

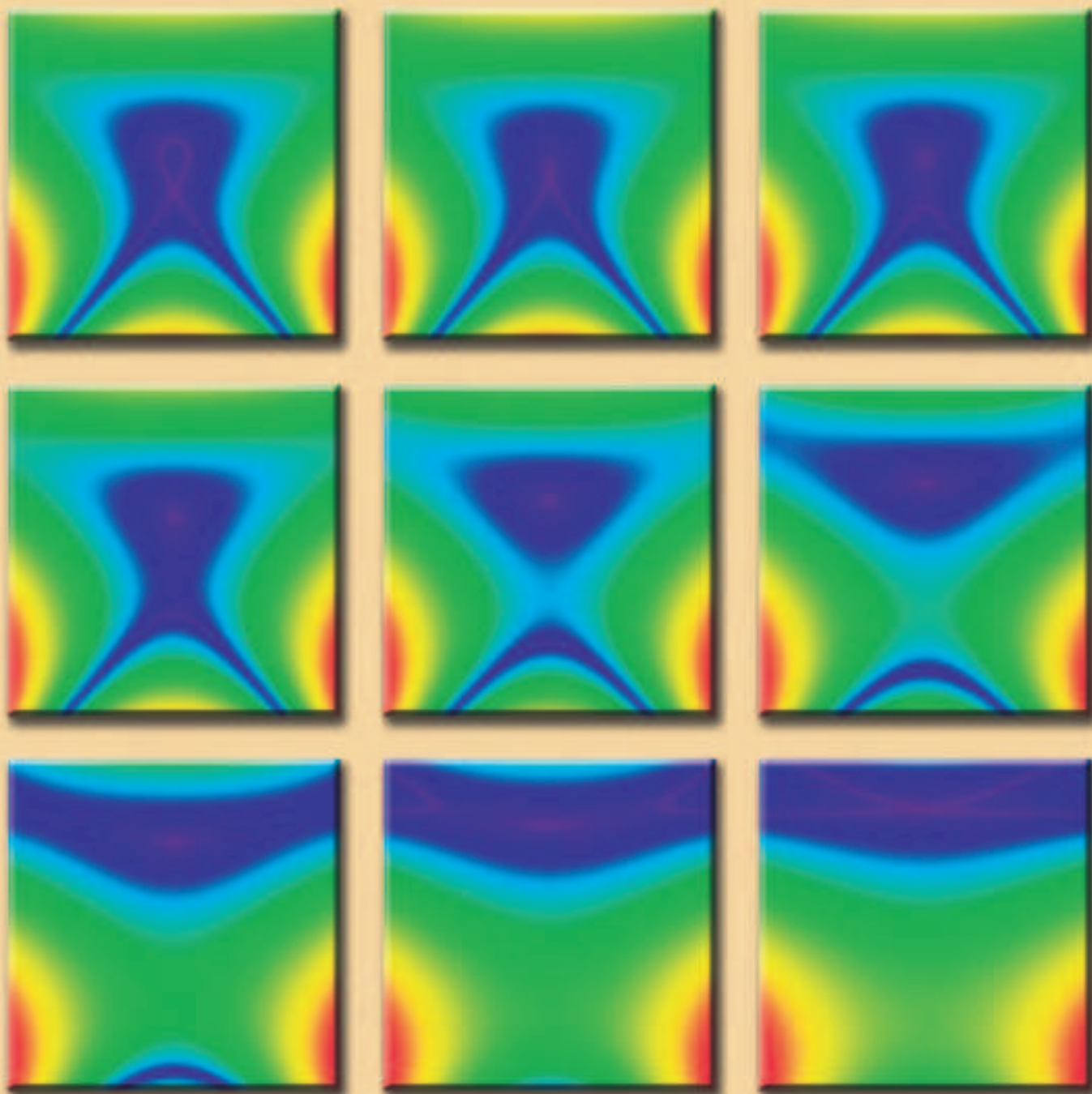
ИЮЛЬ/АВГУСТ

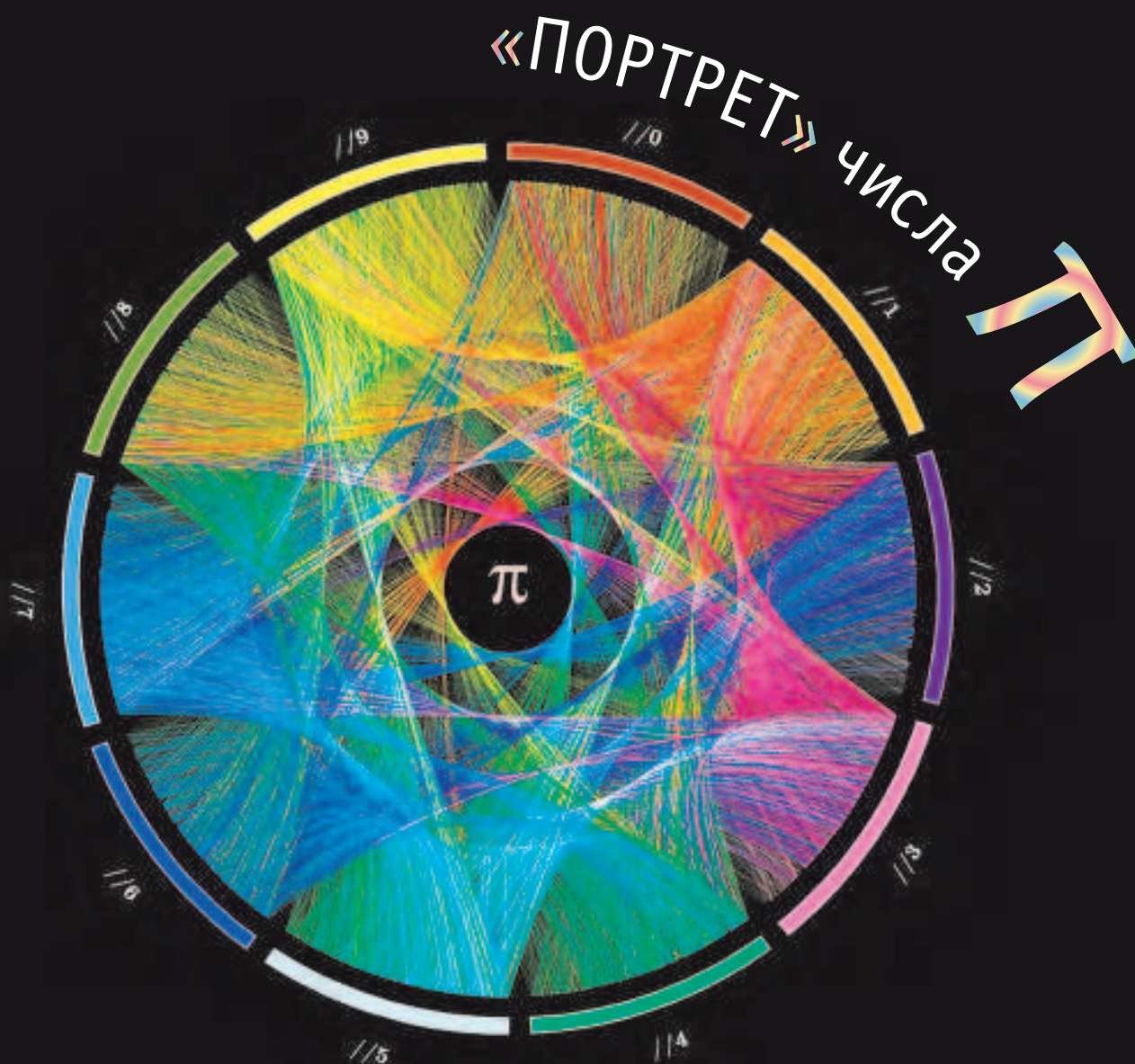
ISSN 0130-2221

2014 · № 4

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ





*Cristian Ilies Vasile/cristian.ilies.vasile@gmail.com/created with Circos*

Таким необычным образом изобразил первые 10 000 знаков числа  $\pi$  румынский художник Кристиан Василе. Принцип простой: дуги соединяют сектора, соответствующие последовательным цифрам в десятичной записи числа  $\pi$ . Например, так как  $\pi \approx 3,1415\dots$ , то первая дуга идет из сектора 3 в сектор 1, вторая – из 1 в 4 и так далее. Цвет дуги совпадает с цветом сектора, из которого она стартует. Этот «портрет» был получен при помощи программы Circos ([www.circos.ca](http://www.circos.ca)), разработанной специально для построения круговых диаграмм. На сайте [goo.gl/v4dnO7](http://goo.gl/v4dnO7) можно рассмотреть этот «портрет» в хорошем качестве, а на сайте [mkweb.bcgsc.ca/pi/art/](http://mkweb.bcgsc.ca/pi/art/) есть подробное описание (правда, на английском языке) этого и других способов визуализации данных.

## В номере:

### УЧРЕДИТЕЛЬ

Российская академия наук

### ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**А.Л.Семенов**

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Н.Н.Андреев, А.Я.Белов, К.Ю.Богданов,  
Ю.М.Брук, А.А.Варламов, С.Д.Варламов,  
А.Н.Виленин, В.И.Голубев,  
Н.П.Долбиллин, С.А.Дориченко,  
В.Н.Дубровский,  
А.А.Егоров, А.А.Заславский,  
П.А.Кожевников (*заместитель главного редактора*),  
С.П.Коновалов, А.А.Леонovich,  
Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, В.Ю.Протасов,  
Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко,  
В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,  
А.И.Черноуцан (*заместитель главного редактора*)

### РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,  
В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,  
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков,  
Л.Д.Фаддеев

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА

### ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**И.К.Кикоин**

### ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

**А.Н.Колмогоров**

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,  
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,  
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,  
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,  
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,  
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,  
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант,  
Я.Е.Шнайдер

- 2 Левитирующий магнитный волчок. *А.Панов*  
6 Свяжитесь с графом. *П.Кожевников, А.Шаповалов*  
11 Равновесие тел и потеря устойчивости. *И.Горбатый*

### ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 15 Задачи M2349–M2355, Ф2355–Ф2362  
17 Решения задач M2334–M2340, Ф2340–Ф2347

### НАШИ ОБЛОЖКИ

- 25 Неваляшка из воздушного шарика  
31 «Портрет» числа  $\pi$

### «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 26 Задачи  
27 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»  
27 Буратино и его универсальный шаблон квадратичной параболы.  
*С.Дворянинов*

### ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 29 О перевернутом маятнике. *А.Буров, И.Косенко*

### КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Многогранники вокруг нас

### ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 34 Угол в квадрате. *А.Блинков, Ю.Блинков*

### МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 37 Об одной конструкции с касающимися окружностями.  
*И.Богданов*

### ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 39 Электрические цепи с измерительными приборами.  
*Б.Мукушев*

### ОЛИМПИАДЫ

- 43 XXXV Турнир городов  
45 Избранные задачи LXXVII Московской математической олимпиады  
46 Избранные задачи Московской физической олимпиады  
51 XXI Международная олимпиада школьников «Туймаада». Физика  
52 Ответы, указания, решения

### НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье А.Панова*  
II *Коллекция головоломок*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогулки с физикой*



# Левитирующий магнитный ВОЛЧОК

А. ПАНОВ

**О**ПРЕДЕЛИМ ЛЕВИТАЦИЮ КАК СВОБОДНОЕ ЗАВИСИАНИЕ тел в воздухе. Мы будем рассматривать исключительно магнитную левитацию. И в самом деле, магниты кажутся подходящими кандидатами. Чтобы заставить тело левитировать, нужно каким-то образом компенсировать силу тяжести. А магниты, обращенные друг к другу одноименными полюсами, отталкиваются. Если расположить их на определенном расстоянии друг над другом, то магнитное отталкивание как раз сможет уравновесить силу тяжести, и верхний магнит зависнет над нижним.

Многие пытались действовать подобным образом, но ничего не получалось. Магниты каким-то образом изворачивались в воздухе, оказывались повернутыми друг к другу разноименными полюсами и притягивались. И на этом все заканчивалось – никакой левитации. Не помогает и замена отталкивающего магнита на целую систему магнитов, расположенных на плоскости или в пространстве, – и в этом случае добиться зависания не удается.

Казалось, что левитация невозможна. И этому было мощное теоретическое подтверждение.

## Теорема Ирншоу – невозможность левитации

Начнем с двойной цитаты Гейма – Берри из статьи Андрея Гейма «Магнетизм для всех» (<http://www.physics.umd.edu/grt/taj/411c/EveryonesMagnetism.pdf>, [http://www.scientific.ru/journal/translations/magn\\_ed.html](http://www.scientific.ru/journal/translations/magn_ed.html)):

*«Попробуйте, например, заставить левитировать магнитное тело. Вы, конечно, легко сможете поднять его с помощью подковообразного магнита, но вы не сможете заставить его зависнуть с помощью какой бы то ни было хитроумной конфигурации магнитов. Чтобы понять, в чем здесь дело, нужно вспомнить теорему Ирншоу, которая (как ее недавно переформулировал Майкл Берри) утверждает, что никакой стационарный объект, сделанный из зарядов, магнитов и масс, не может быть подвешен в пространстве с помощью любой фиксированной комбинации электрических, магнитных и гравитационных сил».*

Эта теорема была доказана английским священником, математиком и физиком Самуэлем Ирншоу в 1842 году. Она имеет простую формулировку, красивое доказательство и хорошо известна каждому физики. Многие физики считали ее абсолютным запретом магнитной левитации, но оказалось, что существуют обходные пути.

## Простой эксперимент

Начнем с простого эксперимента, который на первый взгляд представляет собой не больше чем пародию на магнитную левитацию. На рисунке 1 видны два магнита, нанизанные на деревянный стержень, – один неодимовый, другой ферритовый, но это пока не так важно. Главное, что магниты повернуты друг к другу одноименными полюсами и взаимно отталкиваются – верхний висит над нижним.

Почему это нельзя назвать левитацией? А потому, что это зависание не является свободным – свободному движению верхнего магнита препятствует деревянная палочка. Нет ли здесь противоречия с теоремой Ирншоу? Нет, потому что кроме магнитных и гравитационных сил на верхний магнит действуют упругие силы, возникающие при его взаимодействии с деревянной палочкой.

Но все не так плохо. Продолжим анализ нашего эксперимента. Высота зависания верхнего магнита – это та высота, на которой действующие на него сила тяжести и магнитная сила уравновешиваются. Не будем снимать верхний магнит с палочки, а расположим его на этой высоте строго горизонтально и отпустим. Легко убедиться, что в этом случае потенциальная энергия магнита будет уменьшаться не за счет вертикального падения, а за счет его поворота в магнитном поле. Если бы не деревянная палочка, верхний магнит повернулся бы на  $180^\circ$  – своим противоположным полюсом к нижнему магниту – и притянулся к нему. Палочка препятствует этому.

Если бы удалось заменить палочку на что-то менее вещественное, но тоже препятствующее повороту, то возможно, проблема левитации была бы решена. Оказывается, в этом может помочь гироскопический эффект. Именно закрутка кольцевого магнита вокруг оси может воспрепятствовать его опрокидыванию и дальнейшему падению. Это – ключевая идея для того типа левитации, который мы обсуждаем. Но, во-первых, ее не так просто реализовать. А во-вторых, как уже



Рис.1. Магнит на палочке

говорилось, для ее реализации имеется дополнительное психологическое препятствие в виде теоремы Ирншоу.

### Рой Харриган – практика левитации

В 1976 году американский изобретатель Рой Харриган после многочисленных экспериментов заставил левитировать в магнитном поле магнитный волчок. В 1983 году Харриган получил патент на свое изобретение. С дальнейшей судьбой этого изобретения связана целая детективная история, но здесь мы не будем ею заниматься. Так или иначе, на основе этого изобретения была создана игрушка под названием *левитрон*, которая пользуется огромным успехом и продается миллионными тиражами.

### Майкл Берри – теория левитации

Одна из первых научных публикаций о данном типе левитации принадлежит известному английскому ученому, специалисту в области математической физики Майклу Берри. В 1996 году он опубликовал статью, где описана теория движения магнитного волчка в магнитном поле ([http://www.phy.bris.ac.uk/people/berry\\_mv/the\\_papers/Berry271.pdf](http://www.phy.bris.ac.uk/people/berry_mv/the_papers/Berry271.pdf)). Это упрощенная теория, но она хорошо согласуется с результатами конкретных экспериментов. В статье много математики, и мы ограничимся лишь небольшим извлечением оттуда (к счастью, Берри написал еще и короткий популярный текст, который распространялся вместе с игрушкой: [http://www.phy.bris.ac.uk/people/berry\\_mv/the\\_papers/Berry272.pdf](http://www.phy.bris.ac.uk/people/berry_mv/the_papers/Berry272.pdf)).

Оказывается, что для данной магнитной базы (большого магнита, находящегося внизу) и маленького магнита, расположенного внутри волчка, существует узкий диапазон масс волчка, для которых возможна левитация. Это означает, что нужно очень точно отрегулировать массу волчка. На практике это достигается его постепенным утяжелением с помощью пластмассовых шайб или резиновых колечек малого веса. Имеются существенные ограничения относительно скорости вращения волчка и высоты его полета. Нужен определенный навык доставки волчка в точку левитации. Также необходимо аккуратное горизонтальное выравнивание магнитной базы. Наконец, эти настройки могут меняться в промежутке от одного запуска до другого. Немудрено, что Харригану при-

шлось проявить немалое упорство, чтобы заставить волчок левитировать.

Но мы отклонились от теории, вернемся к ней. В своей статье Берри выводит упрощенную формулу для потенциальной энергии магнитного волчка в магнитном поле, созданном магнитным диском радиусом  $a$ . Используется система координат, в которой ось  $z$  направлена вертикально вверх, а оси  $x$  и  $y$  – горизонтально. После перехода к безразмерным величинам:

$$x \rightarrow \xi = \frac{x}{a}, \quad y \rightarrow \eta = \frac{y}{a}, \quad z \rightarrow \zeta = \frac{z}{a}$$

и после соответствующих преобразований массы волчка и его потенциальной энергии формула для потенциальной энергии  $E$  приобретает следующий вид:

$$E = M_0 \zeta + \frac{1}{(1 + \zeta^2)^{3/2}} + \frac{8(\xi^2 + \eta^2)(2 - 5\zeta^2)}{8(1 + \zeta^2)^{7/2}},$$

где  $M_0$  – приведенная безразмерная масса волчка. Обозначим через  $\zeta_0$  высоту (равновесную высоту), на которой гравитационная и магнитная силы, действующие на волчок массой  $M_0$ , компенсируют друг друга. Между  $M_0$  и  $\zeta_0$  имеется такое соотношение:

$$M_0 = \frac{3\zeta_0}{(1 + \zeta_0^2)^{5/2}}.$$

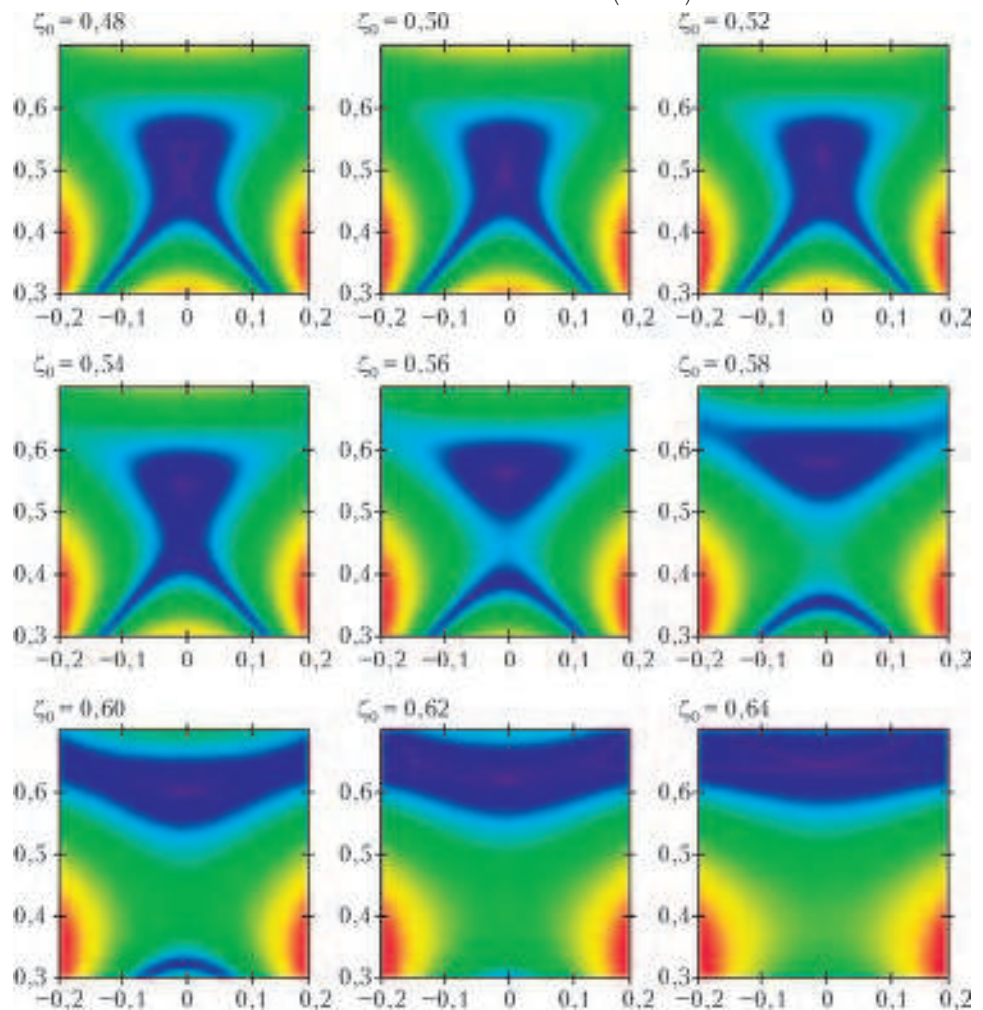


Рис.2. Картины уровней потенциальной энергии волчка для разных равновесных высот

Из формулы для потенциальной энергии следует, что левитация возможна только тогда, когда относительная высота нахождения волчка  $\zeta = z/a$  заключена в пределах

$$0,5 < \frac{z}{a} < \sqrt{\frac{2}{5}} = 0,632\dots$$

Тогда диапазон для соответствующих масс получается таким:

$$0,859\dots > M_0 > 0,818\dots$$

Мы видим, что эти диапазоны на самом деле достаточно узки.

Для полученных теоретических результатов имеется хорошее визуальное представление. На рисунке 2 представлены картины уровней потенциальной энергии для различных значений равновесной высоты  $\zeta_0$ , а можно сказать, и для соответствующих значений равновесной массы  $M_0 = 3\zeta_0 / (1 + \zeta_0^2)^{3/2}$ . Горизонтальная ось на каждом кадре – это ось  $\xi = x/a$ , идущая вдоль радиуса дискового магнита, представляющего базу. Вертикальная ось – это ось  $\zeta = z/a$ . Цветами представлены значения потенциальной энергии – от фиолетового для минимума до красного для максимума. На кадрах от  $\zeta_0 = 0,52$  до  $\zeta_0 = 0,62$  видны фиолетовые точки минимума потенциальной энергии, их окружают потенциальные ямы, и вблизи этих точек волчок может левитировать. На крайних кадрах равновесные точки  $(0; \zeta_0) = (0; 0,48)$  и  $(0; \zeta_0) = (0; 0,64)$  находятся на вершинах небольших горок, и эти равновесные точки неустойчивы. С первой из них волчок скатывается вниз, со второй – вбок.

Заметим, что теоретическое описание хорошо согласуется с реальными экспериментами. Но тем не менее, это всего лишь приближенная модель, которая описывает поведение быстро вращающегося волчка. В статье Берри есть и более точная модель, которая устанавливает дополнительные границы для скорости устойчиво вращающегося волчка. Но это уже для самостоятельного чтения.

На этом мы заканчиваем наше затянувшееся вступление и переходим к главному.

### Как это сделать самому

Конечно, вы всегда можете посмотреть в интернете, как можно добиться левитации волчка. Поиск на слово Levitron даст гигантское количество ссылок. А я расскажу о своем опыте.

В качестве базы использовались три кольцевых ферритовых магнита (рис.3) с внешним диаметром 110 мм. Заказывались они в петербургской компании «Магниты и системы» (<http://magnet-prof.ru>). Выбор именно ферритовых магнитов – принципиальная вещь. А.Гейм в своей уже цитировавшейся статье пишет, что использование керамических магнитов необходимо для предотвращения возникновения индуцированных токов, рассеивающих энергию вращения.

Самое сложное – это сборка и настройка магнитного волчка. В волчке использовался маленький кольцевой ферромагнит диаметром 20 мм, вынутый из

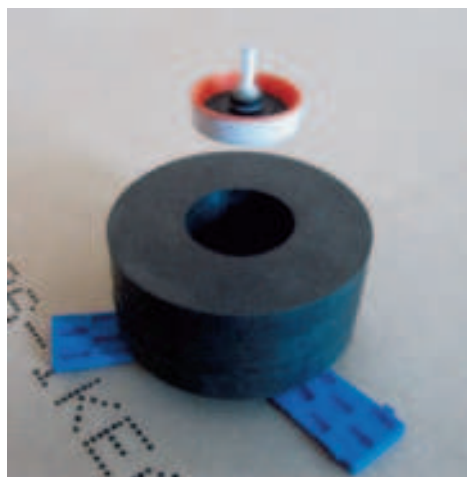


Рис.3. Левитация магнитного волчка

динамика. На рисунке 4 представлен весь тот дополнительный «мусор», из которого собран волчок. Осью волчка служит четырехсантиметровый пластиковый



Рис.4. Детали для сборки волчка

винт с резьбой в 5 мм и с отпиленной головкой. И винт, и гайка, что побольше, куплены в магазине авиамоделей, а та, что поменьше, – в магазине радио-деталей. Основой для сборки волчка служит пластмассовая крышка от молочной бутылки. В центре крышки шилом протыкается отверстие, в которое ввинчивается винт. В крышку вкладывается магнит и утяжеляющие элементы: резиновые прокладки, пластиковые или картонные шайбы и т.п. При этом лучше настройка будет происходить позже. И все это с двух концов стягивается гайками. Скажем еще, что пластиковые крышки по краям делаются ребристыми, чтобы их легче было откручивать. Но эти ребрышки в то же время ухудшают аэродинамику волчка, тормозят его, что приводит к уменьшению времени левитации. Так что боковую поверхность крышки стоит обмотать гладкой клейкой лентой.

Запуск волчка удобно производить со стопки из прозрачных коробок для компакт-дисков (они тоже присутствуют на рисунке 4). Их надо положить на базу



из кольцевых магнитов точно по центру. Волчок нужно раскрутить, и это уже непросто. Следует одновременно и подобрать высоту стопки, с которой запускается волчок, и убедиться в том, что волчок достаточно тяжел, иначе он не будет устойчиво вращаться.

Как только волчок у вас раскрутится, нужно осторожно и медленно поднимать стопку коробок вместе с волчком. И, если повезет, в некоторый момент волчок оторвется вверх и повиснет. Но, скорее всего, сразу так не случится. Либо волчок не будет отрываться, и тогда нужно уменьшить его массу – снять один из грузиков. Либо его резко подбросит вверх, и он отлетит в сторону и сразу рухнет. В этом случае его нужно утяжелить, и удобнее всего это сделать с помощью резиновых колечек. Часть из тех колечек, что показаны на рисунке 4, куплены в магазине сантехники, а светлые вырезаны из резинки от пипетки. И те и другие удобно натягиваются на гайки.

Но и это еще не все. Даже при правильно подобранной массе волчка он может не зависать, а сваливаться вбок. Однако в этом случае сваливание при каждом запуске обязательно будет происходить в одну и ту же сторону. И тогда нужно заняться выравниванием магнитной базы. Именно для этого нужны синие клинья, два из которых видны на рисунке 3, а третий скрыт за магнитами.

Отметим, что все эти настройки придется повторить неоднократно. Но если вам хоть раз удастся запустить волчок, дальше он будет летать как миленький. Правда, время от времени придется проводить микроскопическую корректировку массы волчка.

В принципе, можно купить и готовую игрушку, но это уже совсем другое дело.

### Послесловие

В то же самое время, когда Майкл Берри разбирался с левитроном, Андрей Гейм заставил левитировать лягушку в сильном магнитном поле. Это был другой тип левитации – диамагнитная левитация. Но полученные Берри теоретические результаты подходили и для этого случая, и в 1997 году Берри и Гейм написали уже совместную статью «Летающие лягушки и левитроны» (Of flying frogs and levitrons; [http://www.phy.bris.ac.uk/people/berry\\_mv/the\\_papers/Berry285.pdf](http://www.phy.bris.ac.uk/people/berry_mv/the_papers/Berry285.pdf)). За эту работу им в 2000 году присудили Игнобелевскую премию ([http://www.phy.bris.ac.uk/people/berry\\_mv/igberry.html](http://www.phy.bris.ac.uk/people/berry_mv/igberry.html)). Вот, что они сказали по этому поводу:

*«В последние годы левитация была нашим сильным научным увлечением. Мы потратили на нее много сил и много времени, отвечая на поставленные перед нами вопросы. Но мы ничуть не жалеем об этом и считаем, что наши усилия оправданы тем общественным интересом, который вызвали полученные нами результаты».*

А в 2010 году Андрей Гейм вместе с Константином Новоселовым получил уже и Нобелевскую премию – за открытие графена (Нобелевская лекция А.Гейма; <http://ufn.ru/ru/articles/2011/12/e/>).

### Приложение

После экспериментов с левитирующим магнитным волчком осталось несколько небольших магнитов. Давайте пустим их в дело и сделаем еще одну движущуюся игрушку – простой электромотор. Кроме магнитов понадобится также батарейка, пара английских булавок или металлических скрепок, скотч и моток тонкой медной изолированной проволоки. Из деталей, изображенных на рисунке 5, можно будет собрать два мотора.



Рис.5. Детали для сборки электромотора

Самое первое, что нужно сделать, это намотать несколько витков проволоки, скажем, на толстый фломастер, затем снять их и сделать колечко. Длина такого колечка вместе с двумя прямолинейными отводами должна немного превышать длину батарейки, как это видно на рисунке 5. Сразу же зачистите от изоляции оба прямых конца проволоки. Изогните две скрепки или английские булавки, как показано на рисунке 5, и



Рис.6. Работающие моторы

примотайте их скотчем к батарейке. В ушки скрепок (булавок) вставьте зачищенные концы проволоки, добавьте магниты – и моторы закрутятся (рис.6).

# СВЯЖИТЕСЬ С ГРАФОМ

П. КОЖЕВНИКОВ, А. ШАПОВАЛОВ

ЛЮБИТЕЛИ ЗАНИМАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ ВЕРОЯТНО встречали вопрос такого рода:

**Задача 1.** Какое наибольшее число ребер можно перекусить в проволочном каркасе куба так, чтобы каркас не развалился на части?

Тут, конечно, надо уточнить, что вершины трогать нельзя, а ребро разрешается перекусывать где-то посередине. Нетрудно привести пример, когда перекусывают 5 ребер из 12, и каркас не разваливается (рис. 1).

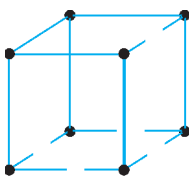


Рис. 1

Но ясно, что при любой попытке перекусить еще одно ребро каркас распадется на две части. Все, задача решена? Нет, конечно! Опытный в решении задач читатель понимает, что это только начало. То, что этот пример *нельзя улучшить*, не означает, что нельзя перекусить большее число ребер каким-то другим способом, может быть совсем не похожим на наш. Однако другие попытки приводят к тому же результату: 5 ребер перекусить удастся, а 6 – нет. Появляется уверенность в справедливости такого утверждения: *каркас куба, в котором перекусили 6 ребер, обязательно распадется*. Но как это доказать? Перебирать варианты не хочется: даже с учетом симметрии куба их не так уж мало. Попробуем придумать доказательство, которое *объяснило бы суть!*

Чтобы далее было удобнее рассуждать, каждую вершину куба будем считать шариком (рис. 2).

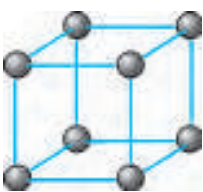


Рис. 2

Пока каркас не распался, муравей может по *целым* ребрам проползти от любого шарика до любого другого. При этом перекушенные ребра давайте вовсе удалим – связь между шариками не нарушится. Сколько же нужно целых ребер, чтобы обеспечить связь между всеми шариками?

Будем действовать с конца: удалим вначале вообще все ребра, а затем некоторые из них будем восстанавливать. После удаления всех ребер у нас есть 8 разрозненных шариков. Восстановим ребро между какими-то двумя шариками – у нас появится небольшой кусок каркаса. Далее, восстанавливая еще одно ребро, можно к нашему куску присоединить еще один шарик – и в нашем куске будет уже три шарика. Продолжая по одному присоединять шарики к имеющемуся куску, на 7-м шаге мы присоединим последний, 8-й шарик. Пять ребер, которые мы не задействовали в процессе, – это ребра, которые можно не восстанавливать (в исходной формулировке это те 5 ребер, которые можно перекусить). Возможный про-

цесс восстановления показан на рисунке 3.

Итак, смысл ответа «5» проясняется. Но вдруг мы действовали неэкономно?! Нельзя ли присоединять шарики не по одному, а группами? Однако тогда придется добавлять ребра на создание этих групп, ведь изначально шарики разрознены (чтобы сделать группу из двух шариков, потребуется одно дополнительное ребро, из трех – два ребра и т.д.). Возня с группами подсказывает идею: давайте последим за числом групп!

Вначале каждый шарик составляет отдельную группу, т.е. всего групп 8. Восстанавливая очередное ребро, мы можем связать две группы в одну, уменьшив число групп на одну. Если же восстанавливаемое ребро соединяет два шарика внутри одной группы, то число групп не изменится. В конце процесса все шарики должны быть связаны в одну группу, а значит, операцию восстановления ребра придется проделать не менее чем  $8 - 1 = 7$  раз, т.е. придется восстановить не менее 7 ребер.

Все, задача, наконец, решена!

Чтобы лучше разобраться в использованном нами приеме, решим еще одну задачу.

**Задача 2.** Из спичек сложена шахматная доска  $8 \times 8$ , сторона каждой клетки равна длине спички (рис. 4). Жук хочет, чтобы с любой клетки можно было дойти до любой другой, не переползая через спички. Какое наименьшее число спичек придется для этого убрать, если граничные спички убирать нельзя?

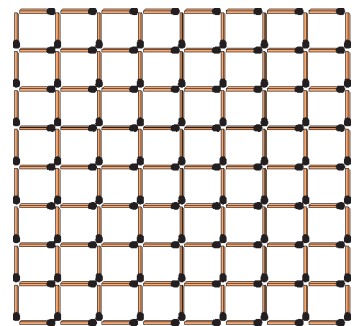


Рис. 4

**Решение.** Вначале у нас есть 64 отделенные друг от друга области-клетки. В конце они должны объединиться в единую область. Будем убирать спички по одной и следить за областями, на которые спички разбивают доску (под облас-

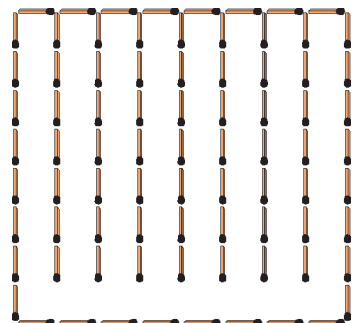


Рис. 5

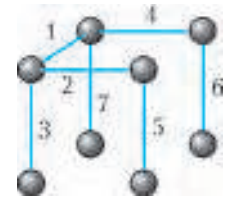


Рис. 3



тью мы понимаем набор клеток, по которым жук может путешествовать, не переползая через спички). Ясно, что, убрав спичку, мы можем слить не более двух областей в одну, т.е. уменьшим число областей не более чем на одну. Нам понадобится не менее 63 слияний, и значит, убрать надо не менее 63 спичек.

А вот пример (рис.5): уберем все внутренние горизонтальные спички и все внутренние вертикальные спички на нижней горизонтали – как раз 63 спички в сумме. Задача решена.

### Теорема о связности графа

Что общего в решениях задач 1 и 2? И там и тут были разрозненные объекты (шарики, клетки), которые мы объединяли в группы (области), а ключом к решению стала идея проследить за количеством таких групп (областей).

В обеих задачах есть связи между парами объектов: ребро куба соединяет пару вершин, спичка служит границей между парой соседних клеток. Связи тут очень наглядны, и это облегчает их подсчет.

Чтобы по возможности не повторять одни и те же рассуждения в разных ситуациях, математики вводят общие понятия. Структуры, в которых есть связи между парами объектов, называются *графами*. Наглядное представление графа такое: изображается система точек – вершин графа, где некоторые пары вершин соединены линиями – *ребрами* графа. При этом не важно, где именно на плоскости расположены вершины, как именно выглядят ребра – в виде отрезков или кривых. Изображая граф, мы также не обращаем внимания на возможные пересечения ребер в точках, отличных от вершин.

Можно изготовить модель графа из пуговиц-вершин и нитей-ребер. Раскладывая такую модель на столе или запутывая как угодно, мы граф не изменяем. В модели из пуговиц и нитей хорошо видны *связные* куски – *компоненты*: на такие компоненты можно разделить модель, не разрывая нитей.

Давайте более строго поговорим о связности в графах. Граф называется *связным*, если от любой его вершины можно дойти до любой другой вершины, двигаясь по ребрам (т.е. переходя несколько раз из вершины в вершину по ребру). Пусть в произвольном графе зафиксирована вершина  $A$ . Множество вершин, в которые можно попасть из данной вершины  $A$ , двигаясь по ребрам, назовем *компонентой связности* вершины  $A$  и обозначим  $K(A)$ . При этом считается, что сама вершина  $A$  входит в компоненту  $K(A)$ .

Если из вершины  $A$  в вершину  $B$  можно пройти, двигаясь по ребрам, то компоненты связности  $K(A)$  и  $K(B)$  совпадают, а в противном случае у них нет общих вершин (докажите это!). Таким образом, мно-

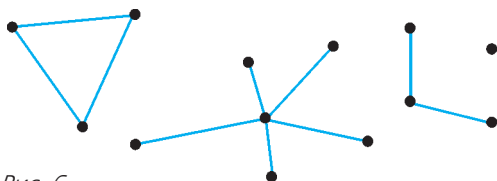


Рис. 6

жество всех вершин графа разбивается на компоненты связности (в частности, множество вершин связного графа представляет собой одну компоненту). На рисунке 6 изображен пример графа, у которого всего 4 компоненты связности. Обратим внимание на то, что компонента может состоять и из одной *изолированной* вершины.

Сформулируем важную и часто используемую теорему о связности.

**Теорема. 1.** Пусть дан связный граф с  $n$  вершинами. Тогда в нем не менее  $n - 1$  ребер.

2. Пусть граф с  $n$  вершинами распадается на  $k$  компонент связности. Тогда в нем не менее  $n - k$  ребер.

**Доказательство.** (Оно фактически воспроизводит рассуждения из решений уже разобранных нами задач.)

Сотрем в графе все ребра. Тогда все его вершины станут изолированными, т.е. граф распадется на  $n$  компонент связности. Начнем восстанавливать ребра по одному. Каждое проведенное ребро либо соединяет две компоненты связности в одну, либо никак не меняет разбиение на компоненты. Тем самым, восстановление ребра может уменьшить число компонент не более чем на 1. Поэтому, чтобы уменьшить число компонент с  $n$  до  $k$ , потребуется провести не менее  $n - k$  ребер. В частности, чтобы сделать граф связным (т.е. сделать  $k = 1$ ), надо провести не менее  $n - 1$  ребер.

Попробуем еще раз вернуться к задачам 1 и 2 и проанализировать, какое отношение к ним имеет теорема связности.

Картинка на рисунке 1 почти совпадает с наглядным представлением графа, и из теоремы сразу следует, что для сохранения связности нужно оставить не менее 7 ребер.

Картинка со спичками на рисунке 4 тоже представляет собой изображение графа, но не того, который нужен для решения задачи. И неудивительно: ведь чтобы создать связь между клетками, мы *убираем* спичку! Опишем нужный нам граф. Поставим вершины в центры клеток (всего 64 вершины), а ребром будем соединять пары центров соседних клеток, если на границе между ними нет спички. Рассматривая такой граф, мы полностью сводим задачу к ситуации, описанной в теореме.

Наверное, идея подсчета числа областей более ясно видна в задаче про спички (и ее решение выглядит даже более просто, чем доказательство теоремы).

### Упражнения

1. Шоколадка  $4 \times 6$  разделена бороздками на 24 квадратные плиточки. За один ход можно разламывать один любой кусок в любом месте и любом направлении, но обязательно вдоль бороздок. За какое наименьшее число разломов можно полностью разделить целую шоколадку на плиточки?

2. Решите задачу 2 в предположении, что убирать граничные спички можно и жук может выползть за пределы доски (но жук хочет только иметь возможность посещать все 64 клетки).

**Указание.** Можно считать, что вначале у нас есть 65 областей, считая внешнюю.

3. Пусть дан связный граф с  $n$  вершинами и  $k$  ребрами,

причем  $k > n - 1$ . Докажите, что можно удалить ребро так, чтобы граф остался связным.

*Указание.* Можно использовать прием, который мы встречали: удалить сначала все ребра, а затем восстанавливать их по одному.

Из упражнения 3 вытекает, что примеры в задаче 1 всегда можно получить, перекусывая одно за другим 5 ребер, заботясь лишь о сохранении связности.

**Упражнение 4** (Д.Храмцов, Всероссийская олимпиада, окружной этап, 1998 г.). Куб со стороной  $n \geq 3$  разбит перегородками на единичные кубики. Какое минимальное число перегородок между кубиками нужно удалить, чтобы из каждого кубика можно было добраться до границы куба?

### Необычные вспомогательные графы

Понятны типовые ситуации, которые легко описываются на языке графов: это города и соединяющие их дороги (авиалинии), знакомства людей в некоторой компании...

Далее мы рассмотрим задачи, в которых применение графов (и конкретно теоремы связности) не столь очевидно, но весьма продуктивно. Намеком на использование графа в решении той или иной задачи могут стать связи *между парами* объектов или даже просто выделенный набор пар.

**Задача 3** (по мотивам задачи И.Раскиной). *Есть  $m$  болельщиков: некоторые из них (возможно, все или никто) болеют за «Спартак», а остальные – за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это наверняка можно сделать?*

**Ответ:**  $m - 1$ .

**Решение.** *Пример.* Если задать вопросы первому и второму, первому и третьему, ..., первому и  $m$ -у, то рассадить будет легко: ответивших «да» сажаем в автобус вместе с первым, а остальных – в другой автобус.

*Оценка.* А теперь рассмотрим ситуацию, когда было задано не более чем  $m - 2$  вопроса. Построим граф вопросов: вершины соответствуют болельщикам, а ребра соединяют пары болельщиков, которым был задан вопрос. В нашем графе  $m$  вершин и не более  $m - 2$  ребер, значит, по теореме связности он не связан. Но возможно ли по несвязному графу понять, как правильно разделить болельщиков? Рассмотрим одну из компонент связности  $A$ . Множество  $A$  делится на два подмножества  $A'$  и  $A''$  (болельщики «Спартак» и болельщики «Динамо» соответственно). Аналогично, компонента связности  $B$  делится на подмножества  $B'$  и  $B''$ . В один из автобусов надо посадить болельщиков из множества  $A'$ , однако неизвестно, какое именно из подмножеств  $B'$  и  $B''$  к ним нужно добавить. В самом деле, если бы множество  $B'$  оказалось болельщиками «Динамо», а  $B''$  – «Спартак», на все заданные им вопросы они дали бы в точности те

же ответы (все вопросы были заданы внутри компоненты связности). А рассадка должна была быть другой. Значит, по ответам рассадка однозначно не восстанавливается.

**Упражнение 5** (И.Раскина, Турнир имени А.П.Савина, 2011 г.). Решите предыдущую задачу, если дополнительно известно, что  $m = 2n$  и что ровно  $n$  человек болеют за «Спартак» и  $n$  – за «Динамо».

Разберем еще несколько задач про клетчатые фигуры. В следующей задаче, как и в задаче 2, нам поможет граф, иллюстрирующий соседство клеток.

**Задача 4.** *На клетчатой бумаге нарисован многоугольник площадью в  $n$  клеток. Его контур идет по линиям сетки. Каков наибольший периметр многоугольника? (Сторона клетки равна 1.)*

**Ответ:**  $2n + 2$ .

**Решение.** *Пример.* Прямоугольник  $n \times 1$ .

*Оценка.* Сумма периметров  $n$  клеток равна  $4n$ . Из этих периметров складывается периметр многоугольника и удвоенная сумма длин отрезков сетки внутри многоугольника: ведь к каждому внутреннему отрезку клетки примыкают с двух сторон. Чтобы оценить общую длину внутренних отрезков, построим граф: вершины – клетки прямоугольника, ребра связывают клетки с общей стороной. Этот граф связан: ладья может свободно путешествовать между всеми клетками внутри многоугольника. По теореме, у графа не менее  $n - 1$  ребра, т.е. общая длина внутренних отрезков не менее  $n - 1$ . Но тогда периметр многоугольника не более  $4n - 2(n - 1) = 2n + 2$ .

*Комментарий.* Конечно, эту оценку можно доказать и индукцией по числу клеток. Но индуктивное утверждение нужно формулировать умело. На занятиях математического кружка немало школьников пытались опираться на кажущееся очевидным (а по сути близкое к упражнению 3) утверждение: «многоугольник из  $(k + 1)$ -й клетки можно получить, добавив одну клетку к какому-нибудь многоугольнику из  $k$  клеток», но так и не смогли его доказать...

Заметьте, что во многих задачах бывает полезна более общая конструкция «двойственного графа», когда области в некоторой «карте» на плоскости объявляются вершинами, а если у двух областей-вершин есть общая часть границы, то они соединяются ребром.

**Упражнение 6** (А.Шаповалов, Турнир имени А.П.Савина, 2009 г.). На клетчатой бумаге нарисован тысячеугольник со сторонами по границам клеток. Из какого наименьшего числа клеток он может состоять?

**Задача 5** (X Турнир городов). *Тетрадный лист раскрасили в 23 цвета по клеткам (при этом все цвета присутствуют). Пара цветов называется хорошей, если найдутся две соседние клетки, закрашенные этими цветами. Каково минимальное число хороших пар?*

**Путь к решению.** Среди всевозможных пар цветов явно выделены хорошие. Это намек на возможность построить граф «цветов» и оценить число ребер в нем!

**Ответ:** 22 пары.

**Решение. Пример.** Нетрудно построить пример с 22 хорошими парами цветов. Например, 22 хорошие пары получаются, если в «море» первого цвета плавают «островки» каждого из остальных 22 цветов. Здесь хорошие пары цветов – это в точности пары с участием первого цвета.

**Оценка.** Докажем, что меньше чем 22 хорошие пары быть не может. Рассмотрим такой граф Г: каждому цвету сопоставим вершину графа (итого 23 вершины), для каждой хорошей пары цветов соединим ребром соответствующие им вершины. Если доказать, что граф Г связный, то по теореме о связности в нем будет не менее 22 ребер. Возьмем в Г любую пару вершин-цветов А, В и на тетрадном листе отметим клетку К цвета А и клетку L цвета В. Будем перемещаться, начиная с клетки К, в соседние по стороне клетки и через несколько ходов придем в клетку L. В соответствии с перемещением по тетрадному листу будем двигаться по вершинам графа Г: если мы на очередном ходу из клетки М цвета С перешли в соседнюю с ней клетку N другого цвета D, то в графе Г мы из вершины С переходим в вершину D (С и D соединены ребром, так как клетки М и N соседние); если цвет клетки не меняется, то в графе Г мы остаемся на месте. Так мы получаем в графе Г путь по ребрам из вершины А в вершину В. Это доказывает связность графа Г.

**Упражнение 7.** Клетки шахматной доски раскрасили ровно в 33 цвета. Пару разных цветов назовем хорошей, если можно поставить пару бьющих друг друга коней на клетки этих цветов. Найдите наименьшее возможное число хороших пар.

**Указание.** Здесь нас интересуют не пары соседних клеток, а пары клеток, с одной из которых ходом коня можно перейти на другую.

**Задача 6** (С.Токарев). Дан клетчатый прямоугольник  $m \times n$ . Каждую его клетку разрезали по одной из диагоналей. На какое наименьшее число частей мог распаться прямоугольник?

**Ответ:**  $m + n$ .

**Решение. Пример.** Можно во всех клетках провести параллельные разрезы (рис.7), тогда количество частей будет  $m + n$ .

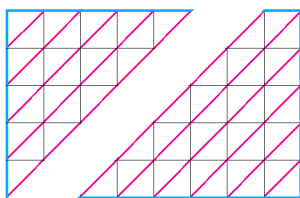


Рис. 7

**Оценка.** Пусть в каждой клетке проведен разрез



Рис. 8

вдоль одной из диагоналей. Построим граф: вершины будут соответствовать треугольничкам – половинам разрезанных клеток, а ребро между вершинами проведем, если соответствующие треугольнички имеют общий катет. Нетрудно понять, что каждой из частей, на которые распался прямоугольник, соответствует компонента связности нашего графа (пример – на рисунке 8). Число вершин равно удвоенному числу клеток, т.е.  $2mn$ . Число ребер равно числу границ между соседни-

ми клетками, т.е.  $m(n - 1) + n(m - 1) = 2mn - (m + n)$ . Согласно теореме, количество компонент связности в таком графе не меньше чем  $m + n$ .

