стоять только между двумя хитрыми драконами с 7 головами. Возникают три случая: два оставшихся сильных дракона стоят либо по одну сторону от этой тройцы в одном из двух порядков, либо по разные стороны (рис. 4).

В первом случае 14 драконов уже определены однозначно, и единственный способ добиться того, чтобы у первого и последнего дракона голов было поровну, — добавить справа с краю еще одного дракона с 5 головами.

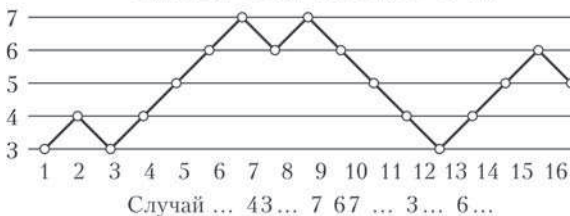
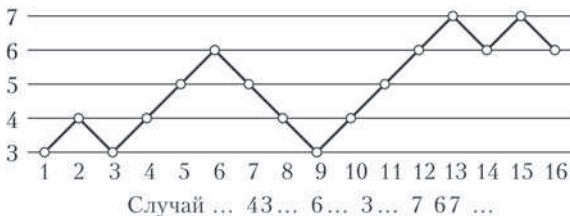
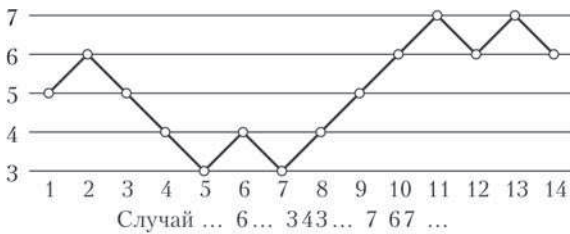


Рис. 4

Второй и третий варианты невозможны, так как для них требуется более 15 драконов (даже без учета условия одинакового количества голов у крайних драконов).

**XXII ТУРНИР МАТЕМАТИЧЕСКИХ БОЕВ  
ИМЕНИ А.П.САВИНА**

**ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ**

1. 15.

Рассмотрим два случая проведения горизонтальных линий: между скрепками либо есть хотя бы одна горизонтальная линия, либо таковых линий нет.

Пусть хотя бы одна из горизонтальных линий проведена между скрепками. Вынем из тетрадки обе скрепки, тогда каждый из двух скрепленных кусков тетрадки распадется на 19 частей. Это добавит  $2 \cdot 18 = 36$  частей к уже имеющимся, т.е. всего их получится  $2016 + 36 = 2052$ . В этом случае каждый лист распадется на  $2052 : 19 = 108$  частей.

Пусть Саша провел  $k$  горизонтальных и  $n$  вертикальных линий. Горизонтальные линии делят каждый лист на  $k + 1$  частей, а вертикальные — на  $2n + 1$  частей. Следовательно,  $(k + 1)(2n + 1) = 108$ .

Так как второй множитель — нечетное число, отличное от 1, то существует три способа разбиения числа 108 на два множителя:  $108 = 4 \cdot 27 = 12 \cdot 9 = 36 \cdot 3$ . Таким образом,  $k = 3, n = 13$ , или  $k = 11, n = 4$ , или  $k = 35, n = 1$ . Во втором случае  $k + n = 15$  и это значение меньше, чем в других случаях.

Докажем теперь, что между скрепками обязана быть хотя бы одна горизонтальная линия. Действительно, если это не так, то при вынимании скрепок добавится только 18 частей и их станет  $2016 + 18 = 2034$ . Тогда каждый лист должен образовывать  $2034 : 19$  частей, но это невозможно, так как 2034 не кратно 19.

2. 991.

Оценка. Рассмотрим первый переход от трехзначного числа к четырехзначному. Это было сложение, и число, которое увеличивалось, было не менее чем 991. Если это увеличение — не первый шаг, то перед этим было уменьшено трехзначное число. Но из чисел вида  $99a$  при вычитании любой цифры получится не более 990.

Пример. Начиная с числа 991, можно выписать следующую последовательность: 991, 1000, 999, 1008, 1014, 1013, 1016, 1015, 1020, 1019, ... Далее каждый раз прибавляется последняя цифра, а вычитается единица. Последняя цифра меняется по циклу: 0, 9, 8, 7, 4, 3, 6, 5. При прохождении этого цикла число увеличивается на 20. Значит, после 1000 оно за 50 циклов станет равным 2000. После этого, вычитая каждый раз 0, а прибавляя 2, получим 2016.

3.  $45^\circ$ .

Из равенства треугольников  $ABM$  и  $BCK$  следует, что  $BM \perp CK$  (рис.5). Пусть  $BM$  и  $CK$  пересекаются в точке  $P$ ,  $O$  — центр данной окружности, тогда  $AKOM$  — квадрат. По свойству вписанного угла,  $\angle KNM = \frac{1}{2} \angle KOM = 45^\circ$ . Следовательно, треугольник  $MPN$  — прямоугольный и равнобедренный, т.е.  $\angle BMN = 45^\circ$ .

4. Так как  $N$  и  $M$  — середины дуг  $BAB'$  и  $BCB'$  соответственно, то  $MN$  — линия центров окружностей, значит,  $MN$  и  $BB'$  перпендикулярны. Пусть  $I$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ . Покажем, что каждая из окружностей проходит через  $I$ . Действительно, так как  $NK$  перпендикулярно  $KI$  и  $AN$  перпендикулярно  $AI$  (внутренняя и внешняя биссектрисы угла  $A$ ), то точки  $A, N, K, I$  лежат на одной окружности с диаметром  $NI$ . Аналогично, точки  $C, M, K, I$  лежат на одной окружности с диаметром  $MI$ .

5. Не обязательно.

Построим равнобедренный треугольник  $ABC$ , проведем его медианы и отложим на их продолжениях точки  $D, E$  и  $F$  так, что  $AD = BE = CF = AB = BC = AC$  (рис.6).

Эти шесть равных отрезков явля-

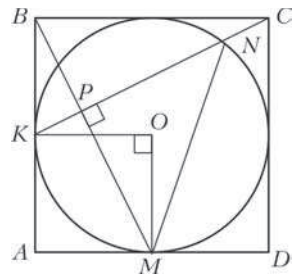


Рис. 5

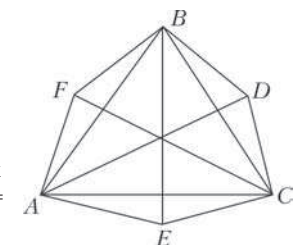


Рис. 6



ются диагоналями шестиугольника  $AFBDCE$ , стороны которого между собой, очевидно, равны. Углы  $A, B$  и  $C$  этого шестиугольника – прямые, а углы  $D, E$  и  $F$  равны по  $150^\circ$ .

**6.** Можно.

Будем действовать наоборот: из кубиков разных размеров будем складывать большой куб. Заметим, что из достаточно большого набора одинаковых прямоугольных параллелепипедов с целыми ребрами можно сложить куб (например, куб с ребром, равным произведению измерений параллелепипеда или равным их НОК).

Покажем теперь, как собрать куб из равного количества кубиков двух разных размеров, затем трех разных размеров, четырех разных размеров и т.д.

1) Склеим из восьми единичных кубиков один куб с ребром 2. Возьмем еще 8 кубиков с ребром 2 и склеим из них параллелепипед  $2 \times 2 \times 16$ . Приклеим к этому параллелепипеду кубик, состоящий из восьми единичных, и получим параллелепипед  $2 \times 2 \times 18$ . В нем 8 единичных кубиков и 8 кубиков с ребром 2. Из таких параллелепипедов мы можем сложить куб, в котором будет одинаковое число кубиков обоих видов. Например, можно сложить куб с ребром 18, в нем будет по  $8 \times 9 \times 9 = 648$  кубиков обоих видов.

2) Возьмем теперь один такой кубик с ребром 18, в котором по 648 кубиков двух разных видов, и приклеим к нему 648 кубиков с ребром 18 так, чтобы получился параллелепипед  $18 \times 18 \times (18 \times (648 + 1))$ . В таком параллелепипеде будет по 648 кубиков трех разных размеров. Из таких параллелепипедов можно сложить новый куб, в котором будет поровну кубиков трех разных размеров.

3) Продолжая описанный процесс построения, мы можем получить куб, состоящий из равного количества кубиков любого числа различных размеров.

**7.** 32.

Понятно, что если измазать целиком 4 строки, то поставить ладей не удастся. Пусть теперь измазана 31 клетка. Раскрасим параллельные диагонали доски в 8 цветов (сначала последовательно в 1, 2, 3, ..., 8, потом снова в 1, 2, ..., 7). Клеток каждого цвета ровно 8, так что найдется цвет, среди клеток которого не более трех измазанных. На остальные пять можно поставить ладей.

**8.** 288.

*Оценка.* Для каждого уголка рассмотрим прямоугольник  $2 \times 3$ , в который он вписан. В каждый такой прямоугольник будет вписано по 4 уголка. Несложно показать, что из этих уголков упорядочены не более двух. Значит, упорядочены не более половины всех уголков. Осталось подсчитать их количество. Число способов вырезать горизонтальный прямоугольник  $2 \times 3$  из квадрата  $10 \times 10$  равно  $9 \times 8$ , столько же способов вырезать вертикальный. В каждый прямоугольник вписано по 4 уголка, значит, общее количество уголков  $9 \times 8 \times 2 \times 4$ , а упорядочено из них не более чем  $9 \times 8 \times 4 = 288$ .

*Пример.* Запишем числа от 1 до 100 в порядке возрастания слева направо: в первую строку от 1 до 10, во вторую от 11 до 20 и т. д. Несложно убедиться в том, что в каждом прямоугольнике  $2 \times 3$  найдется ровно два упорядоченных уголка.

**9.** Вася сможет играть так, чтобы не платить штраф.

Докажем, что Вася всегда может сделать ход, как бы ни ходил Петя. Заметим, что после любого хода четность количества четных кучек меняется. Значит, перед ходом Васи их всегда будет нечетное число, т.е. у Васи всегда будет четная кучка, которую он может разбить.

**10.** При  $N = 4k$  или  $N = 4k + 1$  выигрывает Петя, при  $N = 4k + 2$  или  $N = 4k + 3$  выигрывает Вася.

Построим путь, начинающийся в той вершине треугольника, где изначально стоит фишка, и проходящий по одному разу через все вершины треугольной сетки. Общее количество уз-

лов сетки равно  $1 + 2 + \dots + (N + 1) = \frac{(N + 1)(N + 2)}{2}$ .

