

ЯНВАРЬ / ФЕВРАЛЬ

ISSN 0130-2221

2016 • № 1

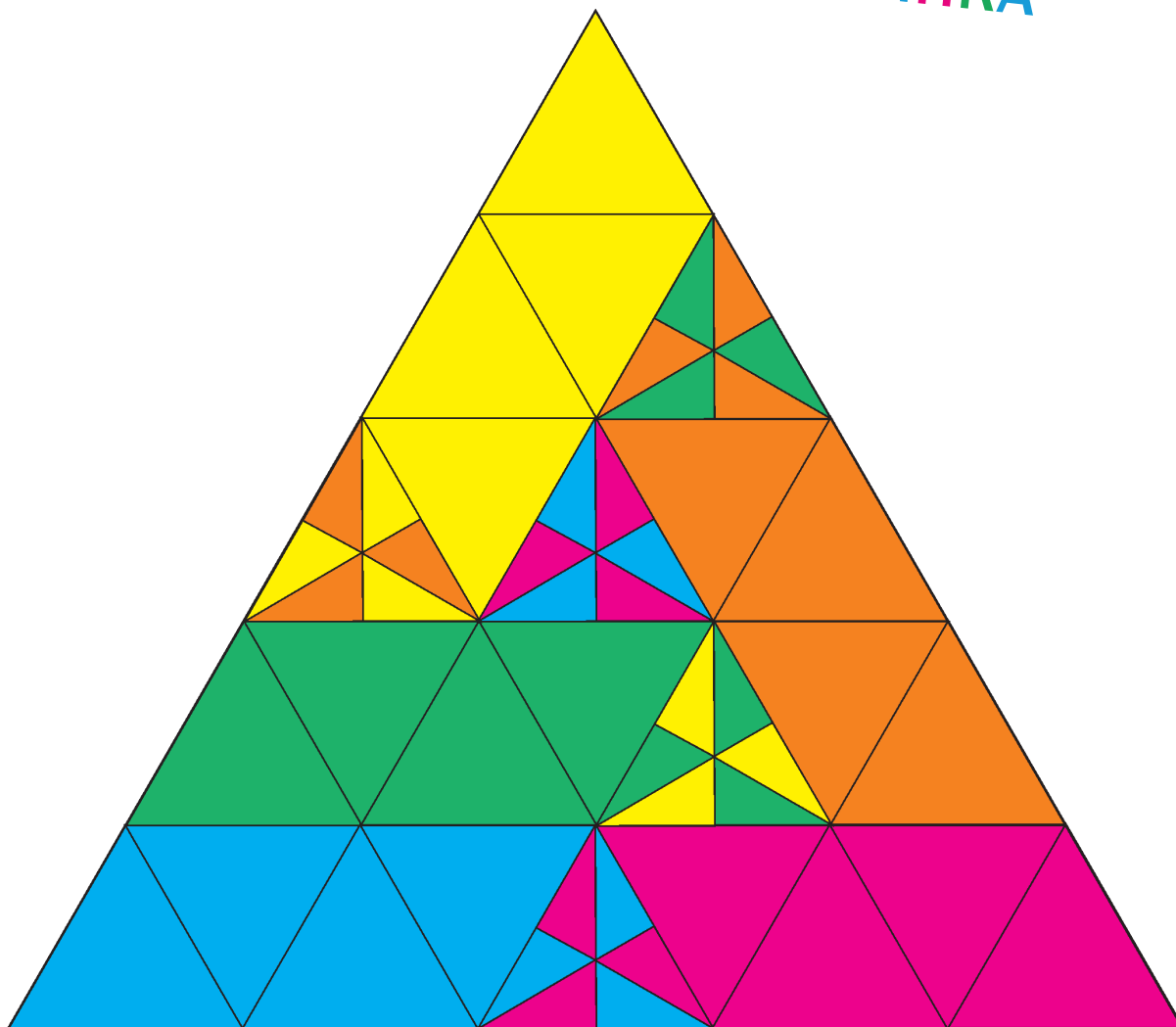
# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ





# ПЕНТАСЕКЦИЯ ПРАВИЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА



Равносторонние треугольники проходят в школе в 7 классе, а разрезания фигур на одинаковые части – это, казалось бы, совсем детская тема. Но при этом до недавнего времени не был известен ответ на вопрос «Можно ли разрезать равносторонний треугольник на пять одинаковых частей?» Только в начале этого года Михаил Патракеев из Института математики и механики им. Н.Н.Красовского (Екатеринбург) смог придумать подходящее разрезание. Его пример (кстати, очень изящный!) показан на рисунке. Каждая часть покрашена своим цветом. Обратите внимание, что части устроены сложно и каждая из них состоит из двух отдельных кусков.

(Продолжение – на с. 8 внутри журнала)

# КВАНТ

ЯНВАРЬ  
ФЕВРАЛЬ

2016

№ 1

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

УЧРЕДИТЕЛЬ

Российская академия наук

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**А.Л.Семенов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Н.Н.Андреев, А.Я.Белов,  
Ю.М.Брук, А.А.Варламов, С.Д.Варламов,  
А.Н.Виленин, В.И.Голубев,  
Н.П.Долбиллин, С.А.Дориченко,  
В.Н.Дубровский,  
А.А.Егоров, А.А.Заславский,  
П.А.Кожевников (*заместитель главного редактора*),  
С.П.Коновалов, А.А.Леонович,  
Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, В.Ю.Протасов,  
А.М.Райгородский, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский,  
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров,  
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан  
(*заместитель главного редактора*)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,  
В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,  
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков,  
Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**И.К.Кикоин**

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

**А.Н.Колмогоров**

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,  
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,  
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,  
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,  
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,  
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,  
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант,  
Я.Е.Шнайдер

- 2 Планер Жуковского и движение в скрещенных полях. *П.Панов*  
9 Пятнадцать человек на сундук мертвеца. *С.Грибок, К.Кноп*

## НОВОСТИ НАУКИ

- 16 Свободная частица. *Л.Белопухов*

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 21 Задачи M2406–M2413, Ф2413–Ф2419  
22 Решения задач M2389–M2395, Ф2395–Ф2402  
29 Висячие мосты. *С.Муравьев*

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Движение со связями

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 34 Задачи  
35 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»  
35 Сплошные неприятности. *И.Акулич*  
37 Брелок для ключей и ... физика. *С.Дворянинов*

## ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 39 А что изменится, если...? *Е.Соколов*  
42 Свет из-за угла, или Как Школьник в класс торопился.  
*А.Стасенко*

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 43 Форма кривой вращающегося троса. *А.Князев*

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 46 Изогонально сопряженные точки. *П.Кожевников*  
50 Евклид и неприводимые многочлены. *В.Ильичев*

## ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 51 Задачи на силу трения. *А.Черноуцан*

## ОЛИМПИАДЫ

- 56 XXXVII Турнир городов

- 58 Ответы, указания, решения

## НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье П.Панова*  
II *Коллекция головоломок*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогулки с физикой*

# Планер Жуковского и движение в скрещенных полях

П. ПАНОВ

В ОКТЯБРЕ 1891 ГОДА НИКОЛАЙ ЕГОРОВИЧ ЖУКОВСКИЙ сделал в Московском математическом обществе сообщение «О парении птиц». А спустя 17 лет, в 1908 году, появился второй том трудов Фредерика Уильяма Ланчестера по изучению парящего или планирующего полета под названием «Aerodnetics». На фронтиспise этой книги были изображены те же самые замечательные траектории полета, о которых рассказал Жуковский в своем сообщении (рис.1, 2). За этими траекториями и типами движений закрепилось придуманное Ланчестером название *фугоид* и *фугоидное движение*. Это одно из простейших возможных движений летательного аппарата под действием силы тяжести, силы сопротивления, подъемной силы и силы тяги.

Приблизительно в то же время, в 1892 году, Хендрик Лоренц опубликовал свою формулу для вычисления силы, с которой электромагнитное поле действует на заряженную частицу. С тех пор самое популярное упражнение на применение формулы Лоренца – это построение траектории заряженной частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях.

Оказывается, эта электромагнитная задача очень похожа на ту аэродинамическую, которую решали Жуковский и Ланчестер. Мы обсудим обе эти задачи и расскажем, как с помощью компьютера можно построить траекторию заряженной частицы и траекторию летательного аппарата.

## Уравнение движения Ньютона

Уравнение движения Ньютона, или второй закон Ньютона, это самый важный закон физики. Именно с него начинается решение любой задачи на движение.

Если материальная точка массой  $m$  под действием силы  $f$  движется вдоль прямой, то для нее выполняется второй закон Ньютона

$$mx'' = f,$$

где  $x$  – координата точки,  $x''$  – ее ускорение. Штрихи вверху справа (наряду с точками сверху) используются в физике для обозначения производных по времени. Так что  $u = x'$  – это скорость точки, а  $x'' = u'$  это естественное обозначение для ускорения. Используя эти обозначения, мы можем переписать второй закон Ньютона в виде

$$\begin{aligned} x' &= u, \\ u' &= \frac{f(x, u)}{m}. \end{aligned}$$

Здесь мы еще уточнили, что силы, которые действуют на точку, могут зависеть от ее положения и скорости.

Для частицы, движущейся в плоскости, уравнения движения Ньютона выглядят аналогичным образом:

$$\begin{aligned} x' &= u, \quad y' = v, \\ u' &= \frac{f(x, y, u, v)}{m}, \quad v' = \frac{j(x, y, u, v)}{m}. \end{aligned} \quad (*)$$



Рис. 1. Н.Е.Жуковский. «О парении птиц»

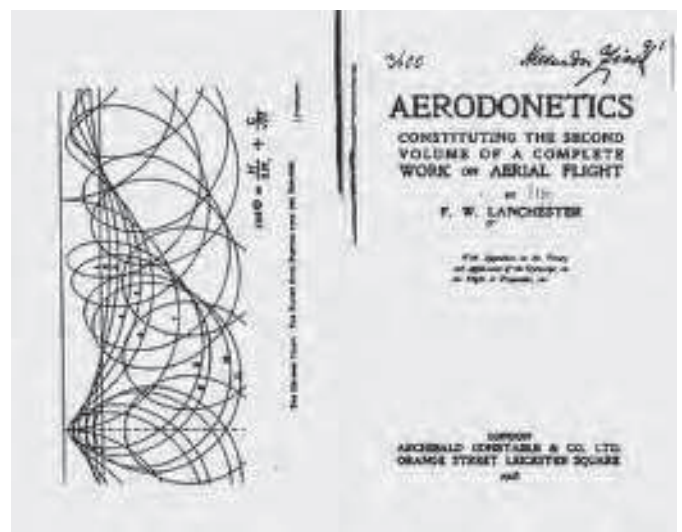


Рис. 2. Ф.У.Ланчестер. «Aerodnetics»

Здесь  $(x, y)$  – координаты движущейся точки,  $\vec{V} = (u, v)$  – ее скорость и  $\vec{F} = (f, j)$  – сила, действующая на материальную точку. Система этих уравнений позволяет построить траекторию для любой движущейся точки. Как только будет задана сила  $\vec{F}$ , можно будет браться за построение любой соответствующей траектории.

**Аэродинамические и электромагнитные силы**

Рассмотрим одновременно обе задачи – аэродинамическую задачу Жуковского, которую будем называть задачей о движении планера Жуковского, и задачу о движении заряженной частицы в сокращенных полях.

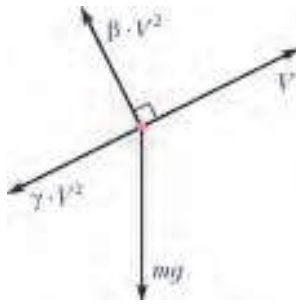


Рис. 3. Аэродинамическая задача

Чтобы подчеркнуть аналогию между этими задачами, слегка изменим обычно используемые стандартные обозначения. Вся необходимая информация о задачах представлена на двух рисунках.

На рисунке 3 красной точкой изображен планер Жуковского, который движется со скоростью  $\vec{V}$ . На планер действуют три силы:

1) подъемная сила, пропорциональная квадрату скорости и направленная перпендикулярно вектору скорости  $\vec{V}$ , коэффициент пропорциональности обозначен  $\beta$ ,

2) сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости и направленная противоположно вектору скорости  $\vec{V}$ , коэффициент пропорциональности обозначен  $\gamma$ ,

3) сила тяжести  $mg$ , направленная вниз.

На рисунке 4 синей точкой изображена положительно заряженная частица с зарядом  $q$ , которая движется со скоростью  $\vec{V}$  в постоянных электрическом и магнитном полях. Величина электрического поля (его напряженность) равна  $E$ , оно направлено вниз. Величина магнитного поля (его индукция) равна  $B$ , оно направлено перпендикулярно плоскости страницы от нас. На частицу действуют три силы:

1) магнитная сила Лоренца, пропорциональная величине скорости и направленная перпендикулярно вектору скорости  $\vec{V}$ , коэффициент пропорциональности равен  $qB$ ,

2) сила сопротивления, пропорциональная величине скорости и направленная противоположно вектору скорости  $\vec{V}$ , коэффициент пропорциональности обозначен  $\gamma$ ,

3) электрическая сила величиной  $qE$ , направленная вниз.

В этих двух задачах аналогом подъемной силы служит магнитная сила Лоренца, аналог силы тяжести – это электрическая сила и, наконец, силе сопротивления соответствует сила сопротивления. Единственное значимое отличие заключается в том, что в аэродинамической задаче силы зависят от скорости квадратичным образом, а их аналоги – линейным. Чтобы не было недоразумений, добавим, что аэродинамические силы сопротивления в разных случаях могут по-разному зависеть от скорости, это хорошо известный факт.<sup>1</sup>

Мы дали полное описание наших задач, сделанное на геометрическом языке. Теперь переведем его на координатный язык и примемся решать эти задачи.

**Координаты и векторы**

Введем на рисунках 3 и 4 систему координат, направив ось  $x$  горизонтально вправо и ось  $y$  вертикально вверх. Как и раньше, вектор скорости обозначим  $\vec{V} = (u, v)$ . Для записи уравнений движения Ньютона нам нужно будет проделать с этим вектором, несколько операций –

- умножить вектор на число:

$$\alpha(u, v) = (\alpha u, \alpha v),$$

- вычислить длину вектора:

$$V = \sqrt{u^2 + v^2},$$

- из вектора длиной  $V$  получить вектор того же направления, имеющий длину  $V^2$ :

$$(u, v) \rightarrow (u\sqrt{u^2 + v^2}, v\sqrt{u^2 + v^2}),$$

- повернуть вектор на  $90^\circ$  против часовой стрелки:

$$(u, v) \rightarrow (-v, u),$$

- поменять направление вектора на противоположное:

$$(u, v) \rightarrow (-u, -v).$$

Теперь, в соответствии с рисунками 3 и 4, просуммируем в координатной форме все три силы, действующие на планер Жуковского, и все три силы, действующие на заряженную частицу. А потом запишем для каждой из задач уравнения движения Ньютона. И сделаем это в форме таблицы:

Аэродинамическая задача	Электромагнитная задача
$x' = u$	$x' = u$
$y' = v$	$y' = v$
$u' = (-\beta v \sqrt{u^2 + v^2} - \gamma u \sqrt{u^2 + v^2}) / m$	$u' = (-qBv - \gamma u) / m$
$v' = (-gm + \beta u \sqrt{u^2 + v^2} - \gamma v \sqrt{u^2 + v^2}) / m$	$v' = (-qE + qBu - \gamma v) / m$

<sup>1</sup> Об этом можно прочитать, например, в статье А.Стасенко «Как воздух сопротивляется движению тела» в «Кванте» №1 за 2015 год.

Обсуждение начнем с левого столбца, т.е. с аэродинамической задачи. Первые две строчки стандартные. Посмотрим на правые части последних двух формул. Там в скобках должны стоять координаты суммарной силы, действующей на планер. Первое слагаемое в нижней скобке соответствует силе тяжести, направленной вниз. Слагаемые с коэффициентом  $\beta$  соответствуют подъемной силе, она перпендикулярна скорости и пропорциональна квадрату ее величины. Слагаемые с коэффициентом  $\gamma$  соответствуют силе сопротивления, она направлена противоположно скорости и пропорциональна квадрату ее величины.

Аналогичным образом устроены уравнения движения Ньютона для заряженной частицы, приведенные в правом столбце таблицы.

Главная часть работы сделана – для каждой задачи записаны уравнения движения Ньютона. Можно строить траектории – находить зависимость координат точки  $(x, y)$  от времени  $(t)$ .

### Метод Эйлера

Существует универсальный численный метод построения траекторий частицы, для которой известны уравнения движения Ньютона (\*). Мы задаем начальное положение частицы  $(x_0, y_0)$  и ее начальную скорость  $(u_0, v_0)$ , выбираем маленький промежуток времени  $\Delta t$  и начинаем по индукции вычислять те же самые величины  $x_n, y_n, u_n, v_n$  в следующие моменты времени  $n\Delta t$  по таким формулам:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \Delta t \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ f(x_n, y_n, u_n, v_n)/m \\ j(x_n, y_n, u_n, v_n)/m \end{pmatrix}.$$

В результате получим последовательные точки  $(x_n, y_n)$ , лежащие на траектории частицы. Поскольку промежуток времени  $\Delta t$  мал, эти точки близки друг к другу. Если вывести их на экран компьютера, то они сольются в непрерывную траекторию.

Давайте убедимся, что метод Эйлера работает правильно. Для первой координаты имеем

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t u_n,$$

но это означает, что

$$u_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t}.$$

Справа стоит отношение приращения координаты частицы к приращению времени – производная  $x$  по времени, т.е. первая координата скорости частицы. Но величина  $u$  так у нас и определена, поэтому первое соотношение выполняется по определению. Аналогично обстоит дело со вторым соотношением

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t v_n.$$

Посмотрим, что происходит с координатой скорости  $u$ :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta t f(x_n, y_n, u_n, v_n)}{m}.$$

Это выражение можно переписать в виде

$$m \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} = f(x_n, y_n, u_n, v_n).$$

Но отношение приращения скорости к приращению времени равно ускорению – производной от скорости по времени, так что это соотношение выполняется потому, что выполняется второй закон Ньютона. Следовательно, и здесь все верно. Аналогично обстоит дело с четвертым соотношением

$$v_{n+1} = v_n + \frac{\Delta t j(x_n, y_n, u_n, v_n)}{m}.$$

Существуют другие, более точные методы построения траекторий, но метод Эйлера настолько прост и красив, что его нужно знать в первую очередь.

На рисунках 5 и 6 приведены две типичные траектории, рассчитанные методом Эйлера. Значения всех

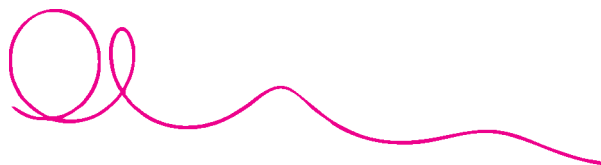


Рис. 5. Траектория планера Жуковского:  $m = 1, g = 10, \beta = 8, \gamma = 1, x_0 = 0, y_0 = 0, u_0 = 4, v_0 = -3, t = 2, \Delta t = 10^{-4}$

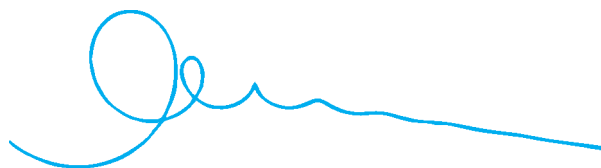


Рис. 6. Траектория заряженной частицы:  $m = 1, q = 1, E = 10, B = 20, \gamma = 2,75, x_0 = 0, y_0 = 0, u_0 = 4, v_0 = -3, t = 2,5, \Delta t = 10^{-4}$

физических величин, используемых при расчетах, приведены в единицах СИ. Поскольку шаг по времени  $\Delta t = 10^{-4}$  очень мал, точки действительно сливаются в непрерывную траекторию. Видно, как планер (см. рис. 5) делает две петли, потом следуют несколько горбов, дальше из-за силы сопротивления полет стабилизируется и переходит в планирование вдоль наклонной прямой. Аналогичная картина наблюдается и для заряженной частицы (см. рис. 6).

### В пузырьковой камере

Помимо вычислений существуют экспериментальные исследования. Физики умеют фиксировать движение частиц в электрических и магнитных полях. Замечательную картину представляют собой треки заряженных частиц в пузырьковой камере, пронизанной магнитным полем (рис. 7). С помощью уравнений движения Ньютона и метода Эйлера можно рассчитать любую траекторию на этой картинке.

### Задача о движении заряженной частицы – аналитическое решение

Задача о движении заряженной частицы проще, чем аэродинамическая задача. Она имеет простое аналити-



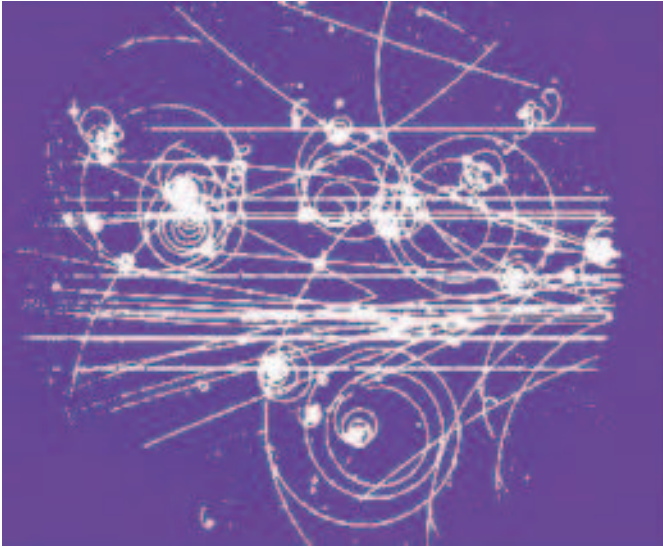


Рис. 7. Треки заряженных частиц в пузырьковой камере

ческое решение. Мы ограничимся случаем, когда сопротивление движению частицы отсутствует, т.е.  $\gamma = 0$ . Тогда для траектории частицы получаются совсем короткие формулы:

$$x = r \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{E}{B}t,$$

$$y = -r \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + r.$$

Здесь в начальный момент времени  $t = 0$  заряженная частица находится в нижней точке своей траектории  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$  и движется со скоростью  $u_0 = \frac{rqB}{m} + \frac{E}{B}$ ,  $v_0 = 0$ . Движение частицы складывается из равномерного вращения с угловой скоростью  $\omega = \frac{qB}{m}$  и равномерного перемещения вдоль оси  $x$  со скоростью  $\frac{E}{B}$ .

Зафиксировав значения  $m$ ,  $q$ ,  $E$  и  $B$  и задав начальные условия  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$  и  $u_0 > 0$ ,  $v_0 = 0$ , можно построить траекторию методом Эйлера. Но то же самое можно сделать с помощью записанных выше формул для  $x$  и  $y$ , предварительно выразив  $r$  через  $u_0$ :

$$r = \frac{m}{qB} \left( u_0 - \frac{E}{B} \right).$$

Попробуйте сделать и то и другое и убедиться в том, что результаты совпадают с большой точностью.

Изменяя начальную скорость  $u_0$ , в случае отсутствия сопротивления вы получите четыре типа траекторий – они приведены на рисунке 8. Среди них выделим две. Во-первых, это прямая, которая реализуется для начальной скорости  $\vec{V}_0 = \left(\frac{E}{B}, 0\right)$ . Во-вторых, в случае начальной скорости  $\vec{V}_0 = \left(\frac{2E}{B}, 0\right)$  получается *циклоида* – кривая с острями. Когда заряд движется по циклоиде, в остриях его скорость становится равной нулю. Для промежуточных скоростей  $\frac{E}{B} < u_0 < \frac{2E}{B}$

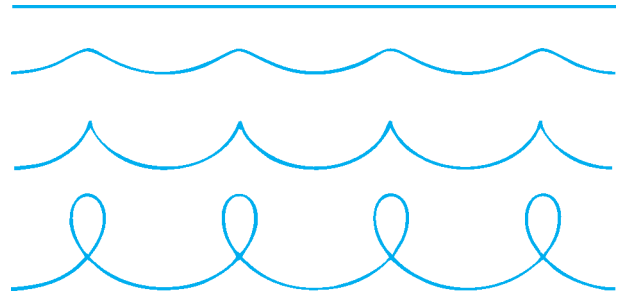


Рис. 8. Четыре типа траекторий: начальная скорость горизонтальна, направлена сверху вниз и равна, соответственно,  $E/B$ ,  $1,5E/B$ ,  $2E/B$ ,  $3E/B$

траектории напоминают синусоиды. А когда  $u_0 > \frac{2E}{B}$ , на траекториях возникают возвратные движения и петли.

У всех этих кривых есть видовое название – *трохоиды*. Дальше мы сравним эти траектории с теми, по которым движется планер Жуковского.

### Аэродинамическая задача – стационарное движение

Аэродинамическая задача на порядок сложнее электромагнитной. Тут мы в принципе не можем написать простые формулы для траектории движения летательного аппарата, наподобие тех, что записали для заряженной частицы. Но есть важный частный тип движения, который вполне доступен. Численные эксперименты говорят о том, что после нескольких мертвых петель и горок летательный аппарат переходит в стационарный режим и движется с постоянной скоростью вдоль прямой. Уравнения движения легко позволяют найти эти стационарные движения. Поскольку скорость постоянна, производные ее компонентов  $u$  и  $v$  равны 0:

$$0 = \frac{-\beta v \sqrt{u^2 + v^2} - \gamma u \sqrt{u^2 + v^2}}{m},$$

$$0 = -g + \frac{\beta u \sqrt{u^2 + v^2} - \gamma v \sqrt{u^2 + v^2}}{m}.$$

Из первого уравнения получаем  $v = -\frac{\gamma}{\beta}u$ , подставляем во второе и находим скорость стационарного движения:

$$(u, v) = \left( \beta \frac{\sqrt{mg}}{(\beta^2 + \gamma^2)^{3/4}} - \gamma \frac{\sqrt{mg}}{(\beta^2 + \gamma^2)^{3/4}}, \right).$$

Отсюда следует, что угловой коэффициент стационарной прямолинейной траектории зависит только от отношения  $\gamma$  и  $\beta$  и просто равен  $-\gamma/\beta$  (проверьте это «на глаз» на рисунке 3).

### Аэродинамическая задача без сопротивления – фугоидное движение

Какую все-таки основную задачу решили Жуковский и Ланчестер? Какие траектории изображены на рисунках 1 и 2?

Оказывается, они решали задачу о движении планера в отсутствие сопротивления. Может быть, такая постановка кажется странной. Казалось бы, нет сопротивления – не может быть подъемной силы. Но у каждого из них были свои резоны, которые мы обсудим ближе к концу статьи.

Итак, приравниваем коэффициент сопротивления  $\gamma$  к нулю и получаем

$$\begin{aligned}x' &= u, \\y' &= v, \\u' &= -\frac{\beta}{m}v\sqrt{u^2 + v^2}, \\v' &= -g + \frac{\beta}{m}u\sqrt{u^2 + v^2}.\end{aligned}$$

Метод Эйлера работает по-прежнему, но можно предложить что-то лучшее, а именно то, чем воспользовались Жуковский и Ланчестер.

Из того, что сопротивление отсутствует, следует, что полная энергия во время полета сохраняется:

$$m \frac{u^2 + v^2}{2} + mgy = \text{const}.$$

Из уравнений движения также следует, что существует еще одна величина, которая вместе с энергией сохраняется во время фугоидного движения, а именно:

$$gu - \frac{\beta}{3m}(u^2 + v^2)^{3/2} = \text{const}.$$

Отсюда, в принципе, можно получить формулы, описывающие фугоидное движение, но они будут на порядок сложнее тех, которые мы записали для заряженной частицы. Собственно, и Жуковский и Ланчестер не выводили окончательных формул, а при построении траекторий использовали именно эти законы сохранения. Посмотрите, на рисунке 2 под фугоидными траекториями Ланчестер поместил только одну формулу. Это как раз и есть наш второй закон сохранения, только записанный в других обозначениях.

Оказывается, что и здесь, как и в электромагнитной задаче, существуют четыре типа таких траекторий. Мы построили их все-таки методом Эйлера, все они приведены на рисунке 9. У всех этих кривых есть видовое название *фугоиды*. А та, что с острями, состоит из соприкасающихся полуокружностей радиусом  $\frac{3m}{2\beta}$ .

Когда планер Жуковского движется по этой траектории, в точках касания соседних полуокружностей его скорость становится равной нулю.

### Движение по прямой – фугоидные колебания

Один из самых важных режимов полета – это горизонтальное прямолинейное равномерное движение. Поэтому нужно знать, что будет происходить с летательным аппаратом при небольших кратковременных возмущениях этого движения. На самом деле, частичный ответ на этот вопрос у нас готов.

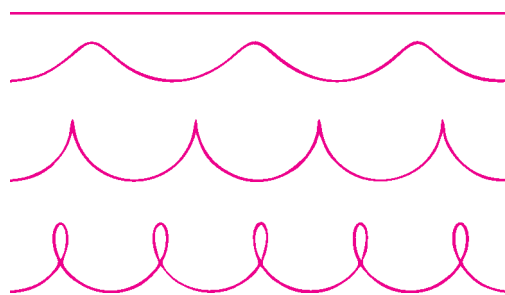


Рис. 9. Четыре типа траекторий: начальная скорость горизонтальна, направлена сверху вниз и равна, соответственно,  $\sqrt{mg/\beta}$ ,  $1,45\sqrt{mg/\beta}$ ,  $\sqrt{3mg/\beta}$ ,  $1,85\sqrt{mg/\beta}$

Предположим, летательный аппарат движется по прямолинейной фугоидной траектории (верхняя траектория на рисунке 9). Тогда при малом возмущении горизонтальной скорости мы перейдем на синусоидальную траекторию (вторая сверху траектория). То же самое будет происходить при других малых кратковременных изменениях режима полета. Возникающие при этом синусоидальные колебания называются фугоидными. Уравнения движения Ньютона позволяют рассчитать период этих колебаний:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2g\beta}}.$$

При определенных условиях фугоидные колебания могут привести к катастрофическим последствиям (см. <https://en.wikipedia.org/wiki/Phugoid>). По-видимому, именно с возникновением незапланированных фугоидных колебаний связано крушение беспилотного самолета Гелиос (NASA), работающего на солнечной энергии. Эта катастрофа, случившаяся в 2003 году, зафиксирована в фотографиях и представлена на рисунке 10.

### Жуковский и Ланчестер

Николай Егорович Жуковский (1847–1921) окончил физико-математический факультет Московского университета в 1868 году. Преподавал механику в Императорском высшем техническом училище и в Московском университете. Жуковский был разносторонним ученым, он занимался различными теоретическими и экспериментальными исследованиями. Его работы в области аэродинамики принесли ему мировую известность. В 1902 и 1910 годах Жуковский организовал аэродинамические лаборатории в Московском университете и в Техническом училище.

По инициативе Жуковского был создан Центральный аэрогидродинамический институт (ЦАГИ), который начал свою работу в 1918 году в особняке, расположенном на улице Радио (тогда Вознесения) в доме 17. А еще раньше, в 1914 году, в этом здании при непосредственном участии Жуковского были организованы теоретические курсы авиации для летчиков-добровольцев авиационной школы Московского общества воздухоплавания. Сейчас там расположен музей Жуковского. В одном из залов музея собраны оригина-





Рис. 10. Крушение беспилотного самолета Гелиос

лы работ Жуковского, его письма. Именно там на стене висят листы из его работы «О парении птиц». В музее выставлена также плоская аэродинамическая труба, построенная под руководством Жуковского в Техническом училище.

Большой интерес Жуковского вызвали полеты немецкого инженера, одного из пионеров авиации Отто Лилиенталя на собственноручно спроектированных и изготовленных планерах. В 1895 году Жуковский воспользовался любезным приглашением Лилиенталя и побывал на его полетах. Купленный во время этой поездки планер Лилиенталя хранится в музее Жуковского. Похоже, это единственный сохранившийся до нашего времени экземпляр.

*Фредерик Уильям Ланчестер* (1868–1946) был выдающимся английским изобретателем, автомобилестроителем и специалистом в области аэродинамики. В 1897 году Ланчестер представил Лондонскому физическому обществу свою работу «Парение птиц и возможность механического полета». Работа не получила поддержки и была отвергнута. Разочарованный Ланчестер оставил аэродинамику и сосредоточился на автомобилестроении.

После того как американцы братья Райт в 1900 году совершили свой первый полет на планере, Ланчестер возвращается к своим исследованиям, в 1907 году выходит первый том его трудов по аэродинамике полетов, а в 1908 году – второй том, где разбираются вопросы устойчивости полета и как раз содержится описание фугоидного движения. И опять его работа не была воспринята в Англии, но зато была прочитана и развита немецкими учеными. Жуковский тоже был знаком с работами Ланчестера.

### Движение без сопротивления

Вернемся к фугоидному движению и сделаем, наконец, обещанные разъяснения по поводу полетов без сопротивления. На самом деле полеты аппаратов тяжелее воздуха, оснащенных двигателем, были реализованы задолго до полета братьев Райт. Только это были неуправляемые аппараты – такие, скажем, как планофор Альфонса Пено (рис. 11). Это была во мно-

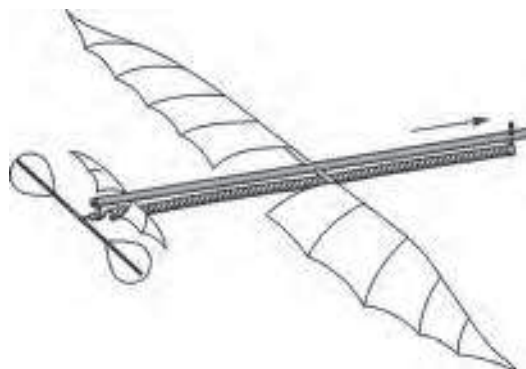


Рис. 11. Планофор Альфонса Пено (1871 г.)

гих отношениях удачная конструкция, в которой Пено реализовал свои идеи об устойчивости полета, использовавшиеся позднее при создании большой авиа-

ции. Пено также создал летающие модели геликоптера и орнитоптера. Они послужили образцами для популярных игрушек. Такой геликоптер был, например, куплен отцом братьев Райт за полдоллара. Братья, еще не помышлявшие о полетах, были очарованы игрушечным геликоптером.

Ланчестер был знаком с работами Пено, в его книге есть два изображения планофора. Ланчестер сам испытывал подобные модели и знал, что при определенной настройке они могут совершать равномерный горизонтальный полет. В этом случае сила сопротивления полностью компенсировалась силой тяги, и движение было фугоидным. Тем более фугоидное движение можно реализовать в управляемом полете, когда пилот или автомат могут регулировать силу тяги, в каждый момент времени в точности компенсируя силу сопротивления.

Жуковским двигали другие соображения. Он предлагал разбить всю траекторию полета планера на отдельные участки и считать, что движение на каждом участке фугоидное, т.е. на каждом участке сопротивление отсутствует. Учет сопротивления нужно

осуществлять только при переходе от одного участка к другому. А именно, подсчитывать потери энергии за счет сопротивления и на соответствующую величину уменьшать начальную скорость на следующем участке.

Чтобы оценить эту идею, посмотрите на рисунки 5 и 9. Первая петля на рисунке 5 вполне соответствует нижней фугоидной траектории на рисунке 9. Вторая петля тоже соответствует фугоидной траектории этого типа, но с меньшей начальной скоростью. Дальше начальная скорость становится еще меньше, и мы переходим на волнообразную фугоидную траекторию (вторая сверху на рисунке 9), и так далее. Именно об этом и говорил Жуковский.

На этом мы заканчиваем наше изложение. Для дальнейшего чтения, помимо уже упоминавшейся статьи А.Стасенко, рекомендуются еще такие книги:

- *Т. фон Карман*. Аэродинамика. Избранные темы в их историческом развитии (Ижевск, 2001)

- *А.Л.Стасенко*. Физические основы полета (Библиотечка «Квант», вып.91, 2005)

## КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВЛОМОК

### Пентасекция правильного треугольника

(Начало см. на 2-й странице обложки)

Читатель, вероятно, удивится тому, что в данном примере одной частью называется сложно устроенная несвязная фигура (рис.1). Но, во-первых, на свойства частей никаких ограничений не накладывалось. Во-вторых, в качестве иллюстрации того, что здесь ничего страшного не происходит, можно привести пример из жизни: Калининградская область не связана с остальной территорией России сухопутным путем, но это никому не мешает считать ее частью нашей страны.

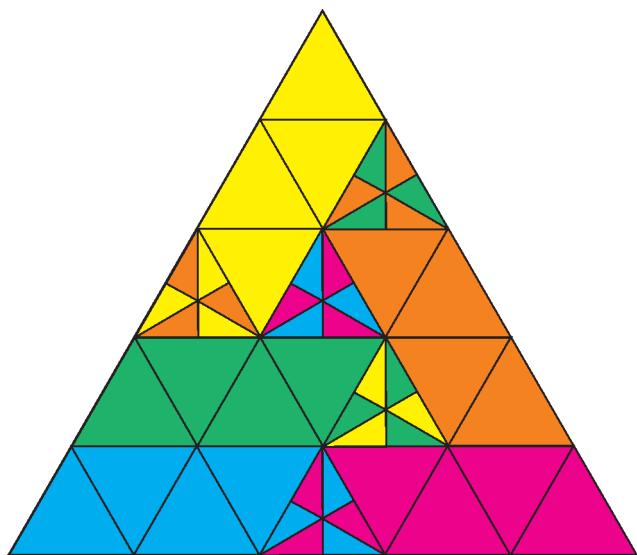


Рис. 1

Тем не менее, вопрос о том, существует ли разбиение правильного треугольника на пять одинаковых связанных частей, вполне закономерен. Но он еще ждет того, кто сможет на него ответить. Еще один открытый вопрос, который здесь возникает, таков: для каких  $N$  существует разрезание правильного треугольника на  $N$  равных частей? Например, на 3, 4 или 6 равных частей разрезать правильный треугольник легко (проделайте это!). Теперь, как мы видим, известно разрезание и на 5 равных частей. Но можно ли как-то перечислить все такие  $N$ , пока неизвестно.

Равенство таких сложно устроенных частей следует понимать вот как. Возьмем лист прозрачной пленки и обведем контур любой из частей. Получится то, что изображено на рисунке 2. Теперь, двигая и переворачивая пленку, будем пытаться накрыть этим контуром любую из остальных частей. В нашем примере, к счастью, это получится, т.е. части действительно равные.

*Е.Етифанов*

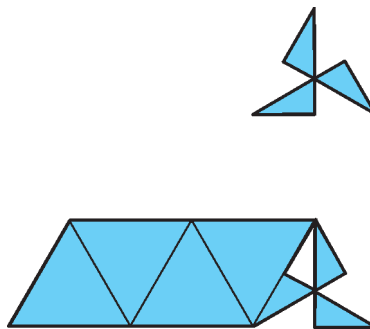


Рис. 2

# Пятнадцать человек на сундук мертвеца

С.ГРИБОК, К.КНОП

**В**СЕ ЗАДАЧИ, О КОТОРЫХ МЫ СОБИРАЕМСЯ ВАМ рассказать, связаны общим сюжетом: команда пиратов хочет поделить золотые монеты. Но прежде чем приступить к рассказу, мы должны поближе познакомиться с пиратской логикой и ее законами.

- Ни при каких обстоятельствах ни один из пиратов не желает очутиться за бортом корабля.
- Пираты очень любят золото. Каждый из них действует так, чтобы получить как можно больше монет в результате дележа.
- Ни один из пиратов никогда не вступит в сговор с другим пиратом, чтобы сообща обыграть остальных. «Каждый сам за себя» – правило, которому следует каждый пират.
- Каждый пират в совершенстве владеет логикой, и все его действия логически обоснованы.
- Все предпочтения, законы и правила пиратов (включая и это правило) известны и самим пиратам.

Итак...

## Задача 1

*Это был обыкновенный морской разбойник, кровавый и беспощадный, лишенный даже той крупницы элементарной честности, какой не обделены и воры. Его приспешники матросы являли собой разнужданную толпу головорезов различных национальностей, не признающих никакой дисциплины и никаких законов, кроме одного-единственного – закона справедливого дележа добычи.*

Р.Сабатини. Хроника капитана Блада

Пятнадцать пиратов с брига «Арабелла» – капитан, 13 матросов и юнга – нашли клад: сундук, в котором лежало 100 одинаковых золотых монет. Чтобы поделить деньги, пираты использовали такую процедуру:

1. Капитан, как самый старший, предлагает свой план дележа клада.
2. Все пираты голосуют, следует ли принять этот план. Каждый из пиратов голосует либо «за», либо «против».

На самом деле, строгие постановки рассматриваемых здесь задач о дележе монет (с формализацией правил, согласно которым пираты могут принимать решения в процессе голосований) относятся к теории игр. Эти постановки весьма сложны и находятся за рамками нашей статьи. В статье же по умолчанию предполагается, что процесс дележа таков, что к моменту очередного голосования каждый пират знает, что произойдет после того, как предложение не будет принято. Это и позволяет вести рассуждения «с конца».



Бриг «Арабелла»

3. Если все пираты проголосовали «за», то план принимается и деньги делятся по плану. Если же хотя бы один из пиратов проголосовал против, то старшего пирата бросают за борт. После этого следующий по старшинству пират вносит свой план, пираты снова голосуют и так далее, пока, наконец, план одного из пиратов не будет принят.

Еще одна особенность пиратов «Арабеллы» – их природная доброта. Если решение пирата голосовать «за» или «против» никак не повлияет на то, будет ли этот пират выброшен за борт и сколько денег он получит, то каждый пират по доброте душевной всегда проголосует «за».

Как будут поделены деньги, если пираты будут использовать данный метод дележа? Чей план будет принят?

**Решение.** Нетрудно сообразить, что у юнги есть простой способ добиться того, чтобы все монеты достались ему. Он должен голосовать против любого другого плана до тех пор, пока либо один из пиратов не предложит ему все деньги, либо все пираты, кроме юнги, не окажутся за бортом. Понимая это и желая сохранить свою жизнь, капитан сам предложит юнге все деньги. Юнга согласится на этот план по доброте душевной: если деньги и так его, зачем же голосовать против и губить капитана. Остальные пираты также проголосуют «за», так как им все равно никаких денег не светит.

Во всех следующих задачах мы используем для решения «обратный ход», т.е. рассуждения «с конца». Поэтому предлагаем читателям потренировать умение так рассуждать на более простых сюжетах.



### Упражнения

1. Капитан делил добычу между пиратами. Сначала он взял себе  $1/16$  всех монет и еще одну монету. Второму пирату он дал  $1/16$  оставшихся монет и еще две и т.д. Пятнадцатому (юнге) он дал  $1/16$  оставшихся монет и еще 15 монет. Оказалось, что все получили поровну и все монеты розданы. Сколько всего было монет?

2.

*Боишься — всадим в бок перо мы?  
Так отвечай, черт побери,  
Как разделить две пинты рома  
На три?*

А.Чернин

За столом сидят три пирата, перед каждым — кружка, в некоторые кружки налит ром (возможно, не поровну). Первый разлил весь свой ром поровну в кружки остальным. Затем второй разлил свой ром поровну остальным двоим (включая первого), а потом и третий сделал то же самое. В итоге в каждой кружке оказалось столько же рома, сколько было вначале. Сколько рома в каждой кружке, если всего его две пинты?

Теперь расскажем о том, как делила клад другая команда пиратов со шлюпа «Бестия».

### Задача 2

*— Если эта скотина решил изменить своему слову, вы думаете, он остановится на полпути? Как только мы согласимся на одну десятую, так, будьте спокойны, он тут же найдет предлог, чтобы вовсе ничего нам не дать.*

Р.Сабатини. Хроника капитана Блада

Пираты на «Бестии» использовали другой метод дележа:

1. Самый старший пират рассказывает план остальным.

2. Все пираты голосуют, следует ли принять план старшего. Каждый из пиратов голосует либо «за», либо «против».

3. Если не менее половины пиратов проголосовали «за», то план принимается, и деньги делятся по плану. Если же большинство пиратов проголосовало против, то старшего пирата бросают за борт. После этого следующий по старшинству пират излагает свой план, пираты снова голосуют и так далее, пока, наконец, план одного из пиратов не будет принят.

Пираты «Бестии» — такие же добродушные ребята, как и их коллеги с «Арабеллы». Если решение пирата голосовать «за» или «против» не повлияет на то, будет ли этот пират выброшен за борт и сколько денег он получит, то каждый пират всегда голосует «за». Как 15 пиратов со шлюпа «Бестия» поделят 100 монет?

**Ответ:** старший пират заберет себе все деньги.

**Решение.** Итак, «начнем с конца», т.е. поставим себя на место последнего из пиратов, в предположении, что до него дошла очередь. Пусть 14 планов уже отвергнуто. Тогда юнга остался один, и он забирает все монеты:

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 100

Теперь, когда мы разобрались, как поступит юнга, можно мысленно вернуться на шаг назад. Пусть 13

планов отвергнуто. 14-й пират проголосует за любой свой план, и ему этого голоса уже достаточно. Поэтому он может не делиться с юнгой и просто забрать себе все монеты:

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 100 0

Сделаем еще один шаг назад. Как будет рассуждать 13-й пират? Чтобы остаться в живых, ему нужно два голоса из трех. 14-й в любом случае будет против, значит, поддержку можно ждать только от юнги. Но юнге 14-й не оставит ничего, поэтому даже если ему ничего не дать, то миролюбивый юнга все равно проголосует «за». Таким образом, план 13-го пирата

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 100 0 0

проходит двумя голосами (13-го, 15-го) против одного. Следующему пирату (12-му) тоже достаточно двух голосов, и при этом голоса 14-го и 15-го (которые от 13-го ничего не получают) у него уже в кармане. А так как больше не нужно, то он тоже забирает все себе:

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 100 0 0 0

Продолжая рассуждать аналогично, получаем, что первый пират также при любом своем плане может рассчитывать на голоса всех остальных пиратов, кроме второго. А так как ему хочется заполучить больше денег, то его план будет самым жадным из возможных:

100 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

**Упражнение 3.** Как изменится дележ монет на «Бестии», если пираты изменят правило 3: план будет считаться принятым, если все пираты, кроме, быть может, одного, проголосовали «за»?

