

СЕНТЯБРЬ/ДЕКАБРЬ

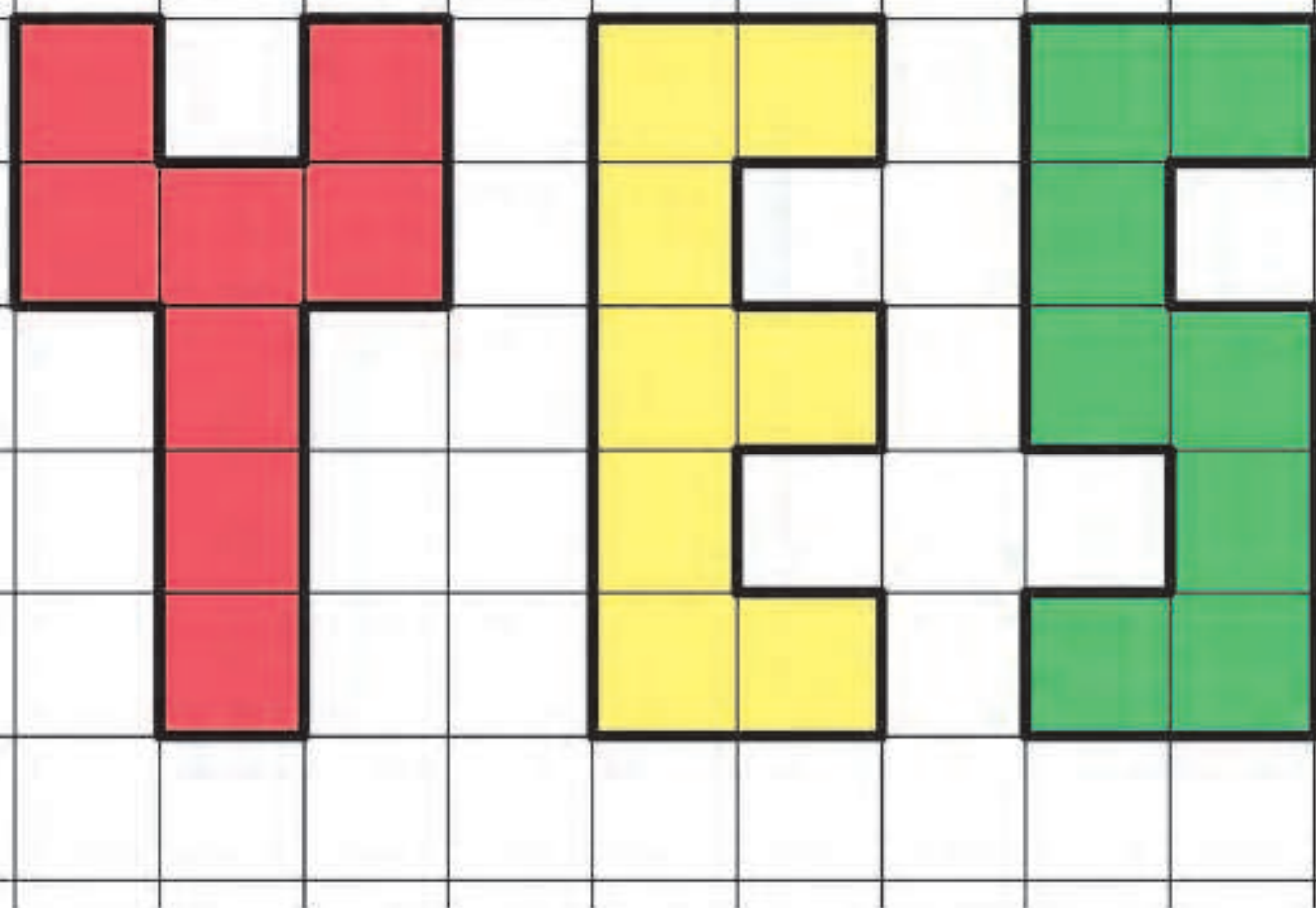
ISSN 0130-2221
2013 • №5-6

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК



Перед вами три фигурки в виде английских букв **Y, E, S**. Их можно как угодно поворачивать и переворачивать, но накладывать друг на друга нельзя. Получится ли у вас сложить из этих частей симметричную фигуру? Надеемся, что в конце концов получится и вы воскликнете «Yes!», радуясь этой небольшой победе. Сейчас известно единственное решение, но вдруг вы найдете еще одно...

Придумал эту задачу известный изобретатель головоломок Владимир Красноухов. Со многими его головоломками вы можете познакомиться на сайте planetagolovolomok.ru и в нашем журнале: «Квант» уже неоднократно писал о них – неизменно изящных и интересных.

Е.Епифанов



КВАНТ СЕНТЯБРЬ 2013 № 5-6 ДЕКАБРЬ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

УЧРЕДИТЕЛЬ Российская академия наук	2 Где находится горизонт или край Вселенной? <i>С.Блинников, А.Зинковский</i>
ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР А.Л.Семенов	8 Окружности Вилларсо и расслоение Хопфа. <i>А.Акопян</i>
РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ А.А.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов, А.Н.Виленкин, В.И.Голубев, Н.П.Долбилин (заместитель главного редактора), В.Н.Дубровский, А.А.Егоров, П.А.Кожевников, С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан (заместитель главного редактора)	12 Задачи M2316–M2325, Ф2323–Ф2332 14 Решения задач M2301–M2308, Ф2308–Ф2314
РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков, Л.Д.Фаддеев	«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ 23 Задачи 24 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8» 24 Бумажный итератор. <i>И.Акулич</i> 27 Таинственный уют. <i>С.Дворянинов</i> 27 Вифлеемская звезда. <i>А.Андреев, Д.Панов, А.Панов</i>
РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР И.К.Кикоин ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА А.Н.Колмогоров Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский, А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков, Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер	ШКОЛА В «КВАНТЕ» 28 Капли, пузырьки и дирижабли. <i>А.Стасенко</i> 29 Энтропия, Демон Максвелла и тепловая смерть Вселенной. <i>А.Стасенко</i> 31 Прекрасные моменты физики. <i>А.Стасенко</i>
	МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК 33 Этюд о симедианах. <i>В.Журавлев, П.Самовол</i>
	ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ 41 Шарики разлетаются не так! <i>А.Коновалов</i>
	КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА» 48 Взаимодействие света с веществом
	ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА» 50 Двойное лучепреломление. <i>А.Андреев, И.Боголюбов, А.Панов</i>
	ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА 53 Избранные задачи по физике. <i>А.Овчинников, В.Плис</i>
	ОЛИМПИАДЫ 58 Заключительный этап XXXIX Всероссийской олимпиады школьников по математике 60 Заключительный этап XLVII Всероссийской олимпиады школьников по физике 64 LIV Международная математическая олимпиада 66 XLIV Международная физическая олимпиада 72 Всероссийская студенческая олимпиада по физике 2013 года
	ИНФОРМАЦИЯ 73 Очередной набор в ВЗМШ 78 Заочная физико-техническая школа при МФТИ 82 Новый прием в школы-интернаты при университетах 83 Школе-интернату имени А.Н.Колмогорова – 50 лет!
	83 Ответы, указания, решения 95 Напечатано в 2013 году Нам пишут (45)
	НА ОБЛОЖКЕ I <i>Иллюстрация к статье С.Блинникова, А.Зинковского</i> II <i>Коллекция головоломок</i> III <i>Шахматная страничка</i> IV <i>Прогулки с физикой</i>

Где находится горизонт или край Вселенной?

С.БЛИННИКОВ, А.ЗИНКОВСКИЙ

МНОГИХ С ДЕТСТВА ВОЛНЮТ ВОПРОСЫ ТИПА: «А что, если быстро пролететь через всю нашу Вселенную в одном направлении, не долетим ли мы до чего-то, похожего на ее край или конец?»

Когда-то человечеству, как и сейчас ребенку, вся Вселенная представлялась простой «плоской землей», прикрытой сверху куполом неба. На имитации средневековой гравюры (рис. 1), увидевшей свет в XIX веке благодаря знаменитому популяризатору науки Камиллю Фламариону, изображен человек в одежде пилигрима и с посохом в руке. Сквозь «твердь» небесного свода он с огромным удивлением рассматривает устройство Вселенной.

Человек взрослеет, учится, познает мир и в какой-то момент понимает, что живет не на плоскости, а на выпуклой поверхности огромного земного шара. Постепенно человеку становится ясно, что земной шар не такой уж и огромный. Научные представления человечества о мироздании регулярно корректируются и обновляются. Приведем лишь некоторые факты, говорящие как бы сами за себя (цифры в этой подборке достаточно условны, поскольку в данном случае важна не точность определения космических расстояний, а лишь порядок этих величин).



Рис.1. Так как же устроена Вселенная? (Имитация средневековой гравюры)

- Расстояние от Земли до Солнца – 1 астрономическая единица (1 а.е. = 150 млн км), французский астроном Жозеф Жером де Лаланд, 1771 г.

- Расстояние до звезды Вега – 8 парсеков (26 световых лет или 1,6 млн а.е.), российский астроном Василий Яковлевич Струве, 1837 г.

- Расстояние до галактики М31, т.е. до Туманности Андромеды, – 700 килопарсеков (2 млн св. лет), американский астроном Эдвин Хаббл, 1923 г.

- Первый открытый квазар 3С 273 – около 2 млрд св. лет ($z = 0,158$), Мартин Шмидт, 1962–63 гг.

- Один из самых ярких ярких гамма-всплесков GRB 970508 – 6,5 млрд св. лет ($z = 0,835$), коллективный труд многих ученых, 1995–97 гг.

Вот несколько пояснений к приведенным фактам.

- *Световой год* (св. год) – единица длины, равная расстоянию, проходимому светом за один земной год. Скорость света в вакууме равна 299792458 м/с, в году $3,16 \cdot 10^7$ секунд, нетрудно с помощью этих цифр перевести световой год в метры.

- *Парсек* (пк) – расстояние, с которого средний радиус земной орбиты (равный одной астрономической единице), перпендикулярный лучу зрения, виден под углом в одну угловую секунду ($1''$). Поскольку 1 а.е. = 150 млн км, а число секунд в радиане равно 206265, получим $1 \text{ пк} = 3,0857 \cdot 10^{16} \text{ м} = 3,26 \text{ св.года}$. Помимо парсека (пк) в космологии удобно пользоваться единицами мегапарсек (1 Мпк = 1 млн пк) и гигапарсек (1 Гпк = 1 млрд пк).

- Указывая расстояние до далеких объектов, мы используем понятие *космологическое красное смещение* – наблюдаемое для всех далеких источников увеличение длин волн излучения. Его параметр z равняется отношению длины волны принятого сигнала по отношению к длине волны испущенного света. Этот эффект объясняется как результат удаления источников друг от друга и, в частности, от нашей Галактики. Отношение длин волн в космологическом расширении оказывается равным отношению масштабов расстояний до далеких объектов.

Интересно, насколько далеко можно продвинуться по расстоянию и по красному смещению z ? Сейчас возраст Вселенной составляет около 14 млрд лет (по разным оценкам: от $13,830 \pm 0,075$ до $13,798 \pm 0,037$). Иногда даже серьезные ученые-астрономы пишут, что мы не можем увидеть объекты, которые находятся от нас дальше 14 млрд световых лет. На самом деле это не так. Попробуем разобраться и понять: где этот

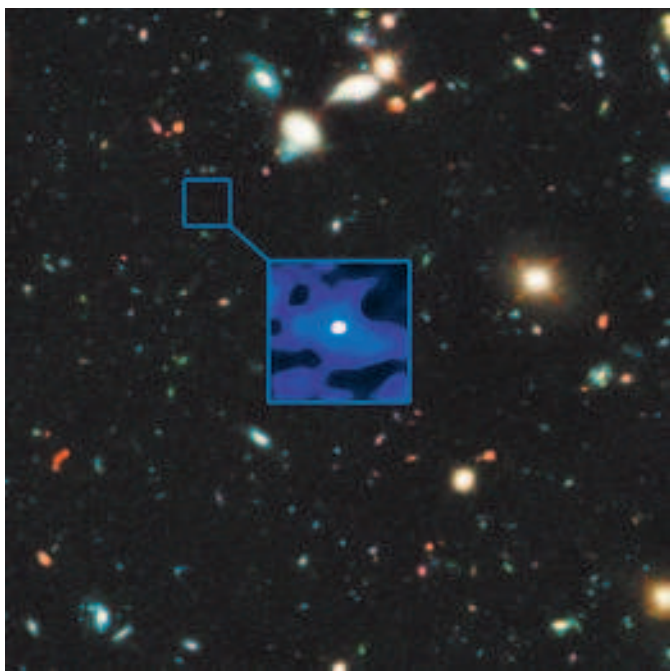


Рис.2. Рекордно удаленная от Земли галактика

край, а точнее, *горизонт* нашей Вселенной; на какое расстояние в принципе могут заглянуть современные приборы?

Если говорить о крае Вселенной, то следует учитывать, что наблюдения даже за экзотическим «населением» дальнего космоса, расположенного на расстояниях в миллионы световых лет от Земли, не говорят астрономам о ранней молодости нашей Вселенной, или Метагалактики. Ведь миллион лет в десять тысяч с лишним раз меньше возраста Вселенной. Поэтому теперь ученые стремятся к открытию все более удаленных структур и объектов на абсолютно «невозможных» (для астрономических инструментов прежних времен) расстояниях от Солнечной системы. Рассмотрим два примера газетных сообщений о далеких объектах.

Первый пример. Объединенная группа астрономов из Калифорнийского университета, а также из Швейцарии и Нидерландов, использовавшая для наблюдений орбитальный телескоп «Хаббл», заявила в начале 2011года об открытии рекордно удаленной от Земли галактики UDFj-39546284 (рис.2). Красное смещение объекта по первым измерениям составило $z = 10,3$. Позднее другие измерения дали для этого объекта $z = 11,8 \pm 0,3$, хотя даже сами авторы этих измерений выражали сомнения в их точности. Некоторое время считалось, что этот рекорд дальности для галактик вряд ли может быть побит до тех пор, пока в космос не будет запущен новый космический телескоп «Джеймс Вебб», однако уже есть и другие претенденты на рекордное расстояние (например, галактика MACS0647-JD). Примем достаточно консервативную оценку $z = 10,3$. В таком случае, свет от рекордно удаленной галактики летел к нам по нашим часам 13,2 млрд лет, и часто пишут, что от нас до этой галактики 13,2 млрд св. лет.

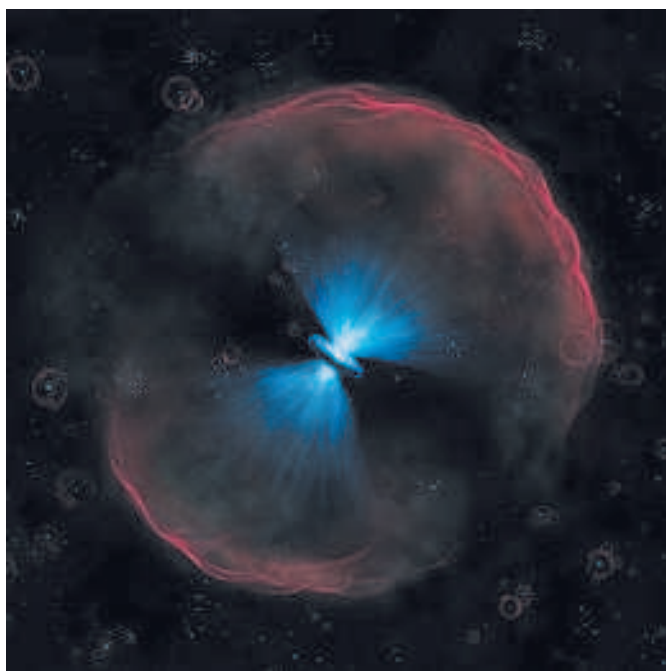


Рис.3. Самый далекий квазар

Второй пример. Британские астрономы недавно заявили, что ими найден в космосе самый далекий квазар ULAS J1120+0641 (рис.3; это изображение сделано художником, но неплохо передает современные представления о квазаре с черной дырой в центре) с красным смещением $z \approx 7,1$. Благодаря высокой светимости этого квазара удалось изучить его спектр, а также довольно точно измерить удаленность от Земли, которая оказалась столь велика, что для ее преодоления свет должен был затратить около 12,9 млрд лет. В газетах и на популярных сайтах так и пишут: расстояние до этого квазара 12,9 млрд св. лет. А в Википедии указано расстояние до этого квазара 28,9 млрд св. лет.

Приведенные примеры вызывают множество вопросов. Например, таких. Какое же расстояние правильное и где находится горизонт Вселенной? А может ли квазар с $z = 7,1$ быть в два с лишним раза дальше галактики с $z = 10,3$? А действительно ли эта галактика находится на расстоянии 13,2 млрд св. лет – ведь пока до нас добирался ее свет, она не покоилась относительно нас!?

За многие миллиарды лет все далекие скопления галактик, а также и квазары удалялись друг от друга, так что галактика UDFj-39546284 и квазар-черная дыра ULAS J1120+0641 теперь от нас гораздо дальше, чем в момент испускания света, который мы сейчас регистрируем. При современных параметрах Вселенной для рекордной галактики получается расстояние около 32 млрд св. лет, и она на самом деле находится дальше рекордного квазара.

Попробуем понять, почему получается сильное расхождение в цифрах для расстояний. Нам нужно решить такую задачу: *найти расстояние до того места, где находится сейчас галактика, которая давным-давно излучила свет, полученный нами только в нашу эпоху.* Возникает и другой вопрос: *а откуда*

известно, сколько времени летел до нас свет от далекого объекта, если мы знаем только его красное смещение z ?

Сначала нужно разобраться, по какому закону расширяется Вселенная. Мы воспользуемся здесь самыми простыми и грубыми моделями и теми законами физики, которые изучают в школе. Полные ответы получают с помощью аппарата релятивистской космологии с использованием математического анализа, так как нужны производные и интегралы. Однако оказывается, что нужные производные может вычислить даже школьник, который еще не проходил основы анализа. Хотя наша модель и будет очень упрощенной, но она даст ошибку не больше 30–40%, т.е. не будет расхождения в разы. А качественное понимание обеих поставленных задач будет совершенно правильным.

Для выяснения законов расширения Вселенной мы используем законы ньютоновской механики и закон всемирного тяготения. Строго говоря, для Вселенной в целом надо применять релятивистскую механику и релятивистскую теорию гравитации – например, общую теорию относительности. Однако в малых областях пространства вполне работают законы Ньютона. Ведь все, что нам нужно, это понять, как разлетается вещество в небольших областях. Тогда, считая Вселенную в среднем однородной, мы поймем, как разлетается вещество в любой далекой от нас области. Иногда говорят, что расширяется само пространство. Это неверно. Пространство никуда не расширяется, просто в нем разные объекты удаляются друг от друга, если они не были слишком близки изначально.

Выпишем теперь некоторые точные решения только для одного типа плотности энергии во вселенной. Для вселенных, содержащих только пыль (давление $p = 0$, причем «пылинки» у нас – это галактики, квазары и т.п.), рассуждаем следующим образом. Приняв, что средняя плотность вещества ρ одинакова на больших масштабах ($H > 100$ Мпк в современной Вселенной), находим массу в пределах радиуса R :

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho R^3.$$

Обозначим через v скорость изменения R . Тогда закон сохранения энергии для любой частички массой m , движущейся со скоростью v , дает

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{R} = \text{const}.$$

Ясно, что для нахождения закона движения частички масса m не важна (все тела в заданном гравитационном поле падают с одинаковым ускорением), и мы получаем

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = \text{const}. \quad (1)$$

Для обычного нерелятивистского вещества масса внутри радиуса R фиксирована, и при его увеличении плотность падает. Мы видим из уравнения (1), что тогда скорость v тоже падает – расширение вселенной замедляется. Если же вселенная заполнена веществом, плотность которого постоянна (или слабо меняется), то M растет и v растет – происходит ускорение расшире-

ния вселенной. Похоже, что наша Вселенная вышла на стадию такого ускорения. Хотя непосредственно это ускорение не наблюдается, но по косвенным аргументам можно считать, что расширение действительно ускоряется. За это открытие была присуждена Нобелевская премия по физике 2011 года астрономам из США и Австралии.

Тут можно обсудить такой интересный вопрос: а энергия при таком расширении сохраняется? Ответ – да! Причем и на макро- и на микроуровне. Формула (1) и есть закон сохранения макроэнергии: сумма кинетической и гравитационной потенциальной энергий постоянна. Если масса M растет, то потенциальная энергия становится все более отрицательной, значит, должны расти скорость и кинетическая энергия. Необычно тут только постоянство плотности при расширении необычного вещества. Эту субстанцию даже и не называют веществом, а чаще всего используют неудачный термин «темная энергия», иногда же называют «квинтэссенцией». Как возможно такое постоянство плотности при расширении? Если обычный газ с положительным давлением совершает работу при расширении, то его энергия и плотность падают. А эта необычная квинтэссенция должна иметь *отрицательное* давление: этакая резина, которая с чудовищной для своей ничтожной плотности силой сопротивляется растяжению в любом направлении. И нужно произвести работу, чтобы расширить эту резину, вложить в нее энергию, а значит, и увеличить ее полную массу, согласно законам физики. Этот вывод прямо получается из закона сохранения энергии на микроуровне (в данном случае этот закон называется первым началом термодинамики).

Конечно, как мы уже говорили, более строго расширение вселенной, заполненной необычной субстанцией, плотность которой не падает при расширении, нужно описывать не в ньютоновской теории, а в общей теории относительности – ОТО. Ньютоновская теория не объясняет, почему при вложении энергии масса тела должна расти. Кроме того, она не объясняет, а что же растягивает «резину» квинтэссенции. В ОТО сразу же становится понятно, что в гравитационную силу дает вклад не только плотность, но и давление вещества. Большое отрицательное давление создает большое гравитационное отталкивание – таким образом квинтэссенция и растягивает себя и ускоряет удаление галактик друг от друга. Но и в ОТО основное уравнение – уравнение Фридмана – очень похоже на наше уравнение (1).

Пока же вернемся к нашей простейшей модели вселенной с нерелятивистским веществом с нулевым давлением. Сравнение точных теорий с наблюдениями Космоса показывает, что именно такая модель совсем неплохо описывает нашу Вселенную на протяжении большей части ее жизни – почти десяток миллиардов лет.

Скорость изменения R в математике назвали производной функции $R(t)$ по времени t . Такую производную обозначают $\frac{dR}{dt}$. По определению, это есть

отношение приращений R , которые обозначают ΔR , к приращениям времени t , обозначаемым Δt , в пределе малых Δt . Посмотрим, что получается при малых Δt на нашем примере, когда $\text{const} = 0$ – этот случай соответствует *параболическому движению*. В таком движении в обычном плоском мире тело улетает бесконечно далеко, причем его скорость все время приближается к нулю. Бывает еще *гиперболическое движение* – когда скорость на бесконечности не падает до нуля, и *эллиптическое движение* – когда тело не может улететь бесконечно далеко, а возвращается к центру притяжения. Эти геометрические термины взяты из небесной механики – науки о движениях планет. Еще Кеплер эмпирически открыл, что планеты движутся по эллипсам, а Ньютон доказал это строго для двух материальных точек, взаимодействующих по закону всемирного тяготения. Было также доказано, что тело, имеющее начальную скорость, равную второй космической, улетит от большой планеты по параболе. Если начальная скорость выше второй космической, то тело улетит по гиперболе. Эту же терминологию Фридман применял для мира в целом – конечно, в эллиптическом мире скопления галактик не летают по Метагалактике по эллипсам, а все большие массивные объекты удаляются друг от друга «по прямой». Но остается главное свойство эллиптического движения – связность орбит: после удаления на какое-то максимальное расстояние объекты начинают сближаться. В гиперболическом мире удаление никогда не прекращается.

Итак, рассмотрим случай параболического движения, тогда в уравнении (1) $\text{const} = 0$ и

$$v = \frac{dR}{dt} \approx \frac{\Delta R}{\Delta t} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

В самом деле, мы видим, что при стремлении R к бесконечности скорость v стремится к нулю. Из этой связи скорости, т.е. производной радиуса по времени, с самим радиусом нам нужно найти закон движения, т.е. функцию $R(t)$. Грубая оценка скорости получается, если мы вместо малых разностей величин R и t возьмем большие разности. Разность радиуса с его начальным нулевым значением есть сам радиус R , а полное приращение времени от нуля есть само время t . Тогда оценка скорости будет такой:

$$v = \frac{R}{t}, \text{ или } v^2 = \frac{R^2}{t^2}, \text{ откуда } \frac{R^2}{t^2} = \frac{2GM}{R}.$$

Уже эта грубая оценка позволяет нам угадать точное решение: мы видим, что куб радиуса R пропорционален квадрату возраста вселенной t . Тут можно вспомнить третий закон Кеплера: квадраты времен обращения планет пропорциональны кубам больших полуосей орбит. Связь размерных величин такая же, хотя смысл разный: радиус орбиты постоянный, а радиус мира растет. Тем не менее, получаем следующее выражение:

$$R \sim t^{2/3}. \quad (2)$$

Почему это решение точное? Для читателя, знакомого с понятием производной, проверить это очень про-

сто. Он знает, что у функции

$$R(t) = kt^{2/3},$$

где k – постоянный коэффициент, производная есть

$$\frac{dR}{dt} = \frac{2k}{3} t^{-1/3} = \frac{2k}{3t^{1/3}}.$$

Для читателя, не изучавшего еще производных, или подзабывшего, что это такое, мы просто проверим, что при малых Δt действительно получается такой ответ. Только начнем со случая попроще.

Возьмем функцию

$$R(t) = kt^2.$$

Если мы к t прибавим маленькую добавку Δt , то можем расписать так:

$$(t + \Delta t)^2 = t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2 = t^2 \left(1 + 2\frac{\Delta t}{t} + \frac{(\Delta t)^2}{t^2} \right).$$

Ясно, что когда Δt в тысячу раз меньше t , последний член в миллион раз меньше единицы. Если Δt в миллион раз меньше t , то последний член в триллион раз меньше единицы, и так далее. Мы видим, что при стремлении Δt к нулю последним членом можно пренебречь. Говорят, что содержащий $(\Delta t)^2$ член – более высокого порядка малости, чем член с Δt . Тогда оказывается, что

$$R(t + \Delta t) \approx R(t) + 2R(t)\frac{\Delta t}{t},$$

значит

$$\Delta R = R(t + \Delta t) - R(t) \approx 2R(t)\frac{\Delta t}{t},$$

и

$$\frac{dR}{dt} \approx \frac{\Delta R}{\Delta t} = 2\frac{R(t)}{t}.$$

Другими словами, мы нашли, что производная от t^2 есть $2t$.

Таким же путем из разложения кубического полинома $(t + \Delta t)^3$ найдем, что производная от t^3 есть $3t^2$, и т.д. Для любых целых n производная от t^n есть nt^{n-1} , но пока нам выше степени $n = 3$ и не надо забираться. Ведь ясно, что не только t в любой степени можно дифференцировать, а можно вместо него взять наше R^3 . Поскольку нас интересуют только главные члены возмущений, ниже вместо конечных разностей ΔR , Δt мы смело пишем «бесконечно малые» dR , dt . Разложение

$$(R + dR)^3 \approx R^3 + 3R^2 dR$$

с учетом того, что

$$dR = v dt \sim \frac{dt}{R^{1/2}},$$

даст

$$(R + dR)^3 \approx R^3 + 3R^{3/2} dt.$$

Это означает, что приращение куба радиуса будет пропорционально $t dt$, если выполнено соотношение (2), но приращение t^2 , равное $2t dt$, как мы нашли, ведет себя так же, а значит, можно подобрать такой

коэффициент в пропорции (2), что будет точное равенство. (Заметим, тут мы как раз проверили, что производная от $t^{2/3}$ есть $\frac{2}{3} \frac{t^{2/3}}{t} = \frac{2}{3} t^{-1/3}$ – двойка берется из разложения квадрата, а тройка – из разложения куба.)

Ответ с точным коэффициентом в выражении (2) удобно записать так:

$$R = R_0 \left(\frac{3}{2} H_0 t \right)^{2/3}, \quad (3)$$

где H_0 – знаменитая постоянная (параметр) Хаббла. Нолик в индексе показывает, что и значение параметра Хаббла, и значение радиуса нашего шарика берутся сейчас, в настоящую эпоху. Отсюда следует, что возраст вселенной в такой модели с нулевым давлением сейчас есть

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}.$$

Из формулы (3) мы видим, что скорость изменения R со временем равна

$$v = \frac{dR}{dt} = \frac{2}{3} \frac{R}{t_0} = H_0 R$$

– а это и есть закон Хаббла, т.е. закон всеобщего разбегания галактик (качественно открытый еще Карлом Вирцем и строго сформулированный Жоржем Леметром несколько раньше Эдвина Хаббла).

Выше мы разложили отдельно R^3 и t^2 , чтобы использовать простые многочлены, и получили

$$\frac{dR}{dt} \sim \frac{2}{3} t^{-1/3}.$$

При произвольной дробной степени p , когда $R \sim t^p$, таким же путем получается

$$\frac{dR}{dt} \sim p t^{p-1}.$$

Теперь мы полностью вооружены для того, чтобы решить первую поставленную задачу: *найти расстояние до того места, где находится сейчас галактика, которая давным-давно излучила свет, полученный нами только в нашу эпоху.*

Условимся измерять координату той галактики, которая испустила дошедший до нас свет, по расстоянию r , которое она имела относительно нас в момент испускания света (т.е. расстояние до галактики от нас растет, а координата ее остается постоянной). То расстояние, на котором эта же галактика находится от нас сейчас, обозначим через D . Мы уже знаем, что расстояние нарастает как $t^{2/3}$, если время отсчитывать от исходного сверхплотного состояния, т.е. можем написать

$$D = a(t)r,$$

где множитель $a(t)$ пропорционален $t^{2/3}$. В космологии этот множитель называют масштабным фактором. В картине наших ньютоновских шариков масштабный фактор можно отождествить с радиусом шара R , но мы будем использовать стандартное астрономическое обозначение $a(t)$. Тогда вместо формулы (3) надо

будет написать

$$a = a_0 \left(\frac{3}{2} H_0 t \right)^{2/3}. \quad (4)$$

Еще раз подчеркнем, что a_0 – это масштабный фактор в нашу эпоху. За каждый малый интервал времени Δt свет пройдет расстояние $c\Delta t$. По координате r свет сместится на

$$\Delta r = -\frac{c\Delta t}{a(t)}.$$

Мы здесь пишем знак «минус», так как координата r при приближении к нам уменьшается. С ростом возраста вселенной t это смещение по координате становится все меньше и меньше, так как $a(t)$ увеличивается. Полное изменение координаты r будет пропорционально сумме малых приращений $\frac{\Delta t}{t^{2/3}}$. Нетрудно увидеть, что

$$\frac{\Delta t}{t^{2/3}} = 3\Delta(t^{1/3}).$$

Мы уже знаем, что производная от t^p есть pt^{p-1} , и ясно, что при $p = 1/3$ мы уже имеем ответ. Но теперь ничто не мешает нам из малых приращений $\Delta t^{1/3}$ набрать большой интервал. На первом отрезке имеем $\Delta t^{1/3} = t_0^{1/3} - t_1^{1/3}$, потом $\Delta t^{1/3} = t_1^{1/3} - t_2^{1/3}$ и так далее. При суммировании всех этих приращений у нас останутся только граничные члены, т.е. на большом интервале останутся только первый и последний моменты времени. Если свет испущен в момент t_i (индекс i здесь от слова initial – начальный), а наблюден в момент t_0 (где нолик можно читать и как букву «о» от слова observer – наблюдать), то полное изменение координаты будет пропорционально $3(t_0^{1/3} - t_i^{1/3})$. А чтобы найти физическое расстояние D сейчас, в момент t_0 , надо умножить на масштабный фактор a , который пропорционален $t^{2/3}$. Не забудем еще скорость света и получим

$$D = 3ct_0^{2/3}(t_0^{1/3} - t_i^{1/3}). \quad (5)$$

Когда момент испускания приближается к нулю, мы получаем замечательный ответ: в мире с нерелятивистской материей с нулевым давлением расстояние до самого дальнего объекта, сигнал которого мы можем принять, есть $D = 3ct_0$, т.е. оно в 3 раза больше возраста вселенной (если расстояния измерять в световых годах)! Именно это расстояние называют по-английски «particle horizon», а по-русски очень часто переводят «горизонт частиц». Но, пожалуй, правильнее переводить «горизонт частицы», т.е. *горизонт наблюдателя*. События на больших расстояниях наблюдателю в принципе не могут быть видны ни в какие приборы. Это для него и есть горизонт, или, если угодно, край вселенной (даже бескрайней!).

Теперь посмотрим, как полученные нами формулы работают для реальных объектов. Возьмем для примера нашу рекордную галактику UDFj-39546284. Из наблюдений мы знаем, что для нее $z \approx 10,3$, а параметр Хаббла сейчас $H_0 \approx 70$ км/с/Мпк. Покажем, как

узнать из этих данных момент излучения t_i и момент наблюдения t_0 , тогда по формуле (5) мы решим первую задачу – узнаем расстояние. Заодно будет решена и наша вторая задача: мы узнаем время распространения света $t_0 - t_i$.

Для начала получим значение t_0 в нашей модели. Из формулы (4) видно, что $a = a_0$ при $t = t_0 = \frac{2}{3H_0}$, где t_0 и есть современный возраст Вселенной. После этого учтем, что длины волн излучения увеличились в $1 + z$ раз и что точно так же изменился масштаб расстояний далеких объектов:

$$a_0 = a(t_i)(1 + z).$$

Но тогда

$$\frac{t_i}{t_0} = \left(\frac{a(t_i)}{a_0} \right)^{3/2} = \frac{1}{(1 + z)^{3/2}}. \quad (6)$$

Вот мы и нашли t_i и все остальное – время распространения света и расстояние D . В расчете нужно не забыть перевести 70 км/с/Мпк в обратные секунды, и мы получим возраст Вселенной: $t_0 = 9,3$ млрд лет. Остальные цифры для этой галактики и для квазара с $z = 7,1$ предоставляем получить читателю самостоятельно. Он должен сам убедиться, что расстояние почти в 3 раза больше, чем время распространения света, умноженное на c . Современные результаты получают точно тем же путем. Никто не может прямо измерить возраст Вселенной, расстояния и т.п., а применяют модели и формулы, только гораздо более сложные, чем наши.

Мы получили значение t_0 меньше, чем следует из современных сложных моделей, которые дают величину 13,8 млрд лет. Но наши цифры не так уж плохи: мы ведь не принимали в расчет темную энергию и не учли того, что при наличном количестве материи (без квинтэссенции) наш мир был бы не параболическим, а гиперболическим.

Проверим, насколько хороша наша модель при $z = 10,3$. Приводить сложные формулы для современных моделей мы не будем, а воспользуемся тем, что в интернете легко найти удобные «космологические калькуляторы». Возьмем для примера один из наиболее известных: <http://www.astro.ucla.edu/~wright/CosmoCalc.html>. Подставим там $z = 10,3$ и $H_0 = 70$, нажмем плашку Flat. Остальные цифры там уже подставлены для стандартной космологической модели с темной энергией. Получим возраст вселенной при таком z , равный 0,469 млрд лет (несколько больше, чем читатель должен получить по формулам нашей простой модели). Прделаем то же самое для $z = 7,1$, получим 0,774 млрд лет (опять больше, чем у нас). Но что интересно, из нашей формулы (6)

$$\frac{t_{10,3}}{t_{7,1}} = \frac{(1 + z_{7,1})^{3/2}}{(1 + z_{10,3})^{3/2}} = \left(\frac{8,1}{11,3} \right)^{3/2} = 0,6069,$$

а это с точностью данных совпадает с $0,469/0,774 = 0,6059$. Это вовсе не случайно: когда расстояния во

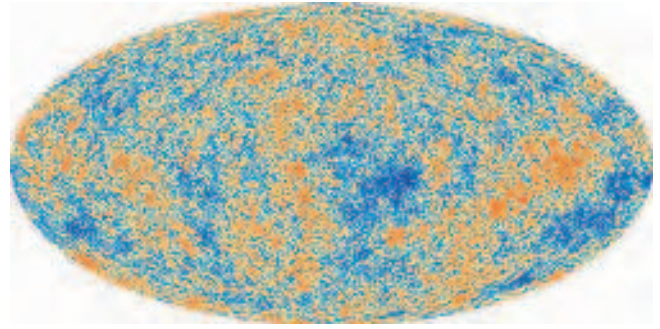


Рис.4. Реликтовое излучение горячей Вселенной

Вселенной были в десяток раз меньше, чем сейчас, а плотность холодного вещества была в 1000 раз выше, чем сейчас, то темная энергия со своей постоянной плотностью почти ни на что не влияла и наша простейшая модель тогда прекрасно описывала динамику расширения! Это сейчас она вышла на другой режим из-за того, что в последние несколько миллиардов лет темная энергия начала ускорять расширение, а в первые миллиарды лет до $z \approx 1$ (исключая только $z > 10000$, когда в динамике преобладало излучение) наша модель работала очень хорошо.

Каковы ближайшие перспективы? Несомненно, что астрономы будут продолжать искать объекты с z порядка 10 и больше: это эпоха очень ранней молодости нашего Мироздания, период так называемой «реионизации». Это примерно соответствует интервалу в 500–800 млн лет с момента Большого взрыва, случившегося 13,8 млрд лет назад.

Но не следует забывать, что давно уже наблюдают в деталях области Вселенной с возрастом всего около 400 тысяч лет, когда $z \approx 1000$. Это – реликтовое излучение горячей Вселенной (рис. 4). Оно дает богатейшую информацию о строении Вселенной и активно изучается наземными и, особенно, космическими аппаратами. Реликтовые фотоны «оторвались» от горячей плазмы в момент рекомбинации и пришли к нам сейчас – в $(1 + z)$ раз – покрасневшими. После рекомбинации и до образования первых звезд, галактик и квазаров (которые и произвели реионизацию) Вселенная была почти совсем темной, но в ней происходили интереснейшие процессы сгущения темной материи, сгущения барионов и образования первых структур. Именно поэтому эти темные века нашей Вселенной так интересны астрономам. Интересно также узнать следующее: уж если мы не можем заглянуть за горизонт наблюдателя и даже подойти вплотную к нему в электромагнитном излучении (мешает великая огненная стена Большого взрыва – поверхность последнего рассеяния реликтового излучения), то что же можно «увидеть» в других сигналах, например в гравитационных волнах?

Но это уже совсем другая история.

Окружности Вилларсо и расслоение Хопфа

А.АКОПЯН

ФРАНЦУЗСКИЙ МАТЕМАТИК И АСТРОНОМ Ивон Вилларсо (1813–1883) заметил, что на торе помимо двух стандартных семейств окружностей (рис. 1) существуют еще два неожиданных семейства, возникающих при сечении тора дважды



Рис. 1. «Стандартные» окружности на торе

касающейся его плоскостью (рис. 2). Теперь такие окружности называются *окружностями Вилларсо*, о них и пойдет речь в этой статье.



Рис. 2. Окружности Вилларсо. Рисунок с сайта flickr.com/sbprzd

Что такое тор?

Тор – это фигура, похожая на поверхность бублика. С таким определением не очень удобно что-либо доказывать, поэтому дадим строгое определение. *Тор – это поверхность, получающаяся при вращении окружности (образующей) относительно прямой (оси), лежащей в плоскости этой окружности* (рис. 3). Если образующая окружность пересекает ось или касается ее, тор будет иметь точки самопересечения (рис. 4) – кроме случая, когда ось проходит через центр образующей окружности (тогда при вращении получится сфера).

Мы будем изучать только случай, когда образующая окружность не пересекает ось – т.е., когда получается, так сказать, тор с дыркой.

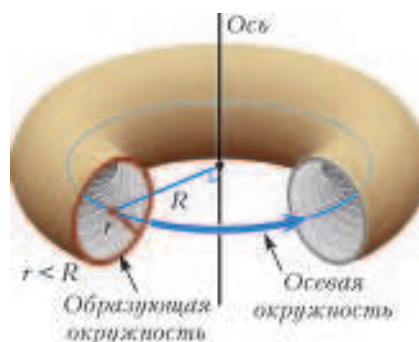


Рис. 3. Тор как поверхность вращения

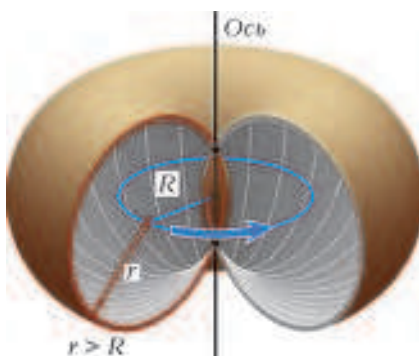


Рис. 4. Тор с самопересечениями

Назовем окружность, по которой двигается центр образующей окружности, *осевой окружностью*. Далее мы будем обозначать через R радиус осевой окружности, а через r – радиус образующей.

Тор можно определить как множество точек на фиксированном расстоянии от осевой окружности.

Упражнения

1. Пусть на плоскости лежит тор, у которого радиус образующей окружности равен 1, а радиус осевой окружности равен 4. На тор положили сферу так, что она коснулась плоскости. Чему равен радиус сферы?

2. (спортивный набор). В цилиндрическую коробку положили теннисный мяч, на него – эспандер (резиновое кольцо в виде тора) и сверху – такой же мяч. Все три предмета вплотную прилегают к поверхности коробки и касаются друг друга. Во сколько раз ширина коробки больше толщины эспандера?

3. В торе, сделанном из резины, вырезали маленькую дырочку. Можно ли теперь вывернуть его наизнанку?

Существование окружностей Вилларсо

Если разрезать тор плоскостью a , проходящей через его ось, то мы увидим две окружности радиуса r , центры которых находятся на расстоянии R от оси. К этим двум окружностям можно провести две общие внутренние касательные. Плоскость s , проходящую через одну из этих касательных и перпендикулярную a , можно назвать *дважды касающейся тора*. Оказывается, что *плоскость s пересекает тор по двум окружностям* (рис. 5). Давайте покажем это.

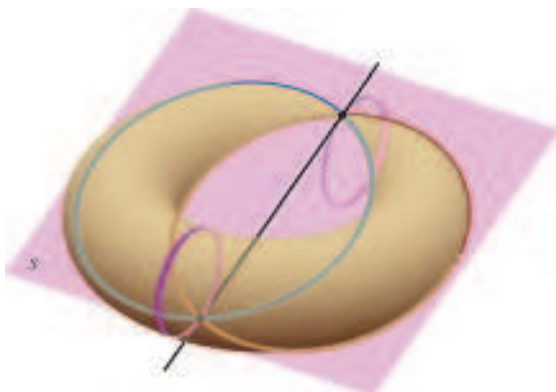


Рис. 5. Дважды касающаяся плоскость

Обозначим центр осевой окружности через O , а плоскость, ее содержащую, через b . Отметим, что синус угла между плоскостями s и b равен r/R . Обозначим этот угол через α (рис. 6). Через $P_1, Q_1,$

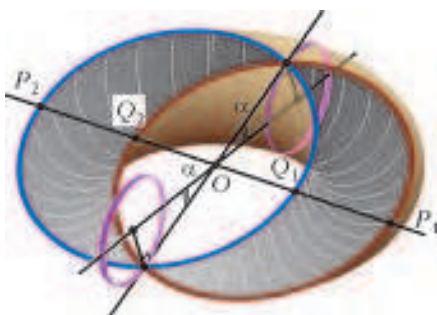


Рис. 6. Сечение тора дважды касающейся плоскостью

Q_2 и P_2 обозначим точки тора, лежащие на прямой, образующейся при пересечении плоскостей s и b . Пусть ω – это окружность, лежащая в плоскости s и построенная на диаметре P_1Q_2 , длина этого диаметра равна

$$OQ_2 + OP_1 = R - r + R + r = 2R.$$

Нам надо показать, что эта окружность лежит на поверхности тора.

Обозначим через O_ω ее центр (рис. 7, мы немного повернули тор на этом рисунке, чтобы сделать более наглядными дальнейшие рассуждения). Пусть X – произвольная точка на этой окружности, X_1 – ее проекция на плоскость b .

Продлим луч OX_1 до пересечения с осевой окружностью тора в точке, которую обозначим O_x . Пусть ω_x – образующая окружность тора с центром в O_x . Заме-

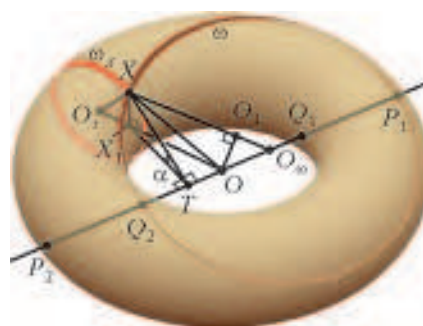


Рис. 7

тим, что

$$OO_\omega = O_\omega Q_2 - OQ_2 = R - (R - r) = r.$$

Пусть T – проекция точки X на диаметр P_1Q_2 , а O_1 – проекция точки O на XO_ω . Тогда $\angle XTX_1 = \alpha$, откуда

$$\begin{aligned} XX_1 &= XT \sin \alpha = O_\omega X \sin \angle XO_\omega O \sin \alpha = \\ &= R \sin \alpha \sin \angle XO_\omega O = r \sin \angle XO_\omega O = \\ &= OO_\omega \sin \angle XO_\omega O = OO_1. \end{aligned}$$

Таким образом, прямоугольные треугольники OXX_1 и XOO_1 равны (по гипотенузе и катету), откуда $\angle OXO_\omega = \angle XOO_x$. Тогда равны треугольники OXO_ω и XOO_x – по двум сторонам (OX – общая, $OO_x = O_\omega X = R$) и углу между ними. Отсюда $O_x X = O_\omega O = r$, т.е. точка X лежит на торе, что и необходимо было показать.

Аналогично доказывается, что окружность, лежащая в плоскости s и построенная на диаметре P_2Q_1 , также лежит на торе. (Строго говоря, мы показали только, что в пересечении плоскости s и тора есть две окружности, а то, что лишних точек в этом пересечении нет, более-менее очевидно.)

Итак, существование семейства окружностей Вилларсо доказано. Докажем, что *окружности Вилларсо пересекают все образующие окружности под одним и тем же углом, равным $90^\circ - \alpha$* .

Угол между пересекающимися окружностями определяется так: надо провести в точке пересечения к каждой окружности касательную; угол между этими касательными и есть угол между окружностями. Итак,

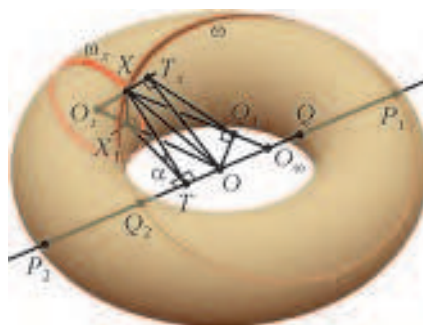


Рис. 8

на рисунке 8 изображены такие окружности, пересекающиеся в точке X : окружность Вилларсо ω и образующая окружность ω_x .

Касательная к окружности в данной точке перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку. Поэтому отрезок OO_1 параллелен касательной к окружности ω . Опустим перпендикуляр OT_x на продолжение радиуса O_xX – он будет параллелен касательной к окружности ω_x . Тогда угол между нужными нам касательными равен углу T_xOO_1 . Докажем, что треугольник T_xOO_1 равен треугольнику TXX_1 – отсюда мгновенно следует нужное равенство $\angle T_xOO_1 = 90^\circ - \alpha$. Для этого рассмотрим тетраэдр $XOO_\omega O_x$. Пусть M и N – середины его ребер XO и O_xO_ω соответственно (рис. 9). Докажем **лемму**: *этот тетраэдр переходит в себя при повороте на 180° вокруг прямой MN .*

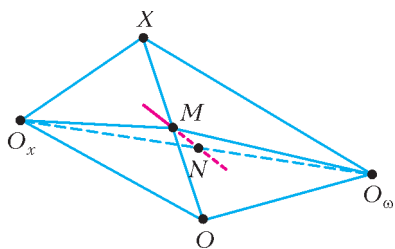


Рис. 9. Тетраэдр $XOO_\omega O_x$

Мы уже знаем, что две грани тетраэдра, O_xO_ω и XOO_x , равны. Тогда $O_xM = O_\omega M$. Проведем в равнобедренном треугольнике O_xMO_ω высоту из вершины M на O_xO_ω . Она будет и медианой, поэтому попадет в точку N . Значит, MN перпендикулярна O_xO_ω . Аналогично доказывается, что MN перпендикулярна XO . Но тогда MN – общий серединный перпендикуляр к скрещивающимся ребрам XO и O_xO_ω . Поэтому при повороте на 180° вокруг MN эти ребра перейдут сами в себя, а значит, и тетраэдр самосовместится. Лемма доказана.

Из леммы получается, что перпендикуляры, опущенные из O на XO_ω и O_xX , перейдут (при повороте на 180° вокруг MN) в перпендикуляры, опущенные из X на O_xO и $O_\omega O$ соответственно, т.е. при таком повороте треугольники T_xOO_1 и TXX_1 перейдут друг в друга, а потому они равны.

Теперь расскажем об интересных конструкциях, в которых участвуют окружности Вилларсо.

Разбиение пространства на зацепленные окружности

Назовем окружности в пространстве *зацепленными*, если одна из них проходит через диск, который образует вторая окружность. Иначе говоря, если бы они были сделаны из проволоки, то два образовавшихся кольца нельзя было бы отделить друг от друга, не разрезав одно из них (рис. 10).



Рис. 10. Зацепленные окружности

Например, две ок-



Рис. 11. Окружности Вилларсо из одного семейства зацепляются друг за друга. Фото Д.А.Рихтера

ружности Вилларсо, принадлежащие одному семейству на торе, как раз являются такими зацепленными окружностями (рис. 11).

Оказывается, если из пространства удалить любую прямую l , то оставшуюся часть можно будет разбить на непересекающиеся окружности, любые две из которых зацеплены. Для начала на какой-нибудь полуплоскости с границей l нарисуем семейство окружностей, заметающих всю полуплоскость без одной точки (рис. 12). Вращая эти окружности вокруг l , мы получим семейство торов (один внутри другого), «нанизанных» на окружность (ее можно считать вырожденным тором). Эти торы покрывают все пространство за исключением прямой l . Разобьем каждый из торов (кроме

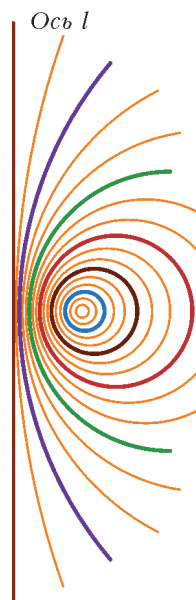


Рис. 12. Окружности, заметающие полуплоскость без точки

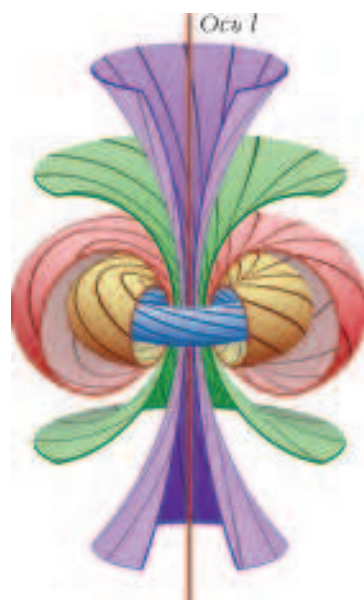


Рис. 13. Разбиение пространства на попарно зацепленные окружности и прямую

вырожденного) на семейство непересекающихся окружностей Вилларсо. Тогда любые две из этих окружностей будут зацеплены друг с другом и с вырожденным тором-окружностью, а вместе все они заполнят трехмерное пространство без прямой l (рис. 13).

Задача*. Разбейте *все* пространство на непересекающиеся окружности (ни одна из которых не является вырожденной!).