Если  $N$  дает остаток 2 или 3 при делении на 4, то разобьем вдоль пути все вершины на пары соседних. Теперь Васина выигрышная стратегия состоит в том, чтобы ходить во вторую вершину из пары, которую «начал» Петя. Если же  $N$  дает остаток 1 или 0 при делении на 4, то Петя может сделать первый ход, сдвинув фишку вдоль пути, а затем разбить оставшиеся узлы на пары соседних и играть аналогично Васиней стратегии.

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

**Неравенство о средних.** Как мы помним, достаточно доказать неравенство для положительных значений переменных, а при таком ограничении оно легко сводится к неравенству между средним квадратическим и средним арифметическим.

**Выпуклость.** Можно заметить, что неравенство (\*\*) – частный случай неравенства Йенсена для выпуклой функции  $g(x) = x^2$  (в левой части – среднее арифметическое значений функции  $g$  в точках  $a, b, c$ , а в правой части – значение  $g$  в точке, равной среднему арифметическому  $a, b, c$ ).

Помимо статьи [6] из списка литературы к «Калейдоскопу», о применении выпуклых функций к неравенствам написано в статье [8], а также в весьма трудной статье [9] о мощном неравенстве (из которого можно вывести практически все классические неравенства, о которых здесь шла речь).

**Упорядоченные наборы.** Неравенство (\*\*) можно также улучшить как частный случай неравенства Чебышёва (см., например, [5]) для наборов  $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ ;  $y_1 \leq y_2 \leq y_3$ :

$$\frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{3} \geq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \cdot \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

**Метод Штурма.** При фиксации суммы правая часть не меняется, остается понять, как меняется сумма квадратов при сближении переменных.

**Условный экстремум.** Соображения однородности позволяют сформулировать задачу так: найти максимальное значение  $|x + y + z|$  при  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Здесь уместна геометрическая переформулировка: при каком наибольшем  $|d|$  плоскость  $x + y + z = d$  пересекает сферу  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ?

**Геометрическая интерпретация:**  $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  – это расстояние от начала координат до точки  $M(a, b, c)$ , а  $\frac{|a + b + c|}{\sqrt{3}}$  – расстояние от начала координат до плоскости  $x + y + z - a - b - c = 0$ , в которой лежит точка  $M$ .

## ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ КВАДРАТЫ

### Задачи для самостоятельного решения

**1.** На стороне  $AD$  отметим точку  $P$  так, что  $DP = AN$ , тогда  $KLMP$  – квадрат (рис.7). Кроме того,  $\angle PKM = 45^\circ = \angle AKN$ . Тогда  $\angle LMC = \angle AKP = \angle AKN + \angle PKN = \angle PKM + \angle PKN = \angle MKN$ .

**2.** Построим два вспомогательных квадрата и введем обозначения так, как на рисунке 8.

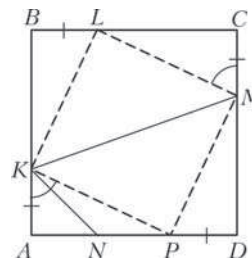


Рис. 7

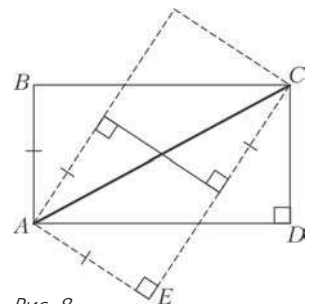


Рис. 8

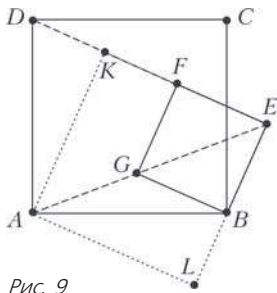


Рис. 9

Тогда прямоугольные треугольники  $ACD$  и  $CAE$  равны (по гипотенузе и катету). Следовательно,  $AD = CE$ , значит, отношение сторон данного прямоугольника равно 2.

3. Опустим перпендикуляры  $AK$  и  $AL$  на прямые  $EF$  и  $EB$  соответственно (рис.9). Тогда достаточно доказать, что на одной прямой лежат точки  $D, K$  и  $F$ . Четырехугольник  $AKEL$  – квадрат, так как три его угла прямые, а диагональ  $EA$  – биссектриса угла  $E$ .

Треугольники  $DAK$  и  $BAL$  равны, так как  $AD = AB, AK = AL, \angle DAK = 90^\circ - \angle BAK = \angle BAL$ . Значит,  $\angle DKA = \angle BLA = 90^\circ$ , откуда и следует, что точки  $D, K$  и  $F$  лежат на одной прямой.

4. Равенство треугольников  $MBC'$  и  $C'CN$  доказывается, например, построением квадрата, описанного около  $ABCD$

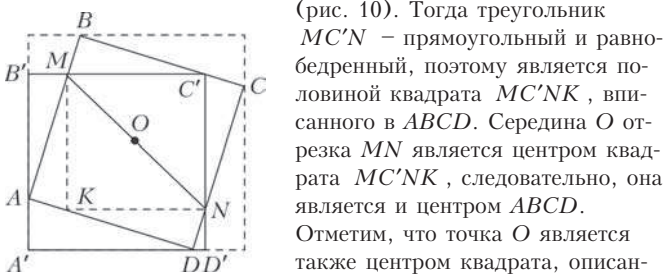


Рис. 10

(рис. 10). Тогда треугольник  $MC'N$  – прямоугольный и равнобедренный, поэтому является половиной квадрата  $MC'NK$ , вписанного в  $ABCD$ . Середина  $O$  отрезка  $MN$  является центром квадрата  $MC'NK$ , следовательно, она является и центром  $ABCD$ .

Отметим, что точка  $O$  является также центром квадрата, описанного около  $ABCD$ .

5. Построим вспомогательный квадрат  $AKLG$ , тогда  $KB = GF$  и отрезок  $BF$  содержит точку  $P$  – центр этого квадрата (рис. 11). Докажем теперь, что точка  $Q$  лежит на отрезке  $BF$ . Действительно, так как  $E$  – ортоцентр треугольника  $ACG$ , то четырехугольник  $APQG$  вписанный, т.е.  $\angle CQP = \angle CAG = 45^\circ$ . Кроме того, так как  $\angle CQA = 90^\circ$ , то точка  $Q$  лежит на описанной окружности квадрата  $ABCD$ .

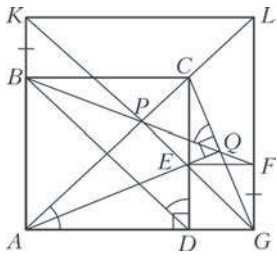


Рис. 11

Следовательно,  $\angle CQB = \angle CDB = 45^\circ$ , т.е. лучи  $QP$  и  $QB$  совпадают.

6. Пусть в четырехугольнике  $ABCD: AD = BC$  и  $AD \perp BC, AB = a, CD = b$ . На стороне  $AB$  данного треугольника построим квадрат  $ABGH$  (рис. 12). Пусть  $O$  – его центр, тогда из условия задачи следует, что при повороте с центром  $O$  на  $90^\circ$  образом отрезка  $AD$  является отрезок  $BC$ . Значит, треугольник  $COD$  – прямоугольный и равнобедренный, поэтому  $O$  – центр квадрата  $CDEF$ .

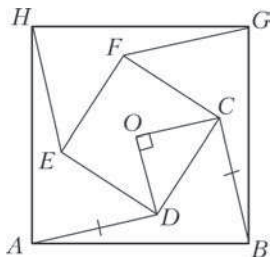


Рис. 12

Проведя отрезки  $FG$  и  $EH$ , получим еще три четырехугольника, равных исходному (они получаются из  $ABCD$  поворотами с центром  $O$ ). Следовательно, площадь каждого из них равна

Площадь каждого из них равна

$$\frac{S_{ABGH} - S_{CDEF}}{4} = \frac{a^2 - b^2}{4}.$$

7. Так как  $AK = AL$ , то прямоугольный равнобедренный треугольник  $AKL$  можно достроить до квадрата  $AKDL$  (рис.13). Пусть параллельные прямые  $BE$  и  $AF$  пересекают  $DL$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно, тогда  $ABMN$  – параллелограмм, т.е.  $MN = AB$ . Кроме того,  $\angle LAN = \angle AKC$  (острые углы с

соответственно перпендикулярными сторонами), значит, равны прямоугольные треугольники  $LAN$  и  $AKC$ . Следовательно,  $NL = AB = MN$ . Так как  $MB \parallel NA$ , то  $EF = FL$  (по теореме Фалеса).

8. 0,5.

Рассмотрим квадрат  $ACKL$  (рис.14). Углы  $BAC$  и  $EAL$  равны. Значит,  $\triangle ABC = \triangle AEL$ , аналогично,  $\triangle ABC = \triangle KDC$ . Из этого следует, что точки  $D$  и  $E$  расположены симметрично относительно центра квадрата. Далее,  $S_{ABCDE} = S_{ABC} + S_{ACDE} = S_{AEL} + S_{ACDE} = S_{ACDEL}$ . Ломаная  $CDEL$  делит квадрат на равные части, значит,  $S_{ACDEL} = 0,5$ .

9.  $3 - 2\sqrt{2}$ .

Сформулируем условие задачи на языке геометрии. Через центр квадрата со стороной 1 метр проведена прямая, не совпадающая с его осью симметрии. Одна из получившихся частей квадрата отражена относительно этой прямой (рис. 15,а). Каково наибольшее значение суммы площадей прямоугольных треугольников, выделенных цветом?

Докажем, что эти четыре треугольника равны между собой. Для этого рассмотрим квадрат, симметричный данному относительно той же прямой (рис.15,б).

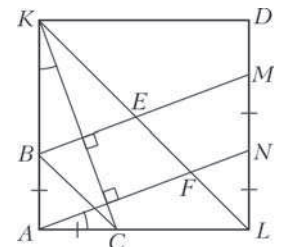


Рис. 13

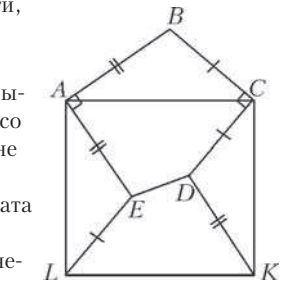


Рис. 14

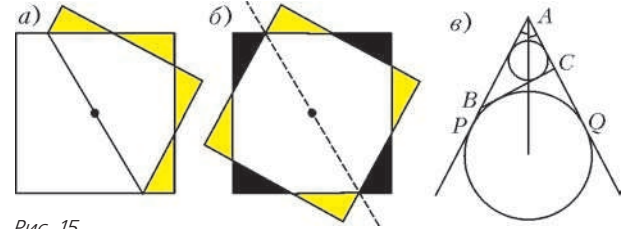


Рис. 15

Разноцветные треугольники разбиваются на пары, симметричные относительно оси, а соседние треугольники одного цвета получаются друг из друга поворотом на  $90^\circ$  вокруг общего центра двух квадратов (так как при таком повороте каждый квадрат переходит в себя). Таким образом, все восемь прямоугольных треугольников, выделенных на рисунке 15,б, равны друг другу. Кроме того, из этих рассуждений следует, что периметр каждого треугольника равен стороне квадрата.