**Упражнение 8** (И.Акулич, XXIV Турнир городов). Какое наибольшее число клеток доски  $9 \times 9$  можно разрезать по обоим диагоналям, чтобы доска не распалась на части?

**Указание.** Постройте граф, вершины которого – целые клетки или четвертушки разрезанных клеток (число вершин в нем зависит от числа разрезанных клеток).

Последнее упражнение интересно тем, что вспомогательный граф в нем можно построить многими способами. Кстати, и ответ далеко не очевиден.

Теперь приведем решение задачи М2339 «Задачника «Кванта».

**Задача 7** (В.Мокин, задача М2339, обобщение задачи М1295). Дана доска  $m \times n$ , разбитая на единичные клетки. Сначала в  $(m - 1)(n - 1) + 1$  клеток ставится по фишке. Пусть в некоторый момент на доске нашлись такие четыре клетки, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными краям доски, что ровно в одной из этих клеток стоит фишка; тогда эту фишку можно снять. Докажите, что хотя бы одну фишку не удастся снять с доски, проделывая только описанные операции.

**Решение.** Построим граф: вершины – вертикали и горизонтали, их всего  $m + n$ . Ребро связывает вертикаль с горизонталью, если на их пересечении нет фишки. Изначально свободны  $mn - (m - 1)(n - 1) - 1 = m + n - 2$  клетки, т.е. число ребер меньше  $m + n - 1$ . По теореме наш граф – не связный.

Клетку на пересечении горизонтали  $h$  и вертикали  $v$  будем обозначать  $(h, v)$ , а если эта клетка свободна, то  $(h, v)$  означает и ребро от  $h$  до  $v$ . Что произойдет при описанном в условии снятии фишки? Пусть четыре центра клеток расположены в вершинах прямоугольника на пересечении горизонталей  $p, q$  и вертикалей  $r, s$ , а фишка снимается с клетки  $(p, r)$ . Тогда, по условию, клетки  $(p, s)$ ,  $(q, s)$  и  $(q, r)$ , свободны. Это означает, что в момент перед снятием фишки в графе были ребра  $(p, s)$ ,  $(q, s)$  и  $(q, r)$ . Они образовывали путь из  $p$  в  $r$ , т.е.  $p$  и  $r$  лежали в одной компоненте связности. Снимая фишку, мы добавляем в графе ребро  $(p, r)$ , но компонент связности это не меняет. Поэтому граф был и остается не связным.

Заметим теперь, что на пустой доске каждая вертикаль связана с каждой горизонталью. Такой граф связан: горизонтали в нем связаны двузвенным путем через любую вертикаль, и наоборот. Но уже доказано, что связный граф мы получить не можем, поэтому все фишки снять нельзя.

**Путь к решению.** Построенный граф кажется необычным. Однако для математиков таблица из нулей и единиц – достаточно привычный способ представления так называемых *двудольных* графов: в таких графах вершины делятся на два сорта (две доли), а ребра могут связывать только вершины разных сортов. Доска из последней задачи естественно превращается в таблицу из нулей и единиц, если фишки заменить на 0, а пустые



места – на 1. Как мы видели, интерпретация таблицы в виде двудольного графа может помочь (см. также решение задачи 8 для 10 класса регионального этапа Всероссийской олимпиады в «Кванте» №2 за 2014 г.).

Имеется еще много интересных задач, где неожиданное использование графов помогает решить трудную задачу. Подобные сюжеты уже попадали на страницы «Кванта» (см., например, статью «Реконструкция генома: головоломка из миллиарда кусочков» в прошлом номере журнала). Мы надеемся вернуться к дальнейшему обсуждению этой красивой темы в будущем. А пока завершим знакомство трудной задачей, в которой теорема о связности графа срабатывает совершенно удивительным образом.

**Задача 8** (Д.Фомин, задача M1232). *Хозяйка испекла для гостей пирог. За столом может оказаться либо  $p$  человек, либо  $q$ . На какое минимальное количество кусков (не обязательно равных) нужно заранее разрезать пирог, чтобы в любом случае его можно было раздать поровну? Рассмотрите случаи:*

- а)  $p$  и  $q$  – взаимно простые числа;  
б)  $p$  и  $q$  имеют наибольший общий делитель  $d > 1$ .

**Ответ:** а)  $p + q - 1$ ; б)  $p + q - d$ .

**Решение.** *Пример.* Нам важна не форма кусков, а их вес. Изобразим пирог отрезком  $[0, pq]$  на числовой прямой и будем делить его на меньшие отрезки. Веса кусков будут пропорциональны длинам этих отрезков. Разделим синими точками большой отрезок на  $p$  равных частей, а красными – на  $q$  равных частей. Будет  $p - 1$  синяя и  $q - 1$  красная точки. Заметим, что точки деления соответствуют целым числам, при этом синие кратны  $q$ , а красные кратны  $p$ .

а) Если  $p$  и  $q$  взаимно просты, то точки деления соответствуют разным целым числам. Действительно, общая точка должна быть общим кратным  $p$  и  $q$ . В нашем случае это как минимум число  $pq$ , т.е. внутрь отрезка эта точка не попадает. Тогда будет всего  $(p - 1) + (q - 1) = p + q - 2$  точки, и они разделят пирог на  $p + q - 1$  частей.

б) Если  $\text{НОД}(p, q) = d > 1$ , то  $p = md$ ,  $q = nd$ , где натуральные числа  $m$  и  $n$  взаимно просты. Общие кратные  $p$  и  $q$  имеют вид  $kmnd$ , где  $k$  – натурально. На большой отрезок они попадают при  $k = 1, 2, \dots, d - 1$ . Тем самым, всего будет  $(p - 1) + (q - 1) - (d - 1) = p + q - d - 1$  точек, и они разделят пирог на  $p + q - d$  частей.

*Оценка.* Можно считать, что в гости могли прийти либо  $p$  дам, либо  $q$  гусар. Всех их будем считать вершинами графа. Всего в графе  $p + q$  вершин. Пусть есть план раздачи кусков и дамам, и гусарам. Даму и гусара, которым достался бы один и тот же кусок (или несколько кусков), соединим ребром. Итак, число ребер графа не больше числа кусков. Будем считать, что пирог весит  $pq$  фунтов. Рассмотрим компоненту связности. И дамы, и гусары из этой компоненты получили бы один и тот же набор кусков, т.е. в сумме поровну. Но дамы получают по  $q$  фунтов, гусары – по  $p$ , поэтому суммарный вес для компоненты делится на  $\text{НОК}(p, q)$ . (Кстати, вес отдельного куска не обязан быть целым, но нам это не важно, мы следим лишь за

суммарными весами.) Значит, компонента получает в сумме не менее  $\text{НОК}(p, q)$  фунтов.

а) Так как  $p$  и  $q$  взаимно просты, то  $\text{НОК}(p, q) = pq$ . Значит, компонента получает весь пирог, и других компонент нет. Граф связан, поэтому число ребер не меньше  $p + q - 1$ , то же верно и для числа кусков.

б) Известно равенство  $\text{НОД}(p, q) \cdot \text{НОК}(p, q) = pq$ . Значит, компонента получает не менее  $pq/d$  фунтов. Но тогда в графе не более  $d$  компонент связности. По теореме, число ребер не меньше  $p + q - d$ , то же верно и для числа кусков.

**Упражнение 9.** Придумайте решение предыдущей задачи для случая  $q = p + 1$  без применения графов.

### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 9** (А.Шаповалов, Турнир имени А.П.Савина, 2014 г.). Нарисован выпуклый многоугольник, разбитый непересекающимися диагоналями на треугольники. Можно ли стороны и диагонали раскрасить в желтый и красный цвета так, чтобы жук мог проползти из каждой вершины в любую другую по желтым отрезкам, а клоп – по красным?

**Задача 10** (А.Шаповалов, Турнир имени А.П.Савина, 2011 г.). Клетчатый квадрат  $8 \times 8$  разрежали по границам клеток на три многоугольника одинакового периметра. Найдите наибольшее возможное значение этого периметра.

**Задача 11** (А.Анджанс, XXV Всесоюзная олимпиада). Фигура на рисунке 9 разрезана по сторонам клеток на несколько многоугольников, ни один из которых не содержит квадрата  $2 \times 2$ . Каково наименьшее возможное число многоугольников?

**Задача 12** (А.Марачев, XXXV Турнир городов). Из кубиков  $1 \times 1 \times 1$  склеен куб  $3 \times 3 \times 3$ . Какое наибольшее количество кубиков можно из него выкинуть, чтобы осталась фигура с такими двумя свойствами:

- со стороны каждой грани исходного куба фигура выглядит как квадрат  $3 \times 3$  (глядя перпендикулярно этой грани, мы не увидим просвета – видны 9 кубиков фигуры);
- переходя в фигуре от кубика к кубику через их общую грань, можно от каждого кубика добраться до любого другого?

**Задача 13** (А.Шаповалов, Турнир имени А.П.Савина, 2000 г.). Есть 101 банка консервов весами 1001 г, 1002 г, ..., 1101 г. Этикетки с весами потерялись, но завхозу кажется, что он помнит, какая банка сколько весит. Он хочет убедиться в этом за наименьшее число взвешиваний.

а) У завхоза есть двое чашечных весов: одни точные, другие – грубые. За одно взвешивание можно сравнить две банки. Точные весы всегда показывают, какая банка тяжелее, а грубые – только если разница больше 1,1 г (а иначе показывают равновесие). Завхоз может использовать только одни весы. Какие ему следует выбрать?

б) У завхоза есть только грубые весы. Какое наименьшее число взвешиваний ему понадобится?

**Задача 14** (В.Болтянский, задача M980, б). Пусть точка  $O$  лежит внутри выпуклого многогранника с вершинами  $A_1, \dots, A_n$ . Докажите, что среди углов  $\angle_i O A_j$  не менее  $n - 1$  не острых.

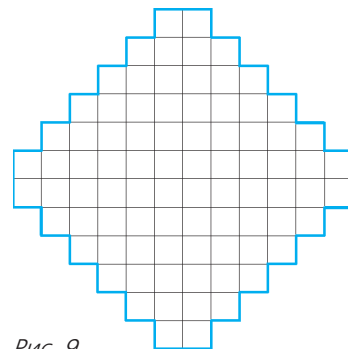


Рис. 9

# Равновесие тел и потеря устойчивости

И. ГОРБАТЫЙ

**С**УЩЕСТВУЮТ ЯВЛЕНИЯ, В КОТОРЫХ ПРИ МАЛОМ изменении некоторого параметра происходит резкое изменение состояния рассматриваемой системы. В этом случае говорят о потере устойчивости, бифуркациях, переключениях, срывах и катастрофах. Круг таких явлений разнообразен, они проявляются не только в физике, но и в других науках, например в биологии и экономике. Математическая теория устойчивости связана с именами российских математиков А.М.Ляпунова, А.А.Андропова, В.И.Арнольда и их учеников.

В этой статье рассматриваются некоторые задачи равновесия и устойчивости в механических системах, которые могут быть решены школьными методами.

Состоянием равновесия механической системы называют такое ее состояние, при котором все точки системы покоятся по отношению к выбранной системе отсчета. Если в качестве механической системы рассматривается твердое тело, то для его равновесия необходимы два условия:

$$\vec{F}_{\text{внеш}} = 0, \quad M_{\text{внеш}} = 0,$$

где  $\vec{F}_{\text{внеш}}$  – векторная сумма внешних сил, действующих на тело, а  $M_{\text{внеш}}$  – их суммарный момент относительно произвольной оси. Для получения достаточных условий равновесия к этим условиям следует добавить еще равенство нулю скоростей всех точек тела в некоторый момент времени.

Равновесие тела устойчиво, если при малом смещении тела из положения равновесия возникают силы, возвращающие его в положение равновесия. При неустойчивом равновесии ма-

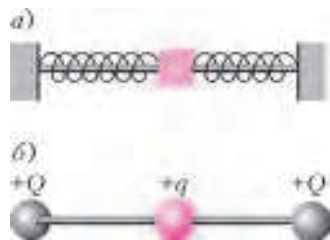


Рис.1. Устойчивое равновесие: а) муфта на стержне между двумя пружинами; б) подвижная бусинка между двумя закрепленными зарядами

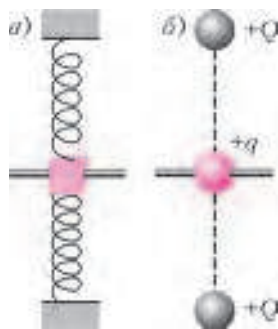


Рис.2. Неустойчивое равновесие: а) муфта на стержне между двумя сжатыми пружинами; б) подвижная бусинка между двумя закрепленными зарядами

лое отклонение тела от положения равновесия вызывает силы, стремящиеся увеличить это отклонение. На рисунке 1 приведены примеры устойчивого равновесия, а на рисунке 2 – неустойчивого.

Приступим теперь к рассмотрению конкретных задач.

## Задача 1. Два заряда

Небольшой шарик с массой  $m$  и зарядом  $q$  покоится на горизонтальной непроводящей поверхности (рис. 3). К нему очень медленно подносят, перемещая вертикально вниз, другой шарик с зарядом  $-q$ . На каком расстоянии от горизонтальной поверхности шарики столкнутся?



Рис. 3

На нижний шарик действуют силы тяжести, реакции опоры и кулоновского взаимодействия. Запишем условие равновесия шарика на горизонтальной поверхности:

$$\frac{kq^2}{h^2} + N - mg = 0,$$

где  $h$  – расстояние между шариками,  $k$  – постоянная в законе Кулона. Это равновесие устойчиво: при малом смещении нижнего шарика из этого положения по вертикали или по горизонтали возникает «возвращающая» сила. С уменьшением  $h$  сила реакции  $N$  уменьшается и при некотором  $h$  оказывается равной нулю. С этого момента положение нижнего шарика на горизонтальной поверхности становится неустойчивым, он отрывается от поверхности и устремляется к верхнему шарика со все возрастающим ускорением. Поскольку верхний шарик движется очень медленно, то столкновение шариков происходит на высоте

$$h = \sqrt{\frac{kq^2}{mg}}.$$

## Задача 2. Муфта и четыре пружины

К муфте, которая может скользить по гладкому стержню, прикреплены четыре пружины, как показано на рисунке 4. Две из них, расположенные вдоль стержня, имеют жесткость в  $n = 2$  меньше, чем «поперечные» пружины, перпендикулярные стержню. Первоначально пружины не деформированы, а затем поперечные пружины начинают медленно сжимать. При какой относительной деформации этих пружин равновесное положение муфты потеряет устойчивость?

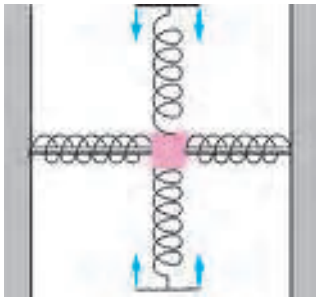


Рис. 4

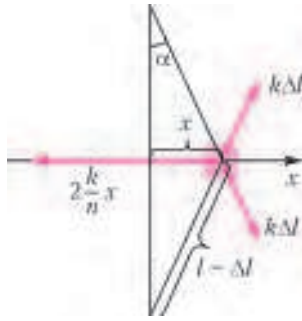


Рис. 5

Направим ось  $x$  вдоль стержня. Пусть муфта сместилась из положения равновесия на малую величину  $x$ . Действующие на нее силы изображены на рисунке 5. Проекция результирующей силы на ось  $x$  равна

$$F_x = 2k\Delta l \sin \alpha - 2\frac{k}{n}x,$$

где  $k$  – жесткость, а  $\Delta l$  – деформация поперечных пружин. Учитывая, что

$$\sin \alpha = \frac{x}{l - \Delta l},$$

получим

$$F_x = \frac{2kxl}{n(l - \Delta l)} \left( (n + 1)\frac{\Delta l}{l} - 1 \right).$$

Из этой формулы следует, что если  $(n + 1)\Delta l/l < 1$ , то проекция силы  $F_x$  отрицательна при  $x > 0$  и положительна при  $x < 0$ , т.е. в этом случае при отклонении системы от положения равновесия возникают силы, стремящиеся вернуть систему к равновесию ( $x = 0$ ). Положение равновесия становится неустойчивым при  $(n + 1)\Delta l/l > 1$ . Отсюда находим «пороговую» относительную деформацию поперечных пружин:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{n + 1} = \frac{1}{3}.$$

### Задача 3. Три заряда

Положительный  $q_1$  и отрицательный  $q_2$  точечные заряды закреплены на оси  $x$  по разные стороны от гладкой непроводящей пластины, плоскость которой перпендикулярна оси  $x$ . Маленький положительно заряженный шарик также находится на оси  $x$ , упираясь в пластину, как показано на рисунке 6. Первоначально пластина расположена вблизи отрицательного заряда, шарик при этом находится в равновесии. Пластины начинают поступательно перемещать вдоль оси  $x$ , медленно увеличивая расстояние  $l$  между пластиной и отрицательным зарядом. Когда  $l$  достигает  $1/3$  расстояния между зарядами, шарик «улетает» с оси  $x$ . Определите отношение  $q_1/q_2$ . Влиянием вещества пластины на электрическое поле, а также силой тяжести пренебречь.



Рис. 6

яясь в пластину, как показано на рисунке 6. Первоначально пластина расположена вблизи отрицательного заряда, шарик при этом находится в равновесии. Пластины начинают поступательно перемещать вдоль оси  $x$ , медленно увеличивая расстояние  $l$  между пластиной и отрицательным зарядом. Когда  $l$  достигает  $1/3$  расстояния между зарядами, шарик «улетает» с оси  $x$ . Определите отношение  $q_1/q_2$ . Влиянием вещества пластины на электрическое поле, а также силой тяжести пренебречь.

Копировать текст задачи и решение можно по адресу: <http://www.kvant.ucoz.ru>

Предположим, что шарик сместился вдоль оси  $y$ , перпендикулярной оси  $x$ , на малое расстояние  $h$  (рис. 7).

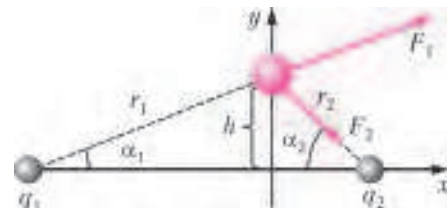


Рис. 7

Проекция на ось  $y$  результирующей силы, действующей на шарик со стороны точечных зарядов, равна

$$F_y = F_1 \sin \alpha_1 - F_2 \sin \alpha_2,$$

где  $\sin \alpha_1 = h/r_1$ ,  $\sin \alpha_2 = h/r_2$ , а  $r_1$  и  $r_2$  – расстояния от шарика до зарядов  $q_1$  и  $q_2$  соответственно. Положение шарика на оси  $x$  будет устойчивым, если  $F_y < 0$ . Потеря устойчивости происходит при условии

$$F_1 \sin \alpha_1 = F_2 \sin \alpha_2.$$

Из закона Кулона следует, что

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{q_1 r_2^2}{q_2 r_1^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{q_1 r_2^2}{q_2 r_1^2} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{q_1}{q_2} = \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^3.$$

При малых  $h$  расстояния  $r_1$  и  $r_2$  примерно равны соответствующим расстояниям, измеренным вдоль оси  $x$ . Поэтому

$$\frac{q_1}{q_2} = 2^3 = 8.$$

### Задача 4. Четыре заряда

На концах тонкой непроводящей спицы длиной  $2l$  закреплены положительные точечные заряды  $Q$  (рис. 8). Положительно заряженная бусинка может двигаться по спице без трения и в начальный момент покоится в положении равновесия. К спице с большого расстояния медленно приближают положительный заряд  $q$ , перемещая его вдоль перпендикуляра к спице, проходящего через ее середину. Когда расстояние между зарядом  $q$  и бусинкой стало равным  $l$ , бусинка пришла в движение. Определите отношение зарядов  $Q/q$ .

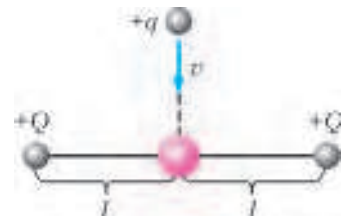


Рис. 8

Направим ось  $x$  вдоль спицы, ось  $y$  – через центр спицы и движущийся заряд, а начало отсчета осей выберем в центре спицы. Пусть  $x > 0$  – малое смещение бусинки из центра спицы. Тогда проекция на ось  $x$  результирующей силы, действующей на бусинку,



равна

$$F_x = \frac{kQq_0}{(l+x)^2} - \frac{kQq_0}{(l-x)^2} + \frac{kq_0x}{y^3} \approx -\frac{4kQq_0x}{l^3} - \frac{kq_0x}{y^3} = -kq_0x \left( \frac{4Q}{l^3} - \frac{q}{y^3} \right),$$

где  $q_0$  – заряд бусинки,  $y$  – координата заряда  $q$ ,  $k$  – постоянная в законе Кулона. Равновесие бусинки становится неустойчивым при  $F_x = 0$ . При этом по условию задачи  $y = l$ . Следовательно,

$$\frac{Q}{q} = \frac{1}{4}.$$

**Задача 5. Два заряда и пружинка**

Небольшой заряженный шарик покоится на гладком горизонтальном непроводящем столе. К шарiku присоединена пружинка жесткостью  $k$ , второй конец которой закреплен на столе. Вдоль оси пружинки к шарiku с большого расстояния очень медленно приближают такой же, но противоположно заряженный шарик. Определите деформацию пружинки в момент столкновения шариков, если величина заряда каждого шарика равна  $q$ .

Направим ось  $x$  вдоль оси пружинки от первого шарика (он закреплен на пружине) ко второму, который медленно приближается к первому (рис.9). Начало отсчета примем в точке, где первоначально находился первый шарик при недеформированной пружинке. Проекция на ось  $x$  силы, действующей на первый шарик,

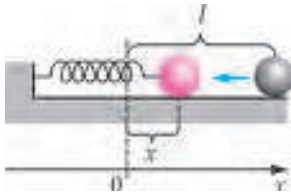


Рис. 9

определяется формулой

$$F_x = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(l-x)^2} - kx,$$

где  $x$  – координата первого шарика,  $l$  – координата второго,  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная. Графики зависимости  $F_x(x)$  при  $0 < x < l$  для различных значений параметра

$$\alpha = \frac{1}{l} \left( \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 k} \right)^{1/3}$$

приведены на рисунке 10. Минимальное значение силы достигается при

$$x = x_m = l(1 - \alpha).$$

Это выражение нетрудно получить стандартным методом, вычисляя производную и решая уравнение  $F'_x(x_m) = 0$ . Подставляя найденное значение  $x_m$  в  $F_x(x_m)$ , получим минимальное значение функции:

$$F_m = \left( \frac{3}{2}\alpha - 1 \right) kl.$$

При  $\alpha < 2/3$  значение  $F_m$  отрицательно и, как видно из рисунка 10, уравнение  $F_x = 0$  имеет два корня, один из

которых соответствует устойчивому равновесию шарика на пружинке, а второй – неустойчивому. При  $\alpha = 2/3$  два корня уравнения  $F_x = 0$  «сливаются» в один, а при  $\alpha > 2/3$  проекция силы  $F_x$  положительна при любых значениях  $x$  в диапазоне  $0 < x < l$ .

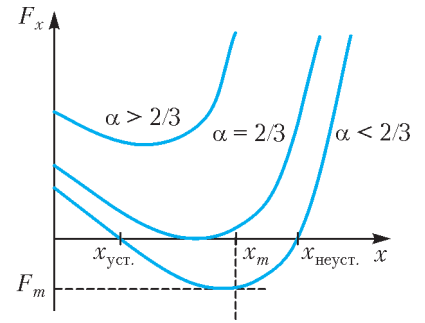


Рис. 10

Итак, когда второй шарик находится на большом расстоянии от первого, величина  $l$  велика и поэтому  $\alpha < 2/3$ . При этом первый шарик растягивает пружинку на  $x = x_{уст}$  и его равновесие устойчивое. По мере приближения второго шарика к первому величина  $l$  уменьшается, а величины  $F_m$ ,  $x_{уст}$  и  $\alpha$  растут – пружинка растягивается все сильнее. При достижении условия  $\alpha = 2/3$  шарик на пружинке теряет устойчивость, проекция силы  $F_x$  становится положительной и первый шарик устремляется навстречу второму, пока не происходит их столкновение. Поскольку второй шарик по условию задачи приближается очень медленно, то деформация пружины в момент столкновения равна значению  $l$ , при котором  $\alpha = 2/3$ :

$$l = \frac{3}{2} \left( \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 k} \right)^{1/3}.$$

**Задача 6. Два заряженных шарика на нитях**

Два маленьких шарика, заряд одного из которых  $q_0$ , а другого  $-q_0$ , подвешены на двух изолирующих нитях длиной  $L = 1$  м каждая. Точки подвеса нитей очень медленно сближаются так, что они остаются все время в одной горизонтальной плоскости. Когда расстояние между точками подвеса нитей стало равным  $a = 5$  см, шарики столкнулись. Найдите величину заряда  $q_0$ . Масса каждого шарика  $m = 4$  г.

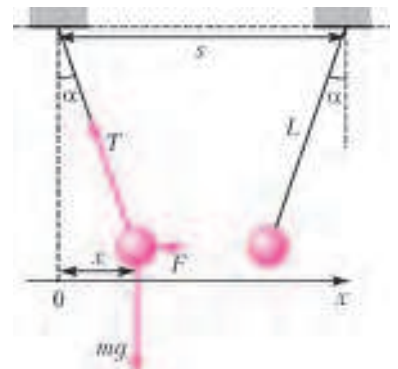


Рис. 11

Направим ось  $x$ , как показано на рисунке 11. Тогда проекция на эту ось результирующей силы, действующей на один из шариков, равна

$$F_x = F - T \sin \alpha = \frac{q_0^2}{4\pi\epsilon_0(s-2x)^2} - T \sin \alpha,$$

где  $s$  – расстояние между точками подвеса нитей,  $T$  – сила натяжения нити,  $\alpha$  – угол, который составляет каждая нить с вертикалью. Из рисунка 11 видно, что  $\sin \alpha = x/L$ . По условию  $L \gg s$ , поэтому угол  $\alpha$  является малым,  $\sin \alpha = \text{tg } \alpha$  и  $\cos \alpha = 1$ . Выражая из

уравнения

$$T \cos \alpha = mg$$

силу натяжения  $T$  и подставляя ее в предыдущее уравнение, получим

$$F_x = \frac{q_0^2}{4\pi\epsilon_0 (s-2x)^2} - \frac{mg}{L}x,$$

или

$$F_x = \frac{(q_0/2)^2}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{s}{2} - x\right)^2} - \frac{mg}{L}x.$$

Заметим, что последнее выражение отличается от аналогичного выражения из задачи 5 лишь обозначениями:  $q = q_0/2$ ,  $l = s/2$ ,  $k = mg/L$ . Поэтому можно воспользоваться результатом решения задачи 5 и записать условие потери устойчивости в рассматриваемом случае в виде

$$\frac{s}{2} = \frac{3}{2} \left( \frac{q_0^2 L}{8\pi\epsilon_0 mg} \right)^{1/3},$$

где  $s = a$ . Выражая отсюда  $q_0$ , получим ответ:

$$q_0 = \sqrt{\left(\frac{2a}{3}\right)^3 \frac{\pi\epsilon_0 mg}{L}} = 6,4 \cdot 10^{-9} \text{ Кл.}$$

### Задача 7. Стержень, опущенный в воду

Однородный тонкий стержень, подвешенный на нитке за один из концов, начинают погружать в воду, медленно опуская точку подвеса (рис.12). Определите максимальную глубину погружения  $h$  нижнего конца стержня, если его длина  $l = 18$  см, а плотность материала стержня составляет  $n = 1/2$  от плотности воды.

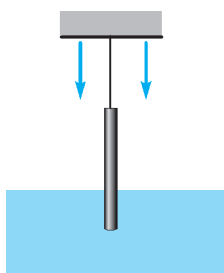


Рис. 12

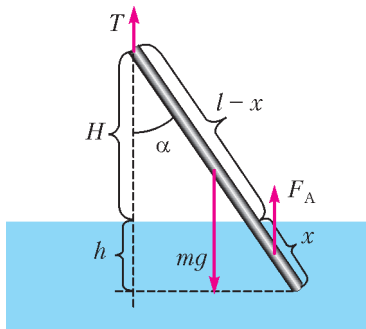


Рис. 13

Рассмотрим стержень, погруженный в воду и отклоненный от вертикали на угол  $\alpha$  (рис.13). Суммарный момент силы тяжести и архимедовой силы относительно горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня, равен

$$M = F_A \left( l - \frac{x}{2} \right) \sin \alpha - mg \frac{l}{2} \sin \alpha,$$

где  $F_A = \rho g S x$  – сила Архимеда,  $\rho$  – плотность воды,  $x$  – длина погруженной в воду части стержня,  $S$  – площадь поперечного сечения стержня,  $m = \rho n S l$  – его масса. При  $M < 0$  момент сил уменьшает угол  $\alpha$ , а при

$M > 0$  – увеличивает отклонение стержня от вертикали. Условие  $M = 0$  определяет углы, соответствующие положениям равновесия. Подставляя в формулу для момента выражение для силы Архимеда и массы стержня, получим

$$M = -(x^2 - 2lx + nl^2) \frac{\rho g S}{2} \sin \alpha.$$

Из формулы  $\cos \alpha = H/(l-x)$  выразим  $x$ , подставим в предыдущую формулу и после преобразований получим

$$M = \frac{\rho g S}{2} H_m^2 \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \left( \cos \alpha - \frac{H}{H_m} \right) \left( \cos \alpha + \frac{H}{H_m} \right),$$

где  $H_m = l\sqrt{1-n}$ . При  $H > H_m$  уравнение  $M = 0$  имеет только один корень:  $\alpha = 0$ , который соответствует устойчивому положению равновесия. Действительно, в точке  $\alpha = 0$  момент сил  $M(\alpha)$  меняет знак с «минуса» на «плюс», как показано на рисунке 14, поэтому при

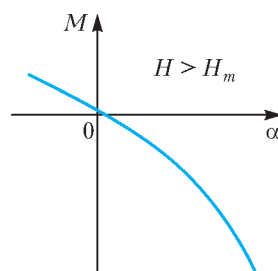


Рис. 14

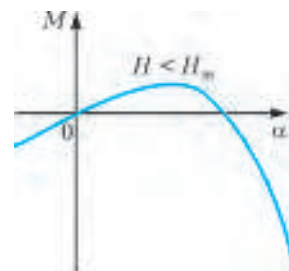


Рис. 15

малом отклонении от равновесия возникает момент сил, возвращающий стержень к положению равновесия. Если же  $H < H_m$ , то характер зависимости  $M(\alpha)$  изменяется. Как видно из рисунка 15, точка  $\alpha = 0$  становится неустойчивой, а устойчивое положение равновесия реализуется при  $\alpha = \arccos(H/H_m)$ . В этом случае глубина погружения нижнего конца стержня определяется формулой

$$h = l \cos \alpha - H = H \left( \frac{l}{H_m} - 1 \right).$$

Видно, что с уменьшением  $H$  величина  $h$  тоже уменьшается, следовательно, максимальное значение  $h$  достигается при  $H = H_m$ :

$$h = h_{\max} = l - H_m = l(1 - \sqrt{1-n}) \approx 5,3 \text{ см.}$$

Итак, при медленном опускании точки подвеса стержень сначала будет оставаться вертикальным, а при  $H \leq H_m$  начнет отклоняться от вертикали на угол, определяемый формулой  $\alpha = \arccos(H/H_m)$ .

А теперь – эксперимент. Возьмите карандаш, прикрепите к его концу ниточку и медленно опускайте подвешенный на ниточке карандаш в кастрюлю с водой. Если наши теоретические предсказания подтвердятся – радуйтесь. Ну а если нет – вспомните слова великого физика: «Чем дальше эксперимент от теории, тем ближе он к Нобелевской премии».

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4-2014» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «M2349» или «Ф2355». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru) и [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru) соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи M2349–M2351, M2354 предлагались на XXXV Турнире городов, задача M2352 предлагалась на XII Устной олимпиаде по геометрии.

## Задачи M2349–M2355, Ф2355–Ф2362

**M2349.** Профессор Выбегалло написал 1001 статью. В каждой статье он может поставить ссылки на другие статьи, но никакие две статьи не должны ссылаться друг на друга. Выбегалло получит значимость  $k$ , если после этого у него будет  $k$  статей, на каждую из которых ссылаются хотя бы  $k$  статей. Какой наибольшей значимости он может добиться?

*И. Богданов, Е. Молчанов*

**M2350.** Клетки таблицы  $7 \times 5$  заполнены числами так, что в каждом прямоугольнике  $2 \times 3$  (вертикальном или горизонтальном) сумма чисел равна нулю. Заплатив 100 рублей, можно выбрать любую клетку и узнать, какое число в ней записано. Какого наименьшего числа рублей хватит, чтобы наверняка определить сумму всех чисел таблицы?

*Е. Бакаев*

**M2351.** Дан многочлен двадцатой степени с целыми коэффициентами. На плоскости отметили все точки с целыми координатами, у которых ординаты не меньше 0 и не больше 10. Какое наибольшее число отмеченных точек может лежать на графике этого многочлена?

*Г. Жуков*

**M2352.** Дан правильный треугольник  $ABC$  площади 1 и точка  $P$  на его описанной окружности. Прямые  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$  пересекают прямые  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  в точках  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  соответственно. Найдите площадь треугольника  $A'B'C'$ .

*А. Заславский*

**M2353.** На окружности расположены  $n$  фишек. За ход можно взять две из них и переместить в противоположных направлениях на равные дуги. а) Докажите, что не более чем за  $n - 1$  ход можно добиться того, чтобы

точки, в которых стоят фишки, образовывали правильный  $n$ -угольник. б) Решите ту же задачу с дополнительным ограничением: в процессе перемещения фишкам запрещается перескакивать через другие фишки.

*По мотивам задачи олимпиады  
Gulf Mathematical Olympiad*

**M2354.** Дан треугольник, у которого нет равных углов. Петя и Вася играют в такую игру: за один ход Петя отмечает точку на плоскости, а Вася красит ее по своему выбору в красный или синий цвет. Петя выигрывает, если какие-то три из отмеченных им и покрашенных Васей точек образуют одноцветный треугольник, подобный исходному. За какое наименьшее число ходов Петя сможет гарантированно выиграть (каков бы ни был исходный треугольник)?

*К. Кноп*

**M2355\*.** Докажите, что существует бесконечно много натуральных  $n$ , не представимых в виде  $\frac{p^a - p^b}{p^c - p^d}$ , где  $p$  – простое, а  $a, b, c, d$  – натуральные числа.

*В. Сендеров*

**Ф2355.** Из речного порта  $A$  к расположенному ниже по течению реки порту  $B$  одновременно стартовали буксир и четыре ( $N$ ) нагруженных плотов. Расстояние между портами  $L$ , скорость течения реки  $u$ . Буксир тащит плоты по одному, при этом его скорость  $v$  относительно воды с буксируемым плотом такая же, как и без плота. За какое минимальное время все плоты могут быть доставлены в порт  $B$ ? Время, нужное для сцепления и расцепления плотов с буксиром, мало. Размерами плотов и буксира в сравнении с  $L$  можно пренебречь.

*Р. Аванесян, Э. Хачатрян*



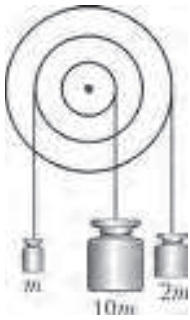


Рис. 1

**Ф2356.** Три невесомых шкива радиусами  $R$ ,  $2R$  и  $3R$  concentрично скреплены между собой в единый блок и насажены на ось, на которой блок может вращаться без трения (рис.1). На шкивы намотаны невесомые и нерастяжимые нити, к которым подвешены грузы массами  $10m$ ,  $m$  и  $2m$  соответственно. Найдите ускорение груза массой  $10m$ .

И.Акулич

**Ф2357.** Днем 21 июня Солнце «стоит» высоко, и на каждый квадратный метр поверхности земли падает излучение, несущее мощность  $W = 1$  кВт. Ветра нет, влажность воздуха невысокая, температура воздуха  $t_0 = 20$  °С. Оцените время, за которое высохнет лужа на асфальте, если ее начальная глубина  $h = 1$  см. Нужные данные отыщите самостоятельно.

С.Варламов

**Ф2358.** Электрические заряды равномерно распределены по длинному тонкому изолированному стержню  $MN$  с линейной плотностью зарядов  $\sigma$ .

1) Покажите, что в произвольной точке  $K$  электрическое поле  $\vec{E}$  стержня направлено по биссектрисе угла  $MKN$ . 2) Определите направление и величину напряженности электрического поля в плоскости, которая перпендикулярна стержню и содержит одну из конечных точек стержня. 3) Определите напряженность электрического поля отрезка  $AB$ , равномерно заряженного с линейной плотностью  $\sigma$ , в точке  $O$ , удаленной от отрезка на расстояние  $r$  (рис.2). Углы  $\alpha$  и  $\beta$  заданы.

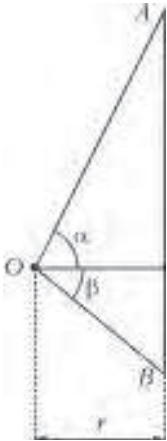


Рис. 2

А.Бычков

**Ф2359.** На стеклянном баллоне лампочки накаливания написано: 220 В, 10 Вт. Сопротивление спирали холодной лампочки, измеренное с помощью мультиметра, оказалось равным 484 Ом. Какой ток потечет через эту лампочку, если включить ее в сеть постоянного тока напряжением 110 В?

А.Старов

**Ф2360.** Две толстые медные шины лежат на горизонтальном столе (рис.3; вид сверху). К шинам подключена идеальная батарейка с ЭДС  $\mathcal{E} = 1$  В. На шинах находится медная перемычка  $mn$ , которая движется



Рис. 3

поступательно с постоянной горизонтальной скоростью  $v = 1$  м/с в направлении, указанном стрелкой. В перемычку вставлено сопротивление  $R = 1$  Ом. В одну из шин «врезан» идеальный амперметр и указано его расположение (знаки) его клемм. Вертикальное и однородное магнитное поле направлено вверх (от рисунка к читателю), его индукция равна по модулю  $B = 1$  Тл. Какой ток тек через амперметр в моменты времени, когда перемычка проходила через точки  $A$  и  $C$ , если в момент прохождения перемычки через точку  $D$  амперметр показывал  $I = +1$  А? Каким было расстояние между точками касания перемычкой шин в момент прохождения перемычкой точки  $D$ ? Угол между перемычкой и прямой шиной равен  $\alpha = 2\pi/5 = 72^\circ$ . Для измерения расстояний на рисунке пользуйтесь линейкой с миллиметровыми делениями.

Д.Сергеев

**Ф2361.** Стеклопараллельную пластинку в форме диска диаметром  $d = 4$  см разрезали на две части с одинаковыми массами  $m = 10$  г в виде собирающей и рассеивающей линз и с фокусными расстояниями  $F_1 = +10$  см и  $F_2 = -10$  см соответственно (рис.4).

Линзы раздвинули так, что между ними образовался небольшой зазор постоянной толщины  $\delta = 1$  мм. Система линз облучается мощным пучком лазерного излучения интенсивностью  $I = 10$  кВт/см<sup>2</sup>. Рассчитайте эффективную силу взаимодействия между линзами, возникающую из-за преломления света. Через какое время линзы «схлопнутся»? На поверхности линз нанесено просветляющее покрытие. Потерями в стекле пренебречь. Силу тяжести не учитывать.

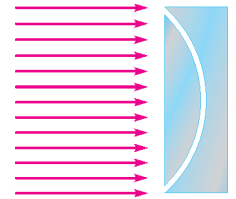


Рис. 4

А.Гуденко

**Ф2362.** Тончайшая паутинка, случайно попавшая в кадр при фотографировании со вспышкой удаленного предмета (узоров гардины), на фотографии превратилась в яркую широкую линию, пересекающую кадр (рис.5). Каково расстояние от линзы объектива фотоаппарата до паутинки? Линзу объектива считайте тон-



Рис. 5

кой. Кадр на рисунке в увеличенном масштабе воспроизводит светочувствительную матрицу размером  $4,3 \times 5,8$  мм.

*Указание.* Технические характеристики фотоснимка: диафрагма  $D = 2,75$  мм, фокусное расстояние линзы объектива  $F = 14$  мм, выдержка  $\tau = 1/80$  с, присутствует фотовспышка.

А.Гуденко

**Решения задач M2334–M2340  
Ф2340–Ф2347**

**M2334.** Эксперту предъявили 12 одинаковых на вид монет, среди которых, возможно, есть фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые – тоже, фальшивая монета легче настоящей. У эксперта есть чашечные весы и эталонные монеты: 5 настоящих и 5 фальшивых. Сможет ли он за 4 взвешивания определить количество фальшивых монет среди предъявленных?

**Ответ:** сможет.

Очевидно, достаточно показать, что можно за два взвешивания определить количество фальшивых монет среди шести данных. Назовем эти шесть монет неизвестными. Берем три настоящие монеты и три фальшивые, взвешиваем их с неизвестными. Если весы в равновесии, то среди неизвестных монет ровно три фальшивых. Пусть вес эталонных монет больше. Тогда среди неизвестных монет 4, 5 или 6 фальшивых. Возьмем пять эталонных фальшивых и одну эталонную настоящую и взвесим их с неизвестными монетами. При равенстве мы получаем, что среди неизвестных монет ровно 5 фальшивых, если перевесят эталонные – 6 фальшивых, если перевесят неизвестные – 4 фальшивые. Случай, когда при первом взвешивании перевесили неизвестные монеты, рассматривается аналогично, но второе взвешивание производится с 5 эталонными настоящими монетами и одной эталонной фальшивой.

О.Нечаева

**M2335.** По кругу расположены  $n$  луночек, одна из которых отмечена. Петя и Вася играют в следующую игру. В начале игры Вася кладет шарик в одну из луночек. Далее за каждый ход Петя называет натуральное число  $k$  (числа  $k$  могут отличаться на разных ходах), а Вася перемещает шарик из луночки, в которой он находится, на  $k$  луночек по часовой либо против часовой стрелки (по своему усмотрению). При каких  $n$  Петя может играть так, чтобы через несколько ходов шарик: а) гарантированно попал в отмеченную луночку; б) гарантированно попал либо в отмеченную луночку, либо в одну из соседних с отмеченной луночек?

**Ответ:** а) при  $n$ , равном степени двойки;

б) при всех  $n$ .

Будем считать, что луночки занумерованы по часовой стрелке от 0 до  $n - 1$ , причем номер 0 имеет отмеченная луночка.

а) Пусть  $n = 2^k$ ,  $k \geq 1$  (при  $k = 0$  луночка всего одна). Одна из возможных стратегий Пети очень проста: если

шарик находится в луночке номер  $s$ , он называет число  $s$ . Если Вася сдвинет шарик против часовой стрелки, то он немедленно попадет в отмеченную луночку. Значит, он вынужден сдвинуть шарик по часовой стрелке, т.е. в луночку номер  $t$ , где  $t \equiv 2s \pmod{n}$ . Так как  $t - 2s$  делится на  $2^k$ , то  $t$  четно. Таким образом, после первого шага шарик обязательно находится в луночке с четным номером. Аналогично, на следующем шаге номер луночки будет обязательно делиться на 4 и т.д. Поэтому не позже чем на  $k$ -м шаге номер луночки будет делиться на  $2^k$ , а такая луночка только одна – отмеченная.

Пусть теперь  $n$  не является степенью двойки, т.е. имеет нечетный делитель, больший 1:  $n = 2^k(2r + 1)$ . Пусть для начала  $k = 0$ , т.е.  $n$  нечетно. Тогда Вася может в начале положить шарик в любую луночку (кроме отмеченной). Действительно, в этом случае расстояние между этой луночкой и отмеченной будет четным, считая по часовой стрелке, и нечетным в противном случае (или наоборот). Поэтому, назовет ли Петя четное число или нечетное, Вася в любом случае может сдвинуть шарик так, чтобы он не попал в отмеченную луночку – а больше ничего и не требуется. То же самое верно и в случае  $k > 0$ , но с одним отличием: Вася может положить шарик в лунку, номер которой не делится на  $2r + 1$ , и в дальнейшем сохранять это условие. В самом деле, пусть шарик находится в луночке с номером  $s$ , не делящемся на  $2r + 1$ , и Петя называет число  $t$ . Тогда Вася может переместить шарик в луночку с номером  $u \equiv s + t \pmod{n}$  или  $v \equiv s - t \pmod{n}$ . Оба числа  $u$  и  $v$  не могут делиться на  $2r + 1$ , иначе  $u + v = (s + t) + (s - t) + cn = 2s + cn$  делится на  $2r + 1$ , откуда  $s$  делится на  $2r + 1$  – противоречие.

Отметим, что если Вася в начале положит шарик, например, в лунку номер  $2r + 1$ , то Петя сможет выиграть по схеме, аналогичной случаю  $n = 2^k$ .

б) Пусть  $n > 3$  (для  $n \leq 3$  задача очевидна). Пусть  $\Phi_r$  – множество номеров луночек, в которые можно положить шарик, чтобы Петя мог выиграть не более чем за  $r$  ходов, в частности  $\Phi_0 = \{n - 1, 0, 1\}$  (шарик уже лежит в нужной луночке).

Пусть множество  $\Phi_r$  не совпадает с множеством  $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ , и пусть  $k + 1$  – наименьший номер, не входящий в  $\Phi_r$  (заметим, что  $k \geq 1$ , так как  $1 \in \Phi_r$ ), а  $m$  – наименьший номер, больший  $k$  и входящий в  $\Phi_r$  (такой номер  $m$  найдется, так как  $n - 1 \in \Phi_r$ ). Таким образом,  $0, 1, \dots, k, m \in \Phi_r, k + 1, \dots, m - 1 \notin \Phi_r$ . Если  $k$  и  $m$  одной четности, рассмотрим луночку с номером  $\frac{k + m}{2}$ . Если изначально шарик лежит в ней, то Петя

может назвать число  $\frac{m - k}{2}$ , и куда бы Вася ни двинул шарик, он попадает либо в луночку номер  $k$ , либо в луночку  $m$ , и, поскольку  $k, m \in \Phi_r$ , получаем  $\frac{k + m}{2} \in \Phi_{r+1}$  (при этом  $\frac{k + m}{2} \notin \Phi_r$ ). Если  $k$  и  $m$  разной четности, аналогично предыдущему, рассмотрим луночку номер  $\frac{(k - 1) + m}{2}$ . Если изначально шарик ле-

жит в ней, то Петя может назвать число  $\frac{m-(k-1)}{2}$ , и куда бы Вася ни двинул шарик, он попадает либо в луночку номер  $k-1$ , либо в луночку  $m$ , и, поскольку  $k-1, m \in \Phi_r$ , получаем  $\frac{(k-1)+m}{2} \in \Phi_{r+1}$  (при этом  $\frac{(k-1)+m}{2} \notin \Phi_r$ ).

Мы показали, что множество  $\Phi_{r+1}$  строго шире, чем  $\Phi_r$  (есть луночки, которые еще не входят в  $\Phi_r$ , но уже входят в  $\Phi_{r+1}$ ). Значит, для некоторого  $r < n$  получим  $\Phi_r = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ . Таким образом, Петя выигрывает всегда.

В связи с приведенным решением отметим следующий интересный вопрос: как по заданному  $n$  научиться определять наименьшее  $r$ , для которого  $\Phi_r = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ ?

*П.Кожевников, А.Толыго*

**M2336.** Даны положительные числа  $x$  и  $y$ ,  $x < y$ . Для любых чисел  $a, b, c$ , принадлежащих отрезку  $[x; y]$ , докажите неравенство

$$\frac{a^2}{bc+xy} + \frac{b^2}{ca+xy} + \frac{c^2}{ab+xy} \geq \frac{a+b+c}{x+y}.$$

Из условия следуют неравенства  $(b-x)(c-y) \leq 0$ ,  $(c-x)(b-y) \leq 0$ , складывая которые, получаем

$$\begin{aligned} 2(bc+xy) - (bx+cy+by+cx) &\leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2(bc+xy) - (b+c)(x+y) &\leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow bc+xy &\leq \frac{(b+c)(x+y)}{2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Аналогично,

$$ca+xy \leq \frac{(c+a)(x+y)}{2}, \quad (2)$$

$$ab+xy \leq \frac{(a+b)(x+y)}{2}. \quad (3)$$

Воспользуемся известным неравенством

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\dots+a_n)^2}{b_1+b_2+\dots+b_n},$$

которое справедливо при всех положительных  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ . (Это неравенство следует из классического неравенства Коши–Буняковского–Шварца

$$\begin{aligned} (x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2) &\geq \\ &\geq (x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n)^2 \end{aligned}$$

после замены  $x_i = \frac{a_i}{\sqrt{b_i}}$ ,  $y_i = \sqrt{b_i}$ .)

Имеем

$$\frac{a^2}{bc+xy} + \frac{b^2}{ca+xy} + \frac{c^2}{ab+xy} \geq \frac{(a+b+c)^2}{bc+ca+ab+3xy}.$$

Складывая (1), (2) и (3), получаем, что знаменатель дроби в правой части не больше чем  $(a+b+c)(x+y)$ , откуда

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{bc+xy} + \frac{b^2}{ca+xy} + \frac{c^2}{ab+xy} &\geq \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)(x+y)} = \frac{a+b+c}{x+y}, \end{aligned}$$

что и требовалось.