Стереографическая проекция

Имеется связь между окружностями на плоскости и окружностями на сфере, она устанавливается с помощью стереографической проекции. На рисунке 14

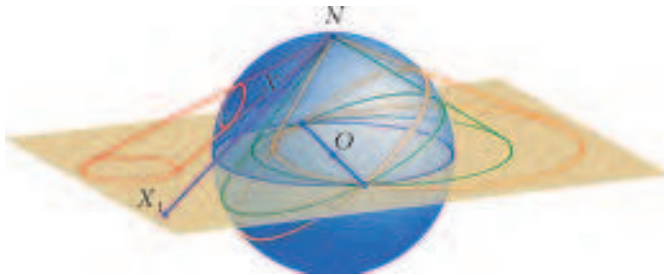


Рис.14. Стереографическая проекция

изображена стереографическая проекция сферы на плоскость. Мы провели плоскость через экватор сферы и каждой точке X на сфере сопоставили точку X_1 на плоскости, в которой прямая NX пересекает эту плоскость. Здесь N – это наиболее удаленная от плоскости точка на сфере («северный полюс»). При этом подразумевается, что сама точка N соответствует «бесконечно удаленной» точке плоскости. Интересно, что при стереографической проекции окружности на сфере переходят в окружности на плоскости (кроме окружностей, проходящих через N , – они переходят в прямые), и наоборот.¹

Разберемся: какие окружности на плоскости соответствуют при стереографической проекции «большим» окружностям на сфере (того же радиуса, что и экватор)? Ответ довольно прост – это в точности те окружности, у которых *есть хорда, совпадающая с диаметром экватора*. Это хорошо видно на рисунке 14.

Представим на секунду, что мы захотели бы разбить сферу на непересекающиеся окружности (на самом деле сделать это невозможно). Такое разбиение можно было бы получить, если бы нашлось соответствующее (при стереографической проекции) разбиение плоскости на окружности (где вместо одной из окружностей использовалась бы прямая).

А сделать нечто совсем уж фантастическое – разбить сферу на непересекающиеся «большие» окружности – можно было бы, если бы существовало соответствующее разбиение плоскости на прямую и окружности, у каждой из которых одна из хорд это какой-то диаметр экватора.

Уместно задать вопрос – зачем все эти предположения, если они невозможны?

Оказывается, описанная фантастическая ситуация реализуется... в четырехмерном пространстве! А именно, можно разбить трехмерную сферу на равные «большие» окружности, любые две из которых зацеплены (используя для построения полученное нами разбиение трехмерного пространства). Такое разбиение трехмерной сферы обнаружил Хайнц Хопф в 1931 году. Оно лежит в основе знаменитого расслоения Хопфа – очень важной конструкции в алгебраической топологии. Мы не будем говорить здесь, что такое расслоение, а лишь поясним, как строится нужное разбиение.

Конструкция Хопфа

Аналогично стереографической проекции, существует соответствие между окружностями в трехмерном пространстве и окружностями на трехмерной сфере (границе четырехмерного шара).

Воспользуемся уже построенным нами разбиением трехмерного пространства на окружности и прямую (см. рис. 13). При стереографической проекции им будут соответствовать попарно зацепленные окружности на трехмерной сфере. Как сделать, чтобы, сверх того, им соответствовали именно «большие» окружности на трехмерной сфере? По аналогии, любая окружность Вилларсо должна иметь хорду, являющуюся диаметром «экваториальной» двумерной сферы. Это несложно добиться. Посмотрим на рисунок 12. Пусть O – проекция центров изображенных там вспомогательных окружностей на ось. Достаточно выбрать эти окружности так, чтобы все касательные, проведенные к ним из точки O , имели одну и ту же длину (докажите, что это возможно!)². Тогда на каждом торе у любой окружности Вилларсо найдется нужная хорда – на рисунке 15 это будет хорда T_1T_2 .

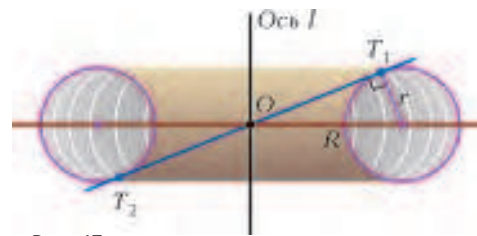


Рис. 15

² Для тех, кто знаком с понятием радикальной оси, дадим указание: надо построить семейство непересекающихся окружностей, у любой пары которых будет одна и та же радикальная ось (ось l). Таким семейством будет множество окружностей, перпендикулярных к двум фиксированным пересекающимся окружностям с центрами на прямой l .

¹Подробнее об этом можно почитать в книгах: Г.С.М.Кокстер, С.Л.Грейтцер. Новые встречи с геометрией. (М.: Наука, 1978) или Б.А.Розенфельд, Н.Д.Сергеева. Стереографическая проекция (Серия «Популярные лекции по математике», вып. 53. М.: Наука, 1973).

Задачи

по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5-6-2013» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «M2316» или «Ф2323». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи M2316, M2317a, M2318–M2320, M2321a, б, M2322, M2323a предлагались на заключительном этапе XXXIX Всероссийской олимпиады школьников по математике, задачи M2324 и M2325a – на LIV Международной математической олимпиаде.

Задачи M2316–M2325, Ф2323–Ф2332

M2316. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность Ω . Касательные, проведенные к Ω в точках B и C , пересекаются в точке P . Точки D и E – основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые AB и AC . Докажите, что точка пересечения высот треугольника ADE является серединой отрезка BC .

П. Кожевников

M2317. а) Существует ли такое натуральное n , что число $a\overline{nb}$ делится на \overline{ab} для любых: а) ненулевых; б) ненулевых четных; в) нечетных цифр a и b ? (Здесь через $x\overline{...y}$ обозначено число, получаемое приписыванием друг к другу десятичных записей чисел x, \dots, y .)

В. Сендеров

M2318. На окружности отметили n точек, разбивающие ее на n дуг. Окружность повернули вокруг центра на угол $2\pi k/n$ (при некотором натуральном k), в результате чего отмеченные точки перешли в n новых точек, разбивающих окружность на n новых дуг. Докажите, что найдется новая дуга, которая целиком лежит в одной из старых дуг. (Считается, что концы дуги ей принадлежат.)

И. Митрофанов

M2319. На доске написали 100 попарно различных натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_{100} . Затем под каждым числом a_i написали число b_i , полученное прибавлением к a_i наибольшего общего делителя остальных 99 исходных чисел. Какое наименьшее количество попарно различных чисел может быть среди b_1, b_2, \dots, b_{100} ?

С. Берлов

M2320. Окружность с центром I , вписанная в треугольник ABC , касается сторон BC , CA , AB в точках

A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть I_a, I_b, I_c – центры вневписанных окружностей треугольника ABC , касающихся сторон BC , CA , AB соответственно. Отрезки $I_a B_1$ и $I_b A_1$ пересекаются в точке C_2 . Аналогично, отрезки $I_b C_1$ и $I_c B_1$ пересекаются в точке A_2 , а отрезки $I_c A_1$ и $I_a C_1$ – в точке B_2 . Докажите, что I является центром окружности, описанной около треугольника $A_2 B_2 C_2$.

Л. Емельянов, А. Полянский

M2321. Пусть $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$ – последовательность простых чисел в порядке возрастания. Пусть $P_k = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p_k$ – произведение первых k простых чисел, а $Q_k = 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p_{k+1}$ – произведение первых k нечетных простых чисел. Найдите все натуральные $k > 1$ такие, что число: а) $P_k - 1$; б) $Q_k - 1$; в) $P_k + 1$ является точной (большей, чем первая) степенью натурального числа. г) При каких k число $Q_k + 1$ является степенью двойки?

В. Сендеров

M2322. Глава Монетного двора хочет выпустить монеты 12 номиналов, каждый в натуральное число рублей, так, чтобы любую сумму от 1 до 6543 рублей можно было заплатить без сдачи, используя не более 8 монет. Сможет ли он это сделать?

О. Подлитский

M2323. На плоскости проведены n прямых, среди которых нет параллельных и никакие три из которых не пересекаются в одной точке. Докажите, что существует такая: а) незамкнутая; б*) замкнутая n -звенная несамопересекающаяся ломаная, что на каждой из n данных прямых лежит ровно по одному звену этой ломаной.

Фольклор

M2324. Пусть вневписанная окружность треугольника

ABC , лежащая напротив вершины A , касается стороны BC в точке A_1 . Точки B_1 на стороне CA и C_1 на стороне AB определяются аналогичным образом с использованием вневписанных окружностей, лежащих напротив вершин B и C соответственно. Известно, что центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

Вневписанной окружностью треугольника ABC , лежащей напротив вершины A , называется окружность, которая касается отрезка BC , продолжения стороны AB за точку B и продолжения стороны AC за точку C . Вневписанные окружности, лежащие напротив вершин B и C , определяются аналогично.

А.Полянский

M2325. Пусть $n \geq 3$ — целое число. Рассмотрим окружность и $n + 1$ точек на ней, разбивающих ее на равные дуги. Рассмотрим все способы пометить эти точки числами $0, 1, \dots, n$ так, что каждое число использовано ровно один раз. Два способа, отличающихся поворотом, считаются одинаковыми. Способ пометки называется *красивым*, если для любых четырех меток $a < b < c < d$ таких, что $a + d = b + c$, хорда, соединяющая точки с метками a и d , не пересекает хорду, соединяющую точки с метками b и c .

Пусть M — количество красивых способов пометки. Пусть N — количество упорядоченных пар (x, y) натуральных чисел, удовлетворяющих условиям $x + y \leq n$ и $\text{НОД}(x, y) = 1$. Докажите, что $M = N + 1$.

А.Голованов, М.Иванов



Рис. 1

Ф2323. В точке A — середине дна стакана с вертикальными стенками — находится тяжелый шарик (рис. 1). С какой по величине и направлению скоростью надо выстрелить шарик так, чтобы, ударившись n раз о стенки, он вернулся в исходное положение? Какое время понадобится на такое движение? Ширину стакана считать равной $2l$, столкновения шарика со стенками — абсолютно упругими.

А.Буров

Ф2324*. Тонкостенная труба с жесткими стенками, поперечным круглым сечением $S = 10 \text{ см}^2$ и длиной $L = 1 \text{ м}$ закрыта плоской тонкой заслонкой снизу и открыта сверху. Эту трубу, удерживая слегка отклоненной от вертикального положения, опустили в воду озера так, что ее верхний конец оказался чуть выше уровня воды в озере. После этого отверстие очень быстро открыли. Заслонка двигалась поступательно в направлении, перпендикулярном оси трубы. На какую максимальную высоту над уровнем воды в озере выплеснется вода из трубы? Рассмотрите два случая: а) сечение трубы при приближении к нижнему концу плавно возрастает от величины S за счет раструба на отрезке, сравнимом по длине с диаметром внутреннего сечения; б) сечение постоянно и равно S вплоть до самого нижнего конца трубы. Во втором случае эффективное сечение потока на входе воды в трубу

меньше полного геометрического сечения: $S_{\text{эфф}}/S = k_{\text{эфф}} = 0,5$.

В.Озеров

Ф2325. Три одинаковые массы (например, равные единице) закреплены в вершинах правильного треугольника со стороной a . В скольких положениях равновесия может находиться пробная точка массой m под действием ньютоновского притяжения со стороны масс, сосредоточенных в вершинах треугольника?

В.Никонов

Ф2326. Небо над Африкой закрыто облаками. Большая лужа глубиной $0,5 \text{ м}$ заполнена мутной темной водой (в воде присутствует взвесь черной глины — слоны постарались) с температурой $+25 \text{ }^\circ\text{C}$, равной температуре воздуха над лужей. Если погрузить в воду влагозащищенный люксметр, обратив его чувствительный элемент вверх, то он показывает, что на глубине 10 см свет в $2,72$ раза слабее, чем возле самой поверхности, на глубине 20 см — слабее еще в $2,72$ раза и т.д. В некоторый момент Солнце перешло в зенит и облака раскрылись. Поток излучения Солнца, достигший поверхности лужи, равен $E = 1000 \text{ Вт/м}^2$. Какой через 1 минуту после начала освещения будет температура воды в этой луже на глубине 5 см и какой она будет на глубине 40 см ?

А.Светлов

Ф2327. Три маленьких шарика расположены вдоль оси координат x в космосе. Вокруг больше ничего нет, гравитационными силами взаимодействия можно пренебречь по сравнению с электрическими. Скорости всех шариков в начальный момент равны нулю; координаты шариков $x, 2x, 4x$; заряды шариков $q, 4q, 9q$; массы шариков $m, 3m, 2m$ соответственно. Какими будут скорости шариков через очень большое время?

А.Зильберман

Ф2328. Идеальная батарейка, амперметр и вольтметр соединены последовательно в замкнутую цепь. Показания приборов равны 1 А и 10 В соответственно. Если параллельно амперметру подключить резистор с неким неизвестным сопротивлением, то показание амперметра станет $0,9 \text{ А}$, а показание вольтметра будет $10,2 \text{ В}$. Какова ЭДС батарейки? Каковы внутренние сопротивления приборов? Каково это «неизвестное сопротивление»?

А.Зильберман

Ф2329. Выпрямитель сетевого напряжения (220 В , 50 Гц) представляет собой последовательно соединенные резистор сопротивлением $0,5 \text{ кОм}$ и полупроводниковый диод, выдерживающий прямой ток 1 А и обратное напряжение 400 В . Конденсатор емкостью $0,001 \text{ Ф}$ сначала подключили к выпрямителю и дождались максимальной зарядки (рис. 2). Затем контакт ключа перекинули,

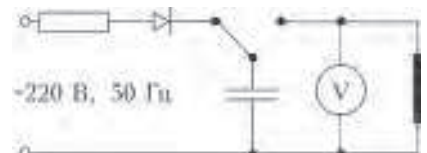


Рис. 2

и обкладки конденсатора оказались подключенными к медной проволочке длиной $L = 4,7$ см с поперечным сечением $S = 10^{-2} \text{ мм}^2$. Проволочка находится в воздухе при комнатной температуре $t_0 = 20^\circ \text{C}$. Что будет показывать идеальный вольтметр через 10 с после подключения проволоочки? Необходимые для решения задачи дополнительные данные найдите самостоятельно. При реальном проведении такого эксперимента для безопасности рекомендуется проволочку поместить между листами бумаги. Считайте, что молярная теплоемкость меди (и твердой, и жидкой) не меняется с температурой и равна $3R = 25 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$.

А.Тарчевский

Ф2330*. Длинный ($L = 10$ м) соленоид представляет собой намотанную в один слой на цилиндрический каркас диаметром $D = 0,1$ м проволоку прямоугольного сечения с размером сечения $a \times a$ ($a = 0,1$ мм). Поверхность проволоки покрыта тонким слоем непроводящего тока лака. Выполняются такие соотношения: $L \gg D \gg a$. Витки проволоки расположены вплотную друг к другу. Концы проволоки выведены перпендикулярно оси симметрии соленоида и далеко-далеко от соленоида подключены к батарее. По проволоке течет ток I . Вблизи центра соленоида на его внешней поверхности сидит маленький жук. У жука есть совсем маленький компас, и он ползет все время в направлении вектора индукции магнитного поля. Какова форма траектории движения жука по соленоиду? Считая, что длина пути жука от точки старта составила $s = 1$ м, найдите величину перемещения жука.

С.Жуков

Ф2331. Граница раздела областей пространства, в одной из которых есть однородное магнитное поле с индукцией $B = 10$ Тл, а в другой магнитного поля нет, представляет собой плоскость. Естественно, что вектор \vec{B} параллелен этой границе раздела. Из области, где поля нет, в область с магнитным полем влетает электрон с зарядом e . Его скорость в момент пересечения границы перпендикулярна вектору \vec{B} , составляет угол α с плоскостью границы раздела и величина скорости много меньше скорости света. Движущийся в магнитном поле с ускорением a электрон излучает, и мощность электромагнитных волн – так называемого синхротронного излучения – пропорциональна квадрату произведения величины заряда на величину ускорения, деленного на скорость света: $W = \delta (ea/c)^2$. Коэффициент пропорциональности обозначен символом δ , он имеет размерность электрического сопротивления и равен $\delta = 20$ Ом. При каком значении угла α электрон не покинет область с магнитным полем?

Для справки: в Международной системе единиц (СИ) мощность излучения заряда q , движущегося с ускорением a , равна

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a^2 q^2}{3c^3}.$$

Д.Сергеев

Ф2332. Центр квадрата со стороной 1 см находится на главной оптической оси тонкой линзы. Действительное изображение квадрата, которое создает линза, – это трапеция, параллельные стороны которой перпендикулярны главной оптической оси линзы, пересекают ее и имеют длины 2 см и 3 см. Каково расстояние между этими сторонами трапеции?

Е.Кузнецов

Решения задач М2301–М2308, Ф2308–Ф2314

М2301. Дана числовая последовательность 1, -2, -3, 4, 5, 6, -7, -8, -9, -10, 11, 12, 13, 14, 15, -16, ... (эта последовательность получается из последовательности 1, 2, 3, 4, ... расстановкой знаков: одно число со знаком «+», затем два числа со знаком «-» три числа со знаком «+», четыре числа со знаком «-», и т.д.). Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что сумма первых n членов этой последовательности равна 0.

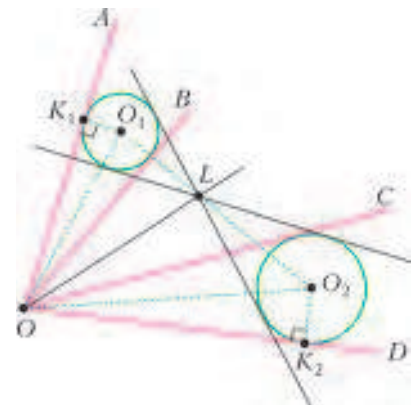
Разделим числа данной последовательности на группы: (1, -2, -3, 4); (5, 6, -7, -8, -9, -10, 11, 12); (13, 14, 15, -16, -17, -18, -19, -20, -21, 22, 23, 24); ... Здесь k -я группа устроена так: берем $4k$ последовательных натуральных чисел и у средних $2k$ чисел меняем знак с «+» на «-». Таким образом, в одной группе среднее арифметическое средних $2k$ чисел противоположно среднему арифметическому крайних $2k$ чисел, а значит, сумма всех чисел в одной группе равна 0. Это означает, что для любого n вида $4(1 + 2 + \dots + k) = 2k(k + 1)$ сумма первых n членов этой последовательности равна 0.

Нетрудно убедиться, что кроме найденных n других значений n , удовлетворяющих условию задачи, не существует.

В.Расторгуев

М2302. Внутри угла AOD проведены лучи OB и OC , причем $\angle AOB = \angle COD$. В углы AOB и COD вписаны непересекающиеся окружности. Докажите, что точка пересечения общих внутренних касательных к этим окружностям лежит на биссектрисе угла AOD .

Пусть O_1 и O_2 – центры окружностей, R_1 и R_2 – их радиусы, а L – точка пересечения касательных (см. рисунок). Заметим, что L лежит на отрезке O_1O_2 . Так как $\angle AOB = \angle COD$, то достаточно показать, что OL – биссектриса угла O_1OO_2 . Поскольку окружности гомотетичны с центром L , то $\frac{O_1L}{O_2L} = \frac{R_1}{R_2}$. С другой стороны, из подобия прямоугольных треугольников OO_1K_1 и OO_2K_2 (где K_1 и K_2 – точки касания окруж-



ностей с лучами OA и OD) следует $\frac{OO_1}{OO_2} = \frac{R_1}{R_2}$. Получаем $\frac{O_1L}{O_2L} = \frac{OO_1}{OO_2}$, откуда следует, что OL – биссектриса в треугольнике O_1OO_2 .

Замечание. В данной конструкции можно рассматривать точку пересечения общих внешних касательных к окружностям. Она будет лежать на внешней биссектрисе угла AOD .

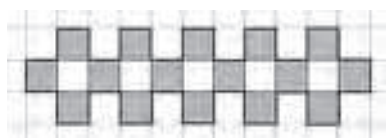
Ф.Нилов

M2303. На бесконечной клетчатой плоскости клетки раскрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке. Дан многоугольник периметра P и площади S , все стороны которого идут по линиям сетки. Докажите, что этот многоугольник содержит не более $\frac{S}{2} + \frac{P}{8}$ черных клеток.¹

Обозначим через B и W , соответственно, количества черных и белых клеток, принадлежащих многоугольнику. Сумма периметров всех черных клеток равна $4B$, а всех белых – $4W$. Заметим, что каждый единичный отрезок границы одной из черных клеток многоугольника либо является также отрезком границы некоторой белой клетки многоугольника, либо выходит на границу многоугольника (т.е. входит в его периметр). Отсюда

$$4B \leq 4W + P \Leftrightarrow 8B \leq 4B + 4W + P \Leftrightarrow B \leq \frac{B+W}{2} + \frac{P}{8},$$

что и требовалось доказать.



Отметим, что имеются многоугольники (см. рисунок), для которых оценка, указанная в задаче, точна.

А.Магазинов

M2304. Через $s(n)$ обозначим сумму цифр в двоичной записи натурального числа n . Например, $s(2013) = 9$, поскольку 2013 имеет двоичную запись 11111011101 (т.е. $2013 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0$). Натуральное число n назовем счастливым, если $s(n) = s(3n)$.

а) Докажите, что существует бесконечно много пар подряд идущих счастливых чисел.

б) Докажите, что не существует трех подряд идущих счастливых чисел.

Ниже используем следующие свойства суммы цифр $s(n)$:

1) $s(2n) = s(n)$ (поскольку двоичная запись числа $2n$ получается из двоичной записи числа n приписыванием 0 справа);

n	$3n$	дв. запись n	дв. запись $3n$	$s(n)$	$s(3n)$
$8m$	$8(3m)$	$\overline{m000}$	$\overline{(3m)000}$	$s(m)$	$s(3m)$
$8m+1$	$8(3m)+3$	$\overline{m001}$	$\overline{(3m)011}$	$s(m)+1$	$s(3m)+2$
$8m+2$	$8(3m)+6$	$\overline{m010}$	$\overline{(3m)110}$	$s(m)+1$	$s(3m)+2$
$8m+3$	$8(3m+1)+1$	$\overline{m011}$	$\overline{(3m+1)001}$	$s(m)+2$	$s(3m+1)+1$
$8m+4$	$8(3m+1)+4$	$\overline{m100}$	$\overline{(3m+1)100}$	$s(m)+1$	$s(3m+1)+1$
$8m+5$	$8(3m+1)+7$	$\overline{m101}$	$\overline{(3m+1)111}$	$s(m)+2$	$s(3m+1)+3$
$8m+6$	$8(3m+2)+2$	$\overline{m110}$	$\overline{(3m+2)010}$	$s(m)+2$	$s(3m+2)+1$
$8m+7$	$8(3m+2)+5$	$\overline{m111}$	$\overline{(3m+2)101}$	$s(m)+3$	$s(3m+2)+2$

2) $s(m+n) \leq s(m) + s(n)$, причем неравенство превращается в равенство тогда и только тогда, когда сложение $m+n$ «столбиком» происходит без переноса разрядов (это следует из процедуры сложения столбиком).

а) Заметим, что при любом $k \geq 2$ число $n = 2^k - 1$ (имеющее двоичную запись $\underbrace{11\dots1}_k$) – счастливое. Действительно, $3n$ имеет двоичную запись $10\underbrace{11\dots1}_{k-2}101$, таким образом, $s(n) = s(3n) = k$.

Отсюда следует, что при любом $k \geq 3$ числа $2^k - 2 = 2(2^{k-1} - 1)$ и $2^k - 1$ образуют пару подряд идущих счастливых чисел.

б) Докажем, что если числа n и $n+1$ – счастливые, то $n \equiv 1 \pmod{8}$ или $n \equiv 6 \pmod{8}$.¹ Отсюда, очевидно, будет следовать утверждение пункта б) (действительно, если три числа $n, n+1, n+2$ – счастливые, то каждое из чисел n и $n+1$ должно давать остаток 1 или 6 при делении на 8, что невозможно).

Выпишем $s(n)$ и $s(3n)$ в зависимости от остатка при делении n на 8 в таблицу. Запишем условия того, что числа n и $n+1$ оба являются счастливыми:

$$\begin{cases} s(n) = s(3n), \\ s(n+1) = s(3(n+1)). \end{cases} \quad (*)$$

При $n = 8m$ условия (*) приводят к равенствам (см. таблицу)

$$\begin{cases} s(m) = s(3m), \\ s(m)+1 = s(3m)+2 \end{cases}$$

– противоречие.

При $n = 8m+2$ имеем

$$\begin{cases} s(m)+1 = s(3m)+2, \\ s(m)+2 = s(3m+1)+1 \end{cases} \Rightarrow s(3m)+2 = s(3m+1) \leq s(3m)+1$$

– противоречие.

При $n = 8m+3$:

$$\begin{cases} s(m)+2 = s(3m+1)+1, \\ s(m)+1 = s(3m+1)+1 \end{cases}$$

– противоречие.

¹ В условии этой задачи была допущена ошибка: вместо $\frac{P}{8}$ было напечатано $\frac{P}{2}$. Приносим свои извинения.

¹ Обе возможности реализуются: вторая – в пункте а), а первая – скажем, при $n = 89$.

При $n = 8m + 4$:

$$\begin{cases} s(m) + 1 = s(3m + 1) + 1, \\ s(m) + 2 = s(3m + 1) + 3 \end{cases}$$

– противоречие.

При $n = 8m + 5$:

$$\begin{cases} s(m) + 2 = s(3m + 1) + 3, \\ s(m) + 2 = s(3m + 2) + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s(3m + 1) + 2 = s(3m + 2) \leq s(3m + 1) + 1$$

– противоречие.

Остается рассмотреть случай $n = 8m + 7$. Пусть k – количество единиц в конце десятичной записи числа n ($k \geq 3$), т.е. двоичная запись числа n имеет вид $t\underbrace{11\dots111}_k$, где t оканчивается на 0 или $t = 0$. Тогда $n + 1 = (t + 1) \cdot 2^k$, $3(n + 1) = (3t + 3) \cdot 2^k$, $3n = (3t + 2) \cdot 2^k + (2^k - 3)$. Двоичная запись числа $3n$ имеет вид $(3t + 2)\underbrace{11\dots101}_k$. Условия (*) записываются так:

$$\begin{cases} s(t) + k = s(3t + 2) + (k - 1), \\ s(t + 1) = s(3t + 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s(t) + 1 = s(3t + 2), \\ s(t + 1) = s(3t + 3). \end{cases}$$

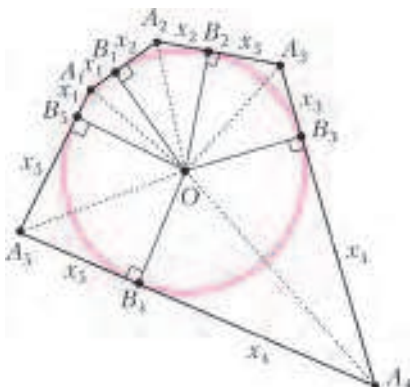
Но так как t четно, то $s(t + 1) = s(t) + 1$ и $s(3t + 3) = s(3t + 2) + 1$. Отсюда видно, что последняя система противоречива.

А.Устинов

M2305. По кругу расставлены 99 положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_{99} . Известно, что если выбрать из них несколько чисел, среди которых нет двух соседних, то их сумма будет меньше, чем сумма оставшихся чисел. Докажите, что существует единственный (с точностью до движения) описанный 99-угольник, последовательные стороны которого равны a_1, a_2, \dots, a_{99} .

Ниже будем вместо 99 писать $2n + 1$ (утверждение задачи верно для многоугольников с нечетным числом сторон).

Пусть $A_1A_2\dots A_{2n+1}$ – искомый $(2n + 1)$ -угольник, т.е. длина стороны A_iA_{i+1} равна a_i для $i = 1, 2, \dots, 2n + 1$ (здесь и далее индексы, отличающиеся на $2n + 1$, считаем одинаковыми), пусть он описан вокруг окруж-



ности радиуса r с центром в точке O (см. рисунок). Обозначим через B_i точку касания стороны A_iA_{i+1} с окружностью. Пусть x_i – длина отрезка касательной, проведенной из точки A_i к окружности, т.е. $x_i = A_iB_i = A_iB_{i-1}$.¹ Так как $A_iA_{i+1} = A_iB_i + B_iA_{i+1}$, то $a_i = x_i + x_{i+1}$ для $i = 1, 2, \dots, 2n + 1$. Из этих равенств получаем

$$\begin{aligned} 2x_1 &= (x_1 + x_2) - (x_2 + x_3) + (x_3 + x_4) - \dots + (x_{2n+1} + x_1) = \\ &= a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_{2n+1}. \end{aligned}$$

Значит, x_1 однозначно выражается через $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$, причем знакопеременная сумма $a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_{2n+1}$ положительна, так как по условию задачи $a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} < a_1 + a_3 + \dots + a_{2n+1}$. Аналогично, x_2, \dots, x_{2n+1} положительны и однозначно выражаются через $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$.

Теперь докажем, что и r однозначно определяется числами $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$. Положим $\alpha_i = \angle B_{i-1}OB_i$. Из пары равных прямоугольных треугольников A_iOB_{i-1} и A_iOB_i получаем $\alpha_i = 2\arctg \frac{x_i}{r}$. Так как $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2n+1} = 2\pi$, то r удовлетворяет уравнению

$$\arctg \frac{x_1}{r} + \arctg \frac{x_2}{r} + \dots + \arctg \frac{x_{2n+1}}{r} = \pi. \quad (*)$$

Если считать $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$ фиксированными числами, то в левой части равенства (*) стоит функция $g(r)$, которая строго убывает на промежутке $(0; \infty)$, поэтому уравнение $g(r) = 0$ имеет не более одного решения. Если искомое значение r , удовлетворяющее уравнению (*), нашлось, то по длинам x_1, x_2, \dots, x_n и r однозначно восстанавливаются прямоугольные треугольники A_iOB_{i-1} и A_iOB_i ($i = 1, 2, \dots, 2n + 1$), а с ними – и вся конструкция: последовательно прикладываем треугольники друг к другу; в силу равенства (*), после прохождения полного круга, процесс выкладывания замкнется. В результате восстанавливается единственный искомый многоугольник.

Чтобы установить существование решения уравнения (*) (а с ним и существование искомого многоугольника), остается добавить соображение непрерывности. Равенству (*) удовлетворяет единственное положительное $r = r_0$, так как функция $g(r)$ непрерывна на промежутке $(0; \infty)$ и, кроме того,

$$\lim_{r \rightarrow 0+0} g(r) = (2n + 1) \frac{\pi}{2} > \pi, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} g(r) = 0 < \pi.$$

Л.Емельянов, П.Кожевников

M2306*. Для натурального числа a определим последовательность целых чисел x_1, x_2, \dots следующим образом: $x_1 = a$, $x_{n+1} = 2x_n + 1$ при $n \geq 1$. Положим $y_n = 2^{x_n} - 1$. Найдите наибольшее возможное k такое, что для некоторого натурального a каждое из чисел y_1, \dots, y_k является простым.

Ответ: 2.

¹ Используя только равенство отрезков касательных, несложно увидеть, что указанное в задаче условие является необходимым условием существования искомого $(2n + 1)$ -угольника.

Если $x_i = 1$, то $y_i = 1$ – не простое. Если x_i составное, скажем $x_i = kl$, где $k > 1$ и $l > 1$ – натуральные, то $y_i = 2^{kl} - 1$ делится на $2^k - 1$ (и очевидно больше, чем $2^k - 1$). Итак, далее считаем, что x_1, \dots, x_k – простые числа.

Если $x_1 = 2$, то $y_1 = 3$, $y_2 = 31$ – простые числа, а $y_3 = 2^{11} - 1$ делится на 23; тем самым мы получили пример для $k = 2$.

Остается доказать, что $k \leq 2$, если x_1 – нечетное простое число.

Предположим противное, тогда все числа $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ – нечетные простые. Так как x_1 нечетно, имеем $x_2 = 2x_1 + 1 \equiv 3 \pmod{4}$, и $x_3 = 2x_2 + 1 \equiv 7 \pmod{8}$. Воспользуемся известным результатом о том, что для простого числа p вида $8k + 7$ остаток 2 является квадратичным вычетом¹, т.е. найдется такое целое s , что $s^2 \equiv 2 \pmod{p}$. В нашем случае (для $p = x_3$) имеем

$$2^{x_2} \equiv 2^{(p-1)/2} \equiv (s^2)^{(p-1)/2} \equiv s^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

(очевидно, s не делится на p , поэтому последний переход вытекает из малой теоремы Ферма). Таким образом, $y_2 = 2^{x_2} - 1$ делится на $p = x_3 = 2x_2 + 1$. Но $x_2 = 2x_1 + 1 > 3$, поэтому $2^{x_2} - 1 > 2x_2 + 1$ (это легко показать, например, индукцией по x_2). Получаем, что y_2 – составное число. Противоречие.

В.Сендеров

M2307*. В вершинах правильного $2n$ -угольника расставлены $2n$ различных фишек так, что в каждой вершине стоит ровно одна фишка. Ход состоит в следующем: выбирается одна из сторон $2n$ -угольника и две фишки, находящиеся в концах этой стороны, меняются местами друг с другом. После конечного числа ходов оказалось, что каждая пара фишек менялась местами ровно один раз. Докажите, что некоторая сторона $2n$ -угольника не выбиралась ни разу.

Занумеруем все фишки в начальной расстановке по порядку по часовой стрелке; соответственно обозначим вершины $2n$ -угольника A_1, \dots, A_{2n} , так что вначале фишка i стояла в вершине A_i .

Будем говорить, что во время хода фишка *прошла по стороне e*, если до хода она стояла в одном конце отрезка e , а после хода оказалась в другом конце.

Шаг 1. Рассмотрим любые три фишки i, j, k . В каждый момент их циклический порядок может быть либо i, j, k , либо i, k, j (считая от i по часовой стрелке). Этот порядок изменяется в точности тогда, когда две из этих трех фишек меняются местами. Значит, этот циклический порядок был изменен трижды, поэтому конечный циклический порядок отличен от начального. Применив это наблюдение для $i \in \{1, 2, \dots, 2n - 1\}$,

¹ О квадратичных вычетах (помимо стандартных курсов теории чисел) можно прочитать в статье С.Гиндикина «Золотая теорема» («Квант» № 1 за 1973 г.) или в статье А.Спивака «Квадратичный закон взаимности» (Библиотечка «Квант», вып. 102). Совсем недавно, в прошлом номере «Кванта», мы использовали квадратичные вычеты в решении другой трудной задачи – M2300.

$j = i + 1$ и всех $k \neq i, i + 1$, получаем, что в конечной расстановке все фишки (кроме i и $i + 1$) лежат на дуге описанной окружности, проходимой от i к $i + 1$ по часовой стрелке, т.е. $i + 1$ – соседняя фишка для i против часовой стрелки. Тем самым, в конечной расстановке фишки занумерованы последовательно, но против часовой стрелки.

Это означает, что конечная расстановка фишек получается из начальной путем отражения относительно какой-то оси симметрии l .

Шаг 2. Заметим, что каждая фишка участвует в $2n - 1$ обменах, поэтому ее начальная и конечная вершины имеют номера разной четности. Следовательно, l проходит через середины двух противоположных сторон $2n$ -угольника (а не через две противоположные вершины); не умаляя общности будем считать, что это стороны $a = A_{2n}A_1$ и $b = A_nA_{n+1}$ (рис. 1).

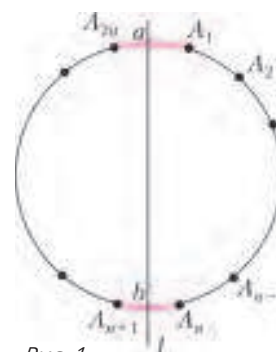


Рис. 1

За время всего процесса каждая фишка проходит хотя бы по одной из сторон a, b (так как в начальной и конечной расстановках фишка находится по разные стороны от l). Предположим, что некоторая фишка x (без ограничения общности считаем, что $x \leq n$) прошла как по стороне a , так и по стороне b и что по стороне a она прошла раньше. Тогда общее перемещение фишки x состоит по меньшей мере из: (i) движения из вершины A_x в A_1 и перехода в A_{2n} по стороне a ; (ii) движения от A_{2n} до A_n или A_{n+1} и перехода через l по стороне b ; (iii) оставшегося пути до вершины A_{2n+1-x} . На это потребуется по крайней мере $x + n + (n - x) = 2n$ ходов, что невозможно.

Итак, каждая фишка проходила ровно по одной из сторон a и b .

Шаг 3. Наконец, покажем, что либо все фишки проходили по стороне a , либо все фишки проходили по стороне b , это и будет означать, что одна из сторон a, b не выбиралась ни разу.

Предположим противное. Рассмотрим первые за время всего процесса ходы по ребрам a и b , и пусть соответственно x и y – фишки, которые двигались по часовой стрелке во время этих ходов (т.е. фишка x прошла по ребру a из вершины A_{2n} в A_1 , а фишка y – по ребру b из A_n в A_{n+1}). Согласно шагу 2, в начальной расстановке фишки x и y были в разных полуплоскостях относительно l (в частности, $x \neq y$).

Рассмотрим (единственный) обмен фишек x и y ; без ограничения общности считаем, что он сделан в правой полуплоскости относительно l . С момента этого обмена фишки x и y все время находятся в правой полуплоскости относительно l (рис. 2), так как x никогда не проходит через

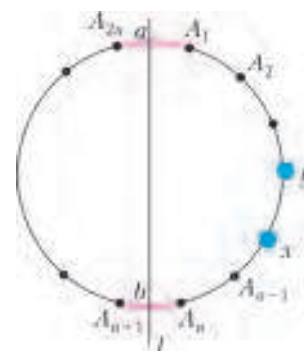


Рис. 2

ребро b , y никогда не проходит через ребро a и x и y не могут обмениваться друг с другом вторично. Но это невозможно, поскольку фишка y должна в конечной расстановке оказаться в левой полуплоскости относительно l . Противоречие.

Замечание. Утверждение задачи для $(2n - 1)$ -угольника также верно, и доказать его проще (так как некоторые шаги становятся лишними). Наметим соответствующий путь решения для случая $(2n - 1)$ -угольника. Доказываем существование прямой l из шага 1. Эта прямая проходит через некоторую вершину A и через середину противоположной стороны a . Тогда каждая фишка либо посетит вершину A , либо пройдет по стороне a (но не одновременно – это показывается так же, как в шаге 2). Наконец, так как каждая фишка участвует в четном числе ходов, она на самом деле именно посетит вершину A , но никогда не пройдет через сторону a . Тем самым, сторона a ни разу не выбиралась.

И. Богданов, А. Грибалко

M2308*. Дан описанный четырехугольник $ABCD$. Окружности ω_1 и ω_2 вписаны в треугольники ABC и ADC соответственно.

а) Диагональ BD пересекает окружность ω_1 в точках E и P , а окружность ω_2 – в точках F и Q так, что точки P и Q лежат на отрезке EF . Докажите, что касательная к ω_1 , проведенная в точке E , и касательная к ω_2 , проведенная в F , пересекаются на прямой AC или параллельны.

б) Окружность Ω касается окружностей ω_1 и ω_2 внутренним образом в точках K и L соответственно. Докажите, что прямые BK и DL пересекаются на прямой AC .

Ниже будем пользоваться следующими известными фактами.

1) Выпуклый четырехугольник $ABCD$ является описанным тогда и только тогда, когда вписанные окружности треугольников ABC и ADC касаются.

2) Если три окружности попарно касаются друг друга в трех различных точках, то их попарные общие касательные пересекаются в одной точке или параллельны (это частный случай более общего факта о том, что попарные радикальные оси трех окружностей пересекаются в одной точке или параллельны).

3) Теорема о трех гомотетиях: композиция гомотетий с центрами O_1 и O_2 ($O_1 \neq O_2$) и коэффициентами k_1 и k_2 такими, что $k_1 k_2 \neq 1$, является гомотетией с центром в точке на прямой $O_1 O_2$ и коэффициентом $k_1 k_2$.

Приступим к доказательству утверждений задач. Пусть ω – вписанная окружность четырехугольника $ABCD$, а окружности ω_1 и ω_2 касаются диагонали AC в точке X .

а) Достаточно доказать, что существует окружность Ω , которая касается окружностей ω_1 и ω_2 внутренним образом в точках E и F соответственно (рис. 1).¹

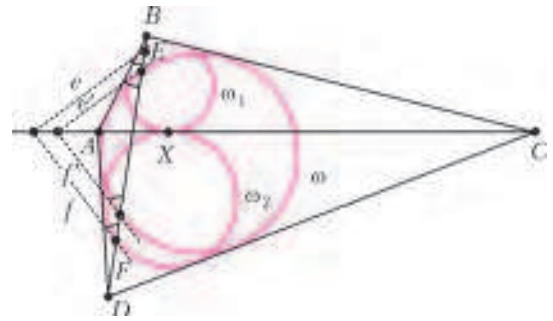


Рис. 1

Действительно, тогда касательная e к ω_1 в точке E , касательная f к ω_2 в точке F и прямая AC являются попарными общими касательными к окружностям ω_1 , ω_2 и Ω , и, значит, они пересекаются в одной точке либо параллельны.

При гомотетии, переводящей ω_1 в ω , касательная e переходит в касательную e' . Аналогично, при гомотетии, переводящей ω_2 в ω , касательная f переходит в касательную f' . Касательные e' и f' составляют равные углы с прямой BD , следовательно, прямые e и f обладают тем же свойством. Значит, в угол между прямыми e и f можно вписать окружность Ω , касающуюся этих прямых в точках E и F .²

б) Пусть H – центр гомотетии h с положительным коэффициентом, переводящей ω в Ω (рис. 2). Гомотетия h является композицией гомотетии с центром B ,

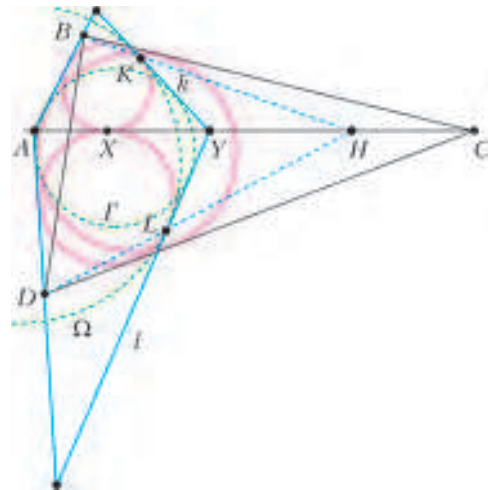


Рис. 2

переводящей ω в ω_1 , и гомотетии с центром K , переводящей ω_1 в Ω , значит, H лежит на прямой BK . Аналогично, H лежит и на прямой DL . Таким образом, в задаче нам нужно доказать, что H лежит на прямой AC .

Пусть k – касательная к ω_1 , проведенная в точке K , а l – касательная к ω_2 , проведенная в точке L . Тогда k , l и AC – попарные общие касательные к окружностям ω_1 , ω_2 и Ω , значит, k и l пересекаются в некоторой

¹ Здесь мы видим, что эта конструкция является частным случаем конструкции, которая рассматривается в пункте б).

² Отметим, что e' и f' тоже пересекаются на прямой AC или параллельны, хотя в решении это не использовалось.

точке Y прямой AC (пусть, для определенности, Y лежит на луче XC) либо $k \parallel AC$.

Рассмотрим первый случай. Согласно факту 1), в выпуклый четырехугольник, образованный прямыми AB, AD, k, l , можно вписать окружность Γ . Получаем, что h является композицией гомотетии с центром A , переводящей ω в Γ , и гомотетии с центром Y , переводящей Γ в Ω , значит, H лежит на прямой AY (которая совпадает с AC).

Остается разобрать частный случай $k \parallel AC$. В этом случае гомотетия с центром B , переводящая ω_1 во вневписанную окружность γ_1 треугольника ABC , переводит K в точку касания Z окружности γ_1 и AC . Получаем, что прямая BK проходит через точку Z , симметричную точке X относительно середины AC . Аналогично показываем, что прямая DL проходит через ту же точку Z .

И.Богданов, С.Ильясов, П.Кожевников

Ф2308. На поиски упавшего самолета за месяц поисков было израсходовано 30 миллионов рублей, в поисках участвовали сотни людей, а упавший самолет так и не нашли. Через год он был обнаружен случайно на расстоянии $L = 10$ км от аэродрома, с которого взлетел и на который намеревался вернуться. Один час полета беспилотного летательного аппарата – БПЛА – стоит 1 тысячу рублей. За светлое время суток такой самолет может отработать до 8 часов. Самолет летит со скоростью $v = 100$ км/ч на высоте $H = 1$ км и производит съемку местности видеокамерой с углом обзора $\alpha = 60^\circ$ (по 30° вправо и влево). Как скоро можно было бы обнаружить пропавший самолет с помощью БПЛА и в какую сумму обошлись бы поиски?

Ширина полосы, которую сканирует при полете БПЛА, составляет

$$2H \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \approx 1,15 \text{ км}.$$

Полосы должны частично перекрываться, поэтому будем считать ширину обзора равной 1 км, т.е. равной высоте полета H . Пренебрежем размерами территории, которую занимает сам аэродром. Если самолет летит по спирали, осматривая территорию под собой, то за $t = 8$ ч полета в сутки он за k суток сможет осмотреть площадь

$$S = ktHv.$$

При этом осмотренная территория имеет примерно форму круга, радиус которого с центром на аэродроме находится так:

$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt{\frac{ktHv}{\pi}}.$$

Подставим в эту формулу $R = L$ и получим

$$k = \frac{\pi L^2}{tHv} = \frac{\pi}{8} \text{ суток}.$$

Следовательно, пропавший самолет был бы найден уже через девять с небольшим часов полета БПЛА. Потраченная сумма на полет составила бы 9 тысяч

рублей, т.е. 0,03% от 30 миллионов. Даже если бы пропавший самолет находился на расстоянии 50 км от аэродрома и времени на поиски потребовалось бы в 25 раз больше, то он был бы найден к концу десятых суток поисков. При этом была бы израсходована сумма около 250 тысяч рублей, составляющая меньше 0,83% от 30 миллионов.

С.Беспилотник

Ф2309. Шестеренчатый насос (см. рисунок) предназначен для перекачки масла под давлением и передачи мощности к гидравлическим механизмам. Число зубьев каждой шестерни $N = 10$, высота зубьев $h = 1$ см. Каждый зуб имеет форму, близкую к правильному (равностороннему) треугольнику. Ширина шестерен



$L = 3$ см, расстояние d от вершин зубьев до стенок корпуса весьма мало: $d = 10^{-4}$ м. Шестерни вращаются с частотой $f = 25$ Гц. Считая масло несжимаемым, маловязким и имеющим плотность $\rho = 10^3$ кг/м³, найдите теоретическую максимальную мощность, которую может передать этот насос к потребителям (гидравлическим механизмам), а также теоретическую максимальную разницу давлений на выходе и на входе насоса.

Если, например, левая шестерня вращается по часовой стрелке, то правая вращается против часовой стрелки, и масло из нижнего резервуара перекачивается в верхний порциями, которые находятся между зубьями шестерен и корпусом насоса в полостях – «карманах», объем каждого из которых равен примерно $Lh^2/\sqrt{3}$. Радиус R шестерен, т.е. расстояние от оси шестерни до вершин зубьев, равен примерно $R = hN/(\pi\sqrt{3})$. Скорость движения вершин зубьев равна

$$v = 2\pi fR = \frac{2fhN}{\sqrt{3}}.$$

В режиме «холостого хода», когда масло перекачивается без повышения давления, объем перекачиваемого масла в секунду (расход масла) равен

$$G = \frac{2NfLh^2}{\sqrt{3}}.$$

Если насос работает с нагрузкой, то давление в верхнем резервуаре больше давления в нижнем резервуаре. Пусть эта разница давлений равна p . Предположим, что в месте сцепления зубьев шестерен никакого зазора нет. Тогда поток масла навстречу движению зубьев возникает только через узкие щели между корпусом и вершинами зубьев. В соответствии с данным рисунком насоса примерно половина вершин зубьев каждой из шестерен располагается на расстоянии d от корпуса. Скорость движения масла в каждом из зазоров по

отношению к соседним зубьям, т.е. $u_{\text{отн}}$, находится из условия

$$\frac{(u_{\text{отн}})^2 \rho}{2} = \frac{p}{(N/2)}.$$

Когда обратный поток масла сравнивается с потоком масла в прямом направлении, будет достигнута максимальная величина разницы давлений p_{max} , которую может создавать шестеренчатый насос. Иными словами,

$$2(u_{\text{отн}} - v)dL = G,$$

или

$$2 \left(\sqrt{\frac{4p_{\text{max}}}{\rho N}} - \frac{2fhN}{\sqrt{3}} \right) dL = \frac{2NfLh^2}{\sqrt{3}}.$$

Поскольку $h/d \gg 2$, отсюда следует

$$p_{\text{max}} \approx \frac{\rho N^3 f^2 h^4}{12d^2} \approx 5 \cdot 10^7 \text{ Па} = 500 \text{ атм}.$$

Для нахождения максимальной мощности, которую может передавать такой насос потребителям, нужно найти экстремум функции давления

$$\begin{aligned} W(p) &= p \cdot 2L \left(\frac{Nfh^2}{\sqrt{3}} + \frac{2fhNd}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{4p}{\rho N}} d \right) \approx \\ &\approx p \cdot 2L \left(\frac{Nfh^2}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{4p}{\rho N}} d \right). \end{aligned}$$

Экстремум достигается при давлении

$$p \approx \left(\frac{2}{3} \right)^2 p_{\text{max}} \approx 220 \text{ атм}.$$

Этому соответствует теоретическая максимальная мощность

$$W_{\text{max}}(p) \approx 11 \text{ кВт}.$$

При такой максимальной мощности, достигающей потребителей, и при таком давлении примерно такая же мощность теряется на нагрев масла и насоса, т.е. механический КПД насоса в этом режиме близок к 50%. Поэтому реальные насосы работают на меньшем давлении – порядка 100 атм. В этом случае мощность немного меньше, а КПД насоса значительно выше.

С.Дмитриев

Ф2310. На горизонтальной поверхности стола разлитое масло, которое образует тонкий слой толщиной $d = 1$ мм. Поверх масла лежит тонкий лист бумаги размером $a \times a = 1 \times 1$ м. Одна из сторон квадратного листа бумаги немного выступает за край стола и параллельна ему. Бумага сначала неподвижна. Выступающую часть бумаги потянули с силой $F = 1$ Н, направленной горизонтально и перпендикулярно этому краю стола. Через какое время за край стола будет выступать половина листа бумаги? Вязкость масла $\eta = 1 \text{ Па} \cdot \text{с}$.

Предположим, что при движении листа бумаги масло между бумагой и столом движется ламинарно. Сила f , действующая со стороны масла на бумагу, определяется вязкостью масла, толщиной слоя масла, площадью контакта масла и бумаги, а также скоростью движения бумаги относительно стола:

$$f = -\frac{vS\eta}{d}.$$

Если бумага сместилась от своего начального положения на расстояние x , то

$$S = a(a - x).$$

Скорость перемещения бумаги вдоль стола будет определяться балансом сил, которые на нее действуют. Поскольку в условии сказано, что бумага легкая и толщина слоя масла небольшая, то можно применить второй закон Ньютона в виде

$$F + f = 0.$$

Отсюда находим

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{Fd}{\eta a(a - x)}.$$

Введем новую переменную $y = x - a$. Тогда уравнение для скорости примет вид

$$y \frac{dy}{dt} = \frac{d(y^2/2)}{dt} = -\frac{Fd}{\eta a}.$$

Решение этого уравнения соответствует соотношению

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{tFd}{\eta a} + \text{const}.$$

Значение константы находится из начального условия:

при $t = 0$ $x = 0$ и $y = -a$, откуда $\text{const} = \frac{a^2}{2}$. Подставив в полученное соотношение конечное значение $y = a/2 - a = -a/2$, найдем

$$t = \frac{3a^3\eta}{8Fd} = 375 \text{ с} = 6,25 \text{ мин}.$$

В.Сергеев

Ф2311. Воздушный шарик с тонкой резиновой оболочкой имеет в воздухе при температуре 0°C объем $V = 1$ л. Этот шарик опускают в глубокий сосуд с горячей водой при температуре 90°C на глубину $H = 2$ м. Какую максимальную и какую минимальную работу при таком перемещении может совершить при нагревании воздух, содержащийся в шарике? Температура газа не убывает, а глубина погружения шарика в воду не уменьшается. Давлением, создаваемым резиновыми стенками шарика, можно пренебречь, атмосферное давление нормальное: $p = 10^5 \text{ Па}$.