### Задача 3

*— Мы послали за тобой, капитан Пайк, потому как у нас теперь один, как говорится, общий интерес — вот эти ценности. Их надо поделить поскорее, без лишней проволоочки, и тогда каждый из нас может отправляться, куда кому надобно.*

Р.Сабатини. Хроника капитана Блада

Пираты с фрегата «Валькирия» отличаются от пиратов «Бестии» отсутствием доброты: если решение пирата голосовать «за» или «против» никак не повлияет на то, будет ли этот пират выброшен за борт и сколько денег он получит, то в пирате просыпается его жестокая бабушка с отцовской стороны, и он голосует «против».

А в качестве алгоритма дележа на «Валькирии» используются правила, описанные в упражнении 3:

1. Самый старший пират рассказывает остальным свой план.

2. Все пираты голосуют, следует ли принять этот план. Каждый из пиратов голосует либо «за», либо «против».

3. Если все пираты, кроме, быть может, одного, проголосовали «за», то план принимается, и деньги делятся по плану. Если же хотя бы двое из пиратов проголосовали против, то старшего пирата бросают за борт. После этого план предлагает следующий по старшинству, пираты снова голосуют и так далее, пока план одного из пиратов не будет принят.



Фрегат «Валькирия»

Как 15 пиратов с «Валькирии» поделят 100 монет?

**Ответ:** 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

**Решение.** Снова начнем рассуждать за пиратов с конца. 14-й (второй с конца) пират может не беспокоиться за свою жизнь и за судьбу своего плана: что бы он ни предложил, «все кроме одного» – это и есть он сам. Поэтому он может забрать себе все монеты:

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 100 0

13-му (третьему с конца) пирату уже нужно заручиться поддержкой хотя бы одного из двух последних. Чьей? Ясно, что не 14-го: тому в случае провала плана 13-го светит перспектива получить все. Значит, нужна поддержка юнги. Чтобы ее получить, достаточно предложить ему больше 0, т.е. 1 монету. Итак, он предлагает

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 99 0 1

и вместе с юнгой голосует «за». 12-му пирату, понимающему этот расклад, приходится игнорировать жадного 13-го и задабривать всех следующих, предлагая им больше, чем даст им 13-й. Таким образом, самое большее, на что он может рассчитывать, это

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 97 0 1 2

Каждый следующий пират вынужден поступать аналогично, увеличивая долю всех пиратов хотя бы на одну монету. Таким образом, когда мы доведем расчет до старшего (15-го с конца) пирата, мы получим такое распределение монет:

9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

**Упражнение 4.**

- а) Как 15 этих пиратов поделят 20 монет?
- б) Как  $N$  пиратов с «Валькирии» разделит  $K$  монет?

Примечательно, что лишь незначительное различие в характере пиратов (добродушные пираты «Бестии» в нейтральной ситуации голосуют «за», а упрямые пираты «Валькирии» – против) приводит к кардинально отличающимся результатам дележа. Способность команды «Валькирии» обеспечить себе существенно более выгодные условия дележа иллюстрирует важный общий принцип, доказательство которого выходит далеко за рамки этой статьи: социальная активность ведет к росту благосостояния общества.

**Задача 4**

*Был однажды богатой добычи дележ –  
И пираты бесились и выли...  
Юнга вдруг побледнел и схватился за нож,  
Потому что его обделили.*

В.Высоцкий. Был развеселый розовый восход...

Один из пиратов, бывший в те славные времена юнгой на «Валькирии», спустя много лет после описываемых событий хвастался, что сумел забрать себе весь клад.

– Тысяча чертей! Этот скряга капитан предложил мне всего 13 монет. Тут я вижу, что шкипер голосует против, и тоже проголосовал против! И пока все на меня выпучились, шкипер уже успел выкинуть капитана за борт. А после этого, как ни в чем не бывало, шкипер предложил мне всего 12! Ну, я еще раз проголосовал против – и наш бывший шкипер тут же улетел за борт к бывшему капитану. И вот тут до следующего стало что-то доходить... Тысяча чертей! Он раз пять подряд начинал что-то говорить и каждый раз, не доведя предложение до точки, смотрел на меня и сбивался... В конце концов он предложил отдать все мне. Мне, безусому юнге! А все остальные пираты, постоянно косясь на меня, проголосовали «за». Конечно, после этого я не мог уже ни минуты находиться на нашем фрегате, поэтому отвязал капитанскую шлюпку, погрузил в нее сундук и немедленно отчалил.

Докажите, что этот рассказ юнги немножко не соответствует истине.

**Решение.** Эта история – прекрасная иллюстрация того, в чем идеальный мир математических задач отличается от реальной жизни. На настоящих пиратских кораблях, безусловно, и не такие вещи случались, но в наших задачах изначально оговорена безупречность пиратской логики. Как мы увидим, это не оставляет никакого места для шантажа, а поэтому у пиратов «Валькирии» (начиная с капитана) не было никаких причин опасаться стропитивого юнги.

Действительно, если (ну а вдруг!) очередь выдвигать план дойдет до второго с конца пирата, то он ничем не рискует, потому что кроме него остался только юнга. Следовательно, в этом случае юнга ничего не получит. Поэтому ему нечем шантажировать третьего с конца пирата в тот момент, когда тот вносит свой план. Юнга будет просто вынужден проголосовать за любой его план, если только тот предложит юнге хотя бы одну монетку. Более того, третий с конца пират тоже это прекрасно понимает, поэтому ровно столько он юнге и даст. Но, собственно, у него и не будет такой возможности, потому что ровно так же понимают невозможность шантажа (а значит, и отсутствие нужды его бояться) и все предыдущие пираты. Поэтому все будет происходить именно так, как описано в решении предыдущей задачи, а не так, как пытался рассказать бывший юнга.

Наша серия пиратских баек была бы неполной, если бы мы не рассказали историю пиратов со шхуны «Горгона».

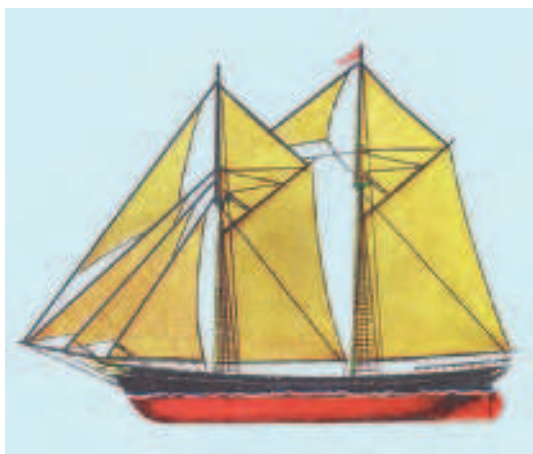
### Задача 5

— Они не будут проверять ваши книги, тем более что мало кто из моих людей вообще умеет читать. Но им хорошо известно — вы заставляете меня быть резким, — что ваши подсчеты фальшивые.

Р.Сабатини. Одиссея капитана Блада

Все пираты на шхуне «Горгона» такие же жестокие, как и на «Валькирии», а для дележа используют тот же метод, что и команда шлюпа «Бестия»:

1. Самый старший пират излагает свой план дележа.
2. Все пираты голосуют, следует ли принять этот план. Каждый из пиратов голосует либо «за», либо «против».



Шхуна «Горгона»

3. Если не менее половины пиратов проголосовали «за», то план принимается, и деньги делятся так, как было предложено. Если же большинство пиратов проголосовало против, то старшего пирата бросают за борт. После этого следующий по старшинству пират вносит новый план, оставшиеся пираты снова голосуют и так далее, пока, наконец план одного из пиратов не будет принят.

а) Как 15 пиратов «Горгоны» поделят 100 монет?

б) Чей план будет принят, если 100 пиратам со шхуны «Горгона» нужно разделить 15 монет?

а) **Ответ:** 93 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1

**Решение.** Как обычно, начнем разбирать задачу с конца. Пусть 13 планов уже отвергнуто, как рассуждает второй с конца пират? Его голос составляет не менее половины от оставшихся голосов, так что он может вообще не делиться с юнгой. Поэтому он просто забирает себе все монеты:

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 100 0

Сделаем шаг назад. Как будет рассуждать 13-й пират? Чтобы остаться в живых, ему нужны два голоса из трех. 14-й в любом случае будет против, значит, поддержку можно ждать только от юнги. Чтобы ее получить, юнге достаточно дать больше, чем он получит от 14-го. Значит, юнге можно оставить одну монету, а все остальное забрать себе:

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 99 0 1

Следующему пирату (12-му) тоже достаточно двух

голосов, и дешевле всего покупается голос 14-го пирата. Для этого достаточно отдать ему всего одну монету, потому что от 13-го он не получит ничего:

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 99 0 1 0

Продолжая рассуждать аналогично, получаем, что старшему пирату достаточно поделиться монетами с семью другими — третьим, пятым, ..., пятнадцатым. В этом случае все они проголосуют за его план, и никому не придется оказываться за бортом. Таким образом, окончательный дележ монет —

93 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1

б) **Ответ:** план 94-го пирата, считая с конца (7-го с начала).

**Решение.** Когда есть всего 15 монет, то вплоть до 32 пиратов работает логика из пункта а). Старший из 32 пиратов не получает ничего, но делится 15 монетами с другими и на этом (вместе со своим голосом) набирает необходимые ему 16 голосов:

0 0 1 0 1 0 ... 1 0 1 0

Попробуем разобраться с 33 пиратами. Монет всего 15, а чтобы выжить, старший пират должен «купить» 16 чужих голосов. Ему не имеет смысла давать что-то тем 15-ти, кто при 32 пиратах получит деньги, значит, он должен делить 15 монет между собой и 17-ю остальными. Но так как хотя бы двоим из 17 он не сможет дать ничего, то эти свирепые пираты безусловно проголосуют против его плана. Таким образом, 33-го пирата ждет смерть за бортом.

Положение 34-го пирата явно лучше, потому что у него есть в запасе не только свой голос, но и голос 33-го, которому, несомненно, хочется, чтоб план 34-го прошел, иначе ему самому несдобровать. Еще пятнадцать голосов он сможет купить, предложив по монете любым 15 из тех 17, которые останутся без денег при голосовании по плану 32-го. Этот момент мы отразим с помощью специального значка — звездочки. Звездочка означает, что пират может получить деньги, но может и не получить. При этом 15 из отмеченных звездочкой получат по монете, а остальные двое — нет. Итак, при 34 пиратах план старшего принимается, и монеты делятся так:

0 0 \* \* 0 \* 0 \* ... 0 \*

35-му, как и 33-му, придется нырять за борт: ни одного чужого голоса «бесплатно» у него нет, а купить он может только 15 из необходимых ему 17.

36-му чуть легче, но не сильно: за его предложение бесплатно проголосует 35-й, но ему нужно 18 голосов, а удастся купить только 15, итога наберется 17, поэтому и его участь тоже печальна. По аналогичной причине убивают и 37-го.

Зато 38-му удастся выжить: он сам, а также 37-й, 36-й и 35-й голосуют «за», а еще 15 голосов он покупает монетами, например, у тех, кто от 34-го точно ничего не получал. (Можно было бы покупать голоса и у пиратов, которые отмечены звездочками, предполагая, что каждый из них предпочтет гарантированную монету в настоящий момент вместо «звездочки» — не



гарантированной монеты в одном из следующих планов.) Итого он имеет 19 голосов.

Следующие несколько пиратов также не выживают, а шанс на выживание появляется только у 46-го: за его план проголосуют все смертники, начиная с 39-го (итого 8) и еще 15 купленных за деньги из последних 38, в итоге он получит нужные ему 23 голоса.

По индукции несложно доказать, что выживают пираты с номерами (считая от конца)  $30 + 2^k$ . А вот однозначно установить распределение денег при этом невозможно, потому что у каждого из пиратов есть достаточно свободный выбор, кому именно он предложит деньги.

Методы дележа, которые мы рассмотрели в предыдущих задачах, имеют один существенный недостаток: большинство пиратов может очутиться за бортом, а это плохо сказывается на боеготовности экипажа. К счастью, среди пиратских команд встречаются и менее кровожадные.

### Задача 6

*Что ж, если в Портленд нет возврата,  
Поделим золото, как братья.*

Б.Окуджава. Пиратская лирическая

Пираты с корвета «Даная» были такими же жестокими, как на «Горгоне» и «Валькирии», но придумали новый способ дележа монет, который позволяет пиратам оставаться на борту и претендовать на часть добычи даже после того, как их план не будет принят.

1. Самый старший пират излагает свой план дележа.
2. Все пираты голосуют «за» либо «против».
3. Если все пираты, кроме, быть может, одного, проголосовали «за», то план принимается, и деньги делятся так, как было предложено. Если же хотя бы двое из пиратов проголосовали «против», то план не принимается, и голосование продолжается. Следующий по старшинству пират предлагает свой план, пираты снова голосуют и так далее, пока план одного из пиратов не будет принят. Если ни один из планов не пройдет, то все деньги получит юнга.

Как 15 пиратов «Данай» поделят 100 монет?

**Ответ:** 11 11 11 12 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10



Корвет «Даная»

**Решение.** Как обычно, начнем разбирать задачу с конца. Пусть 14 планов уже отвергнуты. Тогда все монеты уже практически в кармане у юнга. Ему достаточно выдвинуть любой план, за который не проголосуют остальные пираты (например, предложить оставить все деньги самому себе). После того как этот план будет отвергнут, юнга получит все монеты:

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 100

Вернемся теперь на шаг назад. Пусть 13 планов отвергнуты. Как должен рассуждать 14-й пират? Он не может допустить, чтобы его план был отвергнут, так как в этом случае все монеты заберет юнга. Значит, ему нужен план, за который проголосуют 14 пиратов из 15. Юнга будет голосовать против любого его плана, следовательно, 14-му нужно, чтобы его план поддержали все остальные. Для этого он должен выделить по монете каждому из пиратов, кроме юнга. На это потребуется 13 монет. Оставшиеся 87 монет 14-й пират заберет себе:

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 87 0

Сделаем еще один шаг назад. Пусть отвергнуты 12 планов. Как будет рассуждать 13-й пират? Если его план будет отвергнут, то 14-й пират даст ему одну монету. Но одной монеты ему маловато, поэтому он не должен этого допустить. Для этого по крайней мере 14 пиратам (включая себя) он должен дать больше монет, чем дал бы им 14-й. Таким образом, пиратам с номерами с 1 по 12 нужно дать по 2 монеты, а одну монету дать юнге. Остальные 75 монет 13-й пират оставит себе:

2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 75 0 1

Аналогично рассуждает и 12-й пират. 13-му он не дает ничего, остальным же дает на одну монету больше, чем они смогли бы получить от 13-го. Следовательно, пиратам с номерами с 1 по 11 достанется по 3 монеты, 14-му пирату – одна, а 15-му – две. Остальные 64 монеты можно оставить себе:

3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 64 0 1 2

Можно было бы продолжать в том же духе и выписать планы остальных пиратов. Но общая закономерность уже очевидна. Пират с номером  $X$  отдает каждому из пиратов с меньшими номерами по  $15 - X$  монет, каждому пирату с большим номером  $Y$  он отдает  $Y - X - 1$  монету, а остальные монеты забирает себе. Таким образом, прибыль пирата с номером  $X$  составляет

$$100 - (X - 1)(15 - X) - (15 - X)(14 - X)/2$$

монет. Раскрыв скобки, получим следующее выражение для прибыли пирата с номером  $X$ :

$$X^2/2 - 3X/2 + 10.$$

Прибыль должна быть больше, чем число монет, которое пирату с номером  $X$  на следующем шаге выделит пират с номером  $X + 1$ , иначе свой собственный план не принесет пирату с номером  $X$  никакой выгоды. Таким образом, справедливо неравенство:

$$X^2/2 - 3X/2 + 10 > 14 - X.$$

Упрощая, получим

$$X^2 - X > 8.$$

Наименьшее натуральное  $X$ , при котором неравенство выполняется, равно 4. Следовательно, будет принят план 4-го пирата:

11 11 11 12 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Поскольку пираты «Данаи» жестокие, то каждый из них будет голосовать против любого плана, в котором он получает не больше, чем может получить от 4-го. Какой бы план ни предлагал 3-й пират, он может «отобрать» деньги только у одного из остальных, а распределить их должен между всеми остальными (иначе получит хотя бы двоих обиженных, и его план будет провален). Но отобрать он может только 12 монет, которые при любом дележе на 14 приведут к тому, что кто-то монет не получит. Поэтому никакой план 3-го не будет принят, даже если он предложит тот план, который потом предложит 4-й (потому что все жестокие, и если денег при «за» и «против» будет одинаково, то голосуют «против»)! Аналогично не будут приняты никакие планы первых двоих пиратов.

Заметим, что доверие пиратов к демократическим механизмам принятия решений тоже не такое абсолютное, как вам могло показаться...

### Задача 7

*Истерлинг надул щеки и сделал широкий жест своей огромной лапицей.*

*— А какую дележку предлагаете вы?*

*— Мы должны это обсудить. Но, во всяком случае, наша доля не может быть меньше одной пятой.*

Р.Сабатини. Хроника капитана Блада

На бригантине «Ехидна» только капитан и шкипер имеют право предлагать планы дележа монет. Все остальные пираты могут лишь голосовать. Таким образом, алгоритм дележа выглядит так:

1. Шкипер рассказывает всем остальным свой план дележа монет.

2. Затем капитан рассказывает всем свой план дележа монет.

3. Все пираты (включая капитана и шкипера) голосуют либо за первый, либо за второй план.

4. Монеты делятся в соответствии с планом, набравшим больше голосов.

Известно, что если оба плана сулят пирату равное число монет, он проголосует за первый план.

Как 15 пиратов (капитан, шкипер и 13 матросов) с «Ехидны» поделят 63 монеты?

**Ответ:** 49 8 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0

**Решение.** Как всегда, начнем разбираться с задачей с конца. Прежде всего установим оптимальную стратегию капитана. Рассмотрим группу из 14 пиратов, исключая капитана. Разделим их на такие две группы А и Б по 7 пиратов, что каждому из пиратов группы А шкипер предложил не меньше монет, чем любому пирату из группы Б. Нетрудно убедиться в том, что оптимальная стратегия капитана заключается в том,



Бригантина «Ехидна»

чтобы забрать все деньги у 7 «богатых» пиратов группы А, выделить из этих денег по одной монетке каждому из 7 «бедных» пиратов группы Б, а все прочие монеты забрать себе. В этом случае за план капитана проголосуют все пираты группы Б и сам капитан. Пираты группы А проголосуют против, но они окажутся в меньшинстве. Конечно, эта стратегия применима лишь в том случае, если у пиратов группы А есть по крайней мере 8 монет. В противном случае капитан не сможет выделить по монете каждому из 7 пиратов группы Б и при этом оставить хотя бы одну монету себе, и ему будет выгоднее соглашаться с планом шкипера.

Теперь займемся анализом стратегий шкипера. У него есть два возможных варианта действий. Первый — поставить капитана в ситуацию, когда он будет вынужден согласиться с планом шкипера. Для этого, как мы выяснили, достаточно, чтобы у 7 пиратов, которым шкипер предложил наибольшее число монет, в сумме набралось не более 7 монет. Делиться с другими пиратами не в интересах шкипера, поэтому он просто может взять 7 монет себе, а остальные монеты отдать капитану. Капитан выдвинет какой-нибудь план, за который не будут голосовать остальные (например, оставить все деньги себе), после чего большинством голосов будет принят план шкипера:

56 7 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Вторая возможная стратегия для шкипера — позволить капитану выдвинуть план, который наберет большинство голосов, но при этом сам шкипер окажется среди тех семи пиратов, которым капитан даст по дополнительной монете (другими словами, войдет в группу Б). Для этого шкипер должен пообещать 7 пиратам (которые войдут в группу А) больше монет, чем самому себе. Оставшимся 6 пиратам, которые составят шкиперу компанию в группе Б, можно ничего не предлагать. Таким образом, план шкипера выглядит так:

0 7 0 0 0 0 0 8 8 8 8 8 8 8

Капитан даст шкиперу и другим 6 пиратам по одной дополнительной монете, а остальные монеты заберет себе:

49 8 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0

Итак, первая стратегия принесет шкиперу 7 монет, тогда как вторая позволит получить 8 монет. Таким образом, шкипер предпочтет вторую стратегию.

**Задача 8**

*В Кейптаунском порту  
С пробоиной в борту  
«Жанетта» поправляла такелаж.*

П.Гандельман. В Кейптаунском порту

На барке «Жанетта», как и на «Ехидне», матросы не имеют права выдвигать планы. Это могут делать лишь старшие пираты. Алгоритм дележа такой:

1. Первый пират рассказывает свой план дележа.
2. Второй пират рассказывает свой план – «альтернативу».
3. План и альтернатива сравниваются. Если план дает хотя бы двум пиратам не меньше монет, чем альтернатива, то альтернатива отвергается. Если же альтернатива дает больше денег всем пиратам, кроме быть может одного, то план отвергается, а альтернатива становится планом. Затем следующий пират озвучивает новую альтернативу и так далее.
4. После того как все старшие пираты высказались, монеты делятся по плану.

5 старших пиратов и 10 матросов с «Жанетты» делят 105 монет. Как первый пират сможет получить 14 монет?



Барк «Жанетта»

**Решение.** Правила в этой задаче кажутся довольно запутанными, однако можно заметить следующее: если какой-то план обещает одному из пиратов 14 монет, а каждому из остальных пиратов не более чем по 13 монет, то существует лишь одна альтернатива, способная заменить этот план (т.е. лучшая, чем план, для всех пиратов, кроме одного): забрать все деньги у обладателя 14 монет и разделить их по одной между остальными.

Теперь рассмотрим план 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14. Единственная лучшая альтернатива к нему 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 0. Легко видеть, что это тот же план, циклически сдвинутый на одну позицию. Чтобы извлечь выгоду из этого свойства, первый пират выдвигает такой план:

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 14 13 12 11

Таким образом, он оставляет себе 10 монет, а остальным старшим пиратам предлагает 9, 8, 7 и 6 монет соответственно. Последовательность альтернатив, каждая из которых лучше предыдущей и заменяет ее, строится единственным способом:

11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 14 13 12

12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 14 13

13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 14

14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

Нетрудно убедиться в том, что доли каждого из пяти старших пиратов растут. Таким образом, каждый из них заинтересован в том, чтобы выдвинуть одну за другой эти 4 альтернативы. Итоговым планом станет последняя из них. Таким образом, первый пират станет богаче на 14 монет.

**Задачи для самостоятельного решения**

*Заприходованные суммы становились все крупнее. И в самом конце, после пяти или шести ошибочных, зачеркнутых подсчетов, был подведен итог и внизу подписано: «Доля Бонса».*

Р.Л.Стивенсон. Остров сокровищ

В среднем эти задачи более сложные, чем разобранные выше.

**1.** Как изменится дележ на «Данае», если пираты поменяют правило 3: план будет считаться принятым, если более половины пиратов проголосовали «за»? Для решения задачи требуется уточнить, как пират решает, какой выдвинуть план, если есть несколько разных планов, каждый из которых принесет этому пирату одно и то же число монет. В этом случае будем считать, что выбор плана происходит случайным образом (например, пират бросает монетку, чтобы сделать выбор между двумя равноценными планами).

**2.** Как изменится решение предыдущей задачи, если в случае выбора между равноценными планами пират «Данаи» всегда предпочтет тот план, который оставляет больше монет более старшим пиратам?

**3.** Как именно будут разделены монеты в задаче 5 б) («Горгона» с большой командой и малым запасом золота), если выбор между равноценными планами делается так же, как в предыдущей задаче 2?

**4.** Сколько денег получит штурман на бригантине «Ехидна» в результате дележа  $K$  монет между  $2M + 1$  пиратами?

**5\*\*.** На яхте «Золушка» команда состоит всего из троих – капитана, шкипера и юнги. В найденном ими кладе оказалось всего 15 монет. Поэтому они договорились, что сначала выслушают все три плана, а уже потом будут выбирать.

Итак, все по очереди, начиная с капитана и заканчивая юнгой, предлагают свои варианты дележа. Потом все трое одновременно голосуют – каждый выбирает тот из планов, в котором ему достается больше монет. Если таких планов несколько, он проголосует за первый из них. План, получивший больше одного голоса, принимается, и клад делится в соответствии с ним. Однако если такого плана не оказалось, то никто ничего не получает (весь клад выбрасывается за борт).

Как окажутся разделены монеты?

А каким будет распределение, если решение может быть принято только единогласно?



# Свободная частица

**Л. БЕЛОПУХОВ**

*Пусть не поймаешь нейтрино за бороду  
И не посадишь в пробирку, —  
Но было бы здорово, чтоб Понтекорво  
Взял его крепче за шкирку!*

В.Высоцкий. Марш физиков

**О**ЧЕРЕДНАЯ, 2015 ГОДА, НОБЕЛЕВСКАЯ ПРЕМИЯ ПО ФИЗИКЕ присуждена «за открытие нейтринных осцилляций, показывающее, что нейтрино имеют массу». Лауреатами стали японец Такааки Кадзита (род. в 1959 г.) и канадец Артур Макдональд (род. в 1943 г.) — ключевые фигуры двух больших исследовательских групп, которые сейчас принято называть коллаборациями.



Артур Макдональд

Оба лауреата отмечают, что успех был достигнут работой всех участников проектов и в первую очередь усилиями тех, кто спроектировал и построил суперсовременные экспериментальные установки. И еще. Такааки Кадзита в постнобелевском интервью отметил, что главная теоретическая идея, которую нужно было подвергнуть проверке, была высказана 60 лет назад итальянским и советским физиком Бруно Понтекорво (1913–1993). Кадзита назвал его «крестным отцом» нейтринных осцилляций. С 1950 года Потекорво жил и работал в России, под Москвой (в Дубне), в Объединенном институте ядерных исследований. Он был избран действительным членом АН СССР и стал лауреатом Государственной (Сталинской) премии за работы в области нейтринной физики. И не случайно наш прославленный бард Владимир Высоцкий, в 70-е годы давший в Дубне не меньше пяти концертов, в «Марше физиков» посвятил куплет нейтрино и его исследователю. И ученому, и поэту в Дубне поставлены памятники.

Из 132 Нобелевских премий по физике больше 30 присуждены за экспериментальное обнаружение новых элементарных частиц или за теоретические работы, которые привели к этим открытиям. А за открытия и исследования нейтрино

нынешняя премия — уже четвертая (предыдущие — в 1988, 1995 и 2002 гг.).

Так что же такое нейтрино и его осцилляции? В Стандартной модели, современной теории микромира, наряду с кварками и бозонами имеется 6 лептонов — фундаментальных (бесструктурных) частиц, подчиняющихся особым, «слабым» взаимодействиям.<sup>1</sup> Самый известный лептон — электрон. Окружая кварковые протон-нейтронные ядра, электроны объединяют атомы в молекулы и кристаллы, создают все вещественные структуры мира, от камней до человека. Из космоса к поверхности Земли подлетают другие лептоны, их называют мю-мезонами, или мюонами. Они рождаются в верхних слоях атмосферы, где космические (и солнечные) протоны разбивают атомные ядра азота и кислорода. Их обнаружили и в экспериментах на ускорителях частиц. Третий мезон имеет название тау-мезон, он найден только в ускорительных экспериментах. Три остающиеся лептона — это и есть нейтрино: электронное, мюонное и тау-нейтрино.

В отличие от других лептонов, все три нейтрино имеют очень маленькую массу, по крайней мере в миллион раз меньшую массы электрона. Долгое время считали, что у нейтрино вообще нет массы (как, например, у фотона). Похожесть нейтрино между собой (малые массы, отсутствие электрического заряда) привели к тому, что три разных



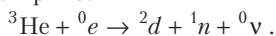
Такааки Кадзита

нейтрино стали называть «ароматами» нейтрино (не совсем точно переведенное на русский английское слово *flavor*). Возможно, есть и другие «ароматы» нейтрино — Стандартная модель еще не является достаточно полной теорией. Кроме того, нужно отметить, что все лептоны представлены в Стандартной модели частицами и античастицами. Так, например, электрон (частица) может родиться в паре с антинейтрино, а позитрон (античастица) — в паре с нейтрино. Для упрощения будем во всех случаях дальше называть нейтрино и сами эти частицы и их античастицы.

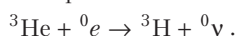
Нейтрино возникают в ядерных реакциях, в превращениях и во взаимодействиях ядер. Когда на заре рождения мира во Вселенной появились первые атомы — водород и гелий, тогда же появились и свободные нейтрино. Эти «реликтовые» нейтрино, как и реликтовые фотоны, бродят по Вселенной, постепенно ослабевая до меньших энергий. Но главный источник нейтрино в развитой Вселенной — это термоядерные реакции в недрах звезд. В одной из таких реакций ядро

<sup>1</sup> См., например, статью Э.Бооса и Л.Дудко «Экспериментальная физика высоких энергий в «Кванте» №5-6 за 2015 год.

изотопа гелия захватывает электрон и превращается в дейтрон, нейтрон и нейтрино:



В другой реакции при этом рождается тритон (ядро изотопа водорода трития) и нейтрино:



Из недр звезд эти нейтрино свободно выходят наружу и наполняют всю Вселенную. Для Земли это, прежде всего, «подарки» нашей ближайшей звезды. В недрах Солнца рождается  $10^{38}$  нейтрино в секунду. Это означает, что каждый  $1\text{ см}^2$  земной поверхности ежесекундно пронзают  $10^{11}$  солнечных нейтрино. Их энергии имеют величину до 1 МэВ (единица энергии в микромире, равная  $1,6 \cdot 10^{-13}$  Дж). Мощный источник значительно более энергичных космических нейтрино (до 100 МэВ) – это процессы, происходящие в облаке взрыва сверхновых звезд при рождении в этом облаке многочисленных изотопов всех химических элементов. Когда 23 ноября 1987 года на Земле наблюдалось такое событие, произошедшее в одной из соседних Галактик (Большом Магеллановом Облаке) 163 тысячи лет назад, к Земле наряду с фотонами всех диапазонов пришло необычно много космических нейтрино – почти в 500000 раз больше обычного космического фона этих частиц. Это смогли заметить в начавшихся тогда попытках регистрации нейтрино. Есть еще один источник энергичных нейтрино. Это – нейтрино, рождающиеся в верхних слоях земной атмосферы в тех же процессах, в которых рождаются мю-мезоны. При этом появляются и мюонные, и электронные нейтрино. И, наконец, очень много нейтрино рождаются при работе ядерных реакторов на атомных электростанциях, число которых (реакторов) на Земле уже приближается к 500. Каждый из них ежесекундно рождает  $10^{15}$  нейтрино (точнее, электронных антинейтрино). Нейтрино рождаются и в ускорителях, когда там происходят столкновения частиц.

Все нейтрино живут практически вечно. Ведь они нечувствительны ни к электрическим силам, ни к ядерным взаимодействиям. Кроме того, масса нейтрино столь мала, что при энергиях порядка 1 МэВ их скорость практически не отличается от скорости света (меньше всего лишь на  $10^{-10}$  процента). Все это делает их «проходимость» необычайно большой. С очень большой вероятностью нейтрино могут пройти толщу воды протяженностью  $10^{18}$  м или сквозь миллиарды звезд, расположенных по одной линии. Земля для них просто прозрачна, не говоря уж о человеке. Они ничего «не замечают» на своем пути. В этом смысле «истинно свободной» (в отличие от людей) назвал нейтрино современный бард Тимур Шаов в своей песне «Свободная частица». Эта свобода и делает невероятно трудным решение задачи о том, чтобы все-таки «поймать нейтрино за бороду», т.е. осуществить эту ничтожную вероятность его гибели, зафиксировав последствия такого события.

Ну, а зачем ловить нейтрино? И на каком основании эта частица вошла в Стандартную модель, да еще в трех видах? Чтобы получить ответы на эти вопросы, вспомним историю нейтрино.

Нейтрино в науке возникло в 1931 году «на кончике пера» теоретика Вольфганга Паули. Он уже тогда был известнейшим физиком, одним из авторов введения в квантовую теорию понятия «спин электрона», создателем «принципа Паули», сразу же объяснившим периодическую систему элементов. К этому времени уже почти 20 лет существовала загадка радиоактивного бета-распада, не дававшая покоя физикам. Бета-распад, т.е. появление электронов из ядер некоторых радиоактивных элементов, стал с 1912 года изучать один из учеников Резерфорда Джеймс Чедвик.

Измеряя энергии этих электронов, он сделал вывод, что при распаде одних и тех же радиоактивных элементов эти энергии могут быть любыми (от нуля до некоторого максимума). Говоря научным языком, спектр бета-распада оказался сплошным. Этот факт резко отличал бета-распад от альфа- или гамма-распада ядер, а также от излучения электромагнитных волн атомами. Все эти излучения дискретны, что свидетельствует о дискретности уровней энергии в атоме и в атомном ядре. Разность энергий материнского и «дочернего» ядер, согласно закону сохранения энергии, и должна давать энергию вылетающей частицы. Так и обстоит дело с альфа-распадом. Электромагнитное атомное излучение также свидетельствует о законе сохранения энергии и дискретности электронных энергий атома (это блестяще доказывается в теории Бора).

Чем точнее производились измерения энергии бета-электронов, тем надежнее выявлялся факт наличия их сплошного спектра. Физики были шокированы. Ведь не мог же не соблюдаться закон сохранения энергии? Впоследствии выяснилось, что при бета-распаде не соблюдаются и другие законы сохранения механических величин – закон сохранения импульса и закон сохранения момента импульса. Не случайно именно в это время выдающийся немецкий математик Эмми Нётер доказала теорему о связи законов сохранения с симметрией. Эйнштейн в 1918 году отметил, что эта теорема стала основным инструментом теоретической физики. В частности, закон сохранения энергии математически строго вытекает из симметрии законов природы по отношению к времени (что называют также однородностью времени). Вряд ли можно сомневаться в том, что и при бета-распаде этот принцип остается действительным. Так в чем же дело?

По совету Резерфорда получение ответа на этот вопрос решили отложить до выяснения строения атомного ядра. И отложили... на 20 лет. Помешали две очень разные причины. Мировая война переключила многих физиков-экспериментаторов на решение насущных военных задач. А вскоре после войны разразилась великая революция в физике – родилась квантовая механика. По свидетельству Нобелевского лауреата Льва Ландау, знаменитого российского физика-теоретика, это стало одним из двух самых значительных достижений человечества в XX веке (другое – раскрытие структуры ДНК и расшифровка генетического кода). Все молодые физики мечтали заниматься квантовой физикой. И только Резерфорд и немногие его ученики продолжали изучать радиоактивные распады и бомбардировать другие ядра продуктами распадов.

В 1919 году Резерфорд с помощью альфа-частиц совершил превращение одного элемента в другой, осуществив тем самым многовековую мечту алхимиков. Но его не интересовало превращение свинца или ртути в золото, он «всего лишь» превратил азот в кислород и водород. Так был открыт протон. Через некоторое время Резерфорд выдвинул гипотезы о существовании нейтрона и дейтрона. Затем им были получены искусственные радиоактивные изотопы многих химических элементов – началась эпоха так называемых «меченых» атомов и их использования в науке, технике и медицине. Но все это не имело отношения к проблеме бета-распада.

4 декабря 1930 года Вольфганг Паули начинает действовать. Он рассылает письмо участникам очередного конгресса физиков в Тюбингене. Там были, в частности, такие слова: «Я предпринял отчаянную попытку спасти закон сохранения энергии. Открытый Резерфордом как свободная частица нейтрон на самом деле входит в состав всех ядер. Масса его мало отличается от массы электрона, а спин он имеет точно

такой же. Покидая ядро вместе с бета-частицей (электроном), нейтрон берет на себя те части энергии, импульса и момента импульса, которые необходимы для соблюдения законов сохранения... Мой друг Дебай однако написал мне, что об этой проблеме лучше не думать, как не стоит думать, например, о новых налогах. Но как это ни маловероятно, поскольку нет никаких экспериментальных доказательств, я все же рискну выдвинуть эту гипотезу. Не рискуя, не выиграешь».

Через год, в 1931 году Паули опубликовал статью об этой таинственной частице, которая должна спасти законы сохранения, но массу ее уже предложил много меньшую массы электрона. А в 1932 году Чедвик экспериментально доказал, что в атомном ядре содержатся массивные нейтральные частицы – нейтроны и при бета-распаде они не вылетают из ядра. Это открытие принесло Чедвику Нобелевскую премию (1935 г). Теперь гипотетической частице Паули – спасительнице законов сохранения – нужно было давать другое название. Это сделал в 1932 году не он сам, а молодой итальянский физик Энрико Ферми, будущий нобелевский лауреат, прямо на лекции по общей физике перед студентами-первокурсниками Римского университета (которую, кстати, слушал студент Бруно Понтекорво). Ферми экспансивно назвал эту частицу нейтрончиком, маленьким нейтроном, что по-итальянски и звучало как «нейтрино».

Итак, законы сохранения были на бумаге спасены. Осталась маленькая загвоздочка – поймать эту частичку, доказать экспериментально, что она есть, и измерить ее энергию и импульс в бета-распаде. С развитием ядерной физики выяснилось, что процессы рождения нейтрино есть, а вот о процессах захвата ничего не было известно. Наконец, в 1960-е годы некоторые такие процессы были предсказаны. У отдельных ядер были определены дискретные уровни энергии, которые подходили для захвата нейтрино, энергии которых теоретически были известными. Правда, вероятность захвата по расчетам оставалась очень маленькой. Поэтому первые эксперименты стали проводить там, где нейтрино очень много, – около работающих ядерных реакторов. И в 1975 году в США Ф.Райнес и К.Коуэн добились успеха. Они использовали реакцию захвата электронного антинейтрино хлором с получением изотопа аргона и позитрона (антиэлектрона). Поскольку позитроны тут же исчезали, аннигилируя с первыми попавшимися электронами, для подсчета поглощенных антинейтрино определялось количество рожденных атомов аргона. Это тоже было непростой задачей, потому что аргона получалось очень мало. Через три месяца работы установки в ней образовалось всего около 5000 атомов аргона (в сутки происходило примерно 40 событий захвата). Конечно, ни на каких весах взвесить это было нельзя, количество аргона определялось по его радиоактивности.

Этот эксперимент вошел в историю физики под названием «Полтергейст», в буквальном переводе – «суматошный дух», а в современном вольном переводе – «барабашка». Этот (или эта) барабашка, однако, принес Райнесу Нобелевскую премию в 1995 году, когда ученому исполнилось 85 лет (другой автор открытия и вовсе не дожил до присуждения награды). Почему случился такой большой перерыв? Дело в том, что когда стали уточнять и повторять работу Райнеса, появилась возможность улавливать аналогичным образом и солнечные нейтрино. И оказалось, что земные эксперименты всегда давали в несколько раз меньшее число нейтрино, чем предполагала солнечная астрономия. Возникли подозрения в ошибках солнечной физики. Но во всем остальном ее следствия оправдывались на опыте. Опять нейтрино преподнесло физикам загадку – «головную боль», как стали говорить



*Бруно Понтекорво*

в то время. И вот тогда Понтекорво и выдвинул свою гениальную догадку об «ипостасях» нейтрино и об осциллирующих его различных ароматах.

Согласно этой гипотезе, любое нейтрино существует в трех ипостасях – физики пока обозначают эти ипостаси просто номерами 1, 2, 3. Ипостаси имеют разные массы и разные скорости распространения. Согласно корпускулярно-волновому дуализму, они характеризуются дебройлевскими волнами разной длины. Отметим, что если бы массы у них не было, то скорости были бы равны скорости света и ни о каких дебройлевских волнах не могло быть и речи. При распространении по одному направлению дебройлевские волны трех ипостасей интерферируют и образуют регулярные максимумы. Эти максимумы и являются ароматами нейтрино. Таким образом, если при поглощении ядром электрона рождаемое нейтрино имело электронный аромат, то, благодаря тому, что оно состоит из трех ипостасей, через некоторое время движения оно станет мюонным нейтрино, а еще через некоторое время – тау-нейтрино. И это будет все время повторяться. Вот такой оборотень это загадочное нейтрино. А эксперименты были нацелены вначале только на захват («ловлю») электронных нейтрино. Мюонные нейтрино и тау-нейтрино просто не фиксировались в опытах. Так и возникает «пропажа» двух третей солнечных нейтрино.

Но это все красиво выглядело на бумаге, в теории. Экспериментальная же проверка гипотезы Понтекорво требовала гораздо большей точности нейтринных экспериментов. Нужно, чтобы события захвата нейтрино происходили гораздо чаще, хотя бы ежесекундно. Очевидно, что единственный путь для этого – значительное увеличение в одной точке (в одной лаборатории) количества установок, где нейтрино могут быть захвачены. Оценочные расчеты показали, что вещества должно быть не меньше нескольких десятков тонн. И к тому же, все это должно происходить там, где будет исключено появление любых других частиц, кроме нейтрино. А космическое излучение – как солнечное, так и приходящее из глубин космоса – в земной атмосфере рождает целые «ливни» частиц. Значит, ловящие нейтрино установки должны располагаться глубоко под землей (или под водой), что значительно увеличивает стоимость таких экспериментов.

В 80-е годы прошлого века единственным подходящим по уровням энергии ядра для захвата солнечных нейтрино элементом был галлий. При захвате ядром галлия нейтрино образуется ядро изотопа германия и электрон. Германий может быть химически отделен от галлия, и по его излучению можно судить о его количестве и, значит, о числе захватываемых нейтрино. Галлий содержится обычно как очень не-



большая примесь, например, к бокситам. Минералов, состоящих из галлия, практически нет. Отделить его, а потом очистить – непростое, а главное, дорогое дело. К счастью для ядерщиков, технология получения чистого и сверхчистого галлия уже тогда была разработана – это было необходимо для полупроводниковой техники. Галлий – одна из тех добавок, которые делают чистый полупроводник, например кремний, примесным *p*-полупроводником. А ведь все полупроводниковые приборы – это комбинации примесных полупроводников.

Галлий очень дорог. Цена «грязного» галлия, получаемого из бокситов, колеблется в настоящее время от 100 до 200 долларов за килограмм. Но для нейтринной ловушки, как и для полупроводниковых приборов, необходим сверхчистый галлий (с чистотой 0,99999999). Его цена – от 5000 до 10000 долларов за килограмм. Высокая стоимость галлия не приводит к заоблачным ценам полупроводниковых бытовых приборов – там его всего несколько миллиграмм в одном приборе. А вот для галлиевых нейтринных ловушек понадобились десятки тонн сверхчистого галлия.

Одна из первых галлиевых ловушек была сооружена в нашей стране к 1990 году. Это знаменитая Северо-Кавказская ядерная лаборатория, филиал Института ядерной физики Академии наук. В отрогах Кавказского хребта, в Баксанском ущелье под Нальчиком добывались различные полезные ископаемые. Используя туннели этих разработок и прокладывая новые, за несколько лет московские метроостроевцы построили подземные (подгорные) помещения для эксперимента. Попастъ туда можно было по туннелям, которые начинались на невысоком уровне от дна ущелья и углублялись в горы так, что толща гор над лабораторией была свыше трех километров. В многочисленных контейнерах здесь находился металлический галлий, общее его количество превышало 60 тонн. Это мировая добыча галлия за год. Тем не менее, у страны нашлась возможность соорудить такую лабораторию (совместно с учеными и с помощью правительства США).

Баксанская нейтринная обсерватория – БНО, – как ее называют из-за нацеленности на солнечные нейтрино, работает и по сей день. Подобная лаборатория есть еще в Италии. Но точность определения количества захватываемых нейтрино в этих измерениях все же является недостаточной для надежного определения доли электронных нейтрино в их общем количестве. Расчеты показали, что для надежного получения результатов, свидетельствующих об осцилляциях нейтрино и о его массе, нужно иметь количество поглощающего нейтрино вещества на несколько порядков больше – не десятки, а тысячи и десятки тысяч тонн. Ясно, что иметь такое количество галлия для этих экспериментов невозможно.