*Д.Аубекеров*

**M2337.** Имеются  $n$  карточек, на которых написана цифра 1, и  $n$  карточек, на которых написана цифра 2. Вася складывает из этих карточек  $2n$ -значное число. За один ход Петя может поменять местами некоторые две карточки и заплатить Васе 1 рубль. Процесс заканчивается, когда у Пети получается число, делящееся на 11. Какую наибольшую сумму может заработать Вася, если Петя стремится

|                 |  |
|-----------------|--|
| $n=11m, r=0$    | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22                               |
| $n=11m+1, r=6$  | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23                            |
| $n=11m+2, r=1$  | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24                         |
| $n=11m+3, r=7$  | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25                      |
| $n=11m+4, r=2$  | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26                   |
| $n=11m+5, r=8$  | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27                |
| $n=11m+6, r=3$  | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28             |
| $n=11m+7, r=9$  | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29          |
| $n=11m+8, r=4$  | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30       |
| $n=11m+9, r=10$ | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31    |
| $n=11m+10, r=5$ | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 |



заплатить как можно меньше? Решите задачу: а) для  $n = 2013$ ; б) для любого заданного  $n \geq 11$ .

Рассмотрим  $2n$ -значное число  $A$ , состоящее из  $n$  единиц и  $n$  двоек. Пусть в этом числе в нечетных разрядах стоят  $k(A)$  единиц и  $l(A) = n - k(A)$  двоек, тогда в четных разрядах наоборот будет  $k(A)$  двоек и  $l(A)$  единиц (здесь  $k(A)$  может принимать любое целое значение от 0 до  $n$ ).

Пусть за один ход из числа  $A$  получается число  $A'$ . Тогда  $|k(A) - k(A')| \leq 1$ , причем Петя может в самом деле за один ход уменьшить или увеличить  $k(A)$  на 1, если только  $k(A')$  не выйдет за пределы отрезка  $[0; n]$ . (Отметим также, что Петя всегда может оставить  $k(A)$  неизменным, обменяв две карточки с одинаковыми цифрами.)

Разность сумм цифр в нечетных разрядах и четных разрядах числа  $A$  равна

$$(k(A) + 2l(A)) - (2k(A) + l(S)) = l(A) - k(A) = n - 2k(A).$$

Покрасим в множестве  $\{1, 2, \dots, n\}$  все числа  $k$  такие, что  $n - 2k$  делится на 11. Покрашенные числа – это числа, дающие фиксированный остаток  $r$  при делении на 11.

Если Вася изначально сложит из карточек число  $A$ , то минимальная сумма (в рублях), которую Пете придется заплатить, равна  $d(k(A))$ , где  $d(k)$  равно расстоянию от  $k$  до ближайшего покрашенного числа.

Рассматривая покрашенные числа в каждом из случаев (см. таблицу), получаем следующий результат. Если  $n \equiv 0, 2, 4, 6, 8, 10 \pmod{11}$ , то  $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  соответственно и наибольшее значение  $d(k)$  равно 5 (достигается при  $k \equiv r \pm 5 \pmod{11}$ ). Если же  $n \equiv 1, 3, 5, 7, 9 \pmod{11}$ , то  $r = 6, 7, 8, 9, 10$  соответственно и наибольшее значение  $d(k)$  равно  $r$  (достигается при  $k = 0$  или  $k = n$ ).

П. Кожевников

**M2338.** Существует ли на плоскости такое множество точек, что внутри любого треугольника площади 1 окажется конечное непустое множество точек из этого множества?

**Ответ:** существует.

В каждый треугольник площади 1 можно вписать прямоугольник площади  $1/2$ , проведя самую длинную среднюю линию и опустив из ее концов перпендикуляры на параллельную ей сторону (рис.1). Поэтому достаточно построить множество точек, которое (i) имеет непустое пересечение с каждым прямоугольником

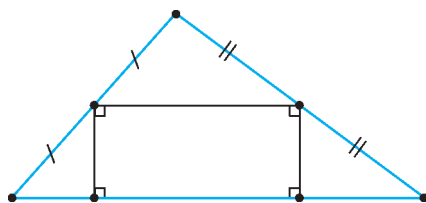


Рис. 1

ком площади  $1/2$  и (ii) имеет конечное пересечение с любым ограниченным множеством.

Зафиксируем на плоскости точку  $O$ . Пусть на плоскости расположен прямоугольник  $ABCD$  площади  $1/2$ ,  $E$  – центр этого прямоугольника, а его стороны  $AB$  и  $AD$  равны  $a$  и  $b$ , где  $ab = 1/2$ ,  $a \geq b$ . Положим  $2c = MN$ , где  $M$  и  $N$  – середины отрезков  $EA$  и  $EC$  соответственно. Хотя бы одна из точек  $M$  и  $N$  удалена от  $O$  не меньше чем на  $c$ . Заметим, что обе точки  $M$  и  $N$  лежат в прямоугольнике  $ABCD$  вместе с кругами радиуса  $b/4 = 1/(8a) > 1/(32c)$  (так как  $AC = 4c > a$ ) с центрами в этих точках (рис.2). Таким образом, нам

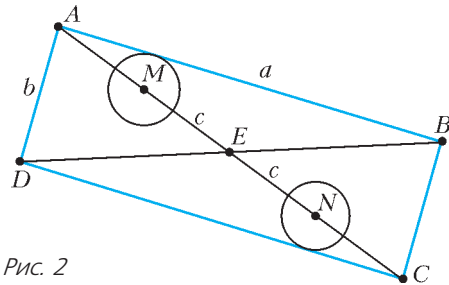


Рис. 2

достаточно будет построить множество точек, которое удовлетворяет условию (ii) и следующему условию (i'): при всех  $c > 0$  оно имеет непустое пересечение с каждым кругом радиуса  $1/(32c)$ , центр которого отстоит не менее чем на  $c$  от точки  $O$ .

Сделаем еще одно наблюдение: если на плоскости дана ограниченная фигура  $F$ , то для любого  $\epsilon > 0$  в ней можно выбрать так называемую *конечную  $\epsilon$ -сеть*, т.е. такое конечное подмножество  $G \subset F$ , что любая точка из  $F$  удалена от некоторой точки из  $G$  на расстояние меньше  $\epsilon$ . (Если, скажем,  $F$  – многоугольник, то в качестве  $G$  можно взять узлы квадратной сетки с достаточно малой стороной  $\delta$ , принадлежащие  $F$ . В общем случае в качестве  $G$  можно взять максимальное подмножество множества  $F$  такое, что круги радиуса  $\epsilon/2$  с центрами в точках множества  $G$  попарно не пересекаются. Действительно, если  $A \in F$ , то круг радиуса  $\epsilon/2$  с центром в  $A$  должен пересекаться с кругом радиуса  $\epsilon/2$  с центром в некоторой точке  $B \in G$ . Тем самым, расстояние  $AB$  меньше  $\epsilon$ .)

Теперь мы готовы описать требуемое множество. Рассмотрим круги  $B_n$  радиуса  $n$  с центром  $O$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  (для  $n = 0$  получается, что  $B_0$  совпадает с точкой  $O$ ). В кольце  $R_n = B_n \setminus B_{n-1}$  между окружностями радиусов  $n - 1$  и  $n$  выберем конечную  $1/(32n)$ -сеть  $G_n$ .

Пусть множество  $G$  – это точка  $O$  и объединение всех этих  $\epsilon$ -сетей  $G_1, G_2, \dots$  (рис.3). Ясно, что  $G$  удовлетворяет условию (ii), так как каждое из множеств  $G_n$  конечно. Кроме того, оно удовлетворяет условию (i'). Действительно, пусть центр некоторого круга радиуса  $1/(32c)$  находится на расстоянии

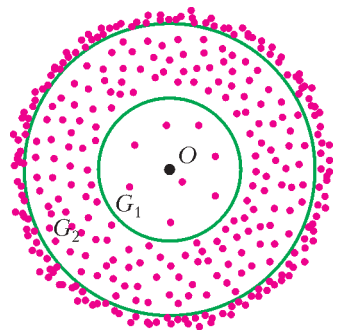


Рис. 3

с от начала координат, где  $n - 1 < c \leq n$ . Тогда, по определению множества  $G_n$ , в кольце  $R_n$  найдется точка из  $G_n$ , удаленная от центра круга на расстояние меньше  $1/(32n) \leq 1/(32c)$ , что и требуется.

Отметим, что условие этой задачи по звучанию близко к пока не решенной проблеме Данцера (Danzger problem). Для плоскости эта проблема формулируется так: существует ли множество  $M$  точек плоскости такое, что любая выпуклая фигура площади 1 содержит хотя бы одну из этих точек и в любом круге радиуса  $R$  содержится не более  $cR^2$  точек множества  $M$ , где  $c$  – некоторая константа?

И.Богданов, П.Кожевников

**M2339.** Дана доска  $m \times n$ , разбитая на единичные клетки. Сначала в  $(m - 1)(n - 1) + 1$  клеток ставится по фишке. Пусть в некоторый момент на доске нашлись четыре клетки, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными краям доски, такие, что ровно в одной из этих клеток стоит фишка; тогда эту фишку можно снять. Докажите, что хотя бы одну фишку не удастся снять с доски путем нескольких описанных операций.

Решение см. в статье П.Кожевникова и А. Шаповалова «Свяжитесь с графом» в этом номере журнала.

**M2340\*.** Четырехугольник  $ABCD$  описан около окружности  $\omega$  (рис. 1). Пусть  $I$  и  $J$  – центры окружностей, вписанных в треугольники  $ABC$  и  $ADC$  соответственно.

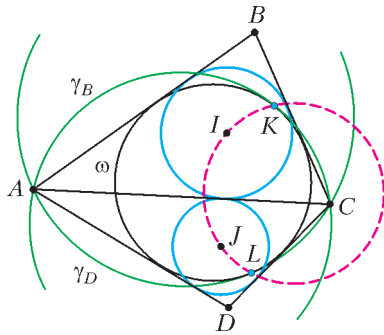


Рис. 1

Каждая из окружностей  $\gamma_B, \gamma_D$  проходит через точки  $A$  и  $C$ . Эти окружности касаются окружности  $\omega$  в точках  $K$  и  $L$ . Докажите, что точки  $I, J, K, L$  лежат на одной окружности.

Нам понадобится следующая известная лемма.

**Лемма.** Пусть окружность  $\omega$  касается окружности  $\Omega$  в точке  $T$  и ее хорд  $AC$  и  $BD$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно, причем  $T$  лежит на дуге  $AD$ , не содержащей точек  $B$  и  $C$ ;  $I$  – точка пересечения биссектрис углов  $CAD$  и  $BDA$ . Тогда  $TI$  – биссектриса угла  $ATD$ .

**Доказательство.**<sup>1</sup> Пусть точки  $A, B, C, D$  следуют на окружности в этом порядке (остальные случаи разбираются аналогично). Пусть  $E = AC \cap BD$ ,  $I_B$  – центр вписанной окружности треугольника  $ABD$ . Центр  $I_B$  лежит на биссектрисе  $DI$  угла  $ADB$ . По лемме Саваямы (см., например, основную теорему в статье В.Протасова «Касающиеся окружности: от Тебо до Фейербаха» в «Кванте» №4 за 2008 г.) точка  $I_B$  лежит на прямой  $KL$ . Пусть для определенности  $I_B$  лежит между  $K$  и  $L$ , а  $I$

<sup>1</sup> О другом подходе к доказательству этой леммы см. статью И.Богданова «Об одной конструкции с касающимися окружностями» в этом номере журнала.

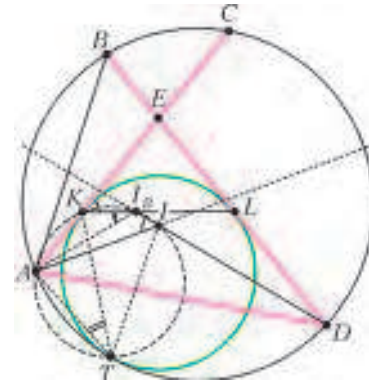


Рис. 2

лежит между  $I_B$  и  $D$  (рис.2) (другие случаи аналогичны). Заметим, что

$$\begin{aligned} \angle AII_B &= \angle IAD + \angle IDA = \\ &= \frac{1}{2}(\angle EAD + \angle EDA) = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle KEL). \end{aligned}$$

Из равнобедренного треугольника  $EKL$  имеем

$$\angle EKL = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle KEL).$$

Отсюда  $\angle EKL = \angle AII_B$ , значит, точки  $A, K, I_B, I$  лежат на одной окружности  $\gamma$ .

Далее,

$$\begin{aligned} \angle AI_BK &= \angle EKB - \angle CAI_B = \\ &= \left(90^\circ - \frac{1}{2}\angle KEL\right) - (\angle BAI_B - \angle BAC) = \\ &= \frac{1}{2}(\angle CAD + \angle BDA) - \frac{1}{2}\angle BAD + \angle BAC = \\ &= \frac{1}{4}(\overset{\sim}{CD} + \overset{\sim}{AB} - \overset{\sim}{BCD} + 2\overset{\sim}{BC}) = \frac{1}{4}\overset{\sim}{ABC}. \end{aligned}$$

При гомотетии с центром  $T$ , переводящей окружность  $\omega$  в  $\Omega$ , точка  $K$  переходит в точку на окружности  $\Omega$ , касательная в которой параллельна  $AC$ , т.е. в середину дуги  $AC$ . Следовательно,  $TK$  – биссектриса угла  $ATC$ , и  $\angle ATK = \frac{1}{4}\overset{\sim}{ABC}$ . Получаем  $\angle AI_BK = \angle ATK$ , значит, точка  $T$  лежит на окружности  $\gamma$ .

Отсюда

$$\begin{aligned} \angle ATI &= 180^\circ - \angle AI_BD = \angle A_BAD + \angle I_BDA = \\ &= \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle BDA) = \\ &= \frac{1}{4}(\angle BAD + \angle BDA) = \frac{1}{4}\overset{\sim}{ABD} = \frac{1}{2}\angle ATD, \end{aligned}$$

что и требовалось. Лемма доказана.

Перейдем к решению задачи. Заметим, что вписанные окружности треугольников  $ABC$  и  $ADC$  касаются. Действительно, если  $X$  – точка касания вписанной окружности треугольника  $ABC$  со стороной  $AC$ , то, используя описанность  $ABCD$ , имеем  $2AX = AB + AC - BC = AD + AC - DC$ , значит,  $X$  также является точкой касания вписанной окружности треугольника  $ADC$  со

стороной  $AC$ . Отсюда прямая  $IJ$  совпадает с  $IX$ , а значит,  $IJ \perp AC$ . Пусть  $K$  и  $I$  лежат по одну сторону от прямой  $AC$  (рис.3). Пусть  $A'$  и  $C'$  – вторые точки пересечения  $KA$

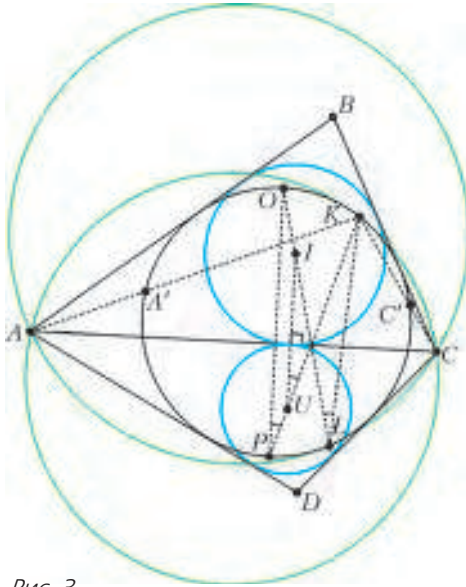


Рис. 3

и  $KC$  с  $\omega$ . Окружности  $\omega$  и  $\gamma_B$  гомотетичны с центром в точке  $K$ . При этой гомотетии  $A$  и  $C$  переходят в  $A'$  и  $C'$  соответственно, поэтому  $A'C' \parallel AC$ . По лемме  $KJ$  – биссектриса угла  $A'K'C'$ , а значит,  $KJ$  проходит через середину  $P$  дуги  $A'C'$ , не содержащей точки  $K$ . Касательная к  $\omega$  в точке  $P$  параллельна  $AC$ . Аналогично,  $LI$  проходит через точку  $Q$  окружности  $\omega$ , которая диаметрально противоположна точке  $P$ . Так как  $IJ \parallel PQ$  и  $IJ \perp AC$ , получаем  $\angle KJI = \angle KPQ = \angle KLQ = \angle KLI$ . Из равенства углов  $\angle KJI = \angle KLI$  вытекает требуемое.

Ф.Ивлев

**Ф2340.** Подходящий к станции поезд движется со скоростью  $v = 36$  км/ч. Один из пассажиров поставил чемодан на пол длинного коридора вагона. Но тут поезд начал тормозить, двигаясь до полной остановки равномерно с ускорением, равным по модулю  $a = 2$  м/с<sup>2</sup>. Чемодан при этом стал скользить по полу и прошел до своей полной остановки путь  $s = 12$  м относительно вагона. Определите коэффициент трения между чемоданом и полом, а также модуль максимальной скорости, которую имел чемодан относительно вагона.

Будем решать задачу в системе отсчета, связанной с землей. Заметим, что время движения поезда и время движения чемодана до их полной остановки неодинаковы – чемодан будет в течение некоторого времени продолжать двигаться после того, как поезд остановится. Поэтому задачу удобно решать, используя кинематические формулы, из которых время движения уже исключено. Также заметим, что чемодан будет двигаться относительно поезда вперед по ходу его движения. Из второго закона Ньютона следует, что ускорение чемодана относительно земли в то время, пока он

скользит, направлено горизонтально, назад по ходу поезда, и равно по модулю  $a_1 = \mu g$ , где  $\mu$  – искомый коэффициент трения между чемоданом и полом. Путь, пройденный чемоданом относительно земли, равен  $s_1 = \frac{v^2}{2\mu g}$ . Путь, пройденный поездом относительно земли, равен  $s_2 = \frac{v^2}{2a}$ . Разность этих путей как раз и равна  $s$ . Отсюда получаем уравнение

$$s = s_1 - s_2 = \frac{v^2}{2\mu g} - \frac{v^2}{2a},$$

из которого находим

$$\mu = \frac{av^2}{g(2as + v^2)} = \frac{5}{37} \approx 0,135.$$

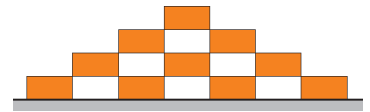
Скорость  $u$  чемодана относительно вагона равна разности скоростей чемодана и вагона относительно земли. В течение времени, пока поезд движется, эта скорость будет выражаться формулой  $u = (a - \mu g)t$ . Из нее следует, что скорость  $u$  будет максимальной в тот момент, когда поезд остановится, т.е. в момент  $t = \frac{v}{a}$ .

Тогда для модуля максимальной скорости чемодана получаем

$$u_{\max} = \frac{(a - \mu g)v}{a} = \frac{2asv}{2as + v^2} \approx 3,24 \text{ м/с}.$$

М.Ромашка

**Ф2341.** На горизонтальной поверхности лежит стопка кирпичей так, как показано на рисунке. Площадь соприкасающихся участков кирпичей очень мала (много меньше площадей всех граней кирпичей). Все кирпичи однородные и имеют один и тот же вес  $P = 24$  Н. Вычислите, с какой силой каждый кирпич из нижнего ряда давит на поверхность.



Можно изобразить на рисунке силы, действующие на каждый из кирпичей, записать условия их равновесия – потребовать для каждого кирпича равенства нулю суммы сил и суммы моментов сил – и получить ответ. Но можно и просто порассуждать, используя соображения симметрии. Будем использовать второй подход. Ясно, что два крайних кирпича из нижнего ряда давят на поверхность с одинаковыми силами и два средних – тоже с одинаковыми силами, но другими. Каждый из кирпичей распределяет свой вес  $P$  поровну, по  $P/2$ , на два своих опорных края и еще передает вертикально вниз те силы, которые действуют на его края сверху. Для крайних кирпичей из нижнего ряда, очевидно, сила давления на поверхность, равна

$$P + \frac{P}{2} = 1,5P = 36 \text{ Н}.$$

Для средних кирпичей из нижнего ряда сила давления по одному их краю равна

$$\frac{P}{2} + \frac{P}{2} + \frac{P}{2} = \frac{3P}{2} = 1,5P,$$

а по другому их краю, который ближе к середине



стопки, она составляет

$$\frac{P}{2} + \frac{P}{2} + \frac{P}{2} + \frac{P}{2} = 2P,$$

так что суммарная сила их давления на поверхность равна

$$3,5P = 84 \text{ Н.}$$

Полная сила давления на поверхность, естественно, равна весу всей стопки кирпичей:

$$2 \cdot 36 \text{ Н} + 2 \cdot 84 \text{ Н} = 240 \text{ Н} = 10P.$$

М.Ромашка

**Ф2342.** Ванна на ножках в форме прямоугольного параллелепипеда может заполняться водой из крана, а выходит вода из нее через сливное отверстие в дне ванны прямо на пол. Если сливное отверстие закрыто, то при полностью открытом кране первоначально пустая ванна заполнится водой до максимального уровня  $H_0$  за время  $t_1 = 10$  мин. Если кран закрыть и открыть сливное отверстие, то изначально полная водой ванна опорожнится за время  $t_2 = 20$  мин. Каким будет уровень воды в первоначально пустой ванне через  $t_3 = 5$  мин, если одновременно полностью открыть кран и оставить открытым сливное отверстие? Как изменится ответ, если в ванну с открытым сливным отверстием вдобавок к первому крану одновременно подавать воду из второго (точно такого же) полностью открытого крана? Через какое время после начала эксперимента вода начнет переливаться через края ванны в случае работы двух кранов?

*Примечание.* Решать дифференциальные уравнения аналитически не нужно! Воспользуйтесь компьютером.

Обозначим отношение площади сечения ванны  $S_0$  к площади сечения сливного отверстия  $S_1$  через  $\alpha$ ,  $\alpha = S_0/S_1$ . При опустошении первоначально полной ванны уровень воды в ней уменьшается согласно уравнению

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\sqrt{2gH}}{\alpha}.$$

Время, за которое ванна полностью опорожнится, равно

$$t_2 = \frac{S_0}{S_1} \sqrt{\frac{2H_0}{g}} = \alpha \sqrt{\frac{2H_0}{g}}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{dH}{dt} = -2 \frac{\sqrt{HH_0}}{t_2}.$$

Если ванна была пуста и одновременно открыли кран и оставили открытым сливное отверстие, то динамика роста уровня воды в ванне описывается уравнением

$$\frac{dH}{dt} = \frac{H_0}{t_1} - 2 \frac{\sqrt{HH_0}}{t_2}.$$

Заметим, что установившийся уровень воды в ванне, когда производная уровня воды по времени равна нулю, при  $t_2/t_1 = 2$  как раз равен максимальному

уровню воды  $H_0$ . В случае работы всего одного крана и открытого сливного отверстия вода из ванны не будет переливаться через край никогда.

При работе одновременно двух кранов уравнение изменится и станет таким:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{2H_0}{t_1} - 2 \frac{\sqrt{HH_0}}{t_2}.$$

В этом случае вода через некоторое время обязательно будет переливаться через край ванны. Действительно, если предположить, что стенки ванны стали очень высокими, а площадь ее горизонтального сечения на всех высотах осталась прежней, то установившийся уровень воды в ванне будет равен  $4H_0$ .

Чтобы найти ответы на поставленные вопросы, воспользуемся компьютером, так как аналитически написанные уравнения в рамках школьных возможностей решить не удастся. На рисунке, полученном с помощью программы «Excel», приведены две зависимости относительного уровня

воды  $H/H_0$  в случаях работы одного и двух кранов в течение 10 мин (синяя и красная кривые соответственно). При работе одного крана через 5 мин уровень воды достигнет примерно  $0,3H_0$ , а при работе двух кранов через 5 мин уровень воды достигнет примерно  $0,8H_0$ . Вода в случае одновременной работы двух кранов начнет переливаться через край ванны примерно через 6,5 мин после начала эксперимента.

С.Варламов

**Ф2343.** В распоряжении школьника Вовы имеется водопроводная вода с температурой  $20^\circ\text{C}$ , чайник мощностью  $1,2 \text{ кВт}$  и вместительностью  $1,5 \text{ л}$ , электрокипятильник мощностью  $500 \text{ Вт}$ , а также большой калориметр, в котором требуется получить  $100 \text{ л}$  кипятка с температурой  $100^\circ\text{C}$ . Как сделать это за наименьшее время? Вова предложил следующий план действий: нужно налить в калориметр некоторый начальный объем воды  $V_0$ , опустить туда включенный кипятильник и одновременно кипятить воду в чайнике, доливая из него в калориметр порции кипятка по мере его готовности. Определите, каким должен быть начальный объем  $V_0$  и за какое время  $\tau$  удастся получить в калориметре  $100 \text{ л}$  кипятка, действуя указанным способом. Удельная теплоемкость воды  $4200 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C})$ , плотность воды  $1 \text{ г}/\text{см}^3$ . Теплоемкостью калориметра, потерями тепла в окружающую среду и временем, затраченным на наполнение чайника и выливание из него кипятка, можно пренебречь.

В результате всех действий Вовы  $100 \text{ л}$  кипятка получатся за минимальное время  $\tau$ , если все время будут работать и чайник, и кипятильник, причем доля воды,

нагреваемой кипятивником, должна равняться доле его мощности в суммарной мощности нагревательных устройств. Уравнения теплового баланса в этом случае имеют вид

$$c\rho V\Delta t = (P_1 + P_2)\tau \text{ и } c\rho V_0\Delta t = P_2\tau,$$

где  $c = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$ ,  $\rho = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$ ,  $V = 0,1 \text{ м}^3$ ,  $\Delta t = 100^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C} = 80^\circ\text{C}$ ,  $P_1 = 1200 \text{ Вт}$ ,  $P_2 = 500 \text{ Вт}$ .

Эти уравнения можно трактовать и иначе. Так как по условию задачи потери тепла в окружающую среду пренебрежимо малы, то можно считать, что порции воды, которая закипела в чайнике, Вова сливает в запасной калориметр, в котором вода сохраняет температуру  $100^\circ\text{C}$ . Он должен поступать так до тех пор, пока не закипит вода объемом  $V_0$  в основном калориметре (потом он перельет воду из запасного калориметра в основной, и цель будет достигнута). Поэтому время кипячения  $\tau$  можно найти из уравнения

$$c\rho V_0\Delta t = P_2\tau.$$

При этом при помощи чайника за то же время будет вскипячен объем воды  $V - V_0$ , что описывается уравнением

$$c\rho (V - V_0)\Delta t = P_1\tau.$$

Итак, из полученных уравнений находим

$$\tau = \frac{c\rho V\Delta t}{P_1 + P_2} \approx 19765 \text{ с} \approx 5,5 \text{ ч},$$

$$V_0 = \frac{P_2\tau}{c\rho\Delta t} = \frac{P_2V}{P_1 + P_2} \approx 0,0294 \text{ м}^3 = 29,4 \text{ л}.$$

*М.Ромашка*

**Ф2344.** Знайка решил провести исследования Гей-Люссака для идеального газа, только более аккуратно. Для этих целей он взял цилиндрический сосуд большого объема с поршнем, который мог двигаться практически без трения, вынул поршень и охладил сосуд и поршень до температуры  $200 \text{ К}$ . Затем он вставил поршень обратно в сосуд так, что внутри оказался охлажденный до той же температуры воздух, обеспечил постоянное давление и провел измерения зависимости объема  $V$  газа в сосуде от температуры  $T$ . По полученным результатам Знайка построил график (рис.1). Найденная зависимость мало на-

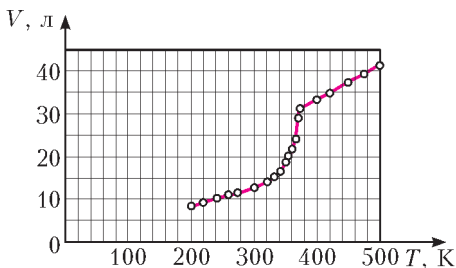


Рис. 1

поминала результаты, полученные Гей-Люссаком. Знайка понял свою ошибку. Он вставил поршень в цилиндр при температуре  $200 \text{ К}$ , и, очевидно, на дне сосуда при этом оказалось некоторое количество льда, который образовался из воды, сконденсировавшейся при охлаждении воздуха. Оцените массу льда,

который оказался в цилиндре у Знайки, если давление в течение опыта было  $2 \cdot 10^5 \text{ Па}$ . Молярная масса воды  $18 \text{ г}/\text{моль}$ .

При низких температурах, когда вода находится в твердом или даже в жидком состоянии, давлением водяных паров можно пренебречь. Следовательно, первые 4–5 точек графика (см. рис.1) соответствуют изобарическому расширению исследуемого идеального газа – сухого воздуха, из которого выморозили воду. Поэтому прямая 1 (рис.2), являющаяся продолжением

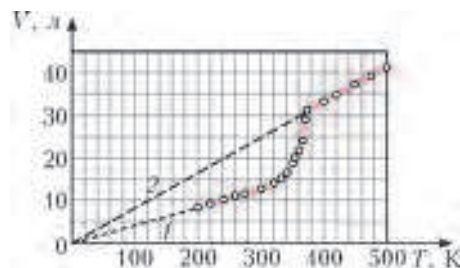


Рис. 2

начального участка полученного Знайкой графика, должна проходить через начало координат.

Используя точку графика с координатами  $T = 240 \text{ К}$  и  $V = 10^{-2} \text{ м}^3$ , при помощи уравнения Клапейрона–Менделеева найдем количество идеального газа (сухого воздуха) в сосуде:

$$\nu_1 = \frac{pV}{RT} \approx 1 \text{ моль}.$$

При температурах, превышающих точку кипения воды (более  $373 \text{ К}$ ), вода превращается в пар, который также можно считать идеальным газом. Поэтому точки линейного участка графика – прямая 2 на рисунке 2, соответствующие температурам более  $380 \text{ К}$ , изображают изобарный процесс для смеси двух идеальных газов – сухого воздуха и водяных паров.

Используя точку графика с координатами  $T = 420 \text{ К}$  и  $V = 35 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ , при помощи уравнения Клапейрона–Менделеева найдем суммарное количество идеального газа в сосуде:

$$\nu_2 = \frac{pV}{RT} \approx 2 \text{ моль}.$$

Следовательно, количество водяного пара в смеси равно

$$\nu_{\text{п}} = \nu_2 - \nu_1 = 1 \text{ моль}.$$

Масса одного моля водяного пара равна  $18 \text{ г}$ . Поскольку весь пар, находящийся в сосуде, изначально содержался в нем в виде льда, то искомая масса льда в цилиндре также равна  $18 \text{ г}$ .

*В.Крыштоп*

**Ф2345.** Два одинаковых вольтметра соединили параллельно, третий вольтметр подключили к этой комбинации последовательно и к концам получившейся цепи присоединили идеальную батарейку. При этом вольтметры показывали  $4 \text{ В}$ ,  $4 \text{ В}$  и  $5 \text{ В}$ . Каково напряжение батарейки? Могут ли быть одинаковыми все три вольтметра? Что покажут эти же

приборы, если их все соединить последовательно и подключить к той же батарее? Показания приборов считайте точными.

Два параллельно включенных вольтметра показывают правильное (одинаковое) напряжение между их клеммами, равное  $U = 4$  В. Так как батарейка идеальная, ее ЭДС равна сумме падений напряжений на одиночном вольтметре  $V = 5$  В и на одном из включенных параллельно друг другу вольтметров  $U = 4$  В, т.е. напряжение батарейки равно

$$U + V = 9 \text{ В.}$$

Сумма токов, протекающих через два одинаковых вольтметра, равна току, протекающему через одиночный вольтметр. Если бы все три вольтметра были одинаковыми, то на одиночном вольтметре было бы напряжение  $2U = 8 \text{ В} \neq 5 \text{ В} = V$ . Таким образом, вольтметры не могут быть одинаковыми.

Каждый вольтметр имеет свое внутреннее сопротивление. Если сопротивления одинаковых вольтметров равны  $r$ , то сопротивление  $R$  одиночного вольтметра найдем из соотношения  $2U/r = V/R$ , откуда  $r = 2UR/V$ . Когда все вольтметры включены друг за другом последовательно, ток в цепи равен

$$I = \frac{U+V}{2r+R} = \frac{U+V}{R(4U/V+1)}.$$

При этом на каждом из одинаковых вольтметров напряжение будет равно

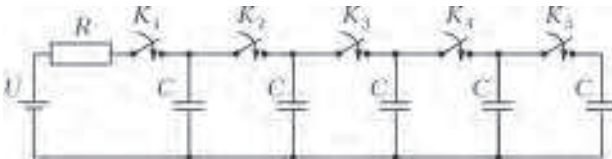
$$Ir = \frac{2U(U+V)}{4U+V} = \frac{24}{7} \text{ В} \approx 3,43 \text{ В},$$

а на одиночном вольтметре –

$$IR = \frac{V(U+V)}{4U+V} = \frac{15}{7} \text{ В} \approx 2,14 \text{ В}.$$

С.Варламов

**Ф2346.** В цепи, схема которой изображена на рисунке, по очереди замыкают ключи  $K_1 - K_5$ , выжидая каждый раз достаточно длительное время до оконча-



ния процессов зарядки конденсаторов. Во сколько раз отличаются количества теплоты, выделившиеся в резисторе  $R$  после замыкания ключа  $K_1$  и ключа  $K_5$ ? До замыкания каждого из этих ключей все остальные ключи уже были замкнуты. Сопротивления всех проводов и источника тока пренебрежимо малы.

Согласно закону сохранения энергии, после замыкания ключа  $K_1$  работа источника  $U\Delta q$  при зарядке первого конденсатора емкостью  $C$  до напряжения  $U$  расходуется на создание в этом конденсаторе электростатического поля, обладающего энергией  $CU^2/2$ , и на выделение в резисторе количества теплоты  $Q_1$ :

$$U\Delta q = \frac{CU^2}{2} + Q_1.$$

При полной зарядке конденсатора его заряд равен  $\Delta q = CU$ , откуда получаем

$$Q_1 = \frac{CU^2}{2}.$$

При замыкании ключей  $K_2 - K_5$  следует учесть, что все сопротивления проводов пренебрежимо малы, но они обладают маленькой индуктивностью, поэтому вначале происходит быстрый неквазистационарный процесс перераспределения зарядов между уже заряженными конденсаторами и каждым следующим незаряженным конденсатором. При этом возникают электромагнитные колебания, сопровождающиеся излучением электромагнитных волн и потерями части энергии, запасенной в заряженных конденсаторах. После того как заряды на соединенных конденсаторах выровняются, происходит более медленный, квазистационарный процесс их дозарядки до напряжения источника  $U$  через резистор, при этом после замыкания очередного ключа через источник каждый раз протекает один и тот же заряд  $\Delta q$ .

После замыкания ключей  $K_1 - K_4$  первые 4 конденсатора зарядятся до напряжения источника  $U$ , и их заряд будет равен  $4\Delta q = 4CU$ . Когда будет замкнут ключ  $K_5$ , этот заряд быстро перераспределится между пятью конденсаторами, так что на каждом из них окажется заряд  $\Delta q' = 4CU/5$ , напряжение на каждом конденсаторе будет  $U' = 4U/5$  и энергия всех 5 заряженных конденсаторов составит

$$W' = \frac{5CU'^2}{2} = \frac{8}{5}CU^2.$$

При дальнейшей медленной дозарядке через источник протечет еще один заряд  $\Delta q = CU$ , источник опять совершит работу  $U\Delta q = CU^2$ , энергия пяти заряженных конденсаторов станет равной

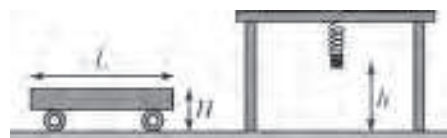
$$W = \frac{5CU^2}{2},$$

и в резисторе выделится количество теплоты  $Q_5$ . Таким образом, закон сохранения энергии на этом этапе имеет вид  $U\Delta q = W - W' + Q_5$ , откуда находим

$$Q_5 = CU^2 - \frac{5CU^2}{2} + \frac{8}{5}CU^2 = \frac{CU^2}{10}, \text{ и } \frac{Q_1}{Q_5} = 5.$$

М.Семенов

**Ф2347.** Тележка высотой  $H = 30$  см и длиной  $L = 40$  см должна проехать под столом по горизонтальному полу, двигаясь равномерно и прямолинейно (см. рисунок). К крышке стола снизу прикрепили легкую пружину жесткостью  $k = 50$  Н/м. К пружине прицепили маленький груз массой  $m = 0,4$  кг. При недеформированной пружине груз находился на высоте  $h = 42$  см над полом. Затем груз отпустили. С какой минимальной скоростью может двигаться те-





лежка, чтобы она, проехав под столом, не задела груз?

После отпускания груза на пружине он будет совершать гармонические колебания с круговой частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Прежде всего выясним, на какой минимальной высоте над полом будет останавливаться груз в процессе колебаний. Из закона сохранения механической энергии имеем

$$mgh = mg(h - y) + \frac{ky^2}{2},$$

где  $y$  – максимальная деформация пружины в процессе колебаний. Отсюда находим

$$y = \frac{2mg}{k} = 0,16 \text{ м}.$$

Поскольку  $h - y = 26$  см, что меньше высоты тележки  $L = 40$  см, то тележка не сможет проехать под столом при произвольной скорости движения.

Очевидно, что минимально возможная скорость движения тележки будет реализовываться при наиболее «удачном» варианте ее проезда под столом. Этот вариант таков: начало тележки должно поравняться с маятником тогда, когда груз, двигаясь снизу вверх, окажется на высоте  $H$  над столом, а конец тележки должен поравняться с маятником тогда, когда груз окажется на этой же высоте при движении маятника сверху вниз.

Поместим начало координатной оси  $x$ , направленной вниз, в положение равновесия груза маятника и будем отсчитывать время  $t$  от момента начала движения груза из нижнего положения вверх. Тогда закон движения

груза будет иметь вид

$$x(t) = x_0 \cos \omega t, \text{ где } x_0 = \frac{y}{2} = \frac{mg}{k} = 0,08 \text{ м}.$$

В момент времени  $\tau$ , когда груз окажется на высоте  $H$  над столом, его координата будет равна  $h - H - x_0$ , поэтому

$$h - H - x_0 = x_0 \cos \omega \tau,$$

откуда

$$\tau = \frac{1}{\omega} \arccos \frac{h - H - x_0}{x_0}.$$

Далее груз будет двигаться вверх до исходного положения, а затем снова вниз. На высоте  $H$  над столом он вновь окажется через время

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega} - 2\tau = \frac{2\pi}{\omega} - \frac{2}{\omega} \arccos \frac{h - H - x_0}{x_0}.$$

Это время должно быть равно времени движения тележки под маятником

$$\Delta t = \frac{L}{v},$$

где  $v$  – искомая минимальная скорость движения тележки. Приравняв два последних выражения, получаем ответ:

$$v = \frac{\omega L}{2\left(\pi - \arccos \frac{h - H - x_0}{x_0}\right)} = \frac{\omega L}{2\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{3L}{4\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \approx 1,07 \text{ м/с}.$$

*М.Ромашка*

## ПРОГУЛКИ С ФИЗИКОЙ

### Неваляшка из воздушного шарика

*(Начало см. на 4-й странице обложки)*

... Весь процесс превращения воздушного шарика в игрушку-неваляшку занимает несколько секунд и показан на видео (<http://youtu.be/JyfGRejU1b0>).

Можно легко убедиться в том, что обычный воздушный шарик, если его положить на стол, валится набок (рис.1). Однако если шарик сначала потереть тупой частью (сторо-

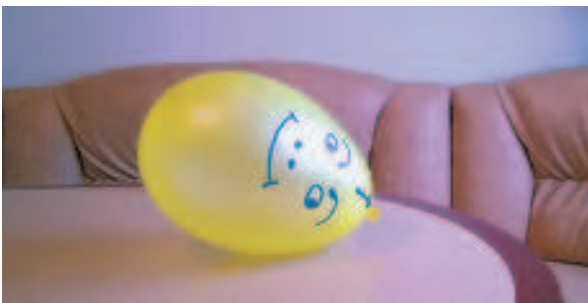


Рис. 1



Рис. 2

ной, противоположной отверстию для надувания, обозначенному стрелкой) о бумажные обои, а потом положить на тот же стол, то он не будет валиться на бок и превратится в неваляшку (рис. 2).

Предлагаем читателям повторить эксперимент, сделанный автором, и найти объяснение этому загадочному превращению шарика. В качестве подсказки сообщаем, что тот же шарик после потирания об обои прилипает к ним.

*К.Богданов*

# Задачи

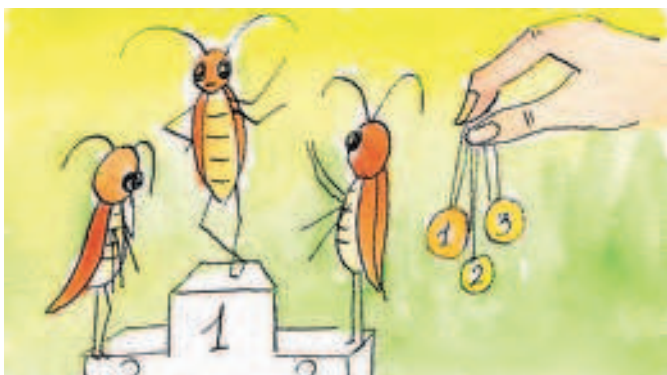
1. Найдите все возможные решения ребуса  
 $Ты + Ты + Ты + Ты + Ты = Вы.$

*Фольклор*



2. На тараканьих бегах 20 тараканов выбегают друг за другом с интервалом в 1 минуту и бегут с постоянными скоростями. Второй догнал первого через 2 минуты после своего старта, третий второго – через 3 минуты после своего старта, ..., двадцатый девятнадцатого – через 20 минут после своего старта. Через сколько минут после своего старта двадцатый таракан догнал первого?

*А.Шаповалов*

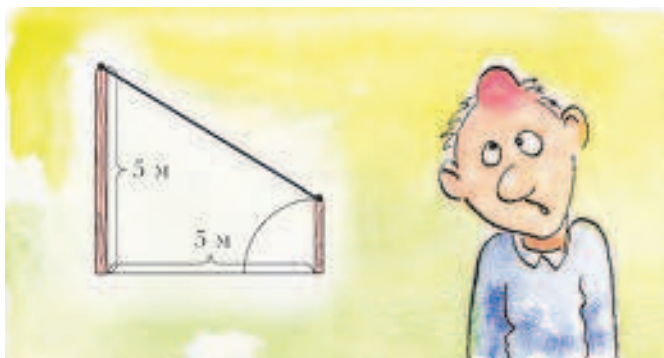


3. У прямой дороги на расстоянии 5 метров стоят два столба. Высота более высокого столба тоже 5 метров. Между верхушками столбов натянут провод. Подул ветер, и маленький столб упал на дорогу в направлении высокого столба, как показано на рисунке. Что стало с проводом: он провисает, он снова натянут или он порвался?

*М.Раскин, Е.Бакаев*

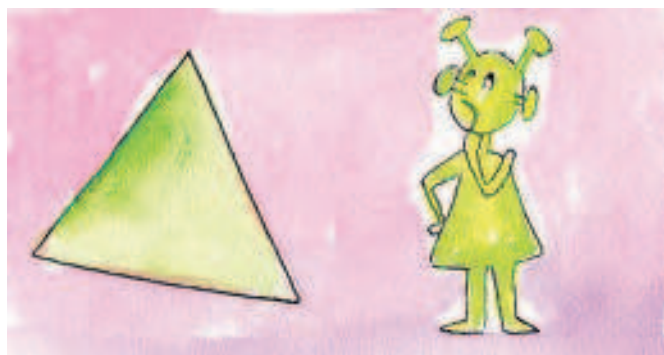
Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Эти задачи предлагались на XX Летнем турнире имени А.П.Савина.



4. Внутри равностороннего треугольника отметили точку, соединили ее с вершинами и разрежали треугольник по этим отрезкам. Можно ли выбрать точку так, чтобы из полученных треугольников без сгибов и наложений удалось сложить другой треугольник?

*А.Банникова*



5. Из шести монет две более легкие – фальшивые. Есть чашечные весы, за каждое взвешивание на которых надо предварительно заплатить одну монету. Если уплаченная монета настоящая, весы показывают правильный результат, а если фальшивая – неизвестно что. Как найти (и не потратить) одну настоящую монету?

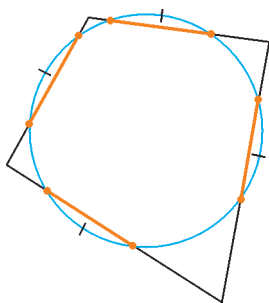
*В.Клепцын, А.Заславский*



# Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы начинаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» или по электронному адресу: [savin.contest@gmail.com](mailto:savin.contest@gmail.com) (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.



1. Окружность пересекает каждую сторону четырехугольника, причем стороны отсекают от окружности равные дуги (см. рисунок). Докажите, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

С.Дворянинов

2. Клетчатый квадрат  $20 \times 20$  разрезан на клетчатые полоски шириной 1. Каждый горизонтальный или вертикальный ряд пересекает не более  $k$  полосок. Найдите наименьшее возможное значение  $k$ .

П.Кожевников

3. Пусть  $K, L$  – середины сторон  $BC$  и  $DA$  четырехугольника  $ABCD$ . Докажите, что утроенная площадь четырехугольника  $ABKL$  больше площади четырехугольника  $DCKL$ .

П.Кожевников

4. При каких нечетных  $n = 2k + 1$  число  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k + (k + 1) \cdot (k + 2) \cdot \dots \cdot (2k)$  не делится на  $n$ ?

П.Кожевников

5. Когда 2014 поделили на некоторое натуральное число, получили неполное частное и остаток. А если бы 2014 поделили на это неполное частное, остаток оказался бы в 50 раз меньше. Найдите этот остаток.

И.Акулич

## Буратино и его универсальный шаблон квадратичной параболы

С.ДВОРЯНИНОВ

— ПАПА КАРЛО, Я ЧТО-ТО НЕ МОГУ НАЙТИ НОЖНИЦЫ! Не помнишь, где они лежат? – Буратино поднял голову от листа бумаги.

– Ножницы? Зачем они тебе? Ты, кажется, сейчас делаешь уроки по математике, – удивился Папа Карло.

– Да, по математике. Но в школе мы начали проходить квадратичную функцию. Часто приходится рисовать ее график – параболу. Я сейчас на картонке нарисовал их три –

$$y = x^2, \quad y = 2x^2, \quad y = \frac{1}{2}x^2.$$

Вырежу их и буду использовать на уроках: совмещу вершину параболы с нужной точкой – вершиной – и обведу шаблон карандашом! Легко и быстро! Так где же наши ножницы?

– Ножницы вот, на месте. Только сколько же это тебе шаблонов понадобится? Ведь в формуле

$$y = ax^2$$

параметр  $a$  может быть любым числом. Ты же не можешь заготовить бесконечно много шаблонов?!

– Согласен, Папа Карло, – Буратино вздохнул. – Парабол бесконечно много, они все разные. Так что буду каждый день вырезать новые шаблоны, со временем у меня накопится целая библиотека.

– Стало быть, требуется бесконечно много парабол?

– Конечно! А разве не так?

– Давай подумаем. Начнем с простого. Сколько числовых прямых ты можешь нарисовать с помощью линейки и циркуля? Одну, две или бесконечно много?

– Провожу по линейке прямую, точнее, ее часть. Выбираю направление, отмечаю точку ноль, – уверенно начал Буратино. – Беру любой единственный отрезок и отмечаю циркулем точки  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  Поскольку точку 0 можно отметить в любом месте и, главное, единица масштаба может быть любой, то числовых прямых получается бесконечно много, – подвел итог Буратино.



– Верно. А если у тебя есть вырезанный из картона круг с дыркой в центре, то, обводя его карандашом, ты можешь затем принять его радиус равным любому числу. Один круговой шаблон позволяет рисовать окружность любого радиуса. Все дело в выборе единицы длины. Замечательно, что этот же прием годится и для параболы! – торжественно заключил Папа Карло.

– Для параболы? Один шаблон параболы позволяет нарисовать *любую* параболу? – удивленно воскликнул Буратино. Да ни в жизнь! Быть такого не может! По сравнению с параболой  $y = x^2$  парабола  $y = 10x^2$  така-а-я узкая, а парабола  $y = \frac{1}{10}x^2$  така-а-я широкая!

У них совершенно разные формы, одна никак не похожа на другую, – твердо возразил Буратино. – Все круги подобны. Вот вчера я видел в небе большой воздушный шар, он выглядел кругом. Глядя на него одним глазом, я расположил перед глазом маленькую круглую монету так, что она в точности закрыла воздушный шар. Это наглядное подтверждение подобия двух кругов. А разве это возможно для парабол?

– Хорошо, мой юный любитель математики, – ласково сказал Папа Карло. Я вижу, ты удивился. Великий Аристотель сказал, что удивление – мать познания. Давай же сейчас внимательно, не спеша присмотримся к параболе. Пусть у тебя есть вырезанный из картона шаблон параболы  $y = x^2$ . Я возьму его, помещу вершину в точку  $(0, 0)$  своей декартовой системы координат и обведу (рис.1). Для простоты можно еще потребовать, чтобы на шаблоне была отмечена ось параболы. Заметь, пока у меня на осях не указана единица длины! Эту единицу я БУДУ ВЫБИРАТЬ!!!