Сначала переведем шкалу температур в шкалу Кельвина: $T_{\text{н}} = 0^\circ\text{C} = 273 \text{ К}$, $T_{\text{к}} = 90^\circ\text{C} = 363 \text{ К}$. В координатах p , V начальное и конечное состояния шарика изображаются точками $p_{\text{н}}, V_{\text{н}}$ и $p_{\text{к}}, V_{\text{к}}$, где

$$p_{\text{к}} = p_{\text{н}} + \rho g H = 1,2p_{\text{н}}, \quad V_{\text{к}} = \frac{V_{\text{н}} T_{\text{к}} p_{\text{н}}}{T_{\text{н}} p_{\text{к}}} = 1,11V_{\text{н}}.$$

Здесь $\rho = 965,3 \text{ кг/м}^3$ – плотность воды при 90°C . При условии, что воздух в шарике не может охлаждаться, т.е. его температура не может уменьшаться, нужно выбрать такие «траектории» на плоскости pV , «пройдя» по которым газ совершит: а) самую большую работу; б) самую маленькую работу. Поскольку ничего, кроме шарика и сосуда с горячей водой, нет, то существуют только два возможных процесса: опускание шара на глубину (увеличение давления) и нагрев газа через стенки шарика от горячей воды. Эти два процесса могут проводиться в различной последовательности и за разные промежутки времени.

Случай а) получается, если шарик с воздухом при температуре 0°C сначала *быстро* опустили на глубину 2 м под воду и воздух в нем нагрелся за счет адиабатического сжатия до конечного давления и занял объем $0,71V_H = V_H \cdot (p_H/p_K)^{1/\gamma}$. Поскольку воздух двухатомный газ, $\gamma = C_p/C_V = 7/5$. А затем воздух *медленно* нагрелся изобарически до конечного значения объема. Красными линиями со стрелками на рисунке 1

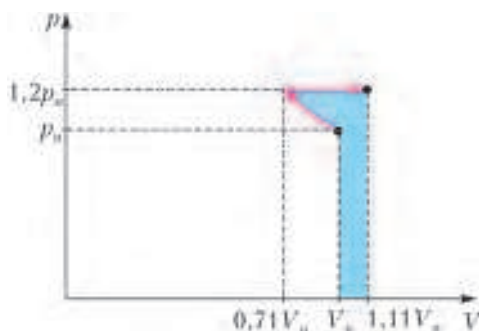


Рис. 1

показаны соответствующие участки процесса. Площадь фигуры, закрашенной на рисунке синим цветом, пропорциональна максимальной работе газа.

Случай б) реализуется, если шарик сначала приведен в соприкосновение с горячей водой и *медленно* нагревается до конечной температуры изобарически при атмосферном давлении, при этом максимальный объем шарика равен $V_H T_K/T_H = 1,33V_H$. А затем *медленно* погружается в воду, при этом температура газа остается неизменной. Красными линиями со стрелками на рисунке 2 показаны соответствующие участки процесса.

Минимальная работа газа пропорциональна разнице площадей фигур зеленого и розового цветов.

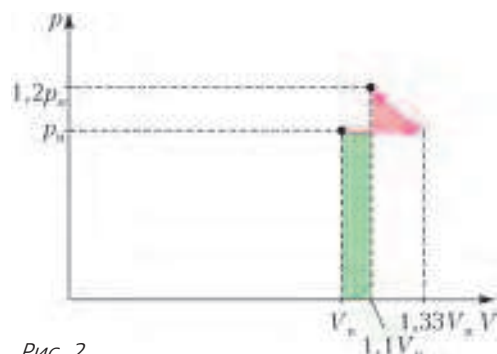


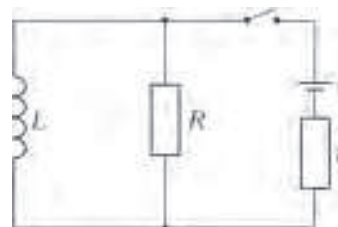
Рис. 2

Поскольку все точки полученных двух процессов на pV -диаграмме находятся достаточно близко друг к другу, можно участки адиабатического и изотермического процессов считать почти прямыми линиями. Работы газа будут при этом такими:

$$A_{\text{мин}} \approx 8,8 \text{ Дж}, \quad A_{\text{макс}} \approx 16,2 \text{ Дж}.$$

С.Крюков

Ф2312. В электрической схеме (см. рисунок) все элементы идеальные, ток равен нулю. Ключ сначала



замыкают, а затем размыкают в момент, когда скорость изменения энергии, запасаемой в катушке индуктивности, достигает максимума. Найдите: а) количество теплоты, которое выделится в схеме после размыкания ключа; б) отношение токов в резисторах за мгновение до размыкания ключа.

Пусть i_L и i_R – мгновенные значения токов в катушке индуктивности и в резисторе сопротивлением R , когда ключ замкнут. По условию задачи и в соответствии с законом Кирхгофа можно записать следующие соотношения:

$$\varepsilon - (i_L + i_R)r = i_R R,$$

$$i_R R = L \frac{di_L}{dt},$$

$$P = \frac{d\left(\frac{Li_L^2}{2}\right)}{dt} = Li_L \frac{di_L}{dt}.$$

После преобразований получим такое выражение для мощности:

$$P = \frac{i_L R (\varepsilon - i_L r)}{R + r}.$$

Отсюда видно, что максимум мощности, т.е. максимум скорости изменения энергии, запасаемой в катушке индуктивности, достигается при токе

$$i_{Lm} = \frac{\varepsilon}{2r}.$$

Количество теплоты, которое нужно найти, равно

$$Q = \frac{Li_{Lm}^2}{2} = \frac{L\varepsilon^2}{8r^2}.$$

Отношение токов в резисторах за мгновение до размыкания ключа равно

$$\frac{i_r}{i_R} = \frac{i_R + i_L}{i_R} = 2 + \frac{R}{r}.$$

А.Шеронов

Ф2313. Над стоящим на горизонтальном столе тонкостенным стаканом цилиндрической формы, заполненным до половины молоком, поместили собирающую линзу. Ось симметрии стакана совпадает с главной оптической осью линзы. Диаметр изображения дна стакана совпадает с диаметром дна самого стакана, а высота изображения больше высоты самого стакана в два раза. Какую часть объема занимает изображение молока в изображении стакана?

Изображение стакана – это усеченный конус. Дно стакана находится на расстоянии $2F$ от линзы, где F – фокусное расстояние линзы. На таком же расстоянии от линзы находится и дно изображения. Верх стакана отстоит на расстояние $1,5F$ от линзы, а верх изображения стакана – на расстояние $3F$ от линзы. Высота изображения стакана равна фокусному расстоянию линзы, а высота самого стакана равна половине фокусного расстояния линзы. Объем изображения стакана равен

$$V_1 = 2F\pi D^2 \frac{1-1/8}{3} = \frac{7F\pi D^2}{12}.$$

Объем самого стакана составляет

$$V_0 = \frac{F\pi D^2}{8}.$$

Уровень молока в стакане находится на расстоянии $7F/4$ от линзы, а уровень изображения молока – на расстоянии $7F/3$ от линзы. Иными словами, толщина слоя молока в стакане равна $F/4$, а в изображении она составляет $F/3$. Объем изображения молока равен

$$V_{\text{мол}} = \frac{\left(\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 1\right)F\pi D^2}{12}.$$

Ответ на вопрос задачи таков:

$$\frac{V_{\text{мол}}}{V_1} = \frac{37}{27 \cdot 7} \approx 0,2.$$

С.Варламов

Ф2314. Монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм падает перпендикулярно на непрозрачную пластину, в которой прорезана длинная щель постоянной ширины $D = 0,1$ мм $\gg \lambda$. На экране, расположенном на расстоянии $L = 10$ м $\gg D^2/\lambda$ параллельно пластине, видны дифракционные полосы разных порядков. Каково отношение интенсивностей/яркостей света в центрах полос для разных порядков n и m ? Считайте, что $1 \ll n < m \ll D/\lambda$.

Отношение интенсивностей/яркостей света равно квадрату отношения амплитуд напряженностей E электрических полей в соответствующих местах поверхности экрана. Для оценки этого отношения воспользуемся принципом Гюйгенса–Френеля. Для этого мысленно разделим щель на множество полосок, расположенных вдоль всей щели и имеющих одинаковую и очень маленькую ширину, и будем суммировать вклады каждой полоски в общий вектор электрического

поля в центре соответствующей дифракционной полосы. Поскольку в условии задачи дано ограничение $n < m \ll D/\lambda$, то это означает, что дифракционные углы для этих полос малы, и тогда можно считать, что вклады каждой полоски в вектор \vec{E} имеют одинаковую амплитуду, но разные фазы. Для дифракционной полосы нулевого порядка все фазы одинаковы, поэтому общая амплитуда электрического поля равна сумме всех амплитуд отдельных полосок (рис.1). Обозначим ее через E_0 .



Рис. 1

Для первого минимума дифракционной картины вклады от каждой полоски с отличающимися фазами дают в сумме ноль. Это на рисунке 2 выглядит как замкнутое кольцо, составленное из стрелочек, изображенных на рисунке 1, каждая из которых по отношению к предыдущей стрелочке поворачивается на малый угол. Суммарная длина всех стрелочек остается неизменной и равной E_0 .



Рис. 2

Максимум первого порядка получается в ситуации, когда все стрелочки, сложившись, дают картинку, на которой последняя стрелка повернулась по отношению к первой примерно на 1,5 оборота (на самом деле немного меньше: $\phi_1 \approx 8,55$ рад). Максимум второго порядка соответствует картинке, на которой последняя стрелочка совершила примерно 2,5 оборота. Чем больше номер порядка дифракции, тем точнее выполняется условие $\phi_n = 2\pi n + 1$. Формула для амплитуды вектора E в максимуме n -го порядка будет такой:

$$E_n \approx \frac{E_0}{(2n + 1)\pi},$$

при этом чем больше n , тем точнее выполняется эта формула. Отношение интенсивностей/яркостей света в центрах полос для разных порядков $n \gg 1$ и $m \gg 1$ будет равно

$$\frac{W_n}{W_m} = \left(\frac{E_n}{E_m}\right)^2 = \left(\frac{2m + 1}{2n + 1}\right)^2.$$

Ф.Ренель

Задачи

1. У Маши есть двухрублевые и пятирублевые монеты. Если она возьмет все свои двухрублевые монеты, ей не хватит 60 рублей, чтобы купить четыре пирожка. Если все пятирублевые — не хватит 60 рублей на пять пирожков. А всего ей не хватает 60 рублей для покупки шести пирожков. Сколько стоит пирожок?



2. Придумайте фигуру, которую нельзя разрезать на доминошки (на прямоугольники из двух клеток), но если к ней пририсовать доминошку — получившуюся фигуру уже можно будет разрезать на доминошки.



3. На прямой линии находятся два зайца и между ними — волк: к одному зайцу он ближе, чем к другому. Животные могут бегать только вдоль этой линии с постоянными скоростями. Скорости зайцев одинаковы и меньше, чем у волка. Зайцы убегают в разные стороны, а волк хочет поймать их, пробежав за все время охоты как можно меньшее расстояние. Какого зайца и почему волку следует поймать в первую очередь — ближайшего или другого?

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Эти задачи предлагались в этом году на XXXVI Турнире имени М.В.Ломоносова.



4. В набор «Юный геометр» входят несколько плоских граней, из которых можно собрать выпуклый многогранник. Юный геометр Саша разделил эти грани на две кучки. Могло ли случиться, что из граней каждой кучки тоже можно собрать выпуклый многогранник? (И в начале, и в конце каждая из граней набора должна являться гранью многогранника.)



5. Во время второй мировой войны (1939–1945) в Германии разбомбили несколько плотин водохранилищ. Для точного попадания бомбы в плотину бомбардировщик должен был лететь точно на заранее рассчитанной высоте над поверхностью водохранилища. Как это можно было обеспечить имеющимися в то время техническими средствами? (Точность определения высоты по атмосферному давлению для этой цели была явно недостаточна.)



Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» или по электронному адресу: savin.contest@gmail.com (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

6. В некоторый прямоугольник можно поместить без наложений 100 кругов радиуса 2. Обязательно ли в такой прямоугольник можно поместить без наложений 400 кругов радиуса 1?

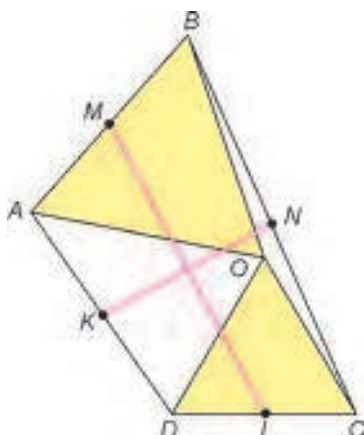
Фольклор

7. Положительные числа a и b таковы, что $a + b$, $a - b$ и a/b — целые, а ab — дробное. Может ли a/b равняться: а) 2013; б) 2014?

Б.Френкин

8. У двух треугольников одинаковые периметры, а также одинаковые площади. Обязательно ли и сами эти треугольники равны?

Н.Авилов



9. Равносторонние треугольники OAB и OCD имеют лишь одну общую точку — вершину O . Точки M и L — середины сторон AB и CD этих треугольников, а точки K и N — середины отрезков AD и BC . Докажите, что отрезки ML и KN перпендикулярны.

Н.Авилов

10. На шахматной доске расставлены фишки так, что на каждой горизонтали и каждой вертикали стоит одна фишка. Из доски вырезали прямоугольник размером 4×5 клеток. Сколько фишек может оказаться внутри этого прямоугольника (найдите все возможности)?

И.Акулич

От редакции. В предыдущем номере журнала в задаче 3 по вине редакции была допущена опечатка. Приводим верное условие задачи (ее решение можно присылать вместе с решениями задач из этого номера).

3. Каждый член социал-демократической партии является одновременно и социалистом, и демократом, но не либералом. Каждый член либерально-демократической партии является и либералом, и демократом, но не социалистом. Зато каждый член социал-либеральной партии является и социалистом, и либералом, и демократом.

На объединительный съезд съехались 100 делегатов — представители всех трех партий. При этом две партии прислали поровну делегатов, а суммарное число социалистов и либералов оказалось в полтора раза больше, чем демократов. Сколько делегатов от каждой партии приехало на съезд?

И.Акулич

Бумажный итератор

И. АКУЛИЧ

МАССОВАЯ ЗАМЕНА ТРАДИЦИОННЫХ ДЕРЕВЯННЫХ оконных рам пластиковыми стеклопакетами неизбежно ведет к снижению производства и продажи когда-то весьма необходимого товара — бумажной полоски для оклейки окон перед наступлением сурового зимнего периода. Не исключено, что в ско-

ром будущем такое понятие вообще исчезнет из обихода, ибо технический прогресс не остановишь. И потому вот совет читателям: пока не поздно, срочно бегите в ближайший хозяйственный магазин и приобретайте сей великолепный геометрический инструмент!

Это не оговорка. С помощью длинной и не очень широкой бумажной полоски из тонкой бумаги¹ можно не только решать многие геометрические задачи на построение, но и некоторые такие, которые с помощью «классического» набора чертежных приспособлений (т.е. циркуля и линейки без делений) вообще неразрешимы! Мы же будем использовать ее совсем необычным способом – в качестве *итератора*.

А что такое «итератор»? Это приспособление, посредством которого можно выполнять так называемые *итерации*, т.е. последовательные приближения к нужному результату.² Но как можно для таких целей приспособить бумажную полоску? Сейчас увидим.

Сначала изложим предысторию. Много лет назад автору этой статьи встретилось в одной из книг классика популярной математики Мартина Гарднера описание *гексафлексагона*³. Увы, у автора не было возможности просто взять готовую развертку и склеить ее в нужном месте. Ничего не оставалось, кроме как следовать указаниям Гарднера, который утверждал, что лучшим исходным материалом для этого является именно бумажная лента для оклейки окон,⁴ но предварительно «разделенная» с помощью перегибов на правильные треугольники (рис. 1).

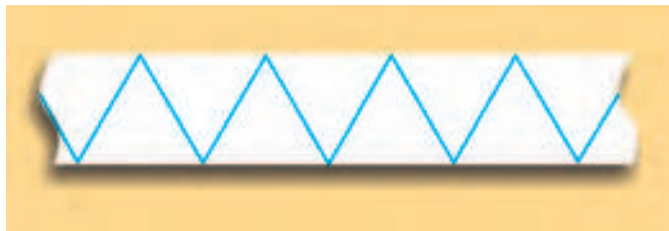


Рис. 1

Полоска, к счастью, нашлась. Теперь, если бы под рукой имелся минимальный набор чертежных инструментов (хотя бы линейка и карандаш, ну и калькулятор не помешал бы), разбить полоску нужным образом проблем бы не составило. Однако ничего подобного в обозримой окрестности не наблюдалось. Пришлось поступить следующим образом (рис.2, здесь буквами обозначены все характерные точки). А именно: сначала я перегнул полоску по линии A_1A_2 так, чтобы угол A_2A_1M был по возможности ближе к 60° . Если бы удалось перегнуть *точно* по углу 60° , проблема была бы решена – как выполнить последующие перегибы и получить разбивку полосы на пра-

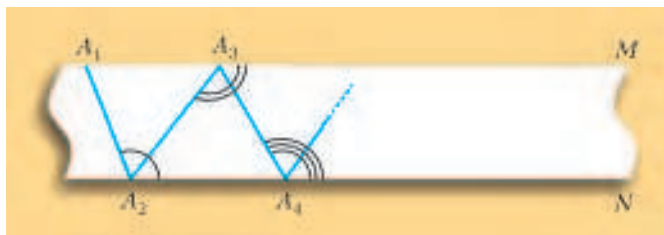


Рис. 2

вильные треугольники, ясно каждому. Но точности ожидать не приходилось. Пришлось исхитриться и действовать так. Будем «плясать» не от острого угла A_2A_1M , а от внутреннего одностороннего с ним угла A_1A_2N . Ясно, что он тупой, и хотелось бы, чтобы он был как можно ближе к 120° . Тупой угол получить, разумеется, легко, а что касается его близости к нужной величине, то это весьма проблематично и сильно зависит от индивидуальных свойств исполнителя. Поэтому будем считать, что $\angle A_1A_2N = 120^\circ + \Delta$, где Δ – некоторая неизбежная погрешность (положительная или отрицательная). Далее перегнем полоску, чтобы совпали линии A_2N и A_2A_1 , получив при этом отрезок A_2A_3 . Ясно, что A_2A_3 – биссектриса угла A_1A_2N , вследствие чего

$$\angle A_1A_2A_3 = \angle A_3A_2N = \frac{\angle A_1A_2N}{2} = 60^\circ + \frac{\Delta}{2}.$$

В таком случае

$$\angle A_2A_3M = 180^\circ - \angle A_3A_2N = 120^\circ - \frac{\Delta}{2}.$$

Как видим, получился угол, который отличается от желанных 120° на *вдвое меньшую* величину, чем исходный угол A_1A_2N (отличается, правда, в другую сторону, но какая, в принципе, разница?). Если теперь перегнуть полоску так, чтобы совпали линии A_3M и A_3A_2 (и при этом получился отрезок A_3A_4), то новый угол A_3A_4N будет отличаться от 120° лишь на $\frac{\Delta}{4}$. Ну и так далее. Сделав несколько перегибов, мы неизбежно добьемся того, что очередной угол будет отличаться от 120° на ничтожно малую величину, и дальше пойдут практически правильные треугольники!

Другой вопрос – сколько перегибов для этого потребуется? Если, скажем, штук пятьдесят, то длины полоски просто не хватит. Что ж, давайте оценим это значение. Знающие тригонометрию смогут выполнить вычисления легко и без проблем, мы же попробуем обойтись не столь тяжелой артиллерией. Наша цель – «цепочка» правильных треугольников с высотой 5 см (ибо такова ширина полоски). У такого треугольника длина стороны, как известно, составляет $5 \text{ см} : \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 5,77 \text{ см}$. Мы же стартуем с заведомо не правильного треугольника. Какова здесь может быть погрешность? Наверняка первая же сторона первого треугольника не меньше *ширины* полоски, т.е. тех же 5 см (это если угол A_1A_2N – прямой, что, конечно,

¹ «Типовая» полоска для оклейки окон имеет ширину 5 см, а длина ее, согласно действующим стандартам, не менее 70 см (хотя может быть и больше метра – это зависит от завода-изготовителя).

² Строго говоря, смысл слова «итерация» подразумевает лишь неоднократное повторение некоторой процедуры без какой-либо гарантии успеха. Но в нашем случае успех придет!

³ Подробнее о флексагонах читайте в «Кванте» №10 за 1992 год (статья И.Кона «Аномальные флексагоны») или в «Квантике» №4 за 2012 год (статья Е.Антоненко «Флексагоны»).

⁴ Вообще-то М.Гарднер упоминал не ленту для оклейки окон, а ленту для чеков. Но это, понятно, дело вкуса.

сомнительно, но мы намеренно ухудшаем для себя начальные условия). По мере снижения отклонения получающихся углов от 120° стороны образующихся треугольников будут все ближе подходить к нужному нам значению 5,77 см. Будем считать, что при уменьшении отклонения угла вдвое отклонение стороны также снижается примерно вдвое. Вообще-то это неверно,⁵ но для оценки сойдет.

Итак, первоначальное отклонение составляет не более $5,77 \text{ см} - 5 \text{ см} = 0,77 \text{ см}$. А какое отклонение можно считать *практически* нулевым? Поскольку речь идет о *перегибах* полоски, то естественным критерием служит ее *толщина* – при перегибах она имеет существенное значение. Толщину полоски определить нетрудно, взяв стопку из полосок (бумага для оклейки окон как раз в стопках-то и продается), измерив ее толщину и поделив на количество полосок. Получаем, что она близка к 0,01 см.

Следовательно, необходимо уменьшить погрешность в $0,77 : 0,01 = 77$ раз. Поскольку мы приняли, что при каждом перегибе она снижается вдвое, и $2^7 = 128 > 77$, то должно хватить лишь *семи* перегибов.⁶ На полоске это займет совсем немного места, и останется вполне достаточная длина, чтобы получить нужное количество правильных треугольников для гексафлексагона.

Вот так буквально на пустом месте мы получили нужный результат. Бумажный итератор проявил себя безупречно.

Как ни странно, именно эта идея – перегибы по биссектрисам – позволяет получить и другие углы, не только равные 60° . В самом деле – давайте, как и прежде, начав от произвольного тупого угла A_1A_2N , построим перегибанием его биссектрису A_2A_3 , а затем – биссектрису угла A_3A_2N . Получившийся новый угол A_4A_2N будет равен лишь *четверти* угла A_1A_2N . Далее аналогичным образом получим четверть угла A_2A_4M и так далее (рис.3).

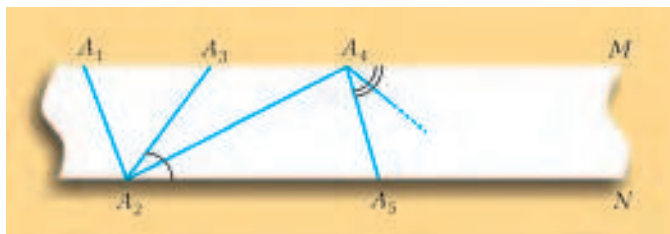


Рис. 3

Через несколько итераций процесс практически «сойдется», т.е. получающиеся углы будут совпадать (причины тому – те же, что и в самой первой рассмотренной задаче; можете в этом убедиться сами, написав соответствующие формулы). Как бы определить их

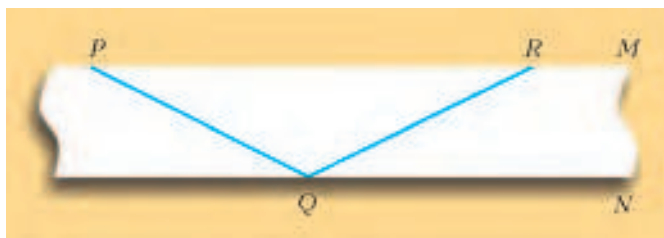


Рис. 4

значения? Это несложно. Рассмотрим две последовательные линии сгиба PQ и QR после того, как выполнено очень много перегибов и ситуация «стабилизировалась» (рис.4).

Пусть $\angle PQN = \varphi$. Так как угол RQN есть четверть угла PQN , то $\angle RQN = \frac{\varphi}{4}$. Поэтому внутренний односторонний с ним угол QRM равен

$$\angle QRM = 180^\circ - \angle RQN = 180^\circ - \frac{\varphi}{4}.$$

Но в силу «стабилизации» угол QRM равен углу PQN , т.е. тому же φ ! Следовательно,

$$180^\circ - \frac{\varphi}{4} = \varphi, \text{ откуда } \varphi = 144^\circ \text{ и } \angle RQN = 36^\circ.$$

Мы получили весьма примечательный угол 36° , возникающий при построении правильного пятиугольника – и притом очень простым способом.

Можно использовать ту же идею, если (см. рис.3) делить пополам не угол A_3A_2N , а угол $A_3A_2A_1$ (и так далее в том же духе), т.е. каждый новый угол составит не четверть, а три четверти предыдущего. В этом случае получаем такое «предельное» равенство:

$$180^\circ - \frac{3\varphi}{4} = \varphi, \text{ и тогда } \varphi = 180^\circ \cdot \frac{4}{7}.$$

Как видим, здесь мы имеем место с делением окружности на *семь* равных частей, чего «классическими» средствами добиться вообще невозможно.

Дальнейшие рассуждения существенно расширяют простор для комбинаций. Во-первых, можно делить углы не на 4, а на 8 и более частей. А можно действовать похитрей – скажем, делить углы попеременно на две и на четыре части, или два раза на две, а потом один раз на четыре, и так далее, т.е. возможности здесь безграничны. Так что запасайтесь полосками, дорогие читатели! В крайнем случае, сгодятся для оклейки окон.

Опубликовано в журнале «Квантик» №12 за 2013 год.

⁵ Такое предположение становится приближенно верным, только когда отклонение угла становится достаточно малым.

⁶ Расчет с использованием отвергнутой нами тригонометрии показывает, что хватило бы восьми перегибов – практически то же самое.

Таинственный утюг

С.ДВОРЯНИНОВ

МИНУВШИМ ЛЕТОМ ТОЛЯ ВТУЛКИН ОТДЫХАЛ В деревне. Как-то раз забрался он на чердак. Среди старых, забытых ныне вещей – прялки, сепаратора, швейной машинки, радиолы, патефона и других – он заметил два утюга. Один, со сломанной ручкой, походил на современный. А другой был какой-то странный – без всяких проводов.

Задумался Толик: как же им пользовались? Быть может, у него внутри находится батарейка-аккумулятор, от которой он питается? Или, может быть, дело проще: при движении утюг трется о материю, а трение всегда сопровождается нагреванием, вот утюг и становится горячим!

А что если этот старинный на вид утюг на самом деле ... из будущего?! Вдруг он получает энергию не по проводам, как обыкновенно происходит, а посредством какого-нибудь неведомого нам поля? Переносят же волны электромагнитного поля радио- и телесигналы в наши радиоприемники и телевизоры. Не оставили ли этот утюг на Земле инопланетяне? Как тогда он устроен и что там у него внутри?

...Толик привез этот утюг в город. На очередном заседании школьного физического кружка он собира-



ется распиливать этот утюг – подобно тому как Шура Балаганов пилил чугунную гиру в поисках золота. Работа эта тяжелая, и поэтому Толик просит помощи в осуществлении его намерений.

А что думаете обо всем этом вы, дорогие читатели?

Вифлеемская звезда

А.АНДРЕЕВ, Д.ПАНОВ, А.ПАНОВ

ВОЗЬМЕМ МАЛЕНЬКИЙ СВЕТОДИОД И ПРИКРЕПим его скотчем к 3-вольтовой батарейке диаметром 20 мм – мы получим миниатюрный фонарик (рис.1).



Рис. 1

Этого фонарика меньше длины траектории, по которой он движется.

Если такой фонарик поместить внутрь надутого воздушного шарика и хорошенько раскрутить, то в темноте можно увидеть яркую светящуюся звезду-гипоциклоиду (рис.2).

Мы поздравляем всех с Рождеством и Новым годом, и предлагаем следующую задачу.

Оцените, во сколько раз периметр батарейки на-

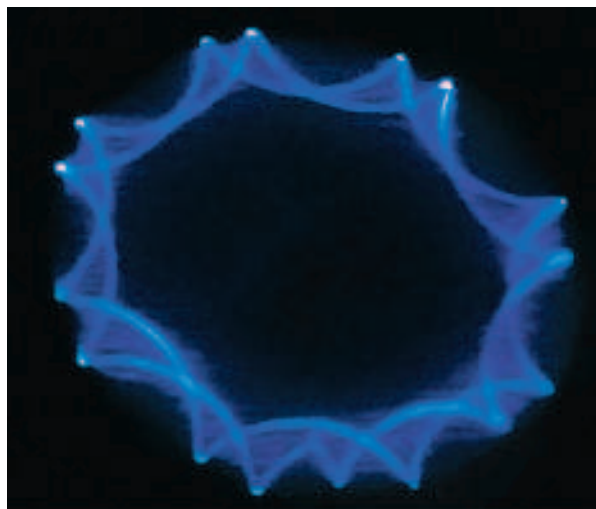


Рис. 2

Капли, пузырьки и дирижабли

А. СТАСЕНКО

НУ КАКОЙ ЖЕ ЧИТАТЕЛЬ НЕ НАБЛЮДАЛ, КАК ПАДАЮТ вниз капли дождя, а пузырьки в газированной воде всплывают вверх? Однако капли масла в воде или стальные шарики в ртути отнюдь не «падают», а всплывают. Ясно, что здесь играет роль знак разности плотностей окружающей среды и погруженного в нее тела, о чем, собственно, и говорит закон Архимеда. Этот закон «работает» всюду: подводная лодка или корабль – это «пузырьки» в воде или на ее поверхности; воздушный шар, наполненный горячим воздухом, – это «пузырек» в более холодной атмосфере.

А в технике используется процесс, красиво называемый «флотацией»: в воду засыпают смесь измельченной руды и пустой породы и продувают снизу воздух. Более легкая порода прилипает к пузырькам, увлекается ими вверх и легко удаляется из смеси, а более тяжелые частицы металла остаются внизу.

Теперь – немножко подробнее. Обозначим через ρ_n , ρ_j , ρ_t плотность газа в пузырьке, плотности жидкости и твердого тела соответственно. Легко написать условие, при котором сила плавучести пузырька начнет превосходить силу потопления, действующую на прилипший шарик твердого вещества (см. рисунок):

$$\frac{4}{3}\pi r_n^3 g(\rho_j - \rho_n) \geq \frac{4}{3}\pi r_t^3 g(\rho_t - \rho_j).$$

(Понятно, что тут кое-что можно сократить.) Учитывая, что

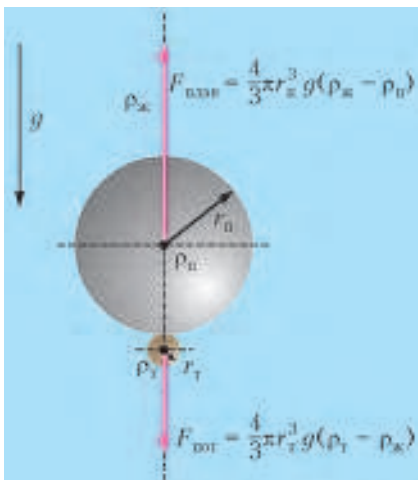


Схема флотации

значения ρ_t для полезной руды и бесполезной пустой породы различны, из этого условия можно подобрать такие значения степени измельчения (т.е. r_t) твердых веществ и такие размеры пузырьков (r_n), при которых флотация станет эффективной.

Но пусть скорость всплывания пузырьков или падения частиц уже достигла установившегося значения. Ясно, что теперь нужно учесть еще и силу сопротивления среды. Очевидно, эта сила должна зависеть от скорости движения

v , размеров тела (например, радиуса r) и плотности ρ окружающей среды, сопротивляющейся движению тела. Из соображений размерности можно написать единственную комбинацию этих величин, имеющую размерность силы, а именно $\rho r^2 v^2$. В гидро- и газодинамике принято эту силу писать в виде

$$\vec{F}_{\text{сопр}} = -C \cdot \frac{1}{2} \rho \pi r^2 v \vec{v}.$$

(Знак минус указывает на то, что вектор силы противоположен вектору скорости). Здесь вполне разумно выделена площадь поперечного сечения πr^2 , а C – так называемый коэффициент сопротивления. Вопросом о том, каким может быть этот коэффициент, интересовался еще великий Ньютон, и из его соображений следует, что для шара $C \approx 1/2$.

Приравнивая друг другу силы плавучести и сопротивления, для установившейся скорости движения шара плотностью $\rho_{\text{ш}}$ в среде с плотностью $\rho_{\text{ср}}$ получим

$$v = \sqrt{\frac{16}{3} r g \left| \frac{\rho_{\text{ш}}}{\rho_{\text{ср}}} - 1 \right|}.$$

Например, для капли воды, $\rho_{\text{вод}} = 10^3$ кг/м³, радиусом $r = 1$ мм в воздухе, $\rho_{\text{возд}} = 1,25$ кг/м³, будем иметь

$$v_{\text{вод}} = \sqrt{\frac{16}{3} \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot 10 \text{ м/с}^2 \left(\frac{10^3}{1,25} - 1 \right)} = 6,5 \text{ м/с}.$$

Кстати, из выражения в скобке под знаком корня видно, что силой Архимеда для капли воды можно пренебречь. С такой примерно скоростью и падают крупные капли дождя.

А в случае движения воздушного пузырька в воде нужно в формуле для скорости поменять местами индексы «ш» и «ср» (теперь вода – окружающая среда, а воздух в пузырьке – движущееся в воде тело). И тогда видно, что, поскольку $\frac{\rho_{\text{возд}}}{\rho_{\text{вод}}} \ll 1$, этим отношением плотностей можно пренебречь по сравнению с единицей, так что основную роль теперь играет как раз сила Архимеда, а не сила тяжести пузырька. В результате получим

$$v_{\text{возд}} = \sqrt{\frac{16}{3} r g} = \sqrt{\frac{16}{3} \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot 10 \text{ м/с}^2} = 0,23 \text{ м/с} = 23 \text{ см/с}.$$

Тут нужно предупредить, что с увеличением радиуса пузырька скорость его всплывания растет и закон сопротивления (точнее – зависимость от скорости) для шара нуждается в поправке.

Теперь рассмотрим, как достигается эта установившаяся скорость, например, для случая падения водяной капли в воздухе. Конечно, для этого придется написать уравнение второго закона Ньютона:

$$m_{\text{вод}} \vec{a}_{\text{вод}} = -\frac{1}{4} \pi r^2 \rho_{\text{возд}} v \vec{v} + m \vec{g} \left(1 - \frac{\rho_{\text{возд}}}{\rho_{\text{вод}}} \right),$$

(здесь $m_{\text{вод}}$ – масса, $\vec{a}_{\text{вод}}$ – ускорение капли). В начале движения скорость близка к нулю, и, следовательно, содержащим ее в квадрате, можно пренебречь. К тому же, учитывая, как и раньше, что $\frac{\rho_{\text{возд}}}{\rho_{\text{вод}}} \ll 1$, для ускорения капли в воздухе в начальный момент получим

$$\vec{a}_{\text{вод}} \approx \vec{g}.$$

Великий Галилей, сбрасывая пушечные ядра с Пизанской башни, очень разумно пренебрегал и силой Архимеда, и силой сопротивления воздуха.

А вот что получим для воздушного пузырька в воде (при тех же предположениях):

$$\bar{a}_{\text{возд}} \approx -\bar{g} \frac{\rho_{\text{вод}}}{\rho_{\text{возд}}} = -\bar{g} \frac{10^3}{1,25} \approx -800 \bar{g}.$$

Это какое же тело выдержит такую перегрузку – тем более что речь идет о «мягком пузырьке»? Тут явно что-то не так. И вот что именно: мы не учли очень важное и интересное свойство движения тел в среде – наличие так называемой присоединенной массы. Дело в том, что любая попытка тела изменить свою скорость вызывает и ускорение окружающей его массы m' среды – при этом само тело становится как бы массивнее.

Еще в первом веке до нашей эры это явление образно описал римский поэт-философ Тит Лукреций Кар:

«... коль два обширные тела, столкнувшись,
Быстро отскочат одно от другого, то воздух, конечно,
Должен всю ту пустоту захватить, что меж них получилась;
Но, и врываясь туда стремительным током,
Все-таки сразу всего заполнить пространства не сможет;
Он непременно займет сначала ближайшее место,
Следом другое за ним, а затем уж и все остальные».

Для шара эта присоединенная масса равна половине массы окружающей среды в объеме шара, т.е.

$$m' = m \frac{\rho_{\text{среды}}/2}{\rho_{\text{шара}}}.$$

Для пузырька в воде получим

$$\frac{m'}{m} = \frac{\rho_{\text{вод}}/2}{\rho_{\text{возд}}} = \frac{500}{1,25} = 400$$

– пузырек в воде «тяжелее» в сотни раз при попытке изменить свою скорость! С учетом присоединенной массы ускорение воздушного пузырька в воде будет равно

$$\bar{a}_{\text{возд}} \approx \bar{g} \frac{1 - \frac{\rho_{\text{вод}}}{\rho_{\text{возд}}}}{1 + \frac{1}{2} \frac{\rho_{\text{вод}}}{\rho_{\text{возд}}}} \approx -2 \bar{g}$$

(здесь опять учтено, что $\rho_{\text{вод}}/\rho_{\text{возд}} \gg 1$). Из-за этой присоединенной массы неравномерные движения воздушного шара и дирижабля в воздухе оказываются затруднительными.

Но и это еще не все. Согласно классической гидродинамике, окружающая среда не только навязывает ускоренно движущемуся телу свою присоединенную массу в данный момент, но она «помнит» о всей предыстории его движения. Значит, тут уже дело пахнет интегралом по времени от «минус бесконечности» до данного момента. Этот интеграл так и называется «функция памяти» или сила Бассэ – по имени известного гидродинамика XIX века. А кроме того, подынтегральная функция, как говорят физики и математики, имеет особенность в знаменателе.

Так что лучше отложить это дело до вашего поступления на факультет аэромеханики и летательной техники (ФАЛТ) Московского физико-технического института, где вас научат всем прелестям механики жидкости и газа.

Энтропия, Демон Максвелла и тепловая смерть Вселенной

А. СТАСЕНКО

Бешено выли слухофоны и мигали смотроскопы. Сквозь заклепки сочились кванты. Черная энтропия росла.

Из фантастического романа

НАЧНЕМ С ЧЕГО-НИБУДЬ ВКУСНОГО. ПРЕДСТАВИМ СЕБЕ космонавта, у которого в прозрачной банке находятся 10 конфет и 10 орехов. (Космонавт нужен для невесомости, чтобы не заботиться о силе тяготения.) Интуитивно ясно, что если банку до этого сильно трясли, то орехи и конфеты распределились в ней равномерно по объему. Но вот космонавт снова трясет эту банку и хочет, чтобы орехи собрались в одной половине банки, а конфеты – в другой. Какова вероятность p этого результата, или, другими словами, из скольких случаев распределения $N = 1/p$ один случай даст желаемый результат? Ясно, что для каждого из предметов вероятность оказаться в заданной половине банки равна

$1/2$; для десяти таких предметов она составит $(1/2)^{10}$. Но поскольку имеются предметы двух сортов, то вероятность их возможного разъединения составит $\left((1/2)^{10}\right)^2 = (1/2)^{20}$. Значит, только один из 2^{20} вариантов может привести к желаемому результату. Конечно, все эти рассуждения верны «в среднем» – это понятие в ходу и в теории вероятностей, и в быту.

Перейдем теперь к классическому примеру двух разных газов, находящихся в сосуде по обе стороны от разделяющей их перегородки. И пусть каждый из них числится в количестве одного моля; значит, имеется число молекул каждого газа, равное числу Авогадро, т.е. $6 \cdot 10^{23}$ штук. (Теперь условие невесомости нам не нужно: в размерах банки вертикальная неоднородность распределения молекул, в отличие от атмосферы, не существенна. И трясги не нужно, потому что молекулы, в отличие от конфет и орехов, обладают приличными тепловыми скоростями движения.)

И вот, в некоторый момент перегородку убирают, и начинается – что? правильно – смешение газов. И всем понятно, что это смешение будет стремиться к равномерному распределению каждого газа по всему объему сосуда – опять же «в среднем». А теперь поставим уже знакомый нам вопрос: из скольких распределений одно окажется таким, что газы вновь вернуться в начальное состояние, т.е. произойдет их самопроизвольное разделение по обеим половинкам сосуда? Но теперь ответ нам известен по аналогии с предыдущим: вариантов будет $\left(2^{6 \cdot 10^{23}}\right)^2$.

Конечно, общаться с такими громадными числами неудобно, и физики давно догадались, что достаточно обсуждать только показатель степени таких чисел, т.е. использо-

вать их логарифм. И тут возникли понятия *энтропии* и *информации*.

Понятие *энтропии* (S) ввел в науку Рудольф Клаузиус в 1865 году. Будучи термодинамиком, он рассуждал не о молекулах (термодинамика не интересуется структурой вещества), а о температуре, теплоте, давлении, плотности... И определил изменение энтропии данного количества вещества ΔS как отношение подведенного к нему количества теплоты δQ к температуре T :

$$\Delta S = \frac{\delta Q}{T}.$$

Значит, если иметь в виду один моль вещества, то размерность энтропии будет Дж/(К·моль), что совпадает с размерностью молярной теплоемкости – а это очень понятно для всех термодинамиков. (Отметим, что изменение энтропии и подведенное количество теплоты отмечены разными символами Δ и δ . В этом есть глубокий смысл, но его можно понять, только учась в Московском физико-техническом институте.)

Казалось бы, что произошло особенного? Ну введена еще одна термодинамическая величина. Но, оказывается, это действительно особенная функция – единственная, которая определяет направление процесса. А именно – в замкнутой системе энтропия растет со временем!

Что там еще растет – в сосуде с первоначально разделенными газами? Число молекул не изменяется, температура – тоже (если сосуд теплоизолирован)... А растет – беспорядок. Действительно, вначале был порядок – например, одни молекулы находились справа, другие слева, а в результате – «смешались в кучу кони, люди...» В итоге энтропия получила у физиков статус меры беспорядка, а у лириков – мрачный эпитет «черная». А тут еще вспоминается величайший принцип термодинамики, очевидный для каждого человека: тепло всегда течет от горячего тела к холодному. Жизнь на земле возможна потому, что Солнце горячее. А если Солнце примет ту же температуру, что и Земля? Страшно подумать. И тут возникла теория тепловой смерти Вселенной. Знаменитые физики, философы, религиозные мыслители сотню лет высказывались об этом совершенно определенно. Приведем лишь несколько цитат:

«Вселенная не может существовать вечно; рано или поздно должно наступить время, когда ее последний эрг энергии достигнет наивысшей ступени на лестнице падающей полезности, и в этот момент активная жизнь вселенной должна будет прекратиться» (Джеймс Джинс, 1930 г.).

«Вся вселенная достигнет теплового равновесия в будущем в срок, который не бесконечно удален» (Артур Эддингтон, 1935 г.).

«Закон энтропии, открытый Рудольфом Клаузиусом, дал нам уверенность, что... в замкнутой материальной системе в конце концов этот процесс в макроскопическом масштабе когда-то прекратится. Эта печальная необходимость... красноречиво свидетельствует о существовании Необходимого Существа» (Папа Пий XII, 1952 г.).

Следующий шаг сделал Людвиг Больцман. Согласно его рассуждениям, энтропию системы можно определить через логарифм числа возможных состояний N :

$$S \sim \log_2 N,$$

или (формула Больцмана)

$$S = k \ln N,$$

где k – постоянная Больцмана. Очевидно, что любой логарифм по одному из оснований можно легко выразить через логарифм по другому основанию. (Мы сохраняем основание 2, чтобы опираться на приведенные выше рассуждения о двух частях сосуда.)

Итак, рост энтропии (в замкнутой системе) ассоциируется с ростом беспорядка – различные газы самопроизвольно смешиваются, температура соприкасающихся тел выравнивается. И тут великий Джеймс Клерк Максвелл придумал Демона. Это существо (или устройство) расположилось у отверстия в перегородке, разделяющей две половины сосуда, и занимается следующей деятельностью: увидев «горячую» молекулу (т.е. более быструю, чем средние), подлетающую к отверстию справа, оно пропускает ее налево, а увидев с другой стороны «холодную» молекулу, пропускает ее направо. В результате такой деятельности газ слева оказывается горячим, справа – холодным (или газы оказываются вновь разделенными).

Предпринималось множество попыток «изгнать Демона» – запретить ему столь противоестественный процесс. Пожалуй, наиболее удачная из них связана с теорией *информации*.

А как ввести меру информации? Если вам сейчас скажут, что вы читаете замечательный журнал «Квант», полученная вами информация равна нулю. А если вы услышите, что из семи миллиардов людей компьютер присудил именно вам Нобелевскую премию (вероятность чего $p = \frac{1}{7 \cdot 10^9} \approx 1,5 \cdot 10^{-10}$) – это вас чрезвычайно заинтересует.

Итак, информация об очевидном событии равна нулю, о маловероятном – очень высока, о невероятном – бесконечна. И опять – как это похоже на свойства логарифмической функции! Поэтому было решено, что если из двух равновероятных событий осуществляется одно, то полученная об этом информация равна единице: $I = \log_2 2 = 1$. (Если отмеченная нами молекула находится в левой части сосуда, а не в правой, то информация об этом равна 1.) А если из N равновероятных событий осуществилось какое-то одно, то информация об этом равна

$$I = \log_2 N = -\log_2 \frac{1}{p}.$$

Но ведь это очень похоже на больцмановское определение энтропии. Поэтому были сказаны замечательные слова: мерой информации может служить *негэнтропия* (негативная энтропия, т.е. отрицательная энтропия). И значит, получая информацию, т.е. наводя порядок в голове, мы увеличиваем энтропию, т.е. беспорядок во Вселенной. Тут и начинается изгнание Демона.

Итак, чтобы увидеть подлетающую молекулу, например, азота, необходимо иметь по крайней мере один квант $h\nu$ света, который молекула должна «проглотить и выплюнуть». Но ведь при этом она получит импульс отдачи, равный $-2h\nu/c$. Много это или мало? Сравним с собственным импульсом молекулы, имеющим порядок $m\langle v_r \rangle$, где $\langle v_r \rangle$ – средняя тепловая скорость, которая, как известно, порядка (немного больше) скорости звука. Получаем

$$\frac{2h\nu/c}{m\langle v_r \rangle} = \frac{2 \cdot 6,6 \cdot 10^{-34} \cdot 10^{15}}{3 \cdot 10^{-27} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 28 \cdot 500} \sim 10^{-4} \ll 1.$$

Здесь $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света, $v = 10^5$ с⁻¹ – его характерная частота в оптическом диапазоне, масса молекулы азота равна массе протона $1,67 \cdot 10^{-27}$ кг, умноженной на относительную молекулярную массу азота 28, средняя тепловая скорость принята равной 500 м/с. Значит, переизлучение одного кванта не очень сильно изменит скорость молекулы. Но проблема еще в другом: этот переизлученный квант не обязательно вернется к излучателю. Если его направление равновероятно, то вероятность поймать вернувшийся квант порядка $\Omega/(4\pi)$, где Ω – телесный угол, под которым виден

зрачок глаза Демона (или входное устройство регистрирующего прибора). Значит, квантов, «освещающих» приближающуюся молекулу, должно быть много – и кто его знает, насколько они затормозят желанную быструю молекулу. Причем использование даже одного кванта приведет к росту энтропии системы: $\Delta S = \frac{h\nu}{T}$. Итак, старания этого Демона бесполезны.

А что же теория тепловой смерти Вселенной? С разных позиций ее «изгоняют» сам Людвиг Больцман, а также Мириан Смолуховский, Фридрих Энгельс, Илья Пригожин. Последний предложил (1945 г.) энтропию представить в виде двух частей: $S = S_e + S_i$, где S_e – внешняя энтропия (индекс e – от слов exchange, external, т.е. обменная, внешняя), а S_i – внутренняя энтропия (индекс i – от слова inner, т.е. внутренняя). Так вот, в реальности растет

только внутренняя энтропия замкнутой системы, а внешняя может и убывать за счет обмена с другими системами.

В двадцатом веке астрофизики открыли черные дыры, без остатка поглощающие вещество и излучение. Но ведь вместе с ними эти дыры поглощают и энтропию – значит, способствуют росту порядка во Вселенной. И не служат ли они отверстиями для общения с другими вселенными? Ибо физики уже не раз выдвигали идею о том, что наш мир является одним из (по крайней мере) двух, а то и из бесконечного множества миров.

Как тут не вспомнить древнегреческого философа: «Мир, единый из всего, не создан никем из богов и никем из людей, а был, есть и будет вечно живым огнем, закономерно воспламеняющимся и закономерно угасающим» (Гераклит Эфесский, VI–V вв. до н.э.).

Прекрасные моменты физики

А. СТАСЕНКО

... и вдруг в этот самый момент...

Из страшных рассказов

ТЕРМИН «МОМЕНТ», О КОТОРОМ ПОЙДЕТ ЗДЕСЬ РЕЧЬ, используется в самых разных смыслах. Для поэтов и писателей он ассоциируется со словом «мгновение», ораторы любят «заострить внимание на этом моменте», на TV существует «Момент истины»... И в физике моментов тоже немало. Но – все по порядку.

Возьмем велосипедное колесо радиусом r и, закрепив его ось вертикально, приложим к его ободу пару сил с моментом, равным $M_z = (F_\phi/2) \cdot 2r$ (рис.1,а). Но, может быть, не все помнят, что такое момент силы? Так вот, это произведение кратчайшего расстояния между направлением вектора силы

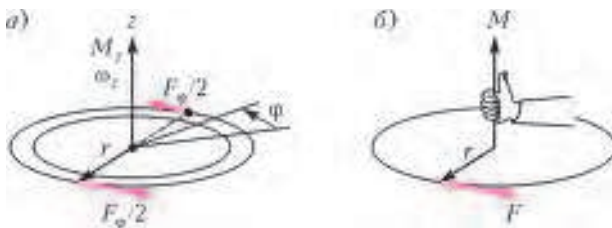


Рис. 1

и осью вращения (в данном случае – радиуса колеса) на величину самой силы. Еще говорят, что это вектор (\vec{M}), перпендикулярный одновременно и вектору силы (\vec{F}) и радиусу-вектору (\vec{r}), а его направление указывает большой палец правой руки, если остальные пальцы «обнимают ось вращения» (рис.1,б). А можно сказать иначе: момент направлен так, чтобы с его вершины вращение представлялось происходящим против часовой стрелки.

Но что же происходит с велосипедным колесом? Если пара сил с моментом, равным по величине $M_z = rF_\phi$, действует постоянно, то колесо, оставаясь на месте, будет вращаться

все быстрее. Этот несомненный факт можно описать с двух точек зрения.

Начнем с «линейной» точки зрения. Все участки колеса массой m имеют одинаковую линейную (окружную) скорость v_ϕ , а значит, один и тот же импульс величиной $p_\phi = mv_\phi$. Изменение этого импульса можно описать вторым законом Ньютона:

$$\frac{dp_\phi}{dt} = F_\phi. \quad (1)$$

Умножим обе части этого уравнения на постоянную величину радиуса r :

$$\frac{d(rp_\phi)}{dt} = rF_\phi = M_z. \quad (2)$$

Обратим внимание, как замечательно тут уже выстроились индексы: сила направлена в плоскости вращения колеса, перемещение точек которого описывается изменением угла ϕ ; ее момент, как уже говорилось, направлен вдоль оси z ; ну, а радиус r направлен вдоль себя самого. И что же теперь утверждает это уравнение? А то, что, подобно тому как есть момент силы, равный rF_ϕ , существует момент импульса rp_ϕ и что его изменение во времени равно моменту силы.