К счастью, было обнаружено, что ловушками нейтрино могут быть и другие элементы. Для солнечных нейтрино подходящими оказались процессы захвата нейтрино дейтроном – ядром изотопа водорода дейтерия. В одном из процессов после захвата электронного нейтрино появляются два протона и электрон. А в другом, более сложном процессе электрон несколько другой энергии появляется при захвате дейтроном нейтрино любого из трех ароматов, не обязательно электронного. Конкуренция этих двух процессов легла в

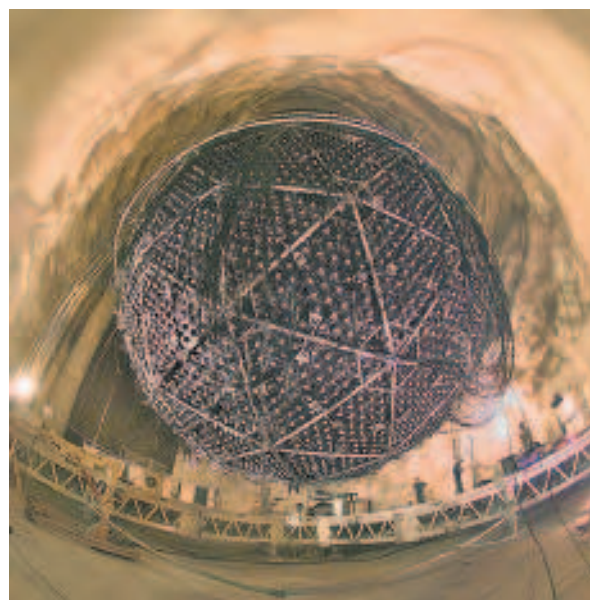


Баксанская нейтринная обсерватория. Зал с контейнерами с галлием

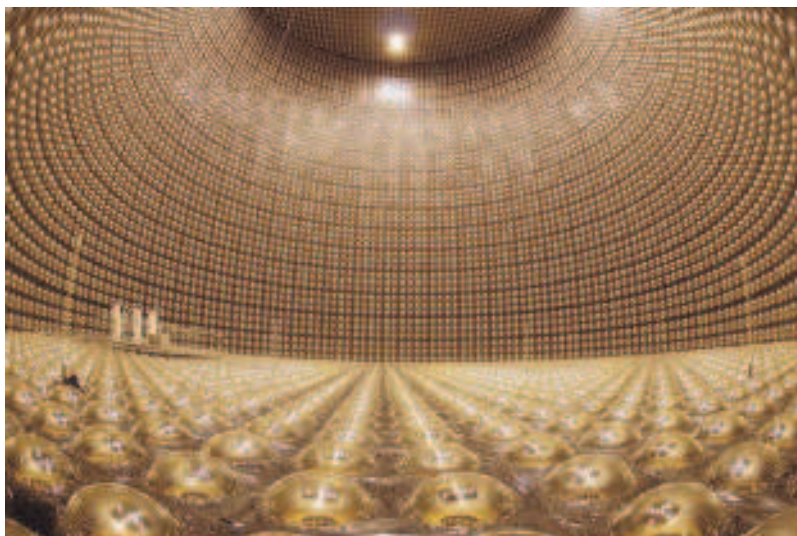
основу метода, осуществленного в канадской коллаборации в Садбериевской нейтринной обсерватории – SNO – под руководством Артура Макдональда, одного из лауреатов Нобелевской премии 2015 года.

Ловящим веществом здесь являлась тяжелая вода (оксид дейтерия  $D_2O$ ). В действующей никелевой шахте на глубине около 2 километров было создано помещение, в котором и расположилась установка. Она представляет собой шар размером с пятиэтажный дом. Наружный шаровой слой заполнен обычной водой – это защита от различных излучений окружающих пород. Сама ловушка выполнена в виде пластмассовой сферы диаметром 12 метров, заполненной тяжелой водой массой 1000 тонн.

Факт поймки нейтрино фиксируется по регистрации вылетевшего электрона. Эти электроны имеют скорость больше скорости распространения света в веществе. (Это не противоречит теории относительности, поскольку нельзя двигаться быстрее скорости света в вакууме. А в воде скорость света



Нейтринная обсерватория в Садбери. Сферическая полость, оснащенная фотоумножителями



Установка Супер-Камиоканде. Детектор нейтрино

меньше.) И тогда электрон начинает терять энергию — он излучает электромагнитную волну, фронт которой имеет вид конуса.<sup>2</sup> Когда этот фронт пересекает фотоэлемент, возникает импульс фототока. Он очень слабенький, поэтому должен усиливаться специальным прибором — фотоумножителем. Фотоумножитель регистрирует энергию излучения, а значит, энергию электрона, вылетевшего при захвате нейтрино. Реакция фотоумножителя зависит и от направления движения этих электронов. В установке SNO на поверхности шара, содержащего тяжелую воду, было установлено 9500 фотоумножителей.

Результаты работы этой установки позволяли подсчитывать как число захватов, вызванных только электронными нейтрино, так и число захватов, вызываемых всеми тремя ароматами нейтрино. Их оказывалось, с хорошей точностью, в 3 раза больше. Однозначный вывод из этого факта такой: несмотря на то что в недрах Солнца рождаются только электронные нейтрино, по дороге в Канаду они осциллируют, превращаясь в другие ароматы. Гипотеза Понтекорво об осцилляциях нейтрино и, следовательно, о наличии у них массы была надежно подтверждена, что и принесло руководителю и вдохновителю проекта Артуру Макдональду Нобелевскую награду.

В то время как в Канаде разворачивались эти события, далеко от этого места, в Японии, в 290 километров от Токио в заброшенной цинковой шахте в 1986 году заработала модернизированная установка Супер-Камиоканде (названная так по имени местности около горы Камио). И хотя во многом эти две установки похожи и цель работы у них была одна и та же, японская лаборатория регистрирует совсем другие нейтрино — не солнечные, а атмосферно-космические мюонные нейтрино, рождаемые довольно близко, в верхней атмосфере Земли на высоте 20–30 километров.

Было обнаружено еще ранее, что мюонные нейтрино такой энергии имеют некоторую вероятность устроить маленький погром в электронном облаке молекулы обычной воды, в

результате которого молекула выбросит быстрый мю-мезон (мюон), становясь при этом ионом. Мюон очень похож на электрон, он точно так же, двигаясь в воде быстрее скорости света в ней, рождает черенковское излучение, которое фиксируется фотоумножителями.

Супер-Камиоканде имеет еще большие размеры, чем установка SNO. Она представляет собой цилиндр диаметром около 40 метров и такой же высоты. Цилиндр заполнен обычной, но тщательно очищенной от всех примесей водой. На внутренней поверхности цилиндра размещены 11146 фотоумножителей. Как и в SNO, имеется огромное электро-техническое, радиоэлектронное и компьютерное обеспечение работы фотоумножителей и обработки полученных данных.

Главным результатом работы этой лаборатории было обнаружение факта зависимости числа поглощаемых нейтрино от направления их движения. Тех частиц, которые двигались сверху вниз, оказалось в два раза больше, чем тех, которые двигались снизу.

Последние, прежде чем попасть в ловушку, должны были пройти сквозь весь земной шар. Они по пути не застревали, поскольку воды там почти не было, а других вариантов исчезновения у нейтрино таких энергий нет. Вывод: на пути сквозь земной шар нейтрино успели проосциллировать так, что из начальных мюонных нейтрино осталась только половина. Другая половина оборотилась, став тау-нейтрино, которые если и творили погром молекулы воды, то при этом появлялся не мю-мезон, а тау-мезон. А на черенковское излучение тау-мезона, имеющего другую массу, фотоумножители не реагировали. Хронологически это было первым свидетельством осцилляций, правда не солнечных, а атмосферно-космических нейтрино. В этих опытах оказалось возможным даже оценить массу мюонных нейтрино и тау-нейтрино. Заметим, что именно здесь 23 ноября 1987 года в один и тот же момент времени все фотоумножители словно помешались — они зарегистрировали огромное количество нейтрино, пришедших от облака взрыва сверхновой звезды.

В 2015 году, через 15 лет после опубликования успешных результатов работы руководитель коллектива этой лаборатории Такааки Кадзита стал нобелевским лауреатом вместе с Артуром Макдональдом. Однако ему и его коллективу пришлось пережить тяжелое потрясение — 12 ноября 2001 года стеклянная оболочка одного фотоумножителя не выдержала напора воды и треснула. Поскольку во внутреннем пространстве этого прибора должен быть глубокой вакуум, разрушение носило взрывной характер, и родившаяся ударная волна привела к разрушению 7000 фотоумножителей и другого оборудования. За 5 лет все было построено заново, и в улучшенном варианте установка Супер-Камиоканде II продолжает успешно работать и в настоящее время.

Возникает вопрос — а зачем? Результаты получены, нейтрино осциллирует. Можно сказать, что он один существует в трех ипостасях, каждая из которых тоже есть нейтрино. У нейтрино есть масса...

На самом деле вопросов, на которые пока нет ответа, стало гораздо больше. Появились гипотезы о других ароматах нейтрино, кроме трех уже известных. Один из них, «стерильное нейтрино», может приблизить разгадку темной материи, другой, «майорановское нейтрино», поможет разгадать асимметрию вещества и антивещества во Вселенной. Так что, возможно, еще не раз на страницах «Кванта» появятся статьи о Нобелевских премиях за нейтрино, эту почти свободную частицу.

<sup>2</sup> Излучение электронов, двигающихся в веществе быстрее скорости света в этом веществе, по имени открывшего его в 1934 году физика П.А.Черенкова называется черенковским излучением. Черенков и физики-теоретики И.Е.Тамм и И.М.Франк, объяснившие это явление, стали нобелевскими лауреатами в 1958 году. Это была первая Нобелевская премия по физике, полученная учеными нашей страны.



# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1–2016» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2406» или «Ф2413». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru) и [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru) соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2406–М2411, М2413 предлагались на XXXVII Турнире городов.

## Задачи М2406–М2413, Ф2413–Ф2419

**М2406.** Из целых чисел от 1 до 100 удалили  $k$  чисел. Обязательно ли среди оставшихся чисел можно выбрать  $k$  различных чисел с суммой 100, если:

а)  $k = 9$ ; б)  $k = 8$ ?

*А. Шаповалов*

**М2407.** Все коэффициенты некоторого многочлена целые и по модулю не превосходят 2015. Докажите, что любой положительный корень этого многочлена больше чем  $1/2016$ .

*А. Храбров*

**М2408.** В треугольнике  $ABC$  медианы  $AA_0$ ,  $BB_0$ ,  $CC_0$  пересекаются в точке  $M$ . Докажите, что центры описанных окружностей треугольников  $MA_0B_0$ ,  $MCB_0$ ,  $MA_0C_0$ ,  $MBC_0$  и точка  $M$  лежат на одной окружности.

*П. Кожевников*

**М2409.** Из спичек сложен клетчатый квадрат  $9 \times 9$ , сторона каждой клетки – одна спичка. Петя и Вася по очереди убирают по спичке, начинает Петя. Выиграет тот, после чьего хода не останется целых квадратиков  $1 \times 1$ . Кто может действовать так, чтобы обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

*А. Шаповалов*

**М2410.** Дан вписанный четырехугольник  $ABCD$ . Продолжения его противоположных сторон пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Пусть  $K$  и  $N$  – середины диагоналей. Докажите, что сумма углов  $PKQ$  и  $PNQ$  равна  $180^\circ$ .

*М. Дидин*

**М2411.** Петя увидел на доске несколько различных чисел и решил составить выражение, среди значений которого все эти числа есть, а других нет. Составляя выражение, Петя может использовать какие угодно числа, особый знак « $\pm$ », а также обычные знаки «+», «-», « $\times$ » и скобки. Значения составленного выраже-

ния он вычисляет, выбирая для каждого знака « $\pm$ » либо «+», либо «-» во всех возможных комбинациях. Например, если на доске были числа 4 и 6, подойдет выражение  $5 \pm 1$ , а если на доске были числа 1, 2 и 3, то подойдет выражение  $(2 \pm 0,5) \pm 0,5$ . Возможно ли составить необходимое выражение, если на доске были написаны:

а) числа 1, 2, 4;

б) любые 100 различных действительных чисел?

*Ко Бон Гюн (Южная Корея)*

**М2412.** Нетрудно проверить, что объем правильного октаэдра, описанного около сферы радиуса 1, равен  $4\sqrt{3}$ . Выясните, верно ли следующее утверждение: «объем любого восьмигранника, описанного около сферы радиуса 1, не меньше  $4\sqrt{3}$ ».

*А. Меркулова*

**М2413\*.** Шеренга состоит из  $N$  ребят попарно различного роста. Ее разбили на наименьшее возможное количество групп стоящих подряд ребят, в каждой из которых ребята стоят по возрастанию роста слева направо (возможны группы из одного человека). Потом в каждой группе переставили ребят по убыванию роста слева направо. Докажите, что после  $N - 1$  такой операции ребята будут стоять по убыванию роста слева направо.

*Н. Гладков*

**Ф2413.** В новогоднюю ночь в безветренную погоду с аэродрома Санкт-Петербурга ( $60^\circ$  северной широты) стартует самолет и летит на постоянной высоте  $h = 5$  км с постоянной по величине скоростью  $v = 1000$  км/ч, держа все время курс на северо-восток (по звездам). С каким ускорением относительно Земли (система Птолемея) движется самолет ровно через  $T = 4$  ч полета? Землю можно считать шаром радиусом  $R = 6400$  км.

*В. Чкалов*



**Ф2414.** Маленький брусок массой  $m$  находится на гладкой горизонтальной поверхности на расстоянии  $L_0$  от вертикального столба, на котором на высоте  $h$  закреплен маленький невесомый блок с неподвижной горизонтальной осью. Невесомая нерастяжимая длинная нить одним концом прикреплена к бруску, перекинута через блок и натянута с постоянной силой  $F > mg$ . Трения в оси блока нет. В начальный момент брусок скользит по поверхности и имеет скорость  $v_0$ , направленную от столба. Каким будет расстояние от столба до бруска в тот момент, когда брусок на мгновение остановится? Какой будет скорость бруска в тот момент, когда брусок перестанет давить на поверхность?

*А. Старов*

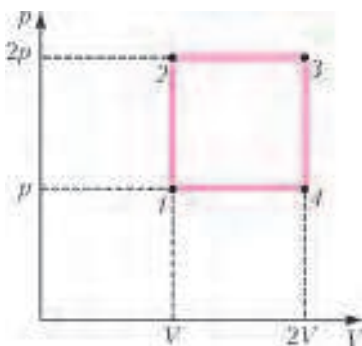
**Ф2415.** Длинный,  $L = 1$  м, прямоугольный брусок квадратного сечения  $a \times a = 10 \times 10$  см имеет плотность  $\rho = 500$  кг/м<sup>3</sup>. Брусок опустили в воду озера и удерживали его в таком неустойчивом положении равновесия, что одна из длинных граней бруска была сухой и горизонтальной, при этом половина объема бруска была погружена в воду. Брусок отпустили, и он занял устойчивое положение, повернувшись вокруг оси симметрии на угол  $\alpha = 45^\circ$ . На сколько уменьшилась потенциальная энергия системы «вода–брусок»?

*С. Дмитриев*

**Ф2416.** Вася выдувает через длинную трубку мыльный пузырь. Надув пузырь, он выпускает трубку изо рта, при этом воздух из пузыря выходит через трубку наружу. Окончательно пузырь исчезает, так и не лопнув, через время  $\tau$ . За какое время сдуется надутый таким же образом мыльный пузырь вдвое большего радиуса? Считайте, что воздух по трубке движется достаточно медленно, а свойства мыльной пленки у обоих пузырей одинаковы.

*В. Пузырев*

**Ф2417.** Газ фотонов, для которого внутренняя энергия  $U$  пропорциональна объему  $V$  и абсолютной температуре  $T$  в четвертой степени:  $U = \alpha VT^4$ , а давление газа  $p$  равно одной трети отношения внутренней энергии к объему:  $p = \alpha T^4/3$ , участвует в процессе, изображенном на рисунке. Каков КПД этого процесса? Каков максимально возможный КПД теплового двигателя при температурах нагревателя и холодильника, равных максимальной и минимальной температурам в рассматриваемом процессе?



*А. Газов*

**Ф2418.** Два одинаковых проводящих шара 1 и 2 с диаметрами  $d = 10$  см каждый установлены на непроводящих подставках в воздухе так, что расстояние между их центрами  $L = 1$  м. Сначала шары подключили к высоковольтному источнику и зарядили максималь-

но возможными одинаковыми зарядами  $Q$ . Затем отключили шары от источника и длинным тонким проводом стали по очереди заземлять шары и отключать от заземления. После первого заземления шара 1 на нем был заряд  $q_1$ , после заземления шара 2 на нем был заряд  $q_2$  и так далее. Иными словами, нечетные заземления проводились для шара 1, а четные – для шара 2. Найдите  $Q, q_1, q_2, q_3, \dots$  вплоть до максимального номера операции заземления, когда еще получается «разумный» ответ. «Пробивная» напряженность электрического поля в воздухе  $E_0 = 3 \cdot 10^6$  В/м.

*С. Зарядов*

**Ф2419.** Известно, что масса Солнца равна  $M = 2 \cdot 10^{30}$  кг. Примерно 73% массы Солнца – это водород, 25% массы – гелий, а на остальное приходится всего-то 2% массы Солнца. Источником энергии Солнца являются ядерные реакции превращения водорода в гелий, которые идут в небольшой (в сравнении с размерами самого Солнца) области вблизи его центра. Другие реакции, в частности реакции превращения гелия в углерод и т.д., по расчетам ученых начнут происходить в Солнце только на финальной стадии эволюции. Через какое время доля водорода в массе Солнца станет равной 72%?

*Для справки:* солнечная постоянная вблизи Земли  $W = 1370$  Вт/м<sup>2</sup>, масса протона  $m_p = 1,0072765$  а.е.м., протон массивнее электрона в 1836,1527 раз, масса ядра гелия-4  $m_\alpha = 4,00260325415$  а.е.м.

*М. Солнцев*

### Решения задач М2389–М2395, Ф2395–Ф2402

**М2389.** Дано  $2n + 1$  чисел ( $n$  – натуральное), среди которых одно число равно 0, два числа равны 1, два числа равны 2, ..., два числа равны  $n$ . Для каких  $n$  эти числа можно записать в одну строку так, чтобы для каждого натурального  $t$  от 1 до  $n$  между двумя числами, равными  $t$ , было расположено ровно  $t$  других чисел?

**Ответ:** для любых.

Расположим числа так: ..., 6, 4, 2,  $n$ , 0, 2, 4, 6, ..., 5, 3, 1,  $n$ , 1, 3, 5, ... (сначала стоят в убывающем порядке все четные положительные числа, меньшие  $n$ , потом  $n$ , 0, те же четные числа в возрастающем порядке, далее все нечетные, меньшие  $n$ , – в убывающем,  $n$  и те же нечетные в возрастающем порядке).

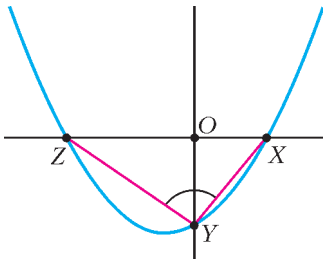
*И. Акулич*

**М2390.** График квадратного трехчлена с целыми коэффициентами пересекает ось абсцисс в точках  $X, Z$ , а ось ординат – в точке  $Y$  (все три точки различны). Найдите наибольшее возможное значение угла  $XYZ$ .

**Ответ:**  $90^\circ$ .

Примером может служить трехчлен  $x^2 - 1$ .

Докажем, что тупой угол получиться не может. Пусть  $O$  – начало координат, трехчлен имеет вид  $ax^2 + bx + c$ , а его корни равны  $r$  и  $s$ . Предположим, что угол  $XYZ$

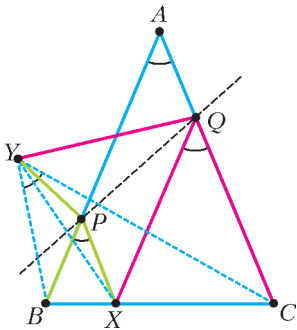


тупой (см. рисунок). Тогда  $OY^2 < OX \cdot OZ$ , поскольку при прямом угле XYZ было бы равенство. Имеем  $c^2 < |rs|$ , но по теореме Виета  $rs = c/2$ , откуда  $c^2 < |c/a|$  и  $0 < |ac| < 1$ , что противоречит целочисленности  $a$  и  $c$ .

**Комментарий.** Целочисленность  $b$  на самом деле не требуется.

Б. Френкин

**M2391.** На основании BC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка X, а на сторонах AB и AC — соответственно точки P и Q таким образом, что APXQ — параллелограмм (см. рисунок). Докажите, что точка Y, симметричная точке X относительно прямой PQ, попадает на описанную окружность треугольника ABC.



Так как PX и AC параллельны, то треугольник BPX тоже равнобедренный, следовательно, B, X и Y равноудалены от P, т.е. P — центр описанной окружности треугольника BXY. Значит,

$$\angle BYX = \frac{1}{2} \angle BPX = \frac{1}{2} \angle A.$$

Аналогично,  $\angle CYX = \frac{1}{2} \angle A$ . Поэтому  $\angle BYC = \angle BAC$  и точки B, Y, A, C лежат на одной окружности.

Л.Медников, И.Рубанов, А.Семенов, А.Шаповалов

**M2392.** а) В таблицу  $2 \times n$  (где  $n > 2$ ) вписаны числа. Суммы во всех  $n$  столбцах различны. Докажите, что можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны.

б) В таблицу  $100 \times 100$  вписаны числа. Суммы во всех столбцах различны. Всегда ли можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны?

а) Допустим, суммы в строках равны. Если есть столбец, где числа различны, то поменяем их местами,

a	b	c	—	—	—	—	—
a	b	c	—	—	—	—	—
b	c	a	—	—	—	—	—
a	b	c	—	—	—	—	—

Рис. 1

и суммы чисел в строках станут разными. Если в каждом столбце оба числа равны, то все числа в строке различны. Возьмем три наименьших числа  $a < b < c$  в верхней строке и переставим их циклически (рис.1).

Так как  $b + a < a + c < b + c$ , причем  $b + c$  меньше суммы чисел в любом из оставшихся  $n - 3$  столбцов, то суммы чисел в столбцах останутся различными. Теперь у нас есть столбец, где числа различны, и можно будет поменять их местами.

б) **Ответ:** не всегда.

Приведем контрпример. Впишем в столбцы последовательно по 0, 1, 2, 3, ..., 97, 98, 100 единиц, а в остальные клетки впишем нули (на рисунке 2 приведен пример аналогичного заполнения таблицы  $10 \times 10$ ). Число, равное  $0 + 1 + \dots + 98 + 100$ , нельзя по-другому разбить на  $n$  целых различных неотрицательных слагаемых. Следовательно, указанное разбиение единиц по столбцам единственное, при котором суммы в них различны. Выходит, при любой «допустимой» перестановке обязательно должны быть столбец из нулей и столбец из единиц. То же самое можно сказать и про строки, если суммы в них различны. Но наличие столбца из нулей противоречит наличию строки из единиц.

0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Рис. 2

А.Шаповалов

**M2393.** Дано натуральное число  $a$ . Докажите, что любое натуральное число  $n$  можно домножить на какое-то натуральное число, меньшее  $10a$ , так, чтобы десятичная запись произведения начиналась с  $a$ . Пусть  $k$  — наименьшее целое число такое, что  $n \leq 10^k$ , а  $d$  — наименьшее натуральное число такое, что  $dn \geq 10^k a$  (иначе говоря,  $k = \lceil \lg n \rceil$  и  $d = \lceil 10^k a / n \rceil$ , где запись  $\lceil x \rceil$  обозначает наименьшее целое число, большее  $x$ ). Тогда  $(d - 1)n < 10^k a$ , т.е.  $dn < 10^k a + n \leq 10^k (a + 1)$ ; это значит, что число  $dn$  начинается на  $a$ . Выходит, если  $d < 10a$ , то  $d$  — требуемый множитель.

Предположим, что  $d > 10a$ . Из выбора  $d$  получаем, что  $10^k a > 10an$ , т.е.  $10^{k-1} > n$ , что противоречит выбору  $k$ . Наконец, если  $d = 10a$ , то целое число  $dn/10$  также начинается на  $a$ , т.е. подходит число  $d/10 = a < 10a$ .

Е.Бакаев

**M2394.** Император пригласил на праздник 2015 волшебников, добрых и злых, при этом волшебники знают, кто добрый и кто злой, а император — нет. Добрый волшебник всегда говорит правду, а злой говорит что угодно. На празднике император сначала выдает каждому волшебнику по бумажке с вопросом (требующим ответа «да» или «нет»), затем волшебники отвечают, и после всех ответов император одного изгоняет. Волшебник выходит в заколдованную дверь, и император узнает, добрый он был или злой. После этого император вновь выдает каждому из оставшихся волшебников по бумажке с вопросом, вновь одного изгоняет, и так далее, пока император не решит остановиться (это возможно после любого из ответов, и после остановки можно никого не изгонять). Докажите, что император может изгнать всех злых волшебников, удалив при этом не более одного доброго.

*Первый этап.* Император выделяет одного волшебника  $A$  и спрашивает всех оставшихся, добрый ли он (а его – о чем угодно). Имеем два случая.

1) Все сказали «нет». Тогда император изгоняет  $A$ . Если оказалось, что  $A$  – добрый, то все остальные волшебники – злые, и император изгоняет их по очереди, задавая произвольные вопросы. Если оказалось, что  $A$  – злой, то число злых волшебников уменьшилось, и император снова повторяет первый этап.

2) Нашелся волшебник  $B$ , сказавший «да». Тогда император изгоняет  $B$ . Если оказалось, что  $B$  – злой, то император также возвращается к первому этапу. Если оказалось, что  $B$  – добрый, то император понимает, что  $A$  – добрый, и переходит ко второму этапу.

*Второй этап.* Император ставит волшебников по кругу и спрашивает каждого, добрый ли следующий. Если все ответили «да», то все оставшиеся в зале волшебники – добрые, и император останавливается.

Если кто-то ответил «нет», то первый, начиная со следующего за  $A$  волшебника, про которого так сказали, – злой. Император его изгоняет и возвращается ко второму этапу.

*Л.Медников, И.Рубанов, А.Семенов, А.Шаповалов*

**M2395.** Как известно, если у четырехугольника существуют вписанная и описанная окружности и их центры совпадают, то этот четырехугольник – квадрат.

*А верен ли аналог этого утверждения в пространстве: если у кубоида существуют вписанная и описанная сферы и их центры совпадают, то этот кубоид – куб? (Кубоид – это многогранник, у которого 6 четырехугольных граней и в каждой вершине сходится 3 ребра.)*

**Ответ:** нет.

Приведем контрпример. На рисунке 1 изображен кубоид, построенный следующим образом. Верхняя и нижняя его грани – прямоугольники  $6 \times 8$  (вписанные

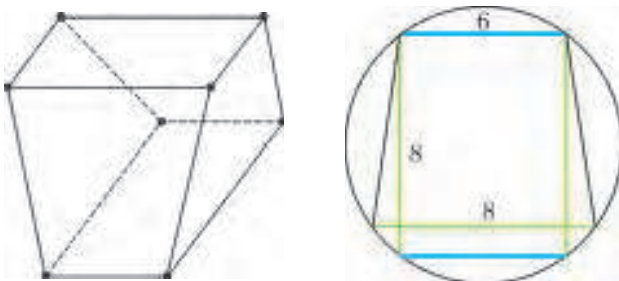


Рис. 1

Рис. 2

в окружность радиуса 5), повернутые друг относительно друга на  $90^\circ$ . Отрезок, соединяющий их центры, перпендикулярен плоскостям прямоугольников и имеет длину  $4\sqrt{3}$ , середина  $O$  этого отрезка – центр описанной сферы (радиус описанной сферы равен  $\sqrt{12 + 5^2} = \sqrt{37}$ ). Боковые грани – равнобокие трапеции с основаниями длины 6 и 8 и высотой  $\sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 1} = 7$ . Такая трапеция также вписана в окружность радиуса 5 (рис.2). Значит,  $O$  удалена от всех

граней на одно и то же расстояние  $2\sqrt{3}$ , тем самым кубоид описан вокруг сферы с центром  $O$  радиуса  $2\sqrt{3}$ .

*М.Евдокимов*

**Ф2395.** Небольшой кубик массой  $m = 0,1$  г надет на тонкую спицу, вдоль которой он может перемещаться без трения (рис.1). Спицу жестко закрепляют над плоским вращающимся с угловой скоростью  $\omega = 0,1$  рад/с диском радиусом  $R = 10$  см так, что она находится на расстоянии  $h = 6$  см от центра диска и расположена параллельно поверхности диска. Кубик прижат к диску силой  $F = 10$  Н, перпендикулярной плоскости диска. Коэффициент трения между кубиком и диском  $\mu = 0,3$ . В начальный момент кубик находится вблизи края диска. Через какое время кубик соскользнет с диска? Силой тяжести можно пренебречь.



Рис. 1

Кубик может двигаться только вдоль спицы. Из всех действующих на него сил только сила трения со стороны диска может иметь ненулевую проекцию на направление спицы. Если считать, что относительно кубика движется то место диска, с которым кубик контактирует в данный момент,

то сила трения, действующая на кубик, направлена по (или вдоль) скорости движения этого места диска относительно кубика. Рассмотрим положение кубика, показанное на рисунке 2. Точка (маленькое пятно контакта) диска, к которой прижат кубик, движется со скоростью  $v = \omega r$ . Проекция этой скорости на направление спицы равна  $v_0 = \omega r \cos \alpha = \omega h = 0,6$  см/с и не зависит от положения кубика. Иными словами, когда кубик разгонится до скорости  $v_0$ , действующая на него сила трения будет перпендикулярна спице, и больше скорость кубика меняться не будет. Мы определили характер движения кубика: вначале он разгоняется до скорости  $v_0$ , а затем движется с постоянной скоростью. Время разгона можно оценить следующим образом:

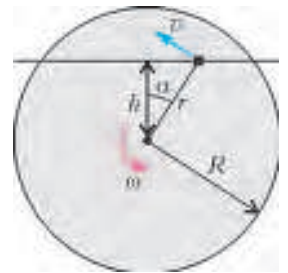


Рис. 2

$$t_1 = \frac{mv_0}{\mu F} = 0,2 \text{ мкс} .$$

Если бы кубик двигался все время со скоростью  $v_0$ , время движения составило бы

$$t_2 = \frac{2\sqrt{R^2 - h^2}}{v_0} \approx 27 \text{ с} .$$

Поскольку  $t_1 \ll t_2$ , можно пренебречь начальным этапом движения и считать, что кубик все время движется со скоростью  $v_0$ . Тогда искомое время есть

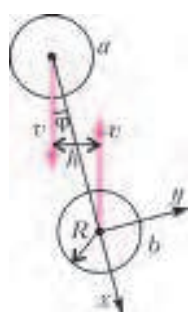
$$t = t_2 = 27 \text{ с} .$$

*А.Бычков*



**Ф2396.** В известной игре на гладкой горизонтальной поверхности сталкиваются две одинаковые по размерам (их радиусы равны  $R$ ) и по массе ( $M$ ) шашки, одна из которых до столкновения покоится, а другая движется поступательно со скоростью  $2v$ . Прицельный параметр – минимальное расстояние между линией, вдоль которой до столкновения движется центр одной из шашек, и центром второй шашки – равен  $h$  (при  $h < D$  шашки соударяются). Известно, что при  $h = 0$  во время столкновения шашки обмениваются скоростями, т.е. происходит абсолютно упругий лобовой удар. Коэффициент трения шашки о шашку равен  $\mu$ . Как зависят угловые скорости, приобретенные шашками после удара, от прицельного параметра  $h$ ? Какими будут скорости центров шашек после удара? Момент инерции шашки относительно вертикальной оси симметрии равен  $I$ .

Будем обозначать шайбу, которая двигалась до удара, буквой  $a$ , а шайбу, покоившуюся до удара, буквой  $b$ .



Естественно, что сначала удобно перейти в инерциальную систему отсчета центра масс, в которой обе шайбы движутся с одинаковыми по величине ( $v$ ) и противоположно направленными скоростями (см. рисунок). За мгновение до удара центры шайб находятся друг от друга на расстоянии, равном  $2R$ . Угол  $\varphi$ , который в этот момент образуют линии, вдоль которых движутся центры шайб, и отрезок, соединяющий центры шайб, таков, что  $\sin \varphi = h/(2R)$ . Продольные (по оси  $x$ ) составляющие скоростей шайб после удара просто изменят свои знаки, поскольку лобовой удар не вращающихся шайб абсолютно упругий. А вот поперечные (по оси  $y$ ) к этому отрезку проекции скоростей шайб обязательно изменятся, и появятся угловые скорости вращения шайб вокруг их осей симметрии. При этом сохраняется момент количества движения (момент импульса) шайб относительно точки контакта, который до удара был равен  $2MvR \sin \varphi$ .

Возможны два отличающихся друг от друга случая. 1) При малых величинах угла  $\varphi$  к моменту окончания удара (промежутка времени, в течение которого шайбы контактируют) скорости точек контакта шайб становятся равными нулю, т.е. проскальзывание шайб за время удара успевает прекратиться. 2) При углах  $\varphi$ , больших некоторой определенной величины, проскальзывание шайб продолжается в течение всего времени соударения. Рассмотрим сначала случай 1). К концу удара момент импульса будет равен  $2(I + MR^2)\omega$ . Отсюда находим угловую скорость движения шайб после удара:

$$\omega = \frac{MvR \sin \varphi}{I + MR^2}.$$

Соответственно, проекции скоростей центров шайб на направление, перпендикулярное отрезку, соединя-

ющему центры шайб во время удара, будут равны

$$v \frac{MR^2}{I + MR^2} \sin \varphi.$$

Они меньше проекции скоростей шайб на это же направление до удара в  $MR^2/(I + MR^2)$  раз.

Чтобы найти скорости шайб после удара в исходной системе отсчета, где до удара одна из шайб покоилась, нужно к найденным скоростям шайб в системе центра масс добавить переносную скорость, т.е. скорость центра масс. Тогда в исходной системе отсчета после удара скорость центра шайбы  $a$  имеет продольную проекцию (вдоль отрезка, соединяющего центры шайб), равную нулю:  $v_{ax} = 0$ , а центр шайбы  $b$  имеет в проекции на это направление скорость  $v_{bx} = 2v \cos \varphi$ . (Заметим, что это относится и к случаю 1) и к случаю 2).)

Проекция скоростей шайб в перпендикулярном направлении (ось  $y$ ) после удара будут такими:

$$v_{ay} = v \left( 1 - \frac{MR^2}{I + MR^2} \right) \sin \varphi,$$

$$v_{by} = v \left( 1 + \frac{MR^2}{I + MR^2} \right) \sin \varphi.$$

Теперь рассмотрим случай 2, когда проскальзывание шайб происходит в течение всего времени удара. Импульс силы трения, действовавшей на шайбу, равен по величине  $\mu \cdot 2Mv \cos \varphi$ . Этот импульс изменяет проекцию скорости центра шайбы на направление оси  $y$  на величину  $\mu \cdot 2v \cos \varphi$ . При этом изменяется угловая скорость движения шайбы – она становится равной

$$\omega = \frac{2MvR\mu \cos \varphi}{I}.$$

Скорость, в системе центра масс, той точки шайбы  $b$ , которая контактировала с шайбой  $a$  в момент окончания столкновения, оказывается равной

$$-v \sin \varphi + \omega R + \mu \cdot 2v \cos \varphi = v \left( 2\mu \left( 1 + \frac{MR^2}{I} \right) \cos \varphi - \sin \varphi \right).$$

Скорость той точки шайбы  $a$ , которая в этот момент находится в контакте с шайбой  $b$ , будет равна

$$v \left( \sin \varphi - 2\mu \left( 1 + \frac{MR^2}{I} \right) \cos \varphi \right).$$

Чтобы шайбы проскальзывали в течение всего времени соударения, нужно, чтобы выполнялось неравенство

$$\sin \varphi > 2\mu \left( 1 + \frac{MR^2}{I} \right) \cos \varphi,$$

или

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{\sqrt{4R^2 - h^2}} > 2\mu \left( 1 + \frac{MR^2}{I} \right).$$

В итоге если выполняется неравенство

$$\frac{h}{\sqrt{4R^2 - h^2}} < 2\mu \left( 1 + \frac{MR^2}{I} \right),$$

то реализуется случай 1). Если же выполняется неравенство

$$\frac{h}{\sqrt{4R^2 - h^2}} \geq 2\mu \left( 1 + \frac{MR^2}{I} \right),$$

то реализуется случай 2).

Теперь нужно и для случая 2) найти проекции скоростей центров шайб на ось  $y$  в исходной системе отсчета после удара. Они будут равны

$$v_{ay} = 2v(\sin \varphi - \mu \cos \varphi),$$

$$v_{by} = 2v \mu \cos \varphi.$$

Чтобы найти модули скоростей центров шайб, следует воспользоваться теоремой Пифагора. Это читателям предоставляется сделать самостоятельно.

*В. Чапаев*

**Ф2397.** В настоящее время в мире широко используются висячие мосты (рис. 1). Несущая конструкция



Рис. 1

висячего моста представляет собой гибкий элемент, его называют кабелем или цепью, закрепленный на прочных опорах – пилонах. Пролет моста подвешен к цепи на вертикальных тросах. Поскольку масса пролета много больше массы цепи, вертикальные тросы расположены близко друг к другу (цепь можно считать плавной кривой), а их длины подобраны



Рис. 2

так, что силы натяжения всех тросов одинаковы. Найдите форму цепи, т.е. уравнение цепи в системе координат, изображенной на рисунке 2.

Решение этой задачи содержится в статье С. Муравьева «Висячие мосты» в этом номере журнала.

**Ф2398.** Две пластинки имеют одну и ту же длину  $L$ , ширину  $H$  и толщину  $d$ , причем  $L \gg H \gg d$ . Пластинки сделаны из разных металлов, склеены и образуют одну так называемую биметаллическую пластинку толщиной  $2d$ . Металлы имеют разные коэф-

фициенты теплового расширения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  и разные модули Юнга  $E_1$  и  $E_2$ . При некоторой температуре, например комнатной, биметаллическая пластинка прямая, а при повышении температуры на  $\Delta t$  градусов она искривляется. До какой температуры нужно нагреть биметаллическую пластинку, чтобы она образовала кольцо?

Если бы пластинки не были склеены, то при нагревании каждая из них увеличила бы свою длину, ширину и толщину в одинаковое количество раз в соответствии со своим коэффициентом теплового расширения. Но пластинки скреплены, поэтому та из них, которая при тепловом расширении увеличилась бы в длину больше, будет сжата за счет взаимодействия с другой пластинкой. И, соответственно, та пластинка, которая удлинилась бы за счет теплового расширения меньше, будет дополнительно растянута. Поскольку упругие пластинки будут изгибаться, то каждая из них будет «сопротивляться» изгибу, и в результате будет достигнуто некоторое положение равновесия. Можно разбить все изменения, происходящие с пластинами, на три этапа.

1) Нагрев и удлинение пластинок. При этом удлинения пластинок составят  $L\alpha_1\Delta t$  и  $L\alpha_2\Delta t$ .

2) Изгиб пластинок таким образом, чтобы радиус кривизны вогнутой поверхности более длинной пластинки был равен радиусу кривизны выпуклой поверхности короткой пластинки. При этом к концам пластинок будут приложены одинаковые по величине и противоположные по направлению моменты сил  $M$ .

3) Сжатие длинной пластинки и растяжение короткой пластинки одинаковыми силами  $F$  так, чтобы длины вогнутой поверхности длинной пластинки и выпуклой поверхности короткой пластинки стали одинаковыми. Второй и третий этапы согласованы друг с другом, т.е. силы  $F$  и моменты сил  $M$  определенным образом связаны друг с другом. Когда после этих трех этапов пластинки окажутся соединенными, они так и останутся в этих положениях, сохраняя свои формы.

Будем считать, для определенности, что  $\alpha_1 > \alpha_2$ . Обозначим силу взаимодействия пластинок через  $F$ . Пластинки изогнутся, и каждая из них за счет деформации изгиба будет «сопротивляться» действию силы  $F$  со стороны своей соседки. Изогнутые средние поверхности каждой пластинки, которые при комнатной температуре были плоскостями, находятся на разных расстояниях от центра кривизны. Средняя поверхность более длинной пластинки отстоит на расстояние  $R + d/2$ , а более короткой пластинки – на расстояние  $R - d/2$ . Обозначим через  $\varphi$  угол, который образуют друг с другом плоскости, касательные к краям изогнутой биметаллической пластинки (по условию задачи этот угол должен стать равным  $2\pi$ ). Он равен  $L/R$ , так как длина пластинок изменилась мало. Пусть изменения длин пластинок, связанные с нагревом, равны  $x_{t1}$  и  $x_{t2}$  соответственно, а изменения длин, связанные с взаимодействием пластинок, равны  $x_{f1}$  и  $x_{f2}$ . Растянутая пластинка создает силу  $F = Hd \cdot E_2(x_{f2}/L)$ . Эта сила распределена по сечению пластинки равномерно, поэтому при расчете момента этой силы можно считать, что

место приложения эквивалентной (в смысле создания момента силы) силы смещено относительно поверхности контакта пластин на расстояние  $d/2$ . Сжатая пластинка создает такую же по величине силу, и место приложения эквивалентной силы для нее тоже смещено относительно поверхности контакта пластин на расстояние  $d/2$ . В результате возникает внутренний момент сил напряжения, равный

$$M_{\text{вн}} = Fd.$$

Поскольку расстояние до центра кривизны от средней поверхности более длинной пластинки больше, чем соответствующее расстояние для более короткой пластинки, между итоговыми удлинениями пластинок имеется такая геометрическая связь:

$$(R + d/2)\varphi = L + x_{t1} - x_{f1}, \quad (R - d/2)\varphi = L + x_{t2} + x_{f2},$$

или, что то же самое,

$$\begin{aligned} \frac{d}{2R} &= \frac{x_{t1} - x_{f1}}{L} = \alpha_1 \Delta t - \frac{F}{HdE_1}, \\ -\frac{d}{2R} &= \frac{x_{t2} + x_{f2}}{L} = \alpha_2 \Delta t + \frac{F}{HdE_2}. \end{aligned}$$

Вычтем из одного соотношения другое и получим

$$\frac{d}{R} = (\alpha_1 - \alpha_2)\Delta t - \frac{F}{HdE_1} - \frac{F}{HdE_2}. \quad (1)$$

Найдем теперь суммарный момент сил, с помощью которого обе упругие пластинки сопротивляются изгибающему действию момента сил  $Fd$ . Если пластинка изогнута и радиус кривизны равен  $R$ , то создается момент сил за счет упругого сжатия пластинки с одной стороны от средней поверхности и упругого растяжения пластинки с другой стороны от этой средней поверхности. Добавочное (связанное с изгибом) напряжение в металле нарастает по величине пропорционально удалению от среднего положения. Момент сил одной изогнутой пластинки равен

$$\begin{aligned} M_i &= \int_{-d/2}^{+d/2} y \frac{\varphi R + \varphi y - L}{L} E_i H dy = \\ &= \int_{-d/2}^{+d/2} \frac{y^2}{R} E_i H dy = 2 \frac{(d/2)^3}{3R} E_i H = \frac{d^3}{12R} E_i H. \end{aligned}$$

Суммарный момент сил, создаваемый двумя изогнутыми пластинками, равен

$$M_{i\text{сум}} = \frac{d^3}{12R} (E_1 + E_2) H.$$

Приравняем его внутреннему моменту сил:

$$M_{i\text{сум}} = M_{\text{вн}}, \quad \text{или} \quad \frac{d^3}{12R} (E_1 + E_2) H = Fd. \quad (2)$$

Комбинируя уравнения (1) и (2), можно исключить величину  $F$ . В результате получаем выражение для радиуса кривизны  $R$  биметаллической пластинки:

$$R = \frac{d}{\Delta t (\alpha_1 - \alpha_2)} \left( 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{E_1}{E_2} + 2 + \frac{E_2}{E_1} \right) \right).$$

Чем сильнее изогнута пластинка, тем меньше радиус ее

кривизны  $R$ . При фиксированной разнице коэффициентов теплового расширения металлов радиус кривизны будет минимальным, когда модули Юнга металлов одинаковы:

$$R_{\text{min}} = \frac{4}{3} \frac{d}{\Delta t (\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

В случае, когда модули Юнга материалов сильно отличаются, радиус кривизны пластинки будет очень большим, т.е. пластинка будет почти прямой и не будет изгибаться при изменении температуры.

Чтобы выполнялось условие задачи, т.е. чтобы пластинка свернулась в кольцо, между радиусом кривизны пластинки и ее длиной должно быть выполнено такое соотношение:  $2\pi R = L$ . Отсюда следует, что биметаллическую пластинку нужно нагреть на

$$\Delta t = \frac{2\pi d}{L(\alpha_1 - \alpha_2)} \left( 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{E_1}{E_2} + 2 + \frac{E_2}{E_1} \right) \right).$$

С.Варламов

**Ф2399.** Оцените собственное давление жидкой воды при температуре  $27^\circ\text{C}$ , т.е. давление, которым вещество само себя сжимает, удерживаясь в конденсированном состоянии. Для этого предположите, что сосуд с жесткими стенками был заполнен водой, а затем все молекулы воды перестали взаимодействовать друг с другом, уменьшились до размеров точек и взаимодействуют только со стенками сосуда, отскакивая от них при абсолютно упругих ударах.

После «отключения» взаимодействия молекул воды друг с другом в сосуде оказался газ, который подчиняется уравнению Менделеева–Клапейрона  $pV = \nu RT$ . Температура здесь должна быть выражена по шкале Кельвина, т.е.  $T = 300$  К. Пусть объем сосуда  $V = 1$  л, тогда масса газа  $m = \rho V = 1$  кг. Молярная масса воды  $M = 18$  г/моль. Таким образом, в одном литре воды содержится  $\nu = \frac{m}{M} \approx 55$  моль вещества. Отсюда следует, что собственное давление жидкой воды равно

$$p = \frac{\nu RT}{V} \approx 1,37 \cdot 10^8 \text{ Па} \approx 1400 \text{ бар}.$$

С.Бар

**Ф2400.** Тонкая диэлектрическая нить образует геометрическую фигуру, состоящую из полуокружности радиуса  $R$  и двух лучей (рис.1). Нить равномерно заряжена, заряд единицы длины нити равен  $\tau$ . Найдите напряженность электрического поля, создаваемого нитью в точке  $O$  (центр полуокружности).