Рассмотрим один из прямоугольных треугольников. Докажем, что из всех треугольников с данным углом и данным периметром наибольшую площадь имеет равнобедренный. Площадь треугольника можно вычислить по формуле  $S = pr$  ( $p$  – полупериметр,  $r$  – радиус вписанной окружности). Поэтому она будет наибольшей, если  $r$  принимает наибольшее значение. Пусть в треугольнике  $ABC$  фиксирован угол  $A$ , тогда рассмотрим его вписанную окружность и невписанную окружность, касающуюся стороны  $BC$  и продолжений двух других сторон в точках  $P$  и  $Q$  (рис.15,в). Так как  $AP = AQ = p$ , то положение невписанной окружности не зависит от положения касательной  $BC$ . Кроме того, радиусы окружностей, вписанных в угол  $BAC$ , увеличиваются по мере удаления центра от вершины  $A$ . Значит, из всех окружностей, вписанных в треугольнике  $ABC$ , наибольший радиус будет у той, которая касается невписанной. А это достигается, если  $AB = AC$ . Отметим, что в нашем случае, фиксированный угол равен  $90^\circ$ , а невписанная окружность – это окружность, вписанная в квадрат.

Таким образом, сумма  $S$  площадей четырех треугольников,

выделенных на рисунке 15,  $a$ , равна  $2x^2$ , где  $x$  — длина катета равнобедренного прямоугольного треугольника. Значение  $x$  можно найти, например, из уравнения  $x + x\sqrt{2} + x = 1$ , тогда  $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $S = 3 - 2\sqrt{2}$ .

10.  $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}(a + b)$ .

Пусть  $ABDE$  — квадрат, построенный на стороне  $AB$ , тогда  $OM$  — средняя линия треугольника  $ADC$ ,  $ON$  — средняя линия треугольника  $BEC$  (рис.16). На отрезках  $AC$  и  $BC$  во внешнюю сторону построим квадраты  $AKLC$  и  $BTPC$ .

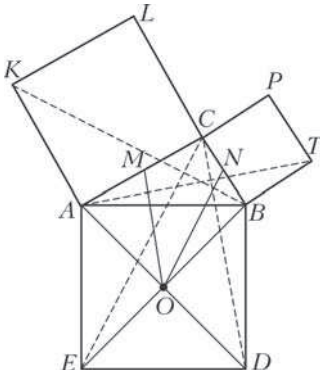


Рис. 16

Проведем отрезки  $BK$  и  $AT$ , тогда  $\triangle ABT = \triangle DBC$  и  $\triangle BAK = \triangle EAC$  (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно,  $DC = AT$  и  $EC = BK$ .

Так как  $AT \leq AC + CT$ , где  $AC$  и  $CT$  имеют фиксированные длины, то наибольшее значение длины  $AT$  достигается, если точка  $T$  лежит на луче  $AC$ . Аналогично, длина  $BK$  — наибольшая, если точка  $K$  лежит на луче  $BC$ . Для

выполнения этих условий необходимо и достаточно, чтобы  $\angle ACB = 135^\circ$ . В этом случае

$$OM + ON = \frac{1}{2}(TA + KB) = \frac{1}{2}(b + a\sqrt{2} + a + b\sqrt{2}) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}(a + b).$$

Использованные равенства двух пар треугольников можно доказать иначе, используя повороты плоскости на угол  $90^\circ$  вокруг точек  $B$  и  $A$  соответственно.

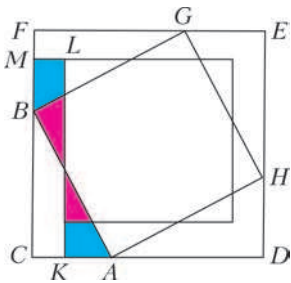


Рис. 17

11. Пусть дан прямоугольный треугольник  $ABC$  с гипотенузой  $AB = c$ . Построим квадрат  $ABGH$  на гипотенузе, затем квадрат  $CDEF$ , описанный около  $ABGH$  (рис.17). Повернем квадрат  $ABGH$  вокруг общего центра этих двух квадратов так, чтобы стороны полученного квадрата и квадрата  $CDEF$  стали параллельными.

Дальнейшее разрезание и перекладывание полученных частей понятно из рисунка 17.

### ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП XLII ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

#### 1. Обманывает.

Назовем ковер, все стороны которого больше 1, *большим*, а ковер, все стороны которого меньше 1, — *маленьким*. Таким образом, изначально у путешественника был один большой ковер. Докажем, что общее число больших и маленьких ковров у путешественника не уменьшается; отсюда следует, что описанная ситуация невозможна. Для этого достаточно рассмотреть только случай, когда путешественник отдает меняле большой или маленький ковер.

При обменах первого вида большой ковер меняют на маленький, а маленький — на большой. Поэтому общее количество больших и маленьких ковров не уменьшается.

Рассмотрим обмены второго вида. При обмене большого ковра  $a \times b$  путешественник получит ковры  $a_1 \times b$  и  $a_2 \times b$ . Если  $0 < a_1, a_2 \leq 1$ , то  $a = a_1 a_2 \leq 1$ , что неверно. Учитывая неравенство  $b > 1$ , получим, что хотя бы один из новых ковров будет большим. Аналогично, при обмене маленького ковра хотя бы один из новых ковров будет маленьким. Значит, при таком обмене общее количество больших и маленьких ковров также не уменьшается.

#### 3. $N = 3$ .

Заметим сразу, что  $d_{s+1-i} = N/d_i$  при всех  $i = 1, 2, \dots, s$ . Число  $d_{i+1} - d_i$  делится на  $\text{НОД}(d_i, d_{i+1})$ , так что

$\text{НОД}(d_i, d_{i+1}) \leq d_{i+1} - d_i$ . При  $i = 1, \dots, s-1$  обозначим  $r_i = (d_{i+1} - d_i) - \text{НОД}(d_i, d_{i+1}) \geq 0$ . Согласно условию,

$$(d_2 - d_1) + (d_3 - d_2) + \dots + (d_s - d_{s-1}) = d_s - d_1 = N - 1$$

и

$$\text{НОД}(d_1, d_2) + \text{НОД}(d_2, d_3) + \dots + \text{НОД}(d_{s-1}, d_s) = N - 2.$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем

$r_1 + \dots + r_{s-1} = 1$ . Это означает, что  $r_k = 1$  для некоторого  $k$ , а все остальные  $r_i$  равны нулю.

Итак,  $1 = (d_{k+1} - d_k) - \text{НОД}(d_k, d_{k+1})$ . Правая, а потому и левая, часть этого равенства делится на  $\text{НОД}(d_k, d_{k+1})$ , поэтому  $\text{НОД}(d_k, d_{k+1}) = 1$  и  $d_{k+1} - d_k = 2$ . Это возможно, только если каждое из чисел  $d_k$  и  $d_{k+1}$  нечетно.

Так как  $d_k$  и  $d_{k+1}$  — два последовательных делителя числа

$N$ , то  $\frac{N}{d_{k+1}}$  и  $\frac{N}{d_k}$  — тоже два последовательных делителя числа  $N$ . Поэтому если  $\frac{N}{d_{k+1}} = d_m$ , то  $\frac{N}{d_k} = d_{m+1}$ . При этом

$$\begin{aligned} \text{НОД}(d_m, d_{m+1}) &= \frac{N}{\text{НОК}(d_k, d_{k+1})} = \frac{N \cdot \text{НОД}(d_k, d_{k+1})}{d_k d_{k+1}} < \\ &< \frac{N(d_{k+1} - d_k)}{d_k d_{k+1}} = d_{m+1} - d_m. \end{aligned}$$

Значит,  $r_m > 0$ , что возможно лишь при  $k = m$  (и, следовательно,  $s = 2k$ ).

Итак,  $d_{k+1} = \frac{N}{d_k}$ , т.е. число  $N = d_k d_{k+1}$  нечетно. Но тогда

$$d_{s-1} \leq \frac{N}{3}, \text{ откуда } \text{НОД}(d_{s-1}, d_s) \leq d_{s-1} \leq \frac{N}{3}.$$

Следовательно,  $1 \geq r_{s-1} \geq \frac{2N}{3} - \frac{N}{3} = \frac{N}{3}$ , т.е.  $N \leq 3$ . Поскольку  $N > 1$ , получаем единственно возможное значение  $N = 3$ , которое, как легко убедиться, удовлетворяет условию.

4. Представим себе, что доминошки (прямоугольники  $1 \times 2$ ) еще не вырезаны, и будем вырезать их по одной. В каждый момент процесса назовем *ценой* еще не вырезанной клетки число ее невырезанных соседей по стороне, уменьшенное на 2 (например, цена неугловой клетки, лежащей на границе квадрата, изначально равна 1). Тогда исходная цена каждой клетки есть  $2 - t$ , где  $t$  — количество отрезков периметра квадрата, находящихся на границе этой клетки. Значит, исходная суммарная цена всех клеток равна  $2 \cdot 100^2 - 400 = 19600$ .

Проследим, как изменяется суммарная цена  $S$  всех невырезанных клеток после вырезания доминошки. При этом выкидываются две клетки (сумма цен которых не превосходит  $2 + 2 = 4$ ), а также уменьшаются на 1 цены клеток, граничащих с доминошкой (которых не больше шести). Поэтому после вырезания доминошки  $S$  уменьшается не более чем на 10. Итак, после вырезания 1950 доминошек  $S$  станет не меньше чем  $19600 - 1950 \cdot 10 = 100$ . Значит, найдется невырезанная клетка  $k$ , цена которой положительна. Это значит, что у  $k$  не менее трех невырезанных соседей. Тогда  $k$  вместе с этими тремя соседями образует требуемую фигуру.





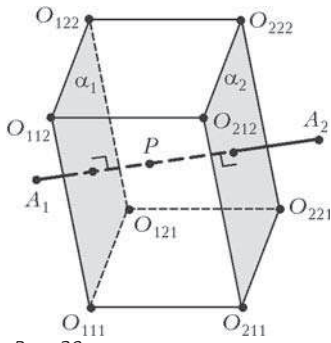


Рис. 20

Параллелепипеда, образованного плоскостями  $\alpha_i, \beta_j$  и  $\gamma_k$ . Теперь утверждение задачи следует из того, что диагонали этого параллелепипеда пересекаются в одной точке – его центре симметрии.