Теперь посмотрим с «угловой» точки зрения. Введем понятие угловой скорости, величина которой равна

$$\omega_z = \frac{v_\phi}{r}.$$

В этой записи уже содержится информация, что куда направлено: в частности, она указывает на то, что угловая скорость направлена вдоль оси вращения. Можно перегруппировать символы в выражении для момента импульса:

$$rp_\phi = rmv_\phi = rmr\omega_z = mr^2\omega_z.$$

И тут появляется еще один момент, связанный с инертностью колеса, – момент инерции

$$J_z = mr^2.$$

Ему даже приписан индекс, напоминающий о том, вокруг какой оси происходит вращение. Заметим, что эта величина зависит не только от массы, но и от того, как эта масса распределена относительно оси вращения (в случае колеса она вся распределена по его ободу). Значит, уравнение (2) можно теперь переписать в виде

$$\frac{d(J_z \omega_z)}{dt} = M_z, \text{ или } \frac{dL}{dt} = M_z. \quad (3)$$

Здесь уже видны три момента: момент инерции J_z , момент

импульса $L = J_z \omega_z$ и момент силы M_z . И все эти моменты связаны с осью вращения z .

Тут можно вспомнить хрестоматийный случай с фигуристкой на льду, которая вращается вокруг вертикальной оси. Если пренебречь трением коньков о лед и сопротивлением воздуха (точнее, тормозящим моментом силы сопротивления), то в правой части уравнения (3) можно написать «ноль»; значит, момент импульса не изменяется со временем: $J_z \omega_z = \text{const}$. Поэтому, прижимая руки к телу или моментально разбрасывая их в стороны, фигуристка изменяет момент инерции и, следовательно, увеличивает или уменьшает свою угловую скорость.

Но не думайте, что мы перечислили все моменты механики. Есть еще один интересный момент.

Пусть наше колесо принадлежит велосипеду, который поворачивает, например, налево (рис.2; вид сверху). Соб-

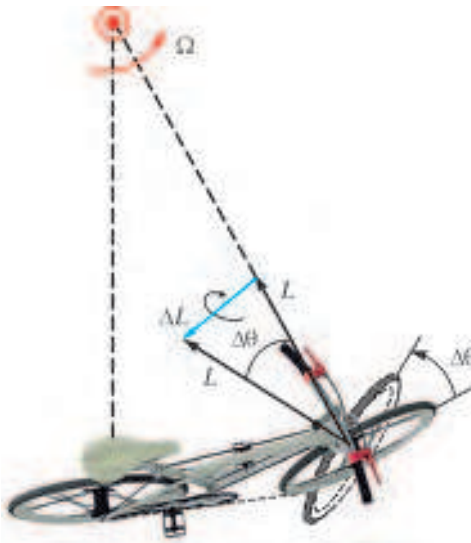


Рис. 2

ственный момент импульса колес лежит в горизонтальной плоскости (попросим велосипедиста не наклоняться). Если движение центра масс происходит по окружности, то его можно описать как вращение с угловой скоростью Ω , которая, как мы уже легко установили, направлена вертикально вверх. Но что же происходит? Через малый промежуток времени Δt собственные моменты импульса (угловые моменты) колес повернутся на угол $\Delta\theta = \Omega \Delta t$. Это значит, что вектор \vec{L} , равный $L = J\omega$, получит приращение $\Delta\vec{L}$. Но как оно направлено? Видно, что этот вектор лежит в горизонтальной плоскости и перпендикулярен как вектору момента импульса, так и оси вращения Ω . Но, взглянув вдоль вектора $\Delta\vec{L}$, мы заметим, что это приращение вектора \vec{L} можно приписать действию какого-то нового момента, направленного вдоль вектора $\Delta\vec{L}$, причем $\Delta L = M_r \Delta t$. Действие момента M_r показано стрелкой, «обнимающей» вектор $\Delta\vec{L}$. Это так называемый гироскопический момент (как видим, он стремится «завалить» велосипедиста в сторону поворота).

Теперь мы знаем, что попытка изменить направление оси вращения тела (гироскопа), обладающего собственным моментом импульса, приводит к возникновению гироскопического момента, перпендикулярного как самому моменту импульса, так и оси вращения. И вы легко сообразите, как будет направлен гироскопический момент, наблюдая за автомобилем с вращающейся бетономешалкой, поворачивающим за угол, или за выполняющим вираж одномоторным

самолетом с вращающимся винтом. Или поймете, в какой плоскости расположить массивный маховик на военном корабле с целью уменьшить качку и повысить точность стрельбы, или...

И тут надо сделать добровольное признание. Вы заметили, что в тексте почти нигде угловая скорость не называется вектором? Это не случайно: дело в том, что угловая скорость не вектор, а псевдовектор, т.е. как бы не совсем вектор. Более того, с моментом инерции еще сложнее – это не вектор и не скаляр, а, страшно сказать, тензор. Добавим, давление – тоже тензор, но никого это не травмирует. Однако об этом поговорим не сейчас, а когда вы поступите в Московский физико-технический институт. А пока достаточно того, что, если вы в автобусе объявите, что момент импульса – это псевдовектор, вам уступят место.

А что же Земля? Ведь это тоже гироскоп, ось вращения которого и «вектор» угловой скорости величиной $\omega = \frac{2\pi}{T_1}$ (где $T_1 = 1$ сутки) наклонены к плоскости орбиты, т.е. составляют некоторый угол ($\approx 23^\circ$) с «вектором» орбитальной угловой скорости $\Omega = \frac{2\pi}{T_2}$ (где $T_2 = 1$ год) – чем и объясняется смена времен года (рис.3). А Солнце вращается

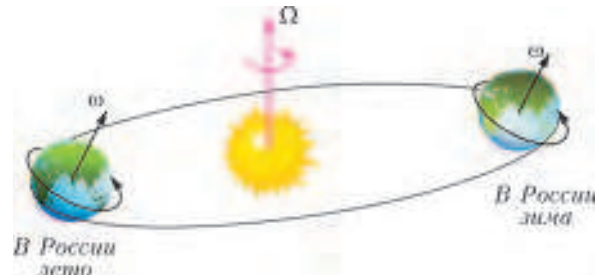


Рис. 3

вокруг своей оси, и вся солнечная система вращается вокруг центра Галактики, а Галактика, в свою очередь...

Конечно, Земля не колесо и не вся ее масса находится на одном и том же расстоянии от оси вращения – часть массы на самой оси, часть вблизи оси, так что для этих частей r^2 меньше R^2 , т.е. радиуса Земли в квадрате. Поэтому ее момент инерции относительно оси вращения не mR^2 , а $\frac{2}{5}mR^2$ (в предположении однородного шара). А поскольку земной шар есть тоже гироскоп, попробуйте перед сном представить в ее атмосфере и на поверхности многочисленные гироскопы – тайфуны, смерчи, торнадо, колеса автомобилей и вагонов локомотивов, роторы динамомашинок и текстильных прялок... на которые действуют гироскопические моменты уже хотя бы потому, что они находятся на вращающейся платформе. А еще надо вспомнить, что каждый электрон обладает как собственным, так и орбитальным моментами, и не забыть при этом о каждом атоме, каждой молекуле...

И когда вы все это представите, в этот момент вы испытаете большое удовольствие.

ЭТЮД О СИМЕДИАНАХ

В.ЖУРАВЛЕВ, П.САМОВОЛ

Опасное это дело, Фродо, выходить за порог, — говаривал он. — Только ступи на Дорогу, она подхватит и поведет тебя — куда? Как знать...

Дж.Толкин. Властелин колец

I

Макс изнывал от жары и скуки. Начались летние каникулы, и родители ничего лучше не придумали, как отправить Макса на пару месяцев на ранчо деда. Спаситься от жары можно было в доме, где постоянно работал кондиционер, или в мини-бассейне во дворе. Борьба со скукой было сложнее, поскольку школьные друзья были далеко. Оставался только интернет.

— Привет! Не надоело еще смотреть ролики? Хочешь пошевелить извилинами? — прочел Макс. Это пришло сообщение от Софьи — его русской знакомой.

— Кто ж не хочет? — ответил Макс не раздумывая.

— Нам на математическом кружке дали задание на лето: написать доклад. Я подумала, может, и тебе будет интересно.

— А какая тема?

— Тема свободная, но по геометрии.

— Геометрия большая, а что-то поконкретнее есть?

— Нам предложили посмотреть несколько книжек и статей из «Кванта». Я пока остановилась на нескольких статьях. Направляю сканы и ссылки тебе на почту. Не могу пока определиться. Вдогонку отправляю еще несколько книг, в том числе перевод книги Шарыгина. Будут соображения, пиши...

Макс взял первую попавшуюся статью и, как обычно, переписал себе в тетрадь определение:

Изогональными называются прямые, которые проходят через вершину треугольника и симметричны относительно биссектрисы внутреннего угла треугольника, имеющей с прямыми общую точку.

Макс прочел статью и разобрал решения задач. Особое внимание он уделит теореме.

Теорема 1. Если отрезки AA_1 и AA_2 изогональны, а треугольник ABC вписан в окружность, то существуют два «изогональных подобия» треугольников (рис. 1) — первое $\triangle ABA_0 \sim \triangle AA_2C$, второе: $\triangle ACA_0 \sim \triangle AA_1B$.

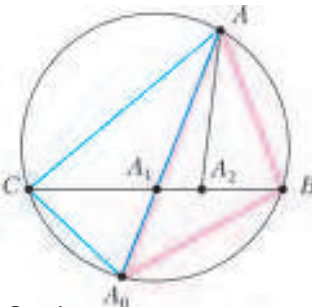


Рис. 1

Тема статьи показалась Макс интересной, и ему захотелось еще попрактиковаться, но задачи закончились. Тогда он стал листать перевод книги Шарыгина и наткнулся на следующую задачу.

Задача 1. Прямая, симметричная медиане треугольника относительно биссектрисы того же угла, называется симедианой. Пусть симедиана, выходящая из вершины B треугольника ABC , пересекает AC в точке K . Докажите, что $\frac{AK}{KC} = \frac{AB^2}{BC^2}$.

Так, подумал Макс, получается, что медиана и симедиана — это изогональные прямые. Значит, мы можем попробовать применить наши знания для решения задачи. Немного подумав, он получил следующее доказательство.

Решение. Опишем вокруг треугольника ABC окружность (рис. 2). Проведем медиану BM , тогда $AM = MC$. Пусть E — точка пересечения прямой BM с окружностью. Как и в теореме, мы получаем, что следующие пары треугольников подобны: $\triangle ABE \sim \triangle KBC$, $\triangle ABK \sim \triangle BEC$.

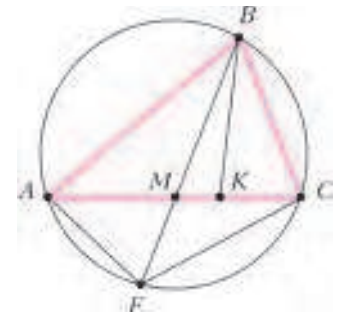


Рис. 2

Значит, $\frac{KC}{AE} = \frac{BC}{EB}$ и $\frac{AK}{EC} = \frac{AB}{EB}$, откуда $\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{EC}{AE}$. Кроме того, $\triangle ABM \sim \triangle ECM$, $\triangle AME \sim \triangle BMC$. Тогда $\frac{EC}{MC} = \frac{AB}{BM}$ и $\frac{AE}{AM} = \frac{BC}{BM}$. Следовательно,

$$\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{EC}{AE} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AB \cdot MC}{AM \cdot BC} = \frac{AB^2}{BC^2},$$

что и требовалось доказать.

Полученное им решение отличалось от приведенного в книге. Этот факт его обрадовал, и он написал об этом Софье.

II

Пение птиц ворвалось в легкий утренний сон Софьи. Спать уже не хотелось. Софья приготовила себе чашку кофе, взяла планшет и села на лужайку перед дачным домиком. Утренняя свежесть позволяла легко дышать и думать.

Находка Макса показалась ей многообещающей. На уроках геометрии они выводили формулы для нахождения длин медианы, биссектрисы и высоты треугольника. Почему бы мне не найти формулу для длины симедианы?

— подумала Софья. Для простоты вычислений обозначим через a, b, c длины сторон треугольника, а через g_a, g_b, g_c — длины соответствующих симедиан. Софья нарисовала рисунок 3.

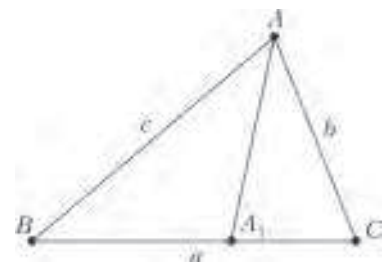


Рис. 3

Используя результат задачи 1, Софья нашла

длины отрезков $BA_1 = \frac{ac^2}{b^2 + c^2}$, $CA_1 = \frac{ab^2}{b^2 + c^2}$. Не особо задумываясь, она применила два раза теорему косинусов для треугольников ABA_1, ABC и практически сразу получила квадрат длины симедианы AA_1 .

Упражнение 1. Докажите, что квадрат длины симедианы g_a , проведенной к стороне a , вычисляется по формуле

$$AA_1^2 = g_a^2 = \frac{b^2c^2(2b^2 + 2c^2 - a^2)}{(b^2 + c^2)^2}. \quad (1)$$

Еще раз посмотрев на рисунок 3, она вспомнила, что на факультативе для нахождения длины медианы и биссектрисы они использовали **теорему Стюарта**:

Пусть A_1 – произвольная точка на стороне BC треугольника ABC . Тогда $AA_1^2 = AB^2 \cdot \frac{A_1C}{BC} + AC^2 \cdot \frac{A_1B}{BC} - A_1B \cdot A_1C$.

Она подставила в эту формулу найденные длины отрезков для случая, когда AA_1 – симедиана, и получила в точности соотношение (1).

Итак, я умею выводить формулу длины симедианы двумя способами. Впрочем, при доказательстве теоремы Стюарта мы также применяли теорему косинусов, так что в принципе оба доказательства похожи, – подумала она.

За выкладками Софья не заметила, что кофе уже остыл. Но даже глоток холодного кофе не смог остановить процесс рассуждений.

Нам известно, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, и такое же утверждение верно для биссектрис или высот треугольника. Может быть, и симедианы пересекаются в одной точке?! – мелькнула мысль-догадка.

Доказательство получилось само собой, когда она вспомнила, что на кружке они проходили **теорему Чевы**:

На сторонах BC , AC , AB треугольника ABC взяты точки A_1 , B_1 , C_1 . Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

Упражнения

2. Используя теорему Чевы, докажите, что симедианы треугольника пересекаются в одной точке.

3 ([3]). На сторонах BC , AC , AB треугольника ABC взяты точки A_1 , B_1 , C_1 , причем прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что прямые AA_2 , BB_2 , CC_2 симметричны этим прямым относительно соответствующих биссектрис, тоже пересекаются в одной точке.

Цепочку дальнейших размышлений Софьи прервало очередное сообщение от Макса.

– Смотри, – написал он, – вот еще одна задача из той же книги.

Задача 2. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки плоскости до сторон треугольника принимает наименьшее значение для такой точки внутри треугольника, для которой расстояния до соответствующих сторон пропорциональны этим сторонам. Докажите также, что эта точка является точкой пересечения симедиан данного треугольника (точка Лемуана).

В формулировке задачи тот факт, что симедианы пересекаются в одной точке, отходил на второй план. Оказалось, что точка пересечения симедиан обладает определенными экстремальными свойствами и называется точкой Лемуана, по-видимому, в честь геометра, который ее открыл, – отметила Софья.

– Привет, – написала она Макс, – я думаю, стоит попробовать подготовить доклад по симедианам. Мы уже нашли несколько интересных фактов. Попробуем взять известные задачи и теоремы, которые выполняются для медиан, биссектрис или высот треугольника, и проверим, верны ли аналогичные утверждения для симедиан. Поможешь мне?

– Хорошо, – откликнулся Макс.

III

– Нам известно, что если треугольник равнобедренный, то у него равны соответствующие медианы, биссектрисы и

высоты. Верны и обратные утверждения, а именно: если у треугольника две медианы (высоты, биссектрисы) равны, то он – равнобедренный. При этом случай равенства биссектрис оказался более сложным, чем случай равенства медиан или высот, и называется теоремой Штейнера–Лемуса. Итак, мы получаем несколько не слишком сложных упражнений для симедиан, – подытожила Софья.

Упражнения

4. Докажите, что треугольник является равнобедренным тогда и только тогда, когда две его симедианы равны.

5. Если $a \geq b \geq c$, то $g_a \leq g_b \leq g_c$.

– Знаешь, Софья, здесь есть небольшой простор для дальнейших размышлений. Для этого нам следует рассмотреть треугольники, образованные основаниями медиан, высот или биссектрис. Так, если треугольник является равнобедренным, то и треугольник, образованный основаниями медиан (высот, биссектрис), является равнобедренным. Но верны ли обратные утверждения? В любом случае появилось еще несколько фактов, которые необходимо проверить.

Упражнение 6. Докажите, что в равнобедренном треугольнике, образованный основаниями симедиан, также является равнобедренным.

– Давай попробуем порассуждать. Хорошо известно, что треугольник, образованный основаниями медиан, – это треугольник, состоящий из средних линий треугольника, и он подобен исходному треугольнику. Следовательно, утверждение о том, что если треугольник, образованный основаниями медиан, равнобедренный, то и исходный треугольник равнобедренный, верно. Я попробую доказать, что если треугольник, образованный основаниями высот, равнобедренный, то и исходный треугольник равнобедренный. А ты разберись с биссектрисами. Я тебе по биссектрисам статью из «Кванта» также направляла. А если разберемся, то тогда попробуем решить задачу для симедиан.

Задача 3. Про данный треугольник известно, что треугольник, образованный основаниями его симедиан, является равнобедренным. Будет ли верным утверждение, что и данный треугольник является равнобедренным?

Упражнение 7. Докажите, что если треугольник, образованный основаниями высот, равнобедренный, то и исходный треугольник равнобедренный.

– Знаешь, в случае с биссектрисами обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Другими словами, существуют разносторонние треугольники, такие, что треугольники, образованные основаниями их биссектрис, равнобедренные. Эту интересную задачу я нашел все в той же книге Шарыгина, и о ней он упоминает в своей статье о биссектрисах.

Кроме того, я провел небольшое исследование и разобрался, что происходит в случае симедиан.

Исследование задачи 3. Обозначим через a , b , c длины сторон треугольника, а через α , β , γ соответствующие углы

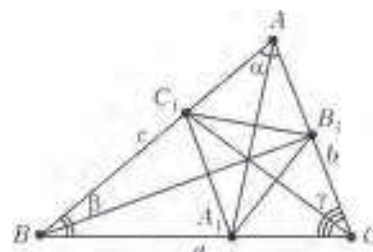


Рис. 4

(рис.4). Как и ранее, используем задачу 1 и найдем длины следующих отрезков:

$$BA_1 = \frac{ac^2}{b^2 + c^2}, \quad CA_1 = \frac{ab^2}{b^2 + c^2},$$

$$BC_1 = \frac{a^2c}{a^2 + b^2}, \quad CB_1 = \frac{a^2b}{a^2 + c^2}.$$

Из теоремы косинусов для исходного треугольника ABC имеем $2ac \cos \beta = a^2 + c^2 - b^2$ и $2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 - c^2$. Применим теорему косинусов к треугольникам A_1BC_1 и A_1B_1C , учитывая, что $A_1C_1 = A_1B_1$:

$$\left(\frac{ac^2}{b^2 + c^2}\right)^2 + \left(\frac{ca^2}{a^2 + b^2}\right)^2 - \frac{2a^3c^3 \cos \beta}{(b^2 + c^2)(a^2 + b^2)} =$$

$$= \left(\frac{ab^2}{b^2 + c^2}\right)^2 + \left(\frac{ba^2}{a^2 + c^2}\right)^2 - \frac{2a^3b^3 \cos \gamma}{(b^2 + c^2)(a^2 + c^2)}.$$

Сделаем подстановку и разделим обе части равенства на a^2 :

$$\frac{c^4}{(b^2 + c^2)^2} + \frac{c^2a^2}{(a^2 + b^2)^2} - \frac{c^2(a^2 + c^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)} =$$

$$= \frac{b^4}{(b^2 + c^2)^2} + \frac{b^2a^2}{(a^2 + c^2)^2} - \frac{b^2(a^2 + b^2 - c^2)}{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)}.$$

На мгновение Макс задумался о возможности вывода последнего равенства через теорему Стюарта. Быстрая проверка этой идеи на черновике показала, что при непосредственном применении теоремы Стюарта к треугольникам ABA_1 и ACA_1 придется работать с соотношениями большей степени. Он вернулся к первоначальной идее и продолжил.

Обозначим $x = \frac{c^2}{a^2}, y = \frac{b^2}{a^2}$. Имеем

$$\frac{x^2}{(x+y)^2} + \frac{x}{(1+y)^2} - \frac{x(1+x-y)}{(1+y)(x+y)} - \frac{y^2}{(x+y)^2} -$$

$$- \frac{y}{(1+x)^2} + \frac{y(1+y-x)}{(1+x)(x+y)} = 0.$$

Приведем дроби к общему знаменателю и разложим получившийся числитель на множители:

$$\frac{xy(y-x)(x^2 + y^2 - xy - x - y - 3)}{(1+x)(1+y)(x+y)} = 0.$$

Если $x = y$, то тогда $b = c$, и треугольник ABC равнобедренный.

Если выполнено соотношение

$$x^2 + y^2 - xy - x - y - 3 = 0, \quad (2)$$

то при $x \neq y$ мы сможем построить контрпример.

Отметим, что этому соотношению отвечает соотношение, связывающее длины сторон треугольника:

$$c^4 + b^4 - c^2b^2 - a^2c^2 - a^2b^2 - 3a^4 = 0.$$

Перепишем равенство (2) в виде

$$x^2 - x(1+y) + y^2 - y - 3 = 0.$$

Решим это квадратное уравнение относительно x , считая y параметром. Оно имеет решение, когда дискриминант не-

трицателен, т.е.

$$D = (1+y)^2 - 4(y^2 - y - 3) = -3y^2 + 6y + 13 \geq 0,$$

следовательно, $0 < y \leq \frac{3+4\sqrt{3}}{3}$. При этом для каждого y мы можем получить два решения:

$$x = \frac{1+y \pm \sqrt{-3y^2 + 6y + 13}}{2}.$$

В то же время мы должны потребовать, чтобы выполнялись неравенства треугольника, т.е.

$$\begin{cases} a < b + c, \\ b < a + c, \\ c < a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < \sqrt{y} + \sqrt{x}, \\ \sqrt{y} < 1 + \sqrt{x}, \\ \sqrt{x} < 1 + \sqrt{y}. \end{cases}$$

Разберем каждый случай по отдельности, опуская технические подробности решения системы неравенств:

1) если $x = \frac{1+y + \sqrt{-3y^2 + 6y + 13}}{2}$, то найдем, что

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 < y \leq \frac{3+4\sqrt{3}}{3};$$

2) если $x = \frac{1+y - \sqrt{-3y^2 + 6y + 13}}{2}$, то в этом случае

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 < y \leq \frac{3+4\sqrt{3}}{3}.$$

Мы можем рассматривать треугольники с точностью до подобия, поэтому, не потеряв общности, можно взять $a = 1$.

Подытожим полученные результаты:

если $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 < y < \frac{3+4\sqrt{3}}{3}$, то оба решения подходят, и мы получаем два семейства треугольников со сторонами

$$a = 1, \quad b = \sqrt{y}, \quad c = \sqrt{1+y \pm \sqrt{-3y^2 + 6y + 13}};$$

если $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 < y \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$, то подходит одно решение, и мы получаем семейство треугольников со сторонами

$$a = 1, \quad b = \sqrt{y}, \quad c = \sqrt{1+y + \sqrt{-3y^2 + 6y + 13}};$$

если дискриминант $D = 0$, то $y = \frac{3+4\sqrt{3}}{3}$, и мы получаем

треугольник со сторонами

$$a = 1, \quad b = \sqrt{\frac{3+4\sqrt{3}}{3}}, \quad c = \sqrt{\frac{3+2\sqrt{3}}{3}},$$

который также годится в качестве контрпримера. (Этот треугольник не равнобедренный, а треугольник, образованный основаниями его симедиан, – равнобедренный.)

Вообще говоря, случай $y = 1$ не годится для контрпримера, поскольку тогда $a = b = 1, c = \sqrt{3}$ и мы имеем равнобедренный треугольник. Но этот случай интересен тем, что, хотя исходный треугольник не является равносторонним, треугольник, образованный основаниями его симедиан, является равносторонним!

– Слушай, Макс, сплошная алгебра! Как ты это делаешь!? Я вот по твоему совету перечитала статью Шарыгина «Вокруг биссектрисы». И обратила внимание на один абзац,

цитирую: «... пусть A_1, B_1, C_1 – основания биссектрис треугольника ABC . Если $A_1B_1 = A_1C_1$, а треугольник ABC – не равнобедренный, то его угол A тупой и $\cos \angle A$ лежит в интервале $\left(-\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{17}-5}{4}\right)$... К сожалению, автор не сумел построить конкретный пример треугольника (т.е. точно указать величины всех его углов или длины сторон) со столь экзотическим свойством. Может быть, это удастся читателям журнала?» К слову сказать, такой пример имеется, вот посмотри на эту задачу.

Упражнение 8 (М2001, С.Токарев). Дан треугольник ABC , в котором проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1 . Известно, что величины углов A, B и C относятся как $4 : 2 : 1$. Докажите, что $A_1B_1 = A_1C_1$.

– Знаешь, я смогу привести другой пример конкретного треугольника, т.е. конкретный пример треугольника для случая биссектрис. Я ограничусь длинами трех его сторон. Смотри! Можно даже не менять рисунок.

По свойствам биссектрис мы имеем

$$BA_1 = \frac{ac}{b+c}, CA_1 = \frac{ab}{b+c}, BC_1 = \frac{ac}{a+b}, CB_1 = \frac{ab}{a+c}.$$

Прделаем аналогичные выкладки. А именно, применим теорему косинусов для исходного треугольника ABC , а также для треугольников A_1BC_1 и A_1B_1C . Учтем, что $A_1C_1 = A_1B_1$. После приведения дробей к общему знаменателю и разложения числителя на множители, будем иметь

$$abc(b-c)(b+c) \times \frac{(b^3 + c^3 - a^3 + b^2c + b^2a + c^2b + c^2a - a^2b - a^2c + abc)}{(a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2} = 0.$$

Обозначим $x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{a}$. Чтобы исходный треугольник не был равнобедренным, а треугольник, образованный основаниями биссектрис, был равнобедренным, должно выполняться соотношение

$$x^3 + x^2(y+1) + x(y^2 + y - 1) + y^3 + y^2 - y - 1 = 0.$$

Посмотрим на это соотношение как на кубическое уравнение относительно x , считая y параметром. Чтобы ответить на вопрос, нам достаточно отыскать хотя бы одно решение этого уравнения.

Умножим уравнение на 27 и сделаем подстановку $x = t - \frac{y+1}{3}$, получим приведенное кубическое уравнение

$$27t^3 + t(18y^2 + 9y - 36) + 20y^3 + 15y^2 - 21y - 16 = 0.$$

Нам подойдет значение $y = \frac{1}{2}$, в этом случае $t^3 - t - \frac{3}{4} = 0$. Остается воспользоваться формулами Кардано для решения кубического уравнения. Получаем

$$t = \sqrt[3]{\frac{3}{8} + \sqrt{-\frac{1}{27} + \frac{9}{64}}} + \sqrt[3]{\frac{3}{8} - \sqrt{-\frac{1}{27} + \frac{9}{64}}},$$

и

$$x = -\frac{1}{2} + \sqrt[3]{\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{179}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{3}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{179}{27}}} \approx 0,763.$$

Итак, в неравнобедренном треугольнике с длинами сторон

$$a = 2, b = -1 + \sqrt[3]{3 + \sqrt{\frac{179}{27}}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{\frac{179}{27}}}, c = 1$$

треугольник, образованный основаниями биссектрис, равнобедренный. Конечно, длина одной стороны по сравнению с двумя другими выглядит устрашающе, но это конкретные числа, так что требуемый пример я построил. Более того, я могу построить таких примеров сколько угодно. Для этого достаточно лишь немного изменить y так, чтобы числа $1, y$ и x удовлетворяли неравенствам треугольника (x – корень соответствующего кубического уравнения).

– Респект! Глядя на твои выкладки, я вижу, что примеры для симедиан получились проще, потому что приходилось решать квадратные уравнения. Несмотря на то, что соотношение, связывающее длины сторон треугольника, было четвертой степени, оно биквадратное. В то же время, в случае с биссектрисами мы не смогли уйти от кубических уравнений.

Давай подведем промежуточный итог по исследованиям треугольников, образованных основаниями чевиан. Из твоих выкладок по построению контрпримеров мы видим, что в этой задаче симедианы ближе к биссектрисам, чем к высотам и медианам. Но они отличаются и от биссектрис. Ты привел пример неравнобедренного треугольника, у которого треугольник, образованный основаниями симедиан, является равнобедренным. В случае с биссектрисами такой пример построить нельзя. Думаю, с твоей алгебраической техникой ты без труда докажешь этот факт. И все же я надеюсь, что тебе будет интересно изучить и геометрическое решение такой задачи.

Упражнение 9 (М1862, А. Заславский, В. Сендеров). Биссектрисы AD, BE и CF треугольника ABC пересекаются в точке I . Докажите, что: а) если $ID = IF = IE$, то треугольник ABC правильный; б) если треугольник DFE правильный, то и треугольник ABC правильный.

Пожалуй, на сегодня достаточно, а завтра попытаемся узнать, однозначно ли определяется треугольник своими симедианами.

IV

Есть тема – есть теорема! – срифмовал Макс. Простота формулировки теоремы подкупала.

Теорема 2. Если три симедианы одного треугольника равны трем симедианам другого треугольника, то эти треугольники равны.

Попытки Макса найти геометрическое доказательство постоянно наткнулись на какие-то препятствия. Чертеж был слишком перегружен пересекающимися тройками прямых. Дополнительные окружности тоже не помогали. Он решил сделать небольшую паузу и немного развеяться, поплавав в бассейне.

После получасового плавания в памяти «всплыл» учитель математики и его пространное высказывание: «... Геометрия Платона породила множество вопросов, на которые у геометров (их современников) не было ответов. Дело в том, что геометрия ограничена в обобщениях. Это, так сказать, некоторый эксклюзив. На помощь приходит алгебра с ее практически неограниченным и очень мощным потенциалом, и ситуация меняется к лучшему. Алгебраические методы кажутся менее изящными или быстрыми. Но это только кажущийся недостаток, который с лихвой перекрывается преимуществами...»

Макс еще раз пересмотрел имеющиеся материалы и подумал: одной алгебры маловато, придется еще привлечь анализ. А геометрическое доказательство... что ж, возможно, когда-нибудь...

Доказательство. Мы знаем, что симедианы и стороны треугольника связаны соотношениями

$$\begin{aligned} g_a^2 &= \frac{b^2c^2(2b^2 + 2c^2 - a^2)}{(b^2 + c^2)^2}, \\ g_b^2 &= \frac{a^2c^2(2a^2 + 2c^2 - b^2)}{(a^2 + c^2)^2}, \\ g_c^2 &= \frac{a^2b^2(2a^2 + 2b^2 - c^2)}{(a^2 + b^2)^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Введем вспомогательные переменные u, v, w, z, t , полагая $z = a^2 + b^2 + c^2, u = \frac{a^2}{z}, v = \frac{b^2}{z}, w = \frac{c^2}{z}, t = zuvw$.

Тогда равенства (3) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{g_a^2 u(1-u)^2}{2-3u} = zuvw = t, \quad \frac{g_b^2 v(1-v)^2}{2-3v} = t, \quad \frac{g_c^2 w(1-w)^2}{2-3w} = t. \quad (4)$$

Рассмотрим функцию $y = \varphi(x) = \frac{x(1-x)^2}{2-3x}$ на полуинтервале $x \in \left[0; \frac{2}{3}\right)$. Докажем, что на этом полуинтервале $\varphi(x)$ является непрерывной и монотонно возрастающей функцией.

Действительно, разделим числитель на знаменатель дроби и, используя алгоритм Евклида, получим

$$\frac{x(1-x)^2}{2-3x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3 - 2x^2 + x}{2/3 - x} = \frac{1}{3} \cdot \left(-x^2 + \frac{4x}{3} - \frac{1}{9}\right) + \frac{2}{27(2-3x)}.$$

На полуинтервале $x \in \left[0; \frac{2}{3}\right)$ и квадратный трехчлен $\frac{1}{3} \cdot \left(-x^2 + \frac{4x}{3} - \frac{1}{9}\right)$, и гипербола $\frac{2}{27(2-3x)}$ являются непрерывными и монотонно возрастающими функциями. Следовательно,

$y = \varphi(x) = \frac{x(1-x)^2}{2-3x}$ на полуинтервале $x \in \left[0; \frac{2}{3}\right)$ является непрерывной и монотонно возрастающей функцией как сумма двух непрерывных монотонно возрастающих функций.

В принципе, – подумал Макс, – этот факт можно доказать по-другому. Нужно продифференцировать нашу функцию. Поскольку производная функция

$$y' = \varphi'(x) = \frac{2(1-x)(1-3x+3x^2)}{(2-3x)^2}$$

на полуинтервале $x \in \left[0; \frac{2}{3}\right)$ положительна, то на этом полуинтервале $\varphi(x)$ является непрерывной монотонно возрастающей функцией. Кроме того, очевидно, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \frac{2}{3}$.

Рассмотрим функцию f , обратную к функции φ . На полуинтервале $t \in [0; +\infty)$ функция f также будет непрерывной и монотонно возрастающей и $f(t) \rightarrow \frac{2}{3}$ при $t \rightarrow +\infty$. Теперь определим функцию $F(t)$, положив

$$F(t) = f\left(\frac{t}{g_a^2}\right) + f\left(\frac{t}{g_b^2}\right) + f\left(\frac{t}{g_c^2}\right).$$

Функция $F(t)$ на полуинтервале $t \in [0; +\infty)$ является непре-

рывной и монотонно возрастающей как сумма трех непрерывных и монотонно возрастающих функций.

Равенства (4) можно переписать в следующем виде:

$$u = f\left(\frac{t}{g_a^2}\right), \quad v = f\left(\frac{t}{g_b^2}\right), \quad w = f\left(\frac{t}{g_c^2}\right).$$

Поскольку

$$\begin{aligned} f\left(\frac{t}{g_a^2}\right) + f\left(\frac{t}{g_b^2}\right) + f\left(\frac{t}{g_c^2}\right) &= u + v + w = \\ &= \frac{a^2}{z} + \frac{b^2}{z} + \frac{c^2}{z} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{z} = 1, \end{aligned}$$

то получаем уравнение

$$F(t) = 1.$$

Как мы уже отметили, в левой части уравнения стоит непрерывная монотонно возрастающая функция на интервале $t \in [0; +\infty)$. При этом $F(0) = 0$ и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(f\left(\frac{t}{g_a^2}\right) + f\left(\frac{t}{g_b^2}\right) + f\left(\frac{t}{g_c^2}\right) \right) = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2.$$

Применим теорему о промежуточном значении. Получаем, что решение уравнения $F(t) = 1$ существует и оно единственно. Пусть $t = t_0$ – искомое решение, т.е. $F(t_0) = 1$. Зная $t = t_0$, находим

$$u_0 = f\left(\frac{t_0}{g_a^2}\right), \quad v_0 = f\left(\frac{t_0}{g_b^2}\right), \quad w_0 = f\left(\frac{t_0}{g_c^2}\right)$$

и вычисляем $z_0 = \frac{t_0}{u_0 v_0 w_0}$. В итоге определяем $a = \sqrt{z_0 u_0}$,

$b = \sqrt{z_0 v_0}$, $c = \sqrt{z_0 w_0}$. Таким образом, по длинам симедиан стороны треугольника определяются однозначно. Отсюда мы можем сделать вывод, что если три симедианы одного треугольника соответственно равны трем симедианам другого треугольника, то эти треугольники имеют равные стороны. Следовательно, по третьему признаку равенства треугольников эти треугольники равны.

Теорема доказана.

В доказательстве мы использовали тот факт, что обратная функция на заданном полуинтервале существует, хотя и не указали ее явно.

– Послушай, Макс, мы можем явно найти обратную функцию, хотя ее выражение будет достаточно громоздким.

Действительно, поскольку $y = \frac{x(1-x)^2}{2-3x}$, то $x^3 - 2x^2 + (3y + 1)x - 2y = 0$. Остается использовать формулы Кардано для решения кубических уравнений.

Упражнение 10. Найдите явный вид функции f .

Макс подумал, что найденное им доказательство выглядит несколько искусственно, поскольку изначально имелось три переменных – это длины сторон треугольника. Однако с помощью удачных замен удалось прийти к рассмотрению функции от одной переменной, где математический анализ развернулся и доказал эффективность своих методов.

V

Софья попыталась разобраться в вопросе построения треугольника по его симедианам. В школе и на факультативе они с помощью циркуля и линейки строили треугольник по заданным медианам или высотам. В то же время из «Кванта» она узнала, что аналогичная задача для биссектрис в общем случае неразрешима. Этот факт доказал в 1896 году П.Бар-

барин. Скорее всего, симедианы будут такими же «капризными», как и биссектрисы, предположила Софья. Она захотела разобраться с этим вопросом подробнее и принялась внимательно читать в «Энциклопедии элементарной математики» главу о разрешимости задач на построение с помощью циркуля и линейки.

Некоторые моменты доказательства, в частности теорию расширений полей¹, ей пришлось просто пролистать. Однако из раздела «Классические задачи» она поняла, что доказательства неразрешимости задач об удвоении куба, о трисекции угла и о невозможности построения треугольника по его биссектрисам имеют общую похожую часть.

Одной из идей было сопоставление каждой задаче некоторого многочлена третьей степени или кубического уравнения. Затем – доказательство отсутствия у этого кубического уравнения рациональных корней. При этом на серьезном математическом языке соответствующий многочлен назывался неприводимым многочленом над полем рациональных чисел.

В задаче об удвоении куба возникало уравнение $x^3 - 2 = 0$. При трисекции угла выбирался угол $\frac{\pi}{3}$ и в этом случае появлялось уравнение $8x^3 - 6x - 1 = 0$. В задаче построения треугольника с длинами биссектрис 1, 1, 3 получалось уравнение $4x^3 - 12x^2 - 3x + 6 = 0$. Элементарными методами можно было доказать, что указанные уравнения не имеют решений в рациональных числах, таким образом, соответствующие многочлены являются неприводимыми многочленами над \mathbb{Q} .

Что ж, эту часть доказательства я вполне могу проверить для симедиан, – подумала Софья.

Теорема 3. *Задача построения треугольника по заданным отрезкам его симедиан неразрешима с помощью циркуля и линейки.*

Доказательство. Ограничимся рассуждениями для частных значений длин симедиан. Пусть длины двух симедиан равны 1, а длина третьей равна некоторому рациональному числу l . Из упражнения 4 следует, что исходный треугольник является равнобедренным. Имеем (рис.5)

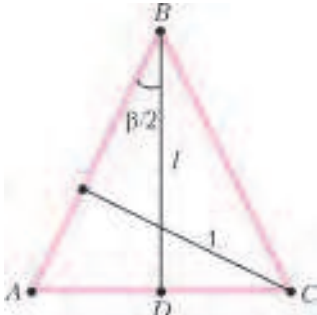


Рис. 5

$$AB = BC = a = c = \frac{l}{\cos \frac{\beta}{2}} \text{ и}$$

$$AC = 2AD = b = 2l \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}.$$

Если бы мы могли построить циркулем и линейкой наш равнобедренный треугольник, то мы также смогли бы построить отрезок длины $\cos \beta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\beta}{2}$. Обозначим $x = \cos \beta$, $y = \sin \frac{\beta}{2}$, тогда $x = 1 - 2y^2$,

$$a^2 = c^2 = \frac{l^2}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} = \frac{l^2}{1 - y^2} \text{ и } b^2 = 4l^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} = 4l^2 \frac{y^2}{1 - y^2}.$$

Докажем, что число $x = \cos \beta$ является корнем кубического многочлена и что при некоторых значениях l этот многочлен неприводим, т.е. не имеет рациональных корней. Таким образом, из теоремы Гаусса и некоторых других теорем из

теории расширений полей будет следовать, что задача на построение треугольника по отрезкам его симедиан неразрешима.

Применим формулы (3):

$$1 = \frac{b^2 a^2 (2b^2 + a^2)}{(b^2 + a^2)^2} = 4l^2 \frac{\frac{y^2}{1-y^2} \cdot \frac{1}{1-y^2} \cdot \left(\frac{8y^2}{1-y^2} + \frac{1}{1-y^2} \right)}{\left(\frac{4y^2}{1-y^2} + \frac{1}{1-y^2} \right)^2}.$$

Отсюда $(1 - y^2)(1 + 4y^2)^2 = 4l^2 y^2 (1 + 8y^2)$, или

$$\left(1 - \frac{1-x}{2}\right)(1 + 2(1-x))^2 = 2l^2(1-x)(1 + 4(1-x)).$$

Тогда мы получаем кубическое уравнение

$$4x^3 - (16l^2 + 8)x^2 + (36l^2 - 3)x + 9 - 20l^2 = 0.$$

Удобно взять $l = 2$. В этом случае мы имеем следующее кубическое уравнение:

$$4x^3 - 72x^2 + 141x - 71 = 0.$$

Докажем, что у него нет рациональных решений. Можно попытаться воспользоваться формулами Кардано, но мы проведем доказательство элементарными методами. Пусть корнем уравнения будет рациональное число $x = \frac{p}{q}$, где p, q – целые взаимно простые числа, $q > 0$. Тогда

$$4p^3 = q(72p^2 - 141pq + 71q^2). \quad (5)$$

Поскольку p, q – взаимно простые числа, то для q имеются три возможности: $q = 1$, $q = 2$ или $q = 4$. Перепишем уравнение немного по-другому:

$$p(4p^2 - 72pq + 141q^2) = 71q^3.$$

Аналогично рассуждая, находим, что для p имеется лишь четыре возможности: $p = \pm 1$ либо $p = \pm 71$. Непосредственная проверка этих 12 вариантов показывает, что уравнение (5) не имеет решений в целых числах.

Итак, мы доказали, что кубический многочлен $4x^3 - 72x^2 + 141x - 71$ неприводим над полем рациональных чисел. Следовательно, с помощью циркуля и линейки мы не сможем построить треугольник, длины симедиан которого равны числам 1, 1, 2.

Теорема доказана.

Упражнение 11. Положите в рассуждениях: а) $l = 3$; б) $l = \frac{1}{2}$.

Найдите соответствующие кубические многочлены. Будут ли эти многочлены неприводимыми над полем рациональных чисел? Можно ли утверждать, что с помощью циркуля и линейки мы не сможем построить треугольник, длины симедиан которого равны числам 1, 1, 3? А треугольник с длинами симедиан 1, 1, $\frac{1}{2}$?

VI

Идеи доказательства Софьи были понятны Максиму. Но ему бросилось в глаза, что во всем их исследовании они не озаботились доказательством существования. Так, до настоящего момента он не вполне понимал, существует ли треугольник, длины симедиан которого равны числам 1, 1, $\frac{1}{2}$ или, например, числам 1, 1, 3. Конечно, в этих конкретных примерах можно попытаться вычислить длины сторон по найденным ранее формулам. Но как быть в общем случае? Возник серьезный вопрос.

¹ Обсуждение этой теории выходит за рамки статьи.

Вопрос. Каким условиям должна удовлетворять тройка положительных чисел (x, y, z) , чтобы существовал треугольник с медианами, длины, которых равны x, y, z ?

Макс знал, что если взять некоторую произвольную тройку положительных чисел, то из имеющихся отрезков соответствующих длин составить треугольник не всегда удастся. Чтобы получился треугольник, эти числа должны удовлетворять неравенствам треугольника. Аналогично в случае с медианами. Если выбрать тройку положительных чисел (x, y, z) , то треугольник с длинами медиан x, y, z существует только тогда, когда числа x, y, z удовлетворяют неравенствам треугольника.

Упражнение 12. Докажите это.

Максу также были известны необходимые ограничения для случая высот.

Упражнение 13. Чтобы существовал треугольник, длины высот которого равны x, y, z , должны выполняться неравенства $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, $\frac{1}{y} < \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$ и $\frac{1}{z} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. Докажите это.

Другими словами, неравенства треугольника должны выполняться для величин, обратных высотам.

В случае с биссектрисами доказано, что подходит любая тройка положительных чисел.

Максу не хватало наглядной интерпретации этих фактов, и ему захотелось построить понятную графическую модель. Ему показалось, что проще всего построить объемную модель. Так, каждой тройке чисел x, y, z естественным образом можно сопоставить точку в пространстве с координатами (x, y, z) . Поскольку $x > 0, y > 0, z > 0$, то рассматриваемые нами тройки находятся в первом октанте и образуют некоторое подмножество первого октанта. Границей этого множества будет некоторая поверхность.

Изображение и представление объемных фигур бывает сопряжено с определенными трудностями, и иногда понятность такой модели зависит от пространственного воображения конкретного человека. Другое дело плоскость, — подумал Макс. Наверняка можно попробовать построить плоскую модель.

А что если рассматривать треугольники с точностью до подобия? Теперь мы можем упорядочить тройки, считая, что $x \leq y \leq z$, и выбрать нужный нам масштаб, положив $z = 1$. Благодаря таким рассуждениям каждой допустимой тройке будет соответствовать точка на координатной плоскости. А множеству всех допустимых троек будет соответствовать некоторая плоская область. Для большей наглядности в наших примерах мы должны попытаться найти уравнения прямых и кривых, ограничивающих эту область.

Рассмотрим простой пример применения этой модели, когда заданы длины сторон треугольника. Мы считаем, что большая сторона треугольника равна 1. Тогда для двух оставшихся сторон выполняются наложенные нами ограничения $0 < x \leq y \leq 1$ и неравенства треугольника $x + y > 1, x < y + 1, y < x + 1$. При этом два последних неравенства треугольника выполнены автоматически в силу наложенных ограничений $0 < x \leq y \leq 1$. Соответствующее множество на координатной плоскости изображено на рисунке

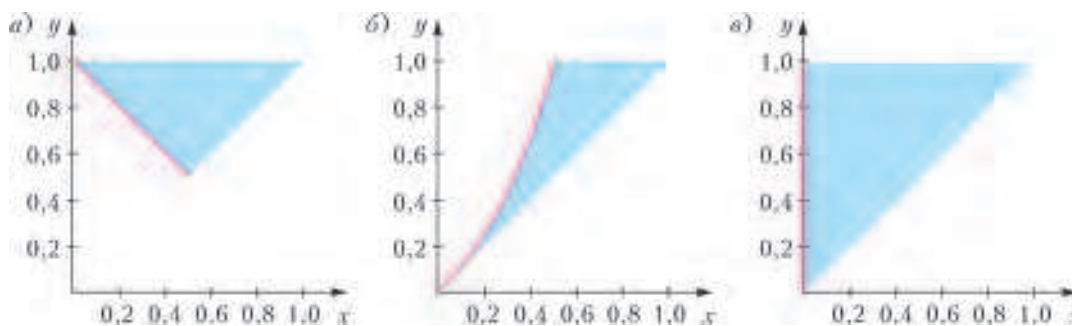


Рис. 6

6,а. Границей этого множества являются отрезки прямых $y = x, y = 1$ и $y + x = 1$. На каждом из рисунков 6,а, 6,б, 6,в красным цветом изображена часть границы, точки которой не входят в данное множество. В данном случае это точки отрезка прямой $y + x = 1$.

Мы уже обсуждали, что это множество совпадает с множеством для модели, когда заданы длины медиан треугольника. Считая, что большая из медиан треугольника равна 1, мы получим те же неравенства и тот же рисунок 6,а.

Для случая высот мы считаем, что наибольшая из высот равна 1. Тогда выполняются неравенства $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} + 1, \frac{1}{y} < \frac{1}{x} + 1, 1 < \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, и с учетом $0 < x \leq y \leq 1$ получаем множество, изображенное на рисунке 6,б. Таким образом, границей нашего множества являются отрезки прямых $y = x$ и $y = 1$ и часть гиперболы $y = \frac{x}{1-x}$, которая на рисунке изображена красным цветом.

Для случая биссектрис мы считаем, что наибольшая из биссектрис равна 1, но новых ограничений, кроме $0 < x \leq y \leq 1$, мы не получим. Соответствующее множество изображено на рисунке 6,в. Его границей являются отрезки прямых $y = x, y = 1$ и красный отрезок прямой $x = 0$.

Макс исписал не одну страницу черновика, прежде чем понял, что случай симедиан потребует от него дополнительной изобретательности. Проблема заключалась в том, что он не мог получить явное уравнение одной из частей границы, сколько ни пытался. Вдруг его осенила внезапная догадка: он сможет задать эту кривую, параметризовав переменные x и y .

Он принялся за разработку этой идеи и начал действовать постепенно.

В качестве первоначальных параметров можно рассмотреть три параметра a, b, c , которым соответствуют длины сторон треугольника. Используем формулы (3) для длин симедиан, считая, что

$$x = g_a = \frac{bc\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{b^2 + c^2}, \quad y = g_b = \frac{ac\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{a^2 + c^2},$$

$$1 = g_c = \frac{ab\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}.$$

Поскольку в нашей модели $0 < x \leq y \leq 1$, то для исходных параметров согласно упражнению 5 должно выполняться условие $a \geq b \geq c$.

Кроме того, a, b, c удовлетворяют неравенствам треугольника, следовательно, можно ожидать, что на частях границы должны выполняться соответствующие равенства. (Это действительно так, хотя в этом месте необходимы дополнительные выкладки.) В частности, для нахождения уравнения части границы мы можем избавиться от одного из парамет-

ров, положив $a - b = c$. Тогда и имеем

$$\begin{cases} 1 = \frac{ab\sqrt{2a^2 + 2b^2 - (a-b)^2}}{a^2 + b^2} = \frac{ab(a+b)}{a^2 + b^2}, \\ x = \frac{b(a-b)\sqrt{2b^2 + 2(a-b)^2 - a^2}}{b^2 + (a-b)^2} = \frac{b(a-b)(2b-a)}{b^2 + (a-b)^2}, \\ y = \frac{a(a-b)\sqrt{2a^2 + 2(a-b)^2 - b^2}}{a^2 + (a-b)^2} = \frac{a(a-b)(2a-b)}{a^2 + (a-b)^2}. \end{cases} \quad (6)$$

Из первого соотношения получаем равенство $(b-1)a^2 + b^2a - b^2 = 0$, которое при $b \neq 1$ можно рассматривать как квадратное уравнение относительно a . (Если $b = 1$, то $a = 1$, тогда $c = 0$ и $x = y = 0$.) Найдем дискриминант этого уравнения: $D = b^4 + 4(b-1)b^2 = b^2(b^2 + 4b - 4) \geq 0$, откуда $b \geq 2\sqrt{2} - 2$. Возможные корни:

$$a_1 = \frac{-b^2 - b\sqrt{b^2 + 4b - 4}}{2(b-1)} \quad \text{и} \quad a_2 = \frac{-b^2 + b\sqrt{b^2 + 4b - 4}}{2(b-1)}.$$

Если $b > 1$, то положительным является только один корень

и, следовательно, $a = \frac{-b^2 + b\sqrt{b^2 + 4b - 4}}{2(b-1)}$. Поскольку $a \geq b$, то $\frac{-b^2 + b\sqrt{b^2 + 4b - 4}}{2(b-1)} \geq b$, тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{b^2 + 4b - 4} &\geq 3b - 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow b^2 + 4b - 4 \geq 9b^2 - 12b + 4 \Rightarrow 0 \geq b^2 - 2b + 1. \end{aligned}$$

Приходим к противоречию.

Итак, $b < 1$. Если $a = \frac{-b^2 - b\sqrt{b^2 + 4b - 4}}{2(b-1)}$, то, поскольку $2b \geq b + c \geq a$, должно выполняться неравенство $2b \geq \frac{b^2 + b\sqrt{b^2 + 4b - 4}}{2(1-b)}$, тогда $4 - 5b \geq \sqrt{b^2 + 4b - 4} \geq 0$, следо-

вательно, $\frac{4}{5} \geq b \geq 2\sqrt{2} - 2$. Опять пришли к противоречию.

Значит, остается единственный случай $b < 1$, и тогда

$$a = \frac{-b^2 + b\sqrt{b^2 + 4b - 4}}{2(b-1)}.$$

Подставляем полученное значение в (6). Получаем параметризацию координат кривой от одного параметра $1 \geq b \geq 2\sqrt{2} - 2$. Остается все запрограммировать и получить требуемый рисунок 7.