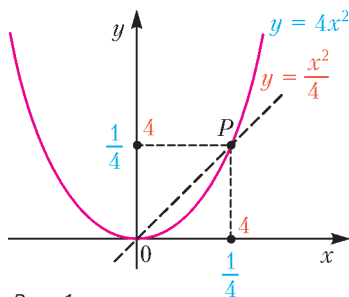


Рис. 1

Как выбирать – зависит от того, какую параболу я хочу нарисовать. Пусть – для определенности – мне нужна парабола  $y = 4x^2$ . Провожу биссектрису первой координатной четверти. Второй раз этот луч пересекает параболу в точке  $P$  с координатами  $(n, n)$ , ибо точка  $P$  равноудалена от осей координат (обозначение  $n$  у меня – от слова «неизвестная»). Но точка  $P$  лежит и на параболе  $y = 4x^2$ , ее координаты удовлетворяют этому уравнению, т.е.

$$n = 4n^2, \text{ или } n = \frac{1}{4}.$$

Зная, таким образом, абсциссу и ординату точки  $P$ , мы можем указать точки  $x = 1$  и  $y = 1$  на осях координат. В этой системе координат нарисованная нами кривая есть график функции  $y = 4x^2$ .

– А точно старая парабола целиком совпадет с новой? Мы ведь это только для одной точки проверили.

– А вот смотри. Мы с тобой изменили масштаб по каждой из осей в 4 раза. При старом масштабе условие того, что точка  $(x, y)$  лежит на старой параболе, задавалось равенством  $y = x^2$ . А теперь эта же точка имеет новые координаты. Сообразил, какие?

– Ну, раз у нас 1 по каждой из осей превратилась в  $\frac{1}{4}$ , то точка  $(x, y)$ , наверное, превратится в  $(\frac{x}{4}, \frac{y}{4})$ ?

– Верно! А теперь подставь новые координаты в уравнение новой параболы и проверь, сходится или нет.

– Должно получиться, что  $\frac{y}{4} = 4\left(\frac{x}{4}\right)^2$ . Если скобки раскрыть, как раз выйдет, что  $y = x^2$ . Здорово! Все верно! – Буратино чуть не захлопал в ладоши. – Давай я попробую превратить ту же кривую в график  $y = \frac{1}{4}x^2$ .

Теперь у меня координаты точки  $P(n, n)$  должны удовлетворять уравнению  $n = \frac{1}{4}n^2$ , т.е.  $n = 4$ . Удивительно! Простое изменение единицы длины – и мы получаем какую угодно параболу!

– Помнишь, Папа Карло, раньше была реклама междугородной телефонной связи:

Один поворот телефонного диска,

И город далекий становится близким!

Так и у нас:

Одно изменение длины по осям –

Парабола явится, нужная вам!..

Только мне еще интересно, а можно и тут, как в случае с кругами, расположить перед глазом шаблон «узкой» параболы так, чтобы он как раз закрыл шаблон «широкой» параболы? Покажи, пожалуйста, – попросил Буратино.

Папа Карло проделал это для двух разных парабол. Мы же для примера приводим рисунок 2, на котором «узкая» парабола  $y = 2x^2$  закрывает «широкую» параболу  $y = x^2$ . Первая парабола находится посередине между наблюдателем и второй параболой.

Параболу  $y = x^2$  можно закрыть и параболой  $y = 4x^2$  – при этом «узкая» парабола  $y = 4x^2$ , должна быть в четыре раза ближе к наблюдателю, чем «широкая» парабола  $y = x^2$ . Попробуйте это доказать.

Наш рассказ основан на том математическом факте, что все квадратичные параболы являются подобными. Согласитесь, утверждение довольно неожиданное. Любая парабола подобна любой другой так же, как подобны между собой все круги и все квадраты.

Подобны одна другой и все гиперболы вида  $y = \frac{a}{x}$ .

**Задача 1.** В декартовой координатной плоскости нарисована гипербола  $y = \frac{1}{x}$ . Измените единицу длины на осях координат так, чтобы эта же кривая стала графиком функции  $y = \frac{9}{x}$ .

**Задача 2.** В декартовой координатной плоскости нарисована кубическая парабола  $y = x^3$ . Измените единицу длины на осях координат так, чтобы эта же кривая стала графиком функции  $y = 4x^3$ .

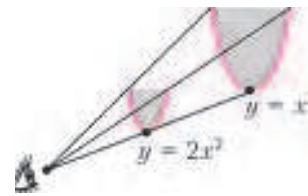


Рис. 2

# О перевернутом маятнике

А.БУРОВ, И.КОСЕНКО

ИЗ ПОВСЕДНЕВНОЙ ЖИЗНИ МЫ ХОРОШО ЗНАЕМ, ЧТО перевернутый маятник – скажем, невесомый стержень с грузиком на конце – неустойчив. Причем он готов падать «на все четыре стороны» – влево и вправо, вперед и назад. Спрашивается, сохраняется ли это свойство, если маятник «ну очень длинный». Оказывается, нет. Если маятник очень и очень длинный, то его равновесие относительно вращающейся Земли становится устойчивым – он вообще никуда не хочет падать. Это свойство было подмечено К.Э.Циолковским и составило основу так называемого космического лифта (см., например, [1–3]).

Так где же кончается неустойчивость равновесия перевернутого «короткого» маятника и начинается устойчивость маятника «длинного»? Постараемся ответить на этот вопрос.

## Постановка задачи

Рассмотрим маятник, подвешенный в некоторой точке  $O$  на экваторе вращающейся Земли. Почему на экваторе? Да просто потому, что в этом случае формулы оказываются немного проще. Будем считать, что длина маятника равна  $l$ , а масса  $m$  сосредоточена на его свободном конце – в точке  $P$ . В системе отсчета, связанной с вращающейся Землей, на маятник действуют три силы – сила ньютоновского притяжения, центробежная сила инерции и реакция опоры.

В школьной физике, как известно, настороженно относятся к рассмотрению движения в неинерциальных, в частности во вращающихся, системах отсчета. Однако из такого рассмотрения можно почерпнуть кое-что полезное. Так, наблюдаемая в такой системе отсчета центробежная сила инерции оказывается потенциальной и «с точностью до наоборот» похожей на силу упругости, подчиняющуюся закону Гука.

Действительно, сравним движение грузика на пружинке и движение грузика на равномерно вращающейся карусели. И сила упругости и центробежная сила линейно зависят от отклонения грузика от равновесия, а соответствующие им потенциалы (потенциальные энергии) пропорциональны квадрату этого отклонения:

$$F_y = -k(x - x_0), \quad F_{ц} = -m\omega^2 x, \\ U_y = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2, \quad U_{ц} = -\frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

Но в то время как сила Гука (сила упругости) стремится вернуть грузик в положение равновесия, центробежная сила стремится увести его подальше от равновесия. Этой разницей в направлении действия сил обусловлена противоположность знаков их потенциалов. Впрочем, центробежная сила не так проста (о некоторых ее особенностях можно почитать, например, в [4]).

Итак, маятник будет находиться в равновесии по отношению к вращающейся Земле, если действующие на него силы уравновешены. Этим равновесиям отвечают критические точки – точки минимума и максимума – так называемого измененного потенциала

$$U = U_{ц} + U_{п}, \quad U_{ц} = -\frac{m\omega^2}{2}r^2, \quad U_{п} = -G\frac{mM}{\rho}, \quad (1)$$

где  $U_{ц}$  – потенциал центробежных сил инерции,  $U_{п}$  – потенциал сил ньютоновского притяжения. Термин «измененный потенциал» подчеркивает, что во вращающейся системе отсчета потенциал не такой, как в неподвижной системе. Здесь и далее  $r$  – расстояние от точки  $P$  до земной оси,  $\rho$  – расстояние от точки  $P$  до центра Земли,  $\omega$  – угловая скорость вращения Земли.

Введем вращающуюся вместе с Землей систему отсчета  $Oxyz$ , начало которой располагается в точке подвеса маятника, ось  $x$  касается экватора, ось  $y$  параллельна земной оси, ось  $z$  направлена вдоль восходящей вертикали. Если  $R$  – радиус Земли, а  $(x, y, z)$  – координаты вектора  $\overline{OP}$ , то измененный потенциал  $U$  можно записать в виде

$$U = m\omega^2 U_*, \quad U_* = -\frac{r^2}{2} - \frac{R^3}{\rho}, \quad (2)$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + (R + z)^2}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + (R + z)^2}.$$

Величина  $R_*$  – не что иное как радиус геостационарной, или суточной, орбиты, т.е. той орбиты, на которой спутник совершает оборот вокруг Земли за одни сутки. В нашем «экваториальном» случае это означает, что спутник остается над одной и той же точкой экватора во все время движения. Справедливость сказанного следует из того, что при движении по геостационарной орбите второй закон Ньютона принимает вид

$$m\omega^2 R_* = G\frac{Mm}{R_*^2}.$$

## Свойства равновесия перевернутого маятника

Теперь пора искать критические точки функции  $U_*$ , отличающейся от функции  $U$  лишь положительным множителем. Но... Имеется одно «но» – координаты  $(x, y, z)$  зависимы и связаны соотношением

$$f = x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0, \quad (3)$$

выражающим постоянство длины маятника. Сведущие люди тотчас воспользуются методом множителей Лагранжа, и будут правы. Ну а как быть несведущим? Давайте вместе с ними обратим внимание на то обстоятельство, что верхнее положение маятника  $(0, 0, l)$  будет положением относительного равновесия уже из соображений симметрии – земное притяжение, центробежная сила инерции и реакция связи будут действовать вдоль одной прямой, и реакция связи уж как-нибудь сбалансирует первые две силы. А раз так, то в окрестности этого относительного равновесия

$$z = \sqrt{l^2 - x^2 - y^2} = l\sqrt{1 - \varepsilon} = l\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \dots\right), \quad (4)$$

где

$$\varepsilon = \frac{x^2 + y^2}{l^2},$$

причем приближенное равенство выполнено при малых по сравнению с  $l$  значениях  $x$  и  $y$ . Здесь мы воспользовались тождеством

$$(1 + \beta)^\alpha = 1 + \alpha\beta + \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 1)\beta^2 + \dots \quad (5)$$

для  $\alpha = 1/2$  и  $\beta = \varepsilon$ . Это тождество справедливо при малых значениях параметра  $\beta$ . Подставляя  $z$  в выражение для  $\rho$  из ньютоновского потенциала и вновь применяя тождество

(5), но теперь уже для  $\alpha = -1/2$ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 + 2Rz)^{-1/2} = \\ &= \left( l^2 + R^2 + 2Rl \left( 1 - \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{8}\epsilon^2 + \dots \right) \right)^{-1/2} = \\ &= (R+l)^{-1} (1+\beta)^{-1/2} = (R+l)^{-1} \left( 1 - \frac{1}{2}\beta + \frac{3}{8}\beta^2 + \dots \right), \quad (6) \end{aligned}$$

где

$$\beta = \frac{Rl}{(R+l)^2} \left( -\epsilon - \frac{1}{4}\epsilon^2 + \dots \right).$$

Подставляя теперь разложения (4) и (6) в выражение для измененного потенциала (2) и собирая подобные слагаемые, в конечном итоге получаем

$$U_* = a_0 + \frac{1}{2}(a_x x^2 + a_y y^2) + \dots, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= -(R+l)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{R_*^3}{(R+l)^3} \right), \\ a_x &= \frac{R}{l} \left( 1 - \frac{R_*^3}{(R+l)^3} \right), \quad a_y = 1 + \frac{R}{l} \left( 1 - \frac{R_*^3}{(R+l)^3} \right). \end{aligned}$$

Постоянная  $a_0$  не существенна, она не определяет тип изучаемой критической точки. Эта критическая точка оказывается точкой минимума потенциальной энергии, а вместе с тем и точкой устойчивого, в вековом смысле, относительного равновесия, если выполнены условия  $a_x > 0$ ,  $a_y > 0$ . Так как  $a_y > a_x$ , то при выполнении условия  $a_x > 0$  исследуемое относительное равновесие устойчиво. Иными словами, изучаемое равновесие устойчиво при выполнении условия  $R+l > R_*$ , если для него свободный конец маятника – точка  $P$  – находится за геоцентрической орбитой. Если же длина маятника оказывается меньше  $l_* = R_* - R$ , то коэффициент  $a_x$  становится отрицательным, а критическая точка становится седловой и остается седловой, покуда  $a_y > 0$ . Для таких значений длины маятника неустойчивость имеет место лишь в плоскости орбиты.

Значение длины маятника, при котором изменяется знак коэффициента  $a_y$ , определяется соотношением

$$l_{**} = R^{1/4} R_*^{3/4} - R.$$

Это означает, что, как только длина маятника становится меньше  $l_{**}$ , седловая критическая точка измененного потенциала превращается в точку максимума, и мы обретаем привычный перевернутый маятник, который падает в любом направлении, а не только в экваториальном. Осталось сказать, что для Земли  $R \approx 6378$  км,  $R_* \approx 42164$  км,  $l_{**} \approx 19917$  км. Таким образом, перевернутый маятник становится «во все стороны неустойчивым», если длина его меньше упомянутой численной величины  $l_{**}$ .

### «Косые» равновесия

Высокая наука, именуемая теорией бифуркаций, подсказывает нам, что изменение свойств устойчивости обычно сопровождается рождением или исчезновением дополнительных равновесий. Попробуем разобраться с этим вопросом «по-школьному».

Во-первых, обратим внимание на то обстоятельство, что расстояние от точки подвеса маятника  $O$  до произвольного спутника  $P$ , совершающего движение по геостационарной орбите в ту же сторону, что и Земля, остается неизменным.

Иными словами, если соединить точки  $O$  и  $P$  нерастяжимым (и несжимаемым) стержнем пренебрежимо малой массы, то такой стержень не будет испытывать напряжений. Так получается первое однопараметрическое семейство «косых» от-

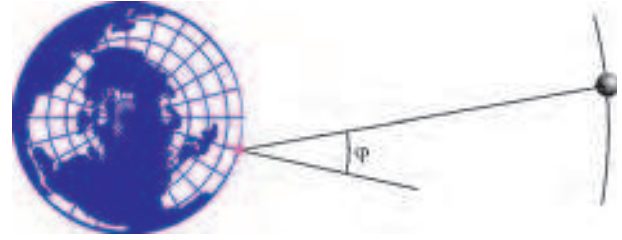


Рис.1. «Косые» равновесия в экваториальной плоскости

носительных равновесий, для которых свободный конец маятника располагается в экваториальной плоскости (рис. 1).

Во-вторых, попробуем поискать равновесия в меридиональной плоскости  $yz$ . Для этого найдем условие равенства нулю суммы моментов силы ньютоновского притяжения и центробежной силы инерции относительно точки  $O$ . Проекция вектора суммарного момента на ось  $y$  и  $z$  равны нулю, проекцию на ось  $x$  (после приведения подобных членов) можно представить в виде

$$M_x = m\omega^2 y \left[ (R+z) - R \left( \frac{R_*}{\rho} \right)^3 \right].$$

Это выражение обращается в ноль при  $y = 0$ , что соответствует двум относительным равновесиям, рассмотренным выше, а также в случае, когда обращается в ноль квадратная скобка. Таким образом, «косые» относительные равновесия этого типа задаются системой уравнений

$$\begin{aligned} (R+z) - R \left( \frac{R_*}{\sqrt{y^2 + (z+R)^2}} \right)^3 &= 0, \\ y^2 + z^2 &= l^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Выражая  $y^2$  из первого уравнения, имеем

$$y^2 = R_*^2 \left( \frac{R+z}{R} \right)^{-2/3} - (z+R)^2.$$

Правая часть этого соотношения обращается в ноль, когда  $z = z_* = l_{**}$ , т.е. в точке смены устойчивости – в *точке бифуркации*. При этом для  $z < z_*$  возникают две веточки относительных равновесий, отвечающих симметричным положениям маятника в Северном и Южном полушариях (на

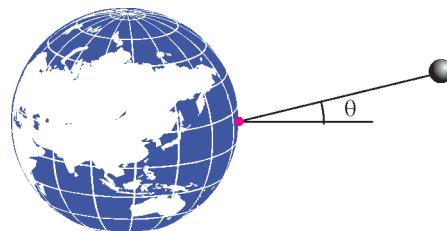


Рис. 2. «Косые» равновесия в меридиональной плоскости

рисунке 2 изображено положение маятника в Северном полушарии).

Зависимость отклонения маятника от экваториальной плоскости как функция координаты  $z$  изображена на рисунке 3.



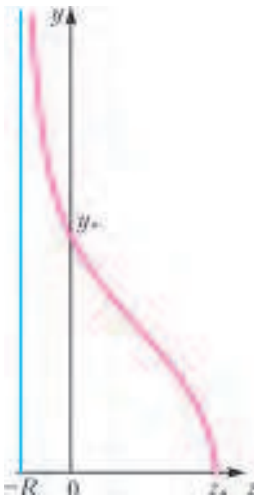


Рис.3. Уклонение конца маятника от экваториальной плоскости как функция его удаления от земной оси



Рис.4. Длина маятника как функция удаления его конца от земной оси

При убывании  $z$  до  $-R$  кривая равновесий приближается к земной оси, тогда как положение конца маятника  $P$  неограниченно удаляется от центра Земли. При этом длина маятника неограниченно возрастает (рис.4).

Заметим, что среди этих равновесий имеется и такое, на котором маятник параллелен земной оси. В этом случае  $z = 0$ , и в силу условий (8) длина маятника составляет

$y_* = \sqrt{R_*^2 - R^2}$ . При этом расстояние от конца маятника до центра Земли в точности равно радиусу геостационарной орбиты  $R_*$ .

#### Вместо эпилога

Итак, как оказалось, даже столь привычный объект, как перевернутый маятник, демонстрирует не совсем обычное поведение.

После того, как путь исследования намечен, можно изучить, как будет вести себя перевернутый маятник на других планетах. Например, ответить на вопрос, окажутся ли кольца Сатурна в области, где тамошний перевернутый маятник устойчив. Не менее интересный вопрос относится к устойчивости перевернутых маятников, привязанных к вращающимся астероидам. В этом случае, правда, решение вопроса будет осложнено типичным для астероидов отсутствием сферической симметрии в распределении масс.

Желаем успехов!

#### Список литературы

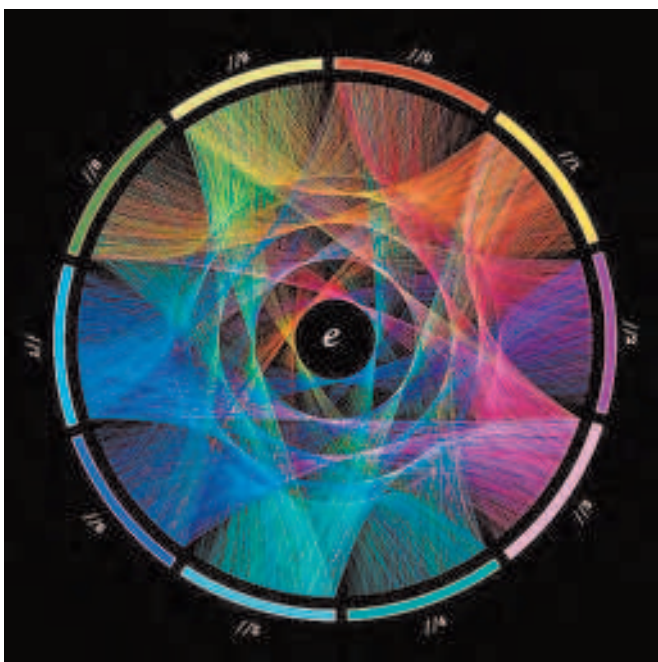
1. В.В.Белецкий, Е.М.Левин. Динамика космических трюковых систем (М.: Наука, 1990).
2. П.Беномар, А.Бузов. На лифте в... заоблачные дали («Квант» №5 за 2006 г.).
3. К.Богданов. Космический нанолифт («Квант» №5 за 2009 г.).
4. А.Бузов. Принцип Торричелли и центробежная сила инерции («Квант» №3 за 2005 г.).

## КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВЛОМОК

### «Портрет» числа $\pi$

(Начало см. на 2-й странице обложки)

Чтобы добиться такого равномерного заполнения круга, Василе разделил каждый сектор на 10000 «точек» (столько



же, сколько знаков числа  $\pi$  он использовал). Каждая дуга «соединяет» две последовательные цифры в записи числа  $\pi$ : она идет из сектора, соответствующего очередной цифре, в сектор, соответствующий следующей цифре. При этом если соединяются  $n$ -я и  $(n + 1)$ -я по счету цифры в записи числа  $\pi$ , то дуга идет из  $n$ -й точки одного сектора в  $(n + 1)$ -ю точку другого. Например, вторая по счету дуга, которая «изображает» пару 14, идет из второй точки сектора 1 в третью точку сектора 4, потому что эти цифры стоят на втором и третьем местах в числе  $\pi \approx 3,1415\dots$

Построенные таким образом «портреты» чисел получаются красивыми, но они не несут в себе почти никакого математического содержания. Для сравнения приводим «портрет» еще одной важнейшей константы – числа  $e$ . Разницу между двумя изображениями можно заметить, только если очень хорошо присмотреться. Больше того, аналогичный «портрет» любого числа, в котором цифры достаточно хорошо «перемешаны» (важно, чтобы все возможные пары цифр встречались примерно одинаково часто), будет очень похож на эти два.

Но есть числа, у которых «портреты» другие, и это легко увидеть: если в записи числа ни разу не встречается какая-нибудь цифра, то в сектор этой цифры не попадет ни одна дуга, а это, конечно, сразу заметно. Подумайте, как устроен «портрет» числа  $\frac{41}{333} = 0,1231231\dots = 0,(123)$  и, вообще, как устроены «портреты» рациональных чисел.

Е.Епифанов

# Многогранники вокруг нас

Знакомство с миром многогранников можно начать, не дожидаясь уроков стереометрии в старших классах. Иногда достаточно взглянуть на некоторые творения архитекторов.

Большинство современных многоэтажек имеют форму прямоугольных параллелепипедов. Их иногда несколько небрежно называют коробками (по-английски длинное «rectangular parallelepiped» также часто заменяется на короткое «box»). Это легко объясняется – строить коробки проще. Правда, и среди коробок есть необычные здания. Согласитесь, не часто встретишь дом практически кубической формы, как городская библиотека города Штутгарта (фото 1)!



Фото 1

Наиболее известные древние сооружения пирамидальной формы – это египетские пирамиды. Ритуальные пирамиды майя на мексиканском полуострове Юкатан также имеют форму пирамид, или точнее, усеченных пирамид, в основании которых лежит квадрат (фото 2). На сегодняшний день руками людей сделано большое число спортивных, торго-



Фото 2

вых, выставочных центров и других зданий в форме пирамид. Иногда дизайнеры и архитекторы предлагают перевернуть наши представления о пирамидах (фото 3).



Фото 3. В этом здании располагается мэрия города Тэмпе (Аризона, США)

Впрочем, и коробка может выглядеть совершенно неожиданно. Кажется, что одно из зданий кампуса Ноттингемского университета представляет собой наклоненную коробку, часть которой уходит в землю



Фото 4

(фото 4). Попробуйте понять, сколько сторон у многоугольника, лежащего в фундаменте этого здания. А можно ли сделать проект частично спрятанной в землю коробки, в основании которой лежит треугольник? А пятиугольник или шестиугольник?

Новые формы можно получать из коробок, если отрезать от них углы (фото 5).

Прямоугольный параллелепипед – это частный случай призмы. Основанием призмы может быть





Фото 5. Высотные башни в канадском городе Реджайна



Фото 6. Барселонский «Форум»

любой многоугольник, например треугольник (фото 6).

Высотное здание Всемирного торгового центра в Нью-Йорке имеет форму так называемой четырехугольной антипризмы (фото 7). В основаниях антипризмы два равных квадрата, один из которых повернут на 45 градусов относительно другого. Кроме двух оснований у антипризмы есть треугольные боковые грани (сколько их?). А что получится, если антипризму разрезать посередине сечением, параллельным основаниям? Чтобы ответить на этот вопрос, можно воспользоваться фото



Фото 7



Фото 8

8, которое было сделано, когда Всемирный центр был построен наполовину.

А завершим нашу небольшую экскурсию в Минске. Здание Национальной библиотеки Белоруссии имеет форму ромбокубооктаэдра (фото 9). В качестве упражнения



Фото 9

можете посчитать, сколько у него вершин, ребер и граней каждого типа.



Материал подготовили  
С.Дворянинов, П.Кожевников

Источники фотографий:

- 1 – <http://www.home-designing.com/>
- 2 – [http://en.wikipedia.org/wiki/Chichen\\_Itza](http://en.wikipedia.org/wiki/Chichen_Itza)
- 3 – [http://en.wikipedia.org/wiki/Tempe\\_Municipal\\_Building](http://en.wikipedia.org/wiki/Tempe_Municipal_Building)
- 4 – <http://bof.co.uk/project/13>
- 5 – <http://www.workopolis.com/>
- 6 – <http://www.pushpullar.com>
- 7 – [http://en.wikipedia.org/wiki/New\\_York\\_City](http://en.wikipedia.org/wiki/New_York_City)
- 8 – <http://www.theatlantic.com>
- 9 – <http://www.calend.ru>



# Угол в квадрате

А.БЛИНКОВ, Ю.БЛИНКОВ

Речь пойдет об удивительной геометрической конструкции, возникшей на основе ряда задач замечательного математика Вячеслава Викторовича Произволова. Большая часть этих задач была придумана автором для турниров математических боев имени А.П.Савина, а три задачи есть в его книжке «Задачи на вырост». В статье использованы также материалы геометрических кружков Ю.А.Блинкова и Д.В.Швецова ([http://www.geometry.ru/kruzhki\\_big.htm](http://www.geometry.ru/kruzhki_big.htm)).

Мы постараемся проследить несколько «сюжетных линий» и показать не только тесные связи между разными задачами, но и богатство геометрических методов, которые позволяют их решить.

Начнем с задачи, которая уже давно стала классикой.

**Задача 1.** На сторонах  $BC$  и  $CD$  квадрата  $ABCD$  выбраны точки  $M$  и  $N$  соответственно так, что угол  $MAN$

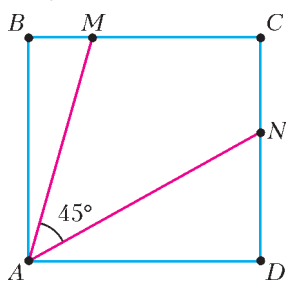


Рис. 1

равен  $45^\circ$  (рис. 1). Докажите, что расстояние от точки  $A$  до прямой  $MN$  равно стороне квадрата.

Рассмотрим три способа решения этой задачи (последний способ – авторский).

**Решение.** Проведем отрезок  $MN$  и опустим на него перпендикуляр  $AE$  (рис. 2).

**Первый способ.** Проведем диагональ  $AC$  квадрата и рассмотрим треугольник  $CMN$  (рис.2,а). Точка  $A$  лежит на биссектрисе угла  $C$  этого треугольника, точки  $A$  и  $C$  лежат в разных полуплоскостях относительно прямой  $MN$ , а сторона  $MN$  видна из этой точки под углом  $MAN$ , который равен  $90^\circ - \frac{1}{2}\angle C$ .

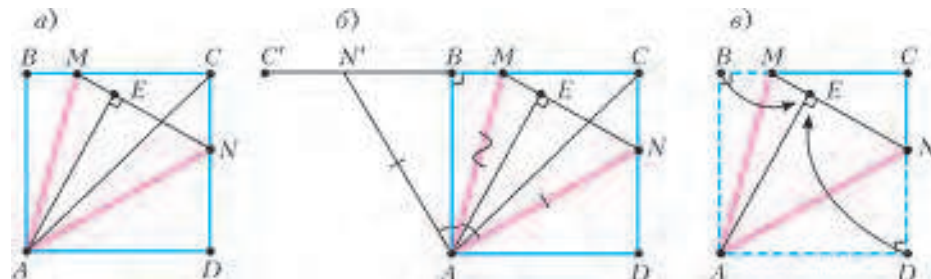


Рис. 2

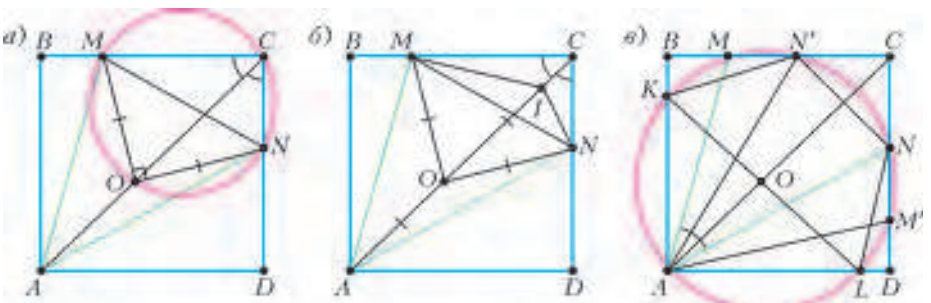


Рис. 3

Таким свойством обладает единственная точка – центр вневписанной окружности треугольника  $CMN$  (подробнее – см. статью «Вневписанная окружность» в «Кванте» №2 за 2009 г.). Следовательно,  $AE = AB = AD$  (радиусы этой окружности).

**Второй способ.** Расположив квадрат так, как показано на рисунке 2,б, рассмотрим поворот с центром  $A$  на угол  $90^\circ$  против часовой стрелки. Образом вершины  $D$  будет являться вершина  $B$ , образом прямой  $DC$  – прямая  $BC'$ , ей перпендикулярна, поэтому точка  $N'$  (образ точки  $N$ ) будет лежать на отрезке  $BC'$ . Так как  $\angle NAN' = 90^\circ$ , то  $\angle MAN' = \angle MAN$ , значит, треугольник  $AMN'$  равен треугольнику  $AMN$  (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, равны и их соответствующие высоты, т.е.  $AE = AB$ .

**Третий способ.** «Перегибем» квадрат по прямым  $AM$  и  $AN$ . Так как  $\angle BAM + \angle DAN = \angle MAN$  и  $AB = AD$ , то после перегибания отрезки  $AB$  и  $AD$  совместятся (рис. 2,в). Кроме того,  $\angle ABM = \angle ADN = 90^\circ$ , значит, из точки, в которой оказались вершины  $B$  и  $D$ , отрезки  $AM$  и  $AN$  видны под прямым углом, а этому условию удовлетворяет только точка  $E$ . Значит,  $AE = AB = AD$ .

**Замечание.** Этот авторский прием, который В.В.Произволов назвал «свертыванием», конечно, имеет и «научное» обоснование. Он основан на том, что композиция двух осевых симметрий с пересекающимися осями является поворотом на удвоенный угол между осями с центром в точке их пересечения. В данном случае речь идет о повороте с центром  $A$  на угол  $90^\circ$ , который является композицией симметрий относительно прямых  $AM$  и  $AN$ .

### Упражнения

1. Докажите, что в условиях задачи 1 периметр треугольника  $CMN$  равен половине периметра квадрата.
2. Докажите обратное утверждение: если точки  $M$  и  $N$  на сторонах  $BC$  и  $CD$  квадрата  $ABCD$  таковы, что периметр треугольника  $CMN$  равен половине периметра квадрата, то угол  $MAN$  равен  $45^\circ$ .

Следующая задача, содержащая два взаимно обратных утверждения, иллюстрируют еще одно свойство рассматриваемой конструкции.

**Задача 2.** а) (X Турнир имени А.П.Савина, 2004) На сторонах  $BC$  и  $CD$  квадрата  $ABCD$  выбраны точки  $M$  и  $N$  соответственно так, что угол  $MAN$  равен  $45^\circ$ . Докажите, что центр описанной окружности треугольника  $CMN$  лежит на диагонали  $AC$ .

б) (XIV Турнир имени А.П.Савина, 2008) Окружность с центром на диагонали  $AC$  квадрата  $ABCD$  проходит через вершину  $A$  и пересекает стороны  $BC$  и  $CD$  в точках  $M$  и  $N$ , не симметричных относительно  $AC$ . Докажите, что угол  $MAN$  равен  $45^\circ$ .

И опять – три способа решения.

**Решение.** **Первый способ.** Пусть  $O$  – центр данной окружности, тогда  $OM = ON$  (рис. 3,а). а) Так как  $\angle MON = 2\angle MAN = 90^\circ$  и  $\angle MCN = 90^\circ$ , то четырехугольник  $OMCN$  – вписанный. Тогда из равенства  $OM = ON$  следует, что  $CO$  – биссектриса угла  $MCN$ , поэтому точка  $O$  лежит на  $AC$ .

б) Воспользуемся тем, что *серединный перпендикуляр к стороне треугольника и биссектриса его противолежащего угла пересекаются на окружности, описанной*

ной около треугольника (докажите!). Точка  $O$  лежит на серединном перпендикуляре к отрезку  $MN$  и на биссектрисе угла  $MCN$ , значит, она является серединой дуги  $MN$  окружности, описанной около треугольника  $CMN$ . Так как  $\angle MCN = 90^\circ$ , то и  $\angle MON = 90^\circ$ , значит,  $\angle MAN = 45^\circ$ .

**Второй способ.** Пусть  $I$  – центр окружности, вписанной в треугольник  $CMN$  (рис.3,б). а) Так как  $A$  – центр вневписанной окружности этого треугольника, то  $\angle AMI = \angle ANI = 90^\circ$ , значит, точки  $M$  и  $N$  лежат на окружности с диаметром  $AI$ . Следовательно, центр  $O$  окружности, описанной около треугольника  $AMN$ , является серединой  $AI$ , т.е. лежит на  $AC$ . б) Точки  $O$  и  $A$  лежат на биссектрисе угла  $C$  треугольника  $CMN$  и  $OM = ON = OA$ , значит,  $A$  – центр вневписанной окружности этого треугольника. Следовательно,  $\angle MAN = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle MCN = 45^\circ$ .

**Третий способ.** а) Пусть  $N'$  – вторая точка пересечения данной окружности и стороны  $BC$  (рис.3,в). Так как четырехугольник  $AMN'N$  – вписанный, то  $\angle CN'N = \angle MAN = 45^\circ$ . Тогда  $AC$  является серединным перпендикуляром к отрезку  $NN'$ , поэтому центр  $O$  рассматриваемой окружности лежит на  $AC$ . б) Диагональ  $AC$  квадрата является как его осью симметрии, так и осью симметрии данной окружности, поэтому точка  $N'$ , симметричная  $N$  относительно  $AC$ , является еще одной точкой пересечения окружности со стороной  $BC$  (см. рис. 3,в). Так как  $NN' \perp AC$ , то  $\angle CN'N = 45^\circ$ . Четырехугольник  $AMN'N$  – вписанный, следовательно,  $\angle MAN = \angle CN'N = 45^\circ$ .

**Замечание.** Утверждение задачи 2,а можно также доказать, используя изогональное сопряжение центра описанной окружности и ортоцентра треугольника. Подробнее об изогональном сопряжении см., например, в книге В.В.Прасолова «Задачи по планиметрии», ч.1, гл.5.

**Упражнение 3.** Пусть  $K$  и  $L$  – точки пересечения окружности, проходящей через точки  $A, M$  и  $N$ , со сторонами  $AB$  и  $AD$  соответственно (см. рис. 3,в). Докажите, что  $KL$  – диаметр окружности и  $AK = AL$ .

Продолжим изучение конструкции, рассмотрев точки пересечения сторон угла  $MAN$  с диагональю  $BD$ . В этом нам поможет задача, в условии которой квадрата нет, но «незримо» он присутствует.

**Задача 3** («Задачи на вырост»). В равнобедренном прямоугольном треугольнике  $VAD$  на гипотенузе  $VD$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $\angle PAQ = 45^\circ$  ( $P$  лежит между  $V$  и  $Q$ ). Докажите, что  $PQ^2 = BP^2 + DQ^2$ .

**Решение.** Первый способ. Расположим треугольник  $VAD$  так, как на рисунке 4,а, и рассмотрим поворот с центром  $A$  на угол  $90^\circ$  против часовой стрелки. Образом вершины  $D$  будет являться вершина  $B$ , а образом точки  $Q$  – точка  $Q'$ , значит,  $DQ = BQ'$  и  $DQ \perp BQ'$ . Кроме того,  $\angle Q'AP = \angle Q'AQ - \angle PAQ = 45^\circ = \angle PAQ$ , поэтому равны треугольники  $APQ$  и  $APQ'$ , откуда  $PQ = PQ'$ . Тогда доказываемое утверждение есть не что иное как теорема Пифагора в прямоугольном треугольнике  $BQ'P$ .

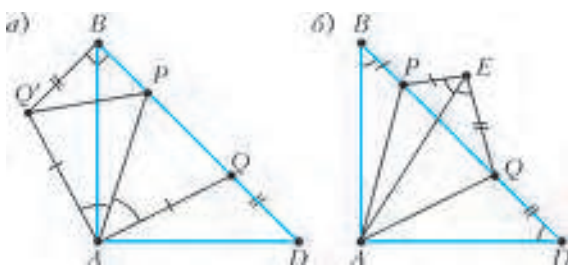


Рис. 4

**Второй способ.** Перегнем чертеж по прямым  $AP$  и  $AQ$  (т.е. опять используем «свертывание»), тогда точки  $B$  и  $D$  совместятся в точке  $E$  (рис.4,б). Так как  $\angle PEA = \angle PBA = \angle PDA = \angle QEA = 45^\circ$ , то  $\angle PEQ = 90^\circ$ . Тогда из прямоугольного треугольника  $PEQ$ :  $PQ^2 = EP^2 + EQ^2 = BP^2 + DQ^2$ .

Отметим, что точка  $E$  нам уже знакома. Действительно, если данный треугольник достроить до квадрата  $ABCD$ , а отрезки  $AP$  и  $AQ$  продолжить до пересечения с  $BC$  и  $CD$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно, то  $E$  – основание перпендикуляра, опущенного из  $A$  на  $MN$  (см. рис. 2,а-в). Теперь логично рассмотреть следующую задачу.

**Задача 4.** На сторонах  $BC$  и  $CD$  квадрата  $ABCD$  выбраны точки  $M$  и  $N$  соответственно так, что угол  $MAN$  равен  $45^\circ$ . Диагональ  $BD$  пересекает  $AM$  и  $AN$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно,  $E$  – основание перпендикуляра, опущенного из  $A$  на  $MN$ . Докажите, что отрезки  $MQ$ ,  $NP$  и  $AE$  пересекаются в одной точке.

**Решение.** Так как  $\angle MAQ = \angle MBQ = 45^\circ$ , то точки  $A, B, M$  и  $Q$  лежат на одной окружности. Кроме того,  $\angle ABM = 90^\circ$ , значит,  $AM$  – диаметр этой окружности, а  $\angle AQM = 90^\circ$ , т.е.  $MQ$  – высота треугольника  $MAN$  (рис. 5). Аналогично, точки  $A, D, N$  и  $P$  лежат на окружности с диаметром  $AN$ , а  $NP$  – высота треугольника  $MAN$ . Учитывая, что  $AE$  – еще одна высота того же треугольника, получим, что указанные отрезки пересекаются в точке  $H$  – ортоцентре треугольника  $MAN$ .

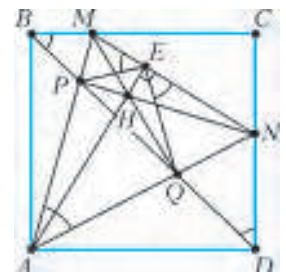


Рис. 5

**Замечание.** Попутно отметим, что на обеих рассмотренных окружностях лежит также и точка  $E$ , т.е. общая хорда  $AE$  рассмотренных окружностей перпендикулярна  $MN$ . Кроме того, высоты  $MQ$  и  $NP$  треугольника  $MAN$  равны отрезкам  $AQ$  и  $AP$  соответственно (так как  $\angle MAN = 45^\circ$ ).

**Упражнение 4.** Докажите, что в условиях задачи 4: а) четырехугольник  $PQNM$  – вписанный; б)  $\angle PCQ = 45^\circ$ ; в)  $S_{\triangle MAN} = 2S_{\triangle PAQ}$ ; г)  $AH = MN = PQ\sqrt{2}$ ; д)  $MN^2 = 2(BP^2 + DQ^2)$ .

В задаче 2 мы рассматривали окружность, описанную около треугольника  $MAN$ , и точки ее пересечения со сторонами квадрата. В силу симметрии, образовалась ломаная  $KMANL$  с вершинами на окружности и углом  $45^\circ$  между соседними звеньями (см. рис. 3,в и упражнение 3). Рассмотрим эту ломаную подробнее.

**Задача 5** («Задачи на вырост»). Вершины ломаной  $KMANL$  лежат на окружности и  $\angle KMA = \angle MAN = \angle ANL = 45^\circ$  (рис.6). Докажите, что площадь закрашенной части равна половине площади круга.

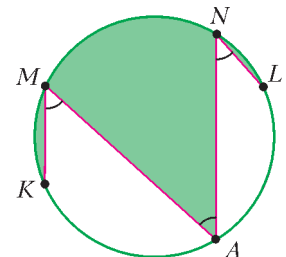


Рис. 6

**Решение.** Проведем отрезок  $KL$  (рис. 7,а,б). Он является диаметром окружности, так как сумма угловых величин дуг  $KA$  и  $LA$  равна  $180^\circ$ . Далее можно рассуждать по-разному.

**Первый способ.** Проведем через точку  $L$  прямую, параллельную  $MK$ , до пересечения с окружностью в точке  $Z$  (см. рис. 7,а). Тогда  $ML = KZ$ , а так как  $KL$  – диаметр окружности, то углы  $KML$  и  $KZL$  – прямые, поэтому  $KMLZ$  – прямоугольник. Пусть  $U$  – точка пересечения  $KN$  и  $ML$ ,  $V$  – точка пересечения  $MA$  и  $KZ$ , тогда  $UV \parallel LZ$  (в силу симметрии относительно горизонтального диаметра).

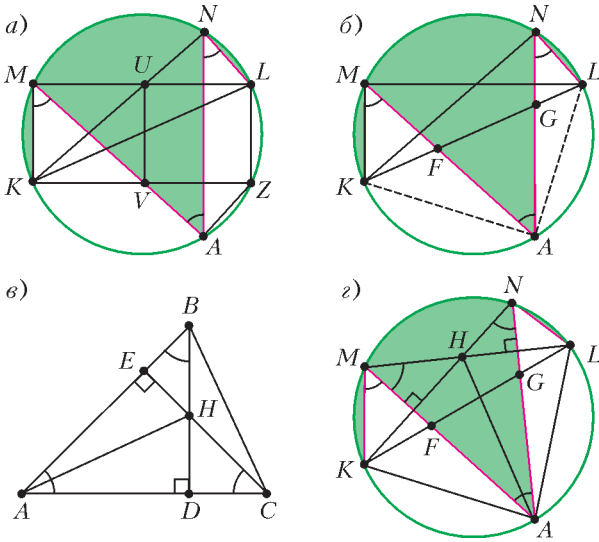


Рис. 7

Проведем также отрезок AZ, после чего утверждение задачи становится практически очевидным: для каждого «куска» закрашенной части найдется симметричный ему не закрашенный «кусочек». Действительно, равны сегменты, ограниченные хордами MK и LZ, NL и AZ, равны трапеции UVAN и LZAN, равны треугольники MUV и VKM, а также – криволинейные треугольники MUN и KVA.

*Второй способ.* Пусть KL пересекает AM и AN в точках F и G соответственно (см. рис. 7, б). Тогда утверждение задачи равносильно равенству  $S_{\Delta KMF} + S_{\Delta LNG} = S_{\Delta FAG}$ .

Так как KL – диаметр окружности, а дуги AK и AL равны, то треугольник KAL – прямоугольный и равнобедренный. Используя результат задачи 3, получим

$$FG^2 = KF^2 + LG^2.$$

Заметим также, что треугольники FMK и LNG подобны треугольнику FAG (по двум углам) с коэффициентами  $k_1 = \frac{KF}{FG}$  и  $k_2 = \frac{LG}{FG}$  соответственно. Тогда  $\frac{S_{\Delta KMF}}{S_{\Delta FAG}} = k_1^2 = \frac{KF^2}{FG^2}$  и  $\frac{S_{\Delta LNG}}{S_{\Delta FAG}} = k_2^2 = \frac{LG^2}{FG^2}$ . Складывая эти равенства почленно, получим

$$\frac{S_{\Delta KMF} + S_{\Delta LNG}}{S_{\Delta FAG}} = \frac{KF^2 + LG^2}{FG^2} = 1.$$

Равенство  $S_{\Delta KMF} + S_{\Delta LNG} = S_{\Delta FAG}$  можно доказать иначе, используя ту же идею «свертывания». Для этого потребуются вспомнить еще одну классическую задачу.

**Лемма.** Дан невыпуклый четырехугольник ABHC, в котором углы A, B и C равны по  $45^\circ$ . Докажите, что: а) отрезки AH и BC равны и перпендикулярны; б)  $S_{ABHC} = \frac{1}{2} AH^2$ .

**Доказательство.** а) Продлим отрезки BH и CH до пересечения с AC и AB в точках D и E соответственно (рис. 7, в). Тогда  $\angle ADB = \angle AEC = 90^\circ$ . Так как BD и CE – высоты треугольника ABC, то H – ортоцентр этого треугольника, значит,  $AH \perp BC$ . Кроме того, треугольники ABD и CHD – равнобедренные и прямоугольные, значит,  $AD = BD$  и  $HD = CD$ . Следовательно, прямоугольные треугольники AHD и BCD равны (по двум катетам), откуда  $AH = BC$ .

*Замечание.* Оба утверждения можно также получить, рассмотрев поворот с центром D на угол  $90^\circ$ . Заодно отметим, что доказанный факт можно эффективно использовать для решения упражнения 4, г.

б) AH и BC – диагонали невыпуклого четырехугольника. Так как площадь любого четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними, то

$$S_{ABHC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC \sin 90^\circ = \frac{1}{2} AH^2.$$

Теперь вернемся к решению задачи 5 и покажем, что и ее можно решить, используя «свертывание».

*Третий способ.* Прибавив к обеим частям доказываемого равенства площади треугольников AFK и AGL, получим, что оно равносильно равенству  $S_{\Delta KMA} + S_{\Delta LNA} = S_{\Delta KAL}$  (рис. 7, г). Пусть H – точка пересечения KN и ML. Так как KL – диаметр окружности, то угол KMH прямой. Тогда  $\angle HMA = \angle KMA = 45^\circ$ , и  $\angle MKH = \angle MAN = 45^\circ$ , поэтому  $AM \perp KH$ . Значит, при «свертывании» по прямой AM точка K совместится с точкой H. Аналогично, при «свертывании» по прямой AN точка L совместится с точкой H. Следовательно,  $S_{\Delta KMA} + S_{\Delta LNA} = S_{\Delta HMA} + S_{\Delta HNA} = S_{\Delta AMHN}$ .

В невыпуклом четырехугольнике AMHN три угла по  $45^\circ$ , значит,  $S_{AMHN} = \frac{1}{2} AH^2 = \frac{1}{2} AK \cdot AL = S_{\Delta KAL}$ , что и требовалось.

**Упражнение 5** (конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8», 1996). Докажите, что в условиях задачи 5 выполняется равенство  $KM^2 + AN^2 = AM^2 + LN^2$ .

А теперь – задача, в которой будет присутствовать квадрат, точки M и N из задач 1 и 2, точки F и G (P и Q) из задач 3 и 4. А еще окружность, описанная около треугольника AMN из задачи 2 и ломаная в этой окружности из задачи 5, хотя про них в условии ничего не сказано.

**Задача 6** (XII Турнир имени А.П.Савина, 2006). На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата ABCD взяты соответственно точки K, M, N и L так, что  $KMA = MAN = LNA = 45^\circ$ . Пусть KL пересекает AM и AN в точках F и G соответственно. Докажите, что  $S_{\Delta KMF} + S_{\Delta LNG} = S_{\Delta FAG}$ .

Покажем, что эта трудная задача нами уже практически решена, причем не одним способом. Для ее решения достаточно доказать равенство  $AK = AL$ , из которого будет следовать, что точки A, K, L, M и N лежат на одной окружности (см. упражнение 3).

Действительно, доказываемое равенство равносильно равенству площадей из задачи 5 (см. второй способ решения этой задачи).

**Решение.** *Первый способ.* Пусть окружность, описанная около треугольника AMN, пересекает стороны AB и AD квадрата в точках K' и L' соответственно (рис. 8, а). Так как  $\angle MAN = 45^\circ$ , то центр O этой окружности лежит на AC (см. задачу 2, а). Значит, точки K' и L' симметричны относительно AC, т.е.  $\angle K'LA = 45^\circ$ . Из равенства вписанных углов следует, что  $\angle K'MA = \angle K'L'A = 45^\circ$ , т.е. точка K' совпадает с точкой K из условия задачи. Аналогично доказывается совпадение точек L и L'.

*Второй способ.* При перегибании квадрата по прямым AM и AN точки K и L совместятся в точке H – ортоцентре

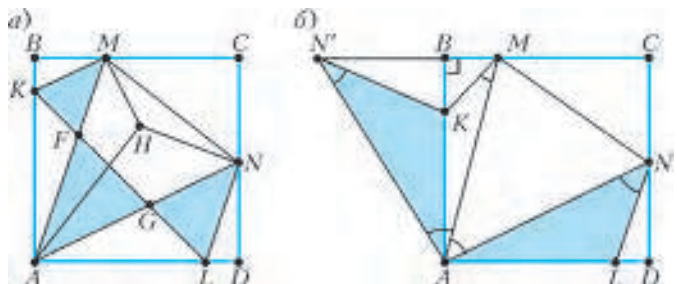


Рис. 8



треугольника  $MAN$  (см. рис.8,а). Это следует из того, что точки  $B$  и  $D$  совмещаются в основании  $E$  высоты  $AE$  этого треугольника (см. задачу 1), а  $\angle AMH = \angle ANH = 45^\circ$  (см. лемму). Значит,  $AK = AL$ , что и требовалось.