3.  $49 \cdot 50 = 2450$  клеток. Положим  $n = 50$ . Назовем треугольничек *верхним*, если он расположен сверху от прямой, содержащей его горизонтальный катет, и *нижним* – иначе. Пронумеруем горизонтальные линии сетки снизу вверх числами от 0 до  $2n$ .

Обозначим через  $u_k$  (соответственно  $d_k$ ) число отрезочков  $k$ -й линии, участвующих в верхних (соответственно нижних) треугольничках; тогда  $u_k + d_k = 2n$  и  $u_0 = d_{2n} = 2n$ . Кроме того, вертикальные отрезки сетки, расположенные между  $k$ -й и  $(k+1)$ -й линиями, участвуют ровно в  $u_k + d_{k+1}$  треугольничках, так что  $u_k + d_{k+1} = 2n + 1$ . Отсюда несложно получить, что  $d_k = k$  и  $u_k = 2n - k$  при всех  $k$ .

Рассмотрим теперь клетки, расположенные между  $k$ -й и  $(k+1)$ -й линиями сетки. Хотя бы  $u_k = 2n - k$  из этих клеток содержат по верхнему треугольнику, и хотя бы  $d_{k+1} = k + 1$  из них содержат по нижнему. Значит, свободных клеток в этом ряду не больше чем  $2n - \max(u_k, d_{k+1})$ , т.е. не больше  $k$  при  $k < n$  и не больше  $(2n - 1) - k$  при  $k \geq n$ . Итого, общее число свободных клеток не больше чем

$$2(0 + 1 + \dots + (n - 1)) = n(n - 1).$$

Осталось привести пример, на котором эта оценка достигается. На рисунке 21 показан пример при  $n = 4$ . Пример при

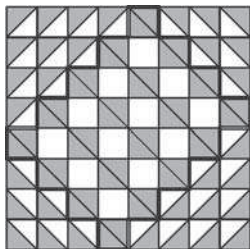


Рис. 21

$n = 50$  строится аналогично: выделяется «прямоугольник» из клеток со сторонами из  $n + 1$  и  $n$  клеток, параллельными диагоналям доски, его клетки красятся в шахматном порядке (так, что угловые клетки прямоугольника – черные) и во все черные клетки кладется по два треугольничка (при этом  $n(n - 1)$  белых клеток остаются свободными); в оставшихся же четырех «углах» доски

треугольнички кладутся так, что прямой угол треугольника «направлен» в ту же сторону, что и весь «угол».

4. **Лемма.** Пусть рациональные числа  $a, b, c$  и  $a + b + c$  – нецелые. Тогда существует такое натуральное  $k$ , что числа  $ka, kb$  и  $kc$  нецелые, причем  $1 < \{ka\} + \{kb\} + \{kc\} < 2$ .

**Доказательство.** Заменяя числа  $a, b$  и  $c$  на их дробные части, можно считать, что они лежат в интервале  $(0; 1)$ . Обозначим  $f(t) = \{ta\} + \{tb\} + \{tc\}$ . Заметим, что при  $1 < a + b + c < 2$  можно положить  $k = 1$ .

Пусть  $a + b + c < 1$ . Выберем такое натуральное  $m$ , что  $ma, mb$  и  $mc$  – целые. Тогда  $f(m - 1) = f(-1) = 3 - (a + b + c) > 2$ . Значит, существует наименьшее натуральное  $k$ , при котором  $f(k) > 1$  (тогда  $f(k - 1) \leq 1$ ). Покажем, что это  $k$  удовлетворяет всем требованиям.

Из неравенства  $\{ka\} \leq \{(k - 1)a\} + a$  и аналогичных получаем

$$f(k) \leq f(k - 1) + (a + b + c) < f(k - 1) + 1 < 2. \quad (*)$$

Значит, осталось показать, что числа  $ka, kb$  и  $kc$  нецелые. Предположим, что, скажем,  $ka$  – целое. Тогда  $\{ka\} = 0$ , поэтому оценку  $(*)$  можно усилить как  $f(k) \leq f(k - 1) + (a + b + c) - 1 < f(k - 1) \leq 1$ ; но это противоречит выбору  $k$ . Итак, в случае  $a + b + c < 1$  требуемое  $k$  найдено.

Наконец, если  $a + b + c > 2$ , достаточно применить уже доказанное утверждение к числам  $a' = 1 - a, b' = 1 - b$  и  $c' = 1 - c$ . Ясно, что число  $k$ , подходящее для этих чисел, подойдет и для исходных.

Перейдем к решению задачи. Вдобавок к данному координатному пространству  $Oxyz$  введем новое пространство  $Oabc$ .

Точке  $(x, y, z)$  из старого пространства сопоставим точку  $(a, b, c)$  из нового с координатами  $a = y + z - x, b = x - y + z, c = x + y - z$ ; тогда  $x = \frac{b + c}{2}, y = \frac{a + c}{2}, z = \frac{a + b}{2}$ . За-

метим, что  $x + y + z = a + b + c$ . Тогда разбиение старого пространства соответствует разбиению нового плоскостями вида  $a = n, b = n, c = n$  и  $a + b + c = n$ . Положим  $a_0 = y_0 + z_0 - x_0, b_0 = x_0 - y_0 + z_0, c_0 = x_0 + y_0 - z_0$ ; по условию, числа  $a_0, b_0, c_0$  и  $a_0 + b_0 + c_0$  – нецелые.

Рассмотрим некоторую точку  $(u, v, w)$  нового пространства с нецелыми координатами. Она попадает в некоторый куб вида  $A \leq a \leq A + 1, B \leq b \leq B + 1, C \leq c \leq C + 1$ . Этот куб пересекают две «наклонные» плоскости  $a + b + c = A + B + C + 1$  и  $a + b + c = A + B + C + 2$ , которые разбивают его на два тетраэдра и (неправильный) октаэдр. При этом точка  $(u, v, w)$  попадет внутрь октаэдра, если она окажется в полосе между указанными плоскостями, т.е. если  $1 < \{u\} + \{v\} + \{w\} < 2$ . Значит, применив лемму к числам  $a_0, b_0, c_0$ , мы найдем значение  $k$ , удовлетворяющее требованиям задачи.

5. Да, обязательно.

Пусть  $p_0, p_1, \dots, p_{2n}$  – числа на карточках, причем  $p_{2n}$  – наибольшее по модулю из них. Поставим  $p_i$  коэффициентом при  $x^i$ . Тогда если  $a$  – целое число, по модулю не меньшее двойки, то

$$\begin{aligned} |p_{2n} a^{2n}| &> |p_{2n}| (|a^{2n-1}| + |a^{2n-2}| + \dots + 1) \geq \\ &\geq |p_{2n-1} a^{2n-1}| + |p_{2n-2} a^{2n-2}| + \dots + |p_0| \geq \\ &\geq |p_{2n-1} a^{2n-1} + p_{2n-2} a^{2n-2} + \dots + p_0|, \end{aligned}$$

так что  $a$  – не корень полученного многочлена.

Осталось переставить коэффициенты  $p_{2n-1}, p_{2n-2}, \dots, p_0$  так, чтобы числа 0 и  $\pm 1$  также не были корнями. Числа 0 и 1 в любом случае корнями не являются, поскольку  $p_0 \neq 0 \neq p_{2n} + p_{2n-1} + \dots + p_0$  по условию. Предположим, что  $x_0 = 1$  является корнем многочлена при любой перестановке коэффициентов  $p_{2n-1}, p_{2n-2}, \dots, p_0$ . Тогда, если поменять местами  $p_i$  и  $p_{i-1}$  (при  $i = 1, 2, \dots, 2n - 1$ ), значение многочлена в  $x_0$  не изменится, что возможно лишь при  $p_i = p_{i-1}$ . Но тогда наш многочлен имеет вид  $p_{2n} x^{2n} + p_0 (x^{2n-1} + \dots + x^{2n-2} + \dots + 1)$  и его значение в точке  $x_0 = -1$  равно  $p_{2n} \neq 0$ . Противоречие.

6. Назовем какой-нибудь город  $A$  столицей. Назовем город четным, если маршрут из  $A$  до него содержит четное число рейсов, и нечетным – иначе (таким образом, город  $A$  четный). Тогда четность любых двух городов, соединенных рейсом, различна. Мы докажем, что сумма чисел, полученных мэрами четных городов, равна сумме чисел, полученных мэрами нечетных; из этого следует утверждение задачи.

Назовем нумерацию городов подходящей для города  $X$ , если мэр города  $X$  ее посчитал. Ясно, что в любой нумерации, подходящей городу  $X$ , он имеет номер 1, так что каждая нумерация подходит не более чем одному городу.

Рассмотрим любую нумерацию, подходящую четному городу  $E$ . Пусть номер 2 в ней носит город  $W$ ; тогда  $W$  – нечетный город, соединенный с  $E$ , иначе на маршруте от  $E$  до  $W$  встретился бы город с большим номером. Поменяем местами номера 1 и 2; мы получим нумерацию, в которой номер 1 носит нечетный город  $W$ .

Рассмотрим любой маршрут  $m$ , начинающийся в  $W$ . Он полу-

чается из некоторого маршрута, выходящего из  $E$ , либо добавлением города  $W$  в начало (если  $t$  проходит через  $E$ ), либо откидыванием  $E$  из начала (в противном случае). Тогда легко видеть, что после обмена 1 и 2 номера на  $t$  идут в порядке возрастания.

Итак, после перемены номеров 1 и 2 из нумерации, подходящей для четного города, получается нумерация, подходящая для нечетного (и наоборот). Это сопоставление взаимно однозначно. Значит, тех и других нумераций поровну, что и требовалось доказать.

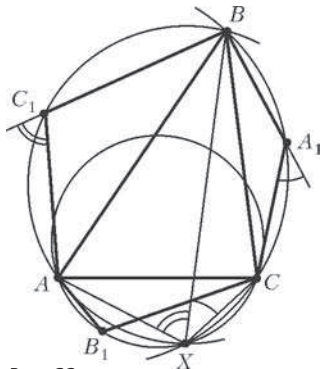


Рис. 22

**8. Лемма.** Пусть на сторонах треугольника  $ABC$  во внешнюю сторону построены треугольники  $A_1BC$ ,  $AB_1C$  и  $ABC_1$  так, что сумма их углов при вершинах  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  кратна  $180^\circ$ . Тогда окружности, описанные около треугольников  $A_1BC$ ,  $AB_1C$  и  $ABC_1$ , пересекаются в одной точке.