В качестве примера тройки чисел, которые не могут быть симедианами одного треугольника, можно взять тройку $\left(\frac{13}{75}, \frac{13}{25}, 1\right)$. В этом случае имеем вырожденный треугольник со сторонами $a = \frac{39}{30}$, $b = \frac{26}{30}$, $c = \frac{13}{30}$. Понятно, что указанная тройка лежит на границе множества, т.е. на красной кривой.

Рассмотрим треугольник с длинами сторон $a = 3$, $b = 3$, $c = 1$. Длины его симедиан равны $\frac{\sqrt{99}}{10}$, $\frac{\sqrt{99}}{10}$, $\frac{\sqrt{35}}{2}$. Нетрудно проверить, что в этом случае для длин симедиан неравенство треугольника не выполняется. В построенной модели это-

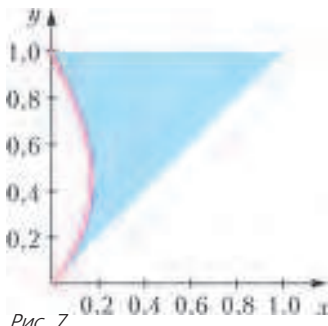


Рис. 7

му треугольнику будет соответствовать точка $(x, y) = \left(\frac{\sqrt{99}}{5\sqrt{35}}, \frac{\sqrt{99}}{5\sqrt{35}}\right)$.

Упражнение 14. Существует ли треугольник, длины симедиан которого равны: а) 1, 1, $\frac{1}{2}$; б) 1, 1, 2? Если существует, то найдите длины его сторон.

Сидя у бассейна, Макс размышлял, как он потратил эти несколько летних недель. Вначале он даже не знал определения симедиан. Но шаг за шагом, от задачи к задаче он стал воспринимать их так же цельно, как и другие геометрические объекты, известные ему со школы. Он думал, отдыхал и ждал.

— Знаешь, Макс, эти симедианы — как та дорога, а их определение оказалось порогом, который мы переступили. Идя по этой дороге, мы смогли определить, что есть общее у симедиан, медиан, высот и биссектрис и в чем их отличие. По этой дороге мы прошли хороший отрезок пути, но я думаю, что нам пора остановиться. Конечно, при желании мы могли бы найти еще много интересных вопросов, связанных с симедианами, но это будет уже другой доклад. Я хочу тебя поблагодарить, ведь без твоей помощи доклад не был бы готов так быстро.

— Не стоит благодарностей. И ты права, это интересное путешествие не забудется, но совсем скоро будем готовиться к новому!

— Макс, привет! Угадай, что я получила за доклад по симедианам? Если будешь делать доклад на эту тему, то, думаю, тебе пригодится подборка ключевых фактов нашего небольшого исследования. Так сказать, содержание доклада:

- формула длины симедианы;
- равнобедренность треугольника с двумя равными симедианами;
- исследование треугольника, образованного основаниями симедиан;
- равенство треугольников по трем симедианам;
- невозможность построения циркулем и линейкой треугольника по трем симедианам;
- существование треугольника с данными длинами симедиан.

А подробности? Подробности найдешь в нашей переписке — «Как я провел(а) лето!»

Литература

1. *И. Кушнир*. Метод изогональных прямых. — «Квант» №6 за 2010 г.
2. *И. Ф. Шарыгин*. Задачи по геометрии. Планиметрия. — М.: Наука, 1986. — Библиотечка «Квант». Вып.17. — Задачи 171, 369 и 203.
3. *В. В. Прасолов*. Задачи по планиметрии, ч. I. — М.: Наука, 1986. — Библиотечка математического кружка. Вып.15. — Задача 11.28.
4. *И. Ф. Шарыгин*. Вокруг биссектрисы. — «Квант» №8 за 1983 г.
5. *А. Жуков, И. Акулчи*. Однозначно ли определяется треугольник? — «Квант» №1 за 2003 г.
6. *P. Mironescu, L. Panaitopol*. The existence of a triangle with prescribed angle bisector lengths. — The American Mathematical Monthly, 1994, vol. 101, №1.
7. *Ю. И. Манин*. О разрешимости задач на построение с помощью циркуля и линейки // Энциклопедия элементарной математики, книга 4. — М.: Физматгиз, 1963.
8. *А. Акопян*. Геометрия в картинках. — М.: МЦНМО, 2011.
9. *Е. Ефремов*. Новая геометрия треугольника. — Одесса, 1902.

Шарики разлетаются не так!

А. КОНОВАЛОВ

ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ ПРЕДЛАГАЕТСЯ ЗАДАЧА, КОТОРАЯ вот уже более четверти века гуляет по задачникам, так и оставаясь неправильно решенной. Приведем две формулировки этой задачи, взятые из двух разных сборников.

1. Три одинаковых заряда q массой m соединены невесомыми, нерастяжимыми и непроводящими нитями длиной L . Одну из них пережигают. Определите максимальные скорости зарядов. (Задачи по физике. Под редакцией Савченко О.Я. – М.: Наука, 1981 и более поздние издания.)

2. На гладкой непроводящей горизонтальной поверхности лежат три одинаковых, одноименно заряженных шарика.

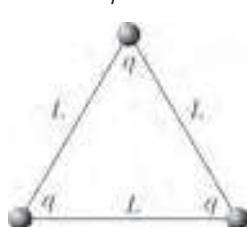


Рис. 1

Заряд каждого шарика $q = 10^{-6}$ Кл, масса $m = 2$ г. Шарики соединены невесомыми нерастяжимыми нитями длиной $L = 0,2$ м так, что нити образуют равносторонний треугольник (рис.1). Одну из нитей пережигают. Найдите максимальные скорости шариков. (Физика: 3800 задач для школьников и поступающих в вузы. Турчина Н.В., Рудакова Л.И., Суворов О.И., Спиринов Г.Г., Ющенко Т.А. – М.: Дрофа, 2000.)

Ответы в обоих задачниках приведены без решения:

$$v_{ц} = \sqrt{\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 m L}}, \quad v_{кр} = \sqrt{\frac{q^2}{24\pi\epsilon_0 m L}}.$$

Сначала рассмотрим возможное решение, приводящее к этим неправильным ответам.

После пережигания одной из нитей, например горизонтальной (рис.2), система стремится минимизировать свою

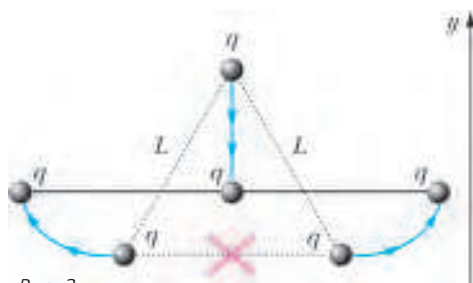


Рис. 2

энергию. Очевидно, что расстояния между центральным шариком и крайними шариками не изменяется (нити нерастяжимы), поэтому минимум потенциальной энергии, а значит, и максимум кинетической энергии достигаются в тот момент, когда все три шарика находятся на одной прямой. Следовательно, именно в этот момент шарики и достигают своих максимальных скоростей.

Так как внешние силы, действующие на нашу систему, в любой момент времени полностью скомпенсированы (силы тяжести уравновешены реакциями опоры со стороны стола), то для системы выполняются одновременно два закона сохранения: закон сохранения импульса и закон сохранения энергии. Закон сохранения импульса в проекции на ось y имеет вид (рис.3):

$$0 = 2mv_{кр} - mv_{ц}, \quad \text{или} \quad v_{ц} = 2v_{кр}.$$

В законе сохранения энергии учтем, что потенциальная

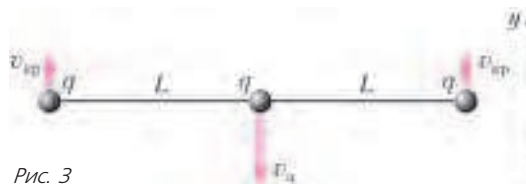


Рис. 3

энергия кулоновского взаимодействия центрального шарика с крайними шариками сохраняется, а следовательно, ее можно не учитывать:

$$\frac{kq^2}{L} = \frac{kq^2}{2L} + 2 \frac{mv_{кр}^2}{2} + \frac{mv_{ц}^2}{2}.$$

Отсюда получаем ответы, опубликованные во всех задачниках:

$$v_{кр} = \sqrt{\frac{1}{6} \sqrt{\frac{kq^2}{mL}}} = \sqrt{\frac{q^2}{24\pi\epsilon_0 mL}},$$

$$v_{ц} = 2\sqrt{\frac{kq^2}{6mL}} = \sqrt{\frac{2}{3} \sqrt{\frac{kq^2}{mL}}} = \sqrt{\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 mL}}.$$

Так где же ошибка? Ошибка заключается только лишь в утверждении, что максимальная скорость шариков достигается в тот момент, когда кинетическая энергия системы максимальна. Действительно, кинетическая энергия системы является результатом сложения кинетических энергий двух крайних шариков и кинетической энергии центрального шарика. А то, что сумма достигла максимума, не означает, что и ее слагаемые также достигли максимума:

$$\left(2 \frac{mv_{кр}^2}{2} + \frac{mv_{ц}^2}{2} \right) \rightarrow \text{Max} \not\Rightarrow \begin{cases} v_{кр} \rightarrow \text{Max}, \\ v_{ц} \rightarrow \text{Max}. \end{cases}$$

Теперь обсудим возможное решение, приводящее к правильным ответам.

Определим скорости шариков в произвольный момент в зависимости от угла между нитями. Заметим, что, исходя из симметрии системы, скорость центрального шарика всегда направлена по биссектрисе угла между нитями. Из закона сохранения импульса, записанного для нашей системы в проекции на ось y (рис. 4), вытекает, что проекции скоростей крайних шариков в любой момент времени равны по модулю половине скорости центрального шарика. Иными словами, концы всевозможных векторов скоростей крайнего шарика, непротиворечащих закону сохранения импульса, лежат на прямой, перпендикулярной оси y и отстоящей на

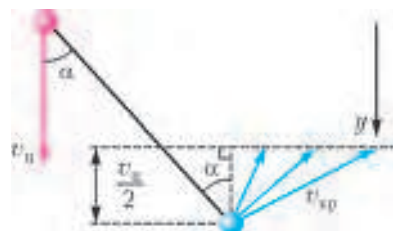


Рис. 4

расстояние $\frac{v_{ц}}{2}$ от крайнего шарика:

$$mv_{ц} + 2mv_{кpy} = 0, \quad v_{кpy} = -\frac{v_{ц}}{2}.$$

Из условия нерастяжимости нити следует, что проекции скоростей ее концов на направление вдоль нити обязаны быть одинаковыми. Иными словами, концы всевозможных векторов скоростей крайнего шарика, непротиворечащих условию нерастяжимости нити, лежат на прямой, перпендикулярной нити и отстоящей на расстояние $v_{ц} \cos \alpha$ от крайнего шарика (рис.5). При совмещении двух ограничений,

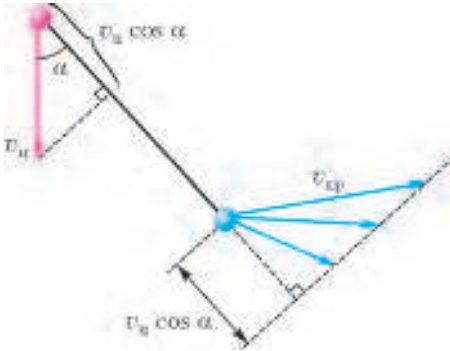


Рис. 5

накладываемых на вектор скорости крайнего шарика (закон сохранения импульса плюс условие нерастяжимости нити), получим, что скорость крайнего шарика, однозначно определяется скоростью центрального шарика и углом α . А именно, она является диаметром окружности, описанной вокруг треугольника ABC (рис.6) со сторонами $AC = \frac{v_{ц}}{2}$, $BC = v_{ц} \cos \alpha$ и углом при вершине C , равным $180^\circ - \alpha$.

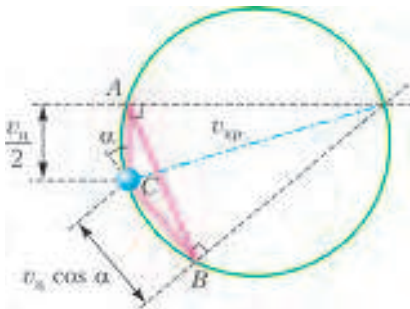


Рис. 6

Применив теорему косинусов для треугольника ABC , найдем сторону AB :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos(180^\circ - \alpha)} = \\ &= v_{ц} \sqrt{2 \cos^2 \alpha + \frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

А с помощью теоремы синусов для вписанного в окружность радиусом R треугольника ABC найдем скорость крайнего шарика:

$$v_{кpy} = 2R = \frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{v_{ц} \sqrt{2 \cos^2 \alpha + \frac{1}{4}}}{\sin(180^\circ - \alpha)} = v_{ц} \frac{\sqrt{2 \cos^2 \alpha + \frac{1}{4}}}{\sin \alpha}.$$

Запишем теперь закон сохранения энергии для системы, учитывая, что изменяется только расстояние между крайни-

ми шариками:

$$\frac{kq^2}{L} = \frac{kq^2}{2L \sin \alpha} + 2 \frac{mv_{кpy}^2}{2} + \frac{mv_{ц}^2}{2}.$$

Подставив сюда соотношение между скоростями, найдем скорости шариков в зависимости от угла 2α между нитями:

$$\begin{aligned} v_{ц} &= \sqrt{\frac{2(2 \sin \alpha - 1) \sin \alpha}{3(3 - 2 \sin^2 \alpha)}} \sqrt{\frac{kq^2}{mL}}, \\ v_{кpy} &= \sqrt{\frac{1(2 \sin \alpha - 1)(9 - 8 \sin^2 \alpha)}{6(3 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha}} \sqrt{\frac{kq^2}{mL}}, \end{aligned}$$

где $\alpha \in [30^\circ; 90^\circ]$.

Как же дальше решать эту задачу? Например, десятикласснику на олимпиаде? Взять производную по углу α ? Но не все десятиклассники умеют брать производные, да еще потом находить корни полинома четвертой степени. Остается только численно определить максимумы данных функций. Любая компьютерная программа по математическому анализу с легкостью эту задачу бы решила. Но под рукой у ученика из разрешенных электронных устройств есть только непрограммируемый калькулятор. Так вот, этого школьнику вполне достаточно!

Для примера возьмем калькулятор Casio fx-991ES и будем исследовать зависимость скорости крайнего шарика от угла α . Точнее, будем исследовать функцию

$$f(\alpha) = \sqrt{\frac{1(2 \sin \alpha - 1)(9 - 8 \sin^2 \alpha)}{6(3 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha}}.$$

Установим режим табличных вычислений. Введем исследуемую функцию. Зададим начальное (30°) и конечное (90°) значения аргумента, а также шаг его приращения (например, $2,5^\circ$). Заметим, что данная функция имеет максимум на интервале углов от 55° до 60° . Поменяем начальное и конечное значения аргумента, а также уменьшим шаг его приращения и вновь найдем интервал, на котором функция достигает своего максимума. И так очень быстро, приблизительно за 5 минут, найдем максимальное значение функции и значение аргумента, при котором это максимальное значение достигается:

$$f(\alpha)_{\max} = f(\alpha_m) = 0,5339077628 \pm 2 \cdot 10^{-10} \approx \sqrt{\frac{2}{7}}$$

(ошибка при округлении 0,1%),

$$\alpha_m = (56,433 \pm 0,001)^\circ \approx \arcsin \frac{5}{6}$$

(ошибка при округлении 0,02%).

Исследуем таким же образом аналогичную функцию от угла для скорости центрального шарика и убедимся, что эта функция имеет максимум в момент, когда все три шарика находятся на одной прямой. В итоге получаем правильные ответы на поставленную задачу:

$$v_{ц} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{kq^2}{mL}}, \quad v_{кpy} = \sqrt{\frac{2}{7}} \sqrt{\frac{kq^2}{mL}}.$$

На этом решение задачи, которое мог бы представить школьник на какой-нибудь олимпиаде, закончено. Однако для полноты понимания задачи хотелось бы еще обсудить, как ведут себя скорости шариков в процессе разлета.

Построим графики зависимостей скоростей шариков от половины угла между нитями, т.е. от угла α (рис.7).

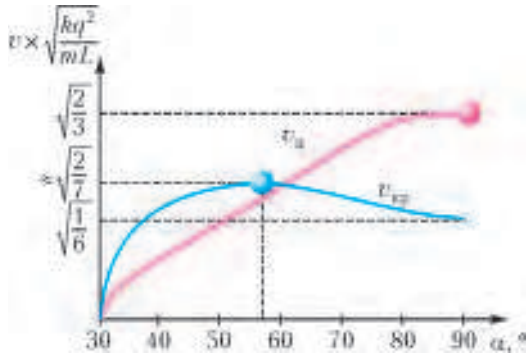


Рис. 7

Заметим, что в момент, когда нити образуют угол 120° ($\alpha = 60^\circ$), скорости всех шариков одинаковы, но скорости крайних шариков уже убывают. В момент, когда все три шарика находятся на одной прямой, центральный шарик имеет наибольшую скорость, а скорости крайних шариков, наоборот, достигают своего локального минимума, несмотря на то, что суммарная кинетическая энергия всей системы при этом максимальна.

А как эффект замедления шариков объясняется с точки зрения сил, действующих на крайние шарики? Ведь на

первый взгляд кажется, что результирующая сила должна всегда разгонять крайние шарики. Для разъяснения этого эффекта удобнее рассматривать не результирующую силу, а отдельно силу кулоновского взаимодействия двух крайних шариков

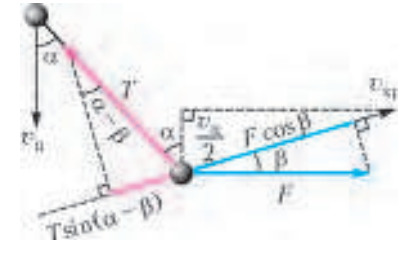


Рис. 8

\vec{F} и сумму сил натяжения нити и кулоновского отталкивания центрального и крайнего шариков, которую для краткости будем называть просто силой натяжения и обозначать \vec{T} , так как взаимодействие между центральным и крайним шариками для нашей задачи не принципиально. Из рисунка 8 видно, что мощность первой силы всегда не отрицательна: $\vec{F} \cdot \vec{v}_{кр} \geq 0$, а мощность второй силы всегда не положительна: $\vec{T} \cdot \vec{v}_{кр} \leq 0$. Пока суммарная мощность сил положительна, крайний шарик разгоняется, а при отрицательной суммарной мощности сил он замедляется.

Для расчета суммарной мощности сил, действующих на крайний шарик, воспользуемся электронной таблицей MS EXCEL по схеме, представленной в таблице 1. Приведем фрагменты таблицы для начальной и конечной строк и для

Таблица 1

№ столбца	Формула расчета значения в данном столбике i-й строчки	Размерность	Комментарий
1	$\alpha_i = \alpha_{i-1} + \Delta\alpha$	1	увеличим половину угла между нитями на $\Delta\alpha$
2	$v_i^c = \sqrt{\frac{2(2\sin\alpha - 1)\sin\alpha}{3(3 - 2\sin^2\alpha)}}$	$\times \sqrt{\frac{kq^2}{mL}}$	скорость центрального шарика (ц.ш.) в i-й момент времени
3	$v_i^{кр} = \sqrt{\frac{1(2\sin\alpha - 1)(9 - 8\sin^2\alpha)}{6(3 - 2\sin^2\alpha)\sin\alpha}}$	$\times \sqrt{\frac{kq^2}{mL}}$	скорость крайнего шарика (к.ш.) в i-й момент времени
4	$x_i = -\frac{2}{3}\cos\alpha$	$\times L$	координата ц.ш., движущегося в положительном направлении оси x (координата центра масс: $x = 0$)
5	$\Delta t_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{(v_i^c + v_{i-1}^c)/2}$	$\times \sqrt{\frac{mL^3}{kq^2}}$	найдем продолжительность i-го момента времени как отношение перемещения к средней скорости ц.ш.
6	$t_i = t_{i-1} + \Delta t_i$	$\times \sqrt{\frac{mL^3}{kq^2}}$	время, прошедшее с момента нерастяжения нити
7	$a_i = \frac{v_i^c - v_{i-1}^c}{\Delta t_i}$	$\times \frac{kq^2}{mL^2}$	ускорение ц.ш. в i-й промежуток времени
8	$T_i = \frac{\sigma_i}{2\cos\alpha_i}$	$\times \frac{kq^2}{L^2}$	сила натяжения, выраженная из второго закона Ньютона, записанного для ц.ш. в проекции на ось x
9	$\beta_i = \arcsin \frac{v_i^c/2}{v_i^{кр}}$	1	угол между скоростью $\vec{v}^{кр}$ и силой \vec{F} в i-й момент времени
10	$\vec{T}_i \cdot \vec{v}_i^{кр} = -T_i \sin(\alpha_i - \beta_i)$	$\times \sqrt{\frac{k^3 q^6}{mL^5}}$	мощность силы натяжения, приложенной к к.ш., в i-й момент времени
11	$F_i = \frac{1}{(2\sin\alpha_i)^2}$	$\times \frac{kq^2}{L^2}$	сила кулоновского взаимодействия двух крайних шариков
12	$\vec{F}_i \cdot \vec{v}_i^{кр} = +F_i \cos\beta_i$	$\times \sqrt{\frac{k^3 q^6}{mL^5}}$	мощность силы Кулона, приложенной к к.ш., в i-й момент времени

Таблица 2

1	alfa	ycent	vkray	x	dt	t	a	T	beta	T*v	F	F*v
2	30,001	0,002	0,005	-0,58	2,4E-03	0,00	0,35	0,20	10,89	0,065	1,00	0,982
26434	56,433	0,479	0,534	-0,37	2,0E-05	1,00	0,72	0,65	26,67	0,322	0,36	0,322
68001	90	0,816	0,408	0,00	1,4E-03	1,55	0,00	1,76	90,00	0,000	0,25	0,000

строки с максимальной скоростью центрального шарика (табл.2).

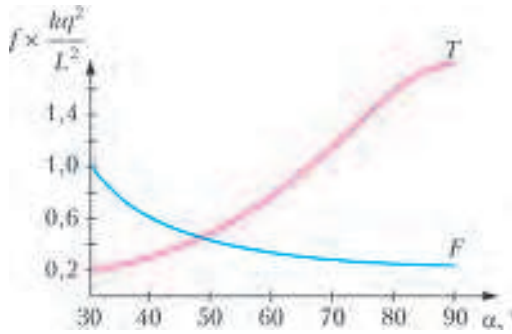


Рис. 9

Графики зависимости силы кулоновского взаимодействия крайних шариков и силы натяжения от половины угла между нитями, т.е. от угла α , приведен на рисунке 9. А на рисунке 10 представлены графики зависимости от угла α проекций

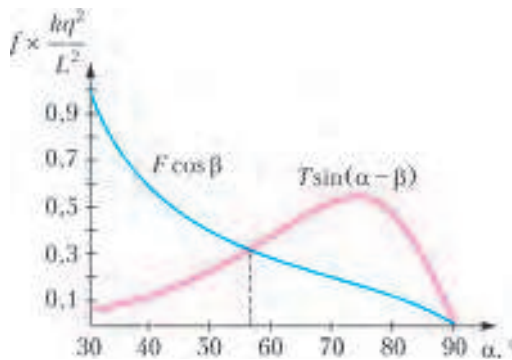


Рис. 10

сил кулоновского взаимодействия и натяжения на направленные скорости крайнего шарика. Заметим, что эти проекции

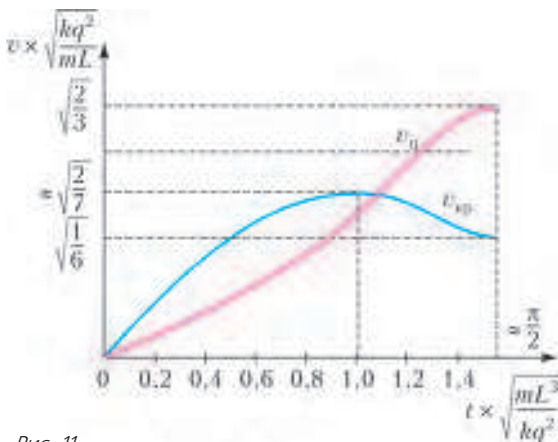


Рис. 11

равны по модулю именно при достижении угла $\approx 56,4^\circ$ – в этот момент результирующая мощность всех сил, действующих на крайний шарик, равна нулю, далее крайний шарик уже тормозит.

Обратите внимание на то, что компьютерное моделирование позволяет увидеть зависимости не только от угла, но и от времени. Рисунок 11 иллюстрирует графики зависимости модулей скоростей шариков от времени движения. Заметим, что 35% четверти периода крайний шарик тормозит.

Наконец, для наглядности процесса разлета шариков поделим четверть периода на 8 равных временных интервалов и нанесем положения шариков в конце каждого из них на один общий рисунок. Получим так называемую стробоскопическую фотографию рассматриваемого процесса (рис.12). Зеленым пунктиром на рисунке отмечен временной интервал, в течение которого крайний шарик достигает своей максимальной скорости.

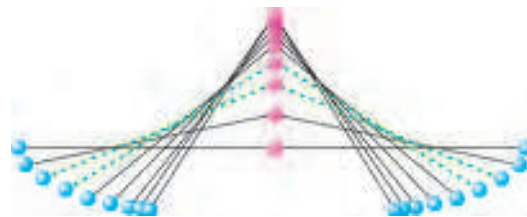


Рис. 12

В заключение заметим, что подробное рассмотрение данной задачи полезно и поучительно. Во-первых, то, что максимальность суммы еще не означает максимальности всех слагаемых, представляется совершенно очевидным «общим местом». Все прекрасно понимают, что если класс получил за работу максимальный балл, то из этого отнюдь не следует, что наибольший балл был получен каждым из учеников. И тем не менее, именно на этой неустаревающей ошибке и строится то самое распространившееся и, как мы попытались показать, неверное решение нашей задачи. Во-вторых, представленное здесь решение является исключительно многоплановым, затрагивающим кроме законов сохранения еще и соображения динамики, представления о связях, геометрические рассуждения и даже численные методы. Однако, несмотря на эту многоплановость, задача продолжает оставаться абсолютно доступной школьникам, правда оказываясь при этом гораздо более занимательной.

Еще раз о пространствах L_p и замечательных точках треугольника

А. ЗАСЛАВСКИЙ

Что такое единица?

Школьник: единица это $\sin^2 x + \cos^2 x$

Студент 2 курса: единица это $p + q$ (теория вероятностей)

Студент 4 курса: единица это $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ (теория функций)

Фольклор

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ БУДЕМ ИССЛЕДОВАТЬ ДВЕ ЗАДАЧИ, поставленные в статье В.Протасова и В.Тихомирова «Пространства L_p и замечательные точки треугольника» («Квант» №2 за 2012 г.). Будет установлена любопытная связь между рассматриваемым в теории функций сопряжением нормированных пространств и известным из геометрии треугольника изогональным сопряжением. Для начала напомним некоторые определения.

Определение 1. Пусть даны набор чисел $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ и число $p \geq 1$. L_p -нормой набора \vec{a} называется величина

$$\|\vec{a}\|_p = \left(|a_1|^p + \dots + |a_n|^p \right)^{1/p}.$$

$$\|\vec{a}\|_\infty = \max \{ |a_1|, \dots, |a_n| \}.$$

Определение 2. Рассмотрим множество всевозможных наборов из n чисел. Расстоянием между наборами \vec{a} и \vec{b} назовем L_p -норму набора $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n)$. Можно доказать, что при $p \geq 1$ эта величина удовлетворяет неравенству треугольника, т.е. ее действительно можно считать расстоянием. Множество наборов чисел с таким расстоянием называется *пространством L_p* . Частным случаем пространства L_p , возникающим при $p = 2$, является стандартное геометрическое пространство. Иногда, однако, имеет смысл использовать и нормы, соответствующие другим значениям p . Например, в городе, поделенном на кварталы, естественно рассматривать расстояние, соответствующее значению $p = 1$.

В теории функций большое значение имеет так называемое сопряженное пространство. Пространства (а также соответствующие нормы) L_p и L_q называются *сопряженными* или *двойственными*, если $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Например, обычное евкли-

дово пространство L_2 сопряжено самому себе, поскольку $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, пространство L_3 сопряжено пространству $L_{3/2}$, а

пространство L_1 – пространству L_∞ , поскольку $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{1} = 0 + 1 = 1$.

Постановка задач и обзор известных результатов

В статье Протасова и Тихомирова были поставлены следующие две задачи.

Задача 1. Дан треугольник ABC и число $p \geq 1$. Найти на плоскости точку X , для которой величина $(|XA|^p + |XB|^p + |XC|^p)^{1/p}$ минимальна.

Задача 2. Дан треугольник ABC и число $q \geq 1$. На сторонах BC , CA , AB найти точки A' , B' , C' , для которых величина $(|A'B'^q + |B'C'^q + |C'A'^q)^{1/q}$ минимальна.

Другими словами, в задаче 1 ищется точка, набор расстояний от которой до вершин треугольника имеет минимальную L_p -норму, а в задаче 2 ищется треугольник, вписанный в данный, набор длин сторон которого имеет минимальную L_q -норму. Например, при $p = 1$ задача 1 состоит в определении точки, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна, а задача 2 (при $q = 1$) – в том, чтобы вписать треугольник минимального периметра в данный треугольник.

Напомним результаты, полученные Протасовым и Тихомировым. Рекомендуем читателям попытаться самостоятельно их доказать. Сразу оговоримся, что авторы рассматривали лишь остроугольные треугольники. О причинах этого и о том, как решать задачи 1, 2 в общем случае, мы поговорим позже.

Итак, для задачи 1 доказаны следующие утверждения.

1. При $p = 1$ решением, т.е. точкой с минимальной суммой расстояний до вершин треугольника, является *точка Торричелли*, из которой все стороны треугольника видны под углами, равными 120° .

2. При $p = 2$ решением, т.е. точкой, для которой сумма квадратов расстояний до вершин треугольника минимальна, является центр тяжести треугольника.

3. При $p = \infty$ решением, т.е. точкой, для которой максимальное из трех расстояний до вершин треугольника минимально, является центр описанной около треугольника окружности.

Перейдем к задаче 2. Прежде всего укажем, что при любом q ее решением является *педальный треугольник* некоторой точки Y , т.е. точки A' , B' , C' являются проекциями Y на стороны треугольника. Кроме того:

1. При $q = 1$ решением, т.е. треугольником наименьшего периметра, вписанным в данный, является ортотреугольник. Как мы знаем, он совпадает с педальным треугольником точки пересечения высот.

2. При $q = 2$ решением является педальный треугольник *точки Лемуана*, т.е. точки пересечения *симедиан*² треугольника.

3. При $q = \infty$ решением, т.е. вписанным треугольником, наибольшей стороны которого имеет минимальную длину, является педальный треугольник *точки Аполлония Т*. Эта точка определяется условиями $|TA| \cdot |BC| = |TB| \cdot |AC| = |TC| \cdot |AB|$, а ее педальный треугольник является правильным.³

² Напомним, что симедианами треугольника называются прямые, симметричные его медианам относительно соответствующих биссектрис.

³ Этим условиям удовлетворяют две точки, для остроугольного треугольника одна из них лежит внутри него, а другая – вне. Разумеется, решением нашей задачи будет внутренняя точка.

¹ Можно доказать, что $\|\vec{a}\|_p \rightarrow \|\vec{a}\|_\infty$ при $p \rightarrow \infty$.

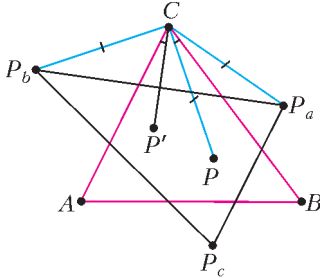
Для остальных случаев, т.е. когда p, q отличны от 1, 2 или ∞ , решения, по-видимому, неизвестны. Исследование задачи 1 для произвольных p провел И.Акулич. Однако, и ему удалось найти только приближенные решения. Об этом можно прочитать в его заметке в «Кванте» №1 за 2013 год. Мы тоже не дадим решения для других значений p и q , однако опишем связь, существующую между решениями задач 1 и 2. Но для этого нам сначала придется вспомнить кое-что из геометрии треугольника.

Изогональное сопряжение и формулировка основной теоремы

Рассмотрим свойства изогонального сопряжения относительно треугольника ABC . Поскольку доказательства этих свойств достаточно просты, сформулируем их в виде упражнений.

Упражнение 1. Докажите, что для любой точки P прямые, симметричные прямым AP, BP, CP относительно биссектрис углов A, B, C соответственно, пересекаются в одной точке. Эта точка P' называется *изогонально сопряженной* точке P .

Указание. Пусть P_a, P_b, P_c – точки, симметричные P относительно BC, CA, AB . Тогда P' – центр описанной окружности треугольника $P_aP_bP_c$ (см. рисунок).



Упражнение 2. Докажите, что точка Торричелли изогонально сопряжена точке Аполлония.

Упражнение 3. Докажите, что центр тяжести изогонально сопряжен точке Лемуана.

Упражнение 4. Докажите, что центр описанной окружности изогонально сопряжен ортоцентру.

Сопоставляя результаты упражнений 2 – 4 с приведенными выше результатами Протасова и Тихомирова, можно сделать такое наблюдение. Точки, являющиеся решением задачи 1 при p , равном 1, 2 или ∞ , изогонально сопряжены точкам, pedalные треугольники которых являются решениями задачи 2 при q , равном $\infty, 2$ или 1 соответственно, т.е. таким, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Возникает естественный вопрос: это случайное совпадение или частный случай какой-нибудь общей закономерности. Оказывается, что справедлива следующая теорема, которая и является нашим основным результатом.

Теорема о сопряжении. Если $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, причем решением задачи 1 является точка X , а решением задачи 2 – pedalный треугольник точки Y , то X и Y изогонально сопряжены.

Таким образом, зная решение задачи 1 для некоторой нормы L_p , мы можем получить решение задачи 2 для сопряженной нормы L_q и наоборот. При этом применяемое в теории функций сопряжение пространств оказывается непосредственно связанным с известным из элементарной геометрии изогональным сопряжением.

Мы уже выяснили, что теорема о сопряжении верна при $p, q = 1, 2, \infty$. Однако при других значениях p, q доказать

теорему чисто геометрическими средствами вряд ли получится. Поэтому нам понадобятся некоторые дополнительные факты.

Барицентрические координаты и некоторые сведения из анализа

Определение 3. Барицентрическими координатами точки P относительно треугольника ABC называется такая тройка чисел (p_a, p_b, p_c) , что $p_a \overline{PA} + p_b \overline{PB} + p_c \overline{PC} = \vec{0}$.

Упражнение 5. Докажите, что барицентрические координаты точки P , лежащей внутри треугольника, пропорциональны площадям треугольников PBC, PCA, PAB .

Упражнение 6. Сформулируйте и докажите аналог этого утверждения для точек вне треугольника (подсказка: некоторые из площадей надо считать отрицательными).

Из упражнения 5 следует, что барицентрические координаты определены однозначно, с точностью до умножения их на одно и то же число.

Упражнение 7. Докажите, что барицентрические координаты точки, изогонально сопряженной P , равны $\left(\frac{a^2}{p_a}, \frac{b^2}{p_b}, \frac{c^2}{p_c}\right)$.

Пусть $F(x, y)$ – функция двух переменных. Если зафиксировать значение переменной y , то $F(x, y)$ можно рассматривать как функцию переменной x . Производная этой функции называется *частной производной* F по x и обозначается F'_x . Аналогично определяется частная производная F'_y .

Определение 4. Градиентом функции $F(x, y)$ называется вектор $\text{grad } F = (F'_x, F'_y)$.

Упражнение 8. Пусть O – фиксированная точка плоскости, X – переменная точка с декартовыми координатами (x, y) и $F(X) = F(x, y) = |OX|^p$. Докажите, что $\text{grad } F = p|OX|^{p-2} \overline{OX}$.

Результат упражнения 8 означает, что градиент функции $|OX|^p$ имеет то же направление, что и вектор \overline{OX} , а его длина равна $p|OX|^{p-1}$.

Утверждение. Если функция $F(X)$, определенная на треугольнике ABC , достигает своего минимального значения во внутренней точке треугольника, то в этой точке $\text{grad } F = \vec{0}$.

Разумеется, в общем случае условие обращения градиента в ноль является лишь необходимым. Однако, существует специальный класс так называемых выпуклых функций, для которых оно оказывается и достаточным. Мы не будем давать строгого определения выпуклости, укажем лишь, что при $p \geq 1$ выпуклыми являются функции $F(X) = |OX|^p$, L_p -норма вектора \overline{OX} , а значит, и функции, минимум которых ищется в задачах 1, 2.

Доказательство теоремы

Теперь мы, наконец, можем приступить к доказательству теоремы о сопряжении.

Итак, задача 1 равносильна определению минимума функции $F(X) = |XA|^p + |XB|^p + |XC|^p$. Приравняв нулю ее градиент, получаем, что барицентрические координаты искомой точки X равны $(|XA|^{p-2}, |XB|^{p-2}, |XC|^{p-2})$, следовательно, барицентрические координаты изогонально сопряженной точки X' равны $\left(\frac{a^2}{|XA|^{p-2}}, \frac{b^2}{|XB|^{p-2}}, \frac{c^2}{|XC|^{p-2}}\right)$, т.е.

$$\frac{S_{X'BC}}{S_{X'AC}} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{|XA|^{p-2}}{|XB|^{p-2}}.$$

С другой стороны, для любых изогонально сопряженных

точек X, X'

$$\frac{|XA|}{|XB|} = \frac{\sin \angle XBA}{\sin \angle XAB} = \frac{\sin \angle X'BC}{\sin \angle X'AC} = \frac{S_{X'BC}}{S_{X'AC}} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{|X'A|}{|X'B|}$$

Исключая из этих равенств отношение $|XA|/|XB|$, получаем, что барицентрические координаты точки X' равны

$$\left(a^{\frac{p}{p-1}} |X'A|^{\frac{2-p}{p-1}}, b^{\frac{p}{p-1}} |X'B|^{\frac{2-p}{p-1}}, c^{\frac{p}{p-1}} |X'C|^{\frac{2-p}{p-1}} \right).$$

Перейдем к задаче 2. Пусть $A'B'C'$ – педальный треугольник точки Y . Так как четырехугольник $CA'YB'$ вписан в окружность с диаметром CY , то $|A'B'| = |CY| \sin \angle C = |CY|c/(2R)$. Аналогично, $|B'C'| = |AY|a/(2R)$, $|C'A'| = |BY|b/(2R)$. Поэтому задача 2 равносильна минимизации функции $G(Y) = a^q |YA|^q + b^q |YB|^q + c^q |YC|^q$. Приравнявая нулю ее градиент, получаем, что барицентрические координаты точки Y равны $(a^q |YA|^{q-2}, b^q |YB|^{q-2}, c^q |YC|^{q-2})$.

При $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ условия на точки X' и Y совпадают, следовательно, совпадают и сами эти точки.

Обсуждение

Прежде всего заметим, что теорема о сопряжении допускает следующую элементарную формулировку.

Пусть $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, X – решение задачи 1, а A', B', C' – решение задачи 2. Тогда $CX \perp A'B'$.

Это вытекает из следующего свойства изогонального сопряжения.

Упражнение 9. Пусть $A'B'C'$ – педальный треугольник точки P . Докажите, что перпендикуляры, опущенные из A, B, C на $B'C', C'A', A'B'$ соответственно, пересекаются в точке, изогонально сопряженной P .

Теперь, как и было обещано, объясним, почему мы рассматривали только остроугольные треугольники. Дело в том, что в противном случае решением задачи 1 для $p = \infty$ будет не центр описанной окружности, который лежит вне треугольника, а середина его наибольшей стороны. Соответ-

ственно, при $q = 1$ решением задачи 2 будет вырожденный треугольник, две вершины которого совпадают с вершиной тупого угла а третья – с ее проекцией на противоположную сторону. Аналогично, приведенное решение задачи 1 при $p = 1$ является верным, только если все углы треугольника меньше 120° . В противном случае решением задачи 1 будет вершина наибольшего угла треугольника, а решением задачи 2 при $q = \infty$ – педальный треугольник основания биссектрисы этого угла. Впрочем, легко убедиться, что теорема о сопряжении остается верной и в этих случаях. С другой стороны, решение задачи 1 при $p = 2$, очевидно, остается таким же для произвольных треугольников.

Упражнение 10. Докажите, что при любом $1 < p < \infty$ и любых углах треугольника минимум в задаче 1 достигается во внутренней точке.

Указание. Рассмотрите проекцию градиента на высоты треугольника.

Из последнего упражнения и теоремы о сопряжении следует, что в задаче 2 минимум во всех случаях, кроме указанных выше, достигается на педальном треугольнике внутренней точки. Однако если данный треугольник тупоугольный, то проекция внутренней точки на одну из его сторон может попасть на ее продолжение. Соответственно, если требовать, чтобы точки A', B', C' лежали именно на сторонах треугольника ABC , то теорема о сопряжении в некоторых случаях может оказаться неверна. Разумеется, для остроугольного треугольника такая ситуация невозможна.

Наконец, объясним, почему мы рассматривали только $p, q \geq 1$. Первая причина состоит в том, что при $p < 1$ соответствующая величина L_p не удовлетворяет неравенству треугольника и, следовательно, не является нормой. Вторая причина, впрочем связанная с первой, в том, что функции, минимум которых ищется в задачах 1 и 2, в этом случае не являются выпуклыми, а значит, точки минимума могут быть не единственными. В упомянутой выше заметке Акулича описываются эффекты, возникающие в задаче 1 при уменьшении p .

Автор благодарен В.Протасову за конструктивное обсуждение, позволившее существенно улучшить первоначальную версию статьи.

ПРОГУЛКИ С ФИЗИКОЙ

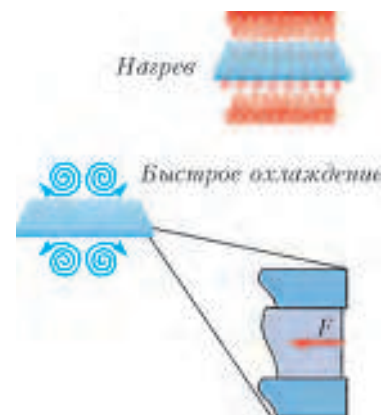
Как стекло сделать прочным?

(Начало см. на 4-й странице обложки)

Чтобы сделать прочной книгу, достаточно сжать ее с обеих сторон, и тогда в торец книги можно будет хоть гвозди забивать. Оказывается, прочность стекла можно увеличить аналогичным образом (см. рисунок). Для этого стекло сначала равномерно нагревают до температуры около 750 градусов, при этом все его слои одинаково удлиняются. Потом обе поверхности быстро охлаждают струями холодного воздуха, не давая при этом остыть срединному слою стекла. Быстрое охлаждение поверхностного слоя не сопровождается уменьшением его размеров. Срединный же слой стекла, остывая медленно и стремясь уменьшить свою площадь, сжимает поверхностные слои, что и приводит к увеличению прочности всего стекла.

Почему же *быстрое охлаждение* поверхностного слоя не сопровождается уменьшением его размеров? Сжатие стек-

лянного образца при охлаждении – это результат того, что атомы при уменьшении скорости своего теплового движения наконец-то смогли подойти поближе друг к другу. Естественно, этому должна предшествовать перестройка межатомных связей и обретение новых соседей, а атомы, которые мешают уплотнению, должны при этом успеть отойти в сторону – ведь стекло аморфное тело. Иными



(Продолжение см. на с. 57)

Ощущение различных цветов зависит от различной частоты колебаний, возбуждаемых светом в сетчатке.

Томас Юнг

Вещество испускает, как правило, свет, имеющий большую длину волны, чем свет, вызывающий явление фотolumинесценции.

Джордж Габриэль Стокс

Падающий пучок света производит давление как на поглощающие, так и на отражающие поверхности...

Петр Лебедев

Почему возникновение определенной фотохимической реакции зависит только от цвета, а не от интенсивности света?

Альберт Эйнштейн

Как создается пара электрон-дырка? Есть несколько способов. Например, световые фотоны... могут поглотиться и образовать пару...

Ричард Фейнман

Свет всегда исходит от вещества, рождается в веществе и, поглощаясь, исчезает в веществе. Встреча света с веществом всегда сопровождается взаимодействиями.

Сергей Вавилов

А так ли хорошо знакомо вам взаимодействие света с веществом?

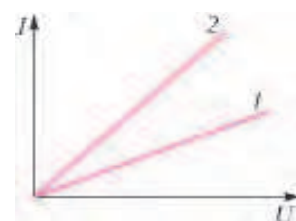
Обнаружить это взаимодействие чрезвычайно легко. Достаточно выйти из темной комнаты на ярко освещенную улицу, как, невольно сощурившись, мы «зарегистрируем» воздействие света на сетчатку наших глаз. Присмотревшись, заметим, как выцвели на свету обои или занавески в нашем доме. Или почувствуем, как нагрелись на солнце темные прибрежные скалы. Постепенно наш повседневный опыт дополнится знаниями о действиях света, используемых в фотографии, о производстве фотоэлементов и применении фотolumинесценции. Заглянув в учебник физики, мы найдем еще немало терминов с приставкой «фото», но, к сожалению, за информацией о все новых возможностях света не успевают не только школьные пособия, но и самые оперативные научные издания.

Казалось бы, совсем недавно были изобретены самоочищающиеся — лишь стоит на них посветить — стекла, как уже удалось создать хлопчатобумажную ткань, которую можно просто вывесить на балконе и очистить с помощью обычного солнечного света, да еще и восстановить ее первоначальный цвет. Не успели научиться влезать внутрь биологических клеток и с помощью наносветоводов получать превосходные их изображения «в интерьере», как эти же устройства намереваются использовать для оптической стимуляции клеток с одновременным наблюдением за их реакцией на световое воздействие. С каждым днем множится число прорывных находок, в которых и светом и со светом производят столь диковинные манипуляции, что в пору воскликнуть: «Неужели это они, наши старые добрые знакомые световые лучи?»

Представьте, да. А чтобы легче было привыкнуть к их новым обликам и экстраординарным способностям, начните все же со знакомства с вроде бы привычными действиями света. Глядишь, и многое прояснится.

Вопросы и задачи

1. Почему электроскоп, находящийся недалеко от ярко светящейся электрической дуги, разряжается весьма быстро?
2. При анализе получаемого на земле непрерывного спектра излучения Солнца оказывается, что он содержит более двух десятков темных линий, т.е. фактически является спектром поглощения. Чем это можно объяснить?
3. Какого цвета бумага — синяя, красная, черная — быстрее зажигается солнечными лучами, собранными при помощи вогнутого зеркала или линзы?
4. Возбуждение атома хрома происходит при поглощении зеленого света. А какой свет может излучаться этим атомом — ближе к красному или фиолетовому?
5. Стекланный сосуд с керосином облучают дневным светом. Отчего возникает слабое голубоватое свечение керосина?
6. Почему частота света люминесцирующего вещества, как правило, меньше частоты поглощаемого веществом света? Как это согласуется с законом сохранения энергии?
7. Как зависит проводимость металлов и полупроводников от действия излучения?
8. Какая из приведенных на рисунке зависимостей силы тока, идущего через фоторезистор, от приложенного напряжения относится к освещенному фоторезистору и какая — к находящемуся в темноте? Применим ли закон Ома к данному фоторезистору?
9. Человек, проходя через турникет, кратковременно перекрывает луч света, па-

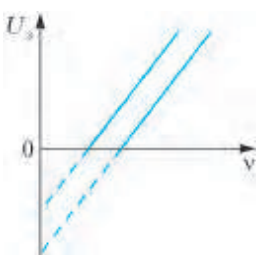


дающий на фоторезистор. Как в этот момент изменяется сопротивление фоторезистора?

10. Воздействие света приводит к аналогичным процессам в фоторезисторах и фотодиодах. В чем же их основное отличие друг от друга?

11. Почему для устройства солнечных батарей применяется именно кремний, а не какой-либо другой полупроводник?

12. При освещении катода фотоэлемента монохроматическим светом в цепи элемента течет ток насыщения. Изобразите на графике зависимость этого тока от



концентрации фотонов в световом потоке. От какого параметра зависит угловой коэффициент графика?

13. На рисунке представлены зависимости задерживающего напряжения при фотоэффекте от частоты падающего света. Чем отличаются условия, при которых получены эти прямые?

Какое соотношение между фундаментальными константами может быть получено с помощью этих графиков?

14. Почему хвост кометы направлен всегда в сторону, противоположную Солнцу? Почему длина хвоста меняется при движении кометы?

15. Находящаяся в вакууме пылинка под давлением световых лучей движется с ускорением. За счет чего увеличивается ее кинетическая энергия, если: а) пылинка зеркальна; б) пылинка поглощает все лучи?

16. Какого вида изображение — позитивное (когда яркости деталей фотографируемого объекта и их изображений одинаковы) или негативное (когда светлые детали выглядят темными) получают: а) на фотопленке; б) на фотобумаге?

Микроопыт

У вас имеются два совершенно одинаковых спиртовых термометра, отличающихся только цветом окраски спирта. Будут ли термометры показывать одинаковую температуру, если вы выставите их на солнце?

Любопытно, что...

...изменение цвета солей серебра было обнаружено еще в XIII веке немецким философом и теологом Альбертом Великим. Английский ученый Роберт Бойль упоминал об этом явлении в 1663 году, но приписывал его действию воздуха. И лишь в начале XVIII столетия было отмечено, что причина этих изменений заключается в действии света.

...в XIX веке явление люминесценции, несмотря на установленное Стоксом правило (см. эпиграф), не поддавалось теоретическому обоснованию. И само явление, и правило Стокса оказались в числе первых, к которым Эйнштейн, причем весьма успешно, применил свою квантовую теорию света.

...первая мировая война, низкий уровень вакуумной техники, скепсис многих физиков — вот причины задержки экспериментальной проверки знаменитого основного закона фотоэффекта, сформулированного Эйнштейном в работах 1905–06 годов. Лишь десятилетием позже закон был окончательно подтвержден.

...роль света в фотохимических процессах сводится к сообщению молекуле столь большой энергии, что она расщепляется на составные части. Примечательно, что освещение даже видимым светом может так же эффективно расщеплять молекулы, как нагревание до 20000 °С.

...гигантские мощности лазерного излучения достигаются лишь в коротких импульсах. Если же говорить о непрерывном излучении, то, чтобы создать с его помощью силу величиной всего лишь в 1 ньютон, действующую на поглощающую свет мишень, потребуется мощность целой электростанции — порядка 300 мегаватт. Вот почему так сложно запустить фотонную ракету, работающую на световой тяге.

...одно из важнейших свойств алмаза — его люминесценция. Под действием видимого света и других излучений он начинает светиться различными цветами. Эта особенность помогает обнаруживать и извлекать алмазы из породы.

...фотонные кристаллы — искусственные метаматериалы, оптические свойства которых определяются не особенностями веществ, а структурой их композиции, — могут служить светопроводниками, светоизоляторами и даже... светополупроводниками.

...японское агентство исследований космоса планирует к 2030 году развернуть на геостационарной орбите (36000 километров над Землей) систему сбора солнечной энергии. Спутники, входящие в состав системы, будут оснащены солнечными батареями для преобразования энергии излучения и ее передачи на земные приемники в виде микроволн или лазерных пучков.

...уже довольно давно известны «светочувствительные» очки, прозрачные в помещении и темнеющие на солнечном свете. В таком стекле содержатся крохотные кристаллы веществ, например бромистого серебра, меняющих оптические свойства при изменении освещенности. А недавно подобное поведение было обнаружено у графена — тончайшего слоя углерода толщиной в один атом.

Что читать в «Кванте»

о взаимодействии света с веществом

(публикации последних лет)

1. «Калейдоскоп «Кванта» — 2005, №5, с.32; 2008, №5, с.32; 2010, №5, с.32;
2. «Фотонные кристаллы и другие метаматериалы» — 2006, Приложение №2;
3. «Пособие по физике для покупателей лампочек» — 2006, Приложение №6, с.5;
4. «Сюрпризы зеленого стекла» — 2007, №5, с.10;
5. «ФЭМ-эффект» — 2008, Приложение №2, с.129;
6. «Нанотехнологии: когда размер имеет значение» — 2008, №3, с.6;
7. «Самая светлая революция и ее творцы» — 2008, №6, с.2;
8. «Нобелевская премия за «школьную» физику» — 2010, №1, с.17;
9. «Начало квантовой эпохи» — 2013, Приложение №3, с.99.