Найдем напряженности полей, создаваемых двумя небольшими участками нити, один из которых лежит на полуокружности, а другой – на одном из лучей, причем каждый из этих участков виден из точки  $O$  под



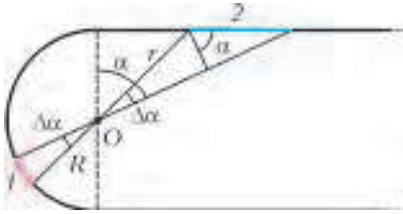


Рис. 2

малым углом  $\Delta\alpha$  (рис. 2). Длина участка 1 равна  $\Delta l_1 = R\Delta\alpha$ , где  $R$  – расстояние до точки  $O$ . Поэтому напряженность электрического поля, создаваемого этим участком, равна

$$E_1 = k \frac{\tau \Delta l_1}{R^2} = k\tau \frac{\Delta\alpha}{R}.$$

Длина участка 2 равна  $\Delta l_2 = (r\Delta\alpha)/\cos\alpha$  (здесь использована малость угла  $\Delta\alpha$ ), где  $r = R/\cos\alpha$  – расстояние до точки  $O$ . Напряженность поля, создаваемого этим участком, равна

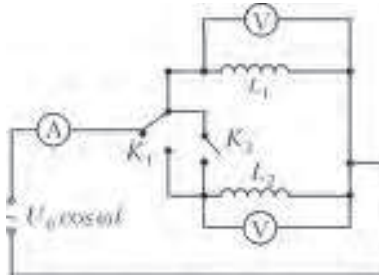
$$E_2 = k \frac{\tau \Delta l_2}{r^2} = k\tau \frac{r\Delta\alpha}{r^2 \cos\alpha} = k\tau \frac{\Delta\alpha}{R}.$$

Векторы напряженностей  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  равны по величине и противоположны по направлению, поэтому их сумма равна нулю. Поскольку всю нить можно разбить на пары таких участков, то и поле, создаваемое всей нитью в точке  $O$ , равно нулю:

$$E_O = 0.$$

А.Бычков

**Ф2401.** В сеть (220В, 50Гц) включена электрическая схема с двумя катушками индуктивности, двумя ключами и тремя идеальными приборами, показывающими эффективные значения параметров (см. рисунок). Когда ключ  $K_1$  находится в верхнем положении, а ключ  $K_2$  разомкнут, амперметр показывает ток  $I_1 = 1$  А, верхний вольтметр показывает напряжение  $U = 220$  В, а нижний вольтметр показывает напряжение  $U_1 =$



$= 55$  В. Если ключ  $K_1$  перевести в нижнее положение, оставив  $K_2$  разомкнутым, то амперметр показывает  $I_2 = 4$  А, нижний вольтметр показывает напряжение  $U = 220$  В. Какое напряжение  $U_2$  в этом случае показывает верхний вольтметр? Что будут показывать все приборы, если ключ  $K_2$  перевести в замкнутое положение?

При разомкнутом ключе  $K_2$  оба вольтметра показывают ненулевые напряжения – это означает, что между катушками имеется связь, т.е. одна катушка при протекании по ней тока создает в другой катушке не равный нулю магнитный поток. Обозначим индуктивность верхней катушки  $L_1$ , а индуктивность нижней катушки  $L_2$ . Поскольку  $I_2 = 4I_1$ , то это означает, что индуктивность второй катушки в 4 раза меньше индуктивности первой катушки. Коэффициент взаимной индукции обозначим  $M$ , а угловую частоту –  $\omega$ . Для

эффективных значений токов и напряжений можно написать:

$$U = I_1 \cdot \omega L_1, \quad U = I_2 \cdot \omega L_2,$$

$$U_1 = I_1 \cdot \omega M, \quad U_2 = I_2 \cdot \omega M.$$

Отсюда следует

$$\omega L_1 = 220 \text{ Ом}, \quad \omega L_2 = 55 \text{ Ом}, \quad \omega M = 55 \text{ Ом},$$

и получаем

$$U_2 = I_2 \cdot \omega M = 220 \text{ В}.$$

Когда ключ  $K_2$  переведен в положение «замкнуто», токи могут течь по обеим катушкам. Магнитные потоки создаются в каждой катушке и собственным током катушки, и током соседней катушки. При этом напряжения на выводах катушек будут одинаковыми и, очевидно, равными 220 В, поскольку выводы катушек через амперметр, с одной стороны, и напрямую, с другой стороны, подключены к сети:

$$U = i_1 \cdot \omega L_1 \pm i_2 \cdot \omega M, \quad U = i_2 \cdot \omega L_2 \pm i_1 \cdot \omega M,$$

$$i_1 + i_2 = i_A,$$

где  $i_A$  – ток, текущий через амперметр. Символ  $\pm$  означает, что имеются две возможности: либо магнитные поля внутри катушек складываются и усиливают друг друга (+), либо поля частично гасят друг друга (–). В первом случае (+) решение системы уравнений будет таким:

$$i_1 = 0, \quad i_2 = 4 \text{ А}.$$

Амперметр покажет 4 А, при этом ток будет течь только по второй катушке. А во втором случае (–) токи будут течь по двум катушкам:

$$i_1 = \frac{8}{3} \text{ А}, \quad i_2 = \frac{20}{3} \text{ А},$$

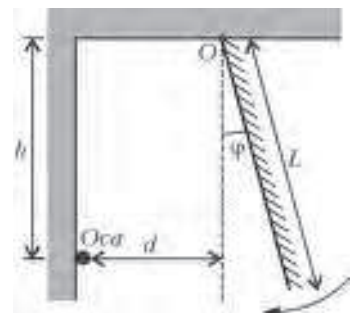
и суммарный ток будет равен

$$i_A = i_1 + i_2 = \frac{28}{3} \text{ А}.$$

Е.Паркевич

**Ф2402.** К потолку на шарнире подвешено плоское зеркало, представляющее собой тонкую прямоугольную пластину длиной  $L$ . Горизонтальная ось шарнира и одна сторона прямоугольника (зеркала) совпадают. На вертикальной стене, находящейся на расстоянии  $d$  от оси шарнира, сидит оса. Расстояние от потолка до оси равно  $h$ . Зеркало отклоняют от положения равновесия в направлении от стены на угол  $\alpha_0$ , удерживают его, а затем отпускают. Каковы скорость  $v$  и ускорение  $a$  изображения оси в момент времени, когда плоскость зеркала составляет угол  $\varphi$  с вертикалью? Трения нет.

Оса неподвижна, поэтому сначала нужно найти параметры движения зеркала: угловую скорость и угловое ускорение в момент времени, когда плоскость зеркала составляет с вертикалью угол  $\varphi$  (см. рисунок). Кача-



ющееся зеркало представляет собой физический маятник, у которого при отсутствии трения сохраняется механическая энергия. Эта энергия складывается из потенциальной энергии зеркала в поле тяжести Земли и кинетической энергии вращательного движения зеркала. Если массу зеркала обозначить  $M$ , то потенциальная энергия, отсчитываемая от положения, когда плоскость зеркала занимает горизонтальное положение, равна

$$-Mg \frac{L}{2} \cos \varphi.$$

В этот же момент времени кинетическая энергия равна

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \frac{M}{2L} \int_0^L x^2 dx = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \frac{L^2 M}{6}.$$

В соответствии с законом сохранения энергии,

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \frac{L^2 M}{6} - \frac{MgL}{2} \cos \varphi = -\frac{MgL}{2} \cos \alpha_0.$$

Отсюда можно найти угловую скорость вращения зеркала:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{3g}{L} (\cos \varphi - \cos \alpha_0)}.$$

Если продифференцировать полученное соотношение по времени (левую и правую его части), то найдем угловое ускорение зеркала:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{3g}{2L} \sin \varphi.$$

Изображение осы всегда находится на одном и том же

расстоянии от оси вращения зеркала, т.е. оно движется по окружности радиусом  $R = \sqrt{h^2 + d^2}$ . Угловая скорость движения отрезка, соединяющего ось вращения зеркала и изображение осы, в два раза больше угловой скорости вращения зеркала, поэтому скорость изображения равна

$$v = R \cdot 2\omega = 2\sqrt{\frac{3g(h^2 + d^2)}{L}} (\cos \varphi - \cos \alpha_0).$$

Угловое ускорение этого же отрезка, очевидно, тоже в два раза больше углового ускорения зеркала. Ускорение изображения осы складывается из двух составляющих: продольного (вдоль скорости движения) ускорения, равного

$$a_{\text{прод}} = 2R \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2\sqrt{h^2 + d^2} \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

и поперечного (к скорости), или центростремительного ускорения, равного

$$a_{\text{попер}} = R(2\omega)^2 = 4\sqrt{h^2 + d^2} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Окончательно, модуль ускорения изображения осы равен

$$a = \sqrt{a_{\text{прод}}^2 + a_{\text{попер}}^2} = \frac{g\sqrt{h^2 + d^2}}{L} \sqrt{9\sin^2 \varphi + 144(\cos \varphi - \cos \alpha_0)^2}.$$

*С.Варламов*

## Висячие мосты

*С.Муравьев*

В 1634–1636 годах Галилео Галилей написал свой главный труд по механике – «Беседы и математические доказательства двух новых наук». В этом труде он сформулировал теорию равноускоренного движения и заложил основы статики и сопротивления материалов – науки, занимающейся изучением деформаций тел. Галилей пишет в «Беседах»: «Вобъем в стену два гвоздя на одинаковой высоте над горизонтом и ... между одним и другим гвоздем подвесим тонкую цепочку... Цепочка эта, свисая, расположится в виде параболы». В другом месте этой же книги Галилей пишет по-другому: «... канат, натянутый в большей или меньшей степени, располагается по линии, весьма близкой к параболе. Сходство столь велико, что если вы начертите на вертикальной плоскости параболическую линию и ... подвесите цепочку, ... то вы увидите (укорачивая или удлиняя цепочку, смотря по надобности), что она очень близко подходит к параболе; при этом совпадение ее с параболой наблюдается тем большим, чем меньше кривизна параболы». В одной из рукописей Галилея есть чертеж, на котором изображена подвешенная в двух точках цепь и тут же нанесены точки, лежащие на параболе, соприкасающейся с цепью в нижней точке и имеющей в ней ту же кривизну.

Из чертежа видно хорошее совпадение параболы с цепью в нижней части и заметное различие этих линий при удалении от нижней точки цепи.

Так где же прав, а где ошибался Галилей?

В 1691 году, когда уже был разработан математический анализ, три выдающихся математика и физика Готфрид Лейбниц, Христиан Гюйгенс и Иоганн Бернулли практически одновременно и независимо друг от друга решили задачу «о цепной линии» – нашли уравнение однородной цепи, подвешенной в двух точках, расположенных на одинаковой высоте, и провисающей благодаря силе тяжести. Эта функция оказалась не параболой – она называется «гиперболический косинус». Цепная линия практически совпадает с параболой вблизи своего минимума, но на больших расстояниях от минимума она заметно отличается от параболы.

А что если рассмотреть цепочку, которая натягивается силой, пропорциональной не длине каждого звена цепочки, а равномерно распределенной по горизонтали вертикальной нагрузкой? С такой ситуацией мы сталкиваемся, например, в висячих мостах, когда основная нагрузка на цепь дается силой тяжести не цепи, а подвешенной к ней проезжей части моста.

Но сначала – немного о мостах. Все конструкции мостов можно разделить на балочные и висячие. В балочном мосту основным несущим элементом (проле-

том моста) является балка или ферма, лежащая на опорах моста. Самая опасная деформация балочного моста – деформация изгиба балки; для ее уменьшения пролеты нужно делать как можно короче. В случае же больших пролетов, под которые не удастся установить промежуточные опоры, используют висячие мосты. Основным несущим элементом висячего моста является гибкий элемент, который называется кабелем или цепью<sup>1</sup>, закрепленный на двух мощных опорах – пилонах, расположенных в начале и в конце моста, а проезжая часть подвешивается к цепи на вертикальных тросах. Такая конструкция устраняет наиболее опасные напряжения изгиба. Главные напряжения висячего моста – это напряжения растяжения в цепи и вертикальных тросах, которые не так опасны, как изгиб железобетонной балки, и которые современные высокопрочные стали легко выдерживают.



*Крымский мост, Москва*



*Живописный мост, Москва*

В настоящее время все мосты с большими пролетами являются висячими (или, как их вариант, вантовыми). Это, например, мост Джорджа Вашингтона через Гуд-

<sup>1</sup> Конечно, цепь у крупных висячих мостов – это совсем не цепь в бытовом понимании этого слова, а высокопрочный стальной трос толщиной несколько десятков сантиметров, способный выдержать массу проезжей части моста.



*Мост Сихоумэнь, Китай*

зон – первый мост с более чем километровым пролетом (длина основного пролета 1067 м, год открытия 1931, США), мост Золотые Ворота (1280 м, 1937 г., США), мост Акаси-Кайкё (1991 м, 1991 г., Япония), мост Сихоумэнь – первый мост с более чем двухкилометровым пролетом (2120 м, 2009 г., Китай) и многие другие.

Висячие мосты не требуют жесткого закрепления проезжей части на опорах и потому могут без ущерба для целостности конструкции демпфировать ветровые или сейсмические нагрузки. Тем не менее, ветер представляет собой основную угрозу висячему мосту: при сильном ветре мост ведет себя, как крыло самолета – в пролете под действием подъемной силы возникают напряжения, которые могут разрушить мост. Такой случай был в практике мостостроения – висячий Такоумский мост в США был разрушен при шторме 7 ноября 1940 года. К счастью, во время этого разрушения никто не погиб. Процесс разрушения Такоумского моста был снят на любительскую видеокамеру. Анализ этих материалов позволил инженерам понять недостатки конструкции висячих мостов и разработать механизмы их устранения. В последующие проекты вводилась защита от ветровых нагрузок, и крупных аварий с висячими мостами более не происходило. (Впечатляющую видеозапись разрушения Такоумского моста можно посмотреть в интернете на сайте <http://www.youtube.com/watch?v=Xxgobk5AFrI>)



*Мост Джорджа Вашингтона, США*





Мост Золотые Ворота, США

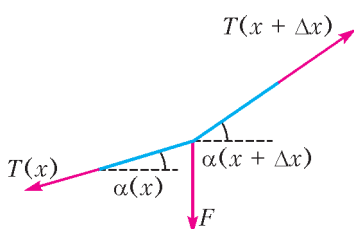


Мост Русский, Владивосток

В России висячие мосты широкого распространения не получили; тем не менее, ряд таких мостов есть и в нашей стране. Один из самых известных – это Крымский мост в Москве. Основной пролет этого моста имеет длину 168 метров, мост был открыт в 1938 году. В последнее время построен ряд вантовых мостов, использующих главную идею висячего моста. В вантовых мостах поддерживающие мост тросы – ванты – крепятся непосредственно к пилонам. Это Русский и Золотой мосты во Владивостоке (длина основного пролета 1104 м и 737 м соответственно), Кировский мост в Самаре (571 м), Живописный мост в Москве (410 м) и ряд других.

Теперь давайте оценим, как располагается в равновесии цепь висячего моста. Иными словами, приступим к решению задачи Ф2397.

Рассмотрим участок цепи между двумя вертикальными тросами, расположенными через один. Поскольку по условию масса цепи мала, а тросы расположены близко друг к другу, участки цепи между ближайшими вертикальными тросами можно считать прямыми (см. рисунок). На рассмат-



риваемый участок действуют две силы натяжения цепи (по краям) и сила со стороны вертикального троса (в центре). Условия равновесия этого участка цепи в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси имеют вид

$$T(x + \Delta x) \cos \alpha(x + \Delta x) = T(x) \cos \alpha(x),$$

$$T(x + \Delta x) \sin \alpha(x + \Delta x) = F + T(x) \sin \alpha(x).$$

Здесь  $T(x)$  – сила натяжения цепи как функция горизонтальной координаты  $x$ ,  $\alpha(x)$  – угол наклона цепи к горизонту как функция  $x$ ,  $\Delta x$  – расстояние между ближайшими тросами,  $F$  – сила натяжения вертикального троса (которая по условию одинакова для всех тросов и может быть связана с массой моста  $M$  и количеством вертикальных тросов  $N$ :  $F = Mg/N$ ). Деля первое уравнение на  $\Delta x$  и учитывая, что нам необходимо рассмотреть это выражение при малом расстоянии между тросами (в пределе при  $\Delta x \rightarrow 0$ ), получим (с использованием производной)

$$\frac{T(x + \Delta x) \cos \alpha(x + \Delta x) - T(x) \cos \alpha(x)}{\Delta x} = (T(x) \cos \alpha(x))' = 0.$$

Отсюда находим

$$T(x) \cos \alpha(x) = A,$$

где  $A$  – некоторая постоянная, имеющая смысл горизонтальной составляющей силы натяжения цепи, которая равна горизонтальной составляющей силы, действующей со стороны цепи на пилоны. Аналогичные вычисления со вторым условием равновесия дают  $(T(x) \sin \alpha(x))' = f$ , где  $f = F/\Delta x$  – удельная нагрузка на единицу длины моста, и

$$T(x) \sin \alpha(x) = fx + B,$$

где  $B$  – некоторая постоянная. Подставляя сюда найденное выше выражение для  $T(x)$ , получим

$$A \operatorname{tg} \alpha(x) = fx + B.$$

Но тангенс угла наклона цепи к оси  $x$  есть производная уравнения цепи по переменной  $x$ . Поэтому

$$Ay'(x) = fx + B,$$

где  $y(x)$  – уравнение цепи. Постоянную  $B$  найти легко: поскольку при  $x = 0$  (середина моста) цепь расположена горизонтально (координату  $x = 0$  имеет нижняя точка цепи), то  $B = 0$ . А так как производная уравнения цепи зависит от  $x$  линейно, то  $y$  зависит от  $x$  квадратично:

$$y(x) = \frac{f}{2A} x^2 + C,$$

где  $C$  – постоянная. Эта постоянная также должна быть выбрана равной нулю, поскольку при нашем выборе системы координат точке с координатой  $x = 0$  отвечает  $y = 0$ . Таким образом, цепь представляет собой параболу, уравнение которой таково:

$$y(x) = \frac{f}{2A} x^2.$$

Этот результат является приближенным: если масса цепи сравнима с массой проезжей части, то цепь ближе к цепной линии, если же масса цепи мала по сравнению с массой проезжей части, то цепь ближе к параболе.

...то, что проигрывается в силе, выигрывается в скорости.

Симон Стевин

В состоянии равновесия сила не производит реального действия; она вызывает лишь простое стремление к движению; но ее следует всегда измерять по тому эффекту, какой она вызвала бы, если бы она действовала при отсутствии каких-либо препятствий.

Жозеф Луи Лагранж

Движение системы материальных точек, связанных между собой произвольным образом..., в каждое мгновение происходит в наиболее совершенном... согласии с тем движением, каким обладали бы эти точки, если бы все они стали свободными, т.е. происходит с наименьшим возможным принуждением...

Карл Фридрих Гаусс

...для систем со связями аналитический подход оказывается более экономичным и простым. Заданные связи учитываются здесь естественным путем, так как рассматриваются движения системы лишь вдоль таких траекторий, которые не противоречат связям.

Корнелиус Ланцош

...статика достигла своего высшего развития в законе возможных перемещений... Частным случаем является закон рычага; другой пример — правило Архимеда...

Макс фон Лауэ

Такой подход именуют принципом виртуальной (т.е. возможной или воображаемой) работы, потому что для его применения мы обязаны представить себе, что наша система чуть сдвинулась, даже если она в действительности не двигалась или вовсе неспособна двигаться.

Ричард Фейнман

## А так ли хорошо знакомо вам движение со связями?

Выдержки из трудов целой шеренги видных ученых свидетельствуют об их долговременном — несколько столетий! — внимании к теме нашего сегодняшнего выпуска. В этом «конспекте» бросается в глаза кропотливый поиск наиболее общих закономерностей, лежащих в основе механики, так называемых первых принципов, или, по словам Лагранжа, некой «общей формулы». Из этих универсальных начал деятели науки надеялись вывести, как частные случаи, все многообразие открываемых законов.

И это им удалось! Создание аналитической механики — альтернативного ньютоновскому подходу — оказалось чрезвычайно продуктивным не только для решения собственных поставленных задач, но ее методы проросли из классической физики в современную, теснейшим образом связали разные исторические научные эпохи. Возможно, вам придется с этим столкнуться в будущем, и вы оцените как интеллектуальную мощь ваших предшественников, так и поразительную красоту полученных ими результатов.

Но это впереди — далеко и высоко. А что нам, еще не выросшим из «штанишек» школьной физики, делать сейчас? Вы не могли не заметить, что в эпиграфах постоянно упоминаются препятствия, ограничения, наложенные на положение или движение механических систем, — то, что называют *связями*. А это — не что иное, как наклонные плоскости, точечные шарниры, жесткие и легкие стержни, нерастяжимые и невесомые нити, идеальные блоки... Знакомые действующие лица? Так давайте сейчас без боязни «свяжемся» с героями нашей темы, ведь одно из значений слова «связь» — это контакт. Пусть он будет тесным и плодотворным.

### Вопросы и задачи

При необходимости воспользуйтесь подсказками из раздела «Ответы, указания, решения».

1. Доска длиной  $l$  одним концом лежит на цилиндре, а другой ее конец удерживается человеком так, что доска находится в горизонтальном положении. Человек начинает толкать доску вперед, из-за чего цилиндр катится без проскальзывания. Какой путь должен пройти человек, чтобы дойти до цилиндра?

2. Катушка с намотанной на нее нитью лежит на горизонтальном столе и может катиться без скольжения. Сначала нить тянут горизонтально со скоростью  $v$  «сверху» катушки, затем — с такой же горизонтальной скоростью «снизу». Куда и с какой скоростью будет двигаться ось катушки?

3. По внутренней поверхности закрепленного лежащего цилиндра радиусом  $2R$  катится без проскальзывания колесо радиусом  $R$ . Пусть центр колеса совершит один оборот вокруг центра цилиндра. Сколько раз обернется за это время колесо вокруг своей оси? По какой траектории будет двигаться какая-либо точка его обода?

4. Невесомый стержень с точечными грузами на концах соскальзывает по сторонам прямого двугранного угла. Чему равна скорость верхнего груза в тот момент, когда скорость нижнего груза горизонтальна и равна  $v_0$ , а стержень составляет с горизонтом угол  $\alpha$ ?

5. Какая точка стержня в условиях предыдущей задачи движется с минимальной скоростью? Чему равна эта скорость?

6. Может ли спортсмен на водных лыжах двигаться быстрее тянущего его катера? Может ли катер двигаться быстрее воднолыжника?

7. Равносторонний треугольник  $ABC$  скользит по поверхности стола. Скорость вершины  $A$  равна  $v$  и направлена к вершине  $B$ . Скорость вершины  $B$  равна  $2v$ . Найдите построением скорость вершины  $C$ .

8. Шар катится без скольжения вдоль ребра прямоугольного желоба  $ACB$ , как показано на рисунке 1,





Рис. 1

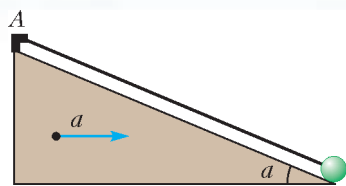


Рис. 2

причем расстояние  $AB$  равно радиусу шара. Какие точки шара обладают максимальной скоростью?

9. На неподвижном клине, образующем угол  $\alpha$  с горизонтом, лежит нерастяжимая веревка (рис. 2). Один из ее концов закреплен в точке  $A$ , к другому прикреплен небольшой грузик. Найдите построением ускорение грузика, пока он находится на клине, когда тот движется вправо с ускорением  $a$ .

10. На концах и в середине невесомого вертикального стержня укреплены три массивных шарика. Будут ли отличаться скорости шариков в момент их падения на горизонтальный стол в двух случаях: а) нижний шарик укреплен шарнирно; б) нижний шарик не закреплен, трение между ним и столом отсутствует?

11. Через блок переброшена нить с грузиками на концах. Ось блока поднимают вверх со скоростью  $v$ , а один из грузиков опускают с такой же скоростью. С какой скоростью поднимается второй грузик?

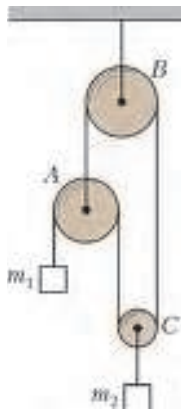


Рис. 3

12. Чему равны ускорения грузов в системе, изображенной на рисунке 3? Массой блоков, нитей, а также трением пренебречь. В какую сторону будут вращаться блоки при движении грузов?

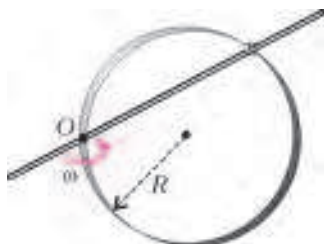


Рис. 4

13. На проволочное кольцо радиусом  $R$  надето маленькое колечко, которое может свободно скользить по кольцу под действием спицы, вращающейся вокруг точки  $O$  с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 4). Найдите скорость колечка для произвольного момента времени.

14. Найдите силу натяжения нити, связывающей оси шарниров верхнего ромба легкой шарнирной подвески, изображенной на рисунке 5. Масса груза  $m$ .

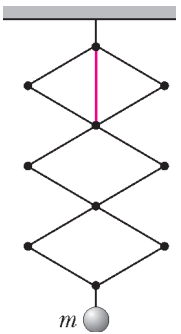


Рис. 5

### Микропыт

Зажмите между двумя горизонтальными деревянными линейками круглый карандаш, желателно толстый и шероховатый. Подвигайте линейки то в одну, то в разные стороны с различными скоростями. Какие виды движения карандаша вы сможете наблюдать?

### Любопытно, что...

...первая, хотя и скрытая, формулировка принципа виртуальных перемещений содержалась еще в «Физике» Аристотеля, что помогло ему вывести закон рычага. Тот же принцип в иной форме был использован Стевином при выводе законов равновесия блоков.

...Галилей, исправив Аристотеля, применил принцип виртуальных перемещений к расчету условий равновесия тела на наклонной плоскости, а также вывел с его помощью установленные Архимедом на иной основе законы гидростатического давления.

...хорошо знакомое школьникам «золотое правило механики» — выигрыш в силе компенсируется проигрышем в перемещении и наоборот — не что иное, как принцип виртуальных перемещений в простейшем случае.

...в 1717 году Иоганн Бернулли разработал новый подход к нахождению условий равновесия механической системы, опирающийся на свойство сил реакций связей: при малом отклонении системы от положения равновесия полная работа сил реакций связей равна нулю.

...перу Лагранжа принадлежит классическая работа «Аналитическая механика», в основу которой, в том числе, положен принцип виртуальных перемещений.

...понятие «абсолютно твердое тело» абсолютно необходимо при решении задач на кинематические связи. Оно представляет собой модель системы материальных точек, расстояния между которыми остаются неизменными. А это позволяет, например, использовать так называемое правило проекций, когда приравниваются проекции скоростей точек тела на связывающую их ось.

...при наличии жестких связей упрощаются условия равновесия: достаточно рассматривать только равновесие сил в тех направлениях, в которых связи не препятствуют движению (например, для поршня — вдоль цилиндра). Равновесие сил в других направлениях обеспечивается само собой, так как уже при малой деформации связи появятся силы реакции, уравновешивающие приложенную силу.

...принцип виртуальных перемещений — «первая ласточка» в целой «стае» родившихся затем так называемых вариационных принципов уже не только механики, но и оптики, электродинамики, термодинамики, а в XX веке — теории относительности и квантовой теории.

### Что читать в «Кванте» о движении со связями

(публикации не только последних лет)

1. «Кинематика и связи» — 1971, №2, с.44;
2. «Кинематические связи в задачах динамики» — 1988, №2, с.57;
3. «Равновесие механической системы и метод виртуальных перемещений» — 1989, №1, с.45;
4. «Эта «простенькая» кинематика» — 2008, №1, с.40;
5. «Скорость и ускорение» — 2011, №1, с.34;
6. «Волшебная формула, или Движение со связями» — 2012, №1, с.34;
7. «Физический калейдоскоп. Выпуск 3» — 2012, Приложение №3, с. 11, 50;
8. «Кинематика отрезка» — 2015, №3, с.43.

Материал подготовил А.Леонович



# Задачи

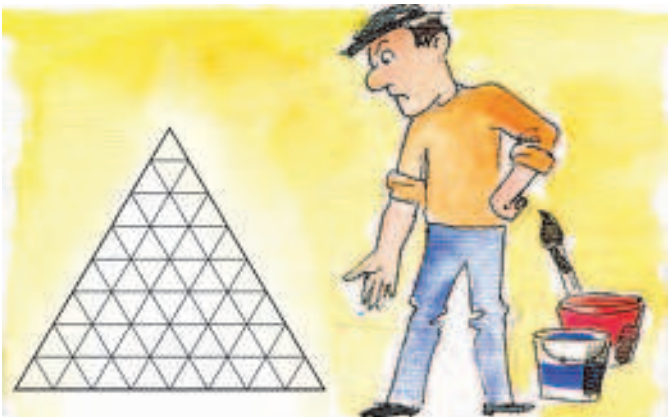
1. В маленьком городе есть только одна трамвайная линия. Она кольцевая, и трамваи ходят по ней в обоих направлениях. На кольце есть остановки Цирк, Парк и Зоопарк. От Парка до Зоопарка путь на трамвае через



Цирк втрое длиннее, чем не через Цирк. От Цирка до Зоопарка путь через Парк вдвое короче, чем не через Парк. Какой путь от Парка до Цирка — через Зоопарк или не через Зоопарк — короче и во сколько раз?

*А.Шаповалов*

2. Равносторонний треугольник со стороной 8 разделили на равносторонние треугольнички со стороной 1 (как показано на рисунке). Какое наименьшее количество треугольничков надо закрасить, чтобы все точки пересечения линий (в том числе и те, что по краям)



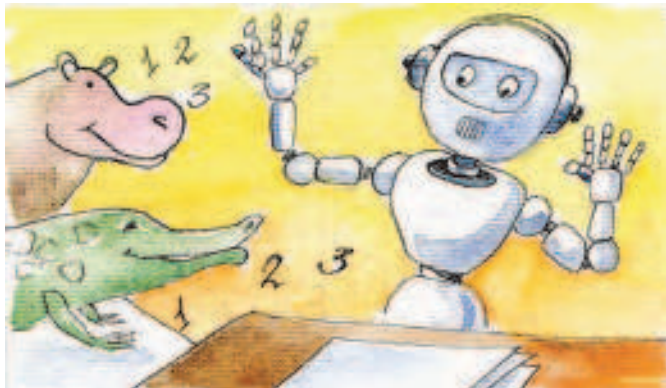
были вершинами хотя бы одного закрашенного треугольничка? Приведите пример и докажите, что меньшее количество треугольничков закрасить нельзя.

*Н.Авилов*

3. Робот придумал шифр для записи слов: заменил некоторые буквы алфавита однозначными или двузначными числами, используя только цифры 1, 2 и 3 (разные буквы он заменял разными числами). Сначала

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Эти задачи предлагались на XXVII Математическом празднике.



он записал шифром сам себя: РОБОТ = 3112131233. Зашифровав слова КРОКОДИЛ и БЕГЕМОТ, он с удивлением заметил, что числа вышли совершенно одинаковыми! Потом Робот записал слово МАТЕМАТИКА. Напишите число, которое у него получилось. Обоснуйте свой ответ.

*А.Хачатурян*

4. Сложите из трех одинаковых клетчатых фигур без оси симметрии фигуру с осью симметрии.

*Г.Мерзон*



5. Сорок детей водили хоровод. Из них 22 держали за руку мальчика и 30 держали за руку девочку. Сколько девочек было в хороводе?

*Е.Бакаев*



# Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы завершаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» или по электронному адресу: [savin.contest@gmail.com](mailto:savin.contest@gmail.com) (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

11. а) Есть 5 цифр «2» и одна цифра «5». Их разрешается выписать в любом порядке и между некоторыми цифрами ставить скобки и знаки арифметических действий. Как получить 2016?

б) Та же задача, но есть 4 цифры «2» и две цифры «5».

*Т.Волосникова, В.Гилязев*

12. В клетках таблицы  $7 \times 7$  записаны действительные числа. Петя сосчитал суммы чисел по строкам, а Вася – суммы по столбцам. Могло ли случиться, что 14 сумм, которые у них получились, являются последовательными натуральными числами?

*Фольклор*

13. Какое наименьшее значение может принимать

выражение  $\frac{(x+y+|x-y|)^2}{xy}$  при положительных  $x$  и  $y$ ?

*С.Дворянинов*

14. Для каких  $n$  существует выпуклый  $n$ -угольник с вершинами в узлах сетки, все стороны которого равны 5?

*П.Кожевников*

15. На симпозиум приехали 2015 ученых. Самый крупный ученый сообщил, что у любых двух из них есть среди собравшихся ровно два других общих знакомых. Не ошибся ли крупный ученый?

*Фольклор, по мотивам*

*LXXV Московской математической олимпиады*

## Сплошные неприятности

*И.АКУЛИЧ*

В СТАТЬЕ «ИНДЮКИ ПРОТИВ РЯБЧИКОВ» ИЗ СЕНТЯБРЬСКОГО номера журнала «Квантик» за 2015 год излагался способ решения «на пальцах» такой задачи:

**На рынке купили 100 птиц за 100 рублей: индюков – по 30 рублей за штуку, цыплят – по рублю за штуку и рябчиков – по рублю за 3 штуки. Сколько каких птиц купили?**<sup>1</sup>

Основная идея в следующем: так как цыплята продаются по рублю, то изменение их количества приведет к такому же изменению (в рублях) суммарной стоимости. Поэтому главная проблема – «противостояние» индюков и рябчиков. Добавление (или изъятие) одного индюка ведет к увеличению (соответственно, уменьше-

«Сплошные неприятности» – именно так назывался один из рассказов американского фантаста Генри Каттнера про семейку мутантов Хогбенгов. Его героям постоянно приходилось преодолевать всякие трудности и препятствия. Чем-то похожим мы и займемся в этой статье.

<sup>1</sup> Имеется в виду, что среди купленных птиц были представители всей перечисленной фауны.





нию) стоимости по сравнению с количеством птиц на  $30 - 1 = 29$ , а добавление (изъятие) тройки рябчиков (их-то по три продают) вызывает, наоборот, снижение (рост) стоимости по сравнению с поголовьем на  $3 - 1 = 2$ . Поэтому каждые 2 индюка «уравновешиваются» 29-ю тройками рябчиков (получается  $29 \cdot 3 = 87$  штук). Оставшиеся «места» заполняем рублевыми цыплятами в количестве  $100 - 2 - 87 = 11$ . Готово!

Очень наглядно предложенный способ иллюстрируется с помощью системы уравнений. Если обозначить количество индюков, цыплят и рябчиков через  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно, то получим

$$\begin{cases} x + y + z = 100, \\ 30x + y + \frac{1}{3}z = 100. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, имеем:  $29x - \frac{2}{3}z = 0$ , или  $3 \cdot 29x = 2z$ , т.е. то же самое соотношение между индюками и рябчиками, которое мы нашли «вручную».

Заметим, что нам крупно повезло – в условии имеются два счастливых совпадения: суммарное поголовье птиц совпадает с их суммарной стоимостью, а также имеются птицы (цыплята), цена которых ровно по рублю. Поэтому при вычитании имеет место очень удачное взаимное уничтожение *сразу в двух местах*, что и позволяет быстро и безболезненно одолеть проблему.

А если бы было не так? Представьте себе, что нам предложили похожую задачу, но в ней присутствует та или иная *неприятность*. Какая именно? Рассмотрим возможные варианты.

**Первая неприятность:** общая сумма в рублях не совпадает с количеством птиц. Например, пусть птиц, как и прежде, 100, но купили их за 200 рублей. Здесь наши рассуждения не подходят – в правой части при вычитании ноль не образуется. Что ж делать-то?

Не беда, можно применить такой способ. Количество птиц, как видим, *меньше*, чем сумма денег. В то же время мы помним, что при добавлении каждой тройки рябчиков общая стоимость возрастает на рубль, и потому расхождение между указанными величинами уменьшается на 2. А поскольку изначально это расхождение равнялось  $200 - 100 = 100$ , то, добавив полсотни «фиктивных» троек рябчиков (т.е.  $50 \cdot 3 = 150$ ), мы доведем и суммарное количество, и суммарную стоимость до 250 (проверьте!). А дальше спокойно идем по проторенной дорожке. Соотношение между количеством индюков и рябчиков, конечно, сохраняется, но здесь с учетом возросшего суммарного количества птиц возможны уже два варианта: 2 индюка + 87 рябчиков либо вдвое больше, т.е. 4 индюка + 174 рябчика (все остальное – цыплята). Однако вспомним, что среди рябчиков имеется 150 «добавленных», поэтому первую возможность придется отбросить (ибо  $87 < 150$ ). А вторая – вполне подходит, и, вернув тот самый 150-рябчиковый «долг», получаем ответ: было 4 индюка и 24 рябчика. Остальные  $100 - 4 - 24 = 72$  – цыплята. Проверим общую стоимость:  $30 \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 24 + 72 = 200$  рублей – тютелька в тютельку!

Правда, в измененных данных нам тоже повезло: оказалось возможным компенсировать расхождение *целым* числом рябчиков (100 удачно поделилось на 2). А если бы нет? Допустим, общая сумма составила не 200, а 201 рубль. Здесь тоже не стоит унывать. Добавим для начала одного... индюка! Небаланс при этом, конечно, возрастет аж до  $101 + 29 = 130$ , но он зато станет *четным*! Поэтому добавка еще  $130 : 2 = 65$  троек рябчиков (или  $65 \cdot 3 = 195$ ) доведет и поголовье, и сумму до  $100 + 1 + 195 = 296$ . Далее – как и прежде, но вариантов здесь становится три, в которых индюков 2, 4 или 6, а рябчиков 87, 174 или 261 соответственно. Из них придется забраковать первые два, где рябчиков не более 195 (а также надо бы отбросить и те, где индюков не больше одного – но такого, к счастью, не наблюдается), и после «обратного вычета» ранее добавленных птиц имеем опять-таки единственный корректный ответ: 5 индюков + 66 рябчиков. Подсчитайте сами, сколько при этом получается цыплят, и убедитесь в правильности общей стоимости.

Таким образом, неприятность с расхождением поголовья и стоимости преодолима без особого труда. Но радоваться рано, потому что нас ждет...

**Вторая неприятность:** нет птиц рублевой стоимости. Пусть, например, индюки стоят по 10 рублей за штуку, а цыплята – по 2 рубля за штуку (все остальное – как в первоначальном условии). Здесь, как видим, нельзя отбросить из первичного рассмотрения цыплят – их потом корректно не добавишь!

Возможный вариант решения проблемы: довести стоимость цыплят до одного рубля. Как? Да очень просто: давайте изменим все цены так, чтобы цыплята стали по рублю; в данном случае – снизим вдвое. На количество птиц каждого вида это никак не повлияет, но зато цены индюка, цыпленка и рябчика будут 5 рублей, 1 рубль и  $\frac{1}{6}$  рубля соответственно (т.е. по рублю за 6 штук). Суммарная же стоимость снизится до 50 рублей. Небаланс, как видим, составил  $100 - 50 = 50$ , причем здесь цена *меньше* поголовья, вследствие чего для «выравнивания» нельзя обойтись дешевыми рябчиками – придется добавлять дорогих индюков. Поскольку  $5 - 1 = 4$ , то при добавлении каждого индюка расхождение снижается на 4. Однако 50 не делится на 4. К счастью, мы уже знаем выход: «досыплем» нужное количество рябчиков. Ясно, что придется приплюсовать две шестерки (т.е. 12) рябчиков, при этом цена возрастет на 2, а количество птиц – на 12, так что небаланс станет равен  $50 - 2 + 12 = 60$ . Последнее значение превосходно компенсируется  $60 : 4 = 15$ -ю индюками. Итак, мы добавили 12 рябчиков и 15 индюков, в результате чего и количество птиц, и их стоимость возросли до  $100 + 12 + 15 = 127$ .

Теперь, когда все, что надо, уравнилось, осталось найти «равновесное» соотношение между индюками и рябчиками. Как легко видеть (и мы, в общем-то, это уже, в основном, выяснили), добавление одного индюка меняет баланс на 4, а шестерки рябчиков – на 5 (но в другую сторону). Поэтому на каждых 5 индюков надо взять 4 шестерки рябчиков, или 24 штуки. Получаем



набор возможностей: 5 индюков + 24 рябчика, 10 индюков + 48 рябчиков, 15 индюков + 72 рябчика и, наконец, 20 индюков + 96 рябчиков. Осталось отобрать из них те, где индюков больше 15, а рябчиков – больше 12. Пригоден, как видно, лишь последний вариант, и, изъяв из него индюшино-рябчиковую «задолженность», получаем, что индюков было  $20 - 15 = 5$ , а рябчиков  $96 - 12 = 84$ . Остальные  $100 - 5 - 84 = 11$  – цыплята. Проверим стоимость (сразу в первоначальных ценах):  $10 \cdot 5 + 2 \cdot 11 + \frac{1}{3} \cdot 84 = 100$  рублей, как и должно быть!

Что, сложновато? Да, не сахар. В уме, без бумаги и карандаша, такие вычисления заставят изрядно поворачивать мозгами.<sup>2</sup> Но убедитесь сами, что при «стандартном» составлении уравнений возни окажется ничуть не меньше!

Впрочем, это еще не все, потому что впереди...

**Третья неприятность:** представляет собой комбинацию первых двух. Иначе говоря, и число птиц не совпадает с общей стоимостью, и птицы однорублевой цены отсутствуют.

Как ни странно, здесь решение следует выполнять точно по тем же правилам, что и при *второй* неприятности, – и дополнительных усложнений от этого не ожидается. Помните, мы там меняли все цены, чтобы появились рублевые цыплята? При этом нарушалось равенство между поголовьем и суммарной стоимостью. А здесь оно изначально отсутствует, так что хуже уж точно не станет! Для примера, давайте возьмем условие из второй неприятности, но пусть общая сумма составляет 120 рублей.

Итак, сначала снизим вдвое все цены, и они станут такими же, как мы уже находили: индюк – 5 рублей, цыпленок – 1 рубль, рябчики – 1 рубль за 6 штук. А вот суммарная стоимость снизится в данном случае до 60 рублей. Небаланс равен  $100 - 60 = 40$ ; на наше счастье, он делится на 4, и цена тоже *меньше* поголовья. Поэтому рябчиков добавлять не надо, а следует лишь добавить  $40 : 4 = 10$  индюков. В результате чего коли-

<sup>2</sup> И главная здесь проблема – не забыть промежуточные результаты.

чество птиц (а также их стоимость) возросли до  $100 + 10 = 110$ .

Возможных комбинаций индюков и рябчиков на этот раз имеется три: 5 индюков + 24 рябчика, 10 индюков + 48 рябчиков и 15 индюков + 72 рябчика. Только в последнем индюков больше 10. Совершив традиционное «изъятие», находим окончательно, что индюков было  $15 - 10 = 5$ , рябчиков 72, а остальные  $100 - 5 - 72 = 23$  – цыплята. Проверка стоимости:  $10 \cdot 5 + 2 \cdot 23 + \frac{1}{3} \cdot 72 = 120$  рублей – ажур!

Как видим, особого усложнения при переходе от второй неприятности к третьей, представляющей собой комбинацию первой и второй, не происходит. Говоря языком юристов, имеет место *частичное поглощение меньшего наказания большим*.

Так что, в принципе, при решении подобных задач (эквивалентных системе из двух уравнений с тремя натуральными неизвестными) можно обойтись, собственно, без этих самых уравнений. А что при этом проще – оставим на усмотрение читателя, и чтобы предоставить ему возможность самому потренироваться, вспомним другую задачу из упомянутой нами статьи:

**Некогда в Константине граде 20 человек мыяхуся в бане, в них же бяху христиане, турки же и евреи, а установлено имати за баню с турченина по полденге, а с христианина по денге, с евреина же по три денги. Но всех бывших в бане есть 20 человек, дали же бяху обще от всех 20 денег. И ведателно есть, колико бяху христиан, турок же и евреев.**

Как ее решать – было рассмотрено в той же упомянутой статье из «Квантика». Но давайте теперь применим к условию поочередно все три перечисленные неприятности – и попробуйте-ка их одолеть:

1) Пусть общая сумма составила не 20, а 30 денег (а остальное не изменилось).

2) Пусть стоимость помывки христианина составила не 1 денгу, а 2 денги (остальное не изменилось).

3) И то, и другое: общая сумма составила 30 денег, а стоимость помывки христианина – 2 денги (остальное не изменилось).

## Брелок для ключей и ... физика

С.ДВОРЯНИНОВ

КАЗАЛОСЬ БЫ, КАКАЯ СВЯЗЬ МОЖЕТ БЫТЬ МЕЖДУ такой повседневной безделицей, как брелок (рис.1), и физической наукой, одной из самых важных частей естествознания?! Оказывается, принцип действия этой вещицы основан на законах механики. Расскажем об этом, причем никаких формул писать не будем, а дадим качественное описание действия этого механизма. Неплохо, если вы найдете такой брелок и поделаете все то, о чем пойдет речь дальше.

Основа любого брелка – это кольцо, на которое нанизывают ключи. Чтобы ключи можно было надевать на брелок и снимать с него, кольцо делают не сплошным, а с разъемом. Будем говорить, для определенности, что брелок представляет собой полукольцо. Разъем брелка состоит из двух частей – *АВ* и *СМ*, они хорошо видны на фотографии на рисунке 1 и схематично показаны на рисунке 2. Рычаг *АВ* имеет форму дуги кольца, которая может вращаться вокруг



Рис. 1

точки  $A$ . Будем считать, что точка  $A$  и правая половина кольца неподвижны. Когда брелок закрыт (рис.3), рычаг  $AB$  занимает крайнее правое положение и располагается на кольце. К середине дуги  $AB$  – точке  $M$



Рис. 3

– прикреплен стержень  $CM$ . Этот стержень, подобно аркану, можно накинуть на небольшой крючок, имеющийся на полукольце. Чтобы брелок закрыть, надо рычаг  $AB$  поворачивать по часовой стрелке. Будем делать это медленно и посмотрим, что при этом происходит с треугольником  $ASM$ . Длины двух его сторон –  $CM$  и  $MA$  – не меняются, а угол  $SAM$  увеличивается. Это приводит к тому, что сторона  $SA$  уменьшается. Значит, расстояние между концевыми точками полукольца, т.е. расстояние  $AC$ , сокращается и полукольцо сжимается – точка  $C$  «подтягивается» к точке  $A$ .