**Доказательство.** Пусть окружности, описанные около треугольников  $A_1BC$  и  $ABC_1$ ,

вторично пересекаются в точке  $X$  (рис.22). Тогда  $\angle(BX, XC) = \angle(BA_1, A_1C)$  и  $\angle(AX, XB) = \angle(AC_1, C_1B)$ , откуда  $\angle(AX, XC) = \angle(AX, XB) + \angle(BX, XC) = \angle(AC_1, C_1B) + \angle(BA_1, A_1C) = \angle(AB_1, B_1C)$ .

Это означает, что  $X$  лежит на окружности, описанной около треугольника  $AB_1C$ , что и требовалось. Перейдем к решению задачи. Пусть  $K_A$ ,  $K_B$  и  $K_C$  – середины отрезков  $AM$ ,  $BM$  и  $CM$  соответственно (рис.23). Тогда

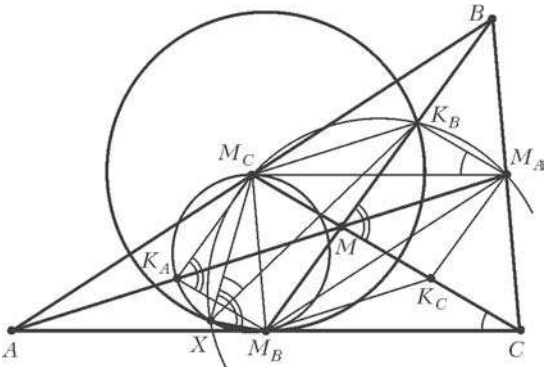


Рис. 23

$M_C K_B \parallel AM$  и  $K_B M_A \parallel MC$  как средние линии в треугольниках  $ABM$  и  $CBM$  соответственно; значит,  $\angle M_C K_B M_A = \angle AMC$ . Аналогично,  $\angle M_C K_A M_B = \angle BMC$  и  $\angle M_A K_C M_B = \angle BMA$ ; значит,  $\angle M_C K_A M_B + \angle M_B K_C M_A + \angle M_A K_B M_C = 360^\circ$ .

Согласно лемме, окружности, описанные около треугольников  $M_C K_A M_B$ ,  $M_B K_C M_A$  и  $M_A K_B M_C$ , имеют общую точку  $X$ . Из этих окружностей имеем

$$\begin{aligned} \angle(K_B X, X M_B) &= \angle(K_B X, X M_C) + \angle(K_C X, X M_B) = \\ &= \angle(K_B M_A, M_A M_C) + \angle(K_C K_A, K_A M_B) = \\ &= \angle(MC, CA) + \angle(BM, MC) = \angle(BM, CA) = \angle(K_B M_B, AC). \end{aligned}$$

Это равенство означает, что окружность  $\Omega_B$  проходит через точку  $X$ . Аналогично, через  $X$  проходят окружности  $\Omega_A$  и  $\Omega_C$ .

## ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП I ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

#### 9 класс

- 1)  $L_{\max} = (3 + \sqrt{2})R$ ,  $L_{\min} = (3 - \sqrt{2})R$ ; 2)  $t = \frac{\pi R}{4v}$ .
2. Если сила в начальный момент направлена вправо, то модуль скорости частицы равен  $u = v - \frac{2F\tau}{\pi m}$ , а направление совпадает с направлением начальной скорости при  $v > \frac{2F\tau}{\pi m}$  и противоположно ему в ином случае. Если же сила в начальный момент направлена влево, то скорость частицы равна  $u = v + \frac{2F\tau}{\pi m}$  и всегда сонаправлена с начальной скоростью.
3.  $A = \mu mg \left( \frac{\mu^2 h^2 L}{L^2 - \mu^2 h^2} + s \right)$ ;  $L > 2\mu h$ .
4. 1)  $t_4 = t_2 - t_3 + t_1 = 40^\circ\text{C}$ ; 2)  $s = L \frac{t_2 - t_3}{t_3 - t_1} = 3\text{ м}$ ;  
3)  $t'_3 = 46,4^\circ\text{C}$ ,  $t'_4 = 53,6^\circ\text{C}$ .
5.  $U_0 = \frac{5}{4}U = 15\text{ В}$ ,  $R = \frac{5U}{3I} = 10\text{ Ом}$ .

#### 10 класс

- 1) 1)  $\tau = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{R}{v_0}$ ; 2)  $A_{\text{тп}} = -m \left( \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} gR - \frac{v_0^2}{2} \right)$ ; 3)  $v_0 \leq \sqrt{\frac{gR}{2\sqrt{2}}}$ .
2.  $\mu = \frac{\Delta p S^2}{v \Delta V}$ .
3. 1)  $\Delta m_{\text{л}} = 18,7\text{ г}$ ;  $\Delta V \approx 12,1\text{ см}^3$  (изменение объема происходит за счет сжимаемости воды и за счет образования льда);  
3)  $A \approx 121\text{ Дж}$ .
4. 1)  $I_{D_1} = 7,6\text{ А}$ ,  $I_{D_2} = 4,2\text{ А}$ ,  $I_{D_3} = 1,8\text{ А}$ ,  $I_{D_4} = 0,4\text{ А}$ ,  
 $I_{R_1} = 3,4\text{ А}$ ,  $I_{R_2} = 2,4\text{ А}$ ,  $I_{R_3} = 1,4\text{ А}$ ,  $I_{R_4} = 0,4\text{ А}$  (при данном напряжении открыты только первые четыре диода);  
2) см. рис.24; 3)  $u = 5,8\text{ В}$  (открыты пять диодов).
5. 1)  $P = \frac{\varepsilon^2}{2R_1} \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2}$ ; 2)  $Q = \frac{C\varepsilon}{4} \left( \frac{3}{8} + \ln 2 \right) = 0,27C\varepsilon^2$ .

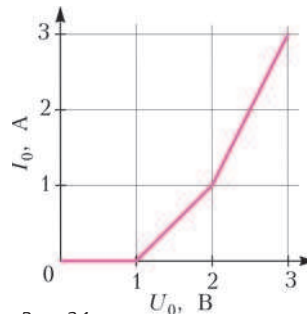


Рис. 24

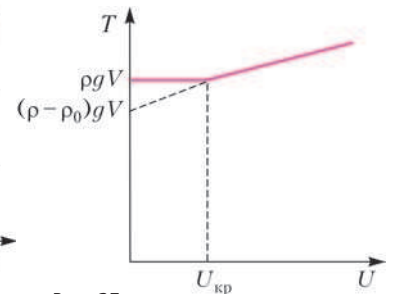


Рис. 25

#### 11 класс

- 1) 1)  $\omega_{\mu} = \sqrt{2}\omega_0 \frac{R_0}{R}$ ; 2)  $\omega_{\eta} = \frac{3}{2}\omega_0 \frac{R_0}{R}$ ; 3)  $k = \frac{3/2}{\sqrt{2}} \approx 1,06$ .
2. 1)  $C = C_V + \frac{R}{1 - \left( \frac{V_0}{p_0} \right)^2 \left( \frac{\Delta p}{\Delta V} \right)^2}$ ; 2)  $C_{II} > C_{IV}$ .
3. 1)  $U = 35\text{ В}$ ; 2) катушка индуктивности, конденсатор, резистор; 3)  $I_{12} : I_{13} : I_{23} = 60 : 21 : 28$ .
4.  $T(U) = \rho g V$  при  $U \leq \frac{\rho_0 g \lambda b}{B}$ ,  $T(U) = (\rho - \rho_0)gV + \frac{BV}{\lambda b} U$  при  $U > \frac{\rho_0 g \lambda b}{B}$ ; см. рис.25.
5.  $R_1 = 1,07 \cdot 10^{11}\text{ м} = 0,72\text{ а.е.}$



**ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП I ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО ФИЗИКЕ ИМЕНИ ДЖ.К.МАКСВЕЛЛА**

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

7 класс

- $v_p = \frac{s}{2t} = 3 \text{ км/ч}$ .
- 1)  $\rho = \rho_{\text{ст}} \frac{L-l}{L+l} = 2,7 \text{ г/см}^3$ ; 2) алюминий;
- $T = \frac{\rho_{\text{ст}} g S L^2 - l^2}{2l} = 6,4 \text{ Н}$ .
- $\rho = \frac{5(m_1 - m_0)}{4V_0} + \rho_0 = 9000 \text{ кг/м}^3$ .
- $s = \frac{v}{n} - L$  (см. рис.26).

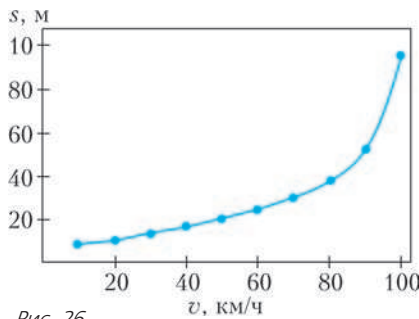


Рис. 26

8 класс

- $t_1 - t_2 = \frac{2(L-s)}{u} = 24 \text{ мин}$ .
- $m_1 = 12 \text{ кг}$ ,  $m_2 = 14 \text{ кг}$ ,  $m_3 = 13 \text{ кг}$ ;  $V_0 = 13,3 \text{ дм}^3$ .
- $T_{\text{Арх}} = \frac{M+m}{3}g = 700 \text{ Н}$ ;  $\frac{\Delta V}{V} = \frac{M+m}{3m} = \frac{7}{9}$ .
- $t_B = t_1 + \frac{c_p \rho_c S h}{c_B \rho_B V_B \rho} = 41 \text{ }^\circ\text{C}$ .

**XXXVII ТУРНИР ГОРОДОВ**

(см. «Квант» №3)

ЗАДАЧИ ВЕСЕННЕГО ТУРА

Базовый вариант

8–9 классы

- Можно. Заметим, что если где-то в круге стоит мальчик, то через одного по часовой стрелке не может стоять девочка – тогда у ребенка между ними одновременно и синяя футболка (так как он – сосед мальчика по часовой стрелке), и красная (так как он – сосед девочки против часовой стрелки). Поэтому через одного от мальчика по часовой стрелке должен стоять мальчик, через одного от него – снова мальчик и так далее. Так как мальчики в круге есть, всего мальчиков не меньше половины. Аналогично, девочек тоже не меньше половины. Следовательно, мальчиков и девочек по 10.
- Прямая  $CB$  и проведенная окружность симметричны относительно высоты  $AH$ . Значит, и их общие точки  $C$  и  $N$  симметричны. Поэтому в треугольнике  $ACN$  два угла по  $60^\circ$ , и он равносторонний. Аналогично, треугольник  $BCM$  – равно-

сторонний. Следовательно, прямые  $AN$  и  $BM$  параллельны (ввиду равенства углов  $CAN$  и  $CMB$ ).