**Упражнение 6.** Докажите, что в условиях задачи 6 точки пересечения диагоналей трапеций  $AKMN$  и  $ALNM$  лежат на  $BD$ .

*Третий способ.* Расположив квадрат так, как показано на рисунке 8,б, рассмотрим поворот с центром  $A$  на угол  $90^\circ$  против часовой стрелки. Аналогично второму способу решения задачи 1 получим, что образом треугольника  $AND$  является треугольник  $AN'B$ .

Докажем, что при таком повороте образом точки  $L$  является точка  $K$ . Для этого достаточно доказать, что  $\angle AN'K = \angle ANL = 45^\circ$ . Так как  $\angle N'AM = \angle AMK = 45^\circ$ , то прямая  $MK$  содержит высоту треугольника  $AMN'$ . Поскольку  $AB$  – еще одна высота этого треугольника, то  $K$  – его ортоцентр. Значит, третья высота лежит на прямой  $N'K$  и  $\angle AN'K = 45^\circ$ . Таким образом,  $AK = AL$ , что и требовалось.

Возникает естественный вопрос: а как решать эту задачу, если не знать задачу 5? Оказывается, можно использовать все то же свертывание или поворот и получить четырехугольник из леммы!

Например, третий способ решения можно продолжить так (см. рис.8,б). Докажем равенство  $S_{AKMA} + S_{ALNA} = S_{AKAL}$ , равносильное требуемому. Заметим, что  $S_{AKMA} + S_{ALNA} = S_{AKMA} + S_{AKN'A} = S_{AMKN'}$ . Четырехугольник  $AMKN'$  –

это все тот же четырехугольник, три угла которого равны по  $45^\circ$ , поэтому его площадь равна  $\frac{1}{2}AK^2$ , что, в свою очередь, равно площади треугольника  $KAL$ .

Другие свойства этой замечательной конструкции и развитие некоторых рассмотренных методов можно получить при решении следующих задач (автором задач 7–9 также является В.В.Произволов, а автором задачи 10 – Д.В.Шведов).

**Задачи для самостоятельного решения**

**7** («Задачи на вырост»). На полосу наложим квадрат, сторона которого равна ширине полосы, причем его граница пересекает границы полосы в четырех точках. Докажите, что две прямые, проходящие крест-накрест через эти точки, пересекаются под углом  $45^\circ$ .

**8.** На сторонах  $BC$  и  $CD$  квадрата  $ABCD$  выбраны точки  $M$  и  $N$  соответственно так, что угол  $MAN$  равен  $45^\circ$ . Лучи  $AM$  и  $AN$  пересекают окружность, описанную около квадрата, в точках  $M_1$  и  $N_1$  соответственно. Докажите, что  $M_1N_1 \parallel MN$ .

**9** (IX Турнир имени А.П.Савина, 2003). В квадрате  $ABCD$  выбраны точки  $S$  и  $T$  внутри треугольников  $ABC$  и  $ADC$  соответственно так, что  $\angle SAT = \angle SCT = 45^\circ$ . Докажите, что  $BS \parallel DT$ .

**10** (XX Турнир имени А.П.Савина, 2014). Внеписанная окружность прямоугольного треугольника  $ABC$  касается продолжений его катетов  $CA$  и  $CB$  в точках  $A_1$  и  $B_1$  соответственно. Описанная окружность треугольника  $ABC$  пересекает  $A_1B_1$  в точках  $P$  и  $Q$ . Найдите угол  $PCQ$ .

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

# Об одной конструкции с касающимися окружностями

И.БОГДАНОВ

НЕДАВНО АВТОР СТАТЬИ ОБНАРУЖИЛ СЛЕДУЮЩЕЕ ЗАБЫТОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ, КОТОРОЕ МЫ СФОРМУЛИРУЕМ КАК ЗАДАЧУ (эта задача предлагалась участникам Первого турнира математических боев «Лига Победителей»).

**Задача 1.** Пусть  $H$  – точка пересечения высот остроугольного треугольника  $ABC$ . Пусть  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – окружности, описанные около треугольников  $AHB$  и  $AHC$  соответственно. Рассмотрим произвольную окружность  $\Gamma$ , проходящую через точки  $B, C$  и пересекающую отрезки  $BH$  и  $CH$  вторично в точках  $B'$  и  $C'$  соответственно. Пусть, наконец, окружность  $\gamma$  касается  $\omega_1$  и  $\omega_2$  внешним обра-

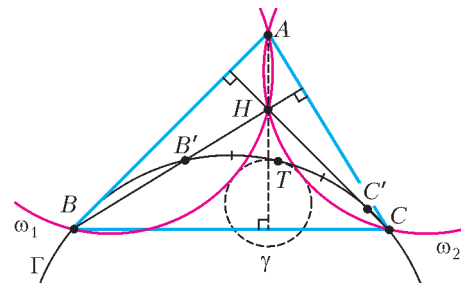


Рис. 1

зом, а также касается внутренним образом малой дуги  $BC$  окружности  $\Gamma$  в точке  $T$  (рис.1). Докажите, что точка  $T$  является серединой дуги  $B'C'$  окружности  $\Gamma$ .

Опытные любители геометрии знают, что задачи, в которых речь идет об окружностях, касающихся нескольких окружностей и прямых, бывают весьма трудны. Описание данной конструкции тоже не предвещает легкого пути. Тем не менее, достаточно короткое решение существует, и мы его сейчас приведем.

Заодно мы проиллюстрируем тезис, что некий факт порой труднее обнаружить, чем доказать. Именно, мы увидим, что условие задачи в некотором смысле диктует, что именно надо сделать для ее решения.

**Анализ и решение задачи 1.** Для начала хорошо бы немного разобраться в картинке, а для этого полезно вспомнить несколько общеизвестных фактов.

Как известно, окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  симметричны окружности  $\omega$ , описанной около треугольника  $ABC$ , относительно

прямых  $AB$  и  $AC$  соответственно.<sup>1</sup> Отметим центры  $O_1, O_2$  и  $O$  окружностей  $\omega_1, \omega_2$  и  $\omega$  соответственно (рис.2), а также обозначим их (равные) радиусы через  $R$ . Тогда

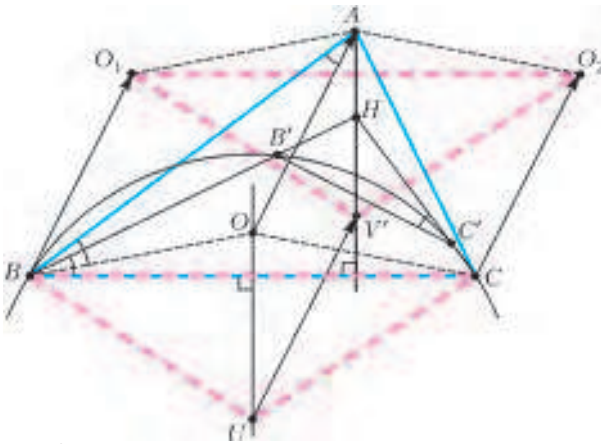


Рис. 2

четырёхугольники  $AO_1BO$  и  $AO_2CO$  – ромбы; в частности,  $\overline{BO_1} = \overline{OA} = \overline{CO_2}$ . Отсюда следует, что  $BO_1O_2C$  – параллелограмм, т.е. отрезки  $O_1O_2$  и  $BC$  параллельны и равны. Кроме того, поскольку окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  равны, они симметричны относительно их общей хорды  $AH$ . Из симметрии ясно, что окружность  $\gamma$  также симметрична относительно  $AH$ , т.е. её центр  $V$  лежит на  $AH$ .

Окружность  $\Gamma$  также связана с  $\omega$ : у этих двух окружностей есть общая хорда  $BC$ . Значит, если  $U$  – центр  $\Gamma$ , то  $UO$  – это серединный перпендикуляр к  $BC$ .

С дугой стороны, тот факт, что  $T$  – середина дуги  $B'C'$ , равносильно условию  $UT \perp B'C'$ , или  $UV \perp B'C'$  (так как  $T$  лежит на прямой  $UV$ ). Значит, полезно определить направление прямой  $B'C'$ . Это легко сделать: из вписанного четырёхугольника  $BCC'B'$  получаем

$$\angle HC'B' = \angle HBC = 90^\circ - \angle ACB.$$

Такой угол встречается на нашем рисунке и в другом месте! Именно, из равнобедренного треугольника  $OAB$  с углом  $2\angle ACB$  при вершине  $O$  мы немедленно получаем  $\angle BAO = (180^\circ - \angle AOB)/2 = 90^\circ - \angle ACB = \angle HC'B'$ . В двух равных углах  $HC'B'$  и  $BAO$  стороны  $HC'$  и  $BA$  перпендикулярны – значит, и  $AO \perp B'C'$ . Итого, нам надо доказать, что  $UV \parallel AO$ .

Но мы уже видели, что  $UO$  и  $AV$  перпендикулярны  $BC$ , т.е. параллельны друг другу. Итак, четырёхугольник  $UOAV$  должен быть параллелограммом (если, конечно, задача верна).<sup>2</sup> Заметим, что окружность  $\gamma$ , описанная в условии, единственна (кстати, почему?). Значит, достаточно показать, что точка  $V'$ , для которой  $UOAV'$  – параллелограмм, является центром такой окружности.

Обозначим радиус  $\Gamma$  через  $g$ . Мы хотим найти такое число  $\rho$ , что  $UV' = g - \rho$  и  $O_1V' = O_2V' = R + \rho$  (в этом случае окружность с центром  $V'$  и радиусом  $\rho$  будет искомой). Как мы уже знаем,  $\overline{UV'} = \overline{OA} = \overline{BO_1} = \overline{CO_2}$  (откуда, в частности,  $UV' = R$ , и мы должны положить  $\rho = g - UV' = g - R$ ). Из

равенства векторов следует, что треугольник  $O_1O_2V'$  получается из треугольника  $BCU$  параллельным переносом, поэтому  $O_1V' = O_2V' = BU = CU = g = R + \rho$ , что и требовалось. Задача решена!

### Упражнения

1. В решении мы неявно воспользовались тем, что  $\rho > 0$ , т.е.  $g > R$ . Докажите этот факт.
2. Если рассмотреть произвольную окружность  $\Gamma'$ , проходящую через  $B$  и  $C$  и пересекающую продолжения отрезков  $BH$  и  $CH$ , для нее будет верно аналогичное утверждение. Сформулируйте и докажите его.
3. Докажите, что кроме  $\gamma$  существует еще одна окружность с центром  $V$ , которая касается всех трех окружностей  $\omega_1, \omega_2$  и  $\Gamma$  внутренним образом. Каков радиус этой окружности?

Приведем теперь еще одну задачу (она, точнее подобная ей конфигурация, использовалось как лемма в решении задачи M2340 в этом номере журнала). Эта задача гораздо более известна – и обычно считается довольно сложной.

**Задача 2.** Пусть окружность  $\gamma$  лежит внутри окружности  $\Gamma$  и касается ее в точке  $T$ . Проведем две хорды  $PB$  и  $QC$  окружности  $\Gamma$ , касающиеся  $\gamma$ .

Пусть продолжения отрезков  $PB$  и  $QC$  за точки  $B$  и  $C$  пересекаются в точке  $A$  и пусть  $I$  – центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . Докажите, что  $TI$  – биссектриса угла  $BTC$  (рис.3).

Удивительно, но уже решенная нами задача 1 эквивалентна задаче 2. Чтобы свести вторую задачу к первой, достаточно выполнить инверсию<sup>3</sup> с центром  $I$ , переводящую окружность  $\Gamma$  в себя.

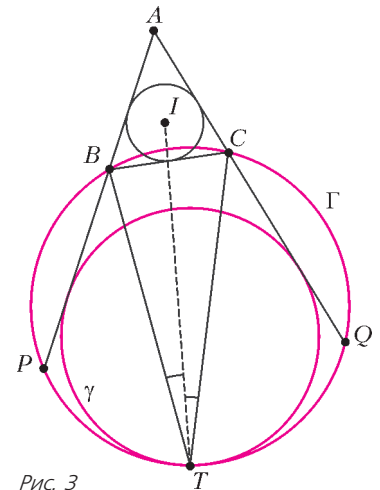


Рис. 3

### Упражнения

4. Убедитесь в этом. Указание. В условиях задачи 2 центр окружности, проходящей через точки  $A, B$  и  $I$ , лежит на прямой  $CI$ ; тем самым эта окружность ортогональна прямой  $CI$ .
5. Какой конфигурации соответствует утверждение из упражнения 2?

В заключение отметим, что решить задачу 1 легко удалось потому, что мы сумели идентифицировать центр «непонятной» окружности  $\gamma$ . Приведем еще одну задачу, в которой решение оказывается очень простым, если угадать центр искомой окружности (эта задача предлагалась на Польской олимпиаде в 2013 г.).

**Задача для самостоятельного решения.** Пусть  $ABCD$  – описанный четырёхугольник, у которого нет двух равных сторон. На его сторонах как на диаметрах построены четыре окружности. Докажите, что существует окружность, касающаяся всех этих четырех окружностей.<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Это легко доказать: поскольку  $\angle AHB = 180^\circ - \angle ACB$ , точка, симметричная  $H$  относительно  $AB$ , лежит на  $\omega$ . Значит, окружность  $\omega$  при симметрии относительно  $AB$  переходит в  $\omega_1$ .

<sup>2</sup> Это не совсем так, если точки  $U, O, A, V$  лежат на одной прямой, т.е. если треугольник  $ABC$  равнобедренный. Но, как мы увидим, наш четырёхугольник является (вырожденным) параллелограммом и в этом случае.

<sup>3</sup> Об инверсии и ее свойствах можно узнать, например, из статьи В.Уроева «Инверсия» в «Кванте» №5 за 1984 год.

<sup>4</sup> А на самом деле таких окружностей как минимум две!

# Электрические цепи с измерительными приборами

Б. МУКУШЕВ

ПРостейшая электрическая цепь состоит из источника (гальванического элемента, аккумулятора, генератора и т.п.), потребителей или приемников электрической энергии (ламп накаливания, электронагревательных приборов, электродвигателей и т.п.) и соединительных проводов, соединяющих источник с потребителями. Потребителями электрической энергии называют элементы цепи, предназначенные для преобразования электрической энергии в другой вид энергии для ее дальнейшего использования.

Кроме того, в электрической цепи может присутствовать и вспомогательное оборудование – механизмы для включения и выключения электрических установок (рубильники, переключатели и др.), электроизмерительные приборы (амперметры, вольтметры, ваттметры) и защитные устройства (предохранители, автоматические выключатели).

Из этих вспомогательных устройств особый интерес представляют электроизмерительные приборы. Обычно считается, что амперметры имеют ничтожно малое сопротивление, а вольтметры – бесконечно большое. Однако в некоторых случаях приходится учитывать сопротивления амперметра и вольтметра, для того чтобы яснее понимать процессы, происходящие в электрических цепях.

Рассмотрим теперь несколько конкретных задач на расчет электрических цепей постоянного тока, в которых помимо потребителей имеются также и электроизмерительные приборы.

Пусть вначале электрические цепи состоят только из источника тока и электроизмерительных приборов.

**Задача 1.** При разомкнутом ключе  $K$  (рис.1) вольтметр  $V_1$  показывает  $U_1 = 7,2$  В. Что покажут вольтметры  $V_1$  и  $V_2$  при замкнутом ключе? Вольтметры одинаковые. ЭДС источника тока  $\mathcal{E} = 9$  В, его внутреннее сопротивление неизвестно.

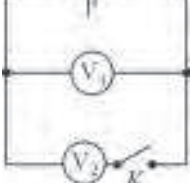


Рис. 1

а напряжение, которое показывает вольтметр  $V_1$ , равно

$$U_1 = I_0 r_B = \frac{\mathcal{E} r_B}{r + r_B}.$$

Отсюда получаем

$$r_B = 4r.$$

После замыкания ключа ток через источник равен

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + \frac{r_B}{2}} = \frac{2\mathcal{E}}{2r + r_B},$$

а ток через каждый вольтметр в два раза меньше тока, протекающего через источник. Напряжения на вольтметрах  $V_1$  и  $V_2$  одинаковы и равны

$$U_1 = U_2 = \frac{I}{2} r_B = \frac{\mathcal{E} r_B}{2r + r_B} \frac{4\mathcal{E} r}{6r} = \frac{2}{3} \mathcal{E} = 6 \text{ В}.$$

**Задача 2.** Батарейка имеет напряжение  $U = 10$  В. В схеме (рис.2) использованы одинаковые вольтметры. Найдите их показания. Внутреннее сопротивление батарейки считайте ничтожно малым.

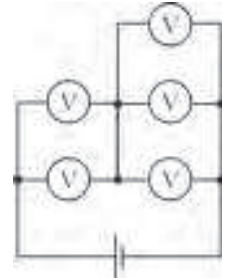


Рис. 2

**Решение.** Ток батарейки протекает через параллельно соединенные два вольтметра, разделившись пополам между ними, а затем через тройку вольтметров, через каждый из которых течет одна треть общего тока. Известно, что значение тока, протекающего через вольтметр, прямо пропорционально напряжению, которое показывает вольтметр. Таким образом, мы можем записать следующие уравнения:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{I/3}{I/2} = \frac{2}{3},$$

$$U_1 + U_2 = U.$$

Решая эти уравнения, найдем

$$U_1 = \frac{3}{5} U = 6 \text{ В}, \quad U_2 = U - U_1 = \frac{2}{5} U = 4 \text{ В}.$$

Идею этой задачи можно использовать на практике. Например, у вас есть только школьные вольтметры на 6 В, а нужно измерить напряжение батарейки «Крона», про которую известно, что ее напряжение больше 6 В, но меньше 10 В. В таком случае два вольтметра соединяют последовательно и подключают к батарейке.

**Задача 3.** Батарейка имеет напряжение  $U = 6$  В. В схеме (рис.3) включены 6 одинаковых вольтметров. Найдите их показания.

**Решение.** Обозначим сопротивление каждого вольтметра через  $R$ . Задачу можно оптимально решить с помощью метода узловых потенциалов. Будем считать нулевым потенциал точки, присоединенный к «минусу» батарейки, тогда потенциал «плюса» батарейки составит  $U$ . Обозначим потенциал верхнего узла, к которому присоединен «вертикальный» вольтметр, через  $\varphi_1$ , а соответствующего нижнего узла – через  $\varphi_2$ . Напишем для этих узлов следующие уравнения:

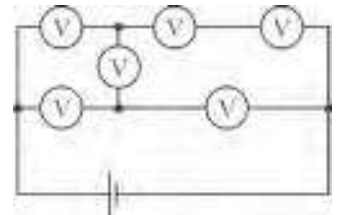


Рис. 3

$$\frac{U - \varphi_1}{R} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} + \frac{\varphi_1}{2R}, \quad \frac{U - \varphi_2}{R} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{\varphi_2}{R},$$

откуда находим

$$\varphi_1 = \frac{8}{13} U = \frac{48}{13} \text{ В}, \quad \varphi_2 = \frac{7}{13} U = \frac{42}{13} \text{ В}.$$

Тогда показания вольтметров (слева сверху, по часовой



стрелке) будут такими:

$$U_1 = \frac{30}{13} \text{ В}, U_2 = \frac{24}{13} \text{ В}, U_3 = \frac{24}{13} \text{ В},$$

$$U_4 = \frac{42}{13} \text{ В}, U_5 = \frac{36}{13} \text{ В},$$

а шестой вольтметр-перемычка покажет

$$U_6 = \frac{6}{13} \text{ В}.$$

**Задача 4.** На сколько процентов изменится сумма показаний всех вольтметров в цепи (рис.4), если перевести переключатель из нижнего положения 1 в верхнее положение 2? Все вольтметры одинаковые. Внутреннее сопротивление источника равно сопротивлению  $R$  каждого вольтметра.

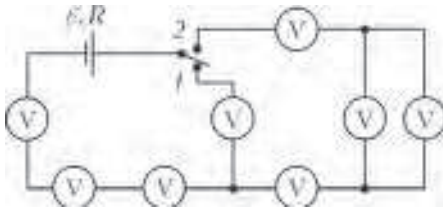


Рис. 4

переключатель из нижнего положения 1 в верхнее положение 2? Все вольтметры одинаковые. Внутреннее сопротивление источника равно сопротивлению  $R$  каждого вольтметра.

**Решение.** Запишем выражение для ЭДС источника, когда переключатель находится в положении 1:

$$\varepsilon = I_1 R + 4I_1 R = 5I_1 R.$$

Сумма показаний всех вольтметров равна

$$U_1 = 4I_1 R.$$

Когда переключатель перевели в верхнее положение 2, то

$$\varepsilon = I_2 R + 5I_2 R + I_2 \frac{R}{2} = \frac{13}{2} I_2 R,$$

а сумма показаний всех вольтметров составляет

$$U_2 = 6I_2 R,$$

поскольку сумма показаний вольтметров разветвленной части цепи равна  $I_2 R$ . Приравнявая выражения для ЭДС источника в обоих случаях, получим

$$5I_1 R = \frac{13}{2} I_2 R, \text{ или } I_2 = \frac{10}{13} I_1.$$

Это соотношение подставим в выражение, представляющее сумму показаний всех вольтметров во втором случае, и найдем отношение суммарных показаний в обоих случаях:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{6I_2 R}{4I_1 R} = \frac{15}{13} \approx 1,15.$$

Таким образом, сумма показаний всех вольтметров в цепи увеличится на 15%, если перевести переключатель из нижнего положения 1 в верхнее положение 2.

**Задача 5.** В электрической цепи, изображенной на рисунке 5, амперметры одинаковые, а вольтметры различные. Первый амперметр показывает ток  $I_1 = 1 \text{ А}$ , второй амперметр показывает ток  $I_2 = 1,3 \text{ А}$ , а первый вольтметр показывает напряжение  $U_1 = 2 \text{ В}$ . Что показывает второй вольтметр?

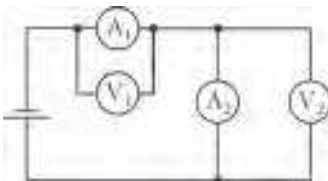


Рис. 5

**Решение.** Через амперметр  $A_1$  течет ток  $I_1$ , а напряжение на нем, которое показывает вольтметр  $V_1$ , есть  $U_1$ . Из этих данных находим

сопротивление амперметра:

$$R_A = \frac{U_1}{I_1} = 2 \text{ Ом}.$$

Через амперметр  $A_2$  течет ток  $I_2$ , а напряжение на нем равно

$$U_2 = I_2 R_A = 1,3 \text{ А} \cdot 2 \text{ Ом} = 2,6 \text{ В}.$$

Именно это значение и показывает второй вольтметр.

**Задача 6.** Четыре одинаковых амперметра и вольтметр включены так, как показано на рисунке 6,а. Амперметр  $A_1$

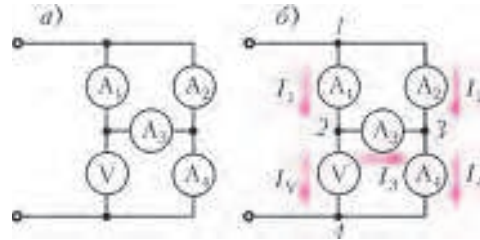


Рис. 6

показывает ток  $I_1 = 2 \text{ А}$ , амперметр  $A_2$  показывает ток  $I_2 = 3 \text{ А}$ . Какие токи протекают через амперметры  $A_3$ ,  $A_4$  и вольтметр? Найдите отношение сопротивления амперметра к сопротивлению вольтметра.

**Решение.** Обозначим сопротивление амперметра через  $r$ , а вольтметра – через  $R$ . Решим задачу с помощью метода узловых потенциалов. Для этого перерисуем схему так, как изображено на рисунке 6,б. Считаем, что цепь подключена к источнику постоянного тока с напряжением  $U$  так, что  $\varphi_1 = U$  и  $\varphi_4 = 0$ , и для интересующих нас токов получаем

$$I_1 = 2 \text{ А} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r}, \quad I_2 = 3 \text{ А} = \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{r},$$

$$I_3 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{r} = \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{r} - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r} = I_2 - I_1 = 1 \text{ А},$$

$$I_4 = I_2 + I_3 = 4 \text{ А}, \quad I_V = I_1 - I_3 = 1 \text{ А}.$$

Из равенства

$$I_1 r + I_V R = I_2 r + I_4 r$$

находим

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{5}.$$

**Задача 7.** В схему (рис.7) включены два одинаковых микроамперметра и два одинаковых вольтметра. Показания микроамперметров  $I_1 = 100 \text{ мкА}$  и  $I_2 = 99 \text{ мкА}$ , показание первого вольтметра  $U_1 = 10 \text{ В}$ . Найдите показание второго вольтметра, сопротивления измерительных приборов и ЭДС источника тока, не имеющего внутреннего сопротивления.

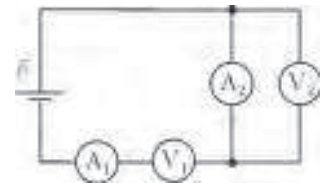


Рис. 7

**Решение.** Через вольтметр  $V_1$  течет ток  $I_1$ , через вольтметр  $V_2$  течет ток  $I_1 - I_2$ . Так как вольтметры одинаковые, их показания пропорциональны протекающим через них токам:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_1 - I_2}.$$

Отсюда находим

$$U_2 = U_1 \frac{I_1 - I_2}{I_1} = 0,1 \text{ В}.$$

Сопротивление вольтметра равно

$$r_V = \frac{U_1}{I_1} = 10^5 \text{ Ом} = 100 \text{ кОм},$$

сопротивление микроамперметра –

$$r_A = \frac{U_2}{I_2} \approx 10^3 \text{ Ом} = 1 \text{ кОм},$$

ЭДС источника –

$$\mathcal{E} = I_1 r_A + U_1 + U_2 \approx 10,2 \text{ В}.$$

**Задача 8.** Схема, приведенная на рисунке 8, содержит 50 разных амперметров и 50 одинаковых вольтметров. Показание первого вольтметра  $U_1 = 9,6 \text{ В}$ , первого амперметра –  $I_1 = 9,5 \text{ мА}$ , второго амперметра –  $I_2 = 9,2 \text{ мА}$ . Определите по этим данным сумму показаний всех вольтметров.

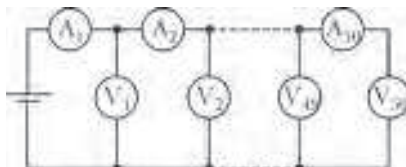


Рис. 8

**Решение.** Ток, текущий через амперметр  $A_1$ , равен сумме токов, текущих через вольтметр  $V_1$  и амперметр  $A_2$ :

$$I_1 = I_{V_1} + I_2.$$

Следовательно, ток, текущий через вольтметр  $V_1$ , равен

$$I_{V_1} = I_1 - I_2 = 0,3 \text{ мА},$$

и сопротивление вольтметра равно

$$R = \frac{U_1}{I_{V_1}} = \frac{9,6}{0,3 \cdot 10^{-3}} \text{ Ом} = 32 \text{ кОм}.$$

По условию задачи все вольтметры одинаковые, т.е. сопротивление каждого из них 32 кОм. Запишем сумму напряжений, показываемых всеми вольтметрами:

$$U = \sum_{i=1}^{50} U_{V_i} = \sum_{i=1}^{50} I_{V_i} R = R \sum_{i=1}^{50} I_{V_i}.$$

Но сумма всех токов, текущих через вольтметры, это ток, текущий через амперметр  $A_1$ , поэтому

$$U = R I_1 = 304 \text{ В}.$$

Путь теперь электрические цепи состоят из источника тока, электроизмерительных приборов и потребителей электрической энергии.

**Задача 9.** В схеме на рисунке 9 все вольтметры одинаковые, ЭДС батареи  $\mathcal{E} = 5 \text{ В}$ , ее внутреннее сопротивление мало. Верхний вольтметр показывает  $U_1 = 2 \text{ В}$ . Что показывают остальные вольтметры?

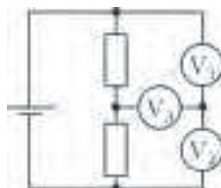


Рис. 9

**Решение.** Сумма показаний  $U_1$  верхнего и  $U_2$  нижнего вольтметров равна напряжению батареи, поэтому нижний вольтметр покажет.

$$U_2 = \mathcal{E} - U_1 = 3 \text{ В}.$$

Поскольку вольтметры одинаковые, они имеют одинаковые сопротивления. Запишем первое правило Кирхгофа для правого узла:

$$I_2 = I_1 + I_3,$$

где  $I_2$  – ток в нижнем вольтметре,  $I_1$  – ток в верхнем вольтметре,  $I_3$  – ток в среднем вольтметре. Перепишем полученное выражение в виде

$$\frac{U_2}{R} = \frac{U_1}{R} + \frac{U_3}{R},$$

где  $R$  – сопротивление каждого вольтметра. Отсюда находим

$$U_3 = U_2 - U_1 = 1 \text{ В}.$$

**Задача 10.** В приведенной на рисунке 10 схеме и вольтметры и миллиамперметры одинаковые. Показания вольтметров  $U_1 = 3 \text{ В}$  и  $U_2 = 5 \text{ В}$ , показания миллиамперметров  $I_1 = 5 \text{ мА}$  и  $I_2 = 1 \text{ мА}$ . Напряжение батареи  $U_0 = 9 \text{ В}$ , и она идеальная. Найдите по этим данным сопротивления резисторов и измерительных приборов.

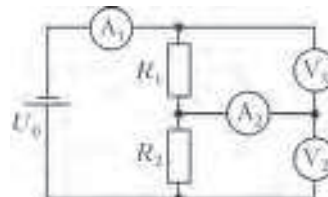


Рис. 10

**Решение.** Очевидно, что

$$U_0 = I_1 r_A + U_1 + U_2,$$

откуда находим

$$r_A = \frac{U_0 - U_1 - U_2}{I_1} = 200 \text{ Ом}.$$

Напряжение на втором миллиамперметре равно

$$U_{A_2} = I_2 r_A = 0,2 \text{ В}.$$

Поскольку вольтметры одинаковые, значения токов, проходящих по этим вольтметрам, прямо пропорциональны напряжениям вольтметров. Запишем первое правило Кирхгофа для узла C (рис.11):

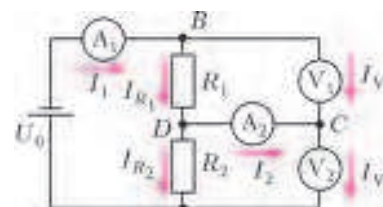


Рис. 11

$$I_{V_2} = I_2 + I_{V_1}, \text{ или } \frac{U_2}{r_V} = I_2 + \frac{U_1}{r_V}.$$

Отсюда получаем

$$r_V = \frac{U_2 - U_1}{I_2} = 2 \text{ кОм},$$

$$I_{V_2} = \frac{U_2}{r_V} = 2,5 \text{ мА},$$

$$I_{V_1} = \frac{U_1}{r_V} = 1,5 \text{ мА},$$

$$I_{R_1} = I_1 - I_{V_1} = 3,5 \text{ мА},$$

$$I_{R_2} = I_{R_1} - I_2 = 2,5 \text{ мА}.$$

Далее, для участка цепи B–C–D запишем второе правило Кирхгофа:

$$U_1 - I_2 r_A - I_{R_1} R_1 = 0,$$

откуда находим

$$R_1 = \frac{U_1 - I_2 r_A}{I_{R_1}} = 0,8 \text{ кОм}.$$

Теперь, поскольку

$$U_1 + U_2 = I_{R_1} R_1 + I_{R_2} R_2,$$

получаем

$$R_2 = \frac{U_1 + U_2 - I_{R_1} R_1}{I_{R_2}} = 2,08 \text{ кОм}.$$

**Задача 11.** Одни и те же приборы при соединении их по трем разным схемам (рис. 12) дают показания  $U_1, I_1; U_2, I_2; U_3, I_3$  соответственно. Найдите сопротивления вольтметра, резистора и амперметра. Напряжение, подаваемое на цепь, не обязательно одно и то же.

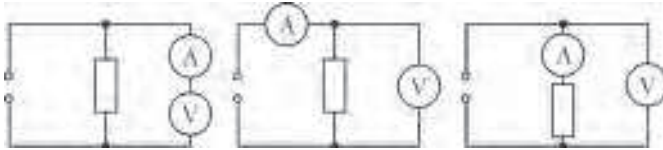


Рис. 12

**Решение.** Из данных для первой схемы найдем сопротивление вольтметра:

$$R_V = \frac{U_1}{I_1}.$$

Для второй схемы можно записать

$$I_2 = I_R + I_V, \text{ или } I_R = I_2 - I_V = I_2 - \frac{U_2}{R_V}.$$

Отсюда находим

$$R = \frac{U_2}{I_R} = \frac{U_2}{I_2 - \frac{U_2}{R_V}} = \frac{U_2}{I_2 - I_1 \frac{U_2}{U_1}} = \frac{U_2 U_1}{I_2 U_1 - I_1 U_2}.$$

В третьем случае

$$U_3 = I_3 (R_A + R),$$

откуда получаем

$$R_A = \frac{U_3}{I_3} - R = \frac{U_3}{I_3} - \frac{U_2 U_1}{I_2 U_1 - I_1 U_2} = \frac{U_1 U_3 I_2 - U_3 U_2 I_1 - U_2 U_1 I_3}{I_3 (U_1 I_2 - U_2 I_1)}.$$

Теперь обсудим вопросы шунтирования амперметра и подключения добавочного сопротивления к вольтметру, необходимые для расширения пределов измерения приборов.

**Задача 12.** Многопредельный амперметр представляет собой миллиамперметр с набором сменных шунтов. На пределе «1 мА» прибор показал 1 мА; когда его переключили на предел «3 мА», он показал 1,5 мА. Тем не менее, прибор исправный – он точно показывает величину протекающего через него тока. Каков истинный ток в цепи (без амперметра)?

**Решение.** На рисунке 13 представлена электрическая схема, где через  $I$  обозначен ток, протекающий через миллиамперметр, а через  $I_{06}$  – ток в электрической цепи с некоторым сопротивлением  $R$ . Сопротивление миллиамперметра обозначим через  $R_A$ . В первом случае

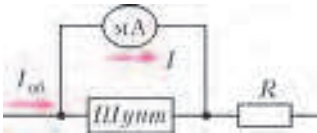


Рис. 13

$$I = I_A, \quad I_{06} = I_1,$$

где  $I_A$  – величина тока, при которой стрелка амперметра отклоняется полностью. Общее напряжение в цепи равно

$$U = I_A R_A + I_1 R, \text{ где } I_1 = 1 \text{ мА}.$$

Во втором случае

$$I = \frac{1}{2} I_A, \quad I_{06} = I_2, \quad U = \frac{I_A}{2} R_A + I_2 R, \text{ где } I_2 = \frac{3}{2} I_1 = 1,5 \text{ мА}.$$

В третьем случае

$$U = IR,$$

где  $I$  – значение истинного тока. Приравниваем выражения для напряжения в цепи в первых двух случаях и получаем

$$I_A R_A + I_1 R = \frac{I_A}{2} R_A + I_2 R, \text{ или } I_A R_A = I_1 R, \text{ или } U = 2 I_1 R.$$

Тогда из выражения для напряжения в цепи в третьем случае находим

$$I = \frac{U}{R} = \frac{2 I_1 R}{R} = 2 I_1 = 2 \text{ мА}.$$

**Задача 13.** Присоединение к вольтметру некоторого добавочного сопротивления увеличивает предел измерения напряжения в  $n$  раз. Другое добавочное сопротивление увеличивает предел измерения в  $m$  раз. Во сколько раз увеличится предельно измеримое вольтметром напряжение, если включить последовательно с вольтметром эти два добавочных сопротивления, соединенных между собой параллельно?

**Решение.** Пусть  $r$  – сопротивление вольтметра,  $U$  – максимальное напряжение на вольтметре,  $I$  – ток, текущий через вольтметр при этом напряжении. При использовании добавочных сопротивлений максимальный ток должен быть прежним. Для трех случаев имеем

$$I(R_1 + r) = nU, \quad I(R_2 + r) = mU, \quad I\left(\frac{R_2 R_1}{R_2 + R_1} + r\right) = kU,$$

где  $R_1$  и  $R_2$  – добавочные сопротивления,  $k$  – искомая величина. Учитывая, что  $Ir = U$ , эти уравнения можно преобразовать в виду

$$R_1 + r = nr, \quad R_2 + r = mr, \quad \frac{R_2 R_1}{R_2 + R_1} + r = kr.$$

Отсюда получаем

$$k = \frac{mn - 1}{m + n - 2}.$$

**Упражнения**

**1.** При подключении к неизвестному источнику вольтметра, рассчитанного на измерение напряжений до 10 В, вольтметр зашкаливает. Если одновременно подключить два таких вольтметра, один раз параллельно и другой раз последовательно, то они в обоих случаях покажут одинаковые значения 8 В. Определите ЭДС неизвестного источника.

**2.** К идеальной батарейке подключены последовательно соединенные вольтметр и амперметр. Вольтметр показывает 6 В, амперметр – 1 мА. Параллельно амперметру подключают еще один такой же амперметр, после этого показание первого амперметра уменьшается до 0,51 мА. Считая показания приборов точными, найдите по этим данным сопротивления приборов.

**3.** К идеальной батарейке подключили последовательно соединенные вольтметр и амперметр. Вольтметр показывает 6 В, амперметр – 1 мА. Параллельно вольтметру подключают еще один такой же вольтметр, после этого показание амперметра возрастает до 1,8 мА. Найдите по этим данным сопротивления приборов.

**4.** При замкнутом ключе  $K$  вольтметр  $V_1$  показывает  $0,8\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – ЭДС батареи (рис.14). Что покажут вольтметры  $V_1$  и  $V_2$  при разомкнутом ключе, если их сопротивления равны?

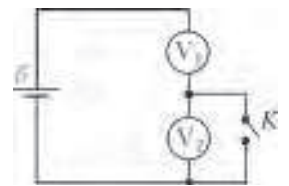


Рис. 14

**5.** Многопредельный амперметр высокой точности содержит для каждого предела измерений отдельный шунт. Амперметр включают в цепь на пределе «10 мА», и он показывает 2,95 мА; когда его переключили на предел «3 мА», он показал 2,90 мА. Какова была сила тока в цепи до подключения амперметра?

**6.** К гальванометру сопротивлением 290 Ом присоединили шунт, понижающий чувствительность гальванометра в 10 раз. Какой резистор надо включить последовательно с шунтированным гальванометром, чтобы общее сопротивление осталось неизменным?



## XXXV Турнир городов

## ЗАДАЧИ ВЕСЕННЕГО ТУРА

Базовый вариант

8–9 классы

1 (3)<sup>1</sup>. Даны 100 чисел. Когда каждое из них увеличили на 1, сумма их квадратов не изменилась. Каждое число еще раз увеличили на 1. Изменится ли сумма квадратов на этот раз, и если да, то на сколько?

А. Шаповалов

2 (4). Мама испекла одинаковые с виду пирожки: 7 с капустой, 7 с мясом и один с вишней, и выложила их по кругу на круглое блюдо именно в таком порядке. Потом поставила блюдо в микроволновку подогреть. Оля знает, как лежали пирожки, но не знает, как повернулось блюдо. Она хочет съесть пирожок с вишней, а остальные считает невкусными. Как Оле наверняка добиться этого, надкусив не больше трех невкусных пирожков?

А. Хачатурян

3 (4). См. задачу M2350 «Задачника «Кванта».

4 (5). На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  выбрана точка  $L$  так, что  $AL$  в два раза больше медианы  $CM$ . Оказалось, что угол  $ALC$  равен  $45^\circ$ . Докажите, что  $AL$  и  $CM$  перпендикулярны.

Р. Женодаров

5 (6). На переправу через пролив Босфор выстроилась очередь: первый – Али-Баба, за ним 40 разбойников. Лодка одна, в ней могут плыть двое или трое (в одиночку плыть нельзя). Среди плывущих в лодке не должно быть людей, которые не дружат между собой. Смогут ли все они переправиться, если каждые двое рядом стоящие в очереди – друзья, а Али-Баба еще дружит с разбойником, стоящим через одного от него?

А. Шаповалов

10–11 классы

1 (4). У Чебурашки есть набор из 36 камней массаи 1 г, 2 г, ..., 36 г, а у Шапокляк есть суперклей, одной каплей которого можно склеить два камня в один (соответственно, можно склеить 3 камня двумя каплями и так далее). Шапокляк хочет склеить камни так, чтобы Чебурашка не смог из получившегося набора выбрать один или несколько камней общей массой 37 г. Какого наименьшего количества капель клея ей хватит, чтобы осуществить задуманное?

Е. Бакаев

2 (4). В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  диагонали перпендикулярны. На сторонах  $AD$  и  $CD$  отмечены соответственно точки  $M$  и  $N$  так, что углы  $ABN$  и  $CBM$  прямые. Докажите, что прямые  $AC$  и  $MN$  параллельны.

А. Полянский

3 (5). См. задачу 5 для 8 – 9 классов.

4 (5). Натуральные числа  $a, b, c, d$  попарно взаимно просты и удовлетворяют равенству  $ab + cd = ac - 10bd$ . Докажите, что среди них найдутся три числа, одно из которых равно сумме двух других.

Б. Френкин

5 (5). Дан выпуклый четырехугольник  $ABCD$ . Пешеход Петя выходит из вершины  $A$ , идет по стороне  $AB$  и далее по контуру четырехугольника. Пешеход Вася выходит из вершины  $A$  одновременно с Петей, идет по диагонали  $AC$  и одновременно с Петей приходит в  $C$ . Пешеход Толя выходит из вершины  $B$  в тот момент, когда ее проходит Петя, идет по диагонали  $BD$  и одновременно с Петей приходит в  $D$ . Скорости пешеходов постоянны. Могли ли Вася и Толя прийти в точку пересечения диагоналей  $O$  одновременно?

Б. Френкин

Сложный вариант

8–9 классы

1 (3). Дед Мороз раздал детям 47 шоколадок так, что каждая девочка получила на одну шоколадку больше, чем каждый мальчик. Затем дед Мороз раздал тем же детям 74 мармеладки так, что каждый мальчик получил на одну мармеладку больше, чем каждая девочка. Сколько всего было детей?

Е. Бакаев

2 (5). На клетчатой доске  $5 \times 5$  Петя отмечает несколько клеток. Вася выиграет, если сможет накрыть все эти клетки неперекрывающимися и не выходящими за границу квадрата уголками из трех клеток (уголки разрешается класть только «по клеточкам»). Какое наименьшее число клеток должен отметить Петя, чтобы Вася не смог выиграть?

А. Шаповалов

3 (6). На квадратном столе лежит квадратная скатерть так, что ни один угол стола не закрыт, но с каждой стороны стола свисает треугольный кусок скатерти. Известно, что какие-то два соседних куска равны. Докажите, что и два других куска тоже равны. (Скатерть нигде не накладывается сама на себя, ее размеры могут отличаться от размеров стола.)

Е. Бакаев

4 (7). Царь вызвал двух мудрецов. Он дал первому 100 пустых карточек и приказал написать на каждой по натуральному числу (числа не обязательно разные), не показывая их второму. Затем первый может сообщить второму несколько различных чисел, каждое из которых либо записано на какой-то карточке, либо равно сумме чисел на каких-то карточках (не уточняя, как именно каждое число получено). Второй должен определить, какие 100 чисел написаны на карточках. Если он этого не сможет, обоим отрубят головы; в противном случае из бороды каждого вырвут столько волосков, сколько чисел сообщил первый второму. Как мудрецам, не стовариваясь, остаться в живых и потерять минимальное количество волосков?

И. Богданов

<sup>1</sup> В скобках после номера задачи указано максимальное число баллов, присуждавшихся за ее решение. Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.

5 (7). Даны несколько белых и несколько черных точек. От каждой белой точки идет стрелка в каждую черную, на

каждой стрелке написано натуральное число. Известно, что если пройти по любому замкнутому маршруту из стрелок, то произведение чисел на стрелках, идущих по направлению движения, равно произведению чисел на стрелках, идущих против направления движения. Обязательно ли тогда можно поставить в каждой точке натуральное число так, чтобы число на каждой стрелке равнялось произведению чисел на ее концах?

*А. Пахарев*

**6 (9).** Из кубиков  $1 \times 1 \times 1$  склеен куб  $3 \times 3 \times 3$ . Какое наибольшее количество кубиков можно из него выкинуть, чтобы осталась фигура с такими двумя свойствами:

- со стороны любой грани исходного куба фигура выглядит как квадрат  $3 \times 3$  (глядя перпендикулярно этой грани, мы не увидим просвета – видны 9 кубиков фигуры);
- переходя в фигуре от кубика к кубика через их общую грань, можно от любого кубика добраться до любого другого?

*А. Марачев*

**7 (9).** На окружности отмечены 10 точек, занумерованные по часовой стрелке:  $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ , причем известно, что их можно разбить на пары симметричных относительно центра окружности. Изначально в каждой отмеченной точке сидит по кузнечику. Каждую минуту один из кузнечиков прыгает *вдоль окружности* через своего соседа так, чтобы расстояние между ними не изменилось. При этом нельзя пролетать над другими кузнечиками и попадать в точку, где уже сидит кузнечик. Через некоторое время оказалось, что какие-то 9 кузнечиков сидят в точках  $A_1, A_2, \dots, A_9$ , а десятый кузнечик сидит на дуге  $A_9A_{10}A_1$ . Можно ли утверждать, что он сидит именно в точке  $A_{10}$ ?

*Е. Бакаев*

#### 10 – 11 классы

**1 (3).** Незнайка хвастается, что написал в ряд несколько единиц, поставил между каждыми соседними единицами знак «+» или знак « $\times$ », расставил скобки и получил выражение, значение которого равно 2014; более того, если в этом выражении заменить одновременно все знаки «+» на знаки « $\times$ », а знаки « $\times$ » на знаки «+», все равно получится 2014. Может ли он быть прав?

*В. Клепцын*

**2.** Верно ли, что любой выпуклый многоугольник можно по прямой разрезать на два меньших многоугольника с равными периметрами и

- (4) равными наибольшими сторонами;
- (4) равными наименьшими сторонами?

*А. Шаповалов*

**3 (6).** Царь вызвал двух мудрецов. Он дал первому 100 пустых карточек и приказал написать на каждой по положительному числу (числа не обязательно разные), не показывая их второму. Затем первый может сообщить второму несколько различных чисел, каждое из которых либо записано на какой-то карточке, либо равно сумме чисел на каких-то карточках (не уточняя, как именно каждое число получено). Второй должен определить, какие 100 чисел написаны на карточках. Если он этого не сможет, обоим отрубят головы; в противном случае из бороды каждого вырвут столько волосков, сколько чисел сообщил первый второму. Как мудрецам, не сговариваясь, остаться в живых и потерять минимальное количество волосков?

*И. Богданов*

**4 (7).** См. задачу M2351 «Задачника «Кванта».

**5 (8).** См. задачу M2354 «Задачника «Кванта».

**6 (9).** Каждому городу в некоторой стране присвоен индивидуальный номер. Имеется список, в котором для каждой пары номеров указано, соединены города с данными номерами железной дорогой или нет. Оказалось, что, какие ни взять два номера  $M$  и  $N$  из списка, можно так перенумеровать города, что город с номером  $M$  получит номер  $N$ , но список по-прежнему будет верным. Верно ли, что, какие ни взять два номера  $M$  и  $N$  из списка, можно так перенумеровать города, что город с номером  $M$  получит номер  $N$ , город с номером  $N$  получит номер  $M$ , но список по-прежнему будет верным?

*А. Пахарев, М. Скопенков, А. Устинов*

**7 (10).** Многочлен  $P(x)$  удовлетворяет условиям:  $P(0) = 1$ ;  $(P(x))^2 = 1 + x + x^{100}Q(x)$ , где  $Q(x)$  – некий многочлен. Докажите, что коэффициент при  $x^{99}$  в многочлене  $(P(x) + 1)^{100}$  равен нулю.

*Д. Звонкин*

### УСТНЫЙ ТУР ДЛЯ 11 КЛАССА

**1.** В множестве  $\{1, 2, 3, \dots, 2014\}$  выбрали подмножество  $A$ . Оказалось, что никакой квадратный трехчлен, все три коэффициента которого принадлежат  $A$ , не имеет действительных корней. Какое наибольшее число элементов могло быть в  $A$ ?

*Г. Жуков*

**2.** Дан треугольник  $ABC$ . Луч, проведенный из вершины  $B$  через середину  $AC$ , пересекает внешнюю биссектрису угла  $A$  в точке  $P$ . Прямая  $PC$  пересекает прямую, содержащую внутреннюю биссектрису угла  $A$ , в точке  $Q$ . Докажите, что  $BA = BQ$ .

*Ф. Ивлев*

**3.** См. задачу M2349 «Задачника «Кванта».

**4.** В равногранном тетраэдре  $ABCD$  точки  $A', B', C', D'$  – центры вневписанных сфер. Докажите, что  $A, B, C, D$  – центры вневписанных сфер тетраэдра  $A'B'C'D'$ . (Тетраэдр называется *равногранным*, если его грани – равные треугольники. Вневписанная сфера – это сфера, которая касается одной из граней и продолжений остальных граней.)

*А. Заславский*

**5.** В белом клетчатом прямоугольнике, стороны которого больше 10, в черный цвет покрасили  $K$  клеток. Далее за ход выбирают ряд (горизонтальный или вертикальный), в котором черных клеток хотя бы 10, и красят в черный цвет все белые клетки этого ряда. После нескольких таких ходов все клетки стали черными. Докажите, что  $K \geq 100$ .

*П. Кожевников*

**6.** Докажите, что не существует многочлена от двух переменных  $P(x, y)$ , для которого множеством решений неравенства  $P(x, y) > 0$  является квадрант  $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ .

*Л. Стунжас*

*Публикацию подготовили  
С. Дориченко, Л. Медников, А. Семёнов*

# Избранные задачи LXXVII Московской математической олимпиады

**1** (6 класс)<sup>1</sup>. Из шести костяшек домино (рис.1) сложите прямоугольник  $3 \times 4$  так, чтобы во всех трех строчках точек было поровну и во всех четырех столбцах точек было тоже поровну.

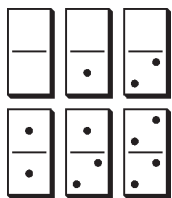


Рис. 1

*Н.Стрелкова*

**2** (7 класс). Замените в слове МАТЕМАТИКА буквы цифрами и знаками сложения и вычитания так, чтобы получилось числовое выражение, равное 2014. (Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры или знаки, разными – разные. Достаточно привести пример.)

*А.Хачатурян*

**3** (7 класс). Незнайка рисует замкнутые пути внутри прямоугольника  $5 \times 8$ , идущие по диагоналям прямоугольников  $1 \times 2$ . На рисунке 2 изображен пример пути, проходящего по 12 таким диагоналям. Помогите Незнайке нарисовать путь как можно длиннее. Пересекать уже проведенные диагонали или проходить второй раз через уже посещенные вершины не разрешается.

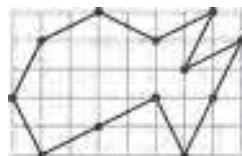


Рис. 2

*Е.Бакаев*

**4** (7 класс). На доске записаны два числа: 2014 и 2015. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно

– либо уменьшить одно из чисел на его ненулевую цифру или на ненулевую цифру другого числа;

– либо разделить одно из чисел пополам, если оно четное.

Выигрывает тот, кто первым напишет однозначное число. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник? Опишите его стратегию и докажите, что она выигрышная.

*А.Шаповалов*

**5** (8 класс). Будем называть змейкой ломаную, у которой все углы между соседними звеньями равны, причем для любого некрайнего звена соседние с ним звенья лежат в разных полуплоскостях от этого звена (пример змейки – на рисунке 3).

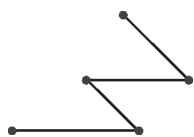


Рис. 3

Барон Мюнхгаузен заявил, что отметил на плоскости 6 точек и нашел 6 разных способов соединить их (пятизвенной) змейкой (вершины каждой из змеек – отмеченные точки). Могут ли его слова быть правдой?

*Е.Бакаев*

**6** (8 класс). Натуральные числа от 1 до 2014 как-то разбили на пары, числа в каждой из пар сложили, а полученные 1007 сумм перемножили. Мог ли результат оказаться квадратом натурального числа?

*А.Хачатурян*

**7** (8 класс). В прямоугольнике  $ABCD$  точка  $M$  – середина стороны  $CD$ . Через точку  $C$  провели прямую, перпендикулярную прямой  $BM$ , а через точку  $M$  – прямую, перпендикулярную диагонали  $BD$ . Докажите, что два проведенных перпендикуляра пересекаются на прямой  $AD$ .

*А.Гаркавий*

**8** (8 класс). В городе Плоском нет ни одной башни. Для развития туризма жители города собираются построить несколько башен, общей высотой в 30 этажей.

Инспектор Высотников, поднимаясь на каждую башню, считает число более низких башен, а потом складывает получившиеся величины. После чего инспектор рекомендует город тем сильнее, чем получившаяся величина больше. Сколько и какой высоты башен надо построить жителям, чтобы получить наилучшую возможную рекомендацию?

*В.Клецын*

**9** (8 класс). На столе лежат 9 яблок, образуя 10 рядов по 3 яблока в каждом (рис.4). Известно, что у девяти рядов веса одинаковы, а вес десятого ряда отличается.

Есть электронные весы, на которых за рубль можно узнать вес любой группы яблок. Какое наименьшее число рублей надо заплатить, чтобы узнать, вес какого именно ряда отличается?

*А.Шаповалов*

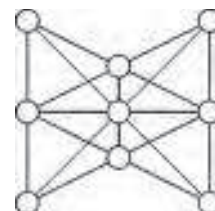


Рис. 4

**10** (9 класс). Все коэффициенты квадратного трехчлена – нечетные целые числа. Докажите, что у него нет корней вида  $\frac{1}{n}$ , где  $n$  – натуральное число.

*Фольклор*

**11** (9 класс). В магазине в ряд висят 21 белая и 21 фиолетовая рубашка. Найдите такое минимальное  $k$ , что при любом изначальном порядке рубашек можно снять  $k$  белых и  $k$  фиолетовых рубашек так, чтобы оставшиеся белые рубашки висели подряд и оставшиеся фиолетовые рубашки тоже висели подряд.

*И.Богданов*

**12** (9 класс). Даны  $n$  палочек. Из любых трех можно сложить тупоугольный треугольник. Каково наибольшее возможное значение  $n$ ?

*Б.Френкин*

**13** (9 класс). Радикалом натурального числа  $N$  (обозначается  $\text{rad}(N)$ ) называется произведение всех простых делителей числа  $N$ , взятых по одному разу. Например,  $\text{rad}(120) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ .

Существует ли тройка попарно взаимно простых натуральных чисел  $A, B, C$  таких, что  $A + B = C$  и  $C > 1000 \text{rad}(ABC)$ ?

*Фольклор*

**14** (10 класс). Квадратный трехчлен  $f(x) = ax^2 + bx + c$  принимает в точках  $\frac{1}{a}$  и  $c$  значения разных знаков. Докажите, что корни трехчлена  $f(x)$  имеют разные знаки.

*Г.Жуков*

<sup>1</sup> В скобках после задачи указан класс, в котором она предлагалась.



**15** (10 класс). Дан треугольник  $ABC$ . Обозначим через  $M$  середину стороны  $AC$ , а через  $P$  – середину отрезка  $CM$ . Описанная окружность треугольника  $ABP$  пересекает отрезок  $BC$  во внутренней точке  $Q$ . Докажите, что  $\angle ABM = \angle MQP$ .

*Е.Бакаев*

**16** (11 класс). Найдите все значения  $a$ , для которых найдутся такие  $x$ ,  $y$  и  $z$ , что числа  $\cos x$ ,  $\cos y$  и  $\cos z$  попарно различны и образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию, при этом числа  $\cos(x+a)$ ,  $\cos(y+a)$  и  $\cos(z+a)$  также образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию.

*Д.Горяшин*

**17** (11 класс). На сторонах  $AD$  и  $CD$  параллелограмма  $ABCD$  с центром  $O$  отмечены такие точки  $P$  и  $Q$  соответственно, что  $\angle AOP = \angle COQ = \angle ABC$ .

а) Докажите, что  $\angle ABP = \angle CBQ$ .

б) Докажите, что прямые  $AQ$  и  $CP$  пересекаются на описанной окружности треугольника  $ABC$ .

*А.Заславский*

**18** (11 класс). Саша обнаружил, что на калькуляторе осталось ровно  $n$  рабочих кнопок с цифрами. Оказалось, что любое натуральное число от 1 до 99999999 можно либо набрать, используя лишь рабочие цифры, либо получить как сумму двух натуральных чисел, каждое из которых можно набрать, используя лишь рабочие цифры. Каково наименьшее  $n$ , при котором это возможно?

*О.Косухин*

**19** (11 класс). Существует ли такой квадратный трехчлен  $f(x) = ax^2 + bx + c$  с целыми коэффициентами и  $a$ ,

не кратным 2014, что все числа  $f(1), f(2), \dots, f(2014)$  имеют различные остатки при делении на 2014? Ответ обоснуйте.

*Фольклор, С.Гашков*

**20** (11 класс). Найдите все такие  $a$  и  $b$ , что  $|a| + |b| \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$ , и при всех  $x$  выполнено неравенство  $|a \sin x + b \sin(2x)| \leq 1$ .

*С.Гашков, по мотивам С.Бернштейна*

**21** (11 класс). Докажите, что для любого натурального  $n$  найдется натуральное число, десятичная запись квадрата которого начинается  $n$  единицами, а заканчивается какой-то комбинацией из  $n$  единиц и двоек.

*С.Гашков*

**22** (11 класс). У повара в подчинении десять поварят, некоторые из которых дружат между собой. Каждый рабочий день повар назначает одного или нескольких поварят на дежурство, а каждый из дежурных поварят уносит с работы по одному пирожному каждому своему недежурящему другу. В конце дня повар узнает количество пропавших пирожных. Сможет ли он за 45 рабочих дней понять, кто из поварят дружит между собой, а кто нет?

*О.Косухин*

**23** (11 класс). Поверхность выпуклого многогранника  $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$  состоит из восьми треугольных граней  $A_iB_jC_k$ , где  $i, j, k$  меняются от 1 до 2. Сфера с центром в точке  $O$  касается всех этих граней. Докажите, что точка  $O$  и середины трех отрезков  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  и  $C_1C_2$  лежат в одной плоскости.

*О.Косухин*

*Публикацию подготовил С.Дориченко*

## Избранные задачи Московской физической олимпиады

Первый теоретический тур

7 класс

**1.** По дороге едет колонна из  $n = 10$  одинаковых автомобилей, расположенных друг за другом, со скоростью  $v = 54$  км/ч. Длина каждого автомобиля  $L = 4,5$  м, а расстояние между соседними автомобилями (дистанция)  $s = 25$  м. Перед красным сигналом светофора первый автомобиль плавно останавливается. Водитель второго автомобиля начинает повторять действия водителя первого спустя время  $t = 1,6$  с после того, как первый водитель начал торможение. Водитель каждого следующего автомобиля повторяет действие водителя предыдущего спустя такой же интервал времени. Какой станет длина  $l$  колонны, когда все автомобили остановятся?

*М.Ромашка*

**2.** Бараш пригласил в гости Ньюшу. Свидание было назначено на воскресенье в полдень. Надев новое платье, Ньюша в одиннадцать часов вышла из своего домика и побежала со скоростью 5 км/ч к Крошу, чтобы выяснить, насколько прекрасен ее наряд. Крош, потрясенный внешним видом Ньюши, не смог ее отпустить сразу и пригласил на чай. Просидев за чаем с Крошем полчаса, Ньюша вспомнила, что свидание-то у нее на самом деле с Барашем! Тогда она

поспешила с той же скоростью, что и раньше, к домику Бараша. Бараш подготовился к свиданию точно к полудню. Прождав Ньюшу 15 минут около окна, он начал нервно вышагивать по своей комнате от окна к часам и обратно со средней скоростью 1 м/с. Сколько раз Бараш подошел к окну до тех пор, пока не пришла Ньюша?

*Для справки.* Домик Ньюши находится между домиками Кроша и Бараша. Расстояние до домика Кроша от домика Ньюши 2 км, что в 2 раза меньше, чем расстояние от домика Бараша до домика Кроша. Расстояние от часов до окна в комнате Бараша 5 м.

*Е.Вишнякова*

**3.** Дед Макар, наблюдая за тем, как бочка постоянного сечения наполняется водой во время дождя, занес в таблицу зависимость уровня  $h$  воды в бочке от времени  $t$ . В тот момент, когда дождь закончился, уровень воды в бочке составил 80 см. Изучая затем таблицу, дед вспомнил, что в момент времени  $t_1 = 9$  мин он включил насос, лежащий в бочке, который с постоянной скоростью откачивал воду.

|                 |   |      |    |    |    |
|-----------------|---|------|----|----|----|
| $h, \text{см}$  | 0 | 10   | 40 | 60 | 80 |
| $t, \text{мин}$ | 0 | 2,25 | 9  | 18 | 27 |

Помогите ему проанализировать эти данные, а именно, определите:

1) время  $t$  после окончания дождя, за которое уровень воды опустится за счет дальнейшей работы насоса с высоты 80 см до высоты 40 см;

2) объем воды  $V$ , который находился в бочке в момент времени  $t_2 = 4,5$  мин, если площадь сечения бочки  $S = 5400 \text{ см}^2$ ;

3) объем  $q$  дождевой воды, которая попадала в бочку за одну минуту.

*Ф.Цыбров*

4. В зоомагазине довольно продолжительное время продавался стеклянный аквариум. Со временем этикетка, на которой были обозначены внешние размеры аквариума, затерлась, и остался только размер его одной стороны – ширины  $a = 100$  см. Опытная продавщица, однако, помнила пропорции этого аквариума: толщина каждой из стенок в 100 раз меньше его ширины; длина в 2 раза больше суммы его ширины и толщины его стенки; а если к ширине аквариума прибавить величину, в 2 раза большую, чем толщина его стенки, то эта величина равна высоте аквариума. Какова масса  $m$  такого аквариума в килограммах? Плотность стекла  $\rho = 2,5 \text{ г/см}^3$ .

*Е.Вишнякова*

5. Есть гипотеза, согласно которой размеры насекомых ограничены тем, что они потребляют воздух трахеальными трубками, выходящими на поверхность тела (т.е. их воздухозабор пропорционален площади поверхности тела). Расход же кислорода, в свою очередь, пропорционален массе тела. Таким образом, можно прийти к выводу, что при увеличении насекомого в длину, высоту и ширину в одинаковое число раз можно добиться того, что оно начнет «задышаться» от недостатка кислорода.

Известно, что в карбоневом (каменноугольном) геологическом периоде размах крыльев стрекозы меганевры достигал 65 см. По предположениям ученых, это было возможно потому, что концентрация кислорода в атмосфере тогда составляла 35%, а не 21%, как сейчас (при той же плотности воздуха). Считая, что для времен карбона это был максимально возможный размер, оцените максимально возможный размах крыльев современной стрекозы. Сейчас стрекозы имеют примерно ту же плотность и пропорции тела, что и стрекоза периода карбона, и требуют на единицу массы не меньшее количество кислорода.

*Примечание.* Ответ будет несколько превышать реальные размеры современных стрекоз из-за наличия других факторов, ограничивающих размер стрекозы (например, конкуренция с птицами).

*Е.Шель*

*8 класс*

1. Перед светофором остановилась колонна из  $n = 10$  одинаковых автомобилей, расположенных друг за другом. Длина каждого автомобиля  $L = 4,5$  м, а расстояние между соседними автомобилями  $s = 1$  м. После включения зеленого сигнала светофора первый автомобиль плавно разгоняется до скорости  $v = 54 \text{ км/ч}$  и продолжает ехать с этой скоростью. Водитель второго автомобиля начинает повторять действия водителя первого спустя время  $t = 1,6$  с после того, как первый водитель тронулся с места. Водитель каждого следующего автомобиля повторяет действие водителя предыдущего спустя такой же интервал времени. Какой станет длина  $l$  колонны, когда все автомобили будут двигаться с постоянной скоростью?

*М.Ромашка*

2. На лабораторной работе по физике ученице Агнессе выдали шесть одинаковых легких пружинки длиной 5 см каждая и твердый диск радиусом 10 см, вдоль периферии которого располагались 36 отверстий, находящихся на одинаковом расстоянии друг от друга. Используя пружинки, диск можно было подвесить в горизонтальном положении, прикрепив другие концы вертикальных пружинки к горизонтальной платформе, находящейся на некоторой высоте от поверхности стола. Когда Агнесса закрепила диск в горизонтальном положении с помощью некоторого количества пружинки, расположенных одним ярусом, то каждая из использованных ею пружинки растянулась на 1 см. Затем она соединила все имеющиеся у нее пружинки одну за другой, верхний конец системы пружинки прикрепила к платформе, а к нижнему концу подвесила диск за одно из отверстий. В этом случае положение центра диска по вертикали относительно первого случая крепления изменилось на 58 см. На каком количестве пружинки Агнесса уравнивала диск в горизонтальном положении? Считайте, что удлинение всех пружинки пропорционально растягивающим их силам, т.е. для них справедлив закон Гука.

*Е.Вишнякова*

3. Из тонкой оболочки с поверхностной плотностью  $\sigma = 50 \text{ г/м}^2$  изготовили воздушный шар. При каких значениях радиуса  $R$  он сможет подняться в воздух плотностью  $\rho_v = 1,3 \text{ кг/м}^3$ ? Считайте, что шар наполняется гелием, плотность которого  $\rho_g = 0,18 \text{ кг/м}^3$ . Объем шара радиусом  $R$  составляет  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ , а площадь его поверхности равна  $S = 4\pi R^2$ .

*Л.Арзамасский*

4. Калорийность – это энергия, выделяемая человеком в результате поглощения того или иного продукта. Калория – внесистемная единица работы и энергии, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 грамма воды на 1 градус Цельсия при стандартном атмосферном давлении 101325 Па (1 кал = 4,1868 Дж). Количество калорий, необходимых человеку, зависит от выполняемой работы, от физической активности, от пола, возраста и даже от географической широты (холодный или жаркий климат).

Надеемся, что все помнят, как ранним утром Винни-Пух и Пятачок зашли в гости к Кролику. Воспитанный Кролик пригласил друзей к столу. Винни-Пух, обрадовавшись такому предложению, согласился (чтобы не обижать Кролика) и протиснулся по узкому проходу внутрь дома. Когда в какой-то момент запасы меда и малинового варенья Кролика закончились, Винни-Пух решил, что настало то время, когда нужно поблагодарить хозяина и возвращаться домой. Однако... домой Винни-Пух сразу не попал, так как застрял в узком проходе к двери Кролика. Допустим, что при своей начальной массе, равной 20 кг, Винни-Пух съел 3 банки меда по 1,5 кг каждая и 6 банок малинового варенья по 500 г каждая. Калорийность 100 г меда равна 314 ккал, а калорийность 100 г малинового варенья – 271,4 ккал. Энергетические затраты организма во время сна равны энергетическим затратам организма во время спокойного отдыха лежа и составляют 3977,46 Дж/ч на 1 килограмм массы тела; эта же величина при пении равна 7285,032 Дж/ч на килограмм массы тела, а при чтении вслух – 5066,028 Дж/ч на килограмм массы тела. Пусть Винни-Пух 8 часов в сутки спит, а остальное время лежит, половину времени напевая, а другую половину декламируя свои «пыхтелки» – а что еще остается ему делать? Так

сколько же суток придется Винни-Пуху ждать таким необычным образом счастливого момента своего освобождения из норы Кролика?

*Е.Вишнякова*

*9 класс*

1. Считается, что минимальное безопасное расстояние между автомобилями (минимальная дистанция) может быть рассчитана по формуле «половина скорости в метрах». Например, при движении со скоростью 60 км/ч минимальная безопасная дистанция будет равна 30 м, а при движении со скоростью 90 км/ч она составит 45 м.

Два одинаковых автомобиля движутся по прямой дороге один за другим с одинаковыми скоростями, причем дистанция между ними в точности минимальная безопасная. Допустим, что первый из автомобилей начал сбрасывать скорость и через некоторое время остановился. Водитель второго автомобиля среагировал на это спустя некоторое время  $t$  и точно так же начал сбрасывать скорость до полной остановки. Но если бы второй водитель не среагировал достаточно быстро, то автомобили столкнулись бы. Найдите максимальное время реакции водителя  $t$ , при котором формула «половина скорости в метрах» гарантирует, что автомобили не столкнутся.

*М.Ромашка*

2. С ветки дерева, расположенной на высоте  $H = 5$  м, с интервалом  $\tau = 0,5$  с отрываются капли воды и падают на тротуар. С какой минимальной скоростью  $v$  должен идти худой пешеход, чтобы не замочившись проскочить опасное место? Считайте, что рост пешехода  $h = 180$  см, диаметр его шляпы  $D = 30$  см, ширина шага  $L = 60$  см, ботинки в крайних положениях по горизонтали выступают из-под шляпы симметричным образом, ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Сопротивлением воздуха пренебречь, ботинки считать точечными!

*И.Горбатый, М.Семенов*

3. В сосуде с водой плавает куб массой  $m = 2048$  г, он прикреплен ко дну пружиной, другой конец которой прицеплен к центру нижней грани куба. Вначале пружина находится в недеформированном состоянии, а ровно половина куба выступает над водой, причем четыре его ребра вертикальны. Прошел дождь, и уровень воды в сосуде вырос на  $h = 20,48$  см, а вода оказалась как раз на уровне верхней поверхности куба. Определите удлинение  $\Delta l$  пружины и силу упругости  $F_{\text{упр}}$ , с которой пружина действует на куб. Считайте, что плотность воды  $\rho_{\text{в}} = 1$  г/см<sup>3</sup>, а ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

*А.Белов*

4. Проточный нагреватель воды состоит из трубы длиной  $L = 8$  м, поперечное сечение которой представляет собой прямоугольник размером  $a \times d$ . Стенки размером  $L \times a$  сделаны из металла, а размером  $L \times d$  — из диэлектрика. Нагрев воды осуществляется электрическим током, для чего к металлическим стенкам прикладывается постоянное напряжение  $U$ . Определите, каким должно быть это напряжение для того, чтобы устройство обеспечивало нагрев 600 литров воды в час от 10 °С до 35 °С, если  $a = 40$  см,  $d = 2$  см. Используемая в нагревателе вода имеет следующие характеристики: плотность  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, удельная теплоемкость  $c = 4,2 \cdot 10^3$  Дж/(кг · °С), удельное сопротивление  $\lambda = 10$  Ом · м. Теплоемкостью трубы и потерями тепла пренебречь.

*Л.Арзамасский*

*10 класс*

1. По горизонтальной плоскости скользит квадратная пластинка  $ABCD$ . В некоторый момент времени вершина  $A$  пластинки движется со скоростью  $\vec{v}_A$ , равной по модулю 5 м/с, а соседняя вершина  $B$  — со скоростью  $\vec{v}_B$ , равной по модулю 1 м/с. При этом скорость  $\vec{v}_O$  точки  $O$  — центра пластинки — направлена перпендикулярно прямой  $BD$ , являющейся диагональю квадрата. Найдите проекцию скорости  $\vec{v}_O$  на направление  $AC$  в данный момент времени.

*М.Семенов*

2. Магнит массой  $m$  притягивается снизу к плоской металлической плите (рис.1), образующей угол  $\alpha$  с вертикалью, с постоянной силой  $F = kmg$ , где  $k$  — известный коэффициент ( $k > 1$ ). Коэффициент трения между магнитом и плитой равен  $\mu$ . Найдите модуль ускорения магнита.

*М.Ромашка*

3. Участок  $AB$  электрической цепи (рис.2) состоит из одинаковых резисторов с



Рис. 1

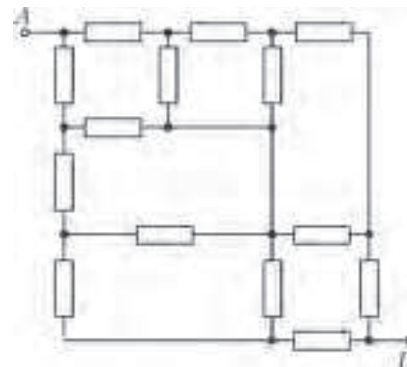


Рис. 2

одинаковыми сопротивлениями  $R$ . Найдите общее сопротивление участка  $AB$ .

*М.Ромашка*

*11 класс*

1. На рисунке 3 изображены два вертикальных сообщающихся цилиндрических сосуда. Верх левого сосуда герметично запаян, и этот сосуд частично заполнен гелием. Правый сосуд до краев наполнен ртутью так, что часть ртути находится в левом сосуде и гелий заперт ею. Система помещена в вакуум. Гелию начинают медленно сообщать тепло и продолжают нагревание до тех пор, пока ртуть остается в левом сосуде. Определите удельную теплоемкость гелия в этом процессе.



Рис. 3

*А.Крыловецкий*

2. Участок  $AB$  электрической цепи (рис.4) состоит из одинаковых конденсаторов емкостью  $C$  каждый. Найдите общую емкость участка  $AB$ .

*М.Ромашка*

3. Как показали эксперименты Ж.-Б.Био и Ф.Савара 1820 года, магнитное поле длинного прямого провода с током убывает обратно пропорционально расстоянию от этого провода. Четыре очень длинных прямых провода с протекающими по ним равными по модулю по-

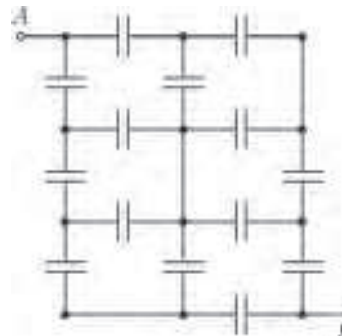


Рис. 4





Рис. 5

стоянными токами расположены параллельно друг другу так, как показано на рисунке 5 (сечения проводов плоскостью рисунка находятся в вершинах квадрата). Известно, что модуль вектора индукции магнитного поля, создаваемого одним проводом в соседней с ним вершине этого квадрата, равен  $B$ , а поле самого провода на его оси равно нулю. Найдите модуль суммарного вектора магнитной индукции в каждой вершине указанного квадрата. Найдите также модуль вектора индукции магнитного поля в центре этого квадрата.

Е.Шель

## Второй теоретический тур

8 класс

1. Карусель представляет собой пять круговых дорожек (рис.6). Внешняя дорожка (1) всегда неподвижна; следующая (2) может двигаться со скоростью  $v = 4,5$  км/ч.

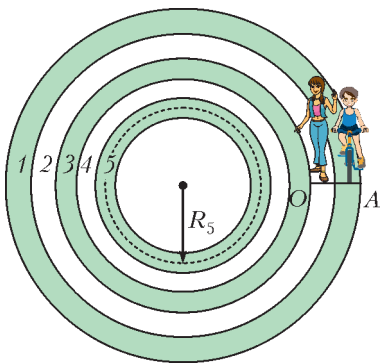


Рис. 6

Скорость движения полотна у дорожки 3 в 2 раза больше, чем у второй. Скорость движения дорожки 4 равна разности скоростей движения дорожек 5 и 2. Скорость движения пятой дорожки, радиус которой  $R = 20$  м, в 2 раза больше, чем у третьей. Ширина каждой дорожки  $r = 1$  м. Вначале все дорожки неподвижны.

С линии  $AO$  в одном направлении стартуют двое одноклассников – отличник Вася по неподвижной дорожке 1 на велосипеде и красавица Маша по соседней дорожке 2 – бегом. В момент их старта дорожки начинают двигаться, также вращаясь в одном направлении – каждая со своей скоростью. Маша начинает двигаться в направлении движения дорожек с постоянной скоростью  $v_1 = 1,25$  м/с относительно полотна своей дорожки. Через некоторое время она перепрыгивает на соседнюю дорожку, причем скорость ее движения относительно полотна новой дорожки остается прежней. Так, последовательно перепрыгивая с дорожки на дорожку и находясь на каждой из них столько времени, сколько требуется, чтобы преодолеть одинаковые угловые расстояния, она добирается сначала до внутренней дорожки 5, а потом возвращается на дорожку 2. С какой постоянной скоростью двигался Вася на велосипеде, если известно, что к линии старта/финиша они добрались одновременно, сделав один оборот вокруг центра карусели? Считайте, что одноклассники все время перемещались точно по средним линиям дорожек.

Е.Вишнякова

2. В известном опыте «Бездонный бокал» в стеклянный бокал, доверху наполненный водой, аккуратно опускают одну за другой булавки. При этом вода приподнимается над краями стакана, но не выливается из него (за счет явления смачивания). Возьмем доверху наполненный водой цилиндрический стакан и взвесим его. Затем начнем аккуратно опускать в него булавки (длина булавки 2,5 см, толщина 0,4 мм) одну за другой до тех пор, пока вода не потечет по внешнему стенка стакана. Так же аккуратно протрем стенки

и края стакана от оставшихся капель воды и взвесим этот стакан с булавками и водой. Сколько булавок находится в стакане, если в результате взвешиваний было обнаружено, что изменение массы стакана (который сначала был с водой, но без булавок) составило 19,21 г? Плотность воды  $1$  г/см<sup>3</sup>, плотность металла, из которого изготовлены булавки,  $7800$  кг/м<sup>3</sup>.

Е.Вишнякова

9 класс

1. Геодезическая ракета стартует по вертикали и движется с ускорением  $a = 50$  м/с<sup>2</sup>. Через некоторое время происходит отсечка (прекращение работы) двигателя. Звук на земле в точке старта перестал быть слышен спустя время  $\tau = 1$  мин 55,5 с после старта. Какую скорость  $v$  приобрел установленный на ракете исследовательский зонд к моменту отключения двигателя? На какую максимальную высоту  $H$  он поднимется? Скорость звука принять равной  $v_{зв} = 330$  м/с, ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Сопротивлением воздуха и изменением величины  $g$  с высотой пренебречь.

В.Крыштон, М.Семенов

2. Успешный бизнесмен Иван Михайлович решил порадовать свое подрастающее чадо поездкой на Новый Год в теплые страны, куда полет на самолете занимал долгие 8 часов. Пока самолет набирал высоту, папа рассказывал сыну, что: расход топлива их самолета при взлете равен 14040 кг/ч и эта величина больше, чем при полете на неизменной высоте с постоянной скоростью; КПД двигателей на взлете составляет примерно 12%; самолет оснащен четырьмя двигателями с силой тяги по 127,4 кН каждый; масса полностью загруженного и заправленного самолета равна 208 т; удельная теплота сгорания авиационного топлива равна 43 МДж/кг. Повествование прервалось сообщением пилота о том, что самолет движется на высоте 8230 м со скоростью 936 км/ч. Уставший Иван Михайлович заключил: «А теперь, сынок, чтобы не расслабляться от учебы раньше времени и не скучать, выбери необходимые данные из тех, которые я тебе сообщил, и посчитай, сколько секунд продолжался набор высоты самолета». Помогите сыну Ивана Михайловича справиться с заданием папы. Уменьшением массы самолета за время взлета можно пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

Е.Вишнякова

3. У джентльмена дома стоит большой медный кувшин массой  $M_0 = 500$  кг и внутренним объемом  $V = 1$  м<sup>3</sup>. Джентльмен снял с края крыши сосульки, уже начавшие таять, положил их в кувшин, подождал, пока кувшин охладится до  $0$  °С, и наполнил его до краев кипятком с температурой  $100$  °С. Через некоторое время уровень воды в кувшине опустился, и джентльмен влил в него еще 40 л кипятка, снова наполнив кувшин до краев. После этого уровень воды в кувшине уже не менялся. Определите установившуюся в кувшине температуру. Температура в комнате  $20$  °С. Теплообменом кувшина с окружающей средой можно пренебречь. Плотность воды  $\rho_v = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, плотность льда  $\rho_l = 900$  кг/м<sup>3</sup>, удельные теплоемкости воды и меди составляют  $c_v = 4200$  Дж/(кг·°С) и  $c_m = 385$  Дж/(кг·°С) соответственно, удельная теплота плавления льда  $\lambda = 335$  кДж/кг.

А.Ноян

10 класс

1. В спортивном зале высотой  $h$  бросают маленький мяч с начальной скоростью  $v_0$ . Определите, какое максимальное расстояние по горизонтали может пролететь мяч после бросания до первого удара о пол, если соударение с потолком абсолютно упругое. Считайте, что мяч бросают с уровня пола. Пол и потолок горизонтальны, сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

Ф.Цыбров

2. На рисунке 7 показан график зависимости модуля силы  $F$  растяжения пружины от ее удлинения  $x$  (при больших

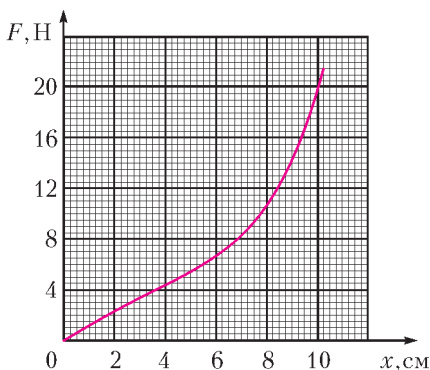


Рис. 7

деформациях пружина не подчиняется закону Гука). Пружину прикрепляют одним концом к потолку. К другому концу пружины, не деформируя ее, аккуратно подвешивают груз массой  $m = 650$  г, после чего отпускают груз без начальной скорости. Оцените, на какую максимальную длину растянется пружина. Трением и массой пружины пренебречь, ускорение свободного падения принять равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

А.Якута

3. В комнате с температурой воздуха  $t_k = 25$  °С находится батарея аккумуляторов с суммарной ЭДС  $U = 200$  В и суммарным внутренним сопротивлением  $r = 20$  Ом. Выводы батареи подсоединены к электрической розетке. Изначально в эту розетку был включен кипятильник номер 1 с сопротивлением  $R = 200$  Ом, опущенный в стакан с холодной водой, которую он смог прогреть только до температуры  $t_1 = 50$  °С. Потом кипятильник вынули из розетки и вставили в нее разветвитель питания (так называемый «тройник»). К первым двум его выходам подключили кипятильники номер 1 и номер 2 (такой же, как кипятильник 1), а к третьему – кипятильник номер 3 той же формы и изготовленный из тех же материалов, но все размеры которого в  $n = 2$  раза меньше, чем у кипятильника номер 1. Эти кипятильники положили в стаканы с холодной водой: кипятильники 1 и 3 – в такие же, что и изначально, а кипятильник 2 – в стакан, все размеры которого в  $n$  раз меньше, чем у исходного стакана. До каких температур  $t_2$  и  $t_3$  соответственно нагреется за длительное время вода в стаканах, в которые помещены кипятильники 2 и 3? Мощность тепловых потерь через единицу площади поверхности считайте пропорциональной разности температур.

Ю.Скаков

11 класс

1. Лодку массой  $m$  отправили на другой берег речки, сообщив ей начальную скорость  $v_0$  в направлении, перпендикулярном береговой линии. Ширина речки  $H$ , скорость ее течения  $v_r$ , а время движения лодки от берега до берега  $t$ .

1) На какое расстояние  $l$  (вдоль берега) снесло лодку течением при переправе?

2) Чему был равен модуль скорости лодки относительно воды в конце переправы, если сила сопротивления движению, действующая на лодку со стороны воды, пропорциональна скорости лодки относительно воды:  $\vec{F} = -k\vec{v}_{отн}$ , где  $k$  – известный постоянный коэффициент? Считайте, что скорость течения одинакова во всех точках речки.

В.Котов

2. В гладком цилиндре под подвижным поршнем находятся в равновесии  $\nu$  молей жидкости и  $\nu$  молей ее пара (состояние 1 на  $pV$ -диаграмме на рисунке 8). Систему «жидкость-пар» сначала медленно нагрели в изобарическом процессе 1–2, при этом ее абсолютная температура возросла в 2 раза. Затем систему медленно охладил в адиабатическом процессе 2–3 до температуры  $T_3$ . Какое количество теплоты получила система в процессе 1–2, если работы, совершенные этой системой в процессах 1–2 и 2–3, были одинаковы? Молярная

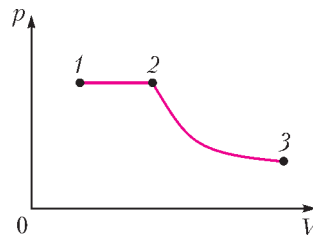


Рис. 8

теплота парообразования в процессе 1–2 равна  $r$ . В процессе 2–3 конденсации не происходит. Считайте пар идеальным газом с молярной теплоемкостью в изохорном процессе  $C_V = 3R$ . Объем жидкости в состоянии 1 пренебрежимо мал по сравнению с объемом пара.

В.Котов

3. В схеме, изображенной на рисунке 9, все резисторы одинаковые и имеют сопротивление  $R$ . Найдите сопротивление между точками А и В этой схемы.

М.Семенов

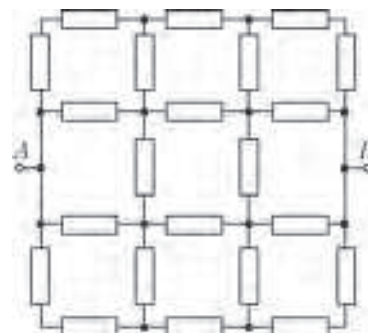


Рис. 9

4. Небольшой шарик, заряженный зарядом  $q$ , покоится на гладком горизонтальном непроводящем столе. К шарiku присоединена горизонтальная пружина жесткостью  $k$ , второй конец которой закреплен. Вдоль оси пружины к шарiku с большого расстояния очень медленно приближают такой же, но противоположно заряженный шарик. Найдите деформацию пружины в момент столкновения шариков.

И.Горбатый

5. В цепи, схема которой изображена на рисунке 10, катушка имеет индуктивность  $L$ , емкость конденсатора равна  $C$ , сопротивление источника, активное сопротивление катушки и сопротивление проводов пренебрежимо малы. Вольт-амперная характеристика диода  $D$  изображена на графике зависимости текущего через диод тока  $I_D$  от разности потенциалов  $U_D = \phi_b - \phi_a$ . В начальный момент ключ

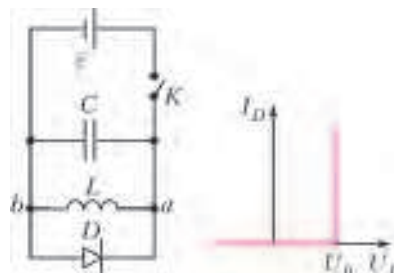


Рис. 10

К разомкнут, а конденсатор не заряжен. Ключ замыкают на время  $t_0 < \sqrt{LC}$ , а затем снова размыкают. Определите отношение ЭДС источника  $\mathcal{E}$  к напряжению  $U_0$ , при котором открывается диод, если заряд, прошедший через диод после замыкания ключа, в  $n$  раз больше заряда,

прошедшего через катушку за время  $t_0$ , пока ключ был замкнут.

В.Котов

Публикацию подготовили  
М.Семенов, О.Шведов, А.Якута

# XXI Международная олимпиада школьников «Туймаада». Физика



В июле этого года в Якутске прошла XXI Международная олимпиада «Туймаада» по физике, математике, информатике и химии. Участники олимпиады по физике соревновались, как обычно, в двух лигах: старшей и младшей (жюри распределяет участников по лигам в зависимости от их возраста и класса). Олимпиада в каждой лиге состояла из двух туров: теоретического и экспериментального. Согласно программе олимпиады по физике, участникам могут быть предложены задачи на любые темы, содержащиеся в углубленной школьной программе (в младшей лиге – за исключением тем, относящихся к двум последним классам).

Российские и зарубежные школьники, желающие испытать свои силы на задачах такого уровня в следующем году, и их преподаватели могут согласовать организационные вопросы, связанные с участием в олимпиаде, с жюри по физике (fiztuy@mail.ru). Авторы оригинальных задач (как теоретических, так и экспериментальных) могут прислать их методической комиссии олимпиады (achudn@mail.ru) – лучшие задачи войдут в итоговый комплект и после олимпиады будут опубликованы в образовательных журналах.

Статья подготовлена на основании следующего методического пособия: А.В.Чудновский, С.Д.Варламов, В.В.Ефимов, А.С.Кобякин, А.П.Крюков, В.М.Муравьев, В.И.Плис, Д.В.Подлесный, М.Ю.Ромашка, О.Ю.Шведов. XXI Международная олимпиада «Туймаада». Физика. Теоретический тур. Методическое пособие/под редакцией А.В.Чудновского. – М.-Якутск, 2014. Авторы этой книги являются авторами комплекта теоретических задач по физике «Туймаады-2014».

(В журналах «Квант» №2 и №4 за прошлый год были опубликованы статьи об олимпиаде «Туймаада» по физике за 2012 и 2013 годы, но в них отсутствовала информация об авторах соответствующих комплектов. Авторы комплекта теоретических задач «Туймаады-2012» – А.В.Чудновский, С.Д.Варламов, А.В.Гуденко, В.М.Муравьев. Авторы задач «Туймаады-2013»: теоретических – А.В.Чудновский, С.Д.Варламов, А.В.Гуденко, С.И.Кошоридзе, В.М.Муравьев, М.Ю.Ромашка, Ю.В.Чешев, О.Ю.Шведов; экспериментальных – А.В.Гуденко, С.Д.Варламов, М.Ю.Ромашка.)

Ниже представлены избранные задачи теоретического тура и список дипломантов олимпиады по физике «Туймаада-2014».

## ИЗБРАННЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

### Задача 1. Невесомая бусинка

В вершинах прямоугольника  $ABCD$ , стороны  $AB$  и  $CD$  которого вертикальны, закреплены четыре маленьких невесомых блока (рис. 1). Через них

перекинуты две гладкие невесомые нерастяжимые нити, одна из которых связывает грузы массами  $m_1$  и  $m_2$ , а другая – массами  $m_3$  и  $m_4$ . Обе нити продеты сквозь одно отверстие в маленькой невесомой бусинке  $K$ . Изначально нити натянуты, бусинка и грузы неподвижны, а выходящие из бусинки участки нитей образуют с горизонтом углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\phi$ . Найдите проекции ускорения  $a_x$  и  $a_y$  бусинки в момент одновременного отпущения бусинки и грузов, если оси  $x$  и  $y$  сонаправлены с векторами  $\vec{BC}$  и  $\vec{BA}$  соответственно. Рассмотрите два случая:  $\alpha = \beta$  и  $\alpha \neq \beta$ . В ответе можно оставить все четыре угла, но отдельно выразите угол  $\phi$  через остальные углы. Ускорение свободного падения  $g$  известно.

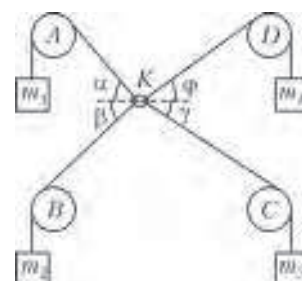


Рис. 1

### Задача 2. Вращение в полусфере

По гладкой внутренней поверхности закрепленной сферы радиусом  $R$  движется маленькая шайба. В начальный момент времени шайба находится в горизонтальной плоскости, содержащей центр сферы, и имеет горизонтальную скорость  $\omega R$ . Найдите максимальное смещение  $L$  шайбы по вертикали и минимальное время  $\tau$ , через которое произойдет это смещение, при условии, что  $\omega^2 R \gg g$ , где  $g$  – ускорение свободного падения. Чему равен модуль  $s$  вектора перемещения шайбы к моменту времени  $\tau$ ?

### Задача 3. Полупроницаемая перегородка

Высокий сосуд с двумя тонкими легкими поршнями разделен на две части перегородкой, пропускающей гелий, азот и кислород, но не пропускающей радон (рис.2). В сосуде находятся гелий и радон в количествах  $V_1$  и  $V_2$  соответственно, причем слева от перегородки находится только гелий, а справа – смесь гелия и радона. На правый поршень груз площадью  $S$  поставлен груз массой  $m$ . Температура  $T$  и давление  $p_0$  окружающего воздуха поддерживаются постоянными. Найдите объемы  $V_1$  и  $V_2$  левой и правой частей сосуда под поршнями соответ-

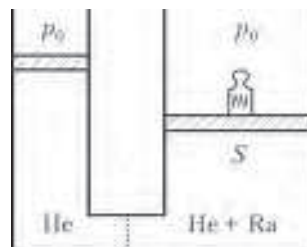


Рис. 2



ственно. При какой массе груза  $m$  возможно описанное равновесие? Объемом соединительной трубки можно пренебречь, однако ее диаметр немного превышает толщину поршня.

#### Задача 4. Линза в поршне

Горизонтальный цилиндрический сосуд объемом  $V_0 = 1$  л разделен на две части гладким подвижным поршнем со встроенной в него линзой, главная оптическая ось которой совпадает с осью симметрии сосуда (рис.3). В центре левого основания внутри сосуда закреплена лампа накаливания, а правое основание используется в качестве экрана при наблюдении изображения лампы в линзе. В левой части сосуда находится одноатомный идеальный газ, а в правой – в  $k = 3$  раза большее количество двухатомного идеального газа. В начальный момент времени газы имели давление  $p_0 = 1$  атм и одинаковую температуру. Теплоемкости и теплопроводности поршня, левого основания и боковой поверхности сосуда пренебрежимо малы, а правое основание



Рис. 3

имеет большую теплопроводность и поддерживается при постоянной начальной температуре. После подачи на лампу напряжения  $U = 4$  В через нее пошел ток  $I = 0,32$  А, а на экране появилось четкое изображение нити накала лампы, которое постепенно теряло четкость и превращалось в светлое пятно. Через какое время  $t$  после включения лампы изображение ее нити накала снова станет четким? КПД лампы накаливания (как осветительного прибора) можно считать пренебрежимо малым.

#### Задача 5. Электросхема

Идеальный источник ЭДС  $\mathcal{E}$ , ключ  $K$ , идеальная катушка индуктивностью  $L$  и две пары конденсаторов емкостями  $C$  и  $2C$  соединены по схеме, изображенной на рисунке 4. До замыкания ключа все конденсаторы были разряжены и ток в цепи отсутствовал. Найдите максимальную силу тока  $I_0$  через катушку после замыкания ключа и минимальное время  $\tau$ , через которое эта сила тока будет достигнута.

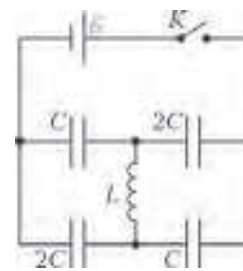


Рис. 4

### ДИПЛОМАНТЫ ОЛИМПИАДЫ

| по младшей лиге                      |        |
|--------------------------------------|--------|
| участник                             | диплом |
| Шиянов Кирилл (Россия, Владивосток)  | I      |
| Елисеев Максим (Россия, Саранск)     | II     |
| Герасименко Павел (Россия, Якутия)   | II     |
| Антонов Кирилл (Россия, Иркутск)     | III    |
| по старшей лиге                      |        |
| участник                             | диплом |
| Иванов Айсизн (Россия, Якутия)       | I      |
| Казарновский Кирилл (Россия, Москва) | I      |

| участник                                    | диплом |
|---|--------|
| Раду Андреи Каталин (Румыния, Бухарест)     | II     |
| Станеску Малин Октавиан (Румыния, Бухарест) | II     |
| Лятин Михаил (Россия, Москва)               | II     |
| Пономарева Ирина (Россия, Владивосток)      | II     |
| Жакенов Абай (Казахстан, Астана)            | III    |
| Артамонов Дмитрий (Россия, Якутия)          | III    |
| Дьяконов Радимир (Россия, Якутия)           | III    |

Публикацию подготовили А.Чудновский, Ю.Григорьев

## ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

### «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

#### ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №3)

1. Раз булочка стоит целое число рублей, то ее цена – 8 рублей или меньше. Маша не могла дать продавщице ни одной монеты достоинством 1 рубль или меньше – такую монету можно было бы оставить у себя, и на булочку все равно хватило бы. Значит, Маша дала несколько монет достоинством 2 или 5 рублей. Но из них можно набрать 9 рублей ровно одним способом:  $2 + 2 + 5$ . Тогда булочка стоила 8 рублей (если бы она стоила меньше, то и Маша дала бы  $2 + 5 = 7$  рублей или меньше, а не 9).

2. Против часовой стрелки.

Предположим, Боря едет по часовой стрелке. Если он едет быстрее Алеша, то раньше него встретится с Васей, а значит, первыми проедут мимо друг друга Боря и Вася, чего быть не может. Если он едет медленнее Алеша, то первыми встретится

Алеша и Вася, что опять же невозможно. Значит, Боря едет против часовой стрелки (и он должен ехать быстрее Васи).

3. Легко понять, что если концы провода между двумя соседними столбами привязаны на одной высоте, то после падения провод не порвется и окажется снова натянутым.

Сделаем провод не параллельным земле, сдвинув один из его концов вверх вдоль столба. Нам придется увеличить длину провода, и высота, на которой привязан этот конец, тоже увеличится – но на другую величину (поскольку в треугольнике сумма двух сторон больше третьей). Поэтому после падения эти два увеличения не скомпенсируют друг друга.

4. Не сможет.

Соединим каждую пару предметов отрезком и поставим на нем стрелочку в сторону того предмета из пары, который бьется вторым предметом из пары. Всего стрелочек будет столько, сколько пар, а их  $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$  – ведь к каждому из 10 предметов можно взять 9 в пару, и еще мы делим на 2, чтобы пары вида «камень-ножницы» и «ножницы-камень» считать за одну пару, а не за две. Теперь заметим: если бы каждый предмет бил одно

и то же число предметов, то количество стрелочек делилось бы на 10. Но 45 на 10 не делится.

5. Незнайка заведомо ошибается.

Числа 1089 и 9801 = 9 · 1089 состоят из одних и тех же цифр, поэтому чернил на них тратится поровну.

### БУРАТИНО И ЕГО УНИВЕРСАЛЬНЫЙ ШАБЛОН КВАДРАТИЧНОЙ ПАРАБОЛЫ

1. На каждой оси координат вместо 1 следует написать 3.
2. На каждой оси координат вместо 1 следует написать 0,5.