Легко понять, что кольцо сжимается за счет работы, которую мы совершаем против силы упругости. Прилагаемая нами в точке  $B$  сила вращает рычаг  $AB$  вокруг точки  $A$  по часовой стрелке, а сила упругости полукольца, приложенная в точке  $M$ , стремится повернуть его против часовой стрелки. Все сильнее и сильнее поворачивая рычажок  $AB$ , мы совершаем все большую и большую работу. Затрачиваемая нами мускульная энергия переходит в потенциальную энергию сжимаемого полукольца. При этом треугольник  $ASM$  все плотнее и плотнее прижимается к прямой  $AC$ . Если же рычаг  $AB$  выпустить из рук, то полукольцо разожмется.



Рис. 4

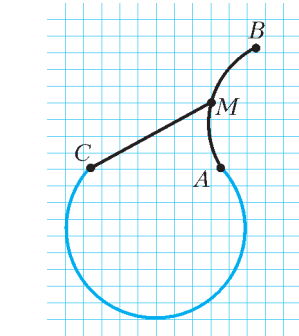


Рис. 2

торый момент точка  $M$  окажется на прямой  $AC$  (рис.4). В таком положении плечо силы упругости равно нулю, ибо сила упругости действует вдоль прямой  $AC$ . В этот момент мы можем не давить на рычаг  $AB$  – наша механическая система будет находиться в положении равновесия. При этом точки  $A$  и  $C$  отстоят одна от другой на самое малое расстояние, полукольцо сжато наибольшим образом, накопленная им потенциальная энергия – наибольшая из всех возможных.

Это состояние нашей механической системы можно сравнить с положением бочки, которую мы закатали по дороге на вершину холма. Сила тяжести тянет бочку назад, вниз. В нашем случае при повороте рычага  $AB$  точка  $M$  движется по окружности с центром в точке  $A$  и радиусом  $AM$  по часовой стрелке, а сила упругости тянет точку  $M$  назад. Бочка на вершинке холма находится в положении равновесия, которое неустойчиво. Малейшее внешнее воздействие приведет к тому, что бочка покатится вниз – вперед или назад. Такая же ситуация и с рычагом  $AB$ . Если его чуть-чуть отклонить от достигнутого положения равновесия, то он либо вернется в исходное положение, и брелок окажется открытым, либо под действием силы упругости продолжит движение по часовой стрелке до тех пор, пока не совпадет с полукольцом, и брелок окажется закрытым. Заметим, что положение рычага  $AB$ , при котором брелок закрыт, является устойчивым. Действительно, если оттянуть рычаг от полукольца и отпустить, то он со щелчком вернется на полукольцо.

В этой простейшей механической системе мы наблюдаем интересную общую закономерность. Система имеет три положения равновесия, причем два из них устойчивы – когда брелок открыт или когда брелок закрыт. Используются именно устойчивые положения равновесия. И впрямь, открытый брелок в результате небольшого случайного воздействия не может сам по себе закрыться, а закрытый брелок не может сам открыться. Устойчивые положения равновесия характеризуются тем, что в них энергия системы оказывается минимальной. А между этими двумя положениями равновесия есть еще одно – неустойчивое равновесие, о котором сказано выше. Чтобы перевести систему из одного устойчивого положения в другое, требуется приложить определенную силу, совершить определенную работу и перейти через неустойчивое положение равновесия.

Таким образом, брелок позволил нам вспомнить многое из школьной физики: работу, рычаг, силу упругости, потенциальную энергию, положения равновесия. И не только физику, но и геометрию треугольника. Поистине, «в капле воды отражается целый мир!»

Продолжим поворачивать рычаг  $AB$  – в неко-

# А ЧТО ИЗМЕНИТСЯ, ЕСЛИ...?

**Е. СОКОЛОВ**

ОДНАЖДЫ МЕНЯ ПОПРОСИЛИ ПРИДУМАТЬ ЗАДАЧУ ДЛЯ ВОСЬМИКЛАССНИКОВ НА ТЕМУ «ФОТОМЕТРИЯ». Через некоторое время задача была готова.

## Задача про Буратино

Буратино заметил, что если вместе с лампой  $L_1$  включить лампу  $L_2$  (лампы одинаковые), то освещенность точки  $O$  (рис. 1) увеличится на 80%.

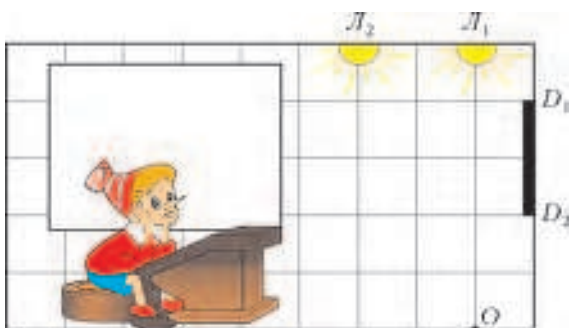


Рис. 1

– Интересно, – подумал Буратино, – на сколько бы увеличилась после этого освещенность в точке  $O$ , если бы черная школьная доска  $D_1D_2$  превратилась в зеркало?

По дороге из школы домой Буратино встретил своих старых знакомых лису Алису и кота Базилио.



Рис. 2

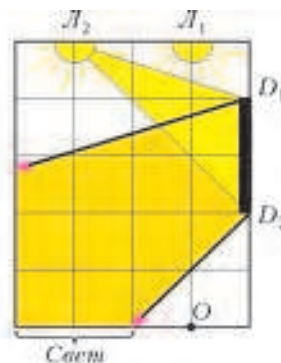
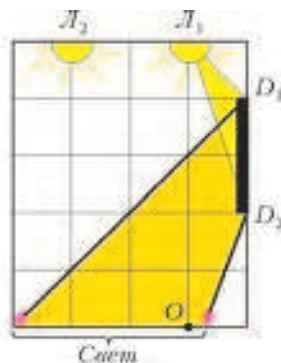
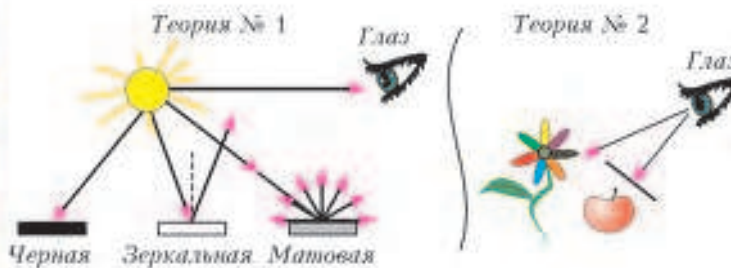


Рис. 3



– Здравствуй, наш умный и благоразумный Буратино! Что нового ты сегодня придумал на уроках?

– Я придумал задачу про лампочки и превращение классной доски в зеркало, – гордо сказал Буратино и быстро нарисовал на песке рисунок (см. рис. 1).

– Умный и благоразумный Буратино, а знаешь ли ты правильный ответ?

– Еще не знаю, но думаю, скоро узнаю.

– Конечно, ты скоро узнаешь правильный ответ, ведь с тобой твои самые лучшие друзья! И стоять это будет тебе совсем недорого – только те два сольдо, что у тебя в кармане.

– Смотри, – продолжала, не останавливаясь, тараторить лиса Алиса. – Пусть первая лампочка создает в точке  $O$  освещенность  $E_1 = E_0$ . Тогда, по условию задачи, вторая лампочка дает в этой точке освещенность  $E_2 = 0,8E_0$ . Когда доска превращается в зеркало, она отражает все падающие на нее лучи: и от первой лампы, и от второй лампы. Так вот, если зеркало отражает все падающие на него лучи, то света в точке  $O$  станет ровно в два раза больше, т.е.  $E_{\text{кон}} = 2(E_1 + E_2) = 3,6E_0$ . А это значит, что освещенность увеличилась в два раза, т.е. на 100%, и твои денежки стали моими! А ну давай сюда мои два сольдо!

– А вот и нет! А вот и нет! – вдруг закричал кот Базилио, который успел к этому времени нарисовать на песке рисунок 2. – Отражаются от зеркала, конечно, все падающие на него лучи, но вот попадают после этого в точку  $O$  только лучи, идущие от лампы  $L_1$ . Поэтому освещенность в точке  $O$  станет равной  $E_{\text{кон}} = (E_1 + E_2) + E_1 = 2,8E_0$  вместо начального значения  $E_{\text{нач}} = E_1 + E_2 = 1,8E_0$ . А это значит, что освещенность увеличится в  $E_{\text{кон}}/E_{\text{нач}} = 2,8E_0/1,8E_0 = 1,56$  раза, т.е. на 56%. Так что два сольдо становятся моими! Моими!

– Ах, так! Получи, умник, – и лиса Алиса вцепилась в кота Базилио. В поисках истины друзья покатались по земле...

Читатель, несомненно, знает, что диспуты этих уважаемых знатоков отличаются крайней темпераментностью и длительностью. Поэтому наш Буратино оставил лису и кота и поспешил домой, чтобы, наконец, узнать правильный ответ.

Вы, конечно, знаете, что уже в силу своего сложившегося реноме лиса Алиса и кот Базилио всегда просто вынуждены давать неправильные ответы. Какие именно ошибки сделали эти персонажи теперь?

Напомним основные положения, которые лежат в основе геометрической оптики (рис.3).

Свет – это поток лучей. Их излучают светящиеся тела (источники света) в бесконечном количестве и во все стороны. А несветящаяся поверхность становится освещенной, когда на нее падают световые лучи. Мы видим предметы, когда световые лучи, приходящие от них, попадают нам в глаз. Так говорит теория №1. Но есть в геометрической оптике и теория №2, она говорит все



то же самое, кроме одного. Она считает, что световые лучи выходят из наших глаз и ощупывают все вокруг. Однако знайте, насколько бы сильно не отличались эти теории с житейской точки зрения, при решении задач они полностью эквивалентны. Поэтому выбирайте ту из них, которая позволит вам быстрее построить нужный луч.

### Упражнения

1. На фотографии (см. рис. 3), словно в подтверждение теории №1, отчетливо видны солнечные лучи, пробивающиеся из-за туч. Но вот вопрос: почему же мы их видим, если они идут мимо наших глаз?

2. На рисунке 3 показано, что происходит со световыми лучами, которые падают на черную, зеркальную и матовую поверхности. Сформулируйте самостоятельно правила взаимодействия световых лучей с различными поверхностями.

3. Какую из трех поверхностей – черную, зеркальную, матовую – наблюдатель сможет увидеть из любой точки, где бы он ни стоял?

Напоминание закончено. Теперь об ошибках лисы Алисы и кота Базилио.

Лиса правильно сказала, что все 100% лучей, падающих на зеркало, будут отражаться от него. Это верно уже по определению зеркальной поверхности. Но Алиса не учла того, что отраженные лучи могут просто пройти мимо точки  $O$ . Кот Базилио правильно построил ход отраженных от зеркала пучков лучей (см. рис. 2). Из его построений видно, что после отражения в точку  $O$  попадут действительно только лучи первой лампы. Но это вовсе не означает, что такие лучи добавят к освещенности такой же вклад  $E_1 = E_0$ , какой дают лучи, идущие от первой лампы напрямую. На самом деле их вклад будет меньшим. Вот об этом кот Базилио и не подумал. Поразмышлять о том, от чего зависят вклады в освещенность, создаваемые различными источниками света, вы сможете при выполнении двух следующих заданий.

### Упражнения

4. Обложку знаменитой поэмы «Пропала Мальвина, невеста моя» Пьеро решил украсить своей фотографией. В фотостудии (рис. 4,а) для достижения нужного эффекта фотограф по очереди включает три одинаковые лампы  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$ . И Буратино снова замечает, что освещенность в точке  $O_1$ , находящейся прямо под первой лампой, увеличивается в 1,8 раза при включении второй лампы и еще в 1,26 раза при включении третьей.

– Интересно, – подумал Буратино, – а как увеличивается освещенность при включении второй и третьей ламп в точке  $O_2$ , находящейся под второй лампой?

5. Небольшая площадка на полу освещается четырьмя одинаковыми источниками света (рис. 4,б). Расставьте источники в порядке убывания освещенностей, которые они создают на этой площадке.

А как же Буратино все-таки узнает правильное решение своей задачи? Кто расскажет его ему?

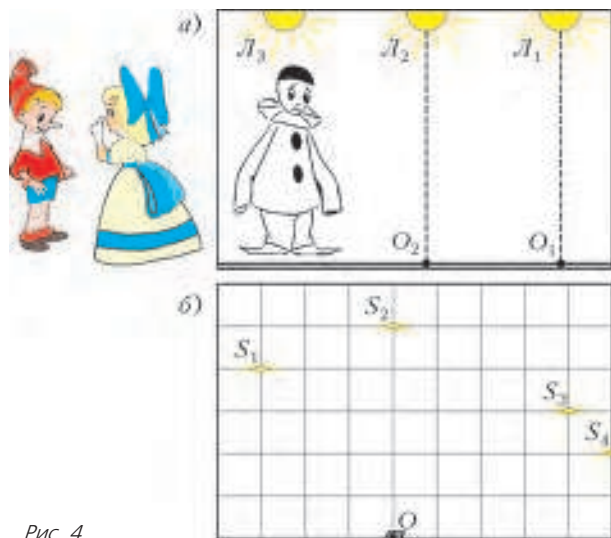


Рис. 4

Давайте переплетем две линии: линию Буратино и линию его старшего брата Пинокио. Будем считать, что Буратино позвонил Пинокио и рассказал ему о задаче. А Пинокио все рассказал своей знакомой Фее с лазурными волосами. А вот феям точно по плечу самые сложные задачи.

### Лекция, которую прочитала Фея с лазурными волосами

В чем главная сложность геометрической оптики? В том, что она работает с бесконечным количеством лучей. Разумеется, рассмотреть бесконечное количество лучей никому не по силам. Поэтому искусство решения задач геометрической оптики сводится к умению выбрать нужный луч. Иногда в этом помогает так называемое правило крайнего:

*Если не знаешь с чего начать решение, рассмотри самые крайние элементы (самый левый, самый правый, самый большой, самый маленький и т.д.).*

Попробуйте самостоятельно найти «крайние» лучи в следующих заданиях.

### Упражнения

6. Постройте область, освещенную лучами факела, отраженными от зеркала  $D_1D_2$  (рис. 5,а). Освещают ли они золотой ключик, лежащий на полу? Пламя факела считайте точечным источником света  $S$ .

7. Видит ли Карабас Барабас в зеркале  $D_1D_2$  золотой ключик, лежащий на полу (рис. 5,б)? Считайте, что глаза Карабаса Барабаса расположены в той же точке  $S$ , что и факел Буратино.

8. Два зеркала  $D_1D_2$  и  $D_3D_4$  расположены так, как показано на рисунке 5,в. Карабас Барабас смотрит в зеркало  $D_1D_2$ . На какое минимальное расстояние следует сместиться Буратино и его друзьям, чтобы Карабас Барабас не увидел их в зеркале? При решении Карабаса Барабаса считайте точкой  $K$ , а Буратино и его друзей – точкой  $B$ . Размер одной клетки 100 метров.

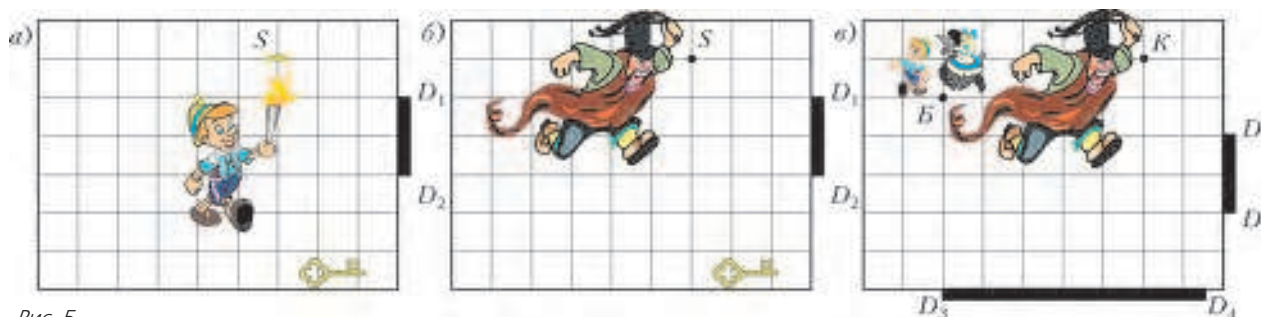


Рис. 5



Рис. 6

Второй метод, с которым полезно познакомиться, заключается в том, чтобы данную нам систему «реальный источник света – зеркало» превратить в систему «мнимый источник света – стена с окном» (рис. 6). Делается это в два приема.

Во-первых, строим в зеркале изображение нашего источника  $S$ , называем его мнимым источником  $S'$  и считаем, что из него, как и из настоящего источника, выходят световые лучи. Вы знаете, где находится изображение предмета в зеркале? На таком же расстоянии от зеркала, что и сам предмет, только с другой стороны – в «Зазеркалье» (рис. 6,а).

Во-вторых, плоскость зеркала превращаем в непрозрачную воображаемую стену, а зеркало – в окно в этой стене (рис. 6,б). В чем смысл такого построения? А в том, что теперь, проводя по линейке все лучи, которые выходят из мнимого источника и проходят через окно, мы построим все множество лучей, отраженных от зеркала. И заметьте, нам не придется утруждать себя построением углов падения и отражения. Нужный нам луч выделен на рисунке 6,б, красным цветом. Для его построения мы просто провели по линейке прямую через точки  $S'$  и  $A$ .

Попробуйте, используя этот прием, решить задачу про Пиноккио.

**Упражнение 9.** Пиноккио, у которого в Стране Развлечений выросли ослиные уши, хочет рассмотреть себя в наклонно висящем зеркале  $D_1D_2$  (рис. 7). Сможет ли он увидеть себя в

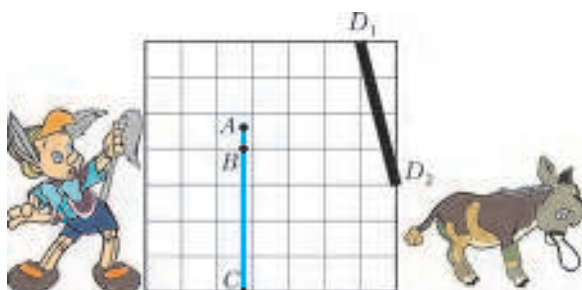


Рис. 7

нем полностью? Пиноккио считайте отрезком  $AC$ , а его глаза – расположенными в точке  $B$ .

Ну, а теперь решение нашей задачи про Буратино становится совсем простым. Превращаем стену с зеркалом в стену с окном и добавляем две мнимые лампы  $L'_1$  и  $L'_2$  (рис.8).

**Упражнение 10.** Используя линейку, убедитесь еще раз, что лучи от  $L'_1$  попадают в точку  $O$ , а от  $L'_2$  – нет.

Осталось догадаться, какой вклад в освещенность точки  $O$  даст мнимая лампа  $L'_1$ . Догадались? Конечно, такой же, какой дает лампа  $L_2$ ! Смотрите, площадка на которой находится точка  $O$ , расположена по отношению к лампе

$L'_1$  точно так же (с точностью до симметрии), как она расположена по отношению к лампе  $L_2$  (см. рис. 8). Одинаковы и расстояние от площадки до обоих источников, и угол падения лучей. А это значит, что вклады обоих источников в освещенность этой площадки будут одинаковыми. Поэтому после превращения доски в зеркало освещенность площадки возрастет на  $E_2 = 0,8E_0$ , т.е. станет равной  $E_{\text{кон}} = (E_1 + E_2) + E_2 = 2,6E_0$  вместо  $E_{\text{нач}} = E_1 + E_2 = 1,8E_0$ . Освещенность увеличится в  $E_{\text{кон}}/E_{\text{нач}} = 2,6E_0/1,8E_0 = 1,44$  раза, или на 44%.

Это и есть ответ.

Ну, вот, пожалуй, и все. Хотя нет, хотелось бы еще вооружить наших читателей общим методом сравнения освещенностей, чтобы им была по силам любая задача на эту тему.

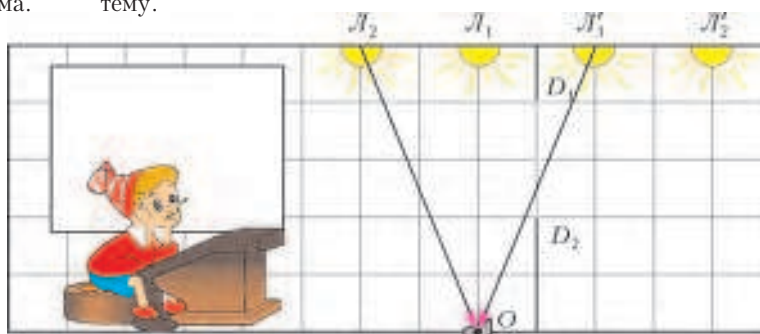


Рис. 8

### Общий метод сравнения освещенностей

Мы надеемся, что кто самостоятельно выполнил предложенные упражнения, тот уже укрепился во мнении, что освещенность любой площадки зависит от двух факторов: расстояния до источника света и угла падения лучей. Это правильное мнение. Подкрепим его соответствующими закономерностями.

1) *Освещенность площадки обратно пропорциональна квадрату расстояния от нее до источника.*

Другими словами, если освещенность площадки, которая расположена на расстоянии  $R_0$  от точечного источника, равна  $E_0$ , то освещенность площадки, которая расположена на расстоянии  $R$  от источника, будет равна

$$E = \frac{R_0^2}{R^2} E_0.$$

Такое уменьшение освещенности связано с расходимостью световых лучей при их удалении от источника.

2) *Если одна из площадок расположена перпендикулярно падающему лучу, а вторая – под углом, то освещенность второй площадки будет равна*

$$E = E_0 \cos \theta,$$

где  $\theta$  – угол между нормалью к площадке и лучом.

Этот факт связан с увеличением при повороте площади освещаемой поверхности.

Доказать оба утверждения не составит труда, если выполнить нужные рисунки и вспомнить простые факты из геометрии. Рекомендуем читателям проделать это самостоятельно.

# Свет из-за угла, или Как Школьник в класс торопился

**А. СТАСЕНКО**

**Н**ЕТРУДНО УСЛЫШАТЬ ЗВУК ОРКЕСТРА, ИГРАЮЩЕГО ЗА углом здания. Тут все понятно: это звуковые волны обгибают препятствие. Но ведь свет – тоже волны (хотя и совсем другой природы – электромагнитной). Значит, и они могут обогнуть угол? Тут надо всерьез разобраться.

Прежде всего вспомним характерные масштабы – длину волны  $\lambda$  этих волн, иначе говоря, их пространственный период. Звуки, воспринимаемые человеком, имеют частоту колебаний в пределах  $\nu = 20\text{--}20000$  Гц. Поскольку скорость звука в воздухе равна приблизительно  $v = 300$  м/с, то длина волны, т.е. расстояние, проходимое за период  $T = 1/\nu$ , составит  $\lambda = vT = \frac{v}{\nu} = 0,015\text{--}15$  м – от комариного писка до глубочайшего баса. А длина волны видимого глазом света лежит в пределах  $0,4\text{--}0,8$  мкм, т.е. на много порядков меньше, чем для звуковых волн. И поскольку звук из-за угла слышен часто, а свет из-за угла виден редко, то в этом различии длин волн что-то есть!

Вспомним классический дифракционно – интерференционный опыт: на непрозрачный экран со щелью шириной  $b$  слева нормально падает волна с длиной  $\lambda$  (рис.1). Сразу за

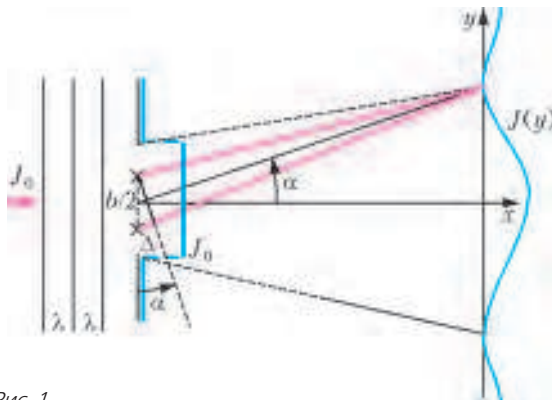


Рис. 1

экраном распределение интенсивности волн (плотности потока энергии  $J$ ,  $[J] = \text{Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ ) будет такое же, как и в падающей волне, т.е.  $J_0$ . Но что будет «далеко» от экрана?

Тут можно привести известные интерференционные соображения. Заменяем плоскость щели двумя параллельными нитевидными источниками цилиндрических волн, отстоящими друг от друга на расстоянии  $b/2$ . Тогда в точку с координатами  $(x, y)$ , достаточно удаленную от экрана, волны придут с разностью хода, приблизительно равной

$$\Delta = \frac{b}{2} \sin \alpha. \text{ И если}$$

$$\Delta = \frac{\lambda}{2}, 3 \frac{\lambda}{2}, 5 \frac{\lambda}{2}, \dots,$$

то волны погасят друг друга. Это значит, что под углами, для

которых

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{b}, 3 \frac{\lambda}{b}, \dots,$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{\lambda}{b},$$

интенсивность волны будет нулевой.

Все это известный школьный материал. Для нас тут важно появление отношения  $\frac{b}{\lambda}$  – результат оказался зависящим не только от характеристики волны, но и от геометрического размера объекта (в данном случае от ширины щели).

А если заменить щель круглым отверстием диаметром  $D$ ? Тут мало что изменится. Правда, теперь прежнее соотношение для угла, соответствующего первому минимуму освещенности, примет вид

$$\sin \alpha_1 = 1,22 \frac{\lambda}{D}.$$

Но осталось неизменным главное: отношение длины волны к размеру объекта, с которым она взаимодействует.

Значит, если теперь та же волна упадет на футбольный мяч (рис.2), то на его края тоже должно произойти отклонение лучей на угол порядка

$$\alpha \sim \frac{\lambda}{D}. \quad (*)$$

Здесь мы учли, что при малых значениях угла  $\sin \alpha \approx \alpha$ , и пренебрегли коэффициентом 1,22 – как настоящие физики, выделили суть явления. С другой стороны, из рисунка 2

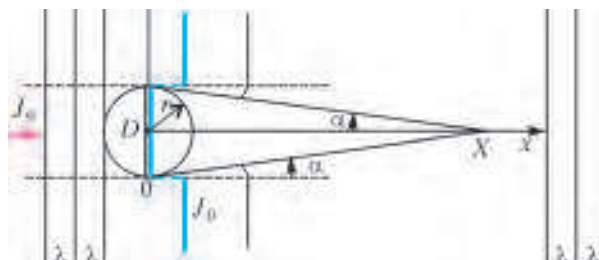


Рис. 2

можно выразить угол  $\alpha$  так:

$$\alpha \sim \frac{D/2}{x} = \frac{r}{x}.$$

Сравнивая это выражение с предыдущим, получим

$$x \sim \frac{r^2}{\lambda} = X.$$

Это очень интересное соотношение, в котором связаны уже три характерных размера: длина волны, радиус препятствия и расстояние до точки наблюдения. Из уважения к последнему мы обозначили его заглавной буквой  $X$ . В частности, полагая радиус мяча равным  $r = 0,1$  м, а длину волны равной  $\lambda = 0,5$  мкм, получим

$$X = \frac{0,1^2 \text{ м}^2}{0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}} = 2 \cdot 10^4 \text{ м} = 20 \text{ км}.$$

Судя по рисунку 2, начиная с этого расстояния, т.е. при  $x > X$ , на экране в центре изображения мяча вместо тени будет светлое пятно. Естественно, никто не рассматривает футбольный мяч с такого расстояния. Но если вместо него взять дробинку радиусом  $0,1$  мм, т.е. в тысячу раз меньшего размера, то  $X$  станет в миллион раз меньше, т.е. будет  $0,02$  м, что вполне удобно для классических лабораторных экспериментов.



Таким образом, мы нашли критерий, по которому можно различать понятия «близко» ( $x < X$ ) и «далеко» ( $x > X$ ). В первом случае можно условно говорить об области тени, во втором случае шар становится как бы прозрачным – с точки зрения волны, обогнувшей его со всех сторон. В случае же  $x \ll X$  – совсем «близко» – тень будет резкой, и мы вступаем в область геометрической оптики.

Перед сном полезно рассмотреть, например, взаимодействие радиоволн, идущих от далеких галактик или от Солнца, с таким «шариком», как Луна ( $r = 1700$  км,  $\lambda = 10^{-1}$  м).

Дальше – больше. Согласно де Бройлю (Луи де Бройль, 1892–1987), любому телу, обладающему импульсом  $mv$ ,

можно сопоставить волну длиной  $\lambda = \frac{h}{mv}$ , где  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – постоянная Планка (Макс Планк, 1858–1947). Так, если электрон прошел разность потенциалов  $U$  и приобрел скорость  $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ , то его дебройлевская

длина волны будет равна  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2eUm}}$ . А значит, возможен электронный микроскоп! Если же вместо электрона взять атомарные или молекулярные ионы – получим ионный микроскоп! И такие микроскопы действительно существуют.

А если Школьник массой  $m = 50$  кг поспешит в класс со скоростью  $v = 10$  м/с, то его дебройлевская длина волны составит

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}}{50 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}} \sim 10^{-36} \text{ м},$$

и угол дифракции на двери шириной 1 м, согласно выражению (\*), будет порядка

$$\alpha \sim \frac{10^{-36} \text{ м}}{1 \text{ м}} = 10^{-36} \text{ рад} \approx 6 \cdot 10^{-35} \text{ градуса}.$$

Впрочем, это едва ли заметят его приятели. Потому что Школьник, в отличие от электрона или иона, это макрообъект.

Говоря по-научному, мы рассмотрели дифракцию волн на препятствиях. Но уже при анализе рисунка 1 были использованы интерференционные соображения. Тем самым, мы убедились в том, что интерференция и дифракция – единое явление. Если Вы об этом громко скажете в автобусе, Вам уступят место. А если осознаетесь в этом на собеседовании в Московском физико-техническом институте – Вас назовут студентом.

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

# Форма кривой вращающегося троса

**А. КНЯЗЕВ**

**П**ОДВЕСИМ ГИБКУЮ НЕРАСТЯЖИМУЮ МАССИВНУЮ нить, трос или цепочку на конце вертикального вала, который может вращаться с постоянной угловой скоростью (рис.1). По мере раскручивания вала нить постепенно вовлекается в движение, изгибается и через некоторое время принимает некоторую стационарную, не изменяющуюся со временем форму (моду). Наблюдения показали, что кроме тривиальной, но очень неустойчивой формы цепочки в виде висящего вертикального отрезка возможны еще две стационарные формы плоского расположения троса. Причем переход от одной формы к другой происходит при изменении скорости вращения практически скачком, такие изменения называют бифуркациями.

При малых скоростях вращения цепочка представляет некоторую кривую, удаляющуюся от оси вращения с увеличением длины кривой, отсчитываемой от точки закрепления. Эта форма является образующей некоторой конической поверхности вращения, поэтому временно будем называть ее конической.

Эта работа была выполнена в 2013 году при участии моего ученика, учащегося 11 класса Саратовского Лицея прикладных наук Александра Куликова, ныне студента МФТИ.

При увеличении скорости возникает следующая форма – нить как бы разделяется на несколько частей, которые, напоминают отрезки синусоиды тем больше, чем длиннее нить. Условно назовем эту форму стоячей волной – по аналогии с возбужденной струной. Струна и вращающийся канат, несмотря на, казалось бы, разные физические причины возбуждения, действительно имеют некоторое сходство (особенно, если на конце каната закреплен массивный груз).



Рис. 1

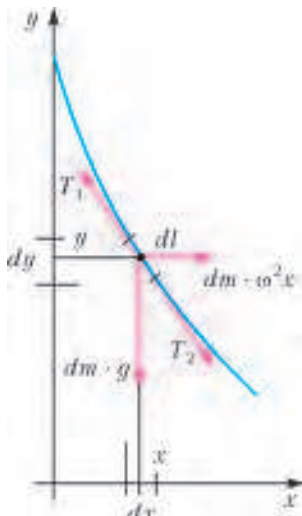


Рис. 2

Однако задачей нашего исследования мы выбрали определение именно конической формы вращающегося троса со свободным концом, как наиболее интересной для нас. (По крайней мере, мы не нашли подобного исследования ни в известных нам учебниках по теоретической механике, ни в интернете.)

**Теоретические рассуждения.** Обсудим причины возникновения конической формы вращающегося троса. Рассмотрим бесконечно малый произвольный отрезок вращающегося троса длиной  $dl$  и массой  $dm$  и запишем для него условие

стационарного равновесия под действием на него сил тяжести ( $dm \cdot g$ ), натяжения соседних участков троса ( $T_1$  и  $T_2$ ) и центробежной силы инерции ( $dm \cdot \omega^2 x$ ) (рис.2). Уравнение моментов сил относительно, например, верхней точки отрезка дает

$$dm \cdot g \cdot \frac{dx}{2} = dm \cdot \omega^2 x \cdot \left| \frac{dy}{2} \right|.$$

Здесь мы пренебрегли малым отличием направлений и численных значений сил натяжения  $T_1$  и  $T_2$  в начале и в конце выделенного бесконечно малого отрезка. Если теперь учесть, что  $dy = -|dy|$ , то уравнение моментов приобретает вид

$$dy = -\frac{g}{\omega^2} \frac{dx}{x}.$$

Этим уравнением можно определить форму кривой  $y(x)$ . Проинтегрируем в определенных пределах:

$$\int_{y_0}^y dy = -\frac{g}{\omega^2} \int_{x_0}^x \frac{dx}{x}.$$

В результате получаем искомое выражение для формы вращающегося троса:

$$y = y_0 - \frac{g}{\omega^2} \ln \frac{x}{x_0}.$$

Понятно, что теперь вместо временного термина «коническая форма» можно употреблять термин «логарифмическая форма».

Видно (рис.3), что независимо от своей длины трос при увеличении частоты вращения уходит от оси, стремясь вытянуться в горизонтальной плоскости вращения. При

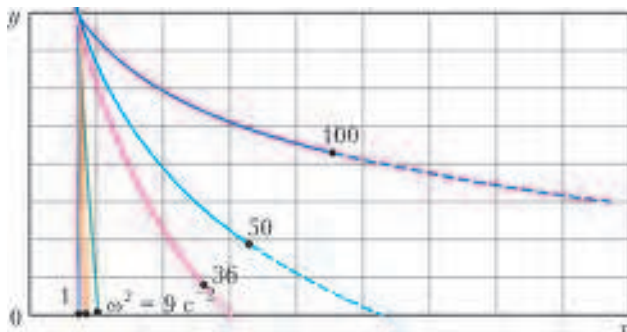


Рис. 3

построении кривых константы были выбраны в значительной мере произвольно:  $y_0 = 0,4$  м,  $x_0 = 0,002$  м, а квадрат частоты  $\omega^2$  изменялся от 1 до  $100 \text{ с}^{-2}$ . Как мы увидим дальше из опыта, при значении квадрата частоты около  $100 \text{ с}^{-2}$  (при выбранных начальных значениях координат) логарифмическая форма троса может нарушиться. Но может и сохраниться, и тогда при высоких скоростях трос будет вращаться практически в одной плоскости, как праща или как нить газонокосилки-стримера.

Математически происхождение величин  $y_0$  и  $x_0$  понятно – они отражают процедуру интегрирования и свойства получившейся логарифмической функции. Однако для нашей задачи у них есть и некоторый физический смысл, связанный с реализацией данного режима вращения троса. Дело в том, что у идеального троса, подвешенного строго по оси вращения (самая первая, тривиальная форма), отсутствуют причины возникновения отклоняющей его центробежной силы: вдоль всего троса действует лишь сила тяжести, направленная вниз. Вывести трос из положения равновесия можно, либо сообщив хотя бы одному из его участков горизонтальную скорость, либо расположив трос на некотором расстоянии  $x_0$  от оси. Экспериментально идеальные условия вращения троса без отклонения реализовать довольно сложно – эта форма является неустойчивой. Даже если утяжелить отрезок конечной длины ( $y_0$ ), то при вращении трос через некоторое время (зависящее от скорости вращения) придет в круговое движение из-за неизбежного раскачивания установившейся и действия сил сопротивления воздуха. Эти две причины придают движению трехмерный характер – трос приобретает форму сложной трехмерной спиральной конической пружины. Еще через некоторое время нижние участки троса начинают значительно отставать от верхних и приходят в режим «заметаящего» движения, пересекая в какой-то момент ось вращения. После этого трос приобретает форму стоячих волн с несколькими самопересечениями. Если же трос заранее закреплён с некоторым смещением от центра вращения, то исследуемый нами режим устанавливается быстро, при неизменной скорости вращения.

**Эксперимент.** Как уже говорилось, мы сосредоточили внимание именно на логарифмической форме вращающегося троса. Для реализации стабилизированной частоты вращения мы выбрали массивный вращающийся диск электрофона для раскручивания грампластинок, имеющий три фиксированные скорости вращения: 33 об/мин, 45 об/мин и 78 об/мин. На диске укрепили металлическую арку с отверстием для подвеса массивного троса – металлической цепочки. Высота арки позволяет использовать отрезок цепочки не более 35–38 см. Делать арку более высокой не позволяет конструкция крепления подпружиненной платформы электрофона. Высокая арка начинает неизбежно раскачиваться, а закрепление платформы приводит к возбуждению высокочастотного дрожания всей конструкции, нарушающего стабилизацию частоты вращения двигателя.

Первые эксперименты оказались неудачными. При небольших угловых скоростях вращения ( $3,45 \text{ с}^{-1}$ ,  $4,71 \text{ с}^{-1}$ ) движение цепочки, тщательно вывешенной почти по центру вращения (отклонение  $x_0$  не более 2 мм), укладывалось в полученные теоретические представления. При значениях квадрата частоты  $11,9 \text{ с}^{-2}$  и  $22,18 \text{ с}^{-2}$  отклонение конца цепочки от оси составляло около 3–5 мм и при вращении отмечалось небольшое покачивание цепочки. Однако при  $\omega^2 = 66,7 \text{ с}^{-2}$  теоретические предсказания явно разрушались – цепочка раскручивалась, затем быстро (менее чем за десяток оборотов) переходила в режим трехмерной коничес-

кой спирали и далее зацеплялась за арку примерно на 2/3 своей длины. После этого происходило закручивание вокруг опоры. Согласно теории, подобные явления должны были наступить при более чем вдвое больших значениях квадрата частоты вращения.

Наблюдения привели нас к мысли о возможном резонансе между качанием платформы и собственными маятниковыми колебаниями цепочки. Действительно, собственную частоту колебаний цепочки можно оценить по приближенной формуле для физического маятника, считая цепочку почти прямым стержнем (в начале опыта):

$$\omega_0 \approx \sqrt{\frac{Mgy_0}{I}} \approx \sqrt{\frac{3g}{y_0}} = 8,7 \text{ с}^{-1}.$$

Это довольно близко к значению 8,17 с<sup>-1</sup>, соответствующему скорости вращения диска 78 об/мин. Таким образом, влияние резонанса вполне возможно.

Для устранения этих нежелательных возмущений мы тщательнее выровняли платформу электрофона на лабораторном столе. Кроме того, установили шкалу сантиметровой линейки над верхом вращающейся арки – для контроля ухода оси при вращении из-за несимметричности изготовленной арки и прочих факторов. После этого раскачивания почти прекратились, движение стабилизировалось, а результаты наблюдений, с учетом реального отклонения точки закрепления троса  $x_0 \approx 10 \text{ мм}$ , практически приблизились к теоретическим предсказаниям.

На рисунке 4 приведен фрагмент одной из фотографий, подготовленный для цифровой обработки, а результаты измерений по фотографиям сведены в таблицу. Наиболее

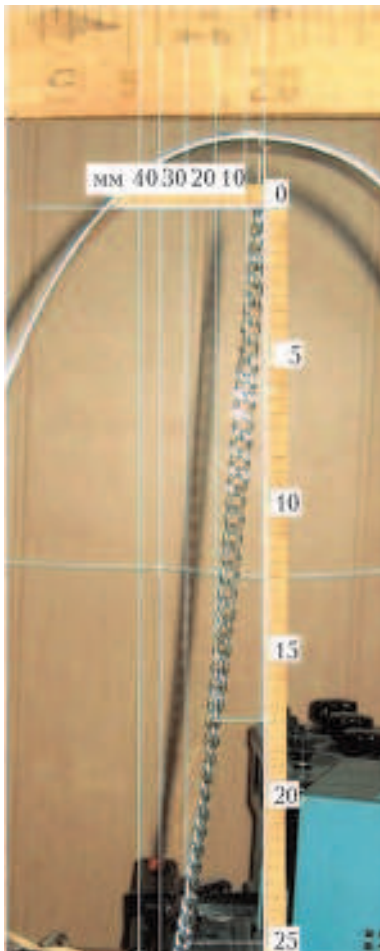


Рис. 4

сложным этапом оказалось точное проведение координатной оси  $y$  и измерение величины  $x_0$ . Небольшие отклонения в ориентации снимка и оптические искажения перспективы ведут к ошибкам в определении координат, особенно для конца цепочки (в таблице они отмечены звездочками). Кроме того, нижний кончик цепочки представляет маятник малой длины и поэтому постоянно покачивается.

В целом при анализе нескольких фотографий точность отсчета измерения линейных величин в эксперименте мы оцениваем не выше  $\pm 5 \text{ мм}$ . Верхняя строчка таблицы соответствует левой части уравнения теоретической кривой

$$y_0 - y = \frac{g}{\omega^2} \ln \frac{x}{x_0}.$$

Самая нижняя строчка таблицы соответствует правой части уравне-

$y - y_0, \text{ м}$	0	0,06	0,17	0,25	0,28*	0,31**
$x, \text{ мм}$	10	16	27	37	46	53
$x/x_0$	1	1,6	2,7	3,7	4,6	5,3
$\ln(x/x_0)$	0	0,47	0,99	1,31	1,50	1,67
$0,15 \ln(x/x_0)$	0	0,07	0,15	0,20	0,23	0,25

ния, рассчитанной по измеренным значениям  $x$  и при заданном значении  $x_0$ , оцененном в ходе эксперимента и по киносъемке (здесь  $\frac{g}{\omega^2} \approx 0,15$ ). При идеальном соответствии проведенных измерений значения самой верхней и самой нижней строчек таблицы должны совпадать.

Видно, что даже при той невысокой точности, которую позволила техника нашего эксперимента, соответствие его результатов с теоретическими представлениями можно считать удовлетворительным, разве что исключая самое последнее – на самом конце цепочки.

**Наблюдения при высоких скоростях вращения.** Попытка экспериментально исследовать тонкую легкую нить приводит к возникновению явления, при котором начинает развиваться распространяющаяся вдоль нити волна. Как известно, длина волны в струне ( $\lambda$ ), связана с частотой возмущения ( $\omega$ ), силой натяжения ( $T$ ) и погонной массой нити ( $\rho$ ) соотношением

$$\lambda \sim \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

(его легко получить, например, из соображений размерности). Для нашего случая получаем

$$\lambda \sim \frac{\sqrt{gL}}{\omega} \approx 28 \text{ см}.$$

Это очень близко к тому, что видно на рисунке 5 (примерно три полуволны на длине 38 см). При малых значениях массы нити роль центробежной силы падает, а длина волны может оказаться меньше длины струны.

По-видимому, учет волновых явлений может быть важен при изучении сценария возникновения второй из устойчивых форм троса – на высоких частотах. Именно волновые свойства троса могут определять продольный масштаб конфигурации. Но эта тема уже выходит за рамки данной статьи.



Рис. 5

**Выводы.** Итак, вращающийся трос действительно имеет три моды плоского вращения. Из них одна – тривиальная и неустойчивая, а две другие обладают устойчивостью относительно малых возмущений. При изменении частоты вращения в сторону увеличения переходная форма кривой становится трехмерной, но при установившемся движении с постоянной скоростью вновь оказывается плоской.



# Изогонально сопряженные точки

П. КОЖЕВНИКОВ

РАССМОТРИМ ТРЕУГОЛЬНИК  $ABC$  И ВОЗЬМЕМ ТОЧКУ  $P$  ВНУТРИ НЕГО. ОТРАЗИМ ПРЯМУЮ  $AP$  СИММЕТРИЧНО ОТНОСИТЕЛЬНО БИССЕКТРИСЫ УГЛА  $BAC$ , ПОЛУЧИМ ПРЯМУЮ  $l_a$ . АНАЛОГИЧНО ПОСТУПИМ С ПРЯМЫМИ  $BP$  И  $CP$  – ОТРАЗИМ ИХ ОТНОСИТЕЛЬНО СООТВЕТСТВУЮЩИХ БИССЕКТРИС И ПОЛУЧИМ ОТРАЖЕННЫЕ ПРЯМЫЕ  $l_b$  И  $l_c$  (рис. 0). ЗАМЕЧАТЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА УТВЕРЖДАЕТ: ПРЯМЫЕ  $l_a, l_b, l_c$  ПЕРЕСЕКАЮТСЯ В ОДНОЙ ТОЧКЕ.

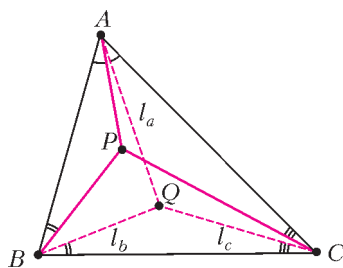


Рис. 0

Эта точка  $Q$  называется *изогонально сопряженной* для точки  $P$  (относительно данного треугольника  $ABC$ ). Легко видеть, что изогональное сопряжение взаимно, т.е. если точка  $Q$  является изогонально сопряженной для точки  $P$ , то и, наоборот,  $P$  является изогонально сопряженной для  $Q$ . На самом деле теорема верна не только для точек  $P$  внутри треугольника, но и для любых точек  $P$ , не лежащих на прямых  $AB, BC, CA$  и описанной окружности треугольника  $ABC$ .