3. Существуют.

Пример 1. 1008, 2, 1510 единиц и 504 минус единицы.

Пример 2. 9, 7, -8, -4 и 2012 единиц.

Замечание. Есть и другие примеры.

4. На 9 многоугольников.

В каждом многоугольнике разбиения должны быть клетки обоих цветов. Значит, в нем должна быть черная клетка, граничащая с белой. Но таких клеток всего 9. Пример разрезания на 9 многоугольников показан на рисунке 27.

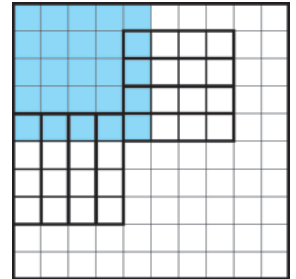


Рис. 27

5. Мог.

Пусть в треугольнике  $ABM$  с углами соответственно  $90^\circ$ ,  $60^\circ$  и  $30^\circ$  высота  $AH$  и биссектриса  $BL$  пересекаются в точке  $K$  (рис.28). Отметим еще точку  $C$  так, чтобы  $M$  стала серединой  $BC$ . Простой подсчет углов показывает, что в

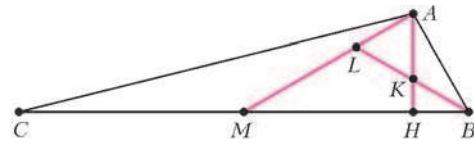


Рис. 28

треугольнике  $ABC$  медиана  $AM$ , высота  $AH$  и биссектриса  $BL$  отсекают красный равносторонний треугольник  $AKL$ .

Замечание. Конструкция единственна.

10–11 классы

1. Пусть выбранная точка  $O$  внутри четырехугольника  $ABCD$  соединена с точкой  $K$  на стороне  $AB$ . Углы  $OAK$  и  $OBK$  опираются на общую хорду равных окружностей. Их сумма не равна  $180^\circ$ , поскольку меньше суммы углов треугольника  $OAB$ . Поэтому эти углы равны. Значит,  $OA = OB$ . Аналогично, все вершины четырехугольника  $ABCD$  равноудалены от  $O$ , что и требовалось доказать.

5. а) Не обязательно.

Рассмотрим вершину  $A$  куба. Середины шести ребер, выходящих из вершины  $A$  или противоположной вершины, отметим синим, а остальные – красным. Расстояния от  $A$  до красных точек одни и те же, а до синих – другие. Поэтому через шесть красных точек проходит сфера с центром  $A$ , не содержащая синих точек.

б) Обязательно.

Все 12 точек лежат на сфере, центр которой совпадает с центром куба. Если некоторые из них лежат на другой сфере, то они лежат на окружности пересечения двух сфер, т.е. в одной плоскости. Сечение куба этой плоскостью имеет не более шести сторон, поскольку у куба шесть граней. При этом только вершины сечения лежат на ребрах куба. Следовательно, семь отмеченных точек не могут лежать на другой сфере.

Сложный вариант

8–9 классы

1. Кусочек  $\overline{ab}$  встретится при любом разрезании пятизначного числа  $\overline{abcab}$ .

2. а) Существуют.

Уравнение  $x^2 - 3x + 3 = 0$  не имеет корней, поскольку у него дискриминант отрицательный, а второе уравнение имеет корни  $x_1 = 4/3$ ,  $x_2 = 5/3$ .

б) Не существуют.

Пусть функция  $f(x) = x^2 + 2ax + b = (x+a)^2 + b - a^2$  не обра-

щается в ноль. Тогда  $b - a^2$  положительно, а потому не меньше 1 ( $a$  и  $b$  целые). Значит,  $f(x) \geq 1$  при любом  $x$ . Замена  $x^2$  целой частью уменьшает значение функции менее чем на 1, а потому оставляет ее положительной.

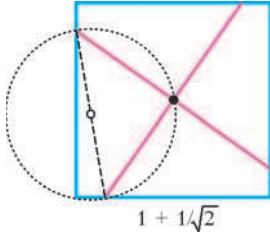


Рис. 29

3. Разрежем данный квадрат на 25 квадратиков  $2 \times 2$ . Каждый из них разрежем отрезками, исходящими из центра и делящими стороны на отрезки длины  $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$  и  $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$  (рис.29). Получится четыре равных четырехугольника, переходящих друг в друга при повороте на  $90^\circ$ . Они вписаны в окружности с диаметрами

$$\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{3}.$$

4. 18 квадратов.

Оценка. Три квадрата при вершине куба образуют цикл соседних клеток длины 3. Вокруг него образуется еще один цикл длины 9 из соседних клеток. А вокруг него – цикл длины 15. Взяв вокруг двух противоположных вершин куба по три таких цикла, а вокруг остальных вершин – по два малых цикла, получим 18 непересекающихся нечетных циклов. Поскольку нечетный цикл в два цвета правильно покрасить нельзя, каждый из них должен содержать черные клетки.

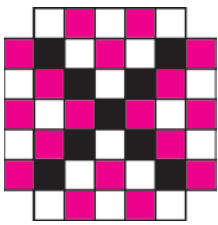


Рис. 30

Пример. Покрасим четыре боковые грани в красный и белый цвета в шахматном порядке. Верхнюю и нижнюю грани покрасим, как на рисунке 30.

5. Через  $\overline{XY}$  будем обозначать число, полученное приписыванием к числу  $X$  справа числа  $Y$  (при этом  $X$  и  $Y$  могут содержать незначащие нули слева.) Пусть число  $\overline{CAD}$  получено из исходного числа  $\overline{CD}$ . Так как эти числа делятся на  $p$ , то на  $p$  делится и число

$$\overline{CAAD} = (\overline{CAD} - \overline{CD}) \cdot 10^k + \overline{CAD}.$$

Пусть  $A = \overline{EF}$  и из числа вставкой числа  $B$  получено число  $\overline{CEBFD}$ , кратное  $p$ . Вычитая из него число  $\overline{CAAD} = \overline{CEFEFD}$  и сокращая на степень десятки, получим, что число  $B - \overline{FE}$  делится на  $p$ . Но последнее число по модулю меньше  $10^k$ , т.е. меньше  $p$ . Следовательно,  $B = \overline{FE}$ , что и требовалось.

6. Не обязательно.

Пусть робот-круг катится без скольжения изнутри по окружности вдвое большего радиуса. Тогда центр робота описывает окружность. Докажем, что каждая точка границы робота движется по одному из диаметров большой окружности. Обозначения приведены на рисунке 31. Длины дуг  $AX$  и  $A'Y$  вычисляются как  $r \cdot 2\angle AOX$  и  $2r \cdot \angle AOY$ , а потому равны. Следовательно,  $X$  и  $Y$  – два положения одной точки границы робота. Значит, точка  $X$  будет двигаться по диаметру  $YZ$ .

Рис. 31

Оценка. Пусть была  $n + 1$  попытка. В каких-то двух попытках использовалась одна и та же батарейка, сделаем ее плохой. В остальных  $n - 1$  попытках выберем по батарейке и сделаем их плохими. Всего не более  $n$  плохих батареек, а фонарик точно светить не будет.

Пример. Разобьем батарейки на  $n$  кучек: в одной – три батарейки, в остальных – по две. В какой-то кучке окажется хотя бы две хороших батарейки. В каждой кучке проверим все возможные пары – всего  $n + 2$ , и фонарик загорится.

б) За  $n + 3$  попытки.

Оценка. Пусть было  $n + 2$  попытки. В каких-то попытках использовалась одна и та же батарейка, сделаем ее плохой.

Если осталось менее  $n$  попыток, то в каждой из них выберем по плохой батарейке. Если же осталось  $n$  попыток, то в них использовались только оставшиеся  $2n - 1$  батареек. Поэтому опять в каких-то двух попытках использовалась одна и та же батарейка, сделаем ее плохой. В остальных  $n - 2$  попытках выберем по плохой батарейке. Всего не более  $n$  плохих батареек, а фонарик точно светить не будет.

Пример. Разобьем батарейки на  $n - 1$  кучек: в двух – по три батарейки, в остальных – по две. В какой-то кучке окажется хотя бы две хорошие батарейки. В каждой кучке проверим все возможные пары – всего  $n + 3$ , и фонарик загорится.

Замечание. При  $n = 2$  нужно 6 попыток.

Для знатоков. Решим эту задачу в общем случае, когда из  $b$  батареек  $k + 1$  хорошие, где  $1 \leq k < b$ . Считая батарейки вершинами, а попытки ребрами, переформулируем: в каком  $b$ -графе без  $(k + 1)$ -антиклик наименьшее количество ребер? (Подсчет количества ребер предоставим читателю.) На этот вопрос, если рассмотреть дополнение графа, отвечает теорема Турана: в  $b$ -графе из  $k$  компонент связности почти равного размера, каждая из которых – клика.

10–11 классы

3. а.

Рассмотрим описанную окружность треугольника  $MEF$ . Угол между касательной и хордой  $MF$  равен  $\angle MEF = \angle FMC$ . Поэтому  $MC$  и есть касательная. Значит, центр окружности лежит на высоте  $BM$ . Следовательно, эта высота является осью симметрии рисунка. Поскольку  $AE \neq CF$ , то окружность пересекает каждую из боковых сторон в двух точках. Причем  $E$  и  $F$  не симметричны. Два возможных случая снабжены соответствующими индексами (рис.32). Рассмотрим их.

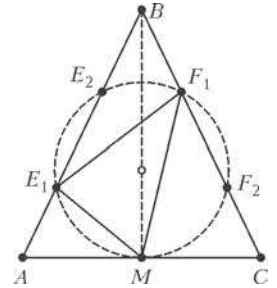


Рис. 32

1) Внешний угол  $AE_1M$  вписанного четырехугольника  $ME_1E_2F_2$  равен углу  $MF_2E_2$ , а последний равен симметричному углу  $ME_1F_1$ , равному  $\alpha$ .

2) Вписанные углы  $AE_2M$  и  $ME_2F_2$ , равные  $\alpha$ , опираются на симметричные дуги.

5. Заметим, что при замене многочленов  $f$  и  $g$  на  $f_1$  и  $g_1$  сумма коэффициентов при 36-х степенях этих многочленов не меняется. Для замены первого вида (при которой  $f + g = f_1 + g_1$ ) это очевидно, а при замене второго вида это следует из равенства

$$(x^{37} + ax^{36} + \dots)(x^{37} + bx^{36} + \dots) = x^{74} + (a + b)x^{73} + \dots$$

Но вначале сумма всех таких коэффициентов у выписанных на доске многочленов неотрицательна, значит, она всегда будет такой. Если в конце все многочлены будут иметь по 37 корней, то по теореме Виета эта сумма равна сумме всех этих корней с противоположным знаком. Следовательно, среди корней будут неположительные.