### УГОЛ В КВАДРАТЕ

#### Упражнения

1. При любом способе решения задачи 1 получим, что  $ME = MB$  и  $NE = ND$ .
2. Из условия задачи следует, что точки  $B$  и  $D$  – точки касания вневписанной окружности данного треугольника с продолжениями сторон  $CM$  и  $CN$ . Следовательно,  $A$  – центр этой окружности, поэтому  $\angle MAN = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle C = 45^\circ$ .
3. Вписанный угол  $KAL$  – прямой, а точки  $K$  и  $L$  симметричны относительно  $AC$ .
4. а)  $\angle MPN = \angle NQM = 90^\circ$ , значит, точки  $P$  и  $Q$  лежат на окружности с диаметром  $MN$ . б) Точка  $C$  симметрична точке  $A$  относительно  $BD$ , поэтому  $\angle PCQ = \angle PAQ = 45^\circ$ . в) Так как  $\angle MAN = 45^\circ$ , то  $\frac{AM}{AQ} = \frac{AN}{AP} = \sqrt{2}$ . Следовательно, треугольник  $MAN$  подобен треугольнику  $QAP$  с коэффициентом  $k = \sqrt{2}$ , поэтому  $\frac{S_{\Delta MAN}}{S_{\Delta PAQ}} = k^2 = 2$ . г) Из того же подобия:  $\frac{MN}{PQ} = \sqrt{2}$ , а равенство  $AH = MN$  следует из того, что в невыпуклом четырехугольнике  $AMHN$ , три угла которого равны по  $45^\circ$ , равны диагонали (см. лемму). д)  $MN^2 = 2PQ^2$  (см. пункт г), а  $PQ^2 = BP^2 + DQ^2$  (см. задачу 3).
5. Воспользуемся тем, что  $AN = ML$  и  $AM = KN$  (диагонали равнобоких трапеций). Так как  $\angle KML = \angle KNL = 90^\circ$ , то  $KM^2 + AN^2 = KM^2 + ML^2 = KL^2$  и  $AM^2 + LN^2 = KN^2 + LN^2 = KL^2$ .

*Замечание.* Этот результат можно получить и по-другому, используя свойство четырехугольника с перпендикулярными диагоналями. В таком четырехугольнике равны суммы квадратов противоположных сторон. Тогда, последовательно рассматривая четырехугольники  $AKMN$  и  $MNLA$  и учитывая, что  $AK = AL$ , получим

$$KM^2 + AN^2 = AK^2 + MN^2 = AL^2 + MN^2 = AM^2 + LN^2.$$

6. Точками пересечения диагоналей являются точки  $P$  и  $Q$ , так как указанные трапеции – равнобокие, а треугольники  $APN$  и  $AQM$  – равнобедренные.

#### Задачи

7. Пусть  $E, F, G$  и  $H$  – точки пересечения границ квадрата  $ABCD$  и данной полосы (рис.1). Так как сторона квадрата равна ширине полосы, то точка  $G$  равноудалена от прямых  $AB$  и  $EF$ . Следовательно,  $EG$  – биссектриса угла  $AEF$ . Аналогично,  $FH$  – биссектриса угла  $CFE$ . Тогда  $O$  – точка пересечения  $EG$  и  $FH$  – является центром вневписанной окружности для треугольника  $EBF$ . Следовательно,

$$\angle EOF = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle EBF = 45^\circ.$$

Рис. 1

*Замечание.* Отметим, что эта конструкция обобщает конструкцию, рассмотренную в задаче 1 и в упражнениях 1 и 2.

8. *Первый способ.* Из утверждения, сформулированного в упражнении 4,а, следует, что прямые  $PQ$  (она же  $BD$ ) и  $MN$  – антипараллельны<sup>1</sup> (рис.2). Кроме того, четырехугольник  $BM_1N_1D$  – вписанный, значит, его внешний угол при вершине  $M_1$  равен его внутреннему углу  $D$ , т.е. прямые  $BD$  и  $M_1N_1$  также антипараллельны. Следовательно,  $M_1N_1 \parallel MN$  (в частном случае, если

$$\angle BAM = \angle DAN, \text{ то } M_1N_1 \parallel MN \parallel BD).$$

- Второй способ.* Из утверждения задачи 2,а следует, что окружность, описанная около квадрата, гомотетична окружности, описанной около треугольника  $MAN$ , с центром  $A$ . Отрезок  $M_1N_1$  – образ отрезка  $MN$  при этой гомотетии, значит,  $M_1N_1 \parallel MN$ .

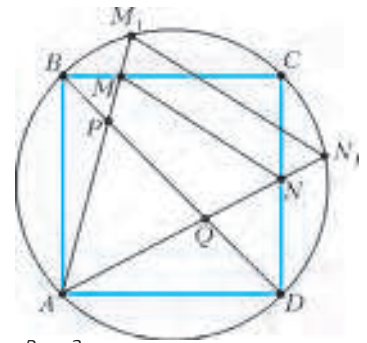


Рис. 2

9. Пусть лучи  $AS$  и  $AT$  пересекают стороны  $BC$  и  $CD$  в точках  $M$  и  $N$ , а лучи  $CS$  и  $CT$  – стороны  $AB$  и  $AD$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Так как  $\angle MAN = \angle XCY = 45^\circ$ , то, помимо уже знакомого треугольника  $CMN$ , рассмотрим ему аналогичный треугольник  $CYX$  (рис.3). Точка  $F$  – основание перпендикуляра, опущенного из вершины  $C$  на  $XY$  (аналогичная

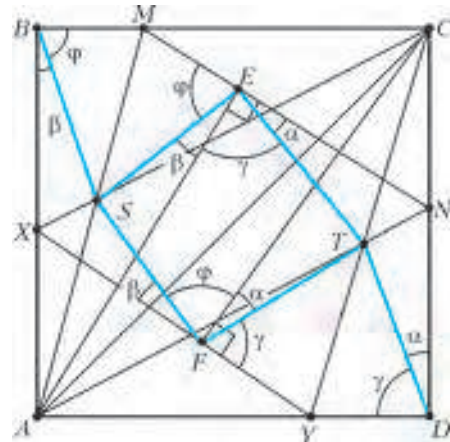


Рис. 3

в точке  $E$ ). Введем обозначения углов так, как показано на рисунке, учитывая равенства углов, образующихся при перегибании квадрата как по прямым  $AM$  и  $AN$ , так и по прямым  $CX$  и  $CY$ .

Заметим, что  $SE = SB = SF$  и  $TE = TD = TF$ , значит, в четырехугольнике  $SETF$  соседние стороны попарно равны (он является дельтоидом). Следовательно,  $\angle SET = \angle SFT$  (симметрия относительно прямой  $ST$ ). Таким образом,  $\beta + \gamma = \alpha + \phi$ . Учитывая, что  $\gamma = 90^\circ - \alpha$ ,  $\phi = 90^\circ - \beta$ , получим, что  $\alpha = \beta$ , откуда и следует параллельность  $BS$  и  $DT$ .

*Замечание.* Попутно доказано, что: 1) четырехугольник  $SETF$  – вписанный (противоположные углы  $E$  и  $F$  – прямые); 2) точки  $S$  и  $T$  – центры окружностей, описанных около треугольников  $BEF$  и  $DFT$  соответственно.

10. Пусть  $D$  – центр вневписанной окружности треугольника  $ABC$  (рис.4). Тогда  $CA_1DB_1$  – квадрат и  $\angle ADB = 90^\circ$  –

<sup>1</sup> Это значит, что при симметрии относительно биссектрисы угла  $PAQ$  прямая  $PQ$  переходит в прямую  $MN$ .

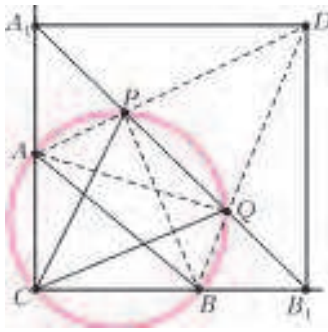


Рис. 4

$-\frac{1}{2} \angle ACB = 45^\circ$ . Так как вписанные углы  $APB$  и  $AQB$  опираются на диаметр, то  $AQ$  и  $BP$  – высоты треугольника  $ADB$ . Значит, точки  $P$  и  $Q$ , указанные в условии, лежат на отрезках  $DA$  и  $DB$  (см. задачу 4), т.е. мы получаем ситуацию, описанную в упражнении 4,6 (с точностью до обозначений), поэтому  $\angle PCQ = 45^\circ$ .

**ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С ИЗМЕРИТЕЛЬНЫМИ ПРИБОРАМИ**

1.  $\mathcal{E} = 24 \text{ В}$ . 2.  $r_V = 6 \text{ кОм}$ ,  $r_A = 245 \text{ Ом}$ .
3.  $r_V = 6 \text{ кОм}$ ,  $r_A = 750 \text{ Ом}$ . 4.  $U = \frac{4}{9} \mathcal{E}$ .
5.  $I = 2,97 \text{ мА}$ . 6.  $R = 260 \text{ Ом}$ .

**XXXV ТУРНИР ГОРОДОВ**

ЗАДАЧИ ВЕСЕННЕГО ТУРА

БАЗОВЫЙ ВАРИАНТ

8–9 классы

1. Да, на 200. Заметим, что  $(a+2)^2 - (a+1)^2 = (a+1)^2 - a^2 + 2$ . Поэтому второе изменение на 2·100 больше первого.
2. Если первый надкушенный пирожок окажется с мясом, то вкусный пирожок находится в группе следующих по кругу семи пирожков, если же с капустой, то – в группе предыдущих. В любом случае в этой группе пирожки идут в порядке мясо-вишня-капуста. Оле нужно надкусить центральный пирожок в этой группе. Если он с мясом, то вкусный пирожок находится в тройке следующих пирожков, если с капустой, то в тройке предыдущих. Надкусив центральный пирожок в этой тройке, Оля таким же образом узнает, какой из пирожков вкусный. Значит, если за три надкусывания Оля не попался вкусный пирожок, то в четвертый раз она уже точно сможет съесть его.

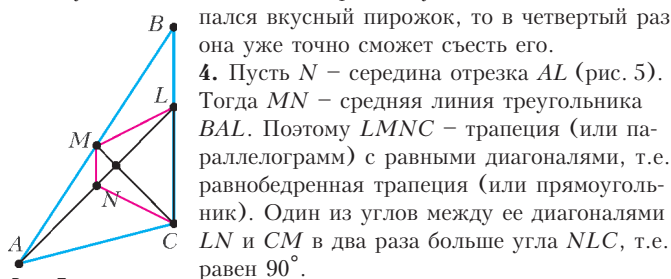


Рис. 5

4. Пусть  $N$  – середина отрезка  $AL$  (рис. 5). Тогда  $MN$  – средняя линия треугольника  $BAL$ . Поэтому  $LMNC$  – трапеция (или параллелограмм) с равными диагоналями, т.е. равнобедренная трапеция (или прямоугольник). Один из углов между ее диагоналями  $LN$  и  $CM$  в два раза больше угла  $NLC$ , т.е. равен  $90^\circ$ .
5. Смогут.

За пять рейсов можно переправить *основную четверку* (Али-Бабу и первых трех разбойников): сначала переправляются Али-Баба и первые два разбойника, затем 1-й и 2-й возвращаются, переправляются 2-й и 3-й разбойники, и, наконец, Али-Баба со 2-м возвращаются и забирают 1-го. После этого 2-й и 3-й возвращаются, переправляются 39-й и 40-й, и Али-Баба с 1-м возвращаются. Итак, за восемь рейсов переправились последние два разбойника. За следующие восемь рейсов аналогично переправляются 37-й и 38-й, и т.д. Когда на исходном берегу останутся Али-Баба и первые 4 разбойника, снова переправляется основная четверка, 2-й и 3-й возвращаются, переправляются 3-й и 4-й, и Али-Баба с 1-м возвращаются за 2-м.

1. 9 капель. Склеив попарно камни с массами 1 и 18, 2 и 17, ..., 9 и 10, Шапокляк получит набор, в котором каждый камень весит от 19 до 36 г, поэтому одного камня Чебурашке будет мало, а двух – уже много. Теперь покажем, что 8 каплями Шапокляк не обойдется. Если Шапокляк использует только 8 капель, то в склейках будут участвовать не больше 16 исходных камней. Поэтому хотя бы одна из 18 пар  $\{1, 36\}$ ,  $\{2, 35\}$ , ...,  $\{18, 19\}$  окажется «нетронутой», и Чебурашка сможет выбрать ее.

2. Достаточно доказать, что  $\frac{AM}{MD} = \frac{CN}{ND}$ .

Проведем через точки  $A$  и  $C$  прямые, параллельные  $MB$  и  $NB$  соответственно (рис. 6). Они пересекутся в точке  $L$ . Тогда прямые  $CB$  и  $AB$  будут высотами в треугольнике  $ALC$ . Значит, прямая  $LB$  – тоже высота. Следовательно, точка  $L$  лежит на прямой  $BD$ . Поэтому  $\frac{AM}{MD} = \frac{BL}{BD} = \frac{CN}{ND}$ .

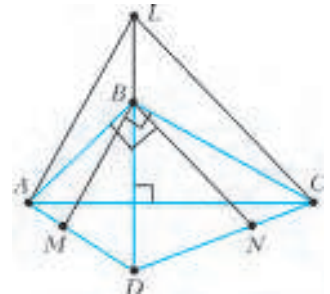


Рис. 6

4. Запишем равенство в виде  $a(c-b) = d(c+10b)$ . Так как  $a$  и  $d$  взаимно просты,  $c-b$  делится на  $d$ :  $c-b = md$ . Подставив, получим  $ma = c + 10b = md + 11b$ , т.е.  $m(a-d) = 11b$ . Аналогично,  $a-d = nb$ ,  $n(c-b) = 11d$ . Перемножив, получим  $121bd = mn(ac - ab - cd + bd) = 11mnbcd$ . Отсюда  $mn = 11$ . Следовательно, либо  $m$ , либо  $n$  равно 1. В первом случае  $c = b + d$ , во втором  $a = b + d$ .

5. Не могли. Рассмотрев путь от  $A$  до  $C$  и путь от  $B$  до  $D$ , получим, что скорость Пети больше скоростей и Васи, и Толи. Предположим, что Вася с Толей встретились в точке  $O$ . Петя в этот момент был в некоторой точке  $Z$  стороны  $BC$ . Из полученных неравенств на скорости следует, что  $BO < BZ$  и  $OC < ZC$ . Но тогда  $BO + OC < BZ + ZC = BC$ , что противоречит неравенству треугольника.

СЛОЖНЫЙ ВАРИАНТ

8–9 классы

1. 11 или 121. Всего была роздана 121 сладость, причем все дети получили поровну. Значит, количество детей – делитель 121, т.е. 1, 11 или 121. Первый случай, очевидно, не подходит. Во втором случае 8 мальчиков получили по 4 шоколадки и по 7 мармеладок, а 3 девочки – по 5 шоколадок и по 6 мармеладок. В третьем случае 47 девочек получили по шоколадке, а 74 мальчика – по мармеладке. (Если считать, что каждый ребенок должен был получить и шоколадку, и мармеладку, то третий случай исключается.)
2. 9 клеток. Если Петя отметит клетки, указанные на рисунке 7, то Вася не сможет одним углом накрыть больше одной отмеченной клетки. Но 9 уголков без наложений нельзя разместить на доске, так как  $27 > 25$ .

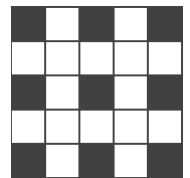


Рис. 7

Докажем, что если Петя отметит меньше 9 клеток, то он проиграет. В самом деле, в этом случае хотя бы одна из указанных в примере черных клеток не будет отмечена. Тогда Вася сможет накрыть все клетки доски, кроме нее. Действительно, на рисунке 8 заштрихованные клетки можно дополнить до



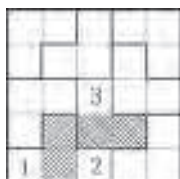


Рис. 8

уголков так, чтобы свободной оказалась только одна из клеток 1, 2 или 3. Если нужно исключить другую черную клетку, рисунок нужно повернуть.

**3.** Назовем *весом* свисающего треугольного куска длину его высоты, проведенной из прямого угла. Очевидно, все свисающие куски подобны между собой. Значит, равенство кусков равносильно равенству их весов. Поэтому достаточно показать равенство сумм весов противоположных кусков. Добавляя к этим суммам длину стороны стола, получаем длины проекций диагоналей скатерти на прямые, содержащие стороны стола (рис. 9). Так как диагонали равны и перпендикулярны и стороны стола перпендикулярны, то длины этих проекций равны. Итак, два других куска тоже равны.

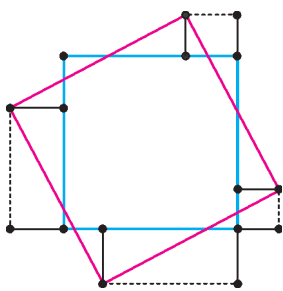


Рис. 9

**4.** См. решение задачи 3 для 10–11 классов.

**5.** Обязательно.

Поставим в каждой точке число 1.

Пусть для какой-то точки числа на всех стрелках с концом в этой точке (входящих, если точка черная, или выходящих, если она белая) имеют общий простой делитель  $p > 1$ . Тогда домножим число в этой точке на  $p$ , а все числа на этих стрелках поделим на  $p$ . Заметим, что для каждой стрелки эта операция не меняет произведения трех чисел: на стрелке и в обоих ее концах оно останется равным исходному числу на стрелке. Будем выполнять такие операции, пока возможно.

Когда-нибудь процесс остановится, поскольку уменьшается произведение всех чисел на стрелках. Предположим, что в этот момент на какой-то стрелке стоит число  $a \neq 1$ . Возьмем любой простой делитель  $p$  числа  $a$ . Для каждого из концов этой стрелки найдется стрелка с этим концом, число на которой не делится на  $p$ . Получается ситуация, изображенная на рисунке 10. Для этого замкнутого маршрута должно выполняться равенство  $(AaB)(CcD) = (BbC)(DdA)$ , т.е.  $ac = bd$ , что невозможно. Значит, на всех стрелках уже стоит 1. Следовательно, для каждой стрелки произведение итоговых чисел на ее концах равняется исходному числу на ней.

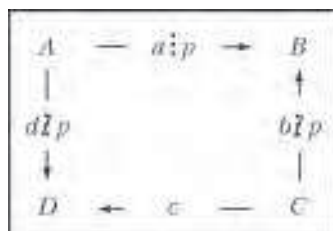


Рис. 10

**6.** 14 кубиков.

На рисунке 11 показаны три слоя куба (нижний, средний и верхний), где черным отмечено, какие 13 кубиков можно ос-



Рис. 11

тавить. В каждом слое есть кубики во всех столбцах и строках. При наложении слоев получается черный квадрат 3 на 3. Поэтому первое условие выполнено. Нижний и средний слои связаны и склеиваются центральными кубиками. Каждый кубик верхнего слоя склеен с соответствующим кубиком среднего слоя. Значит, и второе условие выполнено.

Теперь докажем, что меньше 13 кубиков оставить нельзя.

Пусть осталось  $n$  кубиков. Мы видим  $6 \cdot 9$  их граней. Для

связности необходима хотя бы  $n - 1$  склейка. Значит, еще хотя бы  $2n - 2$  граней мы не видим. Поэтому  $2n - 2 + 54 \leq 6n$ , откуда  $n \geq 13$ .

**7.** Можно.

Десять кузнечиков разбивают окружность на 10 дуг. Покрасим эти дуги поочередно в синий и красный цвета. Изначально суммы длин синих и красных дуг равны, поскольку дуга, симметричная синей дуге относительно центра, красная, и наоборот. Из рисунка 12 видно, что прыжок кузнечика не меняет указанные суммы. В конечной расстановке мы знаем четыре синие дуги и знаем, куда откладывать пятую, следовательно, позиция 10-го кузнечика однозначна. С другой стороны, как мы уже показывали, нахождение его в  $A_{10}$  нам подходит.

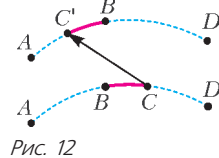


Рис. 12

10–11 классы

**1.** Может.

Он мог написать  $2 \cdot 2013 + 1$  единиц и расставить на любые 2013 мест знаки «+», а на остальные 2013 – знаки «x». В любом случае значение выражения равно 2014, и произвольная перестановка знаков его не изменит.

**2.** а) Верно.

Каждой точке  $X$  границы многоугольника соответствует «противоположная» точка  $X'$ : эти две точки разбивают периметр многоугольника пополам. Следовательно, точкой  $X$  однозначно определяются прямая разбиения  $XX'$  и два многоугольника равных периметров – *правый*  $R_X$  (справа от луча  $XX'$ ) и *левый*  $L_X$ . То, что получаются именно многоугольники, следует из выпуклости и неравенства многоугольника.

Занумеруем стороны многоугольника. Для каждой точки  $X$  границы пусть  $d_i(X)$  – длина куса  $i$ -й стороны, входящего в  $R_X$  (если вся сторона попала в  $L_X$ , то  $d_i(X) = 0$ );  $d_0(X)$  – длина отрезка  $XX'$ . Очевидно, все функции  $d_0(X)$ ,  $d_1(X)$ ,  $d_2(X)$ , ... непрерывны. Но тогда непрерывна и функция  $d_R(X) = \max\{d_0(X), d_1(X), d_2(X), \dots\}$ , а это как раз длина наибольшей стороны многоугольника  $R_X$ .

Аналогично, непрерывна функция  $d_L(X)$  – длина наибольшей стороны многоугольника  $L_X$ . Непрерывная функция  $d_R(X) - d_L(X)$  в точках  $A$  и  $A'$  принимает противоположные значения. Поэтому найдется точка  $X$ , в которой  $d_R(X) - d_L(X) = 0$ , что и требовалось.

б) Неверно.

Казалось бы, можно написать решение аналогично пункту а), рассмотрев функцию  $\min\{d_0(X), d_1(X), d_2(X), \dots\}$ . Но она не будет равна длине наименьшей стороны многоугольника  $R_X$ , когда среди чисел, из которых берется минимум, встретится ноль. Функцию надо положить равной минимальному *ненулевому* числу из  $d_0(X)$ ,  $d_1(X)$ ,  $d_2(X)$ , ..., но такая функция уже не будет непрерывной – когда какая-то сторона будет приближаться к нулю (при изменении  $X$ ), в момент равенства нулю этой стороны она исчезнет, и в многоугольнике минимальной станет другая сторона с ненулевой длиной, т.е. длина минимальной стороны возрастет скачком.

Приведем теперь пример, когда сделать требуемое в задаче разрезание невозможно. В качестве многоугольника возьмем треугольник  $ABC$  с длинами сторон 9, 10, 11. Его полупериметр равен 15, а площадь (по формуле Герона) равна  $30\sqrt{2} > 40$ . Значит, наименьшая из высот этого треугольника больше 7.

Пусть разрез проходит через одну из вершин (рис. 13, а).

Тогда длина разреза больше 7, а отрезки, на которые он делит противоположную сторону не больше  $15 - 9 = 6$ . Значит,

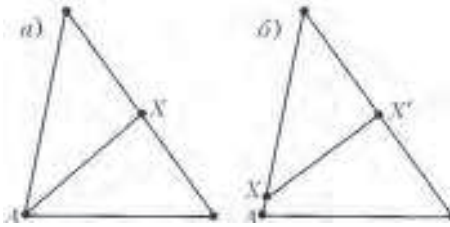


Рис. 13

они и являются наименьшими сторонами двух полученных треугольников. Но эти отрезки, очевидно, не равны. Пусть разрез  $XX'$  не проходит через вершину (рис. 13,б). Тогда исходный треугольник разрезается на треугольник и четырехугольник. В получившемся четырехугольнике наименьшая сторона (пусть это  $AX$ ) не превосходит  $(15 - 9) : 2 = 3$ . Рассмотрим стороны получившегося треугольника, лежащие на сторонах исходного. Меньшая из них больше  $15 - 11 = 4$ . Длина разреза  $XX' > AX' - AX > 7 - 3 = 4$ . Итак, наименьшая сторона получившегося четырехугольника меньше наименьшей стороны получившегося треугольника.

**3.** Докажем, что можно ограничиться потерей 101 волоска у каждого мудреца. Пусть первый напишет на карточках числа  $1, 2, 4, \dots, 2^{99}$ , а второму сообщит эти числа и их сумму. Второй, услышав число 1, поймет, что есть карточка, не превосходящая 1. Услышав очередное число  $2^k$ , он поймет, что есть еще одна карточка, не превосходящая  $2^k$ , поскольку сумма оцененных уже карточек не превосходит  $1 + 2 + \dots + 2^{k-1} < 2^k$ . Когда он услышит  $2^{100} - 1$ , он уже будет знать, что сумма 100 карточек не больше этого числа. Значит, это и есть сумма, все оценки превращаются в равенства, и второй определит все карточки.

Теперь докажем, что потерей 100 волосков не обойтись. Пусть второму сообщены 100 различных чисел и  $a < b$  - два из них. Тогда все услышанные числа могут быть написаны на карточках. Но кроме этого набора карточек подойдет и набор с числом  $b - a$  вместо  $b$ .

**6.** Рассмотрим страну из 12 городов, соединенных дорогами так, как показано на рисунке 14. Заметим, что рисунок симметричен относительно каждого диаметра, проходящего через

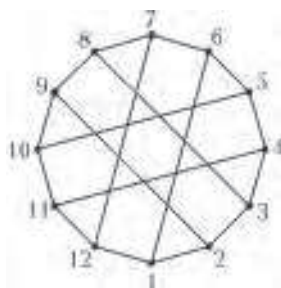


Рис. 14

середины малых хорд окружности, на которой лежат все города. Этими симметриями мы можем поменять номерами любую пару соседних по кругу городов. А с помощью нескольких симметрий каждый номер можно перевести в любой другой, т.е. условие выполнено. Предположим, что нам удалось поменять номерами города 1 и 3 с сохранением списка соседних городов. Тогда их един-

ственный общий сосед 2 обязан сохранить свой номер. Оставшемуся соседу 9 города 2 тоже придется сохранить номер. Но у городов 3 и 9 два общих соседа (2 и 8), а у 1 и 9 - только один. Противоречие.

*Замечание.* Этот пример, конечно, не единственный. Например, если у правильного тетраэдра срезать вершины, получится другой граф с 12 вершинами и 18 ребрами, также обладающий нужными свойствами.

**7.** Будем говорить, что два многочлена сравнимы по модулю  $x^{100}$ , если у них совпадают коэффициенты при всех степенях от нулевой до 99-й. Так,  $(P(x))^2 \equiv 1 + x \pmod{x^{100}}$ .

Сумма  $(P(x) + 1)^{100} + (P(x) - 1)^{100}$  есть многочлен 50-й степени от  $(P(x))^2$ . Значит, она сравнима по модулю  $x^{100}$  с мно-

гочленом 50-й степени. В частности, коэффициент при  $x^{99}$  равен нулю. Это значит, что коэффициенты при  $x^{99}$  в многочленах  $(P(x) + 1)^{100}$  и  $(P(x) - 1)^{100}$  равны по модулю, но отличаются знаком. Но  $P(x) - 1$  делится на  $x$ . Следовательно,  $(P(x) - 1)^{100}$  делится на  $x^{100}$ , и коэффициент при  $x^{99}$  равен нулю.

УСТНЫЙ ТУР ДЛЯ 11 КЛАССА

1. 1007.

Если  $p, q \in A$  и  $2p \leq q$ , то дискриминант трехчлена  $px^2 + qx + p$  неотрицательный, значит, у него есть корни. Таким образом, множество  $A$  не содержит чисел, отличающихся хотя бы вдвое.

Покажем, что если в  $A$  отношение любых двух чисел меньше 2, то все трехчлены с коэффициентами из  $A$  не имеют корней. Пусть  $M$  - наибольшее из чисел в  $A$ , а  $m$  - наименьшее. Тогда дискриминант трехчлена с коэффициентами из  $A$  не больше  $M^2 - 4m^2 < 0$ .

Очевидно, что максимальное подмножество  $\{1, \dots, 2014\}$ , в котором отношение любых двух чисел меньше 2, имеет мощность 1007 (подходит, например,  $\{1008, \dots, 2014\}$ , а если бы в подобном подмножестве было хотя бы 1008 чисел, то отношение самого большого числа  $m$  к самому маленькому было бы не меньше  $\frac{m}{m - 1007} \geq 2$ , поскольку  $m \leq 2014$ ).

**2.** Проведем через точку  $B$  прямую, параллельную основанию  $AC$  (рис. 15). Пусть она пересекает продолжение внутренней биссектрисы угла  $A$  в точке  $Q_1$ , а внешнюю биссектрису угла  $A$  - в точке  $R$ . Обозначив угол  $A$  исходного треугольника за  $2\alpha$ , получаем  $\alpha = \angle BAQ_1 = \angle CAQ_1 = \angle CAQ_1 = \angle BQ_1A$ , откуда  $AB = BQ_1$ .

Так как внутренняя и внешняя биссектрисы угла  $A$  перпендикулярны, то  $\angle RAQ_1 = \angle RAB + \alpha = 90^\circ$ . Но из прямоугольного треугольника  $RAQ_1$  имеем  $\angle BRA + \alpha = 90^\circ$ , откуда  $\angle BAR = \angle BRA$ , значит,  $BR = BA$ , и, следовательно,  $BR = BQ_1$ .

Продлим теперь  $Q_1C$  до пересечения с внешней биссектрисой угла  $A$  в точке  $P_1$ . Тогда  $P_1B$  разделит  $AC$  пополам (так как  $AC \parallel RQ_1$  и  $B$  делит  $RQ_1$  пополам), откуда  $P = P_1$ , а значит,  $Q = Q_1$  и  $AB = BQ$ .

**4. Указание.** Переобозначим наш тетраэдр  $KML'N'$  и впишем его в параллелепипед  $KLMNK'L'M'N'$ . Тогда в каждой его грани диагонали равны (ибо они равны противоположным ребрам тетраэдра, которые одинаковы в силу равногранности тетраэдра). Значит, параллелепипед прямоугольный. Тогда из симметрии (относительно плоскости  $KMK'M'$ ) очевидно, что плоскость  $KLMN$  образует равные углы с плоскостями  $KML'$  и  $KMN'$ ; из этого и подобных свойств следует, что искомые центры вневписанных сфер - это  $K', M', L$  и  $N$ . Теперь утверждение задачи очевидно из симметрии относительно центра параллелепипеда.

**5.** Докажем более общее утверждение для следующей  $(m, n)$ -игры для любых натуральных  $m, n$ .

В белом клетчатом прямоугольнике  $M \times N$  ( $M$  строк и  $N$  столбцов), где  $M > m$ ,  $N > n$ , в черный цвет покрасили  $K$  клеток. За ход выбирают строку, в которой черных клеток хотя бы  $n$ , и красят все ее белые клетки в черный цвет, или выбирают столбец, в котором черных клеток хотя бы

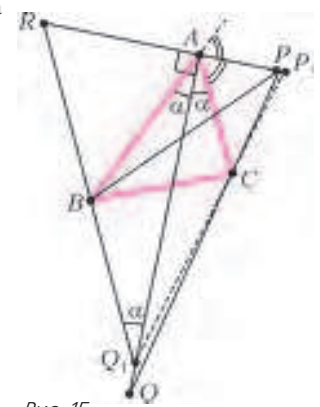


Рис. 15

$m$ , и красят все его белые клетки в черный цвет. Тогда если после нескольких таких ходов все клетки станут черными, то  $K \geq mn$ .

Индукция по  $m + n$ . При  $m = 1$  утверждение верно: чтобы закрасить в итоге все клетки, в начале должно быть не менее  $n$  столбцов, в которых есть хоть одна черная клетка. Аналогично, утверждение верно при  $n = 1$ .

Рассмотрим теперь  $(m, n)$ -игру в прямоугольнике  $M \times N$ , где  $M > m > 1$ ,  $N > n > 1$ . Очевидно, хотя бы один ход был сделан. Пусть для определенности этот ход был в последней строке (от перестановки строк и столбцов условие задачи не меняется, для первого хода в столбце рассуждения аналогичны). Тогда далее мы можем отбросить эту строку и считать, что происходит  $(m - 1, n)$ -игра в прямоугольнике  $(M - 1) \times N$ . По предположению индукции в этом прямоугольнике изначально не менее  $(m - 1)n$  черных клеток. Плюс не менее  $n$  черных клеток в последней строке. Итого, не менее чем  $(m - 1)n + n = mn$  черных клеток.

**6.** Под квадрантом будем всегда понимать квадрант без границы. Так как в первом квадранте (и только там) многочлен положителен, то на границе этого квадранта он равен 0 (из непрерывности). Но тогда этот многочлен делится на  $xy$  (записав  $P$  в виде  $P(x, y) = yQ(x, y) + R(x)$  и положив  $y = 0$ , получаем, что  $R(x) \equiv 0$  при  $x \geq 0$ , т.е.  $P(x, y)$  делится на  $y$ ; аналогично, он делится на  $x$ ). Представим его в виде  $P(x, y) = xyQ(x, y)$ . Заметим, что знак  $Q(x, y)$  совпадает со знаком  $P(x, y)$  в первом и третьем квадрантах и отличается во втором и четвертом. Так как  $P(x, y)$  положителен в первом квадранте и неположителен в других квадрантах, то  $Q(x, y)$  неотрицателен в первом, втором и четвертом квадрантах, а в третьем квадранте – неположителен. Значит, он равен нулю на границе третьего квадранта, т.е. тоже делится на  $xy$ , откуда  $P(x, y) = (xy)^2 Q_1(x, y)$ , и теперь знаки  $P$  и  $Q_1$  уже совпадают во всех точках. Эти рассуждения можно продолжать до бесконечности, но степень  $P$  конечна. Значит,  $P \equiv 0$ , что противоречит условию задачи.

### ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ LXXVII МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

- Одно из возможных решений приведено на рисунке 16.
- $1\ 8\ 3 + 1\ 8\ 3\ 9 - 8 = 2014$   
МАТЕМАТИКА

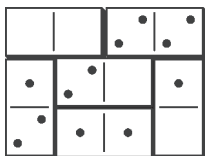


Рис. 16

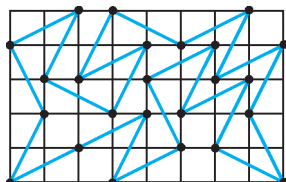


Рис. 17

- Наиболее длинный известный жюри замкнутый путь (24 диагонали) изображен на рисунке 17.
- Петя может выиграть.

Пускай Петя первым ходом заменит 2015 на 2014, а каждым следующим ходом будет уравнивать числа (он всегда может это сделать, повторив ход Васи с тем числом, которое Вася не менял; см. рис. 18).



Рис. 18

Если Петя будет действовать так всю игру, то, конечно, в некоторый момент Вася сделает из одного из двух одинаковых чисел однозначное и выиграет.

Но посмотрим на этот момент внимательнее. Если Вася выиграл, заменив одно из двух чисел  $X$  на однозначное, то перед этим, на ходу Пети, одно из двух чисел  $X$  на доске уже было. В этот момент Петя может заменить  $X$  на однозначное число и выиграть (рис. 19). Петя может так пойти, потому что у

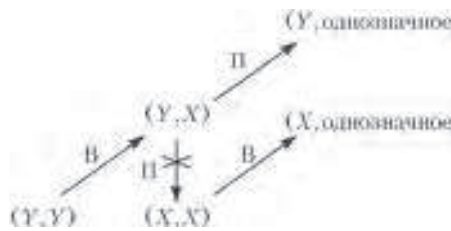


Рис. 19

него есть все возможности, которые были у Васи на последнем, выигрышном, ходе: делить число  $X$  пополам, если оно четное, и вычитать из него его же цифру.

Итак, сформулируем стратегию Пети полностью: «если одно из чисел можно заменить на однозначное – сделать это; в противном случае уравнивать два числа».

- Да.

Один из возможных примеров изображен на рисунке 20.

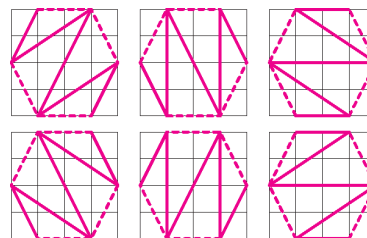


Рис. 20

- Да, мог.

Разбиение чисел от 7 до 2014 на пары «первое – с последним, второе – с предпоследним и т.д.» дает четное число пар с суммой 2021. Ну а числа от 1 до 6 можно разбить как

$$(3 + 6) \cdot (2 + 4) \cdot (1 + 5) = 3^2 \cdot 6^2.$$

- Пусть продолжение перпендикуляра, опущенного на прямую  $BD$  из точки  $M$ , пересекает сторону  $AD$  в точке  $E$  (рис. 21). Мы хотим доказать, что прямые  $CE$  и  $BM$  перпендикулярны.

Обозначим через  $F$  точку пересечения прямых  $ME$  и  $BC$  и посмотрим на треугольник  $BDF$ : в нем высоты  $DC$  и  $FE$  пересекаются в точке  $M$ . Значит, и прямая  $BM$  является высотой этого треугольника,  $BM \perp DF$ . Но четырехугольник  $CFDE$  является параллелограммом (действительно, треугольники  $EMD$  и  $FMC$  равны по катету и острому углу, поэтому отрезки  $CF$  и  $ED$  равны и параллельны). Поэтому раз прямая  $BM$  перпендикулярна прямой  $DF$ , она перпендикулярна и прямой  $CE$ .

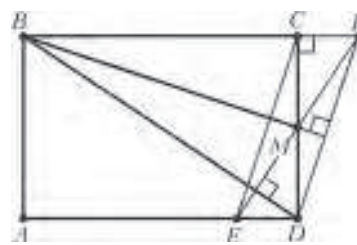


Рис. 21

- Нужно построить либо 16 одноэтажных и 7 двухэтажных, либо 14 одноэтажных и 8 двухэтажных башен.

Докажем сначала, что башни высоты больше 2 строить бессмысленно.

Действительно, пусть какая-то из башен имеет высоту  $h > 2$ . Сбросим с нее верхний этаж, превратив его в новую башню



высоты 1 (рис. 22). Как после этого изменится сумма у инспектора? С укороченной нами башни теперь не видны башни высоты  $h - 1$ . Зато, так как  $h > 2$ , со всех этих башен (включая укороченную) стала видна новая башня. Значит, вся сумма увеличилась.

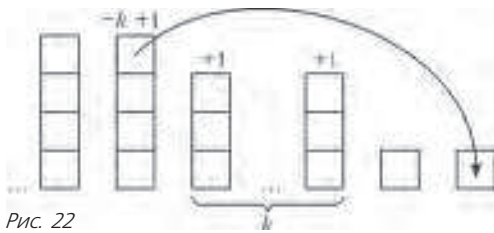


Рис. 22

Осталось изучить случай, в котором все башни имеют высоту 1 или 2. Если первых  $X$ , а вторых  $Y$  (по условию  $18X + 2Y = 30$ ), то сумма у инспектора равна

$$XY = (30 - 2Y)Y = 2Y(15 - Y) = 2(7,5^2 - (Y - 7,5)^2).$$

Для целых  $Y$  это выражение принимает максимальное значение при  $Y = 7$  и  $Y = 8$  и равно 112.

**9.** Можно ничего не заплатить.

Прежде чем тратить деньги, подумаем. Пусть  $l_1, l_2, l_3$  – веса трех выделенных жирным (рис. 23) наклонных рядов,  $v_1, v_2, v_3$  – веса трех вертикальных рядов. Тогда  $l_1 + l_2 + l_3 = v_1 + v_2 + v_3$ : и то, и другое – это просто сумма весов

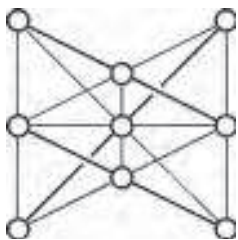


Рис. 23

всех девяти яблок. Но, по меньшей мере, пять из шести этих величин равны одной и той же величине  $t$ , значит, равны и все шесть (действительно, перенеся пять слагаемых, равных  $t$ , в одну часть, мы получаем, что и оставшаяся величина равна  $3t - 2t = t$ ). Аналогичным образом получаем, что веса остальных трех наклонных рядов тоже равны  $t$ . Мы нашли девять рядов, веса которых равны. Значит, отличается вес оставшегося ряда, горизонтального.

*Комментарий.* Описанная ситуация действительно возможна – см. рисунок 24 (подойдут любые  $a, b, c$  такие, что

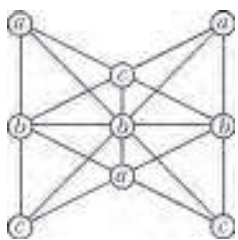


Рис. 24

$2b \neq a + c$ ; можно показать, что все примеры имеют такой вид).

**10.** Пусть трехчлен  $ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c$  – нечетные числа) имеет корень вида  $1/n$ . Домножив равенство на  $n^2$ , получаем  $a + bn + cn^2 = 0$ . Если  $n$  четно, то первое слагаемое нечетно, а следующие два четны, поэтому результат нечетный и нулем оказаться не может. Если же  $n$  нечетно, то все три слагаемых нечетны, и получаем аналогичное противоречие. Значит, корня вида  $1/n$  у такого трехчлена не бывает.

**11.** 10.

Сначала покажем, что  $k$ , равного 10, нам хватит. Будем идти вдоль ряда рубашек и считать отдельно белые и фиолетовые рубашки. Как только мы насчитаем 11 одноцветных – допустим, без ограничения общности, что фиолетовых – рубашек, остановимся. Теперь снимем все белые рубашки, которые мы прошли (их не больше 10), и все фиолетовые рубашки, до которых мы еще не дошли (их ровно 10). При необходимости снимем еще несколько белых рубашек. Очевидно, что все 11 фиолетовых рубашек висят подряд (все белые рубашки, висевшие между ними, мы сняли). Оставшиеся белые рубашки тоже висят подряд: все оставшиеся фиолетовые рубашки мы сняли.

Теперь покажем, что рубашки могут висеть так, что меньшего  $k$  нам может не хватить. Допустим, что рубашки висят в следующем порядке: сначала идут 10 белых рубашек, затем 21 фиолетовая и затем еще 11 белых. В этом случае после снятия  $k < 10$  рубашек каждого цвета первой и последней рубашкой будут белые. Следовательно, белые рубашки не будут идти подряд.

**12.** 4.

Из трех палочек длин  $a \leq b \leq c$  можно составить треугольник, если  $a + b > c$ . По теореме косинусов этот треугольник тупоугольный тогда и только тогда, когда  $a^2 + b^2 < c^2$ . Пусть  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  – длины палочек.

Предположим, что  $n \geq 5$ . Тогда

$$a_5^2 > a_4^2 + a_3^2 \geq 2a_3^2 > 2a_2^2 + 2a_1^2.$$

С другой стороны, по неравенству треугольника  $a_5 < a_1 + a_2$ . Возведем в квадрат (обе части неравенства положительны):

$$a_5^2 < a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2.$$

Сравнив с предыдущим, получаем

$$a_1^2 + a_2^2 < 2a_1a_2,$$

что невозможно.

Пример для  $n = 4$  можно построить следующим образом.

Возьмем  $a_1 = 1$  и  $a_2 = 1$ , выберем  $a_3$  чуть больше, чем

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \text{ а } a_4 \text{ чуть больше, чем } \sqrt{a_2^2 + a_3^2}.$$

Например, подходят значения 1; 1; 1,5; 1,9.

**13.** Да, такая тройка существует.

Будем искать пример в виде  $C = 10^n, B = 1, A = 10^n - 1$ .

Докажем сначала, что для любого натурального  $k$  существует  $n$  такое, что  $10^n - 1$  кратно  $3^{k+1}$ . Докажем это индукцией по  $k$ . База:  $10^1 - 1$  кратно  $3^2$ . Переход: если  $10^n - 1$  кратно  $3^{k+1}$ , то  $10^{3n} - 1 = (10^n - 1)(10^{2n} + 10^n + 1)$  кратно  $3^{k+2}$ , так как  $10^{2n} + 10^n + 1$  делится на 3.

Возьмем теперь  $k$  такое, что  $3^k > 10000$ , и  $n$  такое, что  $10^n - 1$  кратно  $3^{k+1}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \text{rad}(ABC) &= \text{rad}(10^n(10^n - 1)) = \\ &= 10 \text{rad}(10^n - 1) \leq 10 \cdot \frac{10^n - 1}{3^k} < \frac{10^{n+1}}{10000} = \frac{C}{1000}. \end{aligned}$$

*Комментарии.* 1. Можно было воспользоваться теоремой Эйлера: так как  $\phi(3^{k+1}) = 2 \cdot 3^k$ , то  $10^{2 \cdot 3^k} - 1$  кратно  $3^{k+1}$ .

2. Знаменитая *ABC-гипотеза* (выдвинутая независимо Эстерле и Массером в 1980-х годах) состоит в том, что для любого  $\epsilon > 0$  существует такая константа  $k$ , что для любых попарно взаимно простых чисел  $A, B, C$ , таких что  $A + B = C$ , имеет место неравенство  $C < k \cdot \text{rad}(ABC)^{1+\epsilon}$ .

Из ее справедливости следует целый ряд знаменитых утверждений теории чисел. Например, нетрудно видеть, что если *ABC-гипотеза* верна, то уравнение Ферма  $x^n + y^n = z^n$  имеет лишь конечное число решений с  $n > 2$ .

Приведенная задача состоит, по существу, в том, что формулировку *ABC-гипотезы* нельзя усилить, заменив  $1 + \epsilon$  на 1.

Больше об *ABC-гипотезе* и ее следствиях можно узнать из лекции Д.О.Орлова на закрытии олимпиады или из видеозаписей лекций Д.О.Орлова [1] и К.Конрада [2] на Летней школе «Современная математика».

[1] [www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?presentid=2338](http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?presentid=2338)

[2] [www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?presentid=7258](http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?presentid=7258)

**14.** По условию,

$$0 > f(c)f\left(\frac{1}{a}\right) = (ac^2 + bc + c)\left(a\frac{1}{a^2} + b\frac{1}{a} + c\right) = \frac{c}{a}(ac + b + 1)^2.$$

Следовательно,  $\frac{c}{a} < 0$ . Но по теореме Виета  $\frac{c}{a}$  равно произведению корней  $f(x)$ , поэтому они разных знаков.

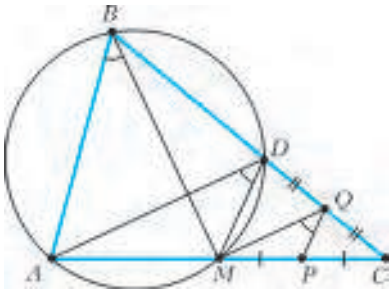


Рис. 25

15. Проведем через  $M$  прямую, параллельную  $PQ$ , до пересечения со стороной  $BC$  в точке  $D$  (рис. 25). Тогда в треугольнике  $MDC$  отрезок  $PQ$  является средней линией и делит сторону  $DC$  пополам. Следовательно, в треугольнике  $ADC$  отрезок  $MQ$  – средняя линия,

а значит, параллелен  $AD$ . Отсюда имеем равенство углов между параллельными прямыми:  $\angle ADM = \angle MQP$ . Осталось заметить, что  $\angle BAM = 180^\circ - \angle BQP = 180^\circ - \angle BDM$ , откуда получаем вписанность четырехугольника  $ABDM$  и, как следствие, равенство углов  $\angle ABM = \angle ADM$ .

16.  $a = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

Числа  $\cos(x+a), \cos(y+a), \cos(z+a)$  образуют арифметическую прогрессию, значит,

$$2\cos(y+a) = \cos(x+a) + \cos(z+a),$$

$$2\cos y \cos a - 2\sin y \sin a =$$

$$= \cos x \cos a - \sin x \sin a + \cos z \cos a - \sin z \sin a,$$

$$(2\cos y - \cos x - \cos z) \cos a = (2\sin y - \sin x - \sin z) \sin a.$$

По условию числа  $\cos x, \cos y, \cos z$  также образуют арифметическую прогрессию, значит,  $2\cos y = \cos x + \cos z$  и поэтому левая часть этого равенства равна нулю. Следовательно, либо  $\sin a = 0$  и  $a = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ , либо  $2\sin y = \sin x + \sin z$ , т. е.

числа  $\sin x, \sin y, \sin z$  также образуют арифметическую прогрессию. Но в последнем случае точка с координатами  $(\cos y, \sin y)$  является серединой отрезка с концами в точках  $(\cos x, \sin x), (\cos z, \sin z)$  и при этом все три точки лежат на единичной окружности с центром в начале координат, что невозможно. Для  $a = \pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ , подходящим примером являются числа  $x = 0, y = \frac{\pi}{2}, z = \pi$ .

17. а) Заметим, что  $\angle CDA = \angle ABC$  как противоположные углы параллелограмма. Тогда  $\angle CDA + \angle POC = \angle AOP + \angle POC = 180^\circ$ . Следовательно, точки  $P, O, C$  и  $D$  лежат на одной окружности (рис. 26). Аналогично, точки  $Q, O, A$  и  $D$  лежат на одной окружности. По теореме об отрезках секущих

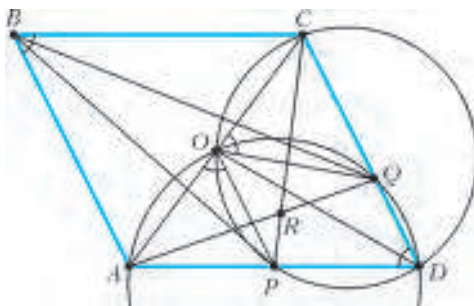


Рис. 26

имеем  $CQ \cdot CD = CO \cdot CA = AO \cdot AC = AP \cdot AD$ . Отсюда получаем, что  $AP : CQ = CD : AD = BA : BC$ . Следовательно, треугольники  $BAP$  и  $BCQ$  подобны по равным углам  $\angle BAP = \angle BCQ$  и пропорциональным сторонам  $BA : BC = AP : CQ$ . Значит,  $\angle ABP = \angle CBQ$ .

б) Заметим, что  $\angle OAQ = \angle ODQ$  как вписанные, опирающиеся на одну дугу  $OQ$ . Аналогично,  $\angle OCP = \angle ODP$ . Пусть  $R$  – точка пересечения  $AQ$  и  $CP$ . Тогда

$$\begin{aligned} \angle ABC + \angle ARC &= \angle ADC + \angle ARC = \\ &= \angle ODP + \angle ODQ + \angle ARC = \angle OCP + \angle OAQ + \angle ARC = 180^\circ. \end{aligned}$$

Следовательно, точки  $A, B, C$  и  $R$  лежат на одной окружности. 18. 5.