Материал подготовил А.Леонович

Двойное лучепреломление

А.АНДРЕЕВ, И.БОГОЛЮБОВ, А.ПАНОВ

В АВГУСТЕ 2012 ГОДА В МОСКВЕ ПРОШЛА ШКОЛА-СЕМИНАР «Взаимодействие математики и физики: новые перспективы» для студентов, аспирантов и молодых исследователей. Приехали и прочли свои лекции известные ученые со всего мира. (Видеозаписи этих лекций размещены на математическом портале Math-Net.Ru.)

Среди приехавших был и один из наших любимых авторов Майкл Берри. Здесь мы расскажем, как в свое время прочли одну из статей М.Берри (*Michael Berry, Rajendra Bhandari and Susanne Klein, «Black plastic demonstrating biaxial optical anisotropy», 1999*), посвященную явлению двойного лучепреломления. Дальше мы будем называть ее просто *статьей* и чаще всего ссылаться только на первого автора. (Текст *статьи* можно найти на домашней странице М.Берри.)

В введении к *статье* есть ссылка на классическую книгу М.Борна и Э.Вольфа «Основы оптики», где исследование Френелем необычных законов распространения света в кристаллах, выяснение этих законов и сведение их к нескольким простым предположениям о природе элементарных волн характеризуется как «одно из важнейших достижений естественной науки». Необычные законы распространения света, о которых идет речь, это и есть двойное лучепреломление – раздвоение световых лучей при прохождении через анизотропную среду, например кристалл. Причем соответствующие им волны имеют взаимно перпендикулярные плоскости поляризации. Берри сетует на то, что, несмотря на долгую историю вопроса и достигнутое понимание явлений, связанных с двойным лучепреломлением, этому феномену уделяется недостаточно внимания. Возможной причиной этого называется необходимость использования в соответствующих экспериментах пластин

двухосных кристаллов.

В *статье* дано описание «очень простой демонстрации» интерференционных картин, возникающих при двойном лучепреломлении, не требующей никаких кристаллов.

Оптический сэндвич. Традиционно, для наблюдения интерференционной картины кристаллическая пластина заключалась между двумя поляридами. Оказалось, что обычная прозрачная пленка для проектора является оптическим материалом, демонстрирующим ту же самую

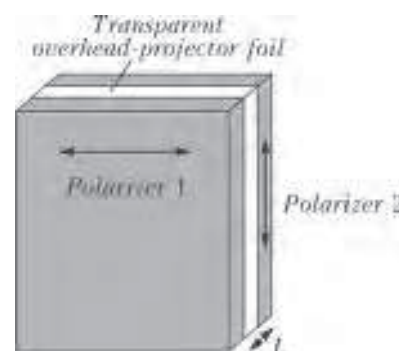


Рис.1. Оптический сэндвич (рисунок из статьи)

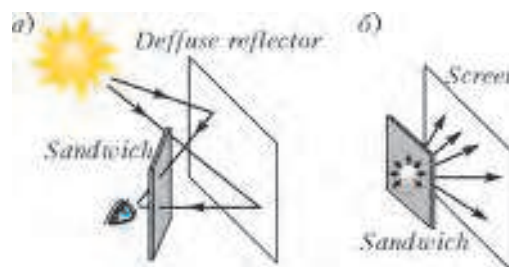


Рис.2. Схема эксперимента (рисунок из статьи)

способность к двулучепреломлению, что и соответствующие кристаллы. Так что в *статье* оптический сэндвич – это просто пленка для проектора, заключенная между двумя поляризационными пленками со взаимно перпендикулярной ориентацией (рис.1). Интерференционную картину можно наблюдать, глядя через сэндвич на диффузный источник, скажем на небо; можно также для наблюдения спроецировать пучок света от яркого маленького источника света, прошедший через сэндвич, на экран (рис.2).

Авторы обсуждают полученные изображения: «*наблюдаются великолепные цветные картины*», – пишут они и далее переходят к изложению теории, необходимой для объяснения

полученных результатов. Здесь мы их ненадолго оставим, чтобы рассказать о еще одной, возможно более простой, схеме наблюдения интерференционных картин.

Новая схема эксперимента. Начнем постепенно модернизировать сэндвич. Первый поляризатор вместе с источником света можно заменить жидкокристаллическим дисплеем. Дело в том, что в мониторе есть свой собственный встроенный поляризатор, через который проходит свет, выходящий из монитора.

Если мы работаем с монитором компьютера, то для яркой подсветки достаточно открыть чистый лист в каком-либо текстовом редакторе. Положим на монитор прозрачную пленку и в качестве второго поляризатора используем обычный поляризационный светофильтр для фотоаппарата (рис.3). Роль экрана отведем дисплею самого цифрового фотоаппарата. Правильно подобранная ориентация





Рис.3. Новая схема эксперимента

(поворот) светофильтра позволит получить красочную интерференционную картину (рис.4).

Если вы сумеете достать пластину слюды, которая тоже представляет собой двоякопреломляющий материал, то, ис-

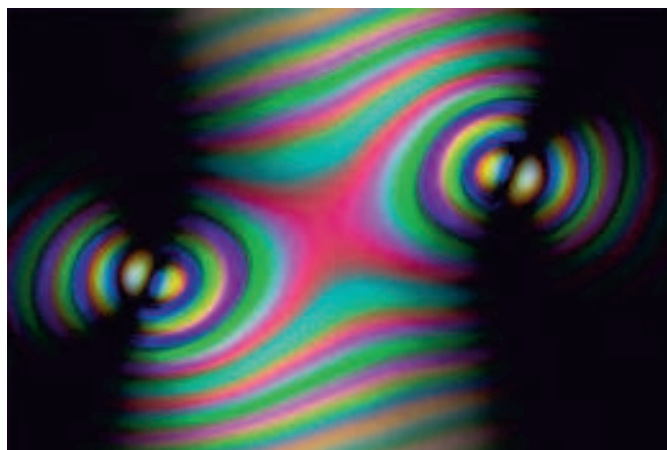


Рис.4. Интерференционная картина, полученная с прозрачной пленкой (коноскопическая картина)

пользуя ее вместо пленки, сможете наблюдать аналогичную картину, возможно даже более яркую.

Итак, использование обычных бытовых приборов и атрибутов позволяет получить яркие интерференционные картины, называемые еще *коноскопическими фигурами*. Дополнительное преимущество этого эксперимента заключается в том, что полученная картина может быть мгновенно зафиксирована в виде цифровой фотографии.

Предложенная схема эксперимента чрезвычайно проста и допускает возможность различных стандартных манипуляций. Вы можете вращать друг относительно друга прозрачную пленку и поляризационный фильтр. Можно посмотреть, что происходит при наложении друг на друга нескольких пленок с разными поворотами, и так далее. Кстати, совсем не обязательно быть привязанным к плоскости монитора, можно взять пленку или кристаллическую пластинку в руки и наклонить ее (рис.5).

На этом мы закончим с экспериментами и вернемся к *статье*. Там после описания опытов идет обсуждение теории, основанной на уравнениях Максвелла. Это составляет большую часть *статьи*, и тут мы не сможем близко следовать ее тексту. Но все-таки попытаемся дать некоторое

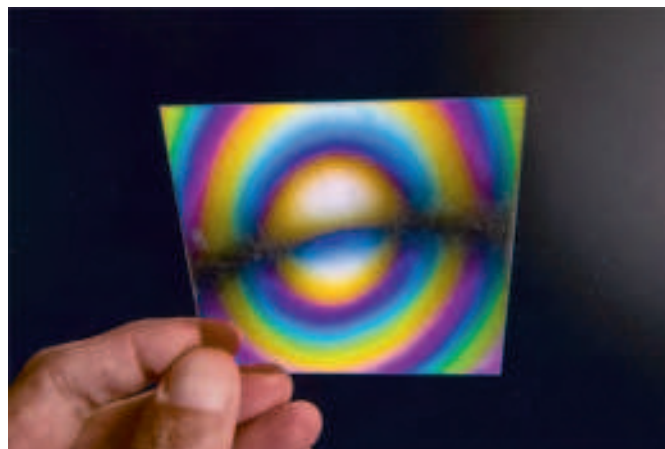


Рис.5. Пластинка слюды расположена под углом к плоскости монитора (крупно виден так называемый бычий глаз)

представление о физическом механизме возникновения полученных интерференционных картин.

Поляризация и поляризаторы. Известно, что свет представляет собой электромагнитные волны. Самая простая волна – это гармоническая плоская волна с линейной поляризацией. Она характеризуется частотой, скоростью и фазой, а также направлением распространения и направлением поляризации.

Направление распространения можно задать единичным вектором \vec{s} , а направление поляризации задается вектором электрического поля – вектором электрической напряженности \vec{E} , и он перпендикулярен \vec{s} .

Поляризатор – оптическое устройство с выделенным направлением пропускания. Если на поляризатор падает плоская световая волна, направление поляризации которой совпадает с направлением пропускания поляризатора, то такая волна полностью проходит через поляризатор. Если направление поляризации волны перпендикулярно направлению пропускания, то такая волна полностью гасится. При промежуточной ориентации поляризатора волна частично проходит и, соответственно, частично гасится. В любом случае выходящий свет будет иметь поляризацию, направление которой совпадает с направлением пропускания поляризатора.

Интерференция. Проще всего описать интерференцию двух распространяющихся в одном направлении одинаково поляризованных плоских волн с одинаковой частотой. Если разность их фаз такова, что они сдвинуты друг относительно друга на целое число длин волн, то они максимально усиливают друг друга; если же сдвиг составляет полуцелое число длин волн, то волны максимально ослабляют друг друга.

Оптическая анизотропия. И пластинка слюды, и прозрачная пленка для проектора представляют собой оптически анизотропные среды. Внутри такой среды для каждой заданной частоты в каждом направлении \vec{s} могут распространяться две плоские волны с разными скоростями и взаимно перпендикулярными направлениями поляризации.

Интерференционная картина. Снова вернемся к *статье*. Свойства анизотропной среды, которым мы только что дали качественное описание, выводятся там из уравнений Максвелла. Естественно, получаются точные формулы и для скоростей и для поляризаций. При этом интерферируют именно те две волны, которые после выхода из сэндвича движутся в одном направлении, имеют одинаковую частоту и одинаковую поляризацию, предписанную им вторым поляризатором.

Дополнительно выясняется, что в анизотропной среде имеются два исключительных направления \vec{s}_1 и \vec{s}_2 , вдоль которых могут распространяться не две плоские волны, а бесконечное число плоских волн со всевозможными поляризациями, перпендикулярными \vec{s}_1 и \vec{s}_2 соответственно. Этим двум направлениям на интерференционной картине отвечают две особые точки, хорошо видные на рисунке 4. Эти точки являются центрами так называемых бычьих глаз – двух систем маленьких concentрических окружностей.

Формулы, написанные в *статье*, позволяют рассчитать интерференционную картину. Мы воспроизведем только одну из них, и то с упрощениями:

$$I(\vec{s}) = \sin^2 2\sigma(\vec{s}) \sin^2 \frac{\chi(\vec{s})}{2}.$$

Здесь $I(\vec{s})$ – относительная интенсивность интерференционной картины в направлении вектора \vec{s} . Справа стоят два неотрицательных множителя, которые оба могут меняться в пределах от 0 до 1. Величина $\chi(\vec{s})$ – это разность фаз, приобретенная двумя плоскими волнами, выходящими из сэндвича. А угол $\sigma(\vec{s})$ – это угол между направлением пропускания первого поляризатора и направлением поляризации любой из этих двух выходящих из пленки волн.

В *статье* сказано, как вычислять величины $\sigma(\vec{s})$ и $\chi(\vec{s})$, так что записанную выше формулу можно использовать для построения интерференционной картины. Это мы и сделали – и получили рисунок 6, который стоит сравнить с фотогра-

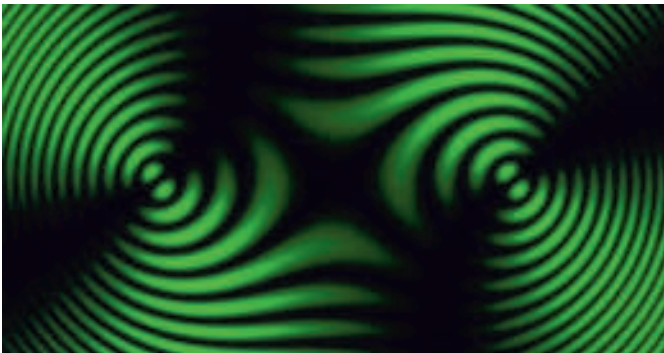


Рис.6. Рассчитанная интерференционная картина для зеленого света с длиной волны 546 нанометров

фией, приведенной на рисунке 4. Сходство очевидно, различие лишь в том, что фотография сделана в белом свете, а расчет проведен для монохроматического – зеленого света.

В конце *статьи* авторы рассказывают, как они измерили оптические характеристики прозрачной пленки, с которой производили свои эксперименты. Мы же закончим свое изложение еще двумя компьютерными картинками.

Изогирь и изохромат. Вернемся к формуле из *статьи* и рассмотрим каждый из двух сомножителей в ее правой части по отдельности.

Начнем с $\sin^2 2\sigma(\vec{s})$. Линии уровня этой функции, т.е. линии, вдоль которых эта функция постоянна, называются *изогирями* (рис.7). Вдоль изогирь угол поворота поляризации волны относительно направления пропускания поляризаторов постоянен. Цвета на рисунке являются всего лишь маркерами. Функция $\sin^2 2\sigma(\vec{s})$ меняется от 0 до 1, в соответствии с этим цвет меняется от фиолетового до красного. Так что на рисунке изогирь проходят через точки одного цвета.

Что касается второго множителя $\sin^2 \frac{\chi(\vec{s})}{2}$, то его линии уровня называются *изохроматами* (рис.8). На рисунке

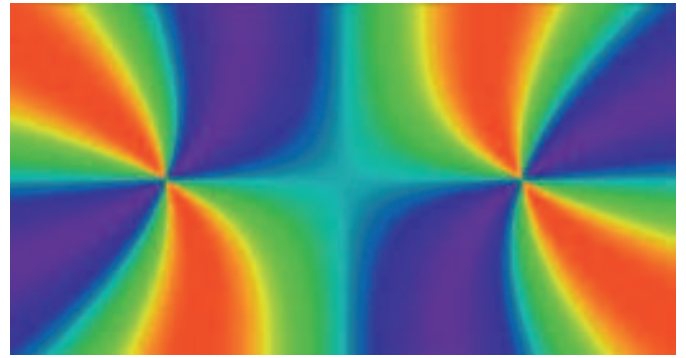


Рис.7. Изогирь, здесь они изображаются линиями, проходящими через точки одного цвета

цвета тоже являются маркерами, и изохроматы на этом рисунке – это тоже линии, которые проходят через точки одного цвета. Важно, что и на интерференционной картине

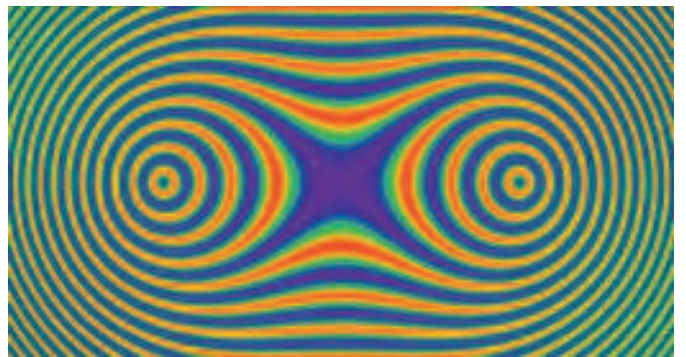


Рис.8. Изохроматы, на этом компьютерном рисунке они тоже изображаются линиями, проходящими через точки одного цвета

(типа изображенной на рисунке 4) вдоль изохроматы цвет не меняется, может меняться только его интенсивность.

Наконец, линии нулевой интенсивности $I(\vec{s}) = 0$ на рисунке 6 – это просто наложение изогирь и изохромат нулевого уровня, тех, что на рисунках 7 и 8 проходят через точки крайнего фиолетового цвета.

На этом мы, пожалуй, и закончим наше изложение *статьи*. Сделаем только небольшое добавление.

О фотоупругости. И

пластина слюды, и прозрачная пленка, демонстрирующие двойное лучепреломление, являются однородными анизотропными материалами. Это значит, что их оптические свойства не меняются от точки к точке, а зависят только от выбора направления в материале.

Двойное лучепреломление может также возникать и в первоначально изотропных оптических средах под действием механических напряжений (рис.9). Этот эффект называется фотоупругостью, и он также может фиксироваться на фоне ЖК-монитора, это достаточно традиционный метод наблюдения.



Рис.9. Иллюстрация явления фотоупругости

Избранные задачи по физике

А. ОВЧИННИКОВ, В. ПЛИС

В 2013 ГОДУ В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «АЗБУКА-2000» ВЫШЛА КНИГА «Задачи по элементарной физике» (авторы С.Ю.Куклин, А.С.Овчинников, В.И.Плис, И.В.Федоренко). Книга адресована учащимся 9–11 классов, изучающим физику на профильном уровне, и содержит примерно 1500 задач (из них 300 – с решениями), охватывающих все разделы школьного курса физики.

Наряду с классическими, выдержавшими испытание временем задачами в сборник включены задачи, предлагавшиеся в разные годы на вступительных экзаменах в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, Московском физико-техническом институте (государственном университете), Новосибирском государственном университете и других ведущих физических вузах РФ, а также на физических олимпиадах разных уровней.

В сборнике представлены как задачи с глубоким физическим содержанием, решение которых требует от учащихся ясного понимания физических явлений и свободного владения физическими законами, так и идеализированные задачи, моделирующие физические процессы и явления. Почти во всех задачах присутствуют числовые данные – задачи по физике должны учить умению доводить результат до числа. Учащемуся необходимо знать системы единиц, размерности физических величин, представлять себе характерные масштабы физических величин.

Рассмотрим несколько задач из сборника – как простых, так и достаточно сложных, техника решения которых порой недостаточно подробно обсуждается в школьном курсе физики.

Механика

Задача 1. Минометная батарея расположена у подножья склона горы, образующего угол $\beta = 45^\circ$ с горизонтом. Под каким углом δ к склону следует установить ствол орудия, чтобы мина достигла склона на максимальном расстоянии от орудия? Ускорение свободного падения равно g . Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

Решение. Используем векторный метод решения задач кинематики.

По условию движение равнопеременное. Перемещение мины за время t полета равно

$$\vec{s}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}.$$

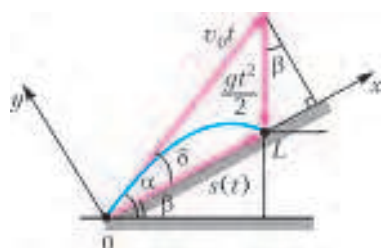


Рис. 1

Изобразим эти векторы на рисунке 1. Проекции векторов $\vec{v}_0 t$ и $\frac{\vec{g} t^2}{2}$ на ось y одинаковы по величине:

$$v_0 t \sin(\alpha - \beta) = \frac{g t^2}{2} \cos \beta,$$

здесь α – угол, который ствол орудия образует с

горизонтом. Отсюда выражаем продолжительность полета мины:

$$t = \frac{2 v_0 \sin(\alpha - \beta)}{g \cos \beta}.$$

Далее из рисунка следует, что сумма проекций векторов $\vec{v}_0 t$ и $\frac{\vec{g} t^2}{2}$ на ось x равна расстоянию от точки старта до точки завершения полета, т.е. дальности полета мины вдоль склона:

$$L = v_0 t \cos(\alpha - \beta) - \frac{g t^2}{2} \sin \beta.$$

С учетом выражения для времени полета последнее соотношение перепишем в виде

$$L = \frac{v_0^2}{g \cos^2 \beta} (\sin(2\alpha - \beta) - \sin \beta).$$

Отсюда следует, что наибольшей дальности соответствует такой угол α , при котором первое слагаемое в скобках принимает наибольшее значение:

$$\sin(2\alpha - \beta) = 1, \quad 2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right).$$

Тогда угол наклона ствола орудия к плоскости склона равен

$$\delta = \alpha - \beta = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = 22,5^\circ,$$

т.е. при такой стрельбе ствол миномета направлен по биссектрисе угла, образованного склоном с вертикалью.

Задача 2. Шайбу массой m бросают с горизонтальной скоростью v_0 с высоты h . После удара плашмя о горизонтальную поверхность льда шайба подскокивает на прежнюю высоту. Под каким углом β к вертикали шайба отскочила от поверхности льда? Коэффициент трения скольжения шайбы по поверхности льда равен μ .

Решение. Применим основной закон динамики в ньютоновской формулировке: в инерциальной системе отсчета приращение импульса тела пропорционально действующей силе и происходит по направлению этой силы.

На рисунке 2 показаны система координат и силы, действующие на шайбу в процессе соударения с горизонтальной поверхностью. По второму закону Ньютона,

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = m \vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}.$$

За мгновение до соударения вертикальная составляющая скорости шайбы по величине равна $\sqrt{2gh}$. За время соударения эта составляющая изменяется по знаку, но не по величине, иначе шайба не подскочит на прежнюю высоту. Таким образом, в кратковременном процессе соударения вертикальная составляющая импульса под действием силы нормальной реакции \vec{N} получает приращение $2m\sqrt{2gh}$, равное импульсу силы нормальной реакции:

$$\Delta p_y = N \Delta t = 2m\sqrt{2gh}$$

(действием силы тяжести пренебрегаем). За это же время горизонтальная составляющая импульса шайбы в результате действия силы трения скольжения, равной $F_{\text{тр}} = \mu N$, уменьшается на

$$\Delta p_x = F_{\text{тр}} \Delta t = \mu N \Delta t = \mu \cdot 2m\sqrt{2gh}.$$

Начальные, т.е. непосредственно после соударения, гори-

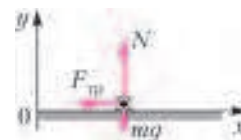


Рис. 2

горизонтальная составляющая скорости шайбы

$$v_{0x} = v_0 - 2\mu\sqrt{2gh}$$

и вертикальная составляющая

$$v_{0y} = \sqrt{2gh}$$

дают ответ (в предположении $v_0 > 2\mu\sqrt{2gh}$):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \frac{\sqrt{2gh}}{v_0 - 2\mu\sqrt{2gh}}.$$

Если $v_0 \leq 2\mu\sqrt{2gh}$, то горизонтальная составляющая скорости шайбы в процессе соударения обратится в ноль, проскальзывание прекратится, и шайба после соударения полетит вертикально вверх.

Задача 3. На прошедшем в августе 2007 года в городе Жуковском авиасалоне МАКС-2007 впервые в мире пять тяжелых истребителей Су-27 из пилотажной группы «Русские витязи» и четыре фронтовых истребителя МиГ-29 из пилотажной группы «Стрижи», пролетая мимо зрителей со скоростью $v_1 = 100$ м/с в плотном строю «ромб» (рис. 3),



Рис. 3

приблизительно за $\tau = 18$ с выполнили «бочку» (вращение строем на 360° вокруг горизонтальной оси). Крайние истребители Су-27 удалены от истребителя в центре строя на $r = 30$ м. На какую величину Δv скорость крайних истребителей Су-27 должна превышать скорость истребителя в центре строя во время выполнения фигуры? Какую

наибольшую перегрузку $n_{\max} = \frac{|\vec{g} - \vec{a}|_{\max}}{g}$ испытывает летчик во время выполнения фигуры? Какова наибольшая сила P , с которой летчик действует на сиденье во время выполнения фигуры? Масса летчика $m = 70$ кг.

Решение. Задачи динамики криволинейного движения нередко вызывают затруднения у учащихся. Ключевыми элементами техники решения таких задач являются анализ движения, выбор системы отсчета, переход из системы в систему, выбор направлений, на которых связь проекций сил и ускорений выглядит наиболее просто, и т.д.

В инерциальной системе отсчета, поступательно движущейся относительно неподвижной (лабораторной) системы отсчета со скоростью \vec{v}_1 , крайние истребители равномерно движутся по окружности радиусом $r = 30$ м и за время $\tau = 18$ с совершают один оборот. В этой системе отсчета скорость \vec{u} крайних истребителей по величине равна

$$u = \frac{2\pi r}{\tau} = 10,5 \text{ м/с}.$$

По закону сложения скоростей величина скорости $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{u}$

крайних истребителей в неподвижной системе отсчета равна

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + u^2} = 100,56 \text{ м/с}.$$

Искомое приращение величины скорости во время выполнения фигуры равно

$$\Delta v = v_2 - v_1 = 0,56 \text{ м/с}.$$

Такой пилотаж – конечно, высший!

Вычислим наибольшую перегрузку, которую испытывает летчик во время выполнения фигуры. В подвижной системе отсчета в нижней точке окружности ускорение $\vec{a}_{\text{нт}}$ противоположно по направлению ускорению свободного падения \vec{g} . Ускорение во всех инерциальных системах отсчета одинаково. Следовательно, и в неподвижной системе отсчета в нижней точке величина $|\vec{g} - \vec{a}|$ достигает наибольшего значения, равного

$$|\vec{g} - \vec{a}|_{\max} = |\vec{g} - \vec{a}_{\text{нт}}| = g + a_{\text{нт}} = g + \frac{u^2}{r}.$$

Отсюда находим

$$n_{\max} = \frac{|\vec{g} - \vec{a}|_{\max}}{g} = 1 + \frac{u^2}{gr} = 1,37.$$

Теперь найдем наибольший вес летчика во время выполнения фигуры. В нижней точке окружности второй закон Ньютона для летчика имеет вид

$$m\vec{a}_{\text{нт}} = \vec{N} + m\vec{g}, \text{ или } m a_{\text{нт}} = N - mg.$$

Следовательно, в этой точке величина силы нормальной реакции \vec{N} , действующей на летчика со стороны сиденья, а с ней и величина силы $\vec{P} = -\vec{N}$ (вес тела) достигают наибольшего значения:

$$P = N = m \left(g + \frac{u^2}{r} \right) = 1,37mg = 960 \text{ Н}.$$

Задача 4. Клин массой $2m$ с углом наклона к горизонту α ($\cos \alpha = 2/3$) находится на гладкой горизонтальной поверхности стола (рис. 4). Через блок, укрепленный на вершине клина, перекинута легкая нить, связывающая грузы, массы которых равны m и $3m$. Груз массой $3m$ может скользить вдоль вертикальной направляющей АВ, закрепленной на клине. Этот груз удерживают неподвижно на расстоянии $H = 27$ см от стола, а затем отпускают. В результате грузы и клин движутся поступательно. На какое расстояние s сместится клин к моменту удара груза массой $3m$ о стол? Массы блока и направляющей АВ считайте пренебрежимо малыми.

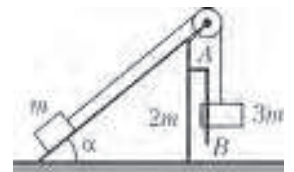


Рис. 4

Решение. При исследовании взаимодействия тел важную роль играют законы сохранения.

Рассмотрим систему тел «клин + грузы». На каждом элементарном промежутке времени Δt приращение $\Delta \vec{p}_c$ импульса системы равно суммарному импульсу действующих на систему внешних сил (рис. 5) – тяжести и нормальной реакции горизонтальной опоры:

$$\Delta \vec{p}_c = (6m\vec{g} + \vec{N})\Delta t.$$

Проекции сил тяжести и нормальной реакции на горизонтальную ось – нулевые. Следовательно, в процессе движения горизонтальная составляющая импульса системы «клин + грузы»

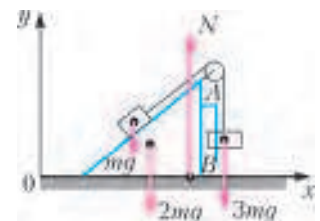


Рис. 5

зы» остается постоянной и равной своему начальному значению, т.е. нулю:

$$(2m + 3m)v_{кx} + mv_{Гx} = 0,$$

где $v_{кx}$ – проекция скорости клина и груза массой $3m$ на горизонтальную ось, $v_{Гx}$ – проекция скорости груза массой m на эту же ось. По правилу сложения скоростей, $\vec{v}_Г = \vec{v}_к + \vec{u}$, где \vec{u} – скорость легкого груза в системе отсчета, связанной с клином. С учетом этого соотношения закон сохранения импульса принимает вид

$$(2m + 3m)v_{кx} + m(v_{кx} + u_x) = 0.$$

Отсюда находим связь проекций скорости:

$$v_{кx} = -\frac{m}{6m}u_x = -\frac{u_x}{6}$$

и элементарных перемещений:

$$\Delta x_к = -\frac{\Delta x}{6},$$

где $\Delta x_к$ – перемещение клина относительно неподвижной (лабораторной) системы, Δx – проекция перемещения легкого груза на горизонтальную ось в подвижной системе отсчета (связанной с клином). В системе отсчета, связанной с клином, модули любых элементарных перемещений грузов равны вследствие нерастяжимости нити. Следовательно, в этой системе перемещение легкого груза в проекции на горизонтальную ось за время движения равно

$$\sum \Delta x = H \cos \alpha.$$

Суммируя элементарные перемещения по всему времени движения и переходя к абсолютным величинам, приходим к ответу на вопрос задачи:

$$s = \frac{H \cos \alpha}{6} = 3 \text{ см.}$$

Молекулярная физика

Задача 5. Одноатомный идеальный газ в количестве $\nu = 1$ моль находится в вертикальном теплоизолированном цилиндре под теплоизолированным легким поршнем, на котором покоится массивный груз. Температура газа T_1 . Массу груза удваивают, и после ряда колебаний поршень останавливается. Найдите конечную температуру газа T_2 . Поршень может скользить в цилиндре без трения. Давление воздуха вне цилиндра пренебрежимо мало.

Решение. По условию поршень легкий. В начальном состоянии давление газа равно $p_1 = \frac{mg}{S}$, где m – масса груза, S – площадь поршня. Тогда уравнение Менделеева–Клапейрона принимает вид

$$\frac{mg}{S} H_1 S = \nu RT_1.$$

В конечном состоянии после установления равновесия давление газа равно $p_2 = \frac{2mg}{S}$, а уравнение состояния имеет вид

$$\frac{2mg}{S} H_2 S = \nu RT_2.$$

Цилиндр теплоизолирован (оболочка адиабатическая), следовательно, в начальном (сразу после удвоения массы груза) и конечном состояниях сумма внутренней энергии газа и потенциальной энергии груза одна и та же:

$$\frac{3}{2} \nu RT_1 + 2mgH_1 = \frac{3}{2} \nu RT_2 + 2mgH_2.$$

Из приведенных соотношений, исключив объемы газа $H_1 S$ и $H_2 S$, находим

$$T_2 = \frac{7}{5} T_1.$$

Задача 6. Один моль одноатомного идеального газа расширился так, что давление уменьшилось на 2%, а объем увеличился на 3%. Найдите теплоемкость газа в процессе расширения.

Решение. Вычисление теплоемкости газа в процессе является одной из важных задач термодинамики, недостаточно освещаемой в школьном курсе.

По определению, в расчете на моль теплоемкость газа

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

на каждом шаге процесса можно представить, с учетом первого начала термодинамики

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A = C_V \Delta T + p \Delta V,$$

в виде

$$C = C_V + p \frac{\Delta V}{\Delta T}.$$

Для вычисления производной $\frac{\Delta V}{\Delta T}$ заметим, что в начальном и конечном состояниях давление, объем и абсолютная температура одного моля газа связаны уравнением состояния:

$$pV = RT,$$

$$(p + \Delta p)(V + \Delta V) = R(T + \Delta T).$$

Вычитая из второго уравнения первое и пренебрегая малой (по сравнению с остальными слагаемыми) величиной $\Delta p \Delta V$, получим связь абсолютных приращений параметров состояния:

$$p \Delta V + \Delta p V = R \Delta T,$$

или

$$\frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T}.$$

Из приведенных соотношений следует, что на каждом шаге процесса

$$p \frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{p}{T} \frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{R \frac{\Delta V}{V}}{\frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta p}{p}},$$

тогда

$$C = C_V + \frac{R \frac{\Delta V}{V}}{\frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta p}{p}}.$$

Подстановка численных значений $C_V = \frac{3}{2} R$, $\frac{\Delta p}{p} = -0,02$, $\frac{\Delta V}{V} = 0,03$ приводит к такому ответу:

$$C = C_V + 3R = \frac{9}{2} R \approx 37,4 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}.$$

Электричество

Задача 7. Две одинаковые металлические сферы расположены на большом удалении друг от друга. К первой сфере подносят и приводят в соприкосновение с ней проводящий шарик, заряд которого Q . Затем шарик переносят и приводят в соприкосновение со второй сферой. После этого оказывается, что на второй сфере находится заряд $0,16Q$. Какой заряд остался на шарике?

Решение. Если уединенному проводнику сообщить произвольный заряд Q , то статическое распределение этого заряда будет таким, что в проводнике электрического поля нет: $\vec{E} = 0$, а в остальном пространстве энергия электрического поля принимает наименьшее значение. Это распределение единственное. (Действительно, если бы таких распределений было хотя бы два, спонтанные переходы от одного распределения к другому сопровождались бы излучением – в электростатике такого не наблюдается.) Отсюда следует, что при увеличении (уменьшении) заряда уединенного проводника в любое число раз поверхностная плотность заряда в окрестности любой точки изменяется в то же самое число раз. Тогда в рассматриваемой задаче отношение, в котором суммарный заряд сферы и шарика делится между ними, при любом контакте есть величина постоянная:

$$\frac{Q - q_1}{q_1} = \frac{0,16Q}{q_2},$$

где q_1 – заряд шарика после первого контакта, а q_2 – после второго. По закону сохранения заряда,

$$q_1 = 0,16Q + q_2.$$

Из приведенных соотношений находим

$$q_2 = 0,04Q.$$

Задача 8. В схеме на рисунке 6 все элементы можно считать идеальными. Параметры элементов схемы указаны на рисунке. До замыкания ключа K ток в цепи отсутствовал.

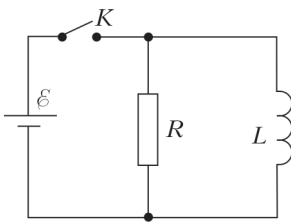


Рис. 6

Ключ замыкают на некоторое время, а затем размыкают. Оказалось, что после размыкания ключа через катушку протек заряд q_0 . Найдите ток через источник сразу после замыкания ключа, ток через катушку сразу после размыкания ключа и работу источника за время, в течение которого ключ был замкнут.

Решение. Задачи о переходных процессах в электрических цепях выходят за рамки традиционного школьного курса. Проиллюстрируем характерную для ряда таких задач технику решения на примере этой задачи.

Сразу после замыкания ключа ток в катушке нулевой, поскольку из-за индуктивности катушки ток мгновенно измениться не может. Тогда сразу после замыкания ключа величину тока в контуре, содержащем источник и резистор, найдем по закону Ома:

$$I = \frac{\varepsilon}{R}.$$

После замыкания ключа напряжение на резисторе и на катушке одно и то же и равно ЭДС батареи:

$$I_R R = \varepsilon,$$

$$L \frac{\Delta I_L}{\Delta t} = \varepsilon.$$

Так что при замкнутом ключе через резистор течет постоянный ток

$$I_R = \frac{\varepsilon}{R},$$

а величина тока через катушку растет от нуля по линейному закону

$$I_L = \frac{\varepsilon}{L} t.$$

За время τ , в течение которого ключ был замкнут, через эти

элементы цепи протекнут заряды

$$q_R = \frac{\varepsilon}{R} \tau \text{ и } q_L = \frac{\varepsilon}{2L} \tau^2.$$

Сразу после размыкания ключа ток через катушку не изменяется, а далее величина тока в контуре, содержащем катушку и резистор, будет убывать в соответствии с законом Ома

$$IR = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Отсюда, с учетом соотношения $\Delta q = I \Delta t$, следующего из определения величины тока, находим

$$\Delta q = -\frac{L}{R} \Delta I.$$

Просуммируем все такие равенства по всему времени убывания тока в контуре от $I = \frac{\varepsilon}{L} \tau$ до $I = 0$ и получим

$$q_0 = \frac{\varepsilon}{R} \tau, \text{ и } \tau = \frac{q_0 R}{\varepsilon}.$$

Таким образом, сразу после размыкания ключа через катушку течет ток

$$I_L = \frac{\varepsilon \tau}{L} = \frac{q_0 R}{L}.$$

Далее находим заряд, протекший через источник за время, в течение которого ключ был замкнут:

$$q = q_R + q_L = q_0 \left(1 + \frac{q_0 R^2}{2\varepsilon L} \right),$$

и работу источника:

$$A = q\varepsilon = q_0 \left(\varepsilon + \frac{q_0 R^2}{2L} \right).$$

Задача 9. В середине горизонтально закрепленного и однородно заряженного стержня находится заряженная бусинка. Длина стержня L , заряд Q , масса бусинки m , заряд q , причем $Q > 0$, $q < 0$. По стержню бусинка может скользить без трения. В начальный момент бусинку слегка смещают и отпускают. Через какое время τ бусинка вернется в положение равновесия? Электрическая постоянная равна ε_0 .

Решение. На этом примере проиллюстрируем применение соображений симметрии и технику вычисления периода колебаний динамическим методом.

Начало неподвижной системы отсчета поместим в середине стержня. Из соображений симметрии следует, что при малом смещении бусинки x ее ускорение определяется силой притяжения концевых отрезков стержня, имеющего вдвое большую длину и расположенного на расстоянии порядка $L/2$ от бусинки (остальные заряды стержня создают в точке, где находится бусинка, нулевое поле):

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{qE_x}{m} = -\frac{|q| (Q/L) \cdot 2x}{m 4\pi\varepsilon_0 (L/2)^2} = -\frac{2|q|Q}{\pi\varepsilon_0 m L^3} x.$$

Получили уравнение гармонических колебаний бусинки, круговая частота которых равна

$$\omega = \sqrt{\frac{2|q|Q}{\pi\varepsilon_0 m L^3}}.$$

Искомое время равно четверти периода гармонических колебаний:

$$\tau = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi L}{2} \sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 m L}{2|q|Q}}.$$

Оптика

Задача 10. *Стеклянный тонкостенный сферический аквариум наполнен водой. Показатель преломления воды $n = 4/3$. Наблюдатель смотрит вдоль диаметра аквариума на приближающуюся к нему маленькую рыбку, плывущую вдоль этого диаметра со скоростью $v = 1,5$ см/с. Найдите скорость v_1 изображения рыбки в тот момент, когда изображение совпадает с рыбкой.*

Решение. Если точечный источник находится в центре сферической поверхности, являющейся границей раздела оптически однородных сред, то для любого луча угол падения на эту границу, а с ним (по закону Снеллиуса) и угол преломления равны нулю. Следовательно изображение совпадает с рыбкой в тот момент, когда она проплывает через центр аквариума. После этого за малый промежуток времени Δt рыбка проплывет расстояние, равное $v\Delta t$, а ее изображение переместится на расстояние $v_1\Delta t$. Ход лучей, формирующих изображение, показан на рисунке 7, где $OA = v\Delta t$

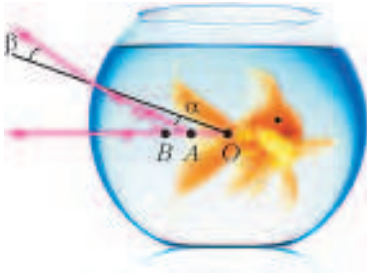


Рис. 7

и $OB = v_1\Delta t$. Изображение формируется узким (параксильным) пучком лучей, попадающих в зрачок. Эти лучи образуют малые углы с нормалью к границе раздела сред. Для них приближенно можно считать $\sin x = \operatorname{tg} x = x$.

Из геометрии хода лучей в приближении малых перемещений ($OA, OB \ll R$, где R – радиус сферы) и малых углов следует

$$\frac{OB}{OA} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

По закону преломления,

$$n\alpha = \beta.$$

Отсюда находим

$$v_1 = nv = 2,0 \text{ см/с}.$$

Задача 11. *Свободное неподвижное ядро атома олова ^{119}Sn испускает γ -квант с энергией $E_\gamma = 22,5$ кэВ, который затем поглощается таким же ядром, движущимся навстречу γ -кванту. Найдите скорость v движущегося ядра, если известно, что при испускании и поглощении γ -кванта ядро переходит между одними и теми же энергетическими уровнями. Энергия покоя ядра олова равна $mc^2 = 113$ ГэВ.*

Решение. Важную роль в физике микромира играют законы сохранения импульса и энергии.

Напомним, что гамма-квант излучается при переходе атомных ядер из возбужденных состояний с большей энергией в состояния с меньшей энергией. Пусть ΔE – разность энергий ядра до и после испускания γ -кванта. В процессе испускания сохраняются импульс и энергия:

$$\vec{p}_\gamma + \vec{p} = 0,$$

$$\Delta E = E_\gamma + \frac{p^2}{2m}.$$

Здесь p_γ – импульс γ -кванта, связанный с его энергией соотношением $p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c}$ (c – скорость света), p – импульс ядра отдачи. Тогда закон сохранения энергии можно представить в виде

$$\Delta E = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2mc^2}.$$

При поглощении γ -кванта движущимся навстречу ядром тоже сохраняются импульс и энергия, а переход ядра происходит между теми же энергетическими уровнями:

$$\vec{p}_\gamma + \vec{p}_1 = \vec{p}_2, \quad E_\gamma + \frac{p_1^2}{2m} = \Delta E + \frac{p_2^2}{2m}.$$

Из законов сохранения энергии при испускании и поглощении γ -излучения следует

$$\frac{p_1^2}{2m} = \frac{E_\gamma^2}{2mc^2} + \frac{p_2^2}{2m}.$$

Закон сохранения импульса при поглощении запишем в виде

$$p_1 - \frac{E_\gamma}{c} = p_2.$$

Возведем в квадрат и разделим на $2m$ обе части этого равенства, получим

$$\frac{p_1^2}{2m} - \frac{p_1 E_\gamma}{mc} + \frac{E_\gamma^2}{2mc^2} = \frac{p_2^2}{2m}.$$

Из приведенных соотношений находим

$$p_1 = \frac{E_\gamma}{c},$$

откуда

$$v = \frac{p_1}{m} = \frac{E_\gamma}{mc} = \frac{E_\gamma}{mc^2} c = 60 \text{ м/с}.$$

Ответ подтверждает нерелятивистское приближение, использованное в решении.

Как стекло сделать прочным?

(Начало см. на 4-й странице обложки)

словами, для уменьшения размеров образца нужно время, и поэтому если охлаждать быстро, то атомы так и останутся со старыми соседями и на старом расстоянии от них.

Нечто подобное происходит при резком охлаждении воды – она затвердевает без образования кристалликов льда (этот процесс называется витрификацией). Это используется в медицине, когда криопротекторный раствор, в котором находятся живые организмы, не кристаллизуется

при охлаждении, а переходит в стекловидное состояние. Или при так называемом шоковом замораживании продуктов, например клубники.

Любопытно, что боковые и задние стекла автомобилей закаливают именно таким образом, в результате чего их прочность увеличивается в 5 раз. Да и ломаются они более безопасно. А вот ветровые (или лобовые) стекла изготавливают по другой технологии – их делают слоеными, при этом два слоя стекла наклеивают на разделяющую их полимерную пленку.

К.Богданов

Заключительный этап XXXIX Всероссийской олимпиады школьников по математике

В 2013 году заключительный этап Всероссийской математической олимпиады прошел с 23 по 29 апреля в Сарове. Являясь одним из ведущих научно-технических центров страны, этот город занимает также важное место в истории России. Для участников олимпиады были организованы интересные экскурсии, встречи с молодыми учеными города. Яркими и запоминающимися оказались церемонии открытия и закрытия олимпиады. Успех олимпиады — в слаженной работе Министерства образования Нижегородской области, Нижегородского государственного университета имени Н.И.Лобачевского, Администрации и Департамента образования Сарова, Российского федерального ядерного центра ВНИИЭФ.

В олимпиаде приняли участие 246 школьников из большинства регионов нашей страны, а также шесть школьников, составивших команду Китайской Народной Республики, с которой продолжается многолетнее сотрудничество в математическом образовании. Особенно большой урожай наград на олимпиаде собрали делегации Москвы и Санкт-Петербурга.

В каждом из двух туров олимпиады участникам было предложено для решения по 4 задачи. В этом году участники олимпиады справились с заданиями в среднем несколько лучше, чем в предыдущие годы, — даже самые трудные задачи олимпиады были решены не менее чем семью школьниками. Лучшими задачами, по данным опроса участников олимпиады, стали задачи 6 для 9 класса, 3 для 10 класса и 7 для 11 класса.

Публикуем условия задач и список победителей и призеров заключительного этапа XXXIX Всероссийской олимпиады школьников по математике.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

9 класс

1. Даны различные действительные числа a, b, c . Докажите, что хотя бы два из уравнений $(x - a)(x - b) = x - c$, $(x - b)(x - c) = x - a$, $(x - c)(x - a) = x - b$ имеют решение.

И.Богданов

2. См. задачу M2316 «Задачника «Кванта».

3. См. задачу M2319 «Задачника «Кванта».

4. См. задачу M2323,а «Задачника «Кванта».

5. По кругу расставлены $2n$ действительных чисел, сумма которых положительна. Для каждого из них рассмотрим обе группы из n подряд стоящих чисел, в которых это число является крайним. Докажите, что найдется число, для которого сумма чисел в каждой из двух таких групп положительна.

А.Грибалко

6. Петя и Вася придумали десять квадратных трехчленов. Затем Вася по очереди называл последовательные натураль-

ные числа (начиная с некоторого), а Петя каждое названное число подставлял в один из трехчленов по своему выбору и записывал полученные значения на доску слева направо. Оказалось, что числа, записанные на доске, образуют арифметическую прогрессию (именно в этом порядке). Какое максимальное количество чисел Вася мог назвать?

А.Голованов

7. На сторонах остроугольного треугольника ABC вне него построены квадраты $CAKL$ и $CBMN$. Прямая CN пересекает отрезок AK в точке X , а прямая CL пересекает отрезок BM в точке Y . Точка P , лежащая внутри треугольника ABC , является точкой пересечения окружностей, описанных около треугольников KXN и LYM . Точка S — середина отрезка AB . Докажите, что $\angle ACS = \angle BCP$.

И.Богданов

8. В клетчатом квадрате 55×55 выделили 900 фигур (никакие две из которых не имеют общей клетки): 400 трехклеточных уголков (повернутых как угодно) и 500 клеток. Докажите, что найдутся две выделенные фигуры, имеющие общий отрезок границы.

С.Берлов

10 класс

1. См. задачу 1 для 9 класса.

2. См. задачу M2318 «Задачника «Кванта».

3. См. задачу M2321,а «Задачника «Кванта».

4. Внутри вписанного четырехугольника $ABCD$ отмечены такие точки P и Q , что

$$\begin{aligned} \angle PDC + \angle PCB &= \angle PAB + \angle PBC = \\ &= \angle QCD + \angle QDA = \angle QBA + \angle QAD = 90^\circ. \end{aligned}$$

Докажите, что прямая PQ образует равные углы с прямыми AD и BC .

А.Пастор

5. См. задачу M2317,а «Задачника «Кванта».

6. См. задачу 6 для 9 класса.

7. См. задачу M2320 «Задачника «Кванта».

8. На плоскости нарисован квадрат, стороны которого горизонтальны и вертикальны. В нем проведены несколько отрезков, параллельных сторонам, причем никакие два отрезка не лежат на одной прямой и не пересекаются по точке, внутренней для обоих отрезков. Оказалось, что отрезки разбили квадрат на прямоугольники, причем любая вертикальная прямая, пересекающая квадрат и не содержащая отрезков разбиения, пересекает ровно k прямоугольников разбиения, а любая горизонтальная прямая, пересекающая квадрат и не содержащая отрезков разбиения, — ровно l прямоугольников. Каким могло оказаться количество прямоугольников разбиения?

И.Богданов, Д.Фон-Дер-Флаасс

11 класс

1. Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ десятой степени, старшие коэффициенты которых равны 1. Известно, что уравнение $P(x) = Q(x)$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $P(x+1) = Q(x-1)$ имеет хотя бы один действительный корень.

И. Богданов

2. Вписанная и невписанная сферы треугольной пирамиды $ABCD$ касаются ее грани BCD в различных точках X и Y . Докажите, что треугольник AXY тупоугольный. (Невписанная сфера пирамиды касается одной ее грани, а также плоскостей остальных граней вне этих граней.)

В. Шмаров

3. См. задачу M2321,6 «Задачника «Кванта».

4. На каждой из 2013 карточек написано по числу, все эти 2013 чисел различны. Карточки перевернуты числами вниз. За один ход разрешается указать на десять карточек, и в ответ сообщат одно из чисел, написанных на них (неизвестно, какое). Для какого наибольшего t гарантированно уда-

стся найти t карточек, про которые известно, какое число написано на каждой из них?

И. Богданов

5. Из целых чисел от 0 до 1000 выбрали 101 число. Докажите, что среди модулей их попарных разностей есть десять различных чисел, не превосходящих 100.

И. Богданов

6. Положительные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $2(a+b+c+d) \geq abcd$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq abcd$.

А. Храбров

7. См. задачу M2322 «Задачника «Кванта».

8. В треугольник ABC вписана окружность ω с центром в точке I . Около треугольника AIB описана окружность Γ . Окружности ω и Γ пересекаются в точках X и Y . Общие касательные к окружностям ω и Γ пересекаются в точке Z . Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC и XYZ , касаются.

С. Ильясов

ДИПЛОМАНТЫ ОЛИМПИАДЫ

Диплом победителя

по 9 классам получили

Богданов Илья – Москва, школа 25,
Губкин Павел – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Кузнецов Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Фролов Иван – Москва, Центр образования 1329,
Лосев Илья – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Гладков Никита – Томск, ФТЛ;

по 10 классам –

Зайцева Юлия – Москва, школа 179,
Зайков Александр – Краснодар, лицей Института современных технологий и экономики,
Чернега Никита – Казань, гимназия 122,
Креков Дмитрий – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Данилюк Алексей – СУНЦ УрГУ,
Ершов Станислав – Воронеж, школа 1;

по 11 классам –

Волгин Андрей – Москва, гимназия 1543,
Клюев Даниил – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Шабанов Лев – Москва, СУНЦ МГУ,
Крачун Дмитрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Баев Будимир – Санкт-Петербург, ФМЛ 239.

Диплом призера

по 9 классам получили

Ходунов Павел – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Бочков Иван – Ижевск, ЭМЛ 29,
Мяков Константин – Санкт-Петербург, ФМЛ 30,
Сергунин Андрей – Новосибирск, гимназия 1,
Серков Константин – Челябинск, лицей 31,
Салимов Руслан – Москва, Центр образования 1329,
Селянин Федор – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Зимин Александр – Ульяновск, школа 52,

Юргин Григорий – Москва, лицей «Вторая школа»,
Васильчишин Сергей – Киров, ФМЛ,
Евтушевский Всеволод – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Козлинский Евгений – Краснодар, лицей Института современных технологий и экономики,
Мрыхин Михаил – Ижевск, ИЕГЛ «Школа-30»,
Саркеев Асхат – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Ягламунов Владислав – Златоуст, лицей 31,
Ибраева Алина – Москва, школа 179,
Ипатов Михаил – Кострома, гимназия 1;

по 10 классам –

Гаркавий Андрей – Москва, Центр образования 218,
Гвоздевский Павел – Апатиты, школа 6 с углубленным изучением английского языка,
Симарова Екатерина – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Волостнов Алексей – Казань, гимназия 122,
Яровиков Юрий – Казань, лицей имени Н.И.Лобачевского при КФУ,
Захаров Никита – Магнитогорск, школа 5 с углубленным изучением математики,
Якубов Ален – Краснодар, лицей Института современных технологий и экономики,
Власова Надежда – Ярославль, школа 36,
Семенов Константин – Ижевск, лицей 41,
Толмачев Дмитрий – Екатеринбург, гимназия 9,
Аникеев Дмитрий – Омск, гимназия 117,
Зерцалов Андрей – Москва, Центр образования 218,
Киселев Сергей – Омск, лицей 64,
Нарышкин Петр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Нигметзянова Диана – Казань, лицей имени Н.И.Лобачевского при КФУ,
Печатнов Юрий – Барнаул, гимназия 42,
Уваров Никита – Москва, лицей «Вторая школа»,
Холмогоров Ефим – Ижевск, ЭМЛ 29,
Амирханов Николай – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Соколов Артемий – Москва, школа 179;

по 11 классам –

Африонов Денис – Курган, гимназия 47,
Голованов Александр – Казань, лицей имени Н.И. Лобачевского при КФУ,
Иванов Константин – Долгопрудный, ФМЛ 5,
Целищев Антон – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Бросян Ваге – Нижний Новгород, лицей 165 имени 65-летия «ГАЗ»,
Бубнова Анна – Курган, гимназия 19,
Воронецкий Егор – Петрозаводск, школа 42 с углубленным изучением английского языка и математики,
Белов Дмитрий – Набережные Челны, гимназия 26,
Евсюков Алексей – Владивосток, лицей «Технический»,
Матушкин Александр – Ижевск, лицей 41,
Карпушкин Данил – Челябинск, лицей 31,
Дидин Максим – Переславль-Залесский, гимназия,
Струков Георгий – Санкт-Петербург, лицей 533 «Образовательный комплекс «Малая Охта»,
Шарипова Анастасия – Сочи, гимназия 8,

Горбачев Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Григорьев Тимофей – Москва, гимназия 1514,
Жевнерчук Антон – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Заславский Олег – Москва, гимназия 1543,
Капитонов Александр – Курган, школа 5,
Корякин Данил – Киров, ФМЛ,
Мокин Александр – Саратов, лицей математики и информатики,
Петров Александр – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Погуляева Ирина – Новосибирск, гимназия 1,
Хроменков Ярослав – Москва, СУНЦ МГУ,
Ясновидов Григорий – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Матвеев Максим – Новосибирск, гимназия 6 «Горностаи».

Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, А.Гарбер, П.Кожевников, О.Подлипский, Д.Герёшин

Заключительный этап XLVII Всероссийской олимпиады школьников по физике

В этом году заключительный этап Всероссийской олимпиады школьников по физике прошел во Владивостоке. Базой для проведения теоретического и экспериментального туров олимпиады стал новый учебный студенческий городок Дальневосточного федерального университета на острове Русский.

Каждому участнику олимпиады было предложено решить пять теоретических задач и выполнить два экспериментальных задач.

Перед закрытием олимпиады был проведен опрос участников олимпиады. Он показал, что возросли как уровень сложности задач, так и качество их подборки (участники отметили это как положительный момент олимпиады). Многие задачи были красивы и по форме, и по содержанию.

По результатам решения задач теоретического тура самой трудной для девятиклассников оказалась задача 3 (средний балл 2,8 из 10 возможных), а самой легкой – задача 1 (средний балл 7,3). Для десятиклассников самой трудной была задача 1 (1,9 балла), а самой легкой – задача 4 (7,3 балла). Для одиннадцатиклассников же наибольшие трудности вызвала задача 5 (2,9 балла), а наименьшие – задачи 2 и 4 (по 7,3 балла).

За выполнение экспериментальных заданий, к сожалению, ни один из участников ни за одну из задач не получил максимально возможное количество баллов.

На закрытии олимпиады, помимо награждения победителей, были названы члены национальной сборной команды на Международную физическую олимпиаду 2013 года (Дания), кандидаты на Международную олимпиаду 2014 года (Казахстан) и на Международную естественно-научную олимпиаду юниоров (декабрь 2013 года, Индия).

Ниже приводятся задачи теоретического тура и список победителей и призеров XLVII Всероссийской олимпиады школьников по физике.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс

Задача 1. Теория относительности

Две частицы начали движение из одной точки во взаимно перпендикулярных направлениях (рис.1). Первая – с начальной скоростью $3v$ и постоянным ускорением $3a$, сонаправленным с начальной скоростью, другая со скоростью $4v$ и постоянным ускорением $4a$, направленным противоположно начальной скорости. Численно: $a = 0,538 \text{ м/с}^2$, $v = 10 \text{ м/с}$. Каким будет расстояние L между частицами в момент, когда их относительная скорость по модулю опять станет равна начальной относительной скорости? Чему будет равна минимальная относительная скорость $v_{\text{отн}}$ частиц?

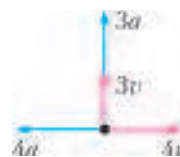


Рис. 1

М.Замятнин

Задача 2. Дело – труба!

В теплоизолированном цилиндре на расстоянии $L_1 = 80 \text{ см}$ друг от друга находятся два легкоподвижных теплопроводящих поршня (рис.2). Пространство между ними заполнено водой, а снаружи на поршни действует атмосферное давление. Слева от левого поршня включили холодильник, который поддерживает постоянную температуру $t_1 = -40 \text{ }^\circ\text{C}$, а справа от правого включили нагреватель, поддерживающий

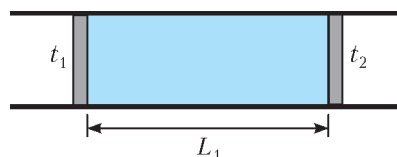


Рис. 2

постоянную температуру $t_2 = 16^\circ\text{C}$. Через некоторое время система пришла в стационарное состояние, и расстояние между поршнями стало L_2 . После этого поршни снаружи теплоизолировали и дождались установления теплового равновесия в цилиндре. Расстояние между поршнями стало L_3 . Найдите расстояния L_2 и L_3 . Плотность льда $\rho_{\text{л}} = 900 \text{ кг/м}^3$, плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1000 \text{ кг/м}^3$, удельная теплоемкость воды $c_{\text{в}} = 4200 \text{ Дж/(кг}\cdot^\circ\text{C)}$, удельная теплоемкость льда $c_{\text{л}} = 2100 \text{ Дж/(кг}\cdot^\circ\text{C)}$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 330 \text{ кДж/кг}$, коэффициент теплопроводности льда в 4 раза больше коэффициента теплопроводности воды.

Указание. Считайте, что мощность теплового потока P вдоль цилиндра, между торцами которого поддерживается постоянная разность температур Δt , равна $P = \frac{kS\Delta t}{L}$, где k – коэффициент теплопроводности среды, S – площадь торца цилиндра, L – длина цилиндра.

М.Иванов



Рис. 3

Задача 3. Бусинки на кольце

Тонкое проволочное кольцо массой M стоит на горизонтальной плоскости (рис.3). По кольцу могут скользить без трения две одинаковые бусинки массой m каждая. В начальный момент времени бусинки находятся вблизи верхней точки кольца. Их одновременно отпускают, и они начинают двигаться симметрично. При каком отношении масс $n = m/M$ кольцо оторвется от плоскости?

Д.Домарецкий

Задача 4. Лед в лучах лазера

Для изучения свойств льда в лаборатории собрали установку из блоков и нитей (рис.4). К нитям прикрепили четыре льдинки разных масс, поместив их в цилиндрический стакан с водой. Система пришла в равновесие, когда тяжелые льдинки частично погрузились в воду, а самая легкая, массой m , осталась висеть в воздухе (рис.4). По ходу эксперимента на льдинку, висящую в воздухе, направили луч лазера, и она стала плавиться. Талая вода при этом стекала в стакан. После сообщения льдинке количества теплоты $Q = 825 \text{ Дж}$ уровень воды в стакане изменился на $\Delta h_1 = 1 \text{ см}$. После полного плавления висящей льдинки изменение уровня по сравнению с первоначальным составило $\Delta h_2 = 3 \text{ см}$.

Рис. 4

- 1) Увеличивался или уменьшался уровень воды в стакане?
- 2) Определите, чему равна площадь дна стакана.
- 3) В каком диапазоне изменялась сила натяжения нити, удерживающей льдинку массой $6m$?

Считайте, что вплоть до полного плавления висящая льдинка оставалась на нити, не касаясь воды. Блоки и нити невесома. Температура льда и воды в начале и во время эксперимента равнялась комнатной $t_{\text{к}} = 0^\circ\text{C}$. Плотность льда $\rho_{\text{л}} = 900 \text{ кг/м}^3$, плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1000 \text{ кг/м}^3$. Удель-

ная теплота плавления льда $\lambda = 330 \text{ кДж/кг}$. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

М.Замятнин

Задача 5. Реостатика

Экспериментатор Глюк проводит опыты с электрической цепью, схема которой изображена на рисунке 5. Цепь состоит из источника неизвестного напряжения U_0 , резистора сопротивлением $R_3 = 1 \text{ Мом}$, резисторов с неизвестными сопротивлениями R_1 и R_2 , двух идеальных амперметров и реостата 1–2 – проводника постоянного сечения, к которому подсоединен ползунок 3. Длина реостата $L = 1 \text{ м}$, а его сопротивление $r = 1 \text{ кОм}$. Меняя положение ползунка реостата, Глюк построил график зависимости силы тока I через амперметр A_1 от длины x участка 1–3 реостата (рис.6).

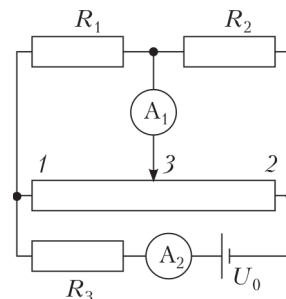


Рис. 5

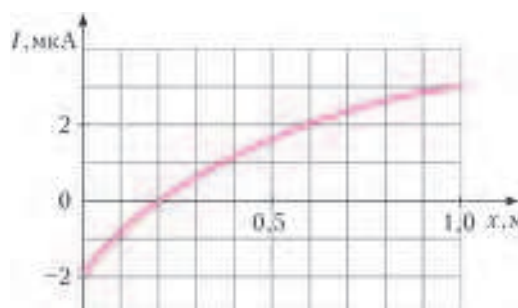


Рис. 6

- 1) Найдите отношение сопротивлений $R_1 : R_2$.
- 2) Изобразите график приближенной зависимости силы тока I_0 через амперметр A_2 от длины x участка 1–3 реостата.
- 3) Найдите сопротивления резисторов R_1 , R_2 и напряжение источника U_0 .

Примечание. Все значения можно вычислять с погрешностью не более 0,1%.

О.Шведов

10 класс

Задача 1. Мешок и трение

Мешочек с песком бросают с горизонтальной поверхности земли под некоторым углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 . После приземления он теряет вертикальную составляющую скорости. Найдите максимальное горизонтальное перемещение мешочка относительно точки бросания и угол α , при котором оно достигается. Коэффициент трения между мешочком и плоскостью равен μ . Ускорение свободного падения равно g . Время удара считайте малым.

Е.Савинов

Задача 2. Процессы в сосуде

Горизонтально расположенный теплоизолированный цилиндрический сосуд разделен на два отсека неподвижной теплопроводящей перегородкой. Второй отсек отделен от атмосферы подвижным и не проводящим тепло поршнем. Оба отсека наполнены азотом, система находится в равновесии. Газ в первом отсеке быстро нагревают. Известно, что с момента сразу после нагрева до восстановления теплового равновесия суммарная внутренняя энергия газа изменилась

на ΔU . Найдите изменение внутренней энергии ΔU_1 азота в первом отсеке за тот же промежуток времени. Теплоемкостью сосуда и поршней можно пренебречь.

А.Шеронов

Задача 3. Два шарика

Два одинаковых маленьких шарика массой m каждый связаны невесомой и нерастяжимой нитью длиной l и покоятся на гладкой горизонтальной плоскости (рис.7). Правому шарiku сообщается вертикальная скорость v_0 . Ускорение свободного падения равно g .



Рис. 7

1) Найдите радиус кривизны траектории верхнего шарика в момент, когда нить вертикальна.

2) При каком значении начальной скорости v_0 нижний шарик в этот момент перестанет давить на плоскость?

Е.Бутиков

Задача 4. Эксперимент

Два вертикальных цилиндрических сосуда соединены в нижней части трубкой с манометром пренебрежимо малого объема (рис.8). Внутри цилиндров установлены поршни, а в верхней части цилиндров – упоры, ограничивающие подъем поршней. Расстояния от нижней части поршней до дна цилиндров при верхнем расположении поршней одинаковы и равны $h = 1$ м. Под поршнями находится один моль идеального газа, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Поршни могут перемещаться в цилиндрах без трения. В таблице представлены результаты измерений давления в цилиндрах при пяти различных значениях температуры газа:

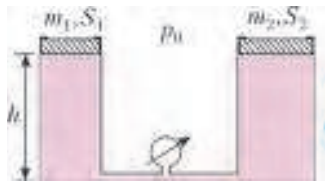


Рис. 8

Определите массы обоих поршней m_1 , m_2 и площади сечения цилиндров S_1 , S_2 .

А.Аполонский

Задача 5. Электрическая цепь

В схеме (рис.9) все элементы можно считать идеальными. ЭДС источника $\mathcal{E} = 4,0$ В, сопротивления резисторов $r = 50$ кОм, $R = 150$ кОм, емкость конденсатора $C = 2,0$ мФ. До замыкания ключа ток в цепи отсутствовал. Ключ замыкают на некоторое время, а затем размыкают. За время пока ключ был замкнут, в схеме выделилось количество теплоты $Q_1 = 7,43$ мДж, а после размыкания ключа в схеме выделилось количество теплоты $Q_2 = 1,00$ мДж.

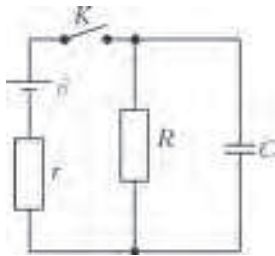


Рис. 9

1) Какой заряд протек через резистор сопротивлением R , пока ключ был замкнут?

2) На какое время замкнули ключ?

А.Шеронов, Д.Александров

11 класс

Задача 1. Колебания спицы

На концах легкой спицы длиной L закреплены два одинаковых маленьких металлических шарика (рис.10). Спицу поставили на подставку шириной $l \ll L$ так, что ее середина оказалась над серединой подставки, и отклонили на небольшой угол $\phi_0 \ll 1$. Определите период малых колебаний спицы, если при переходе спицы с одного ребра подставки на другое потери энергии пренебрежимо малы, а спица от подставки не отрывается и не проскальзывает.



Рис. 10

В.Слободянин

Задача 2. Трое в поле, не считая конденсатора

Из одного куска проволоки спаяна плоская фигура, состоящая из трех квадратов со стороной a (рис.11). В один из отрезков проволоки впаян конденсатор емкостью C . Конструкция находится в однородном магнитном поле \vec{B} , которое перпендикулярно плоскости фигуры и увеличивается с постоянной скоростью $dB/dt = k > 0$. Сопротивление куска проволоки длиной a равно r . Для установившегося режима определите:

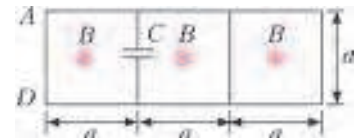


Рис. 11

1) силу и направление тока в отрезке AD ;

2) заряд Q на конденсаторе и знаки зарядов на его обкладках;

3) количество теплоты W , выделившееся в цепи за время τ .

В.Чивилёв

Задача 3. Восстановление линзы

Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли оптическую схему, на которой были изображены идеальная тонкая линза, предмет и его изображение. Из текста следует, что предмет представляет собой стержень длиной l с двумя точечными источниками на концах. Стержень и главная оптическая ось находились в плоскости рисунка, а также стержень не пересекал плоскость линзы. От времени чернила выцвели, и на рисунке остались видны лишь сами источники и их изображения, причем неизвестно, какая из четырех точек чему соответствует (рис.12). Интересно, что эти точки располагаются в вершинах и в центре равностороннего треугольника.

1) Определите, самому предмету или его изображению принадлежит точка в центре треугольника.

2) Восстановите оптическую схему (предмет, изображение, линзу, ее главную оптическую ось, фокусы) с точностью до поворота рисунка на 120° и до отражения.

3) Найдите фокусное расстояние линзы.

Примечание. Линза называется идеальной, если любой пучок параллельных лучей фокусируется в ее фокальной плоскости.



Рис. 12

А.Аполонский

Задача 4. Давление газировки

На заводе воду в бутылках (рис.13) обезгаживают (извлекают растворенный воздух), газировуют углекислым газом до насыщения при температуре $t_1 = 4^\circ\text{C}$ и давлении $p_1 =$



Рис. 13

$= 150$ кПа, а затем герметично закрывают и отправляют на склад, где температура воздуха, согласно условиям хранения, не превышает $t_2 = 35^\circ\text{C}$. Пренебрегая изменением объема жидкости и бутылки, определите:

1) минимальный объем надводной части V , если максимальное давление в бутылке при хранении $p_2 = 370$ кПа;

2) уровень x , до которого на заводе наливают воду, соответствующий этому объему.

Масса воды в бутылке $m_v = 2$ кг. Молярная масса углекислого газа $M = 44$ г/моль. Геометрические размеры бутылки: $d = 3$ см, $b = 10$ см, $h = 27$ см, $H = 30$ см, $D = 13$ см.

Примечание. Считайте, что растворимость газов σ при постоянной температуре пропорциональна их парциальному давлению над жидкостью (закон Генри), а график зависимости растворимости углекислого газа в воде от температуры при его парциальном давлении $p_0 = 100$ кПа дан на рисунке 14. Парциальным давлением паров воды в данном диапазоне

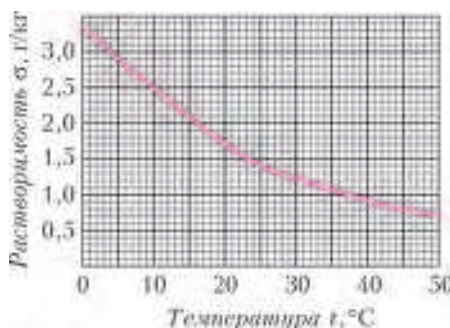


Рис. 14

температур можно пренебречь. Растворимость σ – это масса газа (в граммах), растворенного в 1 кг жидкости.

В. Бабищев

Задача 5. Неисправная ракета

Лейтенант-экспериментатор Глюк проводил свои исследования на военном полигоне с новыми сигнальными ракетами, которые во время полета с постоянной скоростью v издают звук постоянной частоты f_0 , при помощи датчиков частоты. Скорость звука на полигоне $v_{зв} = 330$ м/с.

1) Какой частоты звук будет принимать датчик, если ракета летит строго на него?

2) Какой частоты звук будет принимать датчик, расположенный на большом удалении от летящей ракеты, если угол между скоростью ракеты и направлением на датчик равен φ ?

3) Проводя исследования, лейтенант-экспериментатор Глюк случайно выпустил неисправную сигнальную ракету, которая стала летать вдоль поверхности полигона на малой высоте с той же постоянной скоростью v по кругу радиусом r . Ракету успешно нейтрализовали, а лейтенант-экспериментатор обратил внимание на графики самописца, который записывал зависимость частоты звука от времени у двух датчиков 1 и 2, расположенных на полигоне. Используя

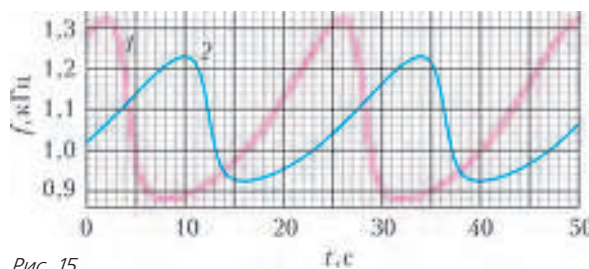


Рис. 15

полученные графики (рис.15), помогите Глюку определить расстояние L между этими датчиками.

И. Ерофеев

ДИПЛОМАНТЫ ОЛИМПИАДЫ

Диплом победителя

по 9 классам получили

Утешев Иван – Республика Мордовия,
Асриян Норайр – Москва,
Гладков Никита – Томская область,
Селянин Федор – Москва;

по 10 классам –

Мелентьев Александр – Челябинская область,
Пикалов Арсений – Новосибирская область,
Биктаиров Юрий – Москва,
Данилюк Алексей – Свердловская область,
Ковалев Дмитрий – Московская область,
Прокошев Никита – Пермский край;

по 11 классам –

Фрадкин Илья – Москва,
Великанов Максим – Свердловская область,
Денисов Артем – Приморский край,
Куренков Михаил – Нижегородская область,
Маслов Иван – Челябинская область,
Кацан Арсентий – Челябинская область.

Диплом призера

по 9 классам получили

Карасев Иван – Республика Мордовия,
Максимов Антон – Челябинская область,
Воронин Кирилл – Челябинская область,
Красников Алексей – Республика Татарстан,
Кулыгин Дмитрий – Нижегородская область,
Эм Андрей – Москва,
Петров Степан – Санкт-Петербург,
Багиров Фарид – Санкт-Петербург,
Пономарева Ирина – Приморский край,
Железнов Николай – Белгородская область,
Солоненко Иван – Новосибирская область,
Стоян Артем – Астраханская область,
Тепайкин Роман – Республика Мордовия,
Центомирский Валентин – Пензенская область,
Амчиславский Юрий – Санкт-Петербург,
Раченков Дмитрий – Ленинградская область,
Беспалова Татьяна – Нижегородская область,
Ершов Арсений – Москва,
Татаркин Дмитрий – Республика Мордовия,
Писаренко Анастасия – Алтайский край,

Алцыбеев Максим – Кировская область,
Морозов Дмитрий – Санкт-Петербург,
Бордюгов Анатолий – Москва,
Трофимов Даниил – Санкт-Петербург,
Вишнякова Нина – Москва,
Соколов Максим – Самарская область,
Басимова Ниталья – Москва,
Громыко Дмитрий – Москва,
Мурзин Дмитрий – Челябинская область,
Шатский Владимир – Москва;

по 10 классам –

Захаров Роман – Москва,
Широких Борис – Кировская область,
Петров Павел – Москва,
Ситнов Владимир – Алтайский край,
Смердов Антон – Кировская область,
Ломов Константин – Новосибирская область,
Вахрамеев Даниил – Удмуртская Республика,
Калинин Николай – Нижегородская область,
Любайкина Наталья – Республика Мордовия,
Федотов Никита – Хабаровский край,
Стариков Сергей – Оренбургская область,
Рогозин Александр – Челябинская область,
Толмачев Дмитрий – Свердловская область,
Елсуков Владислав – Свердловская область,
Лопаткин Даниил – Ханты-Мансийский АО,
Семенов Павел – Москва,

Малиновский Григорий – Республика Татарстан,
Федоров Илья – Камчатский край,
Шишкин Евгений – Пермский край;

по 11 классам –

Калинов Даниил – Москва,
Хабаров Максим – Санкт-Петербург,
Дидин Максим – Ярославская область,
Егоров Антон – Санкт-Петербург,
Кадырметов Шамиль – Калининградская область,
Поздняков Сергей – Москва,
Загвоздкин Андрей – Свердловская область,
Подлесный Максим – Московская область,
Васильюк Антон – Москва,
Туманов Владислав – Новосибирская область,
Бурдина Анастасия – Пермский край,
Лебедев Роман – Алтайский край,
Потапов Анатолий – Ульяновская область,
Корякин Илья – Новосибирская область,
Матвеев Иван – Волгоградская область,
Лихошерстов Валерий – Свердловская область,
Вишняков Павел – Москва,
Дегтяренко Антон – Приморский край,
Антропов Александр – Москва,
Лукин Дмитрий – Москва,
Сабденов Чингиз – Томская область.

Публикацию подготовили С.Козел, В.Слободянин

LIV Международная математическая олимпиада

С 18 по 28 июля 2013 года в Колумбии, в расположенном на берегу Карибского моря курортном городе Санта-Марта, прошла LIV Международная математическая олимпиада (ММО). В олимпиаде приняли участие 527 победителей национальных соревнований из 97 стран мира.

В этом году в сборную России вошли выпускники школы *Будимир Баев* и *Дмитрий Крачун* из Санкт-Петербурга (ФМЛ 239), *Егор Воронцовский* из Петрозаводска (школа

42), *Лев Шабанов* из Ангарска Иркутской области (СУНЦ МГУ), а также десятиклассники *Даниил Ключев* из Санкт-Петербурга (ФМЛ 239) и *Андрей Волгин* из Москвы (гимназия 1543).

Задания Международной математической олимпиады состоят из 6 задач (по 3 в каждом из туров олимпиады), их отбирают все руководители сборных стран-участниц. В этом году обе сложные задачи – 3 и 6 – были предложены Россией, что подтвердило высокий статус российской олимпиадной математической школы. Задача 6 оказалась самым сложным заданием олимпиады, полностью с ней справились только 7 участников.

Последний этап подготовки команды к ММО – летние учебно-тренировочные сборы – проходил, как и в предыдущие годы, в детском лагере «КОМПЬЮТЕРИЯ» (Тверская область). Большой вклад в успешное выступление команды внесли преподаватели сборов: педагог ФМЛ 239 Санкт-Петербурга, к.ф.-м.н. *С.Л.Берлов*, научный сотрудник, преподаватель МГУ, к.ф.-м.н. *А.И. Гарбер*, научный сотрудник ЯрГУ, к.ф.-м.н. *А.А. Глазырин*, педагог дополнительного образования Санкт-Петербурга *А.С.Голованов*, профессор ЯрГУ, д.ф.-м.н. *В.Л.Дольников*, доцент МФТИ, к.ф.-м.н. *П.А.Кожеников*, аспиранты МГУ *А.Н.Магазинов* и *И.В.Митрофанов*, аспирант СПбГУ *К.А.Сухов*, аспирант ЯрГУ *Г.Р.Челноков*.

Руководители команды благодарят *Дмитрия Юрьевича Дойхена*, на протяжении многих лет оказывающего поддержку команде России в международных математических соревнованиях.



Слева направо: *Б.Баев*, *Д.Крачун*, *Е.Воронцовский*, *Л.Шабанов*, *Д.Ключев*, руководитель команды *Н.Агаханов*

Приводим результаты выступления нашей сборной (полная информация о результатах всех участников олимпиады размещена на официальном сайте www.imo-official.org):

Участник	Баллы по задачам						Сумма баллов	Медаль
	1	2	3	4	5	6		
Волгин Андрей	7	7	7	7	7	0	35	золотая
Шабанов Лев	7	4	7	7	7	3	35	золотая
Воронцовский Егор	7	7	0	7	7	5	33	золотая
Крочун Дмитрий	7	7	0	7	7	3	31	золотая
Кляев Даниил	7	6	0	7	7	1	28	серебряная
Бэев Будимир	7	3	2	7	5	1	25	серебряная

В неофициальном командном зачете лучшие команды мира расположились в следующем порядке:

Место	Страна	Золотые медали	Серебряные медали	Бронзовые медали
1–2	КНР	5	1	0
1–2	Республика Корея	5	1	0
3–4	США	4	2	0
3–4	Россия	4	2	0
5	Вьетнам	3	3	0
6–7	КНДР	2	4	0
6–7	Тайвань	2	4	0
8–9	Великобритания	2	3	1
8–9	Иран	2	3	1
10	Канада	2	2	2
11	Хорватия	2	0	2
12	Сингапур	1	5	0
13	Таиланд	1	4	1
14	Израиль	1	3	2
15	Украина	1	3	1
16–18	Австралия	1	2	3
16–18	Турция	1	2	3
16–18	Белоруссия	1	2	3
19	Италия	1	2	1
20	Индонезия	1	1	4
21	Сербия	1	1	2
22	Португалия	1	0	4
23	Чехия	1	0	3
24	Япония	0	6	0
25–26	Мексика	0	3	3
25–26	Румыния	0	3	3
27	Перу	0	3	2
28–30	Франция	0	2	4
28–30	Венгрия	0	2	4
28–30	Германия	0	2	4

Задачи олимпиады

1. Докажите, что для любой пары натуральных чисел k и n существуют k (не обязательно различных) натуральных чисел m_1, m_2, \dots, m_k , удовлетворяющих равенству

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Япония

2. Будем называть *колумбийской конфигурацией* точек набор из 4027 точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, при этом 2013 из них покрашены в красный цвет, а остальные 2014 – в синий. Рассмотрим набор прямых, делящих плоскость на несколько областей. Назовем этот набор *хорошим* для данной колумбийской конфигурации точек, если выполнены следующие два условия:

- 1) никакая прямая не проходит ни через одну из точек конфигурации;
- 2) никакая область разбиения не содержит точек обоих цветов.

Найдите наименьшее k такое, что для любой колумбийской конфигурации из 4027 точек найдется хороший набор из k прямых.

Австралия

3. См. задачу M2324 «Задачника «Кванта».

4. Пусть H – точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC . Пусть W – произвольная точка на отрезке BC , отличная от точек B и C . Обозначим через M и N основания высот треугольника ABC , проведенных из вершин B и C соответственно. Пусть ω_1 – окружность, описанная около треугольника BWN , а X – такая точка на ω_1 , что WX – диаметр ω_1 . Аналогично, пусть ω_2 – окружность, описанная около треугольника CWM , и Y – такая точка на ω_2 , что WY – диаметр ω_2 . Докажите, что точки X , Y и H лежат на одной прямой.

Таиланд

5. Обозначим через $\mathbb{Q}_{>0}$ множество всех положительных рациональных чисел. Пусть $f: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция, удовлетворяющая следующим трем условиям:

(i) для всех $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ выполнено неравенство

$$f(x)f(y) \geq f(xy);$$

(ii) для всех $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ выполнено неравенство

$$f(x+y) \geq f(x) + f(y);$$

(iii) существует рациональное число $a > 1$ такое, что $f(a) = a$.

Докажите, что $f(x) = x$ для всех $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Болгария

6. См. задачу 2325 «Задачника «Кванта».

Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, М.Пратусевич, Д.Терёшин

XLIV Международная физическая олимпиада

В этом году Международная физическая олимпиада (МФО) проходила в столице Королевства Дании — Копенгагене. На соревнование прибыли школьники в количестве 381 из 83 стран.

Сборную команду России представляли:

Великанов Максим — Екатеринбург, школа при «Уральском федеральном университете имени первого Президента России Б.Н.Ельцина», учитель-наставник *Иванов Алексей Вадимович*,

Калинов Даниил — Москва, школа-интернат «Интеллектуал», учитель-наставник *Шувалов Валентин Юрьевич*,

Куренков Михаил — Саров, лицей 3, учитель-наставник *Шмонова Татьяна Михайловна*,

Маслов Иван — Челябинск, лицей 31, учитель-наставник *Иоголевич Иван Александрович*,

Фрадкин Илья — Москва, лицей 1568, учителя-наставники *Александров Дмитрий Анатольевич*, *Парфенов Константин Владимирович*.

Команду России возглавили профессор Московского физико-технического института (МФТИ) Станислав Миронович Козел и доцент МФТИ Валерий Павлович Слободянин. В составе российской делегации в качестве наблюдателей работали доцент МФТИ Михаил Николаевич Осин, учитель физики и заместитель директора Челябинского лицея 31 Карманов Максим Леонидович, аспирант МФТИ Шевченко Виталий Андреевич.

Как и в прошлые годы, восемь «сборников», имеющих после зимних сборов наивысшие рейтинги, продолжили подготовку к МФО. Эта подготовка включала участие в Европейской олимпиаде «Romanian master» (начало марта), Азиатской олимпиаде (май) и последние трехнедельные летние сборы, на которых отрабатывались навыки экспериментальной работы на сложном современном оборудовании и дополнительно изучались элементы специальной теории относительности, волновой оптики, ядерной физики и ряд других тем, входящих в программу МФО. Во время сборов с командой работали преподаватели кафедры об-

щей физики МФТИ, преподаватели СУНЦ МГУ, научные сотрудники институтов Российской академии наук, а также студенты Физтеха — победители Международных физических олимпиад прошлых лет.

Оба тура олимпиады, как и в прошлом году, оказались достаточно трудоемкими. Всем участникам было предложено по три теоретических задачи и по два экспериментальных задания. Максимальное количество баллов, которое мог набрать каждый из школьников, равнялось 50.

Члены сборной России показали следующие результаты:

Участник команды	Сумма баллов	Медаль
Калинов Даниил	43,4	золотая
Маслов Иван	39,1	золотая
Великанов Максим	38,6	золотая
Фрадкин Илья	38,6	золотая
Куренков Михаил	35,3	серебряная

Анализ выступления команды показывает, что при подготовке к следующей олимпиаде во время учебно-тренировочных сборов необходимо: сделать упор на развитие навыков выполнения большого объема алгебраических выкладок и преобразований физических формул за ограниченное время; развивать навыки быстрого счета; совершенствовать экспериментальные навыки при выполнении большого количества предписанных в инструкции операций.

В неофициальном командном зачете первые 14 мест заняли команды, получившие по пять медалей и из них хотя бы одну золотую:

1 Китай	8 Иран
2 Корея	9 Румыния
3 Сингапур	10 Венгрия
4 Россия	11 Индия
5 США	12 Вьетнам
6 Тайвань	13 Израиль
7 Таиланд	14 Болгария

Ниже приводятся условия задач теоретического тура олимпиады.

Теоретический тур

Задача 1. Метеорит Марибо

Введение. Метеороид — это небольшая часть (обычно меньше 1 метра в поперечнике) от кометы или астероида. Метеороид, который столкнулся с поверхностью Земли, называется метеоритом.

Ночью 17 января 2009 года многие люди, находящиеся вблизи Балтийского моря, наблюдали яркий след и огненный шар метеороида, падающего в атмосфере Земли. Камера наблюдения в Швеции зафиксировала это событие на видео (рис. 1). С помощью этих снимков и свидетельств очевидцев стало возможным сузить возможную область падения, и шесть неделями позже метеорит массой 0,025 кг был найден в окрестности города Марибо в южной Дании. Измерения метеорита, получившего название Марибо, и орбиты его полета в небе зафиксировали интересные результаты. Его скорость при входе в атмосферу была необычайно высокой. Его возраст — $4,567 \cdot 10^9$ лет — показал, что он сформировал-



Команда России на XLIV Международной физической олимпиаде. Слева направо: Илья Фрадкин, Максим Великанов, Станислав Миронович Козел (руководитель команды), Даниил Калинов, Иван Маслов, Михаил Куренков

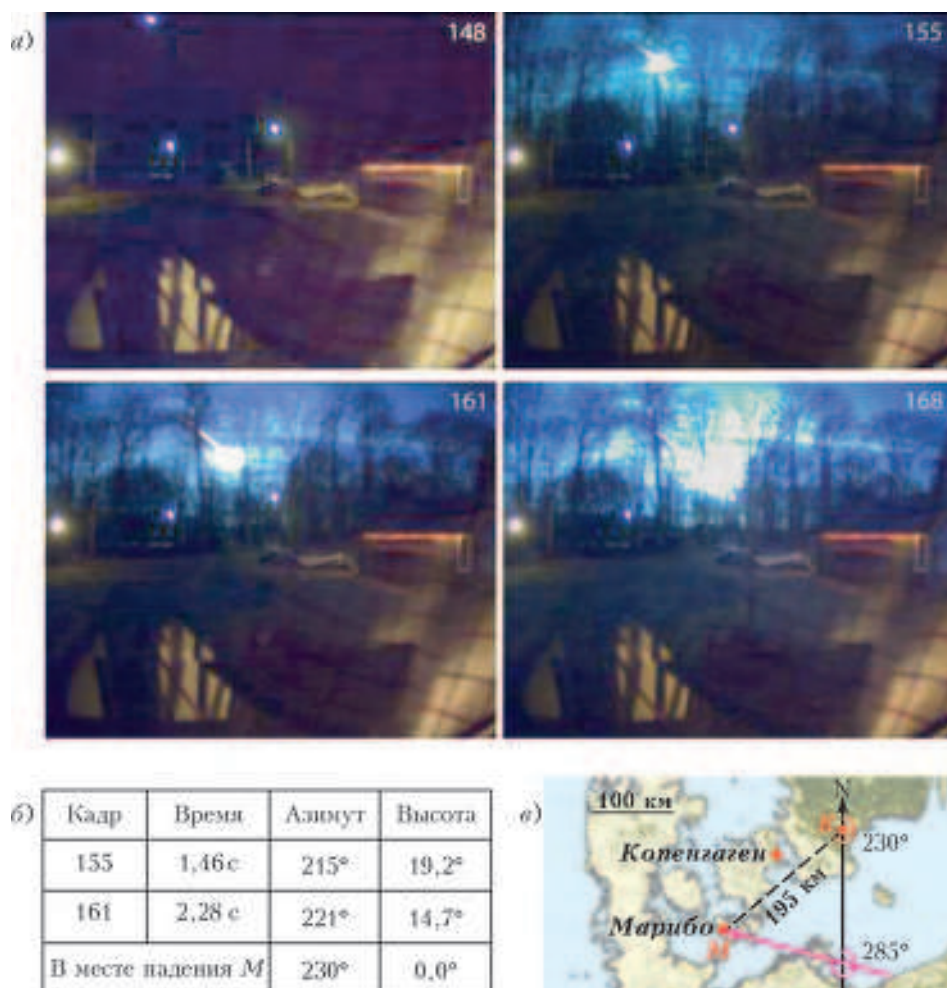


Рис. 1. а) Серия снимков, сделанных камерой наблюдения в Швеции, показывает полет метеорита Марибо (огненный шар) в атмосфере. б) Данные с двух кадров, показывающие время, направление (азимут) в градусах и высоту над горизонтом в градусах. в) Эскиз, показывающий траекторию Марибо (красная стрела) относительно севера (N) и место падения (M) в Дании, видимые камерой (K) в Швеции

ся вскоре после рождения Солнечной системы. Метеорит Марибо, возможно, является частью кометы Энке.

Скорость Марибо. Огненный шар двигался в западном направлении, направляясь под углом 285° относительно севера в точку, где он был впоследствии обнаружен. Метеорит был найден на расстоянии 195 км от камеры наблюдения в направлении 230° относительно севера.

1.1. Используя эти данные и данные, представленные на рисунке 1, вычислите скорость Марибо. Кривизной поверхности Земли можно пренебречь.

Проходя сквозь атмосферу и плавясь? Сопротивление воздуха в верхних слоях атмосферы, действующее на метеороид, зависит сложным образом от формы и скорости метеороида, а также от температуры и плотности атмосферы. В качестве разумного приближения для силы сопротивления F в верхних слоях атмосферы можно использовать формулу $F = k\rho_{\text{атм}}Av^2$, где k – некоторая константа, $\rho_{\text{атм}}$ – плотность атмосферы, A – площадь поперечного сечения метеорита и v – его скорость.

Используйте следующие допущения, чтобы упростить анализ процессов, происходящих с метеороидом: объект, вошедший в атмосферу, считайте шаром массой $m_M = 30$ кг, радиусом $R_M = 0,13$ м, имеющим температуру $T_0 = 200$ К, движущимся со скоростью $v_M = 2,91 \cdot 10^4$ м/с. Плотность

атмосферы считайте постоянной и равной значению на высоте 40 км над поверхностью Земли: $\rho_{\text{атм}} = 4,1 \cdot 10^{-3}$ кг/м³, коэффициент сопротивления $k = 0,60$.

1.2а. Оцените, какое время требуется, чтобы скорость метеорита уменьшилась на 10% от v_M до $0,90 v_M$.

1.2б. Вычислите, во сколько раз кинетическая энергия $E_{\text{кин}}$ метеорита, вошедшего в земную атмосферу, больше энергии $E_{\text{расп}}$, требуемой для полного расплавления метеорита.

Нагревание Марибо во время падения в атмосфере. Когда каменный метеороид Марибо вошел в атмосферу на сверхзвуковой скорости, он выглядел как огненный шар, благодаря светящемуся вокруг него воздуху. Тем не менее, только внешний слой Марибо был разогрет. Предположим, что Марибо представляет собой однородный шар плотностью $\rho_{\text{ш}}$, удельной теплоемкостью $c_{\text{ш}}$ и теплопроводностью $\alpha_{\text{ш}}$ (значения приводятся в таблице данных). Кроме того, при входе в атмосферу его температура была $T_0 = 200$ К, а при падении сквозь атмосферу температура его поверхности оставалась постоянной и равной $T_{\text{п}} = 1000$ К из-за сопротивления воздуха, что привело к постепенному нагреванию метеорита внутри. После движения в атмосфере в течение времени t внешняя оболочка Марибо толщиной x была разогрета до температуры, существенно превышающей T_0 . Эта толщина может быть оценена с помощью метода размерностей как произведение степеней термодинамических параметров: $x \sim t^\alpha \rho_{\text{ш}}^\beta c_{\text{ш}}^\gamma \alpha_{\text{ш}}^\delta$.

1.3а. Определите методом размерностей значения степеней α, β, γ и δ .

1.3б. Вычислите толщину x после $t = 5$ с падения и определите отношение x/R_M .

Возраст Марибо. Химические свойства радиоактивных изотопов и продуктов их распада различаются. Поэтому в течение времени затвердевания минералов в данном метеорите одна часть минералов будет иметь высокое содержание определенного радиоактивного изотопа и низкое содержание продуктов его распада, другая – наоборот. Этот эффект может быть использован для определения возраста метеорита путем радиометрических измерений его минералов.

В качестве конкретного примера рассмотрим изотоп ^{87}Rb (элемент №37), который после распада превращается в стабильный изотоп ^{87}Sr (элемент №38) с периодом полураспада $T_{1/2} = 4,9 \cdot 10^{10}$ лет. В момент затвердевания отношение числа изотопов $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ было одинаковым для всех минералов, в то время как отношение $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ было различным. Со временем количество изотопов ^{87}Rb сокращается из-за распада, а количество изотопов ^{87}Sr растет соответственно. В итоге отношение изотопов $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ сейчас будет другим. На рисунке 2, а точки по оси абсцисс относятся к числу $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ в различных минералах в момент их затвердевания.

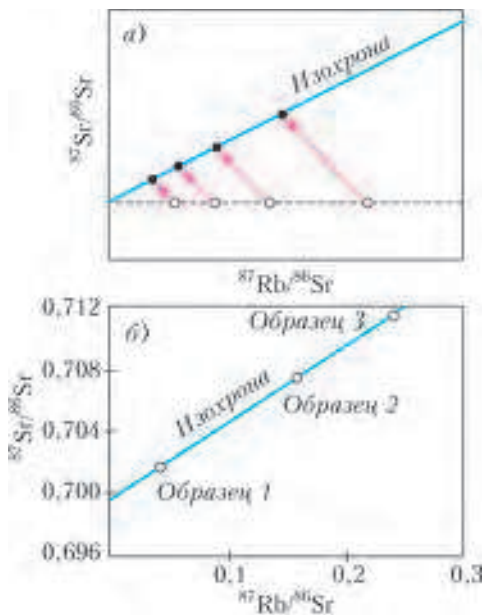


Рис. 2. а) Отношение $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ в различных минералах в начальный момент кристаллизации (светлые кружки) и в настоящее время (темные кружки). б) Изохрона для трех образцов минералов, взятых из метеорита в настоящее время

1.4а. Запишите схему превращения ^{87}Rb в ^{87}Sr при распаде.

1.4б. Покажите, что отношение $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ в настоящее время, построенное в зависимости от отношения $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ в настоящее время для различных образцов одного и того же метеорита, лежит на прямой линии (так называемой изохроне) с углом наклона $\alpha(t) = e^{\lambda t} - 1$, где t — это время, исчисляемое с момента создания минералов, а λ — постоянная распада, обратно пропорциональная периоду полураспада $T_{1/2}$.

1.4в. Определите возраст метеорита τ_M , используя изохрону, изображенную на рисунке 2, б.

Комета Энке, от которой мог произойти Марибо. При движении по орбите вокруг Солнца минимальное и максимальное расстояния между кометой Энке и Солнцем равны $a_{\min} = 4,95 \cdot 10^{10}$ м и $a_{\max} = 6,16 \cdot 10^{11}$ м соответственно.

1.5. Рассчитайте период вращения кометы Энке t_3 по орбите.

Последствия столкновения астероида с Землей. 65 миллионов лет назад Земля столкнулась с огромным астероидом плотностью $\rho_{\text{аст}} = 3,0 \cdot 10^3$ кг · м⁻³, радиусом $R_{\text{аст}} = 5$ км и конечной скоростью $v_{\text{аст}} = 2,5 \cdot 10^4$ м/с. Это столкновение привело к уничтожению почти всего живого на Земле и формированию чудовищного кратера Чикшудуб. Предположим, что такой же астероид сейчас столкнулся бы абсолютно неупруго с Землей. Считайте, что момент инерции Земли равен 0,83 момента инерции однородного шара такой же массы и радиуса.

1.6а. Предположим, что астероид врезался в Северный полюс. Найдите максимальное изменение угловой ориентации Земной оси после столкновения.

1.6б. Предположим, что астероид упал строго радиально в области экватора. Найдите максимальное изменение продолжительности одного суточного вращения Земли $\Delta\tau_{\text{вр1}}$ после столкновения.

1.6в. Предположим, что астероид ударился в Землю в области экватора по касательной. Найдите максимальное изменение продолжительности одного суточного вращения Земли $\Delta\tau_{\text{вр2}}$ после столкновения.

Максимальная скорость соударения. Рассмотрим небесное тело, которое удерживается силами гравитации в Солнечной системе. Тело сталкивается с поверхностью Земли со скоростью $v_{\text{ст}}$. Силами сопротивления воздуха в атмосфере можно пренебречь.

1.7. Рассчитайте наибольшее возможное значение скорости $v_{\text{ст}}$.

Задача 2. Плазменный парогенератор

Введение. В этой задаче мы исследуем эффективный процесс получения водяного пара, который был реализован в эксперименте. В водном растворе содержатся шарообразные наноразмерные частицы серебра (в концентрации порядка 10^{13} частиц на литр). Раствор освещается сфокусированным пучком света. Часть света поглощается наночастицами, которые при этом нагреваются и превращают воду в пар вблизи своей поверхности, не нагревая при этом основной объем жидкости. Пар выходит из раствора пузырьками. В настоящее время не все детали этого процесса полностью понятны, но точно известно, что в основе процесса лежит поглощение света с последующим возбуждением так называемых коллективных колебаний электронов в металлических наночастицах. Это устройство получило название плазменного парогенератора.

Одиночная сферическая частица серебра. Во всех пунктах задачи мы рассматриваем шарообразную наночастицу серебра радиусом $R = 10,0$ нм с центром, зафиксированным в начале координат (рис. 3, а). Все движения, силы или движущие поля параллельны горизонтальной оси x . Наночастица содержит свободные электроны (электроны проводимости), которые могут перемещаться во всем объеме наночастицы, не будучи привязаны ни к одному из атомов серебра. От каждого изначально нейтрального атома серебра высвободилось по одному электрону проводимости, в результате чего все атомы стали положительными ионами.

2.1. Определите объем V и массу M наночастицы, число N и плотность зарядов ρ ионов серебра в частице, а для свободных электронов — их концентрацию n , суммарный заряд Q и суммарную массу m_0 .

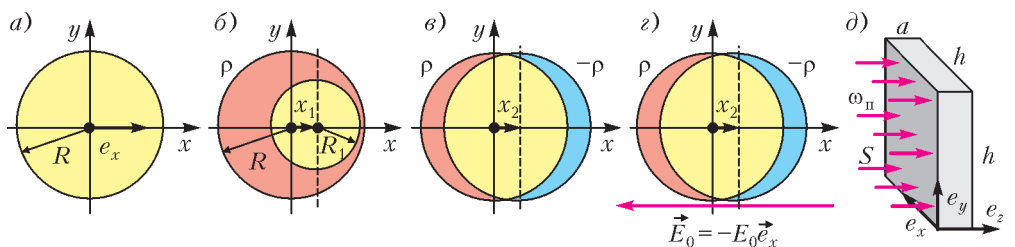


Рис. 3. а) Шарообразная незаряженная частица радиусом R помещена в начало системы координат. б) Шарообразная частица, однородно заряженная с положительной плотностью заряда ρ (красный цвет), содержит внутри себя незаряженную шарообразную полость (желтый цвет) радиусом R_1 . в) Неподвижная шарообразная область с положительной плотностью зарядов ρ образована ионами серебра и расположена в центре системы координат, а шарообразная область с отрицательной плотностью зарядов $-\rho$ (синий цвет) образована электронным облаком. г) Система находится в области внешнего однородного электрического поля $\vec{E}_0 = -E_0\vec{e}_x$. д) Прямоугольный сосуд, содержащий водный раствор наночастиц, освещен монохроматическим пучком света, распространяющимся вдоль оси z

Электрическое поле в нейтральной полости внутри заряженного шара. В дальнейшем будем считать, что относительная диэлектрическая проницаемость ϵ всех материалов равна 1. Внутри заряженного шара радиусом R с плотностью зарядов ρ создана небольшая сферическая нейтральная область радиусом R_1 путем добавления зарядов противоположной плотности $-\rho$. Центр полости смещен на $\vec{x}_1 = x_1 \vec{e}_x$, где \vec{e}_x – единичный вектор, от центра шара (рис.3,б).

2.2. Покажите, что электрическое поле внутри нейтральной области однородно и имеет вид $\vec{E}_{\text{внут}} = A(\rho/\epsilon_0)\vec{x}_1$. Определите константу A .

Возвращающая сила, действующая на смещенное электронное облако. Изучим коллективное движение свободных электронов. Промоделируем их однородно заряженным шаром с отрицательной плотностью заряда $-\rho$. Шар может двигаться вдоль оси x относительно центра неподвижного положительно заряженного шара из ионов серебра, находящегося в начале системы координат (рис. 3,в). Предположим, что внешняя сила $\vec{F}_{\text{внеш}}$ смещает электронное облако в новое положение равновесия $\vec{x}_2 = x_2 \vec{e}_x$, где $|x_2| \ll R$. Практически весь объем наночастицы является электрически нейтральным, за исключением малых областей зарядов, скапливающихся на противоположных концах наночастицы. Это соответствует предельному случаю $R_1 \rightarrow R$ в предыдущем задании.

2.3. Выразите через \vec{x}_2 и n следующие две величины: возвращающую силу \vec{F} , действующую на электронное облако, и работу $W_{\text{эл}}$, совершенную над электронным облаком в процессе смещения.

Шарообразная наночастица серебра в постоянном внешнем электрическом поле. Наночастица находится в вакууме. Под действием внешней силы $\vec{F}_{\text{внеш}}$, вызванной однородным электростатическим полем $\vec{E}_0 = -E_0 \vec{e}_x$ (рис. 3,з), электронное облако смещается на небольшое расстояние $|x_2|$, где $|x_2| \ll R$.

2.4. Выразите смещение электронного облака x_2 через E_0 и n . Определите величину заряда электронов $-\Delta Q$, прошедшего через плоскость yz , проходящую через центр наночастицы. Выразите ее через n , R и x_2 .

Эквивалентные емкость и индуктивность серебряной наночастицы. В случае как постоянного, так и переменного поля \vec{E}_0 наночастица может быть представлена эквивалентным электрическим контуром. Определим эквивалентную емкость. Для этого свяжем работу $W_{\text{эл}}$ по разделению зарядов ΔQ с энергией конденсатора, несущего заряды $\pm \Delta Q$. Разделение зарядов приведет к появлению напряжения U_0 на конденсаторе.

2.5а. Выразите эквивалентную емкость наночастицы C через ϵ_0 и R и найдите ее численное значение.

2.5б. Для данной емкости выразите через E_0 и R эквивалентное напряжение U_0 , которое следует подать на конденсатор, чтобы накопить заряд ΔQ .

В переменном поле \vec{E}_0 электронное облако движется как единое целое со скоростью $\vec{v} = v \vec{e}_x$. Облако обладает кинетической энергией $W_{\text{кин}}$ и при своем движении создает электрический ток I , протекающий через плоскость yz . Кинетическая энергия электронного облака может быть представлена в виде энергии эквивалентной катушки индуктивностью L с током I .

2.6а. Выразите $W_{\text{кин}}$ и I через скорость v .

2.6б. Выразите эквивалентную индуктивность L через радиус частицы R , заряд электрона e , его массу m_e , концентрацию свободных электронов n и найдите численное значение L .

Плазмонный резонанс наночастицы серебра. Из вышеприведенного анализа следует, что движение электронного облака, предоставленного самому себе, после смещения из положения равновесия может быть описано свободными колебаниями в идеальном колебательном LC -контуре. Такое колебательное движение свободного электронного облака известно как плазмонный резонанс с соответствующей плазмонной частотой $\omega_{\text{п}}$.

2.7а. Выразите плазмонную частоту $\omega_{\text{п}}$ колебаний электронного облака через заряд электрона e , его массу m_e , плотность электронов n и диэлектрическую проницаемость вакуума ϵ_0 .

2.7б. Вычислите $\omega_{\text{п}}$ в рад/с и длину волны $\lambda_{\text{п}}$ в нм света в вакууме, частота которого равна $\omega_{\text{п}}$.