6. а) Нельзя; б) верно.

Первое решение. Будем рассматривать всевозможные пары букв, входящих в слово. Назовем пары  $a\dots b$ ,  $b\dots c$  и  $c\dots a$  хорошими, пары  $a\dots c$ ,  $c\dots b$  и  $b\dots a$  – плохими.

а) Рассмотрим, как меняется число пар при добавлении од-

ной карточки. Внутри этой карточки есть две хорошие и одна плохая пары. Поскольку вставляются три разных буквы «в одно место», то с каждой из имевшихся уже букв они образуют три новые пары: нейтральную, хорошую и плохую. Отсюда ясно, что число хороших пар всегда больше числа плохих. А в палиндроме их должно быть поровну из-за симметрии слова.

б) Как показано в а), каждая красная карточка увеличивает разность между числом хороших и плохих пар на единицу, а каждая синяя – уменьшает на единицу. Поскольку в палиндроме число хороших пар равно числу плохих, то и число красных карточек равно числу синих.

УСТНЫЙ ТУР ДЛЯ 11 КЛАССА

1. 0.

Преобразуем каждый логарифм в минимальном и максимальном произведении по формуле  $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$ . Поскольку набор квадратных и круглых карточек в обоих случаях один и тот же, наборы числителей и знаменателей также совпадают, а значит, максимальное и минимальное значения равны.

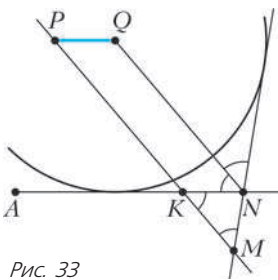


Рис. 33

2. Рассмотрим точку  $Q$  такую, что  $PQNK$  – параллелограмм (рис.33). Легко видеть, что  $Q$  фиксированная, т.е. не зависит от выбора точки  $K$ . Тогда  $NQ \parallel KM$ , значит,  $NQ$  – внешняя биссектриса равнобедренного треугольника  $KNM$ . Поэтому  $Q$  равноудалена от данной прямой  $NK$  и прямой  $NM$ . Тем самым, окружность (фиксированная!) с центром в точке  $Q$ , касающаяся прямой  $NK$ , касается также прямой  $NM$ .

4. Нарисуем таблицу  $30 \times 30$ ; столбцы соответствуют мастерам, строки – юниорам, при этом пара сыгравших друг с другом мастеров соответствует паре соседних столбцов (то же с юниорами). Закрасим клетку, если соответствующие мастер и юниор сыграли друг с другом (всего закрашена половина клеток). Тогда таблица разбивается на квадраты  $2 \times 2$ , и нужно найти такой квадрат, в котором закрашена одна из диагоналей.

Заметим сразу, что это выполнено, если в квадрате хотя бы 3 закрашенных клетки. Значит, если утверждение неверно, то в каждом квадрате не более 2 закрашенных. Поскольку всего закрашена половина клеток, в каждом квадрате тогда ровно по 2 закрашенных клетки, образующих «доминошку».

Рассмотрим вертикальный ряд из 15 квадратов. В его столбцах поровну закрашенных клеток, а значит – поровну вертикальных доминошек. Значит, общее число вертикальных доминошек четно; аналогично, общее число горизонтальных доминошек четно. Но общее число доминошек есть нечетное число  $15^2$ ; противоречие.

5.  $(0; 1) \cup (0; \sqrt{3})$ .

Пусть  $HABCDEF$  – искомая пирамида с вершиной  $H$ , а  $O$  – проекция точки  $H$  на плоскость основания. В случае, когда все боковые ребра равны 1, все вершины основания лежат на окружности с центром  $O$ . Радиус этой окружности меньше 1. Ясно, что если 5 сторон вписанного шестиугольника равны 1, то длина оставшейся стороны может принимать все значения из интервала  $(0; 1)$ .

В случае, когда одно из боковых ребер не равно 1, пять вершин шестиугольника лежат на окружности с центром  $O$  и радиусом  $R < 1$ , а шестая вершина (пусть для определенности это будет вершина  $F$ ) будет лежать вне окружности, причем  $FA = FE = 1$  по условию. Когда расстояние  $OH$  мало, значе-

ние  $R$  близко к 1. При этом  $OF$  и  $HF$  близки к 1.

Другой предельный случай, когда  $D, E$  и  $F$  лежат на одной прямой, изображен на рисунке 34 (недостижим, так как соседние ребра не могут лежать на одной прямой). В этом случае для касательной  $FK$  имеем  $FK^2 = FE \cdot FD = 2$ . Поэтому

$$OF^2 = R^2 + 2$$

и

$$HF^2 = OH^2 + OF^2 = (1 - R^2) + R^2 + 2 = 3,$$

откуда

$$HF = \sqrt{3}.$$

В силу непрерывности, длина  $HF$  может принимать все значения из интервала  $(1; \sqrt{3})$ .

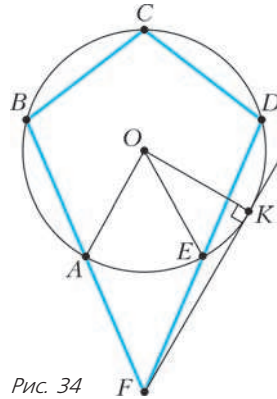


Рис. 34

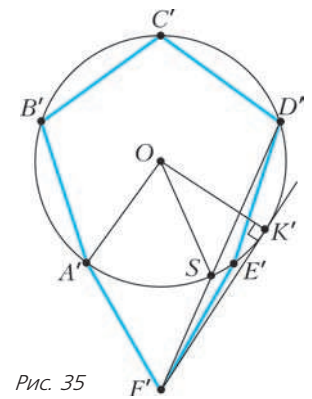


Рис. 35

Покажем, что длина  $HF$  не может быть больше  $\sqrt{3}$ . Для промежуточных случаев мы получим какую-то пирамиду  $H'A'B'C'D'E'F'$  (пять вершин основания лежат на окружности с центром  $O$  и радиусом  $R' > 1$ ; рис. 35). Пусть  $D'F'$  пересекает окружность в некоторой точке  $S$  ( $E'$  лежит на дуге  $SD'$ , так как пирамида выпуклая). Тогда  $F'S < F'E' = F'A' = 1$ , а  $F'D' < F'E' + E'D'$  (неравенство треугольника), и для касательной  $F'K'$  получаем  $F'K'^2 = F'S \cdot F'D' < 1 \cdot 2$ . Поэтому

$$H'F'^2 = OH'^2 + OF'^2 = (1 - R'^2) + R'^2 + F'K'^2 < 3,$$

откуда

$$H'F' < \sqrt{3}.$$

LXXIX МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

(см. «Квант» №3)

Решения задач этой олимпиады можно найти в интернете по адресу: [olympiads.mccme.ru/mmo/2016/79mmo.pdf](http://olympiads.mccme.ru/mmo/2016/79mmo.pdf)

МОСКОВСКАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2016 ГОДА

(см. «Квант» №3)

ПЕРВЫЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

7 класс

1.  $t_{1\min} = 6t_1 \approx 12$  ч; от  $t_{2\min} = \frac{6}{11}t_1 \approx 65$  мин до

$t_{2\max} = \frac{2}{3}t_1 = 80$  мин.

2.  $v_{\text{ср}\min} = 64$  км/ч,  $v_{\text{ср}\max} = 66$  км/ч.

3. 1)  $\rho_1 = \frac{\rho_{\text{яйца}}}{100} = 10,6$  кг/м<sup>3</sup>; 2)  $\rho_2 = \frac{40}{68}\rho_1 \approx 6,2$  кг/м<sup>3</sup>.

4.  $m_1 = \frac{0,016\rho S}{6500} \approx 12,3$  мкг.



8 класс

1.  $v_1 \approx 2,9$  км/ч,  $v_2 \approx 4,2$  км/ч. 2.  $\rho_r = 2\rho_B = 2000$  кг/м<sup>3</sup>.  
 3.  $t_{\min} = 576$  с = 9 мин 36 с. 4.  $\Delta t = \frac{\Delta L}{\frac{a\Delta l_1}{l_1\Delta t_1} + \frac{b\Delta l_2}{l_2\Delta t_2}}$ .

9 класс

1.  $t_{\min} = \frac{13}{40} \frac{s}{v} = 2,925$  ч = 2 ч 55 мин 30 с. 2.  $M_Y \approx 568 M_{II}$ .  
 3.  $a_2 = \left| \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right| g$ . 4.  $R_1 = \frac{R}{\sqrt{1 - \frac{\rho_B}{\rho_L} \frac{ct}{ct + \lambda}}} \approx 10,7$  см.

10 класс

1. Табуретка начнет опрокидываться раньше, чем скользить; движение начнется спустя время

$$t = \frac{4}{\rho v \pi D^2} \left( \frac{Md}{2h} - m \right) \approx 358 \text{ с} \approx 5 \text{ мин } 58 \text{ с.}$$

2.  $Q = gvt(m - M \sin \alpha) \frac{100\% - \eta}{\eta} \approx 0,83$  Дж.  
 3.  $m = 135$  мг (это соответствует 27 глоткам).  
 4.  $\Delta T = -\frac{mv^2 + 2p_0Sl}{3vR} \approx -2$  К (убыль внутренней энергии гелия идет на сообщение пробке кинетической энергии и на работу против силы атмосферного давления).  
 5. Длинную проволоку нужно натянуть вдоль короткой, а оставшийся участок сложить вдвое и, перегнув в точке *B* (см. рисунок к условию), положить сверху. Общее сопротивление участка *AB* будет при этом равно  $R \approx 0,01$  Ом, а мощность –

$$P = \frac{U^2}{R} \approx 9 \text{ Вт.}$$

11 класс

1.  $R \approx \frac{l^2 L^2}{2ha^2} \approx 5326$  км.  
 2.  $a_{\max} = \frac{gd}{h} \left( \frac{M}{2m} + 1 \right) \approx 16,67$  м/с<sup>2</sup>; при превышении этого значения табуретка начнет опрокидываться.  
 4.  $R_{AB} = \frac{1}{2} r$ .  
 5. Блока коснется верхний груз массой  $m$  через максимальное время  $\tau_{\max} = \pi \sqrt{\frac{3m}{4k}}$ , которое обеспечивается при  $l_0 = \frac{mg}{2k}$ .

ВТОРОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

7 класс

2. Турист не успел бы добежать до точки *A*, поезд догнал бы его на расстоянии

$$L = \frac{v(s-l)}{V+v} + 2d - \frac{vs}{V-v} = 10 \text{ м.}$$

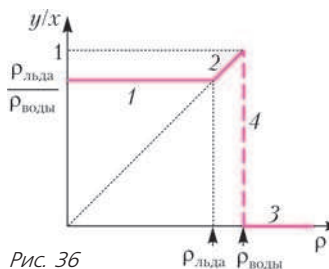


Рис. 36

3. См. рис.36 (участок 1 соответствует условию  $\rho < \rho_{\text{льда}}$ , участок 2 – условию  $\rho_{\text{льда}} \leq \rho < \rho_{\text{воды}}$ , участок 3 – условию  $\rho > \rho_{\text{воды}}$  и участок 4 – условию  $\rho = \rho_{\text{воды}}$ ).

4.  $m_2 = m_1 \frac{2\rho_a - \rho_B}{2\rho_a - \rho_M} \frac{l_1}{l_2} = 1$  кг.

8 класс

1.  $v_1 = 40$  км/ч,  $v_2 = 100$  км/ч;  $t = 1$  ч 20 мин;  
 $v_{\text{ср}100} \approx 55,6$  км/ч.

2.  $\alpha = \frac{\rho_a}{\rho_B} - \frac{l_2}{l_1} \left( \frac{\rho_a}{\rho_B} - \frac{1}{2} \right) = 0,06$ . 4.  $t_{\text{ц}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} t_{\text{к}} \approx 33,85$  с.

9 класс

1. 1) 8,5 часов; 2) 41 минута (составьте таблицу или нарисуйте график для определения количества роботов на пункте к концу каждого часа).  
 3. Сила трения в указанный момент времени отсутствует (проскальзывание тел относительно друг друга еще не началось).  
 4. 1) Вправо на 4,8 см; 2) не может; 3) может; 4) 7,2 В.

10 класс

2. Ответ на дополнительный вопрос: брусок и клин движутся горизонтально как единое целое с ускорением

$$a = \frac{58T}{m+M} = 10 \text{ м/с}^2.$$

4. Материальные точки будут двигаться с равными скоростями  $v$ , а тело остановится;  $L_{\min} = \left( \frac{1}{L} + \frac{mv^2}{2kq^2} \right)^{-1}$ .

5. 1) При  $0 < \tilde{R} < \frac{R_1 R_3}{R_4} = 64$  Ом ток через резистор сопротивлением  $R_2$  течет от точки *C* к точке *B*; 2)  $U_{2\max} \approx 10,8$  В при  $\tilde{R} = 0$ .

11 класс

1.  $\alpha = \sqrt{\frac{13}{5}} \approx 1,61$ . 2.  $\Delta m = \frac{15}{4} M = 450$  г.  
 3.  $\frac{\eta_{2\max}}{\eta_{1\max}} = 1 + \frac{\pi}{8\sqrt{15}} \approx 1,1$ . 4.  $\Delta\varphi_B = -\frac{qR}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ .  
 5.  $\sigma_C = \sigma_0 \cos \alpha = \frac{\sigma_0}{2}$ ;  $\varphi_A - \varphi_C = vBR(1 - \cos \alpha) = 0,1$  В.

# КВАНТ

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов,  
 П.А.Кожевников, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова,  
 А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**В.В.Власов, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия,  
 М.Н.Сумнина**

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**Е.В.Морозова**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»**

**Тел.: (495) 930-56-48**

**E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru**

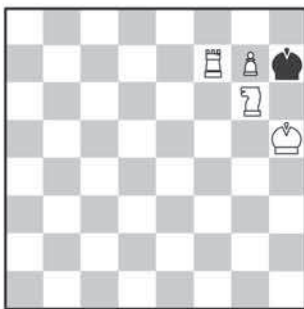
**Отпечатано**

**в соответствии с предоставленными материалами  
 в ООО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь  
 www.Pareto-print.ru**

## Задачи -ШУТКИ

В каждой области знаний есть свой специфический юмор. Веселая шутка не только вызывает улыбку, но и помогает глубже понять серьезные вещи. Неслучайно еще полвека назад большой популярностью пользовалась книга «Физики шутят», потом шутить начали математики, химики, геологи и географы, педагоги и журналисты. Шахматисты – не исключение. Задачи-шутки содержат какой-нибудь фокус, трюк, допускается неожиданное нарушение правил.

В классической композиции, в двух-, трех-, тем более в многоходовках решатели часто сталкиваются с трудностями, но иногда мат в один ход или быстрее (!) тоже ставит в тупик. Дело в том, что в задачах-шутках – а речь идет именно о них – чувство юмора порой значит не меньше, чем игровой опыт, а оно может подвести.

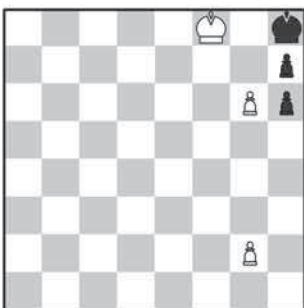


Мат в 1 ход

В этой позиции заматовать может только пешка, превратившись в фигуру. Но в какую? Не удивляйтесь – в коня, к тому же черного! Необычное превращение – распространенный шуточный прием.

**1. g8♞ (черный)×!** Конь запер собственного короля. Уметь надо!

Чем не шуточный сюжет – сказочное превращение в неприятельскую фигуру.



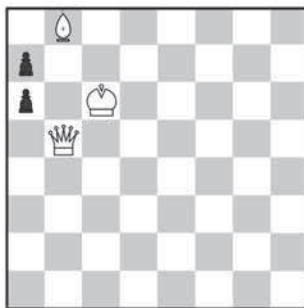
Мат в 1 ход пешкой g2

Эту позицию как-то расставил мне один шахматный остроумец. Задание немислимое. Черные только что взяли

какую-то фигуру пешкой на h6, и я долго ломал голову, как же пешка g6 может пропустить свою напарницу, и в конце концов сдался: «Вы ничего не перепутали?» И тут юморист совершил простой, но изящный трюк – поменял местами пешки g2 и g6 и объявил мат обещанной пешкой – **1. g6-g7×**.

«Что и требовалось доказать!» – воскликнул незнакомец и покинул помещение, оставив меня в полном недоумении.

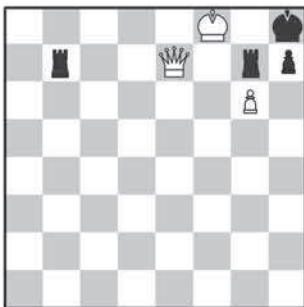
Редкая юмористическая тема – добавление фигур на доске без всяких причин. Но тут придется воспользоваться элементами ретроанализа, в котором требуется изучить прошлое позиции. Вообще, этот увлекательный и непростой раздел композиции весьма серьезен, тут не до шуток. Но от простейшего ретроанализа наше чувство юмора не пострадает.



Ю.Багрецов, 1939

Поставить черного короля и дать мат в 1 ход

Хочется поставить короля на a8 и **1. ♚b7×**. Но ведь в этом случае отсутствует последний ход черных и, значит, он за ними – 0...ab! и никакого мата нет. Короля, оказывается, следует поставить в противоположный угол доски – h1, где он благополучно гибнет – **1. ♚f1×!**

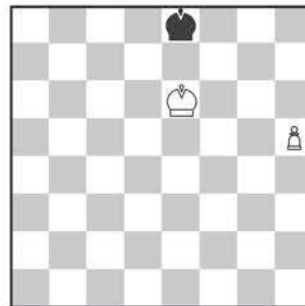


Я.Ройко, 1987

Какую ладью умыкнул О.Бендер у одноглазого и дал мат в 1 ход?

Конечно, Бендер сообразил, что если он снимет ладью b7, чтобы дать мат – **1. ♚:g7×**, то одноглазый поднимет шум, ведь такая позиция не могла

возникнуть в реальной партии: у черных опять нет последнего хода (уж в чем в чем, а в ретроанализе великий комбинатор был силен). Поэтому он слямзил ладью g7 и победоносно завершил схватку – **1. g7×!**



Э.Погосянц, 1980

Белые берут ход назад и дают мат в 1 ход

Эту задачу ее автор трактовал как иллюстрацию к «Евгению Онегину». Вспомним известную партию между Ленским и Ольгой:

*Уединясь от всех далеко,  
Они за шахматной доской,  
На стол облокотясь порой,  
Сидят, задумавшись глубоко,  
И Ленский пешкою ладью  
Берет в рассеяньи свою.*

Позиция как раз возникла после того, как рассеянный Ленский нарушил правила и забрал пешкой g4 свою собственную ладью h5. Теперь он умоляет Ольгу простить его, берет ход назад и объявляет удивленной барышне шах и мат – **1. ♜h5-h8×**.

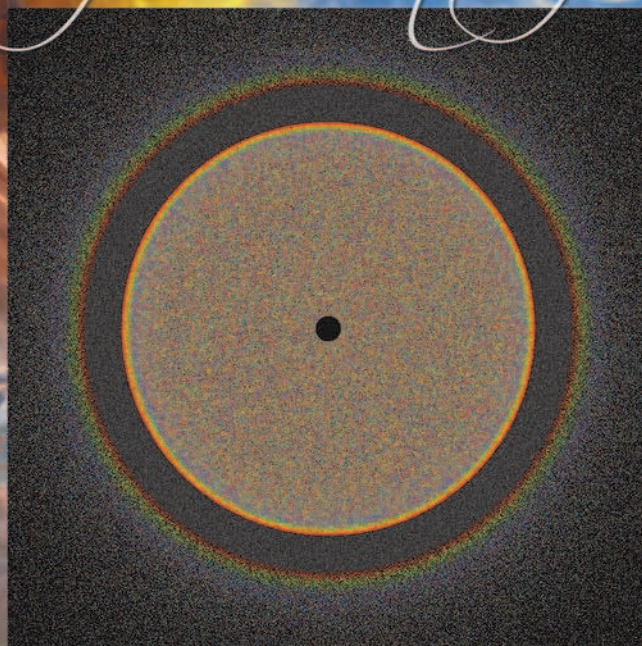
Задача шуточная, но забавно, что она не допускает кривотолков. Например, предположение, что Ленский взял на h5 своего ферзя, а не ладью, означает, что Ольга тоже играла рассеянно – иначе не объяснить, почему черный король отправился под шах. Ведь об этом у Пушкина ничего не сказано...

Е.Гук



Индекс 90964

# Уроки с физикой



## РАДУГА ИЗ КОМПЬЮТЕРА



Приведенный здесь рисунок действительно построен с помощью компьютера. Используя законы отражения и преломления, были рассчитаны траектории 1000000 световых лучей, что дало нам возможность наблюдать ... радугу.

(Подробнее о радуге – внутри журнала)