## Упражнения

1. Какая точка изогонально сопряжена центру вписанной окружности треугольника?
2. Докажите, что центр описанной окружности и ортоцентр изогонально сопряжены.
3. Докажите, что если точка  $P$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ , то отраженные прямые  $l_a, l_b, l_c$  параллельны. (Можно сказать, что для точки  $P$  описанной окружности треугольника  $ABC$  изогонально сопряженная точка бесконечно удалена.)

Мы не будем ставить задачу просто доказать теорему, это делается во многих книгах.<sup>1</sup> Вместо этого предложим коллекцию конструкций, которые покажут, что изогональное сопряжение может разнообразно проявиться в геометрии, а заодно и дадут разные способы доказательства теоремы.

<sup>1</sup> Одно из самых известных и коротких доказательств – с помощью следующей теоремы Чевы в форме синусов. Пусть  $X, Y, Z$  – точки на сторонах  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$  соответственно. Прямые  $AX, BY, CZ$  пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\frac{\sin \angle BAX}{\sin \angle CAX} \cdot \frac{\sin \angle CBY}{\sin \angle ABY} \cdot \frac{\sin \angle ACZ}{\sin \angle BCZ} = 1.$$

Первые два способа, приведенные в этой статье, описаны, например, в книге [1] и статье [2]. Способ 3 заметил Е.Бакаев, которому автор также признателен за ценные замечания, позволившие улучшить текст статьи. Способ 8 автор узнал от И.Богданова. Сюжет из способа 9 заметил А.Акопян. Остальные способы автор обнаружил сам, хотя наверняка многие из них были известны ранее.

Чтобы не отвлекаться на разбор разных случаев расположения точек, будем предполагать, что данный треугольник  $ABC$  остроугольный и точка  $P$  лежит внутри него. Рассуждения, которые мы проводим, несложно изменить и применить к любому случаю расположения точек. Итак, начнем.

\*\*\*

В первых четырех способах важную роль будут играть проекции точки  $P$  на прямые  $BC, CA, AB$ . Обозначим их через  $P_a, P_b, P_c$ .

**Способ 1.** Положим  $PP_a = d_a, PP_b = d_b, PP_c = d_c$  (рис. 1,а).<sup>2</sup> Отношение расстояний от любой точки прямой  $AP$  до прямых  $AC$  и  $AB$  равно  $d_b : d_c$ . Из симметрии следует, что

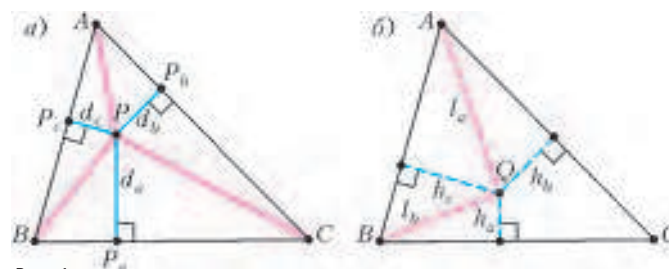


Рис. 1

для отраженной прямой  $l_a$  будет наоборот: отношение расстояний от точки прямой  $l_a$  до прямых  $AC$  и  $AB$  равно  $d_c : d_b$ . Более того, если точка  $X$  лежит внутри угла  $BAC$  и отношение расстояний от нее до прямых  $AC$  и  $AB$  равно  $d_c : d_b$ , то  $X$  лежит на прямой  $l_a$  (докажите это!).

Теперь рассмотрим точку пересечения  $Q$  прямых  $l_a$  и  $l_b$  (рис.1,б) и воспользуемся указанными соображениями. Пусть  $h_a, h_b, h_c$  – расстояния от точки  $Q$  до прямых  $BC, CA, AB$  соответственно. Тогда  $h_a : h_c = d_c : d_a, h_c : h_b = d_b : d_c$ . Перемножив, получим  $h_a : h_b = d_b : d_a$ , значит,  $Q$  лежит на прямой  $l_c$ .

**Способ 2.** Пусть отраженная прямая  $l_a$  пересекает отрезок  $P_bP_c$  в точке  $Z$  (рис.2,а). Четырехугольник  $AP_bPP_c$  вписанный, так как его противоположные углы прямые. Отсюда  $\angle P_cP_bA = \angle P_cPA$ . Треугольники  $AP_cP$  и  $AZP_b$  подобны по двум углам, значит,  $\angle AZP_b = 90^\circ$ . Таким образом,  $l_a$  – перпендикуляр к прямой  $P_bP_c$ , проходящий через точку  $A$ .

Продлим отрезок  $PP_b$  на его длину за точку  $P_b$ , получим точку  $P'_b$ , которая симметрична точке  $P$  относительно прямой  $AC$  (рис.2,б). Аналогично, пусть точка  $P'_c$  симметрична точке  $P$  относительно прямой  $AB$ , а точка  $P'_a$  симметрична точке  $P$  относительно прямой  $BC$ . Из симметрии  $AP'_b = AP = AP'_c$ , значит,  $A$  равноудалена от точек  $P'_b, P'_c$  и, следовательно,  $A$  лежит на серединном перпендикуляре к отрезку  $P'_bP'_c$ . Далее,  $P_bP_c$  – средняя линия треугольника  $PP'_bP'_c$ , поэтому  $P_bP_c \parallel P'_bP'_c$ , откуда  $l_a \perp P'_bP'_c$ . Тем самым, прямая  $l_a$  и есть серединный перпендикуляр к отрезку  $P'_bP'_c$ . Аналогично получаем, что прямые  $l_b$  и  $l_c$  – серединные перпендикуляры к отрезкам  $P'_cP'_a$  и  $P'_aP'_b$ . Таким образом,

<sup>2</sup> Тройка расстояний  $(d_a, d_b, d_c)$  определяет так называемые *трилинейные координаты* точки  $P$ .

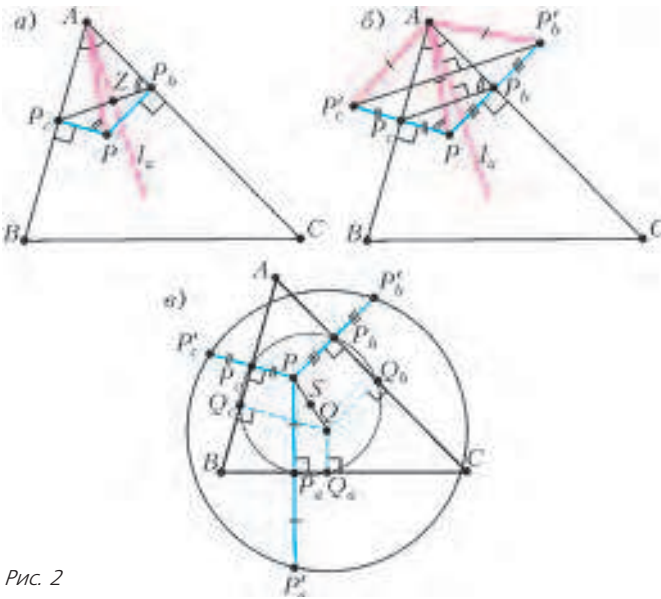


Рис. 2

прямые  $l_a, l_b, l_c$  пересекаются в одной точке – в центре описанной окружности треугольника  $P'_aP'_bP'_c$ .

Итак, получается, что точка  $Q$ , изогонально сопряженная точке  $P$ , – центр описанной окружности треугольника  $P'_aP'_bP'_c$  (рис.2,в). Отсюда выведем важное **следствие**: *проекции изогонально сопряженных точек на стороны треугольника лежат на одной окружности*. Сделаем гомотетию с центром  $P$  и коэффициентом  $1/2$ . При этом  $Q$  перейдет в середину  $S$  отрезка  $PQ$ , а треугольник  $P'_aP'_bP'_c$  – в треугольник  $P_aP_bP_c$ . Значит,  $S$  – центр описанной окружности треугольника  $P_aP_bP_c$ . Пусть  $Q_a, Q_b, Q_c$  – проекции точки  $Q$  на прямые  $BC, CA, AB$ . Проекция точки  $S$  на прямую  $BC$  – это середина отрезка  $P_aQ_a$ . Тем самым,  $S$  равноудалена от точек  $P_a$  и  $Q_a$ . Проведя такие же рассуждения для пар точек  $P_b, Q_b$  и  $P_c, Q_c$ , видим, что точка  $S$  равноудалена от всех шести точек  $P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b, Q_c$ . Получаем требуемое: все шесть проекций изогонально сопряженных точек  $P$  и  $Q$  на прямые  $AB, BC, CA$  лежат на одной окружности. И центр этой окружности – середина отрезка  $PQ$ .

Теперь проведем предыдущие рассуждения в обратную сторону и получим новый способ.

**Способ 3.** Пусть по-прежнему  $P_a, P_b, P_c$  – проекции точки  $P$  на прямые  $BC, CA, AB$  соответственно,  $S$  – центр описанной окружности  $\omega$  треугольника  $P_aP_bP_c$ ,  $Q$  – точка, симметричная  $P$  относительно  $S$ , а  $Q_a, Q_b, Q_c$  – проекции точки  $Q$  на прямые  $BC, CA, AB$  соответственно (рис. 3).

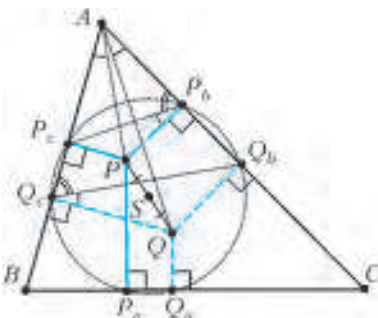


Рис. 3

Проекция точки  $S$  на прямую  $BC$  совпадает с серединой отрезка  $P_aQ_a$ , значит,  $S$  равноудалена от точек  $P_a$  и  $Q_a$ . Следовательно, точка  $Q_a$  лежит на окружности  $\omega$ . То же справедливо и для точек  $Q_b$  и  $Q_c$ .

Докажем, что  $\angle BAP = \angle CAQ$ . Заметим, что четырехугольники  $AP_bPP_c$  и  $AQ_cQQ_b$  вписанные, а треугольники  $AP_bP_c$  и  $AQ_cQ_b$  подобны (поскольку точки  $P_b, P_c, Q_b, Q_c$  лежат на одной окружности). Отсюда получаем цепочку

равенств:

$$\begin{aligned} \angle BAP &= \angle P_cP_bP = 90^\circ - \angle P_cP_bA = \\ &= 90^\circ - \angle Q_bQ_cQ = \angle Q_bQ_cQ = \angle CAQ. \end{aligned}$$

Итак,  $\angle BAP = \angle CAQ$ , значит,  $Q$  лежит на прямой  $l_a$ . Аналогично,  $Q$  лежит на прямых  $l_b, l_c$ , т.е.  $Q$  – общая точка прямых  $l_a, l_b, l_c$ .

**Упражнение 4.** Докажите, что в треугольнике середины сторон и основания высот лежат на одной окружности. (Эта окружность носит название окружности девяти точек. Кроме указанных шести точек на ней лежат середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами треугольника.)

**Способ 4.** Как и в способе 2, используем, что  $l_a \perp P_bP_c, l_b \perp P_cP_a, l_c \perp P_aP_b$ . Значит, нам нужно доказать, что перпендикуляры из точек  $A, B, C$  на прямые  $P_bP_c, P_cP_a, P_aP_b$  пересекаются в одной точке (рис.4).

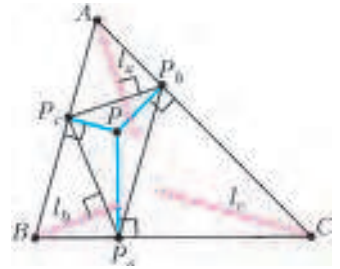


Рис. 4

Это сразу будет вытекать из следующего известного критерия (это утверждение называют теоремой Карно, а иногда теоремой Штейнера). Пусть  $ABC$  и  $A'B'C'$  – два треугольника на плоскости. Перпендикуляры из точек  $A, B, C$  на прямые  $B'C', C'A', A'B'$  соответственно пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда перпендикуляры из вершин  $A', B', C'$  на прямые  $BC, CA, AB$  соответственно пересекаются в одной точке. Пары треугольников с таким условием называют *ортологичными*.

Вернемся к нашему вопросу. Чтобы доказать, что перпендикуляры из точек  $A, B, C$  на прямые  $P_bP_c, P_cP_a, P_aP_b$  соответственно пересекаются в одной точке, достаточно заметить, что перпендикуляры из точек  $P_a, P_b, P_c$  на прямые  $BC, CA, AB$  соответственно пересекаются в одной точке. Пары треугольников с таким условием называют *ортологичными*.

Вернемся к нашему вопросу. Чтобы доказать, что перпендикуляры из точек  $A, B, C$  на прямые  $P_bP_c, P_cP_a, P_aP_b$  соответственно пересекаются в одной точке, достаточно заметить, что перпендикуляры из точек  $P_a, P_b, P_c$  на прямые  $BC, CA, AB$  соответственно пересекаются в одной точке.

Итак, точка  $Q$  была получена нами как пересечение перпендикуляров  $l_a, l_b, l_c$  к сторонам треугольника  $P_aP_bP_c$ . В следующем упражнении мы предлагаем доказать, что эти перпендикуляры является также высотами некоторого треугольника. Этот факт автор узнал от Д.Прокopenko.

**Упражнение 5.** Пусть  $H_a, H_b, H_c$  – ортоцентры треугольников  $AP_bP_c, BP_cP_a, CP_aP_b$  соответственно. Докажите, что  $l_a, l_b, l_c$  – высоты треугольника  $H_aH_bH_c$ .

Указание:  $P_bH_cP_aP$  и  $P_cH_bP_aP$  – параллелограммы.

\*\*\*

В следующих двух способах пусть  $Q$  – точка пересечения  $l_a$  и  $l_b$ . Докажем, что прямая  $CQ$  совпадает с  $l_c$ .

**Способ 5.** Пусть окружность, описанная около треугольника  $BQC$ , вторично пересекает прямую  $l_a$  в точке  $X$  (рис.5). Тогда, пользуясь равенством вписанных углов, опирающихся на одну дугу, имеем  $\angle ABP = \angle QBC = \angle AXC$ . Отсюда следует, что треугольник  $CAX$  подобен треугольнику  $PAB$ . Тогда  $AB : AX = AP : AC$ . Но поскольку  $\angle BAX = \angle PAC$ , треугольники  $BAX$  и  $PAC$  тоже подобны. Значит,  $\angle BXA = \angle PCA$ . Но  $\angle BXA = \angle BCQ$  (вписанные

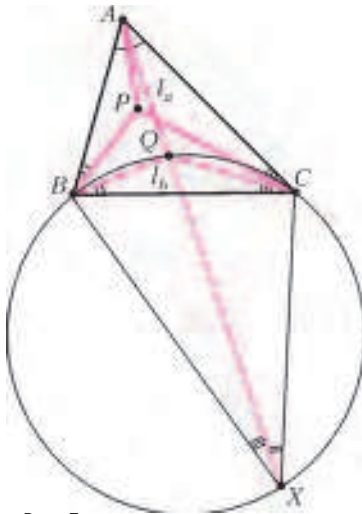


Рис. 5

ках  $A_p$  и  $A_q$ ,  $B_p$  и  $B_q$ ,  $C_p$  и  $C_q$  соответственно (рис.6). Из равенства углов  $\angle BAA_p$  и  $\angle CAA_q$  следует равенство дуг  $BA_p$

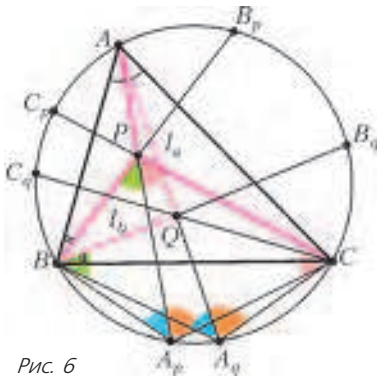


Рис. 6

и  $CA_q$ , иначе говоря, точки  $A_p$  и  $A_q$  симметричны относительно серединного перпендикуляра к  $BC$ . Аналогично, дуги  $AB_p$  и  $CB_q$  равны. Нам достаточно доказать равенство дуг  $BC_q$  и  $AC_p$  (из равенства этих дуг будет следовать равенство углов  $\angle BCC_q$  и  $\angle ACC_p$ ).

Заметим, что  $\angle BPA_p = \angle BQA_q$ . Кроме того,

$$\begin{aligned} \angle BPA_p &= \frac{1}{2}(\cup BA_p + \cup AB_p) = \\ &= \frac{1}{2}(\cup CA_q + \cup CB_q) = \frac{1}{2} \cup A_qB_q = \angle A_qBQ. \end{aligned}$$

Значит, треугольники  $PA_pB$  и  $BA_qQ$  подобны. Отсюда  $A_pP : A_pB = A_qQ : A_qB$ . Поскольку  $A_pB = A_qC$  и  $A_qB = A_pC$ , имеем  $A_pP : A_qC = A_pC : A_qQ$ . Из полученного равенства и равенства вписанных углов  $\angle CA_pP = \angle CA_qQ$  следует подобие треугольников  $PA_pC$  и  $CA_qQ$ . Значит,  $\angle QCA_q = \angle CPA_p$ , откуда  $\cup BC_q + \cup BA_q = \cup AC_p + \cup CA_p$ , и, так как  $\cup BA_q = \cup CA_p$ , получаем нужное нам равенство  $\cup BC_q = \cup AC_p$ .

Как следует из рассуждений выше, произведение  $A_pP \cdot A_qQ$  равно  $A_pC \cdot A_qC$  (что также равно  $A_pB \cdot A_qB$ ) – оно не будет изменяться, если зафиксировать прямую  $AA_p$ , а точке  $P$  позволить перемещаться по ней.

<sup>3</sup> Про инверсию можно прочесть, например, в статье В.Уроева в «Кванте» № 5 за 1984 год.

углы). Таким образом,  $\angle PCA = \angle BCQ$ , т.е. прямая  $CQ$  совпадает с  $l_c$ .

На самом деле точка  $X$ , которая фигурирует в этом способе, является образом точки  $P$  при композиции инверсии<sup>3</sup> с центром в точке  $A$  и радиусом  $\sqrt{AB \cdot AC}$  и симметрии относительно биссектрисы угла  $A$  (это преобразование точки  $B$  и  $C$  меняет местами).

**Способ 6.** Пусть прямые  $AP$  и  $l_a$ ,  $BP$  и  $l_b$ ,  $CP$  и  $CQ$  пересекают вторично описанную окружность треугольника  $ABC$  в точках  $A_p$  и  $A_q$ ,  $B_p$  и  $B_q$ ,  $C_p$  и  $C_q$  соответственно (рис.6). Из равенства углов  $\angle BAA_p$  и  $\angle CAA_q$  следует равенство дуг  $BA_p$

**Упражнения**

**6.** В обозначениях предыдущего способа докажите, что подобны: треугольники  $A_pPB_p$  и  $A_qCB_q$ , треугольники  $A_pCB_p$  и  $A_qQB_q$ , четырехугольники  $A_pPB_pC$  и  $A_qCB_qQ$ . Выведите отсюда другое доказательство подобия треугольников  $PA_pC$  и  $CA_qQ$ .

**7.** Докажите теорему с использованием точек пересечения прямых  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$  и  $AQ$ ,  $BQ$ ,  $CQ$  с описанной окружностью треугольника  $ABC$ , применив следующий критерий: диагонали  $X_1X_4$ ,  $X_2X_5$ ,  $X_3X_6$  вписанного шестиугольника  $X_1X_2X_3X_4X_5X_6$  пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда  $X_1X_2 \cdot X_3X_4 \cdot X_5X_6 = X_2X_3 \cdot X_4X_5 \cdot X_6X_1$ .

\* \* \*

Далее будет использован такой прием: вместо того чтобы напрямую доказывать, что в данном треугольнике  $ABC$  прямые  $l_a$ ,  $l_b$ ,  $l_c$  пересекаются в одной точке  $Q$ , мы найдем «подобную копию» требуемой картинке! А именно, мы предьявим некоторый треугольник, подобный треугольнику  $ABC$ , и такую точку внутри него, что преобразование подобия, которое совмещает этот треугольник с треугольником  $ABC$ , переводит нашу точку в общую точку прямых  $l_a$ ,  $l_b$ ,  $l_c$ .

**Способ 7.** Пусть, как и раньше,  $A_p, B_p, C_p$  – точки пересечения прямых  $AP, BP, CP$  с описанной окружностью. Через  $A', B', C'$  обозначим проекции точки  $P$  на прямые  $B_pC_p, C_pA_p, A_pB_p$  соответственно (рис.7). Из вписанности четырехугольника  $C_pA'PB'$  имеем

$$\angle PA'B' = \angle PC_pB' = \angle CC_pA_p = \angle CAA_p = \angle PAC.$$

Аналогично получаем равенства  $\angle PA'C' = \angle PAB$ ,  $\angle PB'C' = \angle PBA$ ,  $\angle PB'A' = \angle PBC$ ,  $\angle PC'A' = \angle PCB$ ,  $\angle PC'B' = \angle PCA$ . Это означает, что треугольник  $A'B'C'$  подобен треугольнику  $ABC$ , и подобие, переводящее его в треугольник  $ABC$ , переводит прямые  $A'P, B'P, C'P$  в прямые  $l_a, l_b, l_c$  соответственно.

**Упражнение 8.** Пусть  $P_a^*P_b^*P_c^*$  – второй педальный треугольник, т.е.  $P_a^*, P_b^*, P_c^*$  – проекции точки  $P$  на стороны треугольника  $P_aP_bP_c$ , и пусть прямые  $P_a^*P, P_b^*P, P_c^*P$  пересекают описанную окружность треугольника  $P_a^*P_b^*P_c^*$  вторично в точках  $A^*, B^*, C^*$ . Докажите, что треугольник  $A^*B^*C^*$  подобен треугольнику  $ABC$  и подобие, переводящее его в треугольник  $ABC$ , переводит прямые  $A^*P, B^*P, C^*P$  в прямые  $l_a, l_b, l_c$  соответственно.

**Способ 8.** (Возможно, самый короткий и изящный!) Проведем окружность через точки  $B, P, C$ . Пусть она вторично пересекает прямые  $AB$  и  $AC$  в точках  $C'$  и  $B'$  соответственно. Предположим,  $B'$  и  $C'$  попали на стороны  $AC$  и  $BC$  (рис.8). Тогда из вписанности четырехугольника  $BCB'C'$  сле-

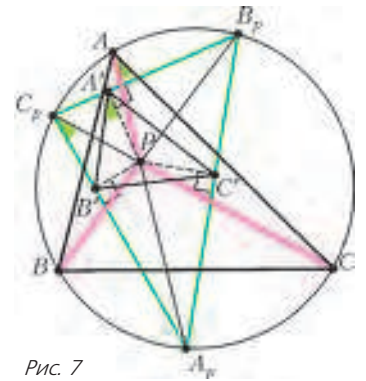


Рис. 7

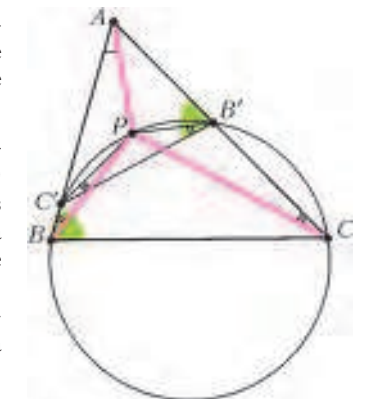


Рис. 8



дует, что  $\angle AB'C' = \angle ABC$ , значит, треугольник  $AB'C'$  подобен треугольнику  $ABC$ . Далее, из вписанности четырехугольника  $BC'PB'$  имеем  $\angle C'B'P = \angle C'BP = \angle ABP$ . Аналогично,  $\angle B'C'P = \angle ACP$ . Кроме того, очевидно,  $\angle C'AP = \angle BAP$ . Значит,  $P$  и есть искомая точка(!) – подобие, переводящее треугольник  $AB'C'$  в треугольник  $ABC$ , переводит прямые  $AP, B'P, C'P$  в прямые  $l_a, l_b, l_c$  соответственно.

**Упражнение 9.** Измените приведенное доказательство для случая, когда хотя бы одна из точек  $B', C'$  лежит на продолжении соответствующей стороны.

**Способ 9.** Проведем через точки  $B$  и  $C$  окружность, которая вторично пересекает прямые  $AC$  и  $AB$  в точках  $B_1$  и  $C_1$  соответственно (для определенности будем считать, что  $B_1$  и  $C_1$  лежат на продолжениях сторон  $AC$  и  $AB$  за точку  $A$  – см. рис.9). Пусть прямые  $BP$  и  $CP$  вторично пересекают окружность в точках  $M$  и  $N$  соответственно, а прямые  $B_1M$  и  $C_1N$  пересекаются в точке  $P_1$ . Треугольники  $ABC$  и  $AB_1C_1$

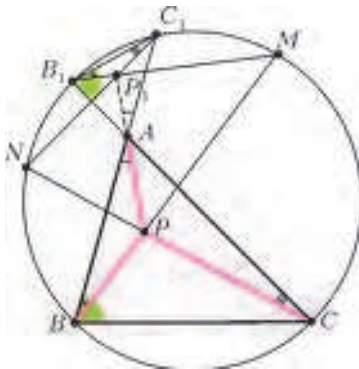


Рис. 9

подобны, так как  $\angle CBC_1 = \angle CB_1C_1$ . Кроме того,  $\angle C_1B_1P_1 = \angle C_1B_1M = \angle C_1BM = \angle ABP$  и, аналогично,  $\angle B_1C_1P_1 = \angle ACP$ . Значит, подобие, переводящее треугольник  $AB_1C_1$  в треугольник  $ABC$ , переводит прямые  $B_1P_1, C_1P_1$  в прямые  $l_b, l_c$  соответственно. Остается доказать, что  $AP_1$  переходит в  $l_a$ . Для этого достаточно доказать, что  $\angle C_1AP_1 = \angle BAP$ , т.е. что точки  $P, A, P_1$  лежат на одной прямой.

Воспользуемся теоремой Паскаля, которая гласит, что для шестерки точек  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ , лежащих на одной окружности, точки пересечения прямых  $X_1X_2$  и  $X_4X_5, X_2X_3$  и  $X_5X_6, X_3X_4$  и  $X_6X_1$  лежат на одной прямой. Применив теорему Паскаля для шестерки точек  $B, M, B_1, C, N, C_1$ , получаем, что точки  $P, A, P_1$  лежат на одной прямой.

Наверное, теорема Паскаля не проще, чем теорема об изогональном сопряжении, но это не мешает нам оценить, как красиво эти теоремы сплелись в способе 9. Конструкция из способа 8 по сути является частным случаем только что рассмотренной: там берется не произвольная окружность, проходящая через  $B$  и  $C$ , а специальная – проходящая также и через  $P$ .

**Упражнение 10.** Используя рассуждения из последних двух способов, получите элементарное доказательство теоремы Паскаля.

**Указание:** рассмотрев одновременно построения из способов 8 и 9, докажите, что треугольники  $AB'C'$  и  $AB_1C_1$  гомотетичны, а  $P$  и  $P_1$  – их соответствующие точки.

\*\*\*

Кажется, мы увидели достаточно много красивой геометрии: трилинейные координаты (способ 1), метод отражения (2), ортологичность треугольников (4), вписанные углы и вспомогательные окружности (3, 5–8), теорема Паскаля (9). Хотя это далеко не полный список «изогональных мотивов» (скажем, изогональное сопряжение тесно связано с коническими сечениями, вписанными в треугольник), пора завершать. Напоследок еще один способ: попробуем просто изготовить треугольник  $A'B'C'$ , подобный треугольнику  $ABC$ , из треугольников  $A'B'Q', B'C'Q'$  и  $C'A'Q'$  с нужными углами.

**Способ 10.** Возьмем треугольник  $Q'B'C'$  с углами  $\angle Q'B'C' = \angle ABP, \angle Q'C'B' = \angle ACP$ . Приложим к нему треугольник  $Q'C'A'$  с углами  $\angle Q'C'A' = \angle BCP, \angle Q'A'C' = \angle BAP$  (рис.10). Приложим к нему треугольник

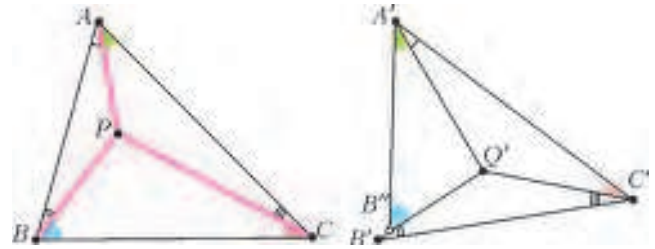


Рис. 10

$Q'A'B''$  с углами  $\angle Q'A'B'' = \angle CAP, \angle Q'B''A' = \angle CBP$ . Точка  $B''$  попадает на луч  $Q'B'$ , поскольку сумма углов  $B'Q'C', C'Q'A', A'Q'B''$  равна  $360^\circ$  (эта сумма равна  $3 \cdot 180^\circ - \angle ABP - \angle ACP - \angle BCP - \angle BAP - \angle CAP - \angle CBP = 360^\circ$ ).

Остается понять, что точка  $B''$  совпадает с  $B'$ . Пользуясь теоремой синусов, имеем

$$\begin{aligned} \frac{Q'B'}{Q'B''} &= \frac{Q'B'}{Q'C'} \cdot \frac{Q'C'}{Q'A'} \cdot \frac{Q'A'}{Q'B''} = \\ &= \frac{\sin \angle ACP}{\sin \angle ABP} \cdot \frac{\sin \angle BAP}{\sin \angle BCP} \cdot \frac{\sin \angle CBP}{\sin \angle CAP} = \\ &= \frac{\sin \angle ACP}{\sin \angle CAP} \cdot \frac{\sin \angle BAP}{\sin \angle ABP} \cdot \frac{\sin \angle CBP}{\sin \angle BCP} = \frac{AP}{CP} \cdot \frac{BP}{AP} \cdot \frac{CP}{BP} = 1. \end{aligned}$$

Значит,  $Q'B' = Q'B''$ , что и требовалось.

Конечно, последний способ идейно близок к доказательству с помощью теоремы Чевы, упомянутому в начале (ср. также с упражнением 7). Что ж, круг замкнулся. Надеемся, что наша геометрическая прогулка понравилась читателю.

**Литература**

1. В.Прасолов. Точки Брокера и изогональное сопряжение. – М.: МЦНМО, 2000 г.
2. А.В.Акопян, А.А.Заславский. Разные взгляды на изогональное сопряжение. – «Математическое просвещение», третья серия, №11, 2007 г.
3. Изогонально сопряженные точки. Калейдоскоп «Кванта». – «Квант» №11, 1992 г.

# ЕВКЛИД И НЕПРИВОДИМЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

В.ИЛЬИЧЕВ

ОДНИМ ИЗ РАННИХ, НО ВАЖНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ В ТЕОРИИ чисел было утверждение о бесконечности семейства простых чисел. Евклид предложил чрезвычайно остроумное его обоснование. Это рассуждение стало классическим примером доказательства от противного. Итак, предположим противное, что количество простых чисел конечно. И пусть  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  – их полный список. Теперь (квинтэссенция!) рассмотрим число Евклида

$$E = p_1 p_2 \dots p_n + 1.$$

Это число не делится ни на одно простое число из приведенного списка, поэтому  $E$  либо само простое, либо делится на новое простое число. Противоречие.

Рассмотрим структуру более сложную, чем целые числа, – множество многочленов с целыми коэффициентами; будем обозначать это множество  $\mathbb{Z}[x]$ . Многочлены можно перемножать и складывать друг с другом, вычитать друг из друга. Здесь многочлены ведут себя во многом подобно обычным целым числам. Операцию деления многочленов можно определить через умножение: скажем, что многочлен  $f$  из  $\mathbb{Z}[x]$  делится на многочлен  $g$  из  $\mathbb{Z}[x]$ , если найдется многочлен  $h$  из  $\mathbb{Z}[x]$  такой, что  $f = gh$ . Особый интерес представляют «плохие» многочлены, которые «не любят делиться». Многочлен  $p$  из  $\mathbb{Z}[x]$ , делящийся только на  $\pm p$  и  $\pm 1$ , называют *неприводимым* над  $\mathbb{Z}$  многочленом. Разумеется, это аналог простых чисел: любой многочлен можно «собрать» из нескольких неприводимых с помощью операции умножения. Иначе говоря, каждый многочлен из  $\mathbb{Z}[x]$  можно представить в виде произведения нескольких неприводимых над  $\mathbb{Z}$  многочленов.

**Упражнение 1.** Докажите это.

*Указание:* можно воспользоваться индукцией по степени многочлена.

Несколько труднее доказать, что в разложении данного многочлена набор неприводимых сомножителей определен однозначно.

Приведем некоторые примеры неприводимых над  $\mathbb{Z}$  многочленов небольших степеней 0, 1, 2. Это 2, 3, 5, ... – простые числа;  $x$ ,  $x + 1$ , ...;  $x^2 + 1$ ,  $x^2 + x + 1$  и другие.

**Упражнения**

2. а) Докажите, что многочлен с целыми коэффициентами  $x^2 + ax + b$  приводим над  $\mathbb{Z}$  тогда и только тогда, когда он имеет целый корень.

б) Докажите аналогичное утверждение для многочлена  $x^3 + ax^2 + bx + c$ .

3. Приведите пример приводимого над  $\mathbb{Z}$  многочлена четвертой степени, не имеющего целых корней.

Много ли неприводимых над  $\mathbb{Z}$  многочленов? Сразу ясно, что их бесконечное множество (см. примеры выше). Более содержательный вопрос: существуют ли неприводимые над

$\mathbb{Z}$  многочлены сколь угодно высокой степени?<sup>1</sup> Здесь было бы заманчиво применить схему рассуждений Евклида: предположив противное, перемножить все неприводимые многочлены степени меньше  $m$ , добавить 1, ну и так далее. К сожалению, мы не можем так поступить ввиду бесконечности количества сомножителей. Однако мы увидим, что, применив дополнительную хитрость, все-таки можно использовать идеи Евклида. Приведем правильное решение.

Но вначале нам понадобится еще одна структура.

Пусть  $\mathbb{Z}_2$  – множество из двух элементов  $\{0, 1\}$ , в котором сложение и умножение происходит «по модулю» 2:  $0 + 0 = 1 + 1 = 0$ ,  $1 + 0 = 1$ ,  $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$ ,  $1 \cdot 1 = 1$ . Рассмотрим множество многочленов  $\mathbb{Z}_2[x]$  с коэффициентами из  $\mathbb{Z}_2$ , т.е. многочленов, в которых каждый коэффициент равен 0 или 1. При сложении и умножении многочленов из  $\mathbb{Z}_2[x]$  мы продолжаем работать с коэффициентами многочленов «по модулю» 2, например  $(x^3 + x + 1)(x^2 + 1) = x^5 + x^3 + x^2 + x^3 + x + 1 = x^5 + x^2 + x + 1$ .

**Упражнения**

4. Сколько в множестве  $\mathbb{Z}_2[x]$  многочленов степени  $n$ ?

5. Докажите, что в  $\mathbb{Z}_2[x]$  вычитание равносильно сложению, т.е. для многочленов  $f$  и  $g$  из  $\mathbb{Z}_2[x]$  выполнено  $f - g = f + g$ .

6. Докажите, что в  $\mathbb{Z}_2[x]$ :

а)  $(x^a + x^b + x^c)^2 = x^{2a} + x^{2b} + x^{2c}$ ;

б)  $(x + 1)^{2^n} = x^{2^n} + 1$ .

Можно говорить о делимости многочленов из  $\mathbb{Z}_2[x]$  и определить *неприводимые над  $\mathbb{Z}_2$*  многочлены как многочлены, делящиеся только на 1 и на себя.

**Упражнение 7.** Найдите все неприводимые над  $\mathbb{Z}_2$  многочлены степени 2, 3, 4.

В множестве  $\mathbb{Z}_2[x]$  неприводимые многочлены играют известную нам роль «строительных блоков» для умножения: каждый многочлен из  $\mathbb{Z}_2[x]$  раскладывается в произведение неприводимых. Оказывается, неприводимых многочленов над  $\mathbb{Z}_2$  бесконечно много.

Здесь идея Евклида сработает без сбоев: предполагая, что  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  – полный список неприводимых над  $\mathbb{Z}_2$  многочленов, рассмотрим «многочлен Евклида»  $E = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ . Он не делится ни на один из многочленов  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , поэтому многочлен  $E$  либо сам неприводимый, либо делится на неприводимый многочлен, не содержащийся в списке. Противоречие.

Неприводимых над  $\mathbb{Z}_2$  многочленов фиксированной степени конечное число, а всего их бесконечное множество. Значит, существуют неприводимые над  $\mathbb{Z}_2$  многочлены сколь угодно высокой степени (скажем, найдется неприводимый над  $\mathbb{Z}_2$  многочлен степени больше 1000000, и даже бесконечно много таких многочленов).<sup>2</sup>

Вернемся к многочленам с целыми коэффициентами. Каждому такому многочлену  $f$  можно сопоставить многочлен  $\tilde{f}$  из  $\mathbb{Z}_2[x]$ , заменяя четный коэффициент многочлена  $f$  на 0, а нечетный – на 1. Например, если  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$ , то  $\tilde{f}(x) = x^3 + x$ .

<sup>1</sup> В действительности для каждого натурального  $n$  существует бесконечно много неприводимых над  $\mathbb{Z}$  многочленов степени  $n$ , например  $x^n + p$ , где  $p$  – простое число. Строить подобные примеры можно с помощью *критерия Эйзенштейна*.

<sup>2</sup> На самом деле для каждого  $n = 1, 2, \dots$  существует неприводимый над  $\mathbb{Z}_2$  многочлен степени  $n$ . Доказать это можно с помощью достаточно элементарных соображений из теории полей.

(Продолжение см. на с. 57)

# Задачи на силу трения

А. ЧЕРНОУЦАН

**В** СТАТЬЕ БУДУТ РАССМОТРЕНЫ ЗАДАЧИ НА ТРЕНИЕ, возникающее между двумя твердыми телами, – так называемое сухое трение. Сухое трение делится на два вида: трение покоя и трение скольжения. В отечественных учебниках и задачниках обе силы трения характеризуются одним коэффициентом трения  $\mu$ : скольжение возникает, когда сила трения покоя достигает величины  $\mu N$ , где  $N$  – сила нормального давления (равная по величине силе нормальной реакции), сила трения скольжения остается равной  $\mu N$  независимо от скорости скольжения. В некоторых иностранных источниках вводят два коэффициента трения – скольжения и покоя (второй немного больше первого). Мы будем придерживаться отечественной традиции.

В первой части статьи представлены задачи из раздела «Динамика», решаемые с помощью законов Ньютона без привлечения закона сохранения энергии. Наиболее интересными являются задачи, в которых исследуется условие возникновения скольжения, переход от трения покоя к трению скольжения. В некоторых задачах придется провести небольшое исследование, определить направление силы трения покоя и характер начала проскальзывания. Во второй части статьи будут разбросаны задачи с энергетическим содержанием, где работа силы трения служит мерой потери механической энергии системы, перехода ее во внутреннюю, тепловую энергию.

**Задача 1.** Тело массой  $m = 1$  кг находится на горизонтальной плоскости. На тело действует горизонтальная сила  $F = 2$  Н. Определите силу трения, если коэффициент трения  $\mu = 0,3$ .

**Решение.** Зачастую школьник действует по привычному алгоритму: отыскать подходящую формулу и подставить в нее данные. Какая есть формула для силы трения? Только одна:  $F_{\text{тр}} = \mu N$ . Вот и применим ее:

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg = 3 \text{ Н}.$$

Сразу становится очевидной несуразность: сила трения больше внешней силы – если потянуть вправо, тело поедет влево (рис.1). В чем тут дело?

Школьник, не подумав, применил формулу для силы трения скольжения, а возможны два варианта. Если к неподвижному телу приложить внешнюю силу, то оно либо поедет (в направлении внешней силы), либо останется в покое. Во втором случае сила трения находится не по известной формуле, а прямо из закона Ньютона. Можно сразу начать с исследования того, какой из случаев реализуется, однако удобнее поступить следующим образом. Надо предположить, что реализуется какой-то из вариантов, решить задачу в этом предположении, а затем сделать проверку. В данном случае решение надо было начать со слов «Предположим, что тело скользит», получить указанный ответ и проверить его, найдя знак

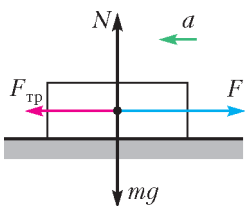


Рис. 1

ускорения. Если проверка дает отрицательный результат, т.е.  $a < 0$ , первый вариант отбрасываем и переходим ко второму варианту: тело остается в покое. Тогда сила трения покоя находится из уравнения

$$F - F_{\text{тр}} = 0, \text{ т.е. } F_{\text{тр}} = F = 2 \text{ Н}.$$

**Вопрос.** А если бы мы начали с предположения, что тело стоит, то в чем заключалась бы проверка?

**Ответ.** Надо было бы проверить, что полученная сила трения покоя меньше максимального значения, т.е. что  $F_{\text{тр}} < \mu N = \mu mg$ . Получили бы верное неравенство  $2 \text{ Н} < < 3 \text{ Н}$ , таким образом, проверка подтвердила бы правильность предположения.

**Вопрос.** Коэффициент трения не вошел в численный ответ. Надо ли было его указывать в условии?

**Ответ.** Надо. Коэффициент трения использовался косвенно, в процессе исследования. Например, если взять  $\mu = 0,1$ , то реализуется вариант со скольжением и получится  $F_{\text{тр}} = \mu mg = 1 \text{ Н}$ .

Отметим, что школьник легко попадает впросак по той причине, что в задаче *не спрашивается* ускорение. Если в условии задачи специально не указывается, что тело скользит, то надо быть готовым к исследованию ответа.

Приведем еще один пример задачи «с ловушкой» – другого рода.

**Задача 2.** К телу массой  $m = 1$  кг, лежащему на горизонтальной поверхности, приложили силу  $F = 16$  Н, направленную под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту. Коэффициент трения между телом и плоскостью  $\mu = 0,5$ . Найдите ускорение тела.

**Решение.** Поскольку мы ищем ускорение, то нет опасности «прозевать», как в предыдущей задаче, трение покоя. Записав стандартную систему уравнений динамики (в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси координат; рис.2):

$$\begin{aligned} F \cos \alpha - F_{\text{тр}} &= ma, \\ N + F \sin \alpha - mg &= 0, \\ F_{\text{тр}} &= \mu N, \end{aligned}$$

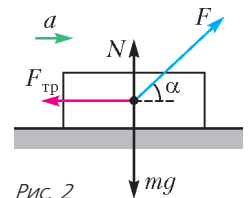


Рис. 2

получим пристойный с виду положительный ответ:

$$a = \frac{F(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) - \mu mg}{m} = 9,9 \text{ м/с}^2.$$

Однако если проверить численное значение одного из промежуточных результатов (чего обычно не делают – ведь рекомендуется получить ответ в общем виде), а именно силы нормальной реакции, то получим отрицательный результат:

$$N = mg - F \sin \alpha = -3,8 \text{ Н}.$$

Оказалось, что вертикальная составляющая силы  $F$  слишком велика, и тело под действием этой силы отрывается от поверхности ( $N = 0$ ) и движется в пустом пространстве под действием только двух сил:  $\vec{F}$  и  $m\vec{g}$  (рис.3). Тем не менее, мы можем довести задачу до победного конца, вычислив проекции ускорения:

$$\begin{aligned} F \cos \alpha &= ma_x, \\ F \sin \alpha - mg &= ma_y, \end{aligned}$$

откуда

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 8,8 \text{ м/с}^2.$$

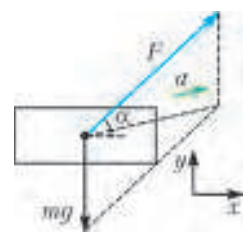


Рис. 3

Внимание к подобным ловушкам должны проявлять не только ученики, но и авторы задач. Иначе промах в условии может обнаружиться уже на экзамене или после него.



Еще пример.

**Задача 3.** Два бруска массы  $m_1 = 10$  кг и  $m_2 = 5$  кг, связанные нитью, находятся на горизонтальном столе. На первый брусок действовали горизонтальной силой  $F = 36$  Н (рис.4). Найдите силу натяжения нити, если коэффициент трения  $\mu = 0,3$ . В начальный момент нить слабо натянута ( $T_0 = 1$  Н).