Покажем, что условия задачи выполнены, если исправными остались кнопки с цифрами 0, 1, 3, 4, 5. Действительно, любая цифра от 0 до 9 может быть представлена в виде суммы некоторых двух «рабочих» цифр. Пусть число от 1 до 99999999, которое мы хотим получить, состоит из цифр  $a_1, a_2, \dots, a_8$  (некоторые из них, в том числе и первые, могут быть нулевыми). Представим каждую из них в виде суммы двух «рабочих» цифр:  $a_1 = b_1 + c_1, a_2 = b_2 + c_2, \dots, a_8 = b_8 + c_8$ . Тогда число, составленное из «рабочих» цифр  $b_1, b_2, \dots, b_8$ , и число, составленное из «рабочих» цифр  $c_1, c_2, \dots, c_8$ , дают в сумме желаемое число.

Предположим, что добиться желаемого можно для некоторого набора из четырех или меньше «рабочих» цифр. Пусть  $a$  – какая-либо из цифр 0, 1, 2, ..., 9. Среди чисел от 1 до 99999999 найдется такое, которое заканчивается на  $a$  и содержит в своей десятичной записи нерабочие цифры. Тогда это число можно представить в виде суммы двух чисел, в записи которых содержатся только рабочие цифры. Поэтому для любой цифры  $a$  от 0 до 9 найдутся такие две «рабочие» цифры (возможно, совпадающие), что их сумма оканчивается на  $a$ . С другой стороны, нетрудно видеть, что среди всех сумм пар «рабочих» цифр может быть не более четырех нечетных чисел. Поэтому какая-то из цифр 1, 3, 5, 7 или 9 не встречается в конце таких сумм, что противоречит предположению.

19. Существует.

Пусть  $f(x) = 1007x^2 + 1008x$ . Тогда  $f(x) = 1007x(x+1) + x$ . Поскольку произведение  $x(x+1)$  является четным числом при всех натуральных  $x$ , то  $1007x(x+1)$  делится на 2014 при всех таких  $x$ . Следовательно,  $f(x)$  дает такой же остаток при делении на 2014, как и  $x$ . Значит, все числа  $f(1), f(2), \dots, f(2014)$  имеют различные остатки при делении на 2014.

$$20. a = \pm \frac{4}{3\sqrt{3}}, b = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Рассмотрим случай, когда числа  $a$  и  $b$  имеют один знак. В этом случае  $|a| + |b| = |a + b|$ . Пусть  $x = \frac{\pi}{3}$ . Тогда  $2x = \frac{2\pi}{3}$ ,

$$\sin x = \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и}$$

$$1 \geq |a \sin x + b \sin 2x| = |a + b| \frac{\sqrt{3}}{2} = (|a| + |b|) \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 1.$$

Отсюда получаем, что  $|a| + |b| = \frac{2}{\sqrt{3}}$ , а в точке  $x = \frac{\pi}{3}$  функция

$f(x) = a \sin x + b \sin 2x$  принимает либо свое наибольшее значение 1, либо свое наименьшее значение  $-1$ . Значит, точка

$x = \frac{\pi}{3}$  является точкой экстремума для функции  $f(x)$  и

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0. \text{ Имеем}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = a \cos \frac{\pi}{3} + 2b \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{a-2b}{2} = 0.$$

Следовательно,  $a = 2b$ . Учитывая равенство  $|a| + |b| = \frac{2}{\sqrt{3}}$ , получаем, что возможны лишь два варианта:

$$a = \frac{4}{3\sqrt{3}}, b = \frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ или } a = -\frac{4}{3\sqrt{3}}, b = -\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Случай, когда числа  $a$  и  $b$  имеют разные знаки, разбирается аналогично. В этом случае возможны лишь такие два варианта:

$$a = \frac{4}{3\sqrt{3}}, b = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ или } a = -\frac{4}{3\sqrt{3}}, b = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Проверим, что четыре найденные пары значений  $a = \pm \frac{4}{3\sqrt{3}}, b = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}}$  удовлетворяют условию задачи. Действительно,

$|a| + |b| = \frac{2}{\sqrt{3}}$ . Функция  $f(x)$  принимает свои наибольшие и наименьшие значения в таких точках  $x$ , для которых  $f'(x) = 0$ . Найдем такие  $x$ . Имеем

$$f'(x) = a \cos x + 2b \cos 2x = a(\cos x \pm \cos 2x) = 0,$$

где знак в скобках выбирается положительным, если  $a$  и  $b$  одного знака, и отрицательным – если иначе. Следовательно, во всех точках экстремума функции  $f(x)$  имеем  $|\cos x| = |\cos 2x|$ . Значит, при таких  $x$  выполнено также равенство  $|\sin x| = |\sin 2x|$ . Отсюда  $|\sin x| = 2|\sin x||\cos x|$  и либо  $\sin x = 0$ , либо  $|\cos x| = \frac{1}{2}$ . В первом случае  $f(x) = 0$ , во втором  $|\sin x| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $|\sin 2x| = \frac{\sqrt{3}}{2}$  и  $|f(x)| = |a|\frac{\sqrt{3}}{2} + |b|\frac{\sqrt{3}}{2} = 1$ .

Таким образом, во всех точках экстремума функции  $f(x)$ , а следовательно, и во всех вообще точках  $x$  имеем  $|f(x)| \leq 1$ .

**21.** Покажем сначала по индукции, что для любого натурального  $n$  найдется такое натуральное  $m_n$ , что его десятичная запись оканчивается на единицу, а десятичная запись числа  $m_n^2$  оканчивается на комбинацию из  $n$  единиц и двоек.

При  $n = 1$  в качестве  $m_1$  можно взять число 1. Предположим, что для  $n = k$  доказано, что найдется число  $m_k$  с указанными свойствами. Тогда рассмотрим числа вида  $p_a = m_k + a \cdot 10^k$ , где  $a = 0, 1, 2, \dots, 9$ . Десятичная запись каждого из них оканчивается на 1. Кроме того, имеем

$$p_a^2 = (m_k + a \cdot 10^k)^2 = m_k^2 + 2am_k \cdot 10^k + a^2 \cdot 10^{2k}.$$

Посмотрим на последние  $k + 1$  цифр десятичной записи каждого из слагаемых этой суммы.

По предположению индукции десятичная запись числа  $m_k^2$  оканчивается на комбинацию из  $k$  единиц и двоек. Обозначим через  $b$  ( $k + 1$ )-ю с конца цифру числа  $m_k^2$ . Нетрудно видеть, что десятичная запись  $2am_k \cdot 10^k$  оканчивается на  $k$  нулей, перед которыми идет последняя цифра числа  $2a$  (так как  $m_k$  оканчивается на единицу). Десятичная же запись слагаемого  $a^2 \cdot 10^{2k}$  оканчивается на  $2k$  нулей. Следовательно, последние  $k$  цифр десятичной записи чисел  $p_a^2$  совпадают с последними  $k$  цифрами десятичной записи числа  $m_k^2$ . При этом ( $k + 1$ )-я с конца цифра числа  $p_a^2$  совпадает с последней цифрой суммы  $b + 2a$ . Если  $b$  нечетно, то для некоторого  $a$  сумма  $b + 2a$  оканчивается на единицу. Если  $b$  четно, то для некоторого  $a$  сумма  $b + 2a$  оканчивается на двойку. Следовательно, одно из чисел  $p_a$  можно взять в качестве числа  $m_{k+1}$ .

Покажем теперь, что для любого натурального  $n$  найдется такое натуральное  $p_n$ , десятичная запись квадрата которого начинается на  $n$  единиц. Пусть  $c_n = 11\dots 1 \cdot 10^{4n}$ , где первый множитель записывается  $n$  единицами, и  $d_n = c_n + 10^{4n}$ . Тогда

$$\sqrt{d_n} - \sqrt{c_n} = \frac{d_n - c_n}{\sqrt{d_n} + \sqrt{c_n}} = \frac{10^{4n}}{\sqrt{d_n} + \sqrt{c_n}} > \frac{10^{4n}}{2 \cdot 10^{3n}} > 1.$$

Следовательно, найдется такое натуральное число, которое не меньше  $\sqrt{c_n}$ , но меньше  $\sqrt{d_n}$ . Десятичная запись квадрата такого числа начинается на  $n$  единиц.

Рассмотрим число  $p_n \cdot 10^k + m_n$ , где  $k$  больше, чем количество цифр в десятичных записях чисел  $2p_n m_n$  и  $m_n^2$ . Тогда первые  $n$  цифр десятичной записи числа

$$(p_n \cdot 10^k + m_n)^2 = p_n^2 \cdot 10^{2k} + 2p_n m_n \cdot 10^k + m_n^2$$

совпадают с первыми  $n$  цифрами десятичной записи числа  $p_n^2$ , а последние  $n$  цифр – с последними цифрами десятичной записи числа  $m_n^2$ . Следовательно, число  $p_n \cdot 10^k + m_n$  удовлетворяет условию задачи.

**22.** Сможет.

Пусть дежурства проходили по такой схеме: первые девять

поварят сначала дежурили поодиночке, а затем дежурили все возможные пары из этих поварят. Так как из 9 поварят всего можно выбрать 36 пар, то на такое дежурство ушло ровно  $9 + 36 = 45$  рабочих дней.

Покажем теперь, как повар сможет определить, кто из поварят дружит между собой, а кто нет. Если оба интересующих нас поваренка  $A$  и  $B$  были среди первых девяти, то посмотрим на количества пропавших пирожных в такие три дня: когда дежурил  $A$ , когда дежурил  $B$  и когда  $A$  и  $B$  дежурили вместе. Поварята  $A$  и  $B$  не дружат между собой тогда и только тогда, когда количество пирожных, пропавших в третий день, равно сумме количеств пирожных, пропавших в первый и второй дни.

Если теперь мы хотим выяснить, дружат ли между собой поваренок  $A$  из первых девяти поварят и десятый поваренок  $B$ , то из количества пропавших пирожных в день одиночного дежурства  $A$  вычтем количество его друзей среди первых девяти поварят (это количество мы можем определить, как указано выше). Если при этом получится ноль, то  $A$  и  $B$  не дружат между собой, иначе – дружат.

**23.** Пусть  $A, B$  и  $C$  – середины отрезков  $A_1A_2, B_1B_2$  и  $C_1C_2$  соответственно. Для доказательства утверждения задачи покажем, что векторы  $\overline{OA}, \overline{OB}$  и  $\overline{OC}$  компланарны.

Пусть  $P_1, P_2, \dots, P_8$  – точки касания сферы из условия задачи с гранями многогранника  $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ , а  $S_1, S_2, \dots, S_8$  – площади соответствующих граней. Обозначим через  $R$  радиус этой сферы. Сформулируем два вспомогательных утверждения.

**Утверждение 1.**  $S_1 \cdot \overline{OP}_1 + S_2 \cdot \overline{OP}_2 + \dots + S_8 \cdot \overline{OP}_8 = \vec{0}$ .

**Утверждение 2.** При всех  $q = 1, 2, \dots, 8$  имеет место равенство

$$S_q \cdot \overline{OP}_q = S_{q,1} \cdot \overline{OA}_i + S_{q,2} \cdot \overline{OB}_j + \dots + S_{q,3} \cdot \overline{OC}_k,$$

где  $P_q$  – точка касания сферы с гранью  $A_iB_jC_k$ ,  $S_{q,1}, S_{q,2}$  и  $S_{q,3}$  – площади треугольников  $P_qB_jC_k, A_iP_qC_k$  и  $A_iB_jP_q$  соответственно.

По утверждению 1 имеем

$$\vec{w} = S_1 \cdot \overline{OP}_1 + S_2 \cdot \overline{OP}_2 + \dots + S_8 \cdot \overline{OP}_8 = \vec{0}.$$

С помощью утверждения 2 преобразуем каждое слагаемое этой суммы в сумму вида

$$S_{q,1} \cdot \overline{OA}_i + S_{q,2} \cdot \overline{OB}_j + \dots + S_{q,3} \cdot \overline{OC}_k,$$

а затем сгруппируем коэффициенты при одинаковых векторах. Получим равенство

$$\vec{w} = k_1 \cdot \overline{OA}_1 + k_2 \cdot \overline{OA}_2 + l_1 \cdot \overline{OB}_1 + l_2 \cdot \overline{OB}_2 + m_1 \cdot \overline{OC}_1 + m_2 \cdot \overline{OC}_2 = \vec{0},$$

где  $k_1$  – сумма площадей треугольников  $P_qB_jC_k$ , лежащих в одной плоскости с точкой  $A_1$ , аналогично определяются остальные коэффициенты. Заметим, что  $k_1 = k_2$ , ведь любые два треугольника вида  $P_qB_jC_k$  с общей стороной  $B_jC_k$  симметричны друг другу относительно биссекторной плоскости двугранного угла при ребре  $B_jC_k$ . Аналогично доказываются равенства  $l_1 = l_2$  и  $m_1 = m_2$ . Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \vec{w} &= k_1(\overline{OA}_1 + \overline{OA}_2) + l_1(\overline{OB}_1 + \overline{OB}_2) + m_1(\overline{OC}_1 + \overline{OC}_2) = \\ &= 2k_1\overline{OA} + 2l_1\overline{OB} + 2m_1\overline{OC} = \vec{0}, \end{aligned}$$

где  $k_1, l_1, m_1$  – положительные числа. Следовательно, векторы  $\overline{OA}, \overline{OB}$  и  $\overline{OC}$  компланарны, а точки  $O, A, B$  и  $C$  лежат в одной плоскости.

*Комментарий.* Эта задача является трехмерным аналогом известной планиметрической теоремы Ньютона: во всяком описанном четырехугольнике середины двух диагоналей и центр вписанной окружности лежат на одной прямой.



**ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ МОСКОВСКИЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ**

**ПЕРВЫЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР**

*7 класс*

- $l = nL + (n-1)(s - vt) = 54 \text{ м}$ .    2.  $N = 162$ .
- 1)  $t = 18 \text{ мин}$ ; 2)  $V = 108 \text{ л}$ ; 3)  $q = 24 \text{ л/мин}$ .
- $m = 202 \text{ кг}$ .
- $L_{\text{max}} = 39 \text{ см}$  (отметим, что у крупнейшей современной стрекозы размах крыльев достигает лишь 19 см).

*8 класс*

- $l = nL + (n-1)(s + vt) = 270 \text{ м}$ .    2.  $n = 4$ .
- $R \geq \frac{3\sigma}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{г}}} \approx 13,4 \text{ см}$ .    4. Почти 38 суток.

*9 класс*

- $t_{\text{max}} = 1,8 \text{ с}$ .    2.  $v = \frac{D}{\tau} = 0,6 \text{ м/с}$ .
- $\Delta l = 12,48 \text{ см}$ ,  $F_{\text{упр}} = 20,48 \text{ Н}$ .    4.  $U = \sqrt{\frac{\lambda d \rho q c \Delta T}{aL}} \approx 33 \text{ В}$ .

*10 класс*

- Проекция скорости может быть равна  $+4 \text{ м/с}$ ,  $+3 \text{ м/с}$ ,  $-4 \text{ м/с}$  и  $-3 \text{ м/с}$ .

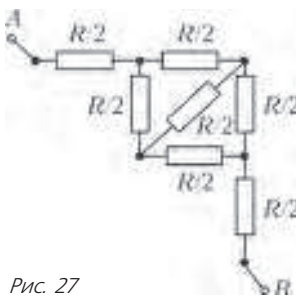


Рис. 27

- При  $\mu \geq \frac{\cos \alpha}{k - \sin \alpha}$  ускорение магнита равно нулю, при  $\mu < \frac{\cos \alpha}{k - \sin \alpha}$  ускорение равно  $a = g \cos \alpha - \mu g (k - \sin \alpha)$ .

- Данную в условии схему можно свести к более простой (рис. 27). Тогда становится очевидным, что  $R_{AB} = \frac{3}{2} R$ .

*11 класс*

- $c = \frac{2R}{M} = 4155 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ , где  $M = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$  – молярная масса гелия (давление гелия в рассматриваемом процессе пропорционально его объему).
- $C_{AB} = \frac{2}{3} C$  (см. рис. 28).
- В каждой вершине квадрата  $B_{\text{в}} = B\sqrt{\frac{5}{2}}$ , а в центре  $-B_{\text{ц}} = 4B$ .

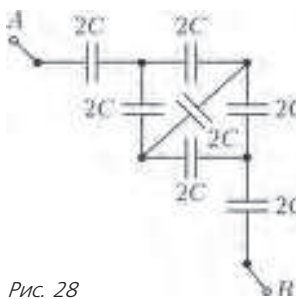


Рис. 28

**ВТОРОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР**

*8 класс*

- $v_2 = \frac{210v(R+4r)}{71R+145r} \approx 4 \text{ м/с}$ .    2.  $N = 898$ .

*9 класс*

- $v = v_{\text{зв}} \left( \sqrt{1 + \frac{2a\tau}{v_{\text{зв}}}} - 1 \right) = 1650 \text{ м/с}$ ;  $H = 163,35 \text{ км}$  (ракета сначала поднимается с ускорением  $a$ , а потом – с ускорением  $-g$ ).
- $t = 1200 \text{ с}$ .    3.  $t_{\text{уст}} \approx 32,6 \text{ }^\circ\text{C}$ .

*10 класс*

- $s = \frac{v_0^2}{g}$  при  $v_0 \leq 2\sqrt{gh}$ ,  $s = 4h\sqrt{\frac{v_0^2}{2gh} - 1}$  при  $v_0 > 2\sqrt{gh}$ .

- При максимальном растяжении работа силы упругости пружины равна работе силы тяжести груза. Из рисунка 29 видно, что это условие можно представить в виде

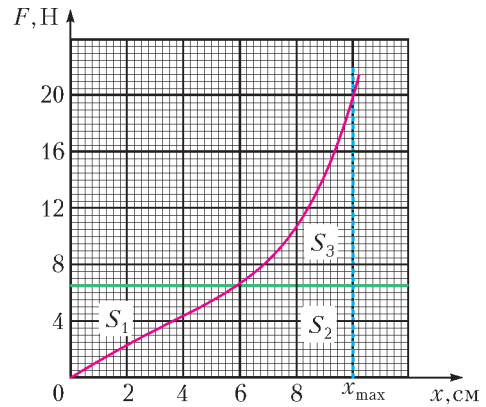


Рис. 29

$S_2 + S_3 = S_1 + S_2$ , или  $S_3 = S_1$ . Подсчитав  $S_1$  и  $S_3$  по клеточкам, получаем

$$x_{\text{max}} \approx 10 \text{ см}$$

- По данным задачи находим

$$t_2 = t_{\text{к}} + (t_1 - t_{\text{к}}) \left( \frac{n^2(r+R)}{(2n+1)r+nR} \right)^2 \approx 102,5 \text{ }^\circ\text{C} (> 100 \text{ }^\circ\text{C}),$$

$$t_3 = t_{\text{к}} + (t_1 - t_{\text{к}}) n \left( \frac{r+R}{(2n+1)r+nR} \right)^2 \approx 34,7 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Первый результат означает, что вода во втором стакане прогреется до  $100 \text{ }^\circ\text{C}$ , закипит, через некоторое время полностью испарится, после чего кипятыльник перегреется и в нем перегорит спираль.

*11 класс*

- 1)  $l = v_{\text{т}} \left( t - \frac{H}{v_0} \right)$ ; 2)  $v_{\text{к}} = \left( 1 - \frac{kH}{mv_0} \right) \sqrt{v_0^2 + v_{\text{т}}^2}$ , причем  $v_0 \geq \frac{kH}{m}$ .

- Количество теплоты, полученное системой в процессе 1–2, складывается из количества теплоты, необходимого для изотермического испарения  $v$  молей жидкости, и количества теплоты, подведенного при дальнейшем изобарном нагревании  $2v$  молей пара. Окончательно получаем

$$Q = v \left( r + \frac{16RT_3}{3} \right).$$

- $R_{AB} = \frac{13}{14} R$  (см.

рис.30, на котором изображена схема, эквивалентная исходной).

- Направим ось  $x$  вдоль оси пружины от первого шарика, который закреплен на пружине, в сторону второго шарика, который медленно приближается к первому. Начало отсчета примем в точке, где первоначально находился первый шарик при недеформированной пружине. Проекция на ось  $x$  суммарной силы, действующей на первый шарик, определяется формулой

$$F_x = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(l-x)^2} - kx,$$

где  $x$  – координата первого шарика,  $l$  – координата второго.

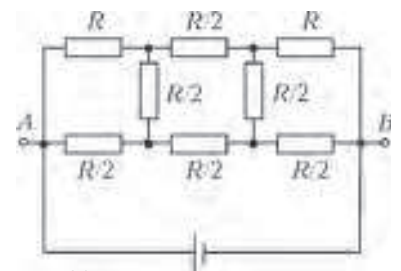


Рис. 30

В положении равновесия  $F_x = 0$ , поэтому

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 k} = x(l-x)^2 = f(x). \quad (*)$$

Исследуем поведение функции  $f(x)$ . При  $x \geq 0$  она неотрицательна. При  $x = 0$  и при  $x = l$  эта функция принимает нулевое значение. При возрастании  $x$  от нуля  $f(x)$  сначала возрастает, а при приближении  $x$  к  $l$  она, начиная с некоторых значений  $x$ , убывает. Из этого следует, что при  $0 < x < l$  рассматриваемая функция имеет хотя бы один максимум. График функции  $f(x)$  имеет вид, показанный на рисунке 31. Максимальное значение  $f_m$ , которое принимает  $f(x)$  в указанном интервале, можно найти, приравняв нулю производную этой функции и решив полученное уравнение, откуда получаем

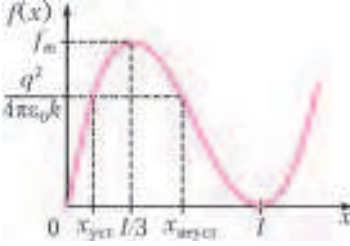


Рис. 31

приравняв нулю производную этой функции и решив полученное уравнение, откуда получаем

$$x_m = \frac{l}{3} \text{ и } f_m = f(x_m) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{l^3}{3}.$$

Второй корень этого уравнения,  $x = l$ , совпадает с одним из значений  $x$ , при которых  $f(x) = 0$ , поэтому при  $x = l$  функция  $f(x)$  достигает минимума и при этом обращается в ноль. Нас интересует случай, когда  $x < l$ , поскольку пружина начинает растягиваться из недеформированного состояния. Заметим, что если  $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 k} > f_m$ , то уравнение (\*) не имеет решения, в противном случае оно имеет два положительных корня  $x_{уст}$  и  $x_{неуст}$ , меньший из которых соответствует устойчивому положению равновесия, а больший — неустойчивому (убедитесь в этом самостоятельно).

Итак, когда второй шарик находится на очень большом расстоянии от первого, величина  $l$  велика и  $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 k} < f_m$ . При этом первый шарик растягивает пружину на величину  $x_{уст}$  и его равновесие устойчивое. По мере приближения второго шарика к первому величины  $l$  и  $f_m$  уменьшаются,  $x_{уст}$  растет, пружина растягивается все сильнее. При достижении условия  $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 k} = f_m$  корни уравнения (\*)  $x_{уст}$  и  $x_{неуст}$  совпадают, и поэтому шарик на пружине теряет устойчивость. При этом пружина оказывается растянутой на величину  $l/3$ . При дальнейшем сколь угодно малом уменьшении  $l$  удовлетворение уравнения (\*) оказывается невозможным, проекция силы  $F_x$  становится положительной, и первый шарик устремляется навстречу второму и движется, пока не происходит их столкновения. Таким образом, координата  $l$  второго шарика в момент потери системой устойчивости определяется уравнением

$$f_m = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{l^3}{3} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 k}, \text{ откуда } l = \frac{3}{2} \left(\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 k}\right)^{1/3}.$$

5. Закон Ома для участка  $ab$ , содержащего катушку, после замыкания ключа имеет вид

$$0 = \varphi_a - \varphi_b - L \frac{dI_L}{dt}, \text{ где } \varphi_a - \varphi_b = \mathcal{E}.$$

Значит, быстрота изменения силы тока не меняется с течением времени, т.е. ток  $I_L$  в катушке после замыкания ключа будет линейно возрастать. За время  $t_0$  сила тока в катушке вырастет от 0 до  $I_0 = \mathcal{E}t_0/L$ , и через катушку пройдет заряд

$$q_0 = \frac{I_0 t_0}{2} = \frac{\mathcal{E} t_0^2}{2L}. \quad (1)$$

Конденсатор на этом этапе очень быстро (все сопротивления очень малы) зарядится до ЭДС  $\mathcal{E}$ . После размыкания ключа протекание тока через катушку будет сопровождаться изменением заряда конденсатора. Закон Ома для участка  $ab$ , содержащего катушку, будет выглядеть так:

$$0 = \varphi_a - \varphi_b - L \frac{dI_L}{dt}, \text{ где } \varphi_a - \varphi_b = \frac{q_a}{C}$$

( $q_a$  — заряд правой пластины конденсатора, соединенной с узлом  $a$ ). Отсюда находим

$$\frac{dI_L}{dt} = \frac{q_a}{LC}. \quad (2)$$

Скорость возрастания тока  $I_L$  на этом этапе будет убывать вместе с уменьшением заряда  $q_a$ . В момент, когда конденсатор полностью разрядится ( $q_a = 0$ ), сила тока в катушке будет максимальна, а затем величина  $q_a$  станет отрицательной и ток  $I_L$  начнет убывать. Отрицательная разность потенциалов  $\varphi_a - \varphi_b = q_a/C$  будет при этом расти по модулю. Когда величина  $\varphi_a - \varphi_b$  достигнет значения  $-U_0$ , откроется диод, и ток, идущий через катушку, перестанет приносить заряд на левую пластину конденсатора — весь ток пойдет через диод, т.е.  $I_L = I_D$ . При этом быстрота изменения тока  $I_L$  сохраняется постоянной и равной

$$\frac{dI_L}{dt} = -\frac{U_0}{L}.$$

Отрицательный знак производной говорит о том, что сила тока  $I_L$  убывает, причем убывание происходит равномерно. Когда величина  $I_L$  уменьшится до нуля, ее убывание продолжится и ток в катушке изменит свое направление. При этом ток уже не сможет течь через диод, и заряд снова начнет поступать на конденсатор.

Таким образом, заряд через диод протекает, начиная с момента, когда  $\varphi_a - \varphi_b = -U_0$ , до момента, когда  $I_L$  уменьшится до нуля. Все это время сила тока линейно уменьшается со скоростью  $\frac{dI_L}{dt} = -\frac{U_0}{L}$ . Заряд, прошедший при этом через диод, будет равен  $q_1 = \frac{I_1 t_1}{2}$ , где  $I_1$  — сила тока в катушке в тот момент, когда  $\varphi_a - \varphi_b = -U_0$ , и  $t_1 = \frac{I_1 L}{U_0}$ . Отсюда находим

$$q_1 = \frac{I_1^2 L}{2U_0}. \quad (3)$$

Во второй раз диод открыться не сможет, так как при дальнейших электромагнитных колебаниях в контуре в момент, когда напряжение на диоде окажется равным  $\varphi_b - \varphi_a = U_0$ , ток в катушке будет равен нулю. Величину  $I_1$  найдем из закона сохранения энергии (приравняем суммарную энергию электрического и магнитного полей в момент размыкания ключа и в момент, когда  $I = I_1$ ):

$$\frac{C\mathcal{E}^2}{2} + \frac{LI_0^2}{2} = \frac{CU_0^2}{2} + \frac{LI_1^2}{2}, \text{ где } I_0 = \frac{\mathcal{E}t_0}{L},$$

откуда

$$I_1 = \sqrt{\frac{C}{L}(\mathcal{E}^2 - U_0^2) + \left(\frac{\mathcal{E}t_0}{L}\right)^2}, \text{ и } q_1 = \frac{LC(\mathcal{E}^2 - U_0^2) + \mathcal{E}^2 t_0^2}{2LU_0}.$$

Следовательно,

$$n = \frac{q_1}{q_0} = \frac{LC(\mathcal{E}^2 - U_0^2)}{U_0 \mathcal{E} t_0^2} + \frac{\mathcal{E}}{U_0} = \frac{LC}{t_0^2} \left(\frac{\mathcal{E}}{U_0} - \frac{U_0}{\mathcal{E}}\right) + \frac{\mathcal{E}}{U_0}.$$

Обозначим искомое отношение  $\mathcal{E}/U_0 = x$ , а величину  $LC/t_0^2 = A$ . Тогда последнее уравнение принимает вид

$$n = Ax - \frac{A}{x} + x, \text{ или } (A+1)x^2 - nx - A = 0.$$

Решая полученное квадратное уравнение и отбрасывая отри-

цательный корень, получим ответ:

$$x = \frac{\varepsilon}{U_0} = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4A(A+1)}}{2(A+1)} = \frac{nt_0^2 + \sqrt{n^2 t_0^4 + 4LC(LC + t_0^2)}}{2(LC + t_0^2)}$$

### XXI МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ТУЙМААДА». ФИЗИКА

1. Поскольку бусинка невесома, а ее ускорение не может быть бесконечным, то согласно второму закону Ньютона результирующая сила  $F$ , действующая на бусинку, всегда равна нулю, однако это равенство реализуется по-разному в случаях  $\alpha = \beta$  и  $\alpha \neq \beta$ .

Случай  $\alpha = \beta$ . Равенство  $\alpha = \beta$  означает, что в треугольнике  $ABK$  (см. рис. 1 в статье) биссектриса угла  $K$  является высотой, а значит, и медианой, поэтому точка  $K$  равноудалена от прямых  $AD$  и  $BC$ , откуда следует равенство  $\varphi = \gamma$ . В силу симметрии нитей относительно прямой, проходящей через бусинку параллельно оси  $x$ , справедливо утверждение  $a_y = 0$ . Осталось найти  $a_x$ .

Из условия  $F = 0$  в проекции на ось  $x$  получаем связь между силами натяжения  $T_1$  и  $T_2$  левой и правой нитей соответственно:

$$T_1 \cos \alpha = T_2 \cos \varphi.$$

Второй закон Ньютона в проекции на ось  $y$  для каждого груза имеет такой вид:

$$m_1 a_{1y} = T_1 - m_1 g, \quad m_2 a_{2y} = T_1 - m_2 g,$$

$$m_3 a_{3y} = T_2 - m_3 g, \quad m_4 a_{4y} = T_2 - m_4 g.$$

Уравнения кинематической связи для каждой нити можно получить, приравняв изменения длин участков нитей внутри прямоугольника  $ABCD$ , выраженные двумя способами – через ускорения грузов и через ускорение бусинки:

$$a_{1y} + a_{2y} = 2a_x \cos \alpha, \quad a_{3y} + a_{4y} = -2a_x \cos \varphi.$$

Объединение всех уравнений приводит к искомому ускорению:

$$a_x = g \frac{k \cos \varphi - \cos \alpha}{k \cos^2 \varphi + \cos^2 \alpha}, \quad \text{где } k = \frac{(m_1 + m_2)m_3 m_4}{(m_3 + m_4)m_1 m_2}$$

Случай  $\alpha \neq \beta$ . Из геометрических соображений получаем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \beta}.$$

Силы, действующие на бусинку со стороны левой и правой нитей, могут быть направлены только вдоль биссектрис угла  $K$  в треугольниках  $ABK$  и  $CDK$  соответственно, а эти биссектрисы теперь не лежат на одной прямой. Поэтому если предположить, что хотя бы одна из сил натяжения  $T_1$  или  $T_2$  не равна нулю, то не будет выполняться равенство  $F = 0$ . Следовательно, в данном случае нити не натянуты, а все грузы свободно падают с ускорением  $g$ . Уравнения кинематической связи получим аналогично первому случаю, приравняв выраженные двумя способами изменения длин участков нитей внутри прямоугольника  $ABCD$ , однако теперь будем проецировать на направления участков нитей обе составляющие ускорения бусинки:

$$-2g = a_x (\cos \alpha + \cos \beta) + a_y (-\sin \alpha + \sin \beta),$$

$$-2g = a_x (-\cos \varphi - \cos \gamma) + a_y (-\sin \varphi + \sin \gamma).$$

Отсюда находим искомые проекции ускорения:

$$a_x = 2g \frac{\sin \alpha - \sin \beta + \sin \gamma - \sin \varphi}{\sin(\alpha + \varphi) - \sin(\beta + \gamma) + \sin(\alpha - \gamma) - \sin(\beta - \varphi)},$$

$$a_y = 2g \frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + \cos \varphi}{\sin(\alpha + \varphi) - \sin(\beta + \gamma) + \sin(\alpha - \gamma) - \sin(\beta - \varphi)}.$$

При приближении начального положения бусинки к прямой,

равноудаленной от прямых  $AD$  и  $BC$ , величина  $|a_y|$  неограниченно возрастает, поэтому пренебрегать массой бусинки в этих условиях уже нельзя.

2. Предположим, что смещение  $z$  шайбы вниз вдоль вертикальной оси  $z$ , проходящей через центр  $O$  сферы (рис. 32), мало по сравнению с  $R$

в любой момент времени, а потом проверим это предположение. При указанном предположении отличим радиуса  $r$  окружности, являющейся сечением сферы горизонтальной плоскостью, проходящей через шайбу в некоторый момент времени, от радиуса сферы  $R$  можно пренебречь, так как это отличие пропорционально второму порядку малой величины  $z/R$ . Из условия  $r \approx R$  и закона сохранения момента импульса шайбы в проекции на ось  $z$  следует постоянство угловой скорости вращения шайбы вокруг оси  $z$ .

Пусть  $m$  – масса шайбы, тогда нормальная реакция опоры  $N$ , действующая на шайбу под малым углом  $\alpha$  к горизонту, создает центростремительное ускорение и вычисляется по формуле  $N = m\omega^2 R$ , а вертикальная составляющая этой силы имеет вид

$$N_z = -N \sin \alpha = -N \frac{z}{R} = -m\omega^2 z.$$

Поскольку сила  $N_z$  пропорциональна смещению  $z$  шайбы, а сила тяжести постоянна, то шайба будет совершать в проекции на ось  $z$  гармонические колебания с циклической частотой  $\Omega = \omega$ . Координату  $z_0$  положения равновесия найдем из условия равенства нулю вертикальной составляющей результирующей силы:

$$mg - m\omega^2 z_0 = 0, \quad \text{откуда } z_0 = \frac{g}{\omega^2}.$$

Заметим, что из условия  $\omega^2 R \gg g$  следует сравнение  $z_0 \ll R$ , т.е. сделанные приближения корректны.

Шайба начинает движение из крайнего верхнего положения в полусфере, поэтому ее амплитуда колебаний  $A = z_0$ , искомое смещение  $L$  – это размах колебаний:

$$L = 2A = \frac{2g}{\omega^2},$$

а искомое время  $\tau$  равно половине периода колебаний:

$$\tau = \frac{\pi}{\omega}.$$

В силу равенства  $\Omega = \omega$  в момент времени  $\tau$  шайба будет находиться примерно в противоположной точке сферы относительно начального положения, откуда следует

$$s = 2R.$$

Предлагаем читателям самостоятельно подумать, случайно ли равенство  $\Omega = \omega$  и возможно ли прийти к нему только путем качественных рассуждений.

3. Перегородка проницаема для гелия, поэтому он занимает обе части сосуда объемом  $V_0 = V_1 + V_2$ , а его давление одинаково в обеих частях сосуда и равно  $p_0$  из условия равновесия левого поршня. Давление смеси газов под правым поршнем равно  $p_0 + mg/S$  и превышает давление гелия на парциальное давление  $p_2$  радона, занимающего объем  $V_2$  правой части сосуда, откуда находим  $p_2 = mg/S$ . Запишем уравне-

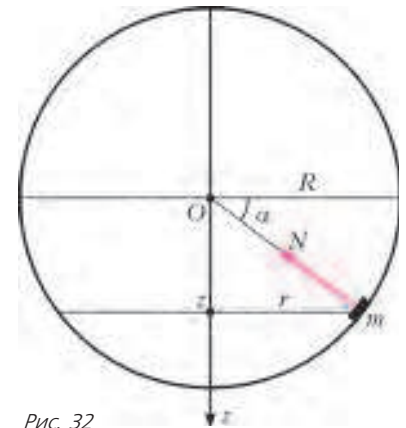


Рис. 32



ния Менделеева–Клапейрона для гелия и для радона:

$$p_0 V_0 = \nu_1 R T, \quad p_2 V_2 = \nu_2 R T,$$

откуда найдем искомые объемы:

$$V_1 = \frac{\nu_1 R T}{p_0} - \frac{\nu_2 R T S}{m g}, \quad V_2 = \frac{\nu_2 R T S}{m g}.$$

Описанное равновесие нарушится, если левый поршень опустится до основания сосуда, что приведет к появлению щели, через которую выйдет гелий, а вместо него начтет воздух, являющийся смесью азота и кислорода, для которых перегородка проницаема. Описанное равновесие будет сохраняться при условии  $V_1 > 0$ , откуда получаем

$$m > \frac{\nu_2 p_0 S}{\nu_1 g}.$$

**4. Оптическая часть.** Пусть  $F$  – фокусное расстояние линзы,  $x$  – расстояние от лампы до линзы,  $l$  – расстояние от лампы до экрана. Тогда формула тонкой линзы имеет вид

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{l-x} = \frac{1}{F}, \quad \text{или} \quad x^2 - lx + Fl = 0.$$

Поскольку есть два положения линзы, при которых наблюдается четкое изображение нити накала, то это квадратное относительно  $x$  уравнение имеет положительный дискриминант и соответствующие этим положениям корни  $x_1$  и  $x_2$ . Согласно теореме Виета, справедливо равенство  $x_1 + x_2 = l$ , которое означает, что изображение нити накала снова станет четким, когда расстояние от лампы до линзы будет равно начальному расстоянию от линзы до экрана.

**Термодинамическая часть.** Пусть  $V_1$  и  $V_2$  – начальные объемы левой и правой частей сосуда соответственно. Тогда, согласно полученному выше результату, в искомый момент времени объемы этих частей поменяются между собой, т.е. будут объемы  $V_2$  и  $V_1$  соответственно. Пусть  $\nu_1$  и  $\nu_2$  – количества одноатомного и двухатомного газов соответственно,  $\nu_0 = \nu_1 + \nu_2$  – общее количество газов. Из условий равенства давлений и температур в начальном состоянии с помощью уравнений Менделеева–Клапейрона запишем

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{\nu_1}{\nu_0}, \quad \frac{V_2}{V_0} = \frac{\nu_2}{\nu_0}, \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{\nu_2}{\nu_1} = k.$$

Из последнего равенства и условия постоянства температуры в правой части сосуда находим давление в сосуде:

$$p = p_0 \frac{\nu_2}{\nu_1}.$$

Количество теплоты  $Q$ , которое нужно подвести к газу в левой части сосуда, чтобы он расширился от объема  $V_1$  до объема  $V_2$ , найдем из первого начала термодинамики:

$$Q = \Delta U + A = \frac{3}{2}(pV_2 - p_0V_1) + p_0V_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right),$$

где  $\Delta U$  – изменение внутренней энергии одноатомного газа,  $A$  – работа газа в левой части сосуда, равная работе внешних сил по изотермическому сжатию газа в правой части сосуда. После упрощения получаем

$$Q = p_0 V_0 \left( \frac{3}{2}(k-1) + \frac{k \ln k}{k+1} \right).$$

**Электрическая часть.** Используя формулу  $P = UI$  для мощности лампы, находим искомое время передачи количества теплоты  $Q$  газу в левой части сосуда:

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{p_0 V_0}{UI} \left( \frac{3}{2}(k-1) + \frac{k \ln k}{k+1} \right) \approx 299 \text{ с} \approx 5 \text{ мин}.$$

5. Сразу после замыкания ключа происходит практически мгновенная зарядка конденсаторов, так как по условию все элементы цепи идеальные, т.е. можно пренебречь их активными сопротивлениями. А вот ток в катушке в этот момент

все еще отсутствует, так как индуктивность препятствует резким изменениям силы тока. Поэтому мысленно заменим катушку разрывом цепи и рассчитаем общую емкость  $C_1$ , энергию  $W_1$  и заряд  $q_1$  системы конденсаторов:

$$C_1 = 2 \frac{C \cdot 2C}{C + 2C} = \frac{4}{3} C, \quad W_1 = \frac{C_1 \varepsilon^2}{2} = \frac{2}{3} C \varepsilon^2, \quad q_1 = C_1 \varepsilon = \frac{4}{3} C \varepsilon.$$

В искомый момент, когда сила тока через катушку максимальна, напряжение на ней равно нулю, так как оно пропорционально скорости изменения силы тока. Поэтому теперь мысленно заменим катушку проводом и рассчитаем общую емкость  $C_2$ , энергию  $W_2$  и заряд  $q_2$  системы конденсаторов:

$$C_2 = \frac{C + 2C}{2} = \frac{3}{2} C, \quad W_2 = \frac{C_2 \varepsilon^2}{2} = \frac{3}{4} C \varepsilon^2, \quad q_2 = C_2 \varepsilon = \frac{3}{2} C \varepsilon.$$

Запишем закон сохранения энергии с учетом работы источника  $A = \varepsilon(q_2 - q_1)$  с момента завершения зарядки конденсаторов до достижения максимальной силы тока через катушку:

$$W_1 + A = W_2 + \frac{LI_0^2}{2}, \quad \text{откуда находим} \quad I_0 = \varepsilon \sqrt{\frac{C}{6L}}.$$

В силу симметрии схемы конденсаторы одинаковой емкости имеют одинаковые заряды в каждый момент времени. Пусть  $Q_1$  и  $Q_2$  – заряды правых обкладок конденсаторов емкостью  $C$  и  $2C$  соответственно,  $I$  – сила тока через катушку (ток направлен снизу вверх) в некоторый момент времени. Тогда правила Кирхгофа принимают вид

$$\varepsilon = \frac{Q_1}{C} + \frac{Q_2}{2C}, \quad \varepsilon = \frac{Q_1}{C} + LI' + \frac{Q_1}{C}, \quad Q_1' - Q_2' = I,$$

откуда после исключения  $I$  и  $Q_2$  получаем уравнение

$$Q_1'' + \frac{2Q_1}{3LC} = \frac{\varepsilon}{3L}, \quad \text{описывающее гармонические колебания с периодом} \quad T = \pi\sqrt{6LC}.$$

В начальный момент времени ток через катушку отсутствовал, поэтому сила тока будет максимальна через четверть периода:

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{4} \sqrt{6LC}.$$

# КВАНТ

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов,  
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**Д.Н.Гришукова, М.В.Сумнина, А.Е.Пацхверия**

**ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР**

**Е.В.Морозова**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ  
по печати. Рег. св-во №0110473**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»**

**Тел.: (495) 930-56-48**

**E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru**

**Отпечатано**

**в соответствии с предоставленными материалами  
в ООО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь  
www.Pareto-print.ru**

## МАЛЮТКА

Чем меньше фигур на доске, тем охотнее мы решаем этюд. Этюды, в которых число персонажей не превышает семи, называются миниатюрами. Позиции с тремя или четырьмя фигурами (трио, квартеты), как правило, носят учебный характер и не отличаются в эстетическом отношении. А вот этюды с пятью фигурами — они называются малютками — уже изрядное количество.

Весьма интересен эндшпиль «ферзь и легкая фигура против ферзя». Посмотрим на одном практическом примере, как преуспел компьютер в его анализе.



Выигрыш или ничья?

В этой позиции при ходе черных была отложена партия Л.Лендье́ль—Л.Леви, сыгранная сорок лет назад (Куба, 1972), — тогда машины еще были не так сильны, и в турнирах существовало доигрывание. Хотя Леви удалось взять верх, осталось много вопросов: закономерен ли результат, лучшим ли образом действовали соперники и т.д. Только два десятилетия спустя разработанная программа расставила все точки над «i», причем выяснила, что оба партнера играли окончание крайне плохо.

Вот как закончилась партия: 66... ♖f4+ 67. ♔e6 ♜c5+ 68. ♔e7 ♖g7+ 69. ♔c8 ♖f8+ 70. ♔b7 ♜c5+ 71. ♔a7 ♖e7+ 72. ♔b6 ♜d7+ 73. ♔c7 ♜c5+ 74. ♔b8 ♖d8+ 75. ♔b7 ♖d7+ 76. ♔b6 ♜c4+ 77. ♔a6 ♖d6+ 78. ♔b7 ♖d7+ 79. ♔b8 ♖d8+ 80. ♔b7 ♜d6+ 81. ♔a7 ♖a5+ 82. ♔b8 ♖b6+ 83. ♖b7 ♖:b7×.

Компьютер установил, что из 18 ходов Леви и 17 Лендье́ля только 12 были правильными, при этом дважды черные упустили победу, а белые не воспользовались ничейным шансом. Да, разница между человеком и машиной в разыгрывании данного эндшпиля впечатляет. А как развинулись бы события, если бы обе стороны играли наилучшим образом? Вот оптимальная

цепочка, указанная программой: 66... ♖f4+ 67. ♔e6 ♜c5+ 68. ♔e7 ♖h4+ 69. ♔f7 ♖h7+ 70. ♔f6 ♜e4+ 71. ♔e6 ♖g6+ 72. ♔e7 ♖f6+ 73. ♔d7 ♖f7+ 74. ♔e8 ♖g8+ 75. ♔b7 ♜c5+ 76. ♔a7 ♖a2+ 77. ♔b8 ♖b2+ 78. ♔a7 ♖c7 79. ♖b7 ♖:b7×.

Итак, эту позицию из практики можно вполне отнести к этюдам-малюткам — с заданием «Выигрыш» и 14-ходовым решением! Другое дело, что найти его шахматисту-практику очень не просто.

Рассмотрим теперь несколько симпатичных этюдов, где у белых ферзь и фигура, а у черных один ферзь (само собой, у каждой стороны по королю).



Г.Ринк, 1917

### Выигрыш

Данное соотношение сил достаточно распространено, а в этом этюде весьма изящный финал.

1. ♖c7+ ♔a8 2. ♖a5+ ♔b7. На 2... ♔b8 следует 3. ♖b6+ и мат следующим ходом.

3. ♜c5+ ♔b8. Пытаюсь спасти ферзя. 4. ♖b6+ ♔c8 5. ♖b7+ ♔d8 6. ♔d2! В этом идее этюда. Белые неожиданно перестали шаховать, а черные попали в цугцванг — спасения нет. 6... ♖e7 7. ♖b8×.



И.Диез дель Коррал, 1955

### Выигрыш

Еще одна замечательная малютка с тем же материалом.

1. ♖a1+. Выпускает выигрыш 1. ♜c4+? ♔a2.

1... ♔b4. Неожиданный мотив пата возникал после 1... ♔b3 2. ♖b1+ ♔a3!

3. ♜c4+ ♔a4 4. ♖a2+! (но не 4. ♖b7? пат) 4... ♔b4 5. ♖b2+ ♔a4 6. ♖a3+ с выигрышем.

2. ♖b2+. А сейчас к реальному пату вело 2. ♖b1+? ♔c5! 3. ♜a4+ ♔d6 4. ♖:b7.

2... ♔c5! 3. ♜a4+ ♔d6! После 3... ♔c6 4. ♖c3+ ♔d5 5. ♖d3+ ♔c6 6. ♖c4+ ♔d6 7. ♖c5+ возникал основной вариант.

4. ♖e5+. Разумеется, опять нельзя брать ферзя из-за пата. 4... ♔c6 5. ♖c5+ ♔d7 6. ♜b6+ ♔e8 7. ♖e5+ ♔d8. Не меняет дела 7... ♔f8 8. ♜d7+! ♖g7 9. ♖b8+ ♖e8 10. ♖c7.

8. ♖d6+ ♔e8 9. ♖e6+ ♔d8 10. ♖g8+ ♔c7 11. ♜a8+ ♔d6 12. ♖g3+ ♔c5. Или 12... ♔d7 13. ♖g7+ ♔c8 14. ♖f8+ ♔d7 15. ♖e7+.

13. ♖c3+ ♔d6. Бесплезно 13... ♔b5 14. ♖b3+.

14. ♖e5+ ♔d7 15. ♖e7+, и белые берут верх.



М.Ханель, 1926

### Выигрыш

И этот материал довольно популярен в этюдах, мы набрали одну из самых эффектных малюток.

1. ♖d7+! ♔e5 2. ♖g7+! ♔e6. На 2... ♔f4 решает 3. ♖b6+ ♔f5 4. ♖f6+. А если 2... ♔d6, то после 3. ♖c7+ ♔c6 4. ♖e8+ ♔c5 5. ♜f2+ ♔d6 6. ♜g3+ ♔c5 7. ♖b5+ получается вариант, рассмотренный ниже.

3. ♖e7+ ♔f5 4. ♖f6+ ♔g4 5. ♖g5+ с победой.

Второй вариант. 1... ♔e4. Или 1... ♔c5 2. ♜f2+ ♔c4 3. ♖b5+, что ведет к предыдущему варианту.

2. ♖b5+ ♔d4 3. ♜f2+ ♔c3 4. ♜e1+! ♔d4. При другом отступлении — 4... ♔c2 5. ♖e2+ ♔b3 6. ♖d3+ черный король попадает под матовую атаку.

5. ♖b2+! ♔c5. Или 5... ♔c3 6. ♖c1+ ♔d3 7. ♖c3+ с выигрышем.

6. ♖b6+ ♔c4 7. ♖b4+ ♔d3 8. ♖c3+ ♔e2 9. ♖d2+, и все кончено.

Е.Гук



Индекс 90964

## Неваляшка из воздушного шарика

Прикоснувшись надутым воздушным шариком к бумажным обоям, можно легко превратить его в игрушку-неваляшку...



(Продолжение – на с. 25 внутри журнала)