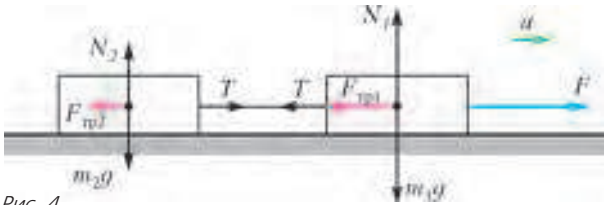


Рис. 4

**Решение.** Обычно задачу решают в предположении, что тела скользят по плоскости с некоторым одинаковым ускорением. Выразив для каждого тела силу нормальной реакции и силу трения, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} F - \mu m_1 g - T &= m_1 a, \\ T - \mu m_2 g &= m_2 a. \end{aligned}$$

Исключая ускорение, приходим к ответу

$$T = \frac{m_2 F}{m_1 + m_2} = 12 \text{ Н.}$$

Проверяя численное значение ускорения, получаем отрицательный ответ:  $a = -0,6 \text{ м/с}^2$ . Это означает, что система тел останется в покое. Но силу натяжения нити все-таки можно вычислить, именно для этого в условии дана начальная сила натяжения  $T_0$ . Приложенной силы  $F$  достаточно, чтобы первое тело начало сдвигаться с места и натянуло нить, но второе тело при этом с места не сдвинется! Иначе сила трения покоя, действующая на первое тело, достигла бы значения  $F_{\text{тр}1} = F - T_0 = 35$  Н, что больше максимального значения  $\mu m_1 g = 30$  Н. Следовательно, на первое тело действует максимальная сила трения покоя, и силу натяжения нити можно найти из уравнения  $F - T - \mu m_1 g = 0$ , откуда

$$T = 6 \text{ Н.}$$

Отметим, что начальная сила натяжения (до приложения силы) может иметь любое значение от 0 до  $\mu m_2 g = 15$  Н. Если бы  $T_0$  была больше 6 Н, то первое тело с места не сдвинулось бы, и сила натяжения осталась бы равной  $T_0$ .

В нескольких следующих задачах действие разворачивается на наклонной плоскости. Начнем со стандартной задачи.

**Задача 4.** Тело соскальзывает с наклонной плоскости высотой  $h = 3$  м и длиной  $l = 5$  м. Коэффициент трения  $\mu = 0,5$ . Найдите ускорение тела.

**Решение.** Второй закон Ньютона в проекциях на оси  $x, y$  имеет вид (рис.5)



Рис. 5

$$\begin{aligned} mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} &= ma, \\ N - mg \cos \alpha &= 0, \end{aligned}$$

где

$$F_{\text{тр}} = \mu N, \quad \sin \alpha = \frac{h}{l} = 0,6.$$

Отсюда получаем

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = 2 \text{ м/с}^2.$$

Значение ускорения получается положительным только при условии  $\mu < \tan \alpha$ . Как же понимать отрицательный знак ускорения при  $\mu > \tan \alpha$ ? Обычно отвечают так: поскольку отрицательный знак ускорения не имеет смысла, тело останется в покое, поэтому на него действует сила трения покоя

$F_{\text{тр}} = mg \sin \alpha$ , которая, как и положено, меньше  $\mu N = \mu mg \cos \alpha$ . Однако это объяснение годится в том случае, если тело кладут на наклонную плоскость (т.е.  $v_0 = 0$ ). Если же начальная скорость отлична от нуля, то отрицательный ответ может иметь смысл.

**Задача 5.** Маленький брусок находится на вершине наклонной плоскости длиной  $l = 26$  м и высотой  $h = 10$  м. Коэффициент трения между бруском и плоскостью  $\mu = 0,45$ . Какую минимальную скорость надо сообщить бруску, чтобы он достиг основания плоскости?

**Решение.** Поскольку  $\tan \alpha = 5/12 \approx 0,42 < \mu$ , то брусок сам по себе съезжать вниз не будет. Чтобы он достиг основания наклонной плоскости, ему надо придать достаточно большую начальную скорость, направленную вниз. Если направить оси так же, как в предыдущей задаче, то уравнение и ответ (в буквах) полностью совпадут. Ускорение получится отрицательным, что в данном случае не является бессмысленным, а просто означает, что брусок тормозится и модуль ускорения равен  $a = g(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)$ . Необходимую начальную скорость найдем из кинематического уравнения  $0 - v_0^2 = -2al$  и получим

$$v_0 = \sqrt{2gl(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)} = 4 \text{ м/с}.$$

В следующих двух задачах используется разложение уравнения движения не по двум, а по трем координатным осям.

**Задача 6.** На наклонной плоскости высотой  $h = 3$  м и длиной  $l = 9$  м лежит тело массой  $m = 6$  кг. Какую минимальную горизонтальную силу  $F$ , направленную вдоль плоскости, надо приложить к телу, чтобы сдвинуть его с места? Коэффициент трения  $\mu = 0,5$ .

**Решение.** Выберем оси  $x, y$  и  $z$  так, как показано на рисунке 6. У силы трения покоя при воздействии силы  $\vec{F}$  будут две проекции – на ось  $x$ , компенсирующая проекцию силы тяжести, и на ось  $y$ , компенсирующая силу  $F$ . В момент начала проскальзывания полная сила трения должна достигнуть значения  $\mu N$ , где  $N$  вычисляется через проекцию на ось  $z$ . Запишем все сказанное в виде системы уравнений

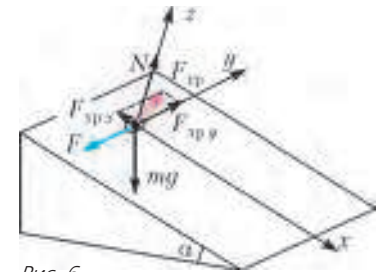


Рис. 6

$$\begin{aligned} mg \sin \alpha - F_{\text{тр}x} &= 0, \\ F_{\text{тр}y} - F &= 0, \\ N - mg \cos \alpha &= 0, \\ \sqrt{F_{\text{тр}x}^2 + F_{\text{тр}y}^2} &= \mu N. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$F = \sqrt{(\mu mg \cos \alpha)^2 - (mg \sin \alpha)^2} = 20 \text{ Н}.$$

**Задача 7.** Телу толчком сообщили скорость, направленную горизонтально вдоль поверхности наклонной плоскости. Найдите величину ускорения тела в начальный момент, если угол наклона плоскости  $\alpha$ , а коэффициент трения  $\mu$  ( $\mu > \tan \alpha$ ).

**Решение.** До толчка тело покоится на плоскости, сила трения покоя компенсирует проекцию силы тяжести. Однако после резкого толчка, сообщившего телу скорость перпендикулярно линии ската, оно не только поедет в сторону, но и начнет спускаться вниз. (Это легко продемонстрировать с помощью монетки и наклонной книги или тетрадки.) Дело в том, что после толчка сила трения покоя превратится в силу трения скольжения и будет направлена против скорости. Значит, сила трения мгновенно повернется на  $90^\circ$  и перестанет компенсировать проекцию силы тяжести – тело начнет

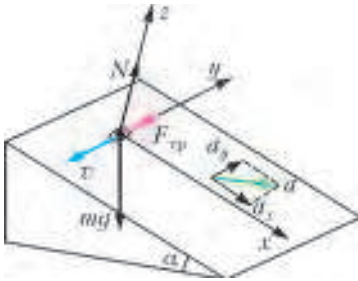


Рис. 7

спускаться. Запишем три проекции второго закона Ньютона (рис.7) и формулу для силы трения скольжения:

$$\begin{aligned} mg \sin \alpha &= ma_x, \\ F_{\text{тр}} &= ma_y, \\ N - mg \cos \alpha &= 0, \\ F_{\text{тр}} &= \mu N \end{aligned}$$

и найдем ускорение:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = g \sqrt{\sin^2 \alpha + \mu^2 \cos^2 \alpha}.$$

Особенность следующей задачи состоит в том, что сила трения действует между движущимися телами.

**Задача 8.** На доске массой  $m_1 = 4$  кг, лежащей на горизонтальном полу, находится брусок массой  $m_2 = 1$  кг. Коэффициент трения между доской и полом  $\mu_1 = 0,4$ , а между бруском и доской  $\mu_2 = 0,2$ . Какую наименьшую горизонтальную силу  $F$  надо приложить к доске, чтобы брусок с нее соскользнул?

**Решение.** Начать надо с бруска – поскольку сила  $\vec{F}$  на него не действует, можно найти ускорение системы в момент начала проскальзывания бруска по доске. При расстановке сил возникает вопрос: куда направлена действующая на брусок сила трения  $\vec{F}_{\text{тр}2}$ ? Многие школьники немедленно отвечают: раз тело движется вправо, то сила трения направлена влево. Но это не так. В отсутствие проскальзывания брусок должен иметь такое же направленное вправо ускорение, как и доска, а это ускорение ему может сообщить только сила трения покоя – единственная горизонтальная сила из всех приложенных к бруску. Поэтому уравнения для бруска имеют вид (рис.8)

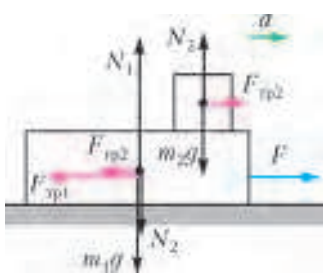


Рис. 8

где последнее уравнение представляет собой условие начала проскальзывания – сила трения достигла максимального значения. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} F_{\text{тр}2} &= m_2 a, \\ N_2 - m_2 g &= 0, \\ F_{\text{тр}2} &= \mu_2 N_2, \end{aligned}$$

где последнее уравнение представляет собой условие начала проскальзывания – сила трения достигла максимального значения. Отсюда получаем

$$N_2 = m_2 g, \quad F_{\text{тр}2} = \mu_2 m_2 g, \quad a = \mu_2 g.$$

Найденное ускорение представляет собой ускорение всей системы в момент начала проскальзывания.

Теперь рассмотрим доску. Многие школьники считают, что на нее действуют только внешние силы  $\vec{F}$  и  $m_1 \vec{g}$ , а также силы  $\vec{N}_1$  и  $\vec{F}_{\text{тр}1}$  со стороны пола, забывая, что на доску действуют еще силы  $-\vec{N}_2$  и  $-\vec{F}_{\text{тр}2}$  со стороны бруска. С учетом всех сил запишем

$$\begin{aligned} F - F_{\text{тр}1} - F_{\text{тр}2} &= m_1 a, \\ N_1 - N_2 - m_1 g &= 0, \\ F_{\text{тр}1} &= \mu_1 N_1. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$F = (\mu_1 + \mu_2)(m_1 + m_2)g = 30 \text{ Н}.$$

Вместо уравнений для доски проще было бы написать уравнения для всей системы (массой  $m_1 + m_2$ ):

$$\begin{aligned} F - F_{\text{тр}1} &= (m_1 + m_2) a, \\ N_1 - (m_1 + m_2) g &= 0, \\ F_{\text{тр}1} &= \mu_1 N_1. \end{aligned}$$

В следующей задаче при исследовании начала проскальзывания существенную роль играет уравнение моментов.

**Задача 9.** На доску, лежащую на гладкой горизонтальной поверхности, опирается тонкий однородный стержень массой  $m$ , шарнирно закрепленный за верхний конец (рис.9). Стержень составляет угол  $\alpha$  с вертикалью, коэффициент трения между стержнем и доской  $\mu$ . Какую минимальную горизонтальную силу  $F$  надо приложить к доске, чтобы вытащить ее из-под стержня?

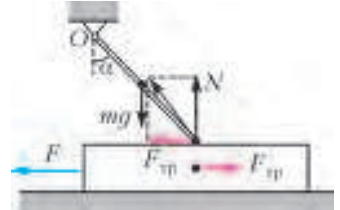


Рис. 9

**Решение.** Второй закон Ньютона для доски имеет вид

$$F - F_{\text{тр}} = 0.$$

Чтобы найти силу трения в момент начала проскальзывания, запишем условие начала проскальзывания стержня и уравнение моментов стержня относительно шарнира (исключая тем самым силу реакции шарнира):

$$\begin{aligned} F_{\text{тр}} &= \mu N, \\ F_{\text{тр}} l \cos \alpha - N l \sin \alpha + mg \frac{l}{2} \sin \alpha &= 0, \end{aligned}$$

где  $l$  – длина стержня. Решая уравнения, получаем

$$F = F_{\text{тр}} = \frac{\mu mg \sin \alpha}{2(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}.$$

Сразу же бросается в глаза, что ответ существует только при  $\mu < \text{tg} \alpha$ , в противном случае доску «заклинивает», т.е. она не будет проскальзывать при любом сколь угодно большом значении силы  $F$ . Этому можно дать следующее наглядное «геометрическое» объяснение. Поскольку сила тяжести стержня создает вращательный момент по часовой стрелке, то равнодействующая сил трения и нормальной реакции должна вращать стержень против часовой стрелки, т.е. проходить над стержнем. Значит, она составляет с вертикалью угол меньше  $\alpha$ , т.е. всегда должно быть верным неравенство  $F_{\text{тр}}/N < \text{tg} \alpha$ . Следовательно, при  $\text{tg} \alpha < \mu$  при любом значении  $F$  будет выполняться соотношение  $F_{\text{тр}} < \mu N$  и сила трения будет оставаться силой трения покоя.

Следующие две задачи – на движение по окружности.

**Задача 10.** С какой максимальной скоростью может проходить автомобиль поворот дороги радиусом  $R$ , если коэффициент трения между колесами и дорогой  $\mu$ ? Сопро- тивлением движению автомобиля пренебречь. Как изменится ответ, если учесть силу сопротивления, считая ее постоянной и равной  $F_c = \alpha mg$ ? А если считать, что сила сопротивления зависит от скорости по закону  $F_c = \beta v$ ?

**Решение.** Автомобиль проходит поворот управляемым образом, если не возникает проскальзывания колес по дороге. Именно в этом случае происходит чистое качение всех колес и радиус поворота определяется поворотом руля. Это значит, что на автомобиль при управляемом повороте действует сила трения покоя.

В пренебрежении силой сопротивления движению автомобиля сила трения покоя направлена по ускорению, направленному к центру окружности (если движение по окружности происходит с постоянной скоростью), и равна

$$F_{\text{тр}} = m \frac{v^2}{R}.$$

При движении с максимальной скоростью сила трения покоя равна своему максимальному значению:

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg.$$

Отсюда получаем

$$v = \sqrt{\mu g R}.$$

Если учесть, что на автомобиль при движении действует сила сопротивления  $F_c$ , направленная против скорости, то для обеспечения равномерного движения сила трения покоя должна иметь проекцию на ось  $x$ , направленную вперед вдоль скорости (рис.10):

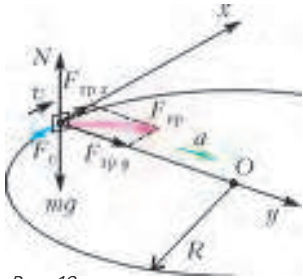


Рис. 10

$$F_{\text{тр}x} - F_c = 0.$$

Эта проекция силы трения покоя выполняет роль силы тяги. Проекция силы трения на ось  $y$ , направленная к центру окружности, создает центростремительное ускорение:

$$F_{\text{тр}y} = m \frac{v^2}{R}.$$

При движении с максимальной скоростью

$$\sqrt{F_{\text{тр}x}^2 + F_{\text{тр}y}^2} = \mu N = \mu mg.$$

Приходим к уравнению

$$F_c^2 + \left(\frac{mv^2}{R}\right)^2 = (\mu mg)^2.$$

Если  $F_c = \alpha mg$ , то для скорости получаем

$$v = \sqrt{gR\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}}.$$

Если  $F_c = \beta v$ , то приходим к биквадратному уравнению

$$v^4 + \left(\frac{\beta R}{m}\right)^2 v^2 - (\mu g R)^2 = 0,$$

откуда находим

$$v = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\beta R}{m}\right)^4 + (\mu g R)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\beta R}{m}\right)^2}.$$

**Задача 11.** Маленькая шайба находится на внутренней поверхности кругового конуса, обращенного вершиной вниз, на расстоянии  $l$  от его вершины (рис.11). Ось конуса вертикальна, угол раствора конуса  $2\alpha$ . Коэффициент трения между шайбой и поверхностью конуса  $\mu$ . При какой угловой скорости  $\omega$  вращения конуса шайба не будет проскальзывать?

**Решение.** На шайбу действуют три силы:  $\vec{N}$ ,  $m\vec{g}$  и  $\vec{F}_{\text{тр}}$ . Ускорение шайбы  $\vec{a}$  направлено к оси вращения. Поскольку  $\vec{N}$ ,  $m\vec{g}$  и  $\vec{a}$  лежат в вертикальной плоскости, проходящей через шайбу и ось конуса, то  $\vec{F}_{\text{тр}}$  тоже лежит в этой плоскости и может быть направлена либо наружу вверх, либо внутрь вниз.

В первом случае шайба начинает проскальзывать вниз, этот случай соответствует минимальной угловой скорости  $\omega_1$ . Можно сообразить, что соскальзывание вниз возможно только при  $\mu < \text{ctg } \alpha$  (см. задачу 4, только в данном случае  $\alpha$  – это угол с вертикалью). Этот случай изображен на рисунке 11, уравнения в проекциях на оси  $x$  и  $y$  имеют вид

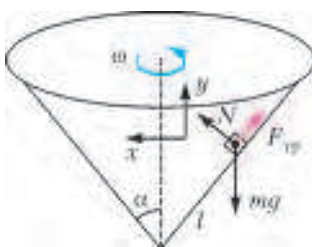


Рис. 11

$$\begin{aligned} N \cos \alpha - F_{\text{тр}} \sin \alpha &= m\omega^2 (l \sin \alpha), \\ N \sin \alpha + F_{\text{тр}} \cos \alpha - mg &= 0. \end{aligned}$$

Подставляя  $F_{\text{тр}} = \mu N$  (начало

проскальзывания) и исключая  $N$ , для минимальной угловой скорости получаем

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g \text{ ctg } \alpha - \mu}{l \sin \alpha + \mu \cos \alpha}}.$$

При проскальзывании наружу вверх сила трения направлена вниз, для максимальной угловой скорости находим

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g \text{ ctg } \alpha + \mu}{l \sin \alpha - \mu \cos \alpha}}.$$

Видно, что ограничение на  $\omega$  сверху существует при  $\mu < \text{tg } \alpha$ .

В следующей задаче рассматривается движение тела под действием силы, зависящей от времени.

**Задача 12.** На тело массой  $m = 2$  кг, лежащее на горизонтальной поверхности, начинает действовать горизонтальная сила, зависящая от времени по закону  $F = \gamma t$ , где  $\gamma = 2$  Н/с. Найдите скорость тела в момент времени  $t = 5$  с. Коэффициент трения между телом и плоскостью  $\mu = 0,3$ .

**Решение.** Тело будет оставаться в покое до момента времени  $t_0$ , когда сила трения покоя  $F_{\text{тр}} = F = \gamma t$  не достигнет максимального значения  $\mu N = \mu mg$ :

$$\gamma t_0 = \mu mg.$$

Отсюда находим  $t_0 = 3$  с. После этого тело начнет двигаться под действием внешней силы и силы трения скольжения. Равнодействующая сила станет отличной от нуля и будет возрастать по закону

$$F_p = \gamma t - \mu mg = \gamma(t - t_0).$$

Зависимость равнодействующей силы от времени изображена на рисунке 12. Поскольку ускорение тела зависит от времени, то для нахождения скорости мы не можем применять формулы равноускоренного движения. Однако искомая скорость может быть найдена графически. Так как на малом интервале времени  $\Delta t$  изменение импульса равно импульсу силы:  $\Delta p = F_p \Delta t$ , то изменение импульса тела за конечное время можно найти как площадь на графике  $F_p(t)$ :

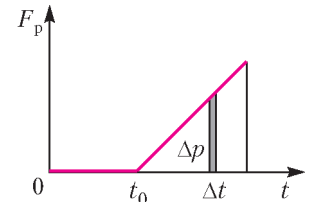


Рис. 12

можно найти как площадь на графике  $F_p(t)$ :

$$mv - 0 = \frac{1}{2}(t - t_0) \cdot \gamma(t - t_0).$$

Получаем

$$v = 2 \text{ м/с}.$$

Последние задачи посвящены тому, как сила трения «работает» в задачах на закон сохранения энергии. При наличии в системе силы трения ее механическая энергия уменьшается за счет перехода во внутреннюю, тепловую энергию. При решении задач можно либо использовать формулу для изменения механической энергии:

$$\Delta E_{\text{мех}} = A_{\text{тр}},$$

либо записывать закон сохранения энергии с учетом приращения внутренней тепловой энергии:

$$E_{\text{нач}} = E_{\text{кон}} + \Delta U, \quad \Delta U = -A_{\text{тр}} = |A_{\text{тр}}|.$$

Увеличение внутренней энергии часто называют «выделившимся количеством теплоты» и обозначают  $Q$ .



**Задача 13.** Однородный стержень длиной  $l = 2$  м, двигаясь вдоль своей длины по гладкой горизонтальной поверхности, начинает пересекать границу, за которой поверхность становится шероховатой с коэффициентом трения  $\mu = 0,2$ . Какое расстояние  $s$  проедет стержень с этого момента до остановки, если его начальная скорость была  $v_0 = 3$  м/с?

**Решение.** По мере увеличения длины  $x$  части стержня, заехавшей на шероховатую поверхность, сила трения возрастает по закону

$$F_{\text{тр}} = \mu mg \frac{x}{l}.$$

Так как стержень движется с переменным ускорением, то уравнения кинематики равноускоренного движения здесь не применимы. Однако поскольку сила трения линейно зависит от  $x$ , то ее работу можно рассчитать так:

$$A_{\text{тр}} = -\frac{0 + \mu mg (s/l)}{2} s.$$

Если подставить это выражение в формулу для изменения энергии

$$0 - \frac{mv_0^2}{2} = A_{\text{тр}},$$

то получим ответ:

$$s = 3 \text{ м.}$$

Многие школьники считают этот ответ окончательным, не замечая ловушки: полученное расстояние больше длины стержня! Это значит, что стержень заедет на шероховатый участок целиком, после чего сила трения становится постоянной. Закон сохранения энергии надо переписать так:

$$0 - \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{0 + \mu mg}{2} l - \mu mg (s - l).$$

Отсюда для пройденного расстояния получаем такой ответ:

$$s = 3,25 \text{ м.}$$

**Задача 14.** Тело массой  $m = 5$  кг, лежащее на горизонтальной плоскости, соединено с вертикальной стеной недеформированной пружиной. Ось пружины горизонтальна, ее жесткость  $k = 100$  Н/м, коэффициент трения между телом и плоскостью  $\mu = 0,4$ . Телу сообщают скорость  $v_0 = 1$  м/с, направленную вдоль оси пружины. Найдите максимальную деформацию пружины.

**Решение.** В этой задаче движение также происходит с переменным ускорением. Однако с помощью закона сохранения энергии задача решается мгновенно. Действительно,

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + \Delta U, \quad \Delta U = \mu mg \cdot x, \quad \text{и } x = 0,1 \text{ м.}$$

**Задача 15.** На горизонтальной плоскости лежат два бруска массами  $m_1 = 3$  кг и  $m_2 = 8$  кг, соединенные недеформированной пружиной. Какую наименьшую горизонтальную постоянную силу  $F$  нужно приложить к первому бруску, чтобы сдвинулся и второй? Коэффициенты трения брусков о плоскость  $\mu_1 = 0,2$  и  $\mu_2 = 0,15$  соответственно.

**Решение.** Минимальность силы  $F$  означает, что в тот момент, когда второй брусок начинает сдвигаться под действием силы упругости  $kx = \mu_2 m_2 g$ , первый брусок остановится. Запишем для первого бруска формулу для изменения механической энергии (под действием двух сил — силы

трения и внешней силы):

$$Fx - \mu_1 m_1 g x = \frac{kx^2}{2} - 0.$$

Подставляя  $kx$  из первого уравнения, получим

$$F = \mu_1 m_1 g + \frac{1}{2} \mu_2 m_2 g = 12 \text{ Н.}$$

Обращаем внимание на нетривиальное обстоятельство: ответ не зависит от жесткости пружины!

**Задача 16.** На гладкой горизонтальной плоскости лежит доска длиной  $l = 1$  м, на одном конце которой закреплен вертикальный упор. Какую минимальную скорость надо сообщить маленькому бруску, лежащему на другом конце доски, чтобы после абсолютно упругого удара об упор брусок вернулся назад и упал с доски? Масса доски в 8 раз больше, чем масса бруска, коэффициент трения между ними  $\mu = 0,2$ .

**Решение.** Если решать задачу в рамках динамики, то придется дважды исследовать движение доски и бруска и, кроме того, решать уравнения упругого удара. Однако через работу силы трения задача решается сравнительно просто. Полная работа силы трения на каждом этапе выражается через относительное перемещение бруска и доски:

$$A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}} s_6 + F_{\text{тр}} s_d = -F_{\text{тр}} (s_6 - s_d) = -\mu m_1 g l.$$

Запишем закон сохранения энергии за все время движения (упругий удар никак не входит — при упругом ударе механическая энергия не меняется):

$$\frac{m_1 v_0^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) v'^2}{2} + \mu m_1 g (2l).$$

Здесь  $v'$  — конечная скорость доски и бруска (брусок вернется к краю доски и остановится), которую найдем из закона сохранения импульса

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v'.$$

После преобразований получим

$$v_0 = \sqrt{4\mu g l \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)} = 3 \text{ м/с.}$$

### Упражнения

1. Тело помещают один раз на наклонную плоскость с углом наклона  $30^\circ$ , а второй раз — с углом наклона  $60^\circ$ . На сколько процентов сила трения в первом случае больше, чем во втором, если коэффициент трения в обоих случаях  $0,8$ ?

2. Тело поднимают вверх вдоль наклонной плоскости, прикладывая к нему горизонтальную силу, величина которой вдвое больше действующей на тело силы тяжести. Высота наклонной плоскости  $3$  м, ее длина  $5$  м. Найдите ускорение тела, если коэффициент трения  $0,2$ .

3. На горизонтальной поверхности лежит груз массой  $10$  кг. К нему приложена горизонтальная сила  $12$  Н. Какую минимальную горизонтальную силу надо дополнительно приложить в перпендикулярном направлении, чтобы сдвинуть груз с места? Коэффициент трения  $0,2$ .

4. С какой минимальной скоростью должен ехать мотоциклист по внутренней поверхности вертикального цилиндра радиусом  $10$  м, чтобы все время оставаться в одной горизонтальной плоскости? Коэффициент трения между шинами мотоцикла и поверхностью цилиндра  $0,25$ .

5. Мотоциклист производит поворот на наклонном треке. Во сколько раз максимально допустимая скорость движения больше минимальной, если коэффициент трения  $0,75$ , а угол наклона трека к горизонту  $45^\circ$ ? Поворот надо пройти без проскальзывания колес по треку.

6. Однородный стержень длиной 2 м, двигаясь вдоль своей длины по шероховатой горизонтальной поверхности, начинает пересекать границу, за которой поверхность становится гладкой. Скорость стержня в этот момент равна 1,6 м/с. Какое расстояние проедет стержень от этого момента до остановки, если коэффициент трения о шероховатую поверхность 0,2?

7. С наклонной плоскости, образующей угол  $45^\circ$  с горизонтом, с высоты 1 м соскальзывает небольшая шайба. В конце спуска у основания наклонной плоскости шайба абсолютно упруго ударяется о стенку и поднимается вверх по наклонной плоскости. На какую высоту поднимется шайба после удара, если коэффициент трения шайбы о плоскость 0,25?

8. Два одинаковых тела массами по 5 кг соединены недеформированной пружиной жесткостью 15 Н/м и лежат на горизонтальном полу. Какую минимальную скорость, направленную вдоль оси пружины, надо сообщить одному из тел, чтобы оно сдвинуло другое тело? Коэффициент трения для каждого тела 0,1.

9. На гладком полу находится доска массой 1,5 кг, на которой лежит брусок массой 490 г. В брусок попадает и застревает в нем пуля массой 10 г, летящая горизонтально вдоль доски со скоростью 100 м/с. На какое расстояние сместится брусок вдоль доски, если коэффициент трения между ними 0,5?

## О Л И М П И А Д Ы

# XXXVII Турнир городов

### Задачи осеннего тура (2015 год)

Базовый вариант

8–9 классы

1 (4)<sup>1</sup>. Верно ли, что любое натуральное число можно умножить на одно из чисел 1, 2, 3, 4 или 5 так, чтобы результат начинался на цифру 1?

*Е.Бакаев*

2 (4). Из одинаковых неравносторонних прямоугольных треугольников составили прямоугольник (без дырок и наложений). Обязательно ли какие-то два из этих треугольников расположены так, что образуют прямоугольник?

*Е.Бакаев*

3 (5). Трое играют в «камень-ножницы-бумагу». В каждом раунде каждый наугад показывает «камень», «ножницы» или «бумагу». «Камень» побеждает «ножницы», «ножницы» побеждают «бумагу», «бумага» побеждает «камень». Если в раунде было показано ровно два различных элемента (и значит, один из них показали дважды), то игроки (или игрок), показавшие победивший элемент, получают по 1 баллу; иначе баллы никому не начисляются. После нескольких раундов оказалось, что все элементы были показаны одинаковое количество раз. Докажите, что в этот момент сумма набранных всеми баллов делилась на 3.

*Е.Бакаев*

4 (5). На катетах  $AC$  и  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  отметили точки  $K$  и  $L$  соответственно, а на гипотенузе  $AB$  – точку  $M$  так, что  $AK = BL = a$ ,  $KM = LM = b$  и угол  $KML$  прямой. Докажите, что  $a = b$ .

*Е.Бакаев*

5. В стране 100 городов, между каждыми двумя городами осуществляется беспосадочный перелет. Все рейсы платные и стоят положительное (возможно, нецелое) число тугриков. Для любой пары городов  $A$  и  $B$  перелет из  $A$  в  $B$  стоит столько же, сколько перелет из  $B$  в  $A$ . Средняя стоимость перелета

равна 1 тугрику. Путешественник хочет облететь какие-нибудь  $m$  разных городов за  $m$  перелетов, начав и закончив в своем родном городе. Всегда ли ему удастся совершить такое путешествие, потратив на билеты не более  $m$  тугриков, если:

- а) (3)  $m = 99$ ;  
б) (3)  $m = 100$ ?

*Е.Бакаев*

10–11 классы

1 (3). Пусть  $p$  – простое число. Сколько существует таких натуральных  $n$ , что  $pn$  делится на  $p + n$ ?

*Б.Френкин*

2 (4). Даны равнобедренный прямоугольный треугольник  $ABC$  и прямоугольный треугольник  $ABD$  с общей гипотенузой  $AB$  ( $D$  и  $C$  лежат по одну сторону от прямой  $AB$ ). Пусть  $DK$  – биссектриса в треугольнике  $ABD$ . Докажите, что центр описанной окружности треугольника  $ACK$  лежит на прямой  $AD$ .

*Е.Бакаев, А.Зимин*

3 (4). См. задачу 3 для 8–9 классов.

4. а) (2) См. задачу 5,а для 8–9 классов.  
б) (2) См. задачу 5,б для 8–9 классов.

5 (5). Дана бесконечно возрастающая арифметическая прогрессия. Первые ее несколько членов сложили и сумму объявили первым членом новой последовательности, затем сложили следующие несколько членов исходной прогрессии и сумму объявили вторым членом новой последовательности и так далее. Могла ли новая последовательность оказаться геометрической прогрессией?

*Г.Жуков*

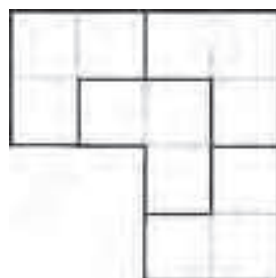
Сложный вариант

8–9 классы

1. Будем называть клетчатый многоугольник *выдающимся*, если он не является прямоугольником и из нескольких его копий можно сложить подобный ему многоугольник. Например, уголок из трех клеток – выдающийся многоугольник (это видно из рисунка на с. 57).

а) (2) Придумайте выдающийся многоугольник из 4 клеток.

<sup>1</sup> В скобках после номера задачи указано максимальное число баллов, присуждавшихся за ее решение. Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.



б) (3) При каких  $n > 4$  существует выдающийся многоугольник из  $n$  клеток?

*Е.Бакаев*

2. а) (2) См. задачу M2406,а «Задачника «Кванта».

б) (4) См. задачу M2406,б «Задачника «Кванта».

3. Докажите, что сумма длин любых двух медиан произвольного треугольника:

а) (3) не больше  $3P/4$ , где  $P$  – периметр этого треугольника;

б) (5) не меньше  $3p/4$ , где  $p$  – полупериметр этого треугольника.

*Л.Емельянов*

4 (8). См. задачу M2409 «Задачника «Кванта».

5 (8). См. задачу M2408 «Задачника «Кванта».

6. а) (3) См. задачу M2411,а «Задачника «Кванта».

б) (7) См. задачу M2411,б «Задачника «Кванта».

7 (10). У Деда Мороза было  $n$  сортов конфет, по  $k$  штук каждого сорта. Он распределил все конфеты как попало по  $k$  подаркам, в каждый – по  $n$  конфет, и раздал их  $k$  детям. Дети решили восстановить справедливость. Два ребенка готовы передать друг другу по конфете, если каждый получает конфету сорта, которого у него нет. Всегда ли можно организовать серию обменов так, что у каждого окажутся конфеты всех сортов?

*М.Евдокимов*

## 10–11 классы

1 (3). Геометрическая прогрессия состоит из 37 натуральных чисел. Первый и последний члены прогрессии взаимно просты. Докажите, что 19-й член прогрессии является 18-й степенью натурального числа.

*Б.Френкин*

2 (6). Дан клетчатый квадрат  $10 \times 10$ . Внутри него провели 80 единичных отрезков по линиям сетки, которые разбили квадрат на 20 многоугольников равной площади. Докажите, что все эти многоугольники равны.

*П.Кожевников*

3 (7). См. задачу M2407 «Задачника «Кванта».

4 (7). См. задачу M2410 «Задачника «Кванта».

5. а) (2) См. задачу M2411,а «Задачника «Кванта».

б) (6) См. задачу M2411,б «Задачника «Кванта».

6. Арбуз имеет форму шара диаметра 20 см. Вася сделал длинным ножом три взаимно перпендикулярных плоских надреза глубиной  $h$  (надрез – это сегмент круга,  $h$  – высота сегмента, плоскости надрезов попарно перпендикулярны). Обязательно ли при этом арбуз разделится хотя бы на два куска, если:

а) (6)  $h = 17$  см;

б) (6)  $h = 18$  см?

*М.Евдокимов*

7 (12). См. задачу M2413 «Задачника «Кванта».

*Публикацию подготовили С.Дориченко, Л.Медников, А.Семенов, А.Шатовалов*

## Евклид и неприводимые многочлены

*Начало см. на с. 50)*

### Упражнения

8. Опишите все многочлены  $f$  из  $\mathbb{Z}[x]$ , для которых  $\tilde{f}$  – нулевой многочлен.

9. Найдите количество многочленов  $f$  из  $\mathbb{Z}[x]$  со старшим коэффициентом 1 таких, что все коэффициенты  $f$  по модулю не превосходят 10 и  $\tilde{f}(x) = x^5 + x^2 + 1$ .

Отображение  $f \rightarrow \tilde{f}$  хорошо тем, что сохраняет операции суммы и произведения (такие отображения в алгебре называют *гомоморфизмами*), т.е.  $\widetilde{f+g} = \tilde{f} + \tilde{g}$  и  $\widetilde{fg} = \tilde{f}\tilde{g}$  (в правой части первого равенства имеется в виду сложение «по модулю 2»).

**Упражнение 10.** Докажите эти равенства.

Имея в виду отображение  $f \rightarrow \tilde{f}$ , можно сказать, что  $\mathbb{Z}_2[x]$  – черно-белая фотография цветного мира  $\mathbb{Z}[x]$ .

При отображении  $f \rightarrow \tilde{f}$  неприводимый многочлен может стать приводимым и наоборот; скажем, для  $f(x) = x(2x+1)$  имеем  $\tilde{f}(x) = x$ , а для  $g(x) = x^2+1$  имеем  $\tilde{g}(x) = x^2+1 = (x+1)^2$ . Но если ограничиться многочленами со старшим коэффициентом 1, имеет место простая, но важная для нас лемма.

**Лемма о сохранении приводимости.** Пусть  $f$  – приводимый многочлен над  $\mathbb{Z}$  со старшим коэффициентом 1, тогда  $\tilde{f}$  – приводимый многочлен над  $\mathbb{Z}_2$ .

**Доказательство.** Так как  $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$  приводим, то  $f = gh$ , где  $g$  и  $h$  – многочлены с целыми коэффициентами степеней  $k$  и  $l$ ,  $0 < k < n$ ,  $0 < l < n$ ,  $k+l=n$ . Старшие коэффициенты многочленов  $g$  и  $h$  должны равняться  $\pm 1$ , поэтому  $\tilde{g}$  имеет старший коэффициент 1 и степень  $k$ . Аналогично,  $\tilde{h}$  имеет степень  $l$ . (Здесь важно, что  $\tilde{g}$  и  $\tilde{h}$  не «выродились» в 1.) Значит,  $\tilde{f} = \tilde{g}\tilde{h}$  – разложение, показывающее, что  $\tilde{f}$  приводим над  $\mathbb{Z}_2$ . Лемма доказана.

Из леммы следует, что если  $\tilde{p}$  – неприводимый многочлен над  $\mathbb{Z}_2$ , то любой его прообраз  $p$  со старшим коэффициентом 1 является неприводимым над  $\mathbb{Z}$  многочленом. Теперь существование неприводимых над  $\mathbb{Z}$  многочленов сколь угодно высокой степени следует из доказанного ранее аналогичного утверждения для многочленов, неприводимых над  $\mathbb{Z}_2$ .

В заключение в виде упражнения предлагаем еще один вариант рассуждения на основе идей Евклида, доказывающего существование неприводимых над  $\mathbb{Z}$  многочленов сколь угодно высокой степени.

**Упражнение 11.** Если  $f$  – неприводимый над  $\mathbb{Z}$  многочлен, то многочлен  $\tilde{f}$  назовем *хорошим* (как мы видели, хороший многочлен может быть приводимым; можно доказать, что все многочлены из  $\mathbb{Z}_2[x]$  хорошие).

а) Докажите, что каждый элемент из  $\mathbb{Z}_2[x]$  раскладывается в произведение хороших многочленов.

б) Примените идею Евклида для доказательства бесконечности множества хороших многочленов.

в) Докажите, что если бы все неприводимые над  $\mathbb{Z}$  многочлены имели степень, не превосходящую  $m$ , то хороших многочленов было бы конечное количество.



# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## ПЯТНАДЦАТЬ ЧЕЛОВЕК НА СУНДУК МЕРТВЕЦА

### Упражнения

1. Юнга получил  $1/16$  остатка и 15 монет, на этом монеты закончились. Значит, 15 монет составляли  $15/16$  остатка, т.е. доля юнги составила 16 монет. Так как все получили поровну, то клад составлял  $15 \cdot 16 = 240$  монет.
2. Пусть в начале (и в конце) в кружках было налито  $A$ ,  $B$  и  $C$  частей рома. Третий пират разлил остальным весь свой ром, и по условию получил столько, сколько у него было вначале. Значит,  $C = 0$ , т.е. была ситуация  $(A, B, 0)$ . Перед третьим свой ром разливал второй, значит,  $B$  – это столько, сколько влил ему третий. Итак, перед тем, как третий разливал ром, у него было  $2B$ , а у первого  $A - B$ . Значит, после разлива второго была ситуация  $(A - B, 0, 2B)$ . Но здесь у первого ровно столько, сколько ему налил второй, т.е. до этого у второго было  $2(A - B)$ , а у третьего  $2B - (A - B) = 3B - A$ . Так как мы знаем, что до хода первого у третьего не было ничего, то первый влил ему  $3B - A$ . Тогда  $A = 2(3B - A)$  и  $B = 2(A - B) - (3B - A) = 3A - 5B$ . Оба уравнения после упрощения приводят к одному и тому же соотношению  $A = 2B$ . Таким образом, общий объем рома равен  $A + B = 3B$ , откуда  $B = 2/3$  пинты,  $A = 4/3$  пинты.
3. Никак не изменится. Выше в статье мы убедились, что даже при простом большинстве первое же голосование соберет все голоса, кроме одного. Ровно это же случится и при измененном правиле 3.
4. а)  $\times \times \times \times \times \times \times \times 5 0 1 2 3 4 5$  (крестик означает выброшенного за борт пирата).
- б) Обозначим  $p = (N - 1)(N - 2)/2$ . Пиратов бросают за борт до тех пор, пока  $p$  не станет меньше или равно  $K$ . Для оставшихся пиратов решение:  $(K - p, 0, 1, 2, \dots, N - 2)$ .

### Задачи для самостоятельного решения

1. 93 0 \* \* \* \* \*  
Как обычно, 15-й пират, если до него дойдет очередь, забирает все деньги себе.  
14-й пират должен выделить по одной монетке семи пиратам из первых тринадцати, чтобы обеспечить поддержку большинства. Для 14-го пирата абсолютно не важно, каким именно семи пиратам дать по монете, поэтому выбор будет сделан случайным образом:

\* \* \* \* \* 93 0

Пираты, у которых есть шанс получить монету, отмечены звездочкой.  
13-й пират поступает аналогично. Забирает себе 93 монеты, а оставшиеся 7 монет распределяет между оставшимися пиратами, исключая пирата с номером 14. Каждый пират, которому 13-й даст монету, с радостью проголосует за его план, так как гарантированная монета от 13-го пирата выгоднее, чем возможность получить монету от 14-го.  
Аналогично рассуждают и остальные пираты. Пират с номером  $X$  забирает себе 93 монеты и случайным образом распределяет 7 монет между тринадцатью пиратами, исключая пирата с номером  $X + 1$ .  
Не станет исключением и самый первый пират. Он даст по монетке каким-нибудь случайно выбранным семи пиратам с номерами больше двух:

93 0 \* \* \* \* \*

- Именно этот план и будет принят.  
2. 92 0 1 2 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1  
Приведем лишь набор планов, которые выдвинут пираты.

```

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 100
1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 93 0
2 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 92 0 1
0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 93 0 1 0
1 2 0 0 0 0 0 1 1 1 92 0 1 0 1
0 0 1 1 1 1 1 0 0 93 0 1 0 1 0
1 1 2 0 0 0 0 1 92 0 1 0 1 0 1
0 0 0 1 1 1 1 93 0 1 0 1 0 1 0
1 1 1 0 0 0 93 0 1 0 1 0 1 0 1
2 0 0 1 1 92 0 1 0 1 0 1 0 1 0
0 1 1 0 93 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1
1 2 0 92 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0
2 0 92 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1
0 92 0 1 2 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0
92 0 1 2 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1
    
```

3. По одной монете получают пираты от 48-го до 62-го, считая с конца.  
В решении задачи 5б мы доказали, что будет принято предложение 94-го пирата. Все пираты от 63-го до 93-го являются «смертниками» и поэтому будут голосовать за план 94-го бесплатно. Так же бесплатно за него проголосует сам 94-й. А деньги он отдаст старшим из тех, кто не получали денег при предыдущем принимаемом предложении. Поскольку это было предложение 62-го, а все от 47-го до 61-го были смертниками, то ни у кого от 47-го до 62-го включительно денег не было. Следовательно, старшие из них и получают деньги.
4. Если  $K < M$ , то  $K$  монет, иначе

$$\max(M, \lfloor (K + 1)/(M + 1) \rfloor - 1) \text{ монет.}$$

Сформулируем в общем виде две стратегии шкипера, описанные в решении задачи 7. Первая стратегия – шкипер оставляет себе  $M$  монет (если  $K < M$ , то  $K$  монет), а остальные отдает капитану. Капитан соглашается с этим планом, так как для поддержки любого альтернативного плана ему потребуется отдать по 1 монете  $M$  матросам, но в этом случае сам капитан получит не больше, чем ему отдаст штурман.  
Вторая стратегия заключается в том, что шкипер выделяет  $M$  матросам группы  $A$  по  $\lfloor (K + 1)/(M + 1) \rfloor$  монет, а себе оставляет  $\lfloor (K + 1)/(M + 1) \rfloor - 1$  монету. Оставшиеся монеты шкипер может отдать капитану либо матросам группы  $A$ . Таким образом, общая прибыль штурмана составит

$$K \text{ монет, если } K < M;$$

$$\max(M, \lfloor (K + 1)/(M + 1) \rfloor - 1) \text{ монет, если } K \geq M.$$

5. По 7 капитану и шкиперу, 1 юнге.  
Для краткости обозначим наших героев буквами  $K$  (капитан, предлагает план первым),  $Ш$  (шкипер, второй) и  $Ю$  (юнга, третий).  
**Утверждение 1.**  $Ю$  гарантированно получит хотя бы одну монету.  
**Доказательство.** У  $Ю$  всего две разные линии поведения – «сотрудничать» с остальными или «мстить», т.е. действовать так, чтобы добыча не досталась никому. Всегда ли у  $Ю$  есть возможность и желание мстить? Рассмотрим два возможных случая.  
А. После выдвижения планов  $K$  и  $Ш$  мнения пиратов разделились: двое готовы голосовать за какой-то один план  $П1$ , третий – за другой план  $П2$ . Тогда  $Ю$  может отомстить, предложив 15 монет тому из двоих, кто голосует за  $П1$  и при этом получает меньше другого.  
Б. После выдвижения планов  $K$  и  $Ш$  все трое готовы проголосовать за один и тот же план. Тогда у  $Ю$  есть возможность перекупить голос того, кто по плану получает меньше, а все остальные деньги взять себе. Таким образом, нет необходимости мстить.

Поскольку «мсть юнга» не устраивает никого из остальных, то планы *K* и *III* будут такими, чтобы *Ю* не мстил. Для этого им достаточно, чтобы в варианте сотрудничества *Ю* смог получить деньги. Следовательно, *Ю* всегда получит деньги.

**Утверждение 2.** *III* может получить не меньше 7 при любом плане *K*, кроме трех планов – (0, 15, 0), (1, 14, 0) и (7, 0, 8). Однако все эти планы невыгодны *K*, потому что заканчиваются они итогом (1, 1, 13), (2, 1, 12) и (0, 6, 9) соответственно.

**Доказательство.** Обозначим предложение *K* как (A, B, C): A монет себе, B шкиперу, C юнге. Разбор планов-исключений оставим читателям в качестве упражнения. Остальные части теоремы 2 будем доказывать по пунктам.

1. Если [ $B \geq 7$  и (A, B, C) не равно исключениям (1, 14, 0) и (0, 15, 0)], то *III* может предложить (15, 0, 0), и этот план гарантирует ему в итоге не меньше чем B монет.

Ясно, что  $A < 9$ , поэтому план (15, 0, 0) независимо от предложения, сделанного *Ю*, гарантированно получит голос *K*.

Однако два остальных голоса будут точно отданы за другие предложения. При  $A > 1$  проходит предложение *Ю* (0, B + 1, 14 - B).

Однако при  $A < 2$  будет  $14 - B \leq C$ , поэтому *Ю* сам не сможет проголосовать за такое предложение. А так как ему не хочется оставаться без денег, то при  $C > 0$  он вынужден соглашаться на C, а для этого, например, повторить предложение *K*, и тогда оно будет принято двумя голосами из трех, что принесет третьему C монет.

Единственные планы-исключения описываются условиями  $A < 2$  и  $C = 0$ , т.е. это (0, 15, 0) и (1, 14, 0).

2. Если [ $B < 7$  и  $C < 8$ ], то *III* выдвинет (9, 6, 0), в ответ *Ю* предложит (0, 7, 8) и перекупит *III*.

Нетрудно убедиться, что план (0, 7, 8) лучше и для *III*, и для *Ю*, чем планы *K* и *III*. Кроме того, несложно убедиться, что у *Ю* не существует другого плана, приносящего ему хотя бы 8 монет.

3. Если [ $A < 7$ ,  $B < 7$  и  $C > 7$ ], то *III* выдвинет (7, 7, 1), и это будет в итоге поддержано голосами *K* и *III*.

$A < 7$  и  $B < 7$  по условию, так что два голоса за этот план есть, поэтому у *Ю* не получится сделать так, чтобы прошел план *K*. Чтобы перекупить чей-то голос, юнге нужно отдать не менее 8 монет, но тогда себе не получится взять больше 7, а так как  $C > 7$ , то юнге после такого своего предложения пришлось бы голосовать за план *K*, т.е. мстить. А так как в итоге проходит план *III*, в котором *Ю* получает монету, то мстить он не должен.

Итак, у нас выше разобраны планы *K*, при которых *III* получает не меньше 7 монет. Это:

1.  $B \geq 7$ , кроме двух исключений;
2.  $B < 7$ ,  $C < 8$ ;
3.  $A < 7$ ,  $B < 7$ ,  $C > 7$ .

Изобразим все эти случаи в табличке с координатами (A, B) (см. таблицу) помня, что [ $C = 15 - A - B$ ]. Исключения закрасим красным.

Если первый случай не выполнен, то  $B < 7$ . Если не выполнен и второй, то  $C > 7$ . Но если при этих B, C не выполнен третий случай, то  $A \geq 7$ . Это значит, что остался вне рассмотрения только план (7, 0, 8). Он действительно плох для *III* (третье исключение).

Мы доказали (утверждения 1 и 2), что *Ю* получит не менее 1, а *III* почти всегда (кроме трех планов-исключений, которые невыгодны *K*) получит не менее 7. Следовательно, *K* не может получить больше 7 монет. Теперь предьявим план, приносящий ему 7.

**Утверждение 3.** Капитан может гарантировать себе не менее 7 монет, если озвучит план (6, 0, 9). *Замечание.* Так же работает и план (6, 1, 8).

A \ B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	3	3	3	3	3	3	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	3	3	3	3	3	3	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	3	3	3	3	3	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	3	3	3	3	3	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	3	3	3	3	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	3	3	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1

**Доказательство.** Действительно, для *III* этот план «опасен» тем, что если *K* и *Ю* его поддержат, то *III* не получит ничего. Значит, *III* должен либо выдвинуть свой план, за который проголосует кто-то из остальных, либо дать возможность *Ю* выдвинуть такой план, за который проголосуют *III* и *Ю*. Рассмотрим возможные планы шкипера (A, B, C). Прежде всего, пойдем, какими эти планы не должны быть с точки зрения возможной мести юнга. Очевидно, что нельзя предлагать  $C = 0$ ,  $A > 6$ ,  $B > 9$  из-за мести (15, 0, 0).

Если на своем плане *III* сможет купить голос *Ю*, то  $C > 9$ , поэтому  $B < 6$ . Следовательно, *III* не будет так делать. Чтобы *Ю* провел свой план, ему нужно будет купить голос *III* (купить голос *K* не удастся, так как одновременно предложить *K* больше 6 и себе больше 9 юнга не сможет). Но чтобы купить голос *III*, юнга должен предлагать (0, B + 1, 14 - B), а чтобы это предложение прошло, должно быть выполнено  $14 - B > 9$ , т.е.  $B < 5$ .

Таким образом, в каждом из этих случаев *III* получает не более 5 монет, и единственный его шанс на большее – это купить своим планом голос *K*. Значит, он должен предложить тому больше, чем он предложил себе сам:  $A > 6$ . Однако так как при этом нельзя оставлять третьего без монет, то  $C > 0$ . Единственное предложение с  $A > 6$ ,  $B > 6$  и  $C > 0$  – это (7, 7, 1), которое мы в утверждении 2 и рассматривали в качестве ответа *III* на любой капитанский план с  $A < 7$ ,  $B < 7$ . Ранее мы уже доказали, что оно будет принято двумя голосами – *K* и *III*.

Таким образом, основная задача дележа на яхте «Золушка» решена полностью.

Докажите самостоятельно, что если план дележа должен быть принят единогласно, то монеты окажутся разделены так: 13:1:1.

### КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вот несколько «подсказок», которые могут помочь вам при решении задач.

1) При движении жесткого стержня расстояние между двумя любыми его точками остается постоянным. Отсюда следует так называемое правило проекций (рис.1):

$$v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta = v_C \cos \gamma = \dots$$

2) Мгновенная ось вращения (в плоскости – центр вращения, точка O на рисунке 2) – это линия точек твердого тела, которые в данный момент неподвижны. В этот момент тело как бы поворачивается вокруг этой оси. Скорость любой точки тела должна быть перпендикулярна отрезку, соединяющему

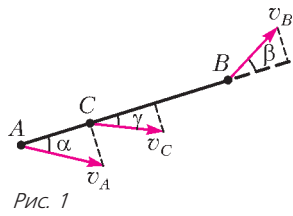


Рис. 1

ее с мгновенной осью (иногда эта ось может находиться и вне тела).

3) Приведем еще одну формулировку принципа возможных (виртуальных) перемещений (кроме упомянутого в разделе «Любопытно, что ...»):

Для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма работ всех действующих на систему внешних сил при любых виртуальных перемещениях системы была равна нулю.

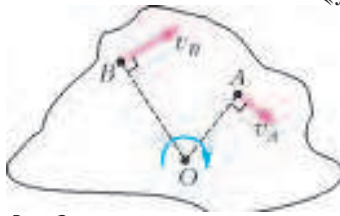


Рис. 2

**Вопросы и задачи**

1. 2l.

2. Как видно из рисунка 3, в обоих случаях катушка будет катиться по направлению скорости нити, но в случае а) скорость  $v_0$  ее оси будет меньше, чем в случае б).

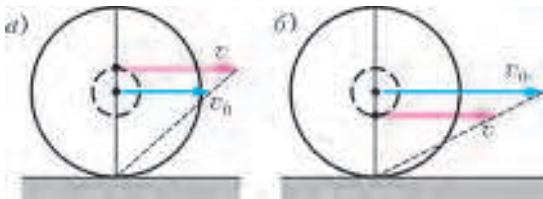


Рис. 3

3. Колесо совершит один оборот вокруг своей оси. Траектория точки обода колеса проходит по диаметру цилиндра.

4. В системе отсчета, связанной с нижним грузом, стержень совершает чисто вращательное движение. Значит (рис.4),  $\vec{v}_{отн} = \vec{v} - \vec{v}_0$ . Из треугольника скоростей находим  $v = v_0 \operatorname{ctg} \alpha$ .

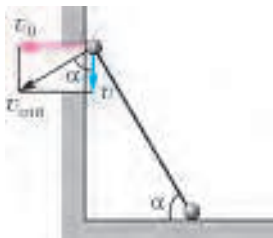


Рис. 4

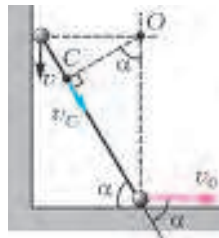


Рис. 5

5. Как видно из рисунка 5, где O – мгновенный центр вращения, это будет точка C. Из условия нерастяжимости стержня (правило равенства проекций) следует, что  $v_C = v_0 \cos \alpha$ .

6. Условие нерастяжимости троса, соединяющего катер и воднолыжника (рис.6), приводит к положительному ответу на оба вопроса.

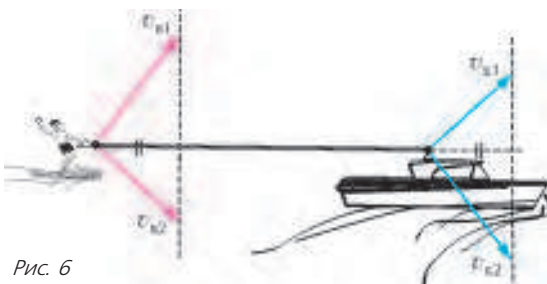


Рис. 6

7. Надеемся, вы нашли оба варианта ответа. Построение на рисунке 7,а выполнено по правилу равенства проекций, а на рисунке 7,б – с помощью мгновенного центра вращения.

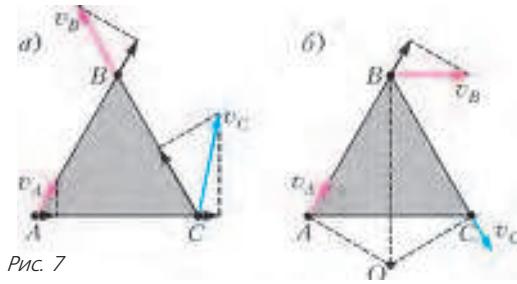


Рис. 7

8. Все точки шара, лежащие на отрезке AB, неподвижны (рис.8). Значит, в каждый момент движение шара – это вращение относительно оси AB. Максимальной скоростью обладает точка D, наиболее удаленная от этой оси.

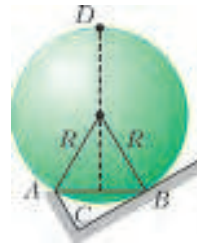


Рис. 8

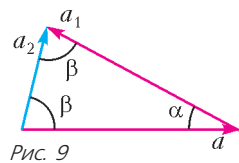


Рис. 9

равными по модулю ускорениями  $a$  и  $a_1$  (рис.9). Таким образом, грузик относительно земли будет двигаться с ускорением  $a_2 = 2a \sin(\alpha/2)$ , направленным к горизонту под углом  $\beta = \pi/2 - \alpha/2$ .

10. Хотя процессы падения существенно различаются (рис.10), окончательные результаты в случаях а) и б) одинаковы: скорость нижнего шарика в конце падения равна нулю, скорость верхнего в 2 раза больше скорости среднего.

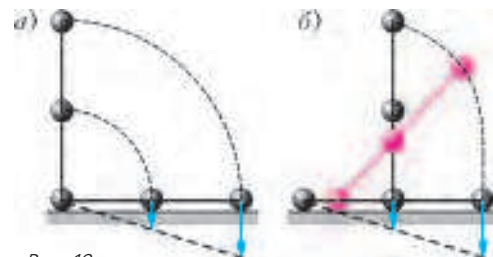


Рис. 10

11. Из рисунка 11 видна связь между перемещениями грузиков и блока за одно и то же время. Слева нить удлиняется на суммарное перемещение блока и левого грузика, справа – на столько же укорачивается. Следовательно,  $u = 2v$ .

12. Уравнение движения левого нижнего блока приводит к выводу, что сила натяжения нити равна нулю. Значит, грузы свободно падают с ускорением  $g$ . При этом блоки B и C вращаются против часовой стрелки, блок A – по часовой стрелке.

13. На рисунке 12 показано, как связаны углы поворота спицы  $\alpha$  и колечка  $\beta$  за малый промежуток времени  $t$ . Из геометрии следует, что  $\beta = 2\alpha$  для любых  $t$ . Значит, угло-

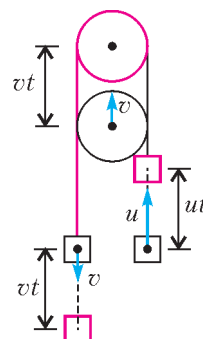


Рис. 11

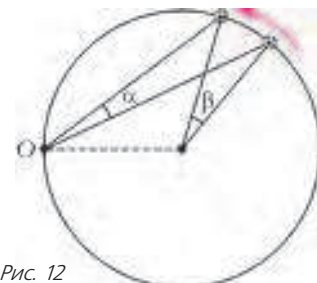


Рис. 12



вая скорость колечка в 2 раза больше  $\omega$ , а линейная его скорость равна  $2\omega R$ .

14. При возможном малом уменьшении длины нити на  $x$  точка подвеса груза поднимется на  $3x$ . В соответствии с принципом возможных перемещений найдем, что сила натяжения нити равна  $3mg$ .

**Микроопыт**

Если линейки движутся в одну сторону с одинаковыми скоростями, то карандаш движется вместе с ними как одно целое, не вращаясь. В случае одинаково направленных, но разных по величине скоростей линеек ось вращающегося карандаша начинает поступательно перемещаться. Если же скорости линеек направлены в разные стороны и равны по модулю, то карандаш совершает только вращательное движение.

**КОНКУРС ИМЕНИ А. П. САВИНА**

(см. «Квант» №4 за 2015 г.)

1. 119.

Если для числа  $k$  из верхней строки число  $m$  является умножителем, то  $km = n - k + 1$  (это количество чисел, которое будет в первой строке, если идти по строке, начиная с числа  $k$ ). Отсюда  $n + 1 = k(m + 1)$ , следовательно,  $n + 1$  делится на  $m + 1$ .

Значит, в случае умножителей 11, 9, 7, 5, 4, 3, 2 число  $n + 1$  должно делиться на 12, 10, 8, 6, 5, 4, 3. Наименьшее возможное число с таким свойством – наименьшее общее кратное этих чисел, т.е. 120.

Нетрудно проверить, что при  $n = 119$  во второй строке действительно встретится каждое из чисел 11, 9, 7, 5, 4, 3, 2.

2. При  $n = 1$  прав Петя, при  $n \geq 2$  прав Коля.

Если  $n = 1$ , то доска имеет размеры  $2 \times 2$  и есть всего две изящные раскраски (в шахматном порядке). Одна получается из другой перестановкой строк или столбцов.

Пусть  $n \geq 2$ . Чтобы подтвердить правоту Коли, достаточно привести пример двух изящных раскрасок, которые не переводятся друг в друга при помощи указанных операций. На рисунке 13 приведен пример таких раскрасок (это пример

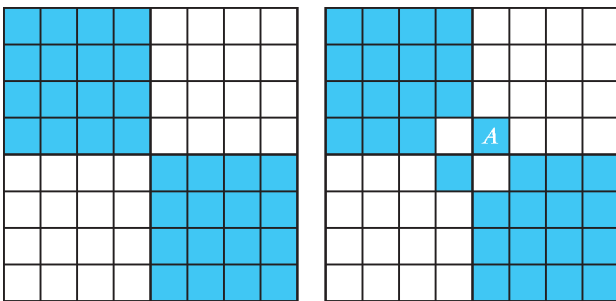


Рис. 13

для  $n = 4$ , но аналогичные рассуждения работают и для всех остальных  $n \geq 2$ ). Докажем, что, меняя местами строки и столбцы, нельзя получить из одной раскраски другую.

Для этого заметим, что если выделить четыре клетки, центры которых образуют прямоугольник со сторонами, параллельными сторонам доски, то после любой перестановки строк и столбцов центры этих клеток по-прежнему будут образовывать прямоугольник со сторонами, параллельными сторонам доски (для краткости будем называть такие прямоугольники *правильными*). Также заметим, что на левой доске для любой синей клетки можно найти еще три синие клетки такие, что центры всех четырех клеток образуют правильный прямоугольник. Значит, как бы мы не меняли местами строки и столбцы на левой доске, центр любой синей клетки будет вершиной хотя бы одного правильного прямоугольника, у кото-

рого все вершины – центры синих клеток. Теперь посмотрим на правую доску на рисунке 13 и заметим, что у всех правильных прямоугольников, у которых одна из вершин – центр клетки, отмеченной буквой  $A$ , хотя бы одна из вершин оказывается центром белой клетки. Значит, эти две раскраски нельзя перевести друг в друга указанными операциями.

3. Могут.

Пример подходящего расположения треугольников и прямых показан на рисунке 14.

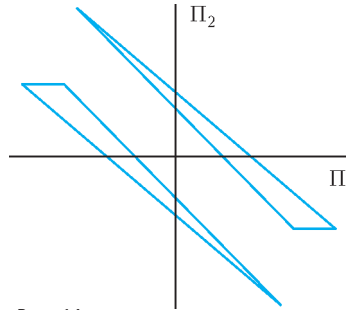


Рис. 14

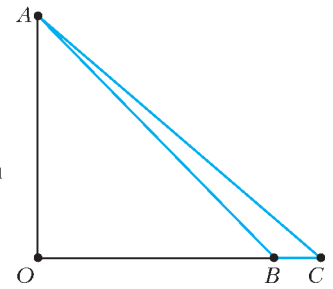


Рис. 15

Теперь нужно объяснить, почему такая конфигурация вообще возможна.

Рассмотрим треугольник  $ABC$ , построение которого видно из рисунка 15: прямые  $OA$  и  $OB$  перпендикулярны,  $OA = OB = 5$ ,  $BC = 1$ . Выясним, как проходит *вертикальная* прямая  $\Pi_2$ , делящая периметр этого треугольника пополам. Пусть  $OM = 3$  (т.е.  $M$  – середина  $OC$ ), а  $K$  – точка пересечения  $AB$  и вертикальной прямой, проходящей через точку  $C$  (рис. 16).

Очевидно,  $BK > BC$ , поэтому  $AK > AB + BC$  и сумма отрезков  $AK$  и  $AC$  больше периметра треугольника  $ABC$ . Вертикальная прямая  $\Pi_B$ , проведенная через точку  $M$ , проходит через середины  $AC$  и  $AK$ ,

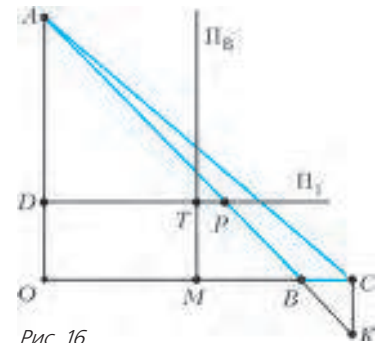


Рис. 16

откуда следует, что прямая  $\Pi_2$  проходит *левее* этой прямой. Теперь разберемся с тем, как расположена *горизонтальная* прямая  $\Pi_1$ , которая делит пополам площадь треугольника  $ABC$ . Она параллельна  $BC$  и отсекает от треугольника  $ABC$  подобный ему треугольник вдвое меньшей площади. Площади подобных треугольников относятся так же, как квадраты линейных размеров. Значит, если прямая  $\Pi_1$  пересекает  $OA$  в точке  $D$ , то  $AD = OA/\sqrt{2}$ . Пусть  $P$  и  $T$  – точки пересечения прямой  $\Pi_1$  с прямыми  $AB$  и  $\Pi_B$  соответственно. Нетрудно убедиться, что точка  $T$  расположена *левее* точки  $P$ . В самом деле,  $DT = OM = 3$ , тогда как  $DP = AD = OA/\sqrt{2} = 5/\sqrt{2} > 3$ . Из всего этого следует, что точка пересечения прямых  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  расположена снаружи треугольника  $ABC$ . Поэтому его можно отразить симметрично относительно этой точки и получившийся в результате отражения треугольник не будет пересекаться с треугольником  $ABC$ . Прямые  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , очевидно, будут при этом делить пополам площадь и периметр отраженного треугольника.

4. Сможет. Достаточно положить карточки так, чтобы не было видно ни одного нуля и была видна только одна единица. На обороте карточки с единицей должен быть ноль, потому что именно эта карточка обязана лежать единицей вверх.

5.  $h$ .

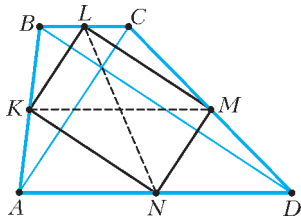


Рис. 17

По условию  $AC \perp BD$ , значит,  $KLMN$  – прямоугольник, отсюда  $KM = LN \geq h$ . Равенство  $KM = h$  достигается для любой равнобокой трапеции с перпендикулярными диагоналями.

Пусть  $AD$  и  $BC$  – основания трапеции (рис.17). Обозначим через  $K, L, M, N$  середины отрезков  $AB, BC, CD, DA$  соответственно. В треугольнике  $ABC$  отрезок  $KL$  – средняя линия, поэтому  $KL \parallel AC$ . Аналогично,  $MN \parallel AC$  и  $LM \parallel NK \parallel BD$ .

## СПЛОШНЫЕ НЕПРИЯТНОСТИ

Будем поступать в полном соответствии с «методическими указаниями», имея в виду, что евреи, христиане и турки в бане эквивалентны, соответственно, индюкам, цыплятам и рябчикам на рынке, а денги – рублям.

1) Здесь имеет место небаланс количества людей и уплаченной суммы в размере  $30 - 20 = 10$ .

При добавлении каждой пары турок общая стоимость возрастает на денгу, и потому расхождение между указанными величинами уменьшается на 1. Поэтому, добавив 10 «фиктивных» пар турок (т.е.  $10 \times 2 = 20$ ), мы доведем и суммарное количество, и суммарную стоимость до 40.

Далее, так как каждый еврей платит по 3 денги (и  $3 - 1 = 2$ ), а каждый турок – по  $\frac{1}{2}$  денги (и  $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ), то еврей

«уравновешивает» 2:  $\frac{1}{2} = 4$  турок. Это порождает два возможных варианта, в которых количество турок больше 20 (дабы можно было потом «вернуть долг» из 20 турок), но суммарное количество евреев и турок меньше 40 (чтобы в бане нашлось местечко и для христиан): 6 евреев + 24 турка и 7 евреев + 28 турок. Вычитая «долг», получаем для обоих вариантов соответствующее число турок: 4 и 8. Остаток «заполняем» христианами. Итак, есть два ответа:

6 евреев, 4 турка и 10 христиан;

7 евреев, 8 турок и 5 христиан.

2) Возможный вариант решения проблемы: доведем стоимость помывки христианина до одной денги, снизив все цены вдвое. В результате стоимости помывки еврея, христианина и турка составят  $\frac{3}{2}$ , 1 и  $\frac{1}{4}$  денги соответственно. Суммарная плата снизится до 10 рублей. Небаланс составил  $20 - 10 = 10$ , и для «выравнивания» будем добавлять евреев.

Поскольку  $\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$ , то при добавлении каждой пары евреев расхождение снижается на 1. Значит, следует добавить 10 пар евреев (т.е. 20 человек). Всего это составит 40 человек и столько же денег. Ну, а дальше, поскольку  $\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$  и  $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ , то каждые  $\frac{3}{4}$  еврея «уравновешивают»  $\frac{1}{2}$  турка. Поскольку делить людей на части недопустимо (и негуманно), то, избавившись от знаменателей, получаем более разумное соотношение: 3 еврея «уравновешивают» 2 турок. Осталось выбрать варианты, при которых евреев больше 20, но в сумме евреев и турок меньше 40. Таковой имеется только один: 21 еврей + 14 турок. Вычитая «задолженность» в размере 20 евреев, получаем ответ: 1 еврей, 14 турок, а остальные 5 – христиане.

3) Сначала снизим вдвое стоимость помывки для всех, и она станет такой же, как в предыдущем пункте: еврей –  $\frac{3}{2}$  денги, христианин – 1 денга, и турок –  $\frac{1}{4}$  денги. Суммарная стоимость мытья снизится до 15 рублей. Небаланс равен  $15 -$

$- 10 = 5$ ; и поскольку добавление каждой пары евреев снижает его на 1, то, добавив 5 пар (т.е. 10 евреев), мы доведем и общее количество, и суммарную плату до 30.

Как и в пункте 2, каждые 3 еврея «уравновешивают» 2 турок, и надо выбрать варианты, при которых евреев больше 10, но в сумме евреев и турок меньше 30. Таких имеется два: 12 евреев + 8 турок и 15 евреев + 10 турок. Вычитая 10 евреев, получаем два приемлемых ответа:

2 еврея, 8 турок и 20 христиан;

5 евреев, 10 турок и 5 христиан.

## А ЧТО ИЗМЕНИТСЯ, ЕСЛИ...?

1. В абсолютно чистом воздухе световые лучи, проходящие мимо наших глаз, нам не видны. (Вот почему космонавтам небо представляется черным.) Лучи становятся видимыми, когда на их пути встречаются пылинки или капельки воды. Тогда каждая пылинка или капелька становится вторичным источником света, который посылает (рассеивает) световые лучи во все стороны, в том числе и в наши глаза. Этим же объясняется и тот факт, что в приморских городах с чистым воздухом ночи очень темные. А вот вблизи промышленных городов ориентироваться ночью помогает подсветка, созданная пылинками, взвешенными в воздухе.

2. 1) Луч, падающий на черную поверхность, исчезает; 2) луч, падающий на зеркальную поверхность, зеркально отражается; 3) луч, падающий на матовую поверхность, разбивается на бесконечное множество лучей, которые распространяются во все стороны.

3. Матовую.

4. Сравним пары «лампа (их три) – освещаемая площадка (их две: под первой лампой и под второй)». А чтобы было, куда записывать освещенности, заведем таблицу с шестью клетками (рис.18). Площадка  $O_2$  по отношению к лампе  $L_2$

а)		$L_1$	$L_2$	$L_3$
$O_1$	1	2	3	4
$O_2$	1	3	4	6

б)		$L_1$	$L_2$	$L_3$
$O_1$	$E_0$	$0,8E_0$	$0,468E_0$	
$O_2$	1	3	4	

в)		$L_1$	$L_2$	$L_3$
$O_1$	$E_0$	$0,8E_0$	$0,468E_0$	
$O_2$	$0,8E_0$	$E_0$	$0,8E_0$	

Рис. 18

расположена точно так же, как площадка  $O_1$  по отношению к лампе  $L_1$ . Это означает, что в клетках 1 и 5 стоят одинаковые величины. Площадка  $O_2$  по отношению и к лампе  $L_1$  и к лампе  $L_3$  расположена точно так же, как площадка  $O_1$  по отношению к лампе  $L_2$ . Это означает, что одинаковые величины стоят в клетках 2, 4 и 6. Согласно условию задачи, если в клетку 1 мы поставим величину  $E_0$  (освещенность, которую в точке  $O_1$  создает первая лампа), то в клетки 2 и 3 мы должны поставить величины  $0,8E_0$  и  $0,468E_0$ . Объединяя рисунки, получаем полностью заполненную таблицу. Итак, после включения второй лампы освещенность в точке  $O_2$  увеличилась с  $0,8E_0$  до  $1,8E_0$ , т.е. возросла на 125%. После включения третьей лампы освещенность увеличилась до  $2,6E_0$ , т.е. возросла на 44%.

5.  $S_2, S_1, S_3, S_4$ . 6. Нет, не освещают. 7. Нет, не видит.

8. Буратино и его друзьям достаточно сместиться на расстояние  $\Delta l = \sqrt{2} \cdot 100 \text{ м} \approx 141 \text{ м}$  в юго-западном направлении.

9. Да, сможет.

**ЕВКЛИД И НЕПРИВОДИМЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ**

3. Например,  $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ .
4.  $2^n$ .
7.  $x^2 + x + 1$ ;  $x^3 + x^2 + 1$ ,  $x^3 + x + 1$ ;  $x^4 + x^3 + 1$ ,  $x^4 + x + 1$ .
8. Многочлены, у которых все коэффициенты четные.
9. 133100.  
 $f$  – многочлен вида  $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ , где  $a, b, d$  принимают значения  $0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 10$ ,  $c$  и  $e$  принимают значения  $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 9$ .

**ЗАДАЧИ НА СИЛУ ТРЕНИЯ**

1. 25%.      2.  $6 \text{ м/с}^2$ .      3. 16 Н.      4. 20 м/с.
5. 7.      6. 80 см.      7. 60 см.      8. 1 м/с.      9. 30 см.

**XXXVII ТУРНИР ГОРОДОВ**

Базовый вариант

8–9 классы

1. Верно.  
 Числа, начинающиеся с 1, умножим на 1. Докажем, что числа, начинающиеся с 2 или 3, достаточно умножить на 5. Пусть у нас есть такое число и в нем  $n$  цифр. Тогда оно больше или равно  $20 \dots 0$ , но меньше  $40 \dots 0$  (число нулей везде  $n - 1$ ). После умножения мы получим число, большее или равное  $10 \dots 0$ , но меньшее  $20 \dots 0$  (число нулей везде  $n$ ), т.е. результат начинается на 1.  
 Аналогично доказывается, что числа, начинающиеся с 4, можно умножить на 3 (или на 4), а числа, начинающиеся на 5, 6, 7, 8 или 9, – на 2.

2. Не обязательно.

Например, возьмем равносторонний треугольник и приложим к двум его сторонам гипотенузы прямоугольные треуголь-

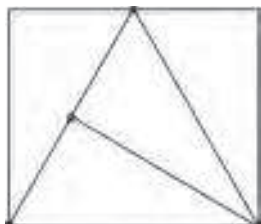


Рис. 19

ники с углом  $60^\circ$  при общей вершине (рис. 19). Осталось разрезать равносторонний треугольник высотой из другой вершины.  
 3. Будем обозначать через  $H$  количество показанных ножниц, а через  $K$  – количество показанных камней. Докажем, что после любого количества раундов остаток от деления общего числа баллов на 3 будет такой же, как у  $H - K$ . Этого достаточно для решения задачи, потому что в итоге ножниц и камней было показано поровну. Чтобы доказать равенство остатков, покажем, что они меняются одинаково при любом исходе раунда. Если все игроки выкидывают один и тот же элемент, то общее число баллов не меняется, а  $H - K$  либо не меняется, либо изменяется на 3. В любом случае остатки от деления на 3 остаются прежними. Остальные исходы раундов показаны в таблице:

	ККП	КПН	КББ	ККВ	ПББ	ППБ
Баллы	+2	+1	+2	+1	+1	+2
$H-K$	-1	+1	-1	-2	+1	+2

Из таблицы видно, что остатки от деления на 3 у общего числа баллов и у  $H - K$  меняются одинаково. Так как в самом начале остатки равны нулю, то они совпадают после любого числа раундов.

4. Предположим, что  $a > b$  (рис. 20). Так как в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, то для треугольника  $AKM$  получаем:  $\angle AMK > \angle A$ . Следовательно,  $\angle B = 90^\circ - \angle A > 90^\circ - \angle AMK = \angle BML$ , и из треугольника  $BML$  получаем, что  $b > a$ . Противоречие.  
 Аналогично, к противоречию приводит предположение  $a < b$ .

5. Заметим сначала, что рейс определяется своими начальным и конечным пунктами. Выбрать начальный город мы можем 100 способами, и после этого у нас есть 99 вариантов для конечного города. Итого получаем  $100 \cdot 99$  возможных рейсов.

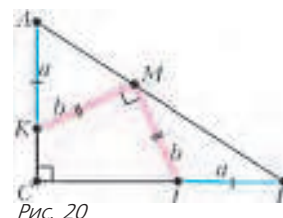


Рис. 20

- а) Не всегда.  
 Пусть все 99 рейсов из родного города и все 99 рейсов в родной город стоят по 49,6 тугриков. Это возможно, поскольку суммарная стоимость этих рейсов равна  $99,2 \cdot 99$  тугриков, что меньше общей стоимости. Цену на оставшиеся рейсы подберем так, чтобы довести суммарную стоимость до  $100 \cdot 99$ . Тогда, чтобы вылететь из родного города, а потом вернуться в него, надо уже потратить больше 99 тугриков.
- б) Всегда.

Вылететь из родного города можно в один из остальных 99 городов, из того – в любой из 98 оставшихся и так далее (последним рейсом возвращаемся в свой родной город). Значит, всего имеется  $99 \cdot 98 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 99!$  вариантов маршрутов. В скольких маршрутах встретится любой конкретный перелет? Сделав этот перелет, дальше мы можем полететь в один из 98 городов, потом – в один из 97 оставшихся и так далее, итого получаем  $98 \cdot 97 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 98!$  маршрутов.

Тогда суммарная стоимость всех маршрутов равна числу рейсов, умноженному на  $98!$ , т.е. равна  $98! \cdot 99 \cdot 100$  тугриков. Средняя стоимость маршрута равна суммарной стоимости, деленной на число маршрутов:  $98! \cdot 99 \cdot 100 / 99!$ , а это как раз 100 тугриков! Значит, найдется маршрут не дороже 100 тугриков (ведь если бы все маршруты были дороже 100 тугриков, то и средняя их стоимость была бы дороже 100 тугриков).

*Замечание.* Условие о равенстве стоимости рейсов туда и обратно – лишнее.

10–11 классы

1. Одно.  
 Пусть  $pn = (p + n)k$ , тогда  

$$p^2 = p^2 + pn - (p + n)k = (p + n)(p - k)$$
 Так как  $p - k < p$ , то оно на  $p$  не делится. Поэтому  $p + n = p^2$ , т.е.  $n = p^2 - p$ . Очевидно, оно подходит.
2. Пусть прямые  $AD$  и  $BC$  пересекаются в точке  $E$  (рис. 21;

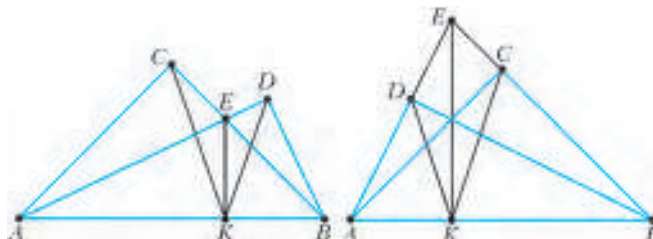


Рис. 21

случай  $D = C$  очевиден). Так как  $\angle ADK = 45^\circ = \angle EBK$ , то точки  $B, E, D, K$  лежат на одной окружности. Угол  $BDE$  – прямой, значит, и угол  $BKE$  – прямой. Следовательно, отрезок  $AE$  виден из точек  $C$  и  $K$  под прямым углом, т.е. является диаметром описанной окружности треугольника  $ACK$ . Следовательно, центр этой окружности лежит на прямой  $AE$ , совпадающей с  $AD$ .

5. Могла.  
*Пример 1:*  $1, 2 + 3 + 4, 5 + \dots + 13, \dots$   

$$\frac{3^n + 1}{2} + \dots + \frac{3^{n+1} - 1}{2}, \dots = 1, 9, 81, \dots, 9^n, \dots$$
*Пример 2:*  $3, 5 + 7, \dots, (2^n + 1) + \dots + (2^{n+1} + 1), \dots = 3, 12, \dots, 3 \cdot 4^{n-1}, \dots$



Сложный вариант  
8–9 классы

1. а) Например, подойдет «буква Г» из четырех клеток (рис. 22).

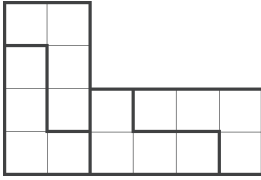


Рис. 22

б) При любых.

Рассмотрим такую «букву Г» из  $n$  клеток, что из двух ее копий складывается прямоугольник  $2 \times n$ . Из таких прямоугольников можно сложить квадрат  $2n \times 2n$ , а из этих квадратов – «букву Г», подобную исходной с коэффициентом  $2n$ .

3. Пусть  $a$  и  $b$  – половины сторон (рис. 23). Тогда  $c$  – средняя линия, она равна половине третьей стороны. Напомним, что медианы делятся точкой пересечения в отношении 2:1.

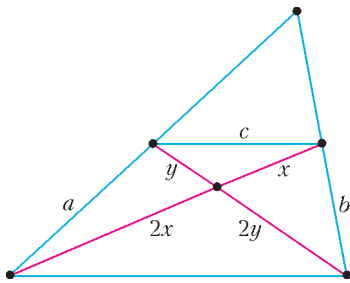


Рис. 23

Запишем по три неравенства треугольников и сложим их.

а)  $3x < a + c$ ,  $3y < b + c$ ,  $c < x + y$ , откуда  $2(x + y) < a + b + c$ . Осталось умножить на  $3/2$ .

б)  $a < 2x + y$ ,  $b < x + 2y$ ,  $c < x + y$ , откуда  $a + b + c < 4(x + y)$ . Осталось умножить на  $3/4$ .

7. Всегда.

Возьмем ребенка  $A$  с наименьшим количеством сортов конфет. Если у него  $n$  сортов, то все в порядке. Если нет, то какого-то сорта у него больше одной конфеты. Значит, у какого-то ребенка  $B$  нет этого сорта вовсе. Но тогда у  $B$  найдется сорт, которого нет у  $A$ . Пусть  $A$  и  $B$  обменяются этими сортами. Тогда у  $A$  количество сортов увеличится, а у  $B$  – не уменьшится. В результате сумма количеств сортов у детей увеличится. Значит, повторяя этот процесс, когда-нибудь доведем ее до максимума, когда у каждого будет по  $n$  сортов конфет.

10–11 классы

1. Пусть  $a$  – первый член прогрессии, а несократимая дробь  $m/n$  – ее знаменатель (из условия ясно, что он рационален). Тогда последний член равен  $am^{36}n^{-36}$ , т.е.  $a$  делится на  $n^{36}$ :  $a = bn^{36}$ . По условию числа  $bn^{36}$  и  $bm^{36}$  взаимно просты, значит,  $b = 1$ . Следовательно, 19-й член равен  $m^{18}n^{18}$ .

2. У многоугольников разбиения площадь равна 5. При этом сумма их периметров равна  $40 + 2 \cdot 80 = 200$ , значит, средний периметр – 10. Поэтому достаточно доказать, что существует единственный пятиклеточный многоугольник с периметром не больше 10.

Периметр такого многоугольника равен сумме периметров 5 клеток минус удвоенное количество общих границ, соединяющих клетки. Значит, на 5 клеток приходится не менее 5 соединений. Поэтому найдется цикл из клеток многоугольника. Но тогда он содержит квадрат  $2 \times 2$ , любое добавление клетки к которому даст один и тот же многоугольник периметра 10.

6. Не обязательно.

Если арбуз распался на части, то и его поверхность распалась на части. Поэтому достаточно провести на сфере три дуги нужных размеров так, чтобы она не распалась на части. Точки пересечения пар плоскостей надрезов со сферой назовем узлами, у нас их будет шесть. Очевидно, дуги могут соединяться только в узлах.

а) Пусть плоскости трех надрезов проходят через центр  $O$  шара. Они пересекают сферу по большим окружностям.

Узлы делят каждый из них на четыре равные части. Пусть концы дуги одного разреза –  $A$  и  $B$ . Треугольник  $OAB$  – равнобедренный с боковыми сторонами 10 и высотой 7. Половина его основания равна  $\sqrt{51} > 7$ , поэтому угол  $AOB$  – тупой. Значит, надрез можно провести так, чтобы он прошел только через два узла.

Разобьем узлы на пары соседних. Тогда дуги вообще не пересекутся, значит, сфера не распадется.

б) Пусть одна плоскость надреза проходит через центр  $O$  шара, а две другие – на расстоянии  $\sqrt{10}$  от  $O$ . Первая пересекает шар по кругу радиуса 10, две другие – по кругам радиуса  $3\sqrt{10} > 9$ . Эти два малых круга пересекают большой круг перпендикулярными диаметрами  $X^+X^-$  и  $Y^+Y^-$  (рис. 24).

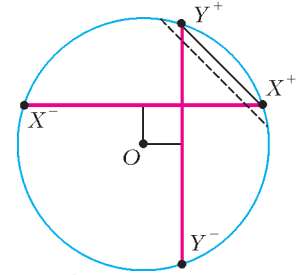


Рис. 24

Дуга надреза в большом круге должна опираться на хорду длины 12, что больше расстояния  $4\sqrt{5}$  между узлами  $X^+$  и  $Y^+$ . Поэтому надрез в нем можно провести так, чтобы он проходил только через узлы  $X^-$  и  $Y^-$ . В одном малом круге проведем надрез, не проходящий через узел  $Z^-$ , в другом – через  $Z^+$ . Это возможно, поскольку их диаметры больше 18. Тогда все дуги надрезов, не считая незначущих хвостов, образуют криволинейную ломаную  $X^+Z^+X^-Y^-Z^-Y^+$  без самопересечений. Значит, сфера не распадется.

*Замечание.* Легко проверить, что конструкция п. б) позволяет проводить надрезы даже глубиной  $h = 18,9$  см без разделения арбуза на части. Можно показать, что при  $h = 19$  см уже никакая конструкция не поможет – арбуз развалится.

# КВАНТ

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов,  
П.А.Кожевников, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова,  
А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина,  
В.М.Хлебникова**

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**Е.В.Морозова**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ  
по печати. Рег. св-во №0110473**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»**

**Тел.: (495) 930-56-48**

**E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru**

**Отпечатано**

**в соответствии с предоставленными материалами  
в ООО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь  
www.Pareto-print.ru**

## ВЕРТИКАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ В ЗАДАЧАХ

Симметрия как общий принцип гармонии в молекулах, кристаллах, живой природе имеет глубокий смысл, с ее помощью человек веками пытался объяснить или создать порядок, красоту и совершенство. Изучение закономерностей симметрии играет важную роль в математике, физике, химии, биологии. Орнаменты, мозаика, гравюры, декоративные узоры восхищают наш взор четкой геометрией, симметричным расположением рисунка. Шахматы – не исключение, возникающие на доске симметричные расположения фигур, их занятые перемещения также производят впечатление.

Прежде всего заметим, что симметрией (осевой) обладает исходное расположение фигур, перед стартом они занимают симметричные места, черные как бы являются зеркальным отражением белых и наоборот. Во всех старинных дебютных сборниках и в современных шахматных играх (в том числе в фишеровских шахматах) фигуры перед игрой также расположены симметрично по отношению друг к другу.

Мотивы симметрии возникают, с одной стороны, в процессе игры – можно сказать, естественная симметрия, а с другой – в задачах, этюдах и необычных позициях, которые придумывают шахматные композиторы. При этом симметрия (и асимметрия!) используется в их произведениях как одна из главных тем.

Данная статья посвящена задачам на вертикальную симметрию.



Ф.Хоффман, 1887

Мат в 3 хода

Эта старинная симметричная задача когда-то была пробным камнем для компьютера, который любил превращать пешки в ферзя, а другие фигуры отменял. Здесь три белые пешки на пороге превращения, но ни одна из них не станет ферзем!

1. e8♙! ♖:d6 2. c8♞! ♜e6 3. ♞c6× или 1... ♜:f6 2. g8♞! ♜e6 3. ♞g6×.

Вот задача-квартет, в которой фигуры сосредоточились на одной вертикали.



Р.Гарро, 1923

Мат в 3 хода

А здесь, наоборот, ферзь должен покинуть центральную вертикаль. 1. ♖a1! ♜e8 (e8) 2. ♖g7 (a7), и мат следующим ходом. Прикрыть конем ферзевый фланг – 1. ♞b6 не удастся из-за 2. ♖h8×. Но не проходит симметричное 1. ♖g1? ♞f6!, и у ферзя слева нет поля, аналогичного h8.



С.Кнудсен, 1950

Мат в 2 хода

В этой «новогодней елочке» важно не потерять симметрию. Это можно сделать единственным способом. 1. ♖e4!! Еще и единственная возможность поставить фигуру сразу под четыре удара! Нет никаких угроз, но черные в цугцванге. На отступление ладьи c4 следует 2. ♞d4× или 2. ♞c5×, ладья g4 – 2. ♞f4× или 2. ♞g5×. На ход пешками в игру вступает слон – 2. ♗:e4× или 2. ♗:g4×.



Б.Линдгрен, 1981

Мат в 2 хода

1. ♞a3! Грозит 2. ♞:b5×, и куда бы ни отступила ладья, черным несдобровать: 2. ♖c5× или 2. ♖b4×. Не прохо-

дит 1. ♞c7 (1. ♞c3) из-за ответа 1... ♞a5!, и собственный конь c4 мешает белым объявить мат. Но почему не 1. ♞g3 с симметричной угрозой 2. ♞f5×? Оказывается, черных спасает 1... ♗h3! – вот линия «h» и пригодилась.



Т.Дюссон, 1914

Мат в 2 хода

Занятный пример. Опять симметрию нарушает присутствие вертикали «a», но асимметричность решения вызвана совсем другим. Чтобы разобраться в этом, придется провести небольшой ретроанализ позиции. Какой последний ход сделали черные? Очевидно, либо d7-d5, либо f7-f5. Обратим теперь внимание на белые пешки. Нетрудно убедиться, что расположиться таким хитрым образом они могли только забрав десять отсутствующих черных фигур и пешек, включая их белопольного слона. Но если ход d7-d5 сделан только сейчас, то слон e8 был съеден фигурой, а никак не пешкой – противоречие. Значит, позиция на диаграмме получилась после f7-f5 (проблем со слоном f8 нет) и поэтому решает 1. gfl – взятие на проходе и 2. f7×.



И.Бройер, 1948

Мат в 4 хода

Какова роль вертикалей «a», «b» и «c», нарушающих симметрию? Именно на них разворачиваются главные события. 1. ♗a7! Справа аналогичное поле отсутствует. 1...f6 2. ♞b6! Временно перекрывая слона. 2... ♜e3 3. ♞c4++ ♜f3 4. ♞d2×. Популярная «индийская тема», выраженная в симметричной форме.

Е.Гук



## ВИСЯЧИЕ МОСТЫ



Вы, наверное, обратили внимание на то, что мосты с большими пролетами чаще всего являются висячими (а не балочными). Основной несущий элемент такого моста представляет собой ...



*Процурки с физикой*