Наночастица серебра, освещенная светом плазмонной частоты. В оставшейся части задачи наночастица освещается монохроматическим светом с циклической частотой $\omega_{\text{п}}$ и с интенсивностью $S = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 = 1,0 \text{ МВт} \cdot \text{м}^{-2}$. Поскольку длина волны света велика по сравнению с размерами частицы, $\lambda_{\text{п}} \gg R$, можно считать, что частица находится в однородном внешнем поле $\vec{E}_0 = -(E_0 \cos \omega_{\text{п}} t) \vec{e}_x$. Под действием этого поля электронное облако осциллирует с той же самой частотой и постоянной амплитудой x_0 . Центр электронного облака движется с переменной скоростью $v = dx_2/dt$. Такие колебания электронного облака приводят к поглощению света частицей. Энергия, принятая частицей, либо превращается в тепло за счет джоулевых потерь в самой частице, либо переизлучается частицей в виде рассеянного света. Джоулево тепло выделяется за счет случайных полностью неупругих столкновений свободных электронов с ионами серебра. Вся кинетическая энергия превращается в энергию колебаний ионов, т.е. в тепло. Среднее время между двумя последующими столкновениями для одного электрона $\tau \gg 1/\omega_{\text{п}}$. Для наночастицы серебра это время равно $\tau = 5,24 \cdot 10^{-15} \text{ с}$.

2.8а. Найдите выражение для усредненной по времени мощности джоулевых потерь $P_{\text{Т}}$ в наночастице, а также усредненный по времени квадрат силы тока $\langle I^2 \rangle$. Приведите их явную зависимость от среднего квадрата скорости $\langle v^2 \rangle$ электронного облака.

2.8б. Моделируя наночастицу омическим сопротивлением, на котором выделяется джоулево тепло мощностью $P_{\text{Т}}$ при протекании тока I электронного облака, найдите выражение для эквивалентного омического сопротивления $R_{\text{Т}}$. Вычислите его численное значение.

Падающий пучок света теряет некоторую среднюю по времени мощность $P_{\text{рас}}$ за счет рассеяния на осциллирующем электронном облаке (переизлучение). Она зависит от характеристик источника рассеянных волн (амплитуды x_0 , заряда Q , циклической частоты $\omega_{\text{п}}$) и свойств световых волн (скорости света c и диэлектрической проницаемости вакуума ϵ_0). Выражение для $P_{\text{рас}}$ можно записать так:

$$P_{\text{рас}} = \frac{1}{12\pi} (Qx_0)^2 \omega_{\text{п}}^4 c^{-3} \epsilon_0^{-1}.$$

2.9. Используя $P_{\text{рас}}$, найдите выражение для эквивалентного сопротивления рассеяния $R_{\text{рас}}$ в эквивалентной модели с сопротивлением (по аналогии с $R_{\text{Т}}$) и вычислите его значение.

Для моделирования наночастицы серебра все вышеперечисленные элементы электрических цепей можно собрать в единый эквивалентный последовательный LCR -контур. Гармонический источник напряжения в цепи $U = U_0 \cos \omega_{\text{п}} t$ определяется электрическим полем E_0 падающего света.

2.10а. Получите выражения для средних по времени мощностей потерь P_T и $P_{\text{рас}}$ через амплитуду электрического поля E_0 падающего света на частоте плазмонного резонанса ω_p .

2.10б. Вычислите значения E_0 , P_T и $P_{\text{рас}}$.

Парообразование с помощью света. Водный раствор содержит наночастицы серебра с концентрацией $n_c = 7,3 \cdot 10^{15} \text{ м}^{-3}$. Раствор находится внутри прозрачного прямоугольного сосуда размером $h \times h \times a = 10 \times 10 \times 1,0 \text{ см}$. Сосуд освещается нормально падающим пучком монохроматического света на частоте плазмонного резонанса с интенсивностью $S = 1,0 \text{ МВт} \cdot \text{м}^{-2}$ (рис. 3, д). Температура воды $T_B = 20^\circ \text{C}$. Предположим, что в установившемся состоянии все джоулево тепло в наночастице идет на парообразование (с конечной температурой пара $T_{\text{п}} = 110^\circ \text{C}$). Температура воды при этом остается постоянной.

Термодинамический КПД плазмонного парообразователя определяется как $\eta = P_{\text{пол}}/P_{\text{полн}}$, где $P_{\text{пол}}$ – полезная мощность, идущая на производство пара во всем сосуде, а $P_{\text{полн}}$ – полная мощность светового потока, падающего на сосуд. Большую часть времени каждая наночастица окружена паром, а не водой, поэтому частицу можно описывать как находящуюся в вакууме.

2.11а. Вычислите полную массу пара $\mu_{\text{п}}$, произведенного в плазмонном парогенераторе за одну секунду при облучении световым пучком с плазмонной частотой и интенсивностью S , как дано выше.

2.11б. Вычислите значение η плазмонного парогенератора.

Задача 3. Ледяной щит Гренландии

Введение. Эта задача связана с физикой ледяного щита Гренландии, второго по размерам ледяного массива в мире (рис. 4, а). Для упрощения будем считать, что Гренландия представляет собой прямоугольный остров шириной (с запада на восток) $2L$ и длиной (с севера на юг) $5L$, в котором

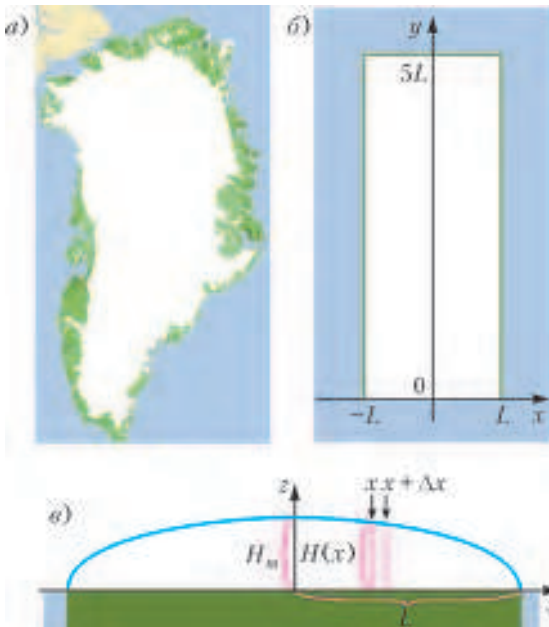


Рис. 4. а) Карта Гренландии, показывающая ледяной покров (белый цвет), свободную от ледяного покрова прибрежную территорию (зеленый) и окружающий океан (голубой). б) Грубая модель ледяного щита Гренландии. Линия разделения льда, или линия максимальной высоты ледового покрова H_m , совпадает с осью y . в) Вертикальное сечение (в плоскости xz) ледяного щита, показывающее профиль высоты $H(x)$ (синяя линия)

земля, находящаяся на уровне моря, полностью покрыта несжимаемым льдом (с постоянной плотностью ρ_L) (рис. 4, б). Профиль высоты $H(x)$ ледяного щита не зависит от координаты y . Высота растет от нуля на побережье ($x = \pm L$) до максимального значения H_m вдоль срединной оси север – юг (собственно оси y), известной как линия разделения льда (рис. 4, в).

Две полезные формулы. В этой задаче вам может пригодиться интеграл $\int_0^1 \sqrt{1-x} dx = \frac{2}{3}$ и приближенная формула $(1+x)^a \approx 1+ax$, справедливая при условии $|ax| \ll 1$.

Профиль высоты ледяного щита. На коротких промежутках времени ледяной щит можно рассматривать как несжимаемую гидростатическую систему с фиксированным профилем высоты $H(x)$.

3.1. Запишите выражение для давления внутри ледяного щита $p(x, z)$ как функцию высоты над уровнем моря z и расстояния x от линии разделения льда. Давлением атмосферы пренебречь.

Рассмотрим некоторую вертикальную пластину ледяного щита, находящуюся в положении равновесия. Пластина опирается на малую горизонтальную площадку $\Delta x \Delta y$ между координатами x и $x + \Delta x$ и обозначена красными штриховыми линиями на рисунке 4, в. Размер Δy несущественен. Из-за разности высот двух сторон пластины возникает горизонтальная компонента силы ΔF , действующая на вертикальные стороны. Она уравновешена силой трения $S \Delta x \Delta y$ льда о землю на площадке $\Delta x \Delta y$, где $S = 100 \text{ кПа}$.

3.2а. Для произвольного x покажите, что в пределе $\Delta x \rightarrow 0$ $S = kHdH/dx$, и найдите k .

3.2б. Выразите высоту $H(x)$ через ρ_L , g , S и расстояние x от линии разделения льда. Результат должен подтвердить, что наибольшая высота ледяного щита H_m зависит от его полуширины L как $H_m \sim L^{1/2}$.

3.2в. Определите показатель степени γ , который показывает, как полный объем ледяного покрова V_L зависит от площади A прямоугольного острова: $V_L \sim A^\gamma$.

Динамический ледяной щит. На более длинных промежутках времени лед является вязкой несжимаемой жидкостью, которая под действием гравитации течет из центральной части к береговым. В рамках этой модели профиль высоты $H(x)$ сохраняется за счет того, что прирост льда из-за снегопадов в центральной части уравновешивается таянием льда в береговой части. Дополнительно к геометрии ледяного щита, изображенного на рисунках 4, б и в, сделаем следующие допущения: 1) лед течет в плоскости xz от линии разделения льда (ось y); 2) скорость нарастания льда s (м/год) в центральной части постоянна; 3) лед покидает ледник только за счет таяния вблизи берегов $x = \pm L$; 4) горизонтальная (x -компонента) $v_x(x) = dx/dt$ вектора скорости течения льда не зависит от координаты z ; 5) вертикальная (z -компонента) $v_z(x) = dz/dt$ вектора скорости течения льда не зависит от координаты x . Рассмотрим только центральную область $|x| \ll L$ вблизи середины ледяного щита, где изменения высоты ледяного массива очень малы и ими можно пренебречь, т.е. $H(x) \approx H_m$.

3.3. Используйте неизменность массы, чтобы найти выражение для горизонтальной компоненты скорости течения льда $v_x(x)$ через s , x и H_m .

Из условия несжимаемости, т.е. постоянства плотности ρ_L , следует, что закон сохранения массы накладывает следующее ограничение на компоненты вектора скорости течения:

$$\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_z}{dz} = 0.$$

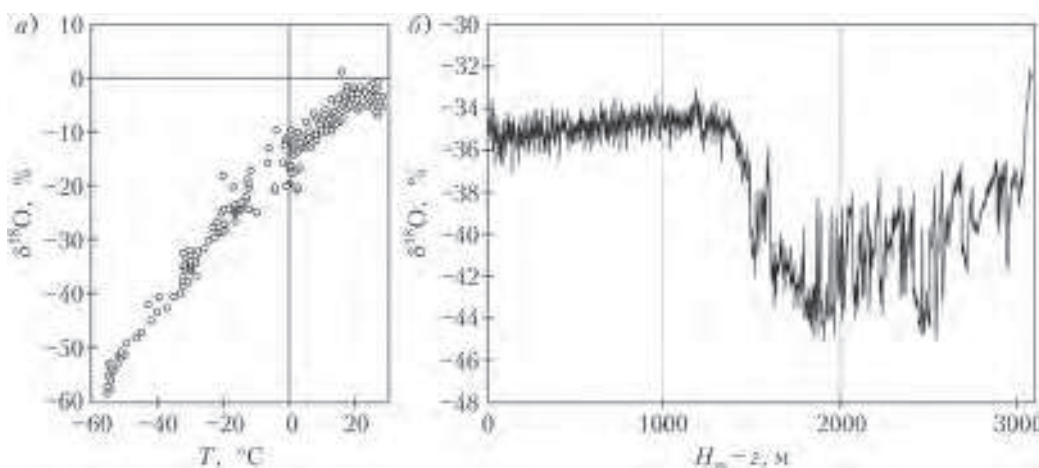


Рис. 5. а) Наблюдаемое соотношение между $\delta^{18}\text{O}$ в снегу и среднегодовой температурой T на поверхности. б) Параметр $\delta^{18}\text{O}$, измеренный в зависимости от глубины $H_m - z$ от поверхности, полученный из анализа ледяного керна

3.4. Запишите выражение для зависимости вертикальной компоненты $v_z(z)$ вектора скорости течения льда от координаты z .

Небольшая частичка льда, вначале находившаяся на поверхности льда в точке (x_i, H_m) , с течением времени будет двигаться вместе с потоком всего льда по некоторой траектории $z(x)$ в вертикальной плоскости xz .

3.5. Получите выражение $z(x)$ для этой траектории.

Возрастные и климатические индикаторы в динамическом ледяном щите. Используя компоненты вектора скорости течения льда $v_x(x)$ и $v_z(z)$, можно оценить возраст льда $\tau(z)$ на некоторой глубине $H_m - z$ от поверхности ледяного щита.

3.6. Найдите выражение для возраста льда $\tau(z)$ как функцию высоты над уровнем поверхности земли z непосредственно на линии разделения льда $x = 0$.

Ледовый керн, высверленный из внутренней части гренландского ледяного щита, содержит слои снега, образовавшегося в различные времена в прошлом. Такой керн может быть использован для анализа климатических изменений. Одним из лучших индикаторов служит так называемый параметр $\delta^{18}\text{O}$, определяемый как

$$\delta^{18}\text{O} = \frac{R_{\text{л}} - R_{\text{реф}}}{R_{\text{реф}}} \cdot 100\%,$$

где $R = \left[\frac{^{18}\text{O}}{^{16}\text{O}} \right]$ обозначает относительное количество двух стабильных изотопов кислорода ^{18}O и ^{16}O . Референтное (опорное) значение $R_{\text{реф}}$ определяется из соотношения количества изотопов в мировом океане вблизи экватора. Наблюдения за гренландским ледяным щитом показали, что $\delta^{18}\text{O}$ снега приблизительно линейно зависит от температуры (рис. 5,а). Предполагая, что такая зависимость существовала всегда, можно оценить температуру T вблизи Гренландии во времена $\tau(z)$, вычисляя параметр $\delta^{18}\text{O}$, определенный по ледяному керну для глубины $H_m - z$. Измерения $\delta^{18}\text{O}$ в гренландском ледяном керне длиной 3060 м зафиксировали резкое изменение этого параметра на глубине 1492 м (рис. 5,б), отметившее конец последнего ледникового периода. Ледниковый период начался 120000 лет назад, что соответствует глубине 3040 м, а современный межледниковый период начался 11700 лет назад, что соответствует глубине 1492 м. Предположим, что эти два периода могут быть описаны двумя различ-

ными скоростями нарастания льда: c_1 (ледниковый период) и c_2 (межледниковый период) соответственно. Вы можете считать величину H_m постоянной в течение этих 120000 лет.

3.7а. Определите скорости нарастания льда c_1 и c_2 .

3.7б. Используйте данные рисунка 5, чтобы найти изменение температуры при переходе от ледникового периода к межледниковому.

Подъем уровня моря вследствие таяния ледяного щита Гренландии. Если льды Гренландии полностью растают, это вызовет подъем уровня мирового океана. Для грубой оценки подъема уровня моря можно рассматривать однородный подъем всего мирового океана с постоянной площадью $A_{\text{O}} = 3,61 \cdot 10^{14} \text{ м}^2$.

3.8. Вычислите средний подъем уровня мирового океана в результате полного таяния ледяного щита Гренландии площадью $A_{\text{Гр}} = 1,71 \cdot 10^{12} \text{ м}^2$ и напряжением сдвига в основании щита $\sigma = 100 \text{ кПа}$.

Массивный ледяной щит Гренландии оказывает гравитационное притяжение на окружающий океан. Если ледяной щит растает, то высокий местный прилив исчезнет, соответственно упадет уровень моря вблизи Гренландии, что частично компенсирует подъем уровня моря, вычисленный выше. Для того чтобы оценить величину гравитационного притяжения воды, представим ледяной щит Гренландии в виде точечной массы, расположенной на поверхности Земли и соответствующей полной массе ледяного щита Гренландии. Копенгаген находится на расстоянии 3500 км от этой точечной массы вдоль поверхности Земли. Представим также Землю (без точечной массы) как сферически симметричное тело, полностью покрытое мировым океаном. Полная площадь поверхности Земли $A_3 = 5,10 \cdot 10^{14} \text{ м}^2$. Всеми эффектами вращения Земли можно пренебречь.

3.9. В рамках этой модели определите разность $h_1 - h_2$ уровней моря в Копенгагене (h_1) и в точке, диаметрально противоположной Гренландии (h_2).

Публикацию подготовили С.Козел, В.Слободянин

Всероссийская студенческая олимпиада по физике 2013 года

Московский (II) тур Всероссийской физической олимпиады студентов технических вузов прошел 23 марта 2013 года в Московском государственном техническом университете (МГТУ) имени Н.Э.Баумана. В командном зачете первое место заняла команда МГТУ имени Н.Э.Баумана, набравшая 118 баллов, второе место — команда Московского авиационного института (93 балла), третье место — команда Российского государственного университета нефти и газа имени И.М.Губкина (89 баллов). Победителями в личном зачете стали: Никитин Иван (МГТУ имени Н.Э.Баумана) — 1 место, Светличный Леонид (Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Обнинск) — 2 место, Шубин Николай (Национальный исследовательский университет «МИЭТ») — 3 место.

Заключительный (III) тур олимпиады состоялся 16 мая 2013 года тоже в МГТУ имени Н.Э.Баумана. В командном зачете первое место завоевала команда Санкт-Петербургского государственного политехнического университета (СПбГПУ), набравшая 98 баллов, второе место — команда МГТУ имени Н.Э.Баумана (70 баллов), третье место — команда Национального исследовательского университета «МИЭТ» (67 баллов). Победителями в личном зачете стали: Авдеев Иван (СПбГПУ) — 1 место, Шубин Николай («МИЭТ») — 2 место, Буряков Михаил (СПбГПУ) — 3 место.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

Московский тур

1. Два одинаковых автомобиля массой m начинают движение с постоянной тягой при сопротивлении движению, определяемом формулой $F = c + bv$, где v — текущая скорость, а c и b — константы. Отрезок времени между началом движения первого и второго автомобиля равен τ . Определите максимальное расстояние между автомобилями в процессе дальнейшего движения, если известно, что начальное ускорение автомобилей равно a .

2. На проволочную окружность радиусом R , расположенную горизонтально, насажен небольшой шарик, который может двигаться по проволоке. С какой начальной скоростью надо толкнуть шарик вдоль проволоки, чтобы он сделал точно один оборот? Коэффициент трения скольжения равен μ .

3. Газонокосилка типа «триммер» косит траву посредством невесомой нити, к концу которой привязан грузик массой m . Другой конец нити закреплен на роторе, вращающемся с угловой скоростью ω , на расстоянии r от вертикальной оси вращения ротора. Угол между нитью и радиусом-вектором грузика равен α . Определите радиус траектории грузика, если сила сопротивления движению грузика постоянна и равна F .

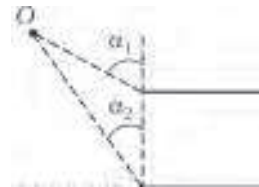
4. Тепловая машина работает по циклу Карно, забирая тепло от нагревателя с температурой T_1 и отдавая его холодильнику с температурой T_2 . Поток тепла между нагревателем и рабочим телом с температурой T_1' пропорционален разности температур между ними: $q_1 = \frac{dQ_1}{dt} = C(T_1 - T_1')$; аналогично, поток тепла между рабочим телом с температурой T_2' и холодильником равен $q_2 = \frac{dQ_2}{dt} = C(T_2' - T_2)$. Счи-

тая, что изотермические процессы тепловой машины одинаковы по времени, а адиабатические процессы протекают мгновенно, определите КПД тепловой машины, когда ее мощность за цикл максимальна.

5. Частица массой m с зарядом q скользит в магнитном поле по горизонтальной плоскости, коэффициент трения с которой равен μ . Вектор магнитного поля на всей траектории движения частицы направлен по радиусу r , проведенному из точки O , меняется по закону $B = A/r$ и параллелен плоскости. Определите угол, на который повернется радиус-вектор частицы до полной остановки, если в начальный момент скорость частицы равна v . Силой тяжести пренебречь.

6. Определите поток магнитного поля через цилиндрическую поверхность полубесконечного соленоида радиусом R с плотностью намотки n и током I . Поле в выходном сечении соленоида считайте однородным.

7. Две полубесконечные параллельные проводящие плоскости расположены напротив друг друга. По ним вдоль границ полуплоскостей в противоположных направлениях протекают токи, равномерно распределенные по плоскости с линейной плотностью i . Определите магнитное поле в точке O (см. рисунок), положение которой задается углами α_1 и α_2 между нормалью к плоскостям и нормальми к границам соответствующих плоскостей.



8. На пути плоскополяризованной световой волны интенсивности I_0 находится пластинка-поляризатор, закрывающая первую зону Френеля. Определите интенсивность света в точке наблюдения, если угол между плоскостью поляризации света и плоскостью поляризации поляризатора равен α .

Заключительный тур

1. Автомобиль массой m начинает движение. Определите зависимость силы тяги F и силы сопротивления f от скорости v , если скорость зависит от времени следующим образом: $v = v_0 \sqrt{1 - e^{-at}}$, где v_0 и a — константы.

2. Горизонтальная платформа может вращаться относительно вертикальной оси. На оси симметрии платформы установлено горизонтально сопло, связанное с платформой, из которого вытекает вода со скоростью v и массовым расходом $g = dm/dt$. На краю платформы перпендикулярно оси струи на расстоянии R установлен вертикальный экран. Струя взаимодействует с экраном, растекаясь строго по поверхности без трения. Платформу начали вращать с угловой скоростью ω . Определите момент силы, приложенный со стороны струи к экрану, если расстояние от сопла до точки касания струи с экраном при вращении стало равным l . Силой тяжести пренебречь.

3. Горизонтальная платформа вращается относительно вертикальной оси. По платформе от оси по спирали движется тело массой m так, что угол α между радиусом-вектором и вектором скорости постоянен. Коэффициент трения между телом и платформой линейно зависит от радиуса: $\mu = ar$. Определите зависимость скорости тела от радиуса r и вели-

чину угла β между вектором скорости и вектором силы трения.

4. Система состоит из двух однородных стержней, скрепленных у торцов (точка O) под углом α . Первый стержень имеет длину a и массу m_a , второй – b и m_b соответственно. Система совершает малые колебания относительно точки O в плоскости, проходящей через стержни. Определите период колебаний такой системы.

5. С одним киломолем газа совершается круговой процесс, состоящий из изохоры, изобары и адиабаты. Известно, что давление меняется в пределах от p_0 до $2p_0$, а минимальная температура цикла равна T . Определите максимальную температуру цикла.

6. Кольцо радиусом R заряжено симметрично относительно оси, лежащей в плоскости кольца и проходящей через его центр. Линейная плотность заряда на кольце равна $\delta = \delta_0 \cos \alpha \sin \alpha$, где α – угол между осью и радиусом-

вектором, проведенным из центра кольца. Внутри кольца находится диск радиусом r , равномерно заряженный поверхностным зарядом σ , центр которого расположен на оси, а плоскость перпендикулярна ей. Определите силу взаимодействия между диском и кольцом.

7. Определите силу взаимодействия между двумя длинными соленоидами, находящимися на одной оси и лежащими торцами на одной плоскости. Радиусы соленоидов r_1 и r_2 , токи I_1 и I_2 , плотности намотки n_1 и n_2 .

8. Плоская световая волна с длиной волны λ и интенсивностью I_0 падает нормально на круглое отверстие, в которое вставлена тонкая рассеивающая линза с фокусным расстоянием a . Какова интенсивность света в точке наблюдения, находящейся на оси системы на расстоянии $2a$ от отверстия, если радиус отверстия равен $r = \sqrt{a\lambda}$?

Публикацию подготовил В.Глушков

ИНФОРМАЦИЯ

Очередной набор в ВЗМШ

Всероссийская заочная многопредметная школа (ВЗМШ), входящая в структуру московского лицея «Вторая школа» и работающая при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, в пятидесятый раз проводит набор учащихся.

Эта школа была создана в 1964 году по инициативе академика И.М.Гельфанда. Многие годы И.М.Гельфанд возглавлял Научный совет школы.

ВЗМШ – государственное учреждение дополнительного образования, доступное для всех желающих, причем не только для школьников, пополнить свои знания в одной или нескольких из следующих областей науки: математика, биология, филология, физика, экономика, история (перечисление – в хронологическом порядке открытия отделений).

Сейчас ВЗМШ совместно с другими научно-педагогическими учреждениями ведет исследовательские работы по разработке новых интерактивных технологий в образовании и переводу части своих учебно-методических комплексов на язык современных телекоммуникаций.

За время существования ВЗМШ удостоверения о ее окончании получили несколько сотен тысяч школьников и тысячи кружков – групп «Коллективный ученик ВЗМШ».

Обучение в школе ЗАОЧНОЕ, т.е. начиная с сентября–октября 2014 года все поступившие будут систематически получать специально разработанные для заочного обучения материалы, содержащие изложение теоретических вопросов и методов рассуждений, разнообразные задачи для самостоятельной работы, образцы решений задач, деловые игры, контрольные и практические задания.

Контрольные работы учащихся будут тщательно проверяться и рецензироваться преподавателями ВЗМШ – студентами, аспирантами, преподавателями и научными сотрудниками МГУ, а также других вузов и учреждений, где имеются филиалы школы. Многие из преподавателей в свое время сами закончили ВЗМШ и поэтому особенно хорошо понимают, как важно указать, помимо конкретных недочетов, пути ликвидации имеющихся пробелов в знаниях, порекомендовать дополнительную литературу, поругать за невнимательность и похвалить за заметный (а иногда – и за самый маленький) прогресс и трудолюбие.

Поступившие в ВЗМШ смогут узнать об увлекательных вещах, часто остающихся за страницами школьного учебника, познакомиться с интересными нестандартными задачами и попробовать свои силы в их решении. Для многих станет откровением, что задачи бывают не только в математике, физике и химии, но и в биологии, филологии, экономике и других науках. Решение задач поможет прояснить и сделать интересными многие разделы, казавшиеся непонятными и скучными.

Одна из особенностей учебных программ и пособий ВЗМШ – в том, что они созданы действующими на переднем крае науки талантливыми учеными и опытными незаурядными педагогами.

Чтобы успешно заниматься в заочной школе, вам придется научиться самостоятельно и продуктивно работать с книгой, грамотно, четко, коротко и ясно излагать свои мысли, а это, как известно, умеют далеко не все. Возможно, наша заочная школа поможет вам выбрать профессию, найти свое место в окружающем мире.

Все выполнившие программу ВЗМШ получают дипломы. Хотя формальных преимуществ они не дают, приемные комиссии многих вузов учитывают, что обладатели этих удостоверений в течение продолжительного времени самостоятельно трудились над приобретением знаний, научились самостоятельно творчески работать, а это значит, что из них получатся хорошие студенты и, в дальнейшем, грамотные, вдумчивые, широко образованные специалисты.

Вы сможете получать наши задания как обычной, так и электронной почтой, а также принимать участие в апробации новых интерактивных учебных программ.

Для поступления в ВЗМШ надо успешно выполнить вступительную контрольную работу. Приемную комиссию интересует, в первую очередь, ваше умение рассуждать, попытки (пусть поначалу не совсем удачные) самостоятельно мыслить и делать выводы. Преимуществом при поступлении пользуются проживающие в сельской местности, поселках и небольших городах, где нет крупных научных центров и учебных заведений и где получить дополнительное образование можно лишь заочно.

Решения задач вступительной работы надо написать на русском языке в обычной ученической тетради в клетку. Желающие поступить сразу на несколько отделений каждую работу присылают *в отдельной тетради*. На обложке тетра-

ди укажите: фамилию, имя, отчество, год рождения, базовое образование (сколько классов средней школы будет закончено к сентябрю 2014 года), полный почтовый адрес (с индексом), откуда узнали о ВЗМШ (из «Кванта», от друзей, из афиш заочной школы и т.п.), на какое отделение хотите поступить.

Адрес ВЗМШ: 119234 Москва, Воробьевы горы, МГУ, ВЗМШ, на прием (укажите отделение)

Телефон: (495) 939-39-30

Обо всех наших отделениях вы можете узнать на обще-школьном сайте ВЗМШ:

www.vzms.ru

На ваши вопросы мы ответим по электронной почте:

vzms@yandex.ru

Вступительные работы обратно не высылаются.

Без вступительной работы, только по заявлению, принимаются на индивидуальное обучение победители областных (краевых, республиканских) туров всероссийских олимпиад по соответствующим предметам, а также участники финальных туров этих олимпиад.

Учащиеся ВЗМШ частично возмещают расходы на свое обучение. По просьбе тех, кто не в состоянии внести эту плату, ВЗМШ готова обратиться в школу, в орган народного образования, к другому спонсору с ходатайством об оплате этим благотворителем соответствующих расходов.

Помимо индивидуального обучения, на всех отделениях ВЗМШ, кроме экономического и биологического, имеется форма обучения «Коллективный ученик». Это группа учащихся, работающая под руководством преподавателя (школьного учителя, преподавателя вуза, студента или другого энтузиаста), как правило, по тем же пособиям и программам, что и индивидуально. Прием в эти группы проводится до 15 октября 2014 года. Для зачисления группы требуется заявление ее руководителя (с указанием его профессии и должности, со списком учащихся и сообщением о том, в каком классе они будут учиться с сентября 2014 года); заявление должно быть подписано руководителем группы, заверено и подписано руководителем учреждения, при котором будет работать группа.

Работа с группами «Коллективный ученик» может оплачиваться школами как факультативные занятия.

На Северо-Западе России работает Заочная школа Ленинградского областного Министерства образования, созданная при Санкт-Петербургском государственном университете и имеющая отделения математики, биологии и химии.

Желающие поступить на отделение математики, проживающие на Северо-Западе России (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми республиках), высылают вступительные работы по адресу: 197755 Санкт-Петербург, Лисий Нос, Ново-Центральная ул., д.21/7, Северо-западная ЗМШ (на прием).

Проживающие в остальных регионах России, дальнем и ближнем зарубежье высылают свои работы по математике в адрес ВЗМШ или соответствующего филиала.

Адреса филиалов математического отделения ВЗМШ:

241035 г. Брянск, ул. Мало-Орловская, д. 8, тел.: (4832) 56-18-08, e-mail: brotek@mail.ru

610002 г. Киров, а/я 2039, ЦДООШ, тел.: (8332) 35-15-03, 35-15-04, e-mail: sms@extedu.kirov.ru, сайт: <http://cdoosh.kirov.ru>

150000 г. Ярославль, ул. Советская, д. 14, тел.: (0852) 11-82-03, e-mail: olimp@olimp.edu.yar.ru

Ниже вы найдете краткие сведения о каждом отделении ВЗМШ и условия вступительных контрольных работ.

Отделение математики

Изначально ВЗМШ была математической школой (и буква М в аббревиатуре означала «математическая»). Постепенно школа расширилась и превратилась в многопредметную, однако отделение математики остается в школе самым многочисленным и востребованным.

Нашей основной задачей является углубленное изучение наиболее важных вопросов школьного курса математики, мы расширяем школьные знания и помогаем готовиться к экзаменам.

Мы принимаем учиться на все курсы с 0 по 5 (что соответствует 6–11 классам общеобразовательной школы) по результатам вступительной работы. После зачисления в школу ученик получает пособия по программе ВЗМШ, абсолютное большинство которых написано специально для учащихся математического отделения ВЗМШ. Ученик изучает предложенные темы, решает задачи и выполняет по каждой теме контрольную работу, которая проверяется, рецензируется преподавателем школы и вместе со всеми замечаниями и советами отсылается ученику. За каждым учеником на все годы обучения закреплен один и тот же преподаватель, которому в случае необходимости всегда можно задать вопросы. Возможность постоянного контакта между школьником и его преподавателем в большой степени облегчает сложности, неизбежно связанные с заочной формой обучения.

Если вы хотите учиться индивидуально, то надо выполнить вступительную работу, условия задач которой расположены ниже. Решения задач, с которыми удалось справиться, нужно записать в обычной ученической тетради в клетку и выслать простой бандеролью (пожалуйста, не сворачивайте тетрадь в трубку!) в адрес школы. Вступительные работы принимаются также по электронной почте: riem@math-vzms.org. В этом случае работа должна быть в виде файла формата doc или PDF, можно также отсканировать текст и выслать его по электронной почте. На обложке тетради (или в начале работы, высланной электронной почтой) укажите: фамилию, имя, отчество (печатными буквами), год рождения, базовое образование (сколько классов средней школы будет закончено к сентябрю очередного учебного года).

Рядом с порядковым номером задачи в скобках указано, ученикам какого класса (имеется в виду тот класс, в котором вы предполагаете учиться с 1 сентября) эта задача предназначается. Вы можете, если хотите, дополнительно решать задачи, адресованные более старшим классам.

Не торопитесь, а если задачи не получаются, возвращайтесь к ним несколько раз. Возможно, вы не сможете решить все задачи своего класса, присылайте решения тех, которые сделать удалось. Не забудьте обосновать свои решения, «голый» ответ к задаче решением не считается.

Срок отправки вступительной работы – до 1 июня 2014 года.

Группы «Коллективный ученик» (на все курсы) принимаются без вступительной работы.

Все подробности, связанные с порядком поступления, оплатой и процессом обучения, вы можете узнать, посмотрев сайт отделения или задав вопросы по электронной почте или по телефону.

Сайт математического отделения:

<http://www.math-vzms.org>

Электронный почтовый ящик математического отделения: riem@math-vzms.org

Задачи

1 (6–10). Верно ли, что среднее арифметическое двух последовательных простых чисел не может быть простым числом?

2 (6–10). В коробке лежат воздушные шарики: 10 красных и 10 синих. Продавец не глядя достает по одному шарик. Сколько шариков ему надо вытащить, чтобы среди них обязательно нашлись: а) два шарика одного цвета; б) два шарика разного цвета; в) три шарика одного цвета?

3 (6–10). Припишите к числу 10 справа и слева по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 12.

4 (6–10). Петя отпил $1/2$ стакана кофе и долил его молоком. Потом он отпил $1/3$ стакана и опять долил молоком. Наконец, он отпил $1/6$ стакана, долил молоком и выпил весь стакан. Чего Петя выпил больше: кофе или молока?

5 (6–10). В 20-этажном доме испорчен лифт: он может либо подняться на 13 этажей вверх, либо спуститься на 8 этажей вниз. Можно ли, пользуясь лифтом, попасть с 4-го этажа на 5-й этаж?

6 (7–10). Два города A и B расположены на берегу реки на расстоянии 10 км друг от друга. Пароход может проплыть из A в B и обратно за 1 час. Больше или меньше времени понадобится ему, чтобы проплыть 20 км по озеру?

7 (7–10). а) Можно ли занумеровать ребра куба натуральными числами от 1 до 12 так, чтобы для каждой вершины куба сумма номеров ребер, которые в ней сходятся, была одинаковой?

б) Аналогичный вопрос, если расставлять по ребрам куба числа $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

8 (8–10). Разложите на множители:

а) $x^8 + x^4 + 1$ (на три множителя);

б) $x^5 + x + 1$ (на 2 множителя).

9 (8–10). В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при основании равна одной из сторон. Определите углы треугольника.

10 (9–10). а) Докажите, что при $a > 0$ $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

б) Постройте график функции $y = x + \frac{1}{x}$.

11 (9–10). Известно, что $a + b + c < 0$ и что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней. Определите, какой знак имеет число c .

12 (9–10). Можно ли восстановить треугольник по серединам его сторон? А четырехугольник?

Отделение биологии

Зачисление на отделение проводится на конкурсной основе по результатам приведенной ниже вступительной работы. В конкурсе могут принять участие школьники, которые в этом учебном году занимаются в 8 или 9 классе, независимо от места проживания. Обучение для 8-классников длится 3 года, для 9-классников – 2 года.

Учащимся 8 классов необходимо решить задачи 1–3 и одну из задач 4,5, а девятиклассникам – задачи 2,3 и две из задач 4–6.

В ответах можно использовать и факты, найденные в литературе, и собственные идеи. Просим для сведений, почерпнутых из книг, приводить ссылки на источники (для сведений, взятых из интернета, – точный адрес соответствующей страницы).

Работу следует выполнить на русском языке в тетради; на обложке укажите свою фамилию, имя, отчество, полный домашний адрес с индексом, номер школы и класс, в котором

вы учитесь. Вместе с работой пришлите конверт с маркой и заполненным адресом (для отправки вам решения приемной комиссии).

Кроме того, работу можно выполнить в электронном виде и выслать в файле формата doc, docx, rtf, txt или odt на наш электронный адрес: uchenikivzmsh@gmail.com

Срок отправки вступительной работы – до 15 июня 2014 года.

Задачи

1. На приусадебных участках выращивают множество растений, завезенных из дальних стран. И большинство из них благополучно выживает в наших условиях. Ясно, что эти растения имеют все шансы распространиться и жить уже независимо от человека. Но лишь незначительная часть из них в достоверно приличном количестве представлена в «дикой» природе. Какие причины могут ограничивать распространение таких инородных растений? Если можете, для подтверждения ваших соображений используйте конкретные примеры.

2. Объясните, являются ли генетическими клонами: а) все яблоки с одной яблони; б) все картофелины с одного куста; в) все семечки из одного арбуза. В подтверждение своей точки зрения опишите биологические процессы, обеспечивающие генетическое разнообразие (или единообразие) в каждом случае.

3. Опишите возможные механизмы действия противоядий (веществ, которые вводятся в организм, чтобы свести к минимуму негативные последствия отравления тем или иным ядом).

4. Обычный анализ крови, который вам делают при периодических обследованиях в поликлинике, включает определение стандартного набора параметров. Какие болезни и физиологические расстройства могут быть выявлены на основании этого анализа? Перечислите, для каких диагностических целей необходимо определение дополнительных характеристик состава крови. Какие параметры следует измерять в каждом из этих случаев?

5. Как вы понимаете – за что присудили Нобелевскую премию по биологии и медицине осенью 2013 года? Изложите своими словами суть открытия и его значение для дальнейшего развития медицины.

6. От чего зависит время жизни тех или иных клеток человека или другого многоклеточного организма? Объясните, что может вызывать необходимость их гибели и когда она происходит. Постарайтесь предложить как можно больше вариантов ответа.

Отделение физики

Обучение на отделении одно-, двух- и трехгодичное. На трехгодичный поток (курс Ф3) принимаются оканчивающие в 2014 году 8 классов средней школы, на двухгодичный (курс Ф2) – оканчивающие 9 классов и на одногодичный (курс Ф1) – 10 классов. Учащиеся, оканчивающие десятый класс, могут пройти ускоренно всю программу за один год (курс Ф0). Для поступления на курс Ф3 нужно решить задачи 1–5 приведенной ниже вступительной работы, на курс Ф2 – задачи 4–9, на курс Ф1 – задачи 5–10, на курс Ф0 – задачи 4–10.

На обложке тетради следует указать фамилию, имя и отчество, код курса (Ф0, Ф1, Ф2 или Ф3), сколько классов будет закончено к 1 сентября 2014 года, полный почтовый адрес (с индексом), электронный адрес (если есть), телефон.

Срок отправки вступительной работы – до 15 июня 2014 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются на курсы Ф1, Ф2, Ф3 без вступительной работы, только по заявлению руководителя.

E-mail отделения физики: olphys@polly.phys.msu.ru

Интернет-сайт: <http://phys.problems.ru>

Задачи

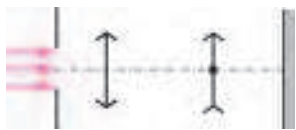
1. Рычаг с грузами находится в равновесии, при этом точка закрепления рычага делит его длину в отношении 1:2. Когда к концу короткого плеча рычага подвесили дополнительный груз, для сохранения равновесия точку закрепления пришлось сдвинуть на $d = 4$ см. После этого груз переместили на конец длинного плеча. На сколько теперь придется сдвинуть точку закрепления рычага?

2. Собирая часы после ремонта, мастер перепутал местами часовую и минутную стрелки. Сколько времени такие часы будут спешить по сравнению с обычными в промежутке от полудня до полуночи?

3. Чтобы вскипятить ведро воды с температурой $t_b = 40$ °С, требуется затратить в два раза большее количество теплоты, чем для получения кипятка из ведра снега с температурой $t_c = -20$ °С. Какую часть воды надо взять из первого ведра, чтобы при добавлении ее в ведро со снегом после установления теплового равновесия в ведре оказалась только вода при температуре 0 °С? Какова плотность этого снега? Необходимые константы найдите в справочнике. Затратами тепла на нагревание самого ведра и окружающей среды можно пренебречь.

4. Из двух одинаковых кусков проволоки сделали куб и тетраэдр. Во сколько раз будет отличаться их электрическое сопротивление, если измерять его, присоединяя контакты к смежным вершинам?

5. Параллельный пучок света проходит через круглое отверстие радиусом $r = 1$ см и через систему линз попадает на экран (см. рисунок). Первая линза – собирающая с фокусным расстоянием $F = 10$ см, а вторая – составная, у которой верхняя половина такая же, как у первой линзы, а нижняя вырезана из рассеивающей линзы с тем же по величине фокусным расстоянием. Расстояние от второй линзы до первой $s = 20$ см, а до экрана $L = 10$ см. Главные оптические оси линз совпадают и перпендикулярны экрану. Каким будет изображение светового пучка на экране?



6. Капли падают с крыши через равные промежутки времени. Известно, что в некоторый момент расстояние между второй и четвертой каплями в полтора раза больше, чем между второй и третьей. Какое расстояние к этому времени пролетела пятая капля? Сопротивлением воздуха пренебречь.

7. Лежащему на столе кубику придали некоторую начальную скорость, после чего он остановился за время t_1 . Для другого кубика того же размера, запущенного с той же начальной скоростью, время до остановки составило t_2 . Когда эти кубики приклеили друг к другу и снова запустили их по столу с той же скоростью, они остановились за время t_3 . Найдите отношение масс кубиков.

8. Конструкция из двух одинаковых палочек длиной $d = 5$ см каждая, соединенных под прямым углом, подвешена за один из концов. На этот конец садится муха и медленно проползает вдоль всей конструкции. Найдите перемещение нижнего конца конструкции, если известно, что масса мухи вдвое меньше массы палочки.

9. Во сколько раз нужно изменить длину маятника в

настенных механических часах, чтобы их могли использовать в быту переселенцы на Марс, желающие сохранить привычное деление суток на 24 часа?

10. С какой силой растянуто тонкое металлическое кольцо радиусом R , обладающее электрическим зарядом Q ? В центр кольца помещен еще один неподвижный заряд Q того же знака.

Отделение филологии

За время существования отделения подготовлено и издано большое количество уникальных учебных пособий по русскому языку, общему языкознанию, истории и теории литературы.

На отделение принимаются все желающие, имеющие базовую подготовку в объеме 7 классов.

Отделение предлагает на выбор 18 учебных программ. Подробно о них рассказано на нашем сайте. Сведения о программах и порядке обучения высылаются также вместе с извещением о решении Приемной комиссии. При оценке вступительной работы учитывается, в каком классе вы учитесь.

Вы хотите исправить грамотность? Познакомиться с любопытными проблемами теории и практики русского языка? Освоить приемы лингвистического или литературоведческого анализа? Узнать кое-что о журналистике и оценить свои творческие способности? Приобрести навыки, необходимые для успешной сдачи экзаменов в вуз? Тогда выполните и пришлите нам вступительное задание, вопросы которого приведены ниже.

Внимание! На первой странице укажите следующие данные: Ф.И.О., какой класс заканчиваете, полный (с индексом!) почтовый адрес, телефон. Вместе с выполненным заданием пришлите, пожалуйста, стандартный конверт с маркой и заполненным вашим адресом (с индексом) для ответа Приемной комиссии.

Срок отправки вступительной работы – до 15 мая 2014 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы.

Если вопросы, предложенные нами, для вас пока сложны, но вы хотите у нас учиться, пришлите информацию о себе, и мы постараемся помочь.

Наш e-mail: filologiyvzms@mail.ru

Наш сайт: <http://philologist.ru>

Вопросы

1. Как вы думаете, какую собачью кличку получил в качестве названия региональный экспресс, курсирующий по железной дороге с осени 2011 года?

А) Джек; Б) Дик; В) Рэкс; Г) Рэй; Д) Бим.

Свой ответ обоснуйте.

2. Как правильно должны выглядеть фразеологизмы?

Остался за бортом разбитого корыта; дать дубка; довести до белого колена; не мудрствуя долго; ни зги не брезжит; ни слуху, ни пера; скрипя сердцем; што-крыто белыми нитками; не в коне корм...

3. Подчеркните слова с нулевым окончанием.

БЕЖ, САМ, ВЕЧОР, КИЙ, РУСЬ, ХОРОШ, КОФЕ, МЫШЬ, ШОССЕ, ВРАЧ, ПРИДИ, ДИСТРИБЬЮТЕР, ОТДАВ, ЗАМУЖЕМ.

4. Расскажите о своем любимом стихотворении или поэте.

5. Какое литературное явление 20-х годов XIX века, по вашему мнению, вызвало такое ироническое замечание А.Бестужева: «Житья не стало от толстощекой безнадежности, от самоубийств шампанскими пробками, от злодеев с биноклями, в перчатках glasses?»

Отделение экономики

Хотите научиться разбираться в экономике? Узнать изнутри работу маркетологов, менеджеров, банкиров, предпринимателей? Тогда эта информация для вас!

Обучение на отделении экономики заочное, все учебные материалы школьники получают через интернет (а те, у кого нет доступа в интернет, – по обычной почте). Учиться на экономическом отделении могут те, кто в 2014 году закончит 7-й (или более старший) класс; срок обучения 1 год.

Программа экономического отделения включает изучение экономической теории и знакомство с практикой экономики и бизнеса. Это может стать хорошей основой для дальнейшего изучения предпринимательства и менеджмента, бухгалтерского учета и финансов, мировой экономики – профессия экономиста требует широких знаний. Учащиеся 10–11 классов в дополнение к курсу экономики могут получить необходимую подготовку по русскому языку и литературе, английскому языку и обществознанию, что поможет лучше сдать ЕГЭ, успешно участвовать в предметных олимпиадах и поступить в лучшие вузы страны.

Учась на экономическом отделении, вы сможете заочно познакомиться со студентами, выпускниками и преподавателями Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова, узнаете о разнообразных замечательных профессиях в экономике, одну из которых, возможно, вы выберете для себя в будущем.

Для поступления на отделение вам нужно выполнить вступительное задание.

Прочитайте текст

Летом в деревне школьник Тёпа Экономов и его бабушка часто ходят в лес за ягодами и грибами. Бабушка всегда говорит, что лучше есть побольше натурального. Сонный Тёпа, идя рано утром по мокрой траве, размышляет: «В магазин можно хоть вечером прийти и купить там и мороженое, и конфеты, и сыр... Обычно этого всем хватает, а вот ягод и грибов в лесу – если опоздаешь – уже не найдешь. Странно все устроено: лес большой – больше магазина, а ягод и грибов в нем не хватает, но зато собирать их можно совершенно бесплатно. А в магазине полно продуктов, но их бесплатно не раздают. Хорошо хоть, что грибы и ягоды через некоторое время вырастают новые».

Лето пролетело быстро, и Тёпа вернулся в город. В один из осенних дней он с классом поехал на экскурсию на карьер, в котором добывают каменный уголь, – на огромной территории без конца и края снуют экскаваторы и бульдозеры, а большие самосвалы непрерывным потоком везут в своих кузовах черные камни. Тут Тёпе вспомнилось, как они с бабушкой с корзинками рано утром спешат в лес за грибами. И здесь происходит примерно то же самое, только в гигантском масштабе. «Такими темпами уголь закончится очень быстро, – подумал Тёпа. – А что потом? Наверное, потом откроют новый карьер, или шахту. Но что будет, когда закончится весь уголь? А нефть и газ?»

Задание

Оцените рассуждения Тёпы Экономова. Действительно ли есть повод опасаться, что мы берем бесплатно у природы большое количество разнообразных ресурсов для своих нужд? К чему, на ваш взгляд, это может привести в будущем?

Поделитесь с нами вашим опытом! Встречали ли вы обсуждение подобных проблем в газетах, журналах? Обсуждали ли вы вопрос влияния человека на природу в школе? Напишите нам об этом.

Свои ответы присылайте по электронной почте: zadanie@econ4all.ru или обычным письмом. Обязательно укажите полный почтовый адрес и индекс, фамилию, имя и отчество (в письме всю информацию о себе пишите, пожалуйста, печатными буквами). Озаглавьте письмо: «Экономика, вступительное задание-2014». Укажите класс, в котором вы сейчас учитесь. Пожалуйста, укажите источник информации, из которого вы узнали о ВЗМШ («Квант», от учителя, друзей, др.).

Срок отправки вступительной работы – до 31 мая 2014 года.

Наши адреса в интернете:

<http://econ4all.ru>, http://vk.com/econ4all_group

Отделение истории

Отделение истории объявляет набор на курс дистантного обучения. Обучение на отделении позволит всем, в том числе жителям самых отдаленных городов и деревень, расширить свой кругозор, подготовиться к поступлению в вуз. Успешно прошедшие курс обучения получают диплом ВЗМШ. Образование в нашей школе можно продолжить, занимаясь на спецкурсах.

А зачем нужно изучать историю? Во-первых, это просто интересно. Любопытно знать, как жили когда-то люди, во что одевались, чем питались, о чем думали, что читали, как женились и выходили замуж, за что боролись и «на что напарывались». Во-вторых, это полезно. Только зная прошлое, можно понять настоящее и прогнозировать будущее. Мы поможем вам в этом разобраться. Специально для вас опытные преподаватели пишут книжки. Последние новости из мира истории вы узнаете одними из первых!

Историческое образование в конверте – современная форма дополнительного образования. По нашим книжкам вы будете выполнять особые задания и сообщать нам, что вы раскопали. Мы же подскажем, как действовать дальше. Ведь, в сущности, труд историка и состоит из этих раскопок. Историк-археолог, копая землю и песок, отыскивает крупицы ушедших времен; историк-архивариус копается в гряде бумаг и достает из архивов и даже из частной переписки все, что может позволить ему понять образ времени; историк-теоретик как увлекательный роман читает археологические таблицы, сухие сводки, статистику и восстанавливает по ним живую ткань ушедшей жизни. У историка особая профессия: он в одном лице следователь, прокурор и адвокат времени.

Как к нам поступить? Мы берем тех, кто выполнит приведенное ниже вступительное задание.

Срок отправки вступительного задания – до 15 июня 2014 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительного задания.

Задание

1. Отгадайте кто это

- С легкой руки Фридриха II в Европе его прозвали «русский Гамлет».
- О нем сплетничали, что он внебрачный сын.
- Его отец – внук Петра I по матери и внучатый племянник Карла XII по отцу.
- Его мать приехала в Россию 15-летней девочкой, пришла к власти в 33 года, свергнув мужа, и правила 34 года, не имея на трон законных прав.
- Главная черта его правления – мелочный деспотизм.
- Указом о трехдневной барщине он снискал себе ореол крестьянского царя.

• Во время военных смотров мог, осерчав, отправить в Сибирь прямо с плаца за нечеткий шаг, оторвавшуюся пуговицу или плохо напудренные букли.

• Отправил 22 тысячи казаков завоевывать Индию, чтобы ослабить Англию, и только его смерть вернула солдат с дороги.

• Боясь заговора, этот император построил себе замок и в нем был убит.

• Его старший сын мечтал о конституции для России, а дал ее Польше.

2. Опишите, не более чем в 7 предложениях, исторический портрет главнокомандующего русской армией в Полтавской битве.

Для старшеклассников, готовящихся сдавать ЕГЭ по обществознанию, отделение истории объявляет набор на курс «Обществознание».

Обществознание – это свод общественных дисциплин, изучающих все стороны деятельности человека. Некоторые преподаватели называют его винегретом. Вполне удачное сравнение. Как винегрет – составное блюдо, так и обществознание состоит из разных дисциплин. Перемешиваясь, дополняя друг друга, они создают цельную картину общества.

Программа курса рассчитана на один год. Обучение носит заочный характер и имеет целью дать выпускникам школ – как крупных городов, так и небольших сел – глубокие знания по общественным дисциплинам, подготовить их к успешной сдаче ЕГЭ. Курс включает следующие дисциплины: философия, социология, политология, теория государства, государственное устройство России, право, экономика.

Заочная физико-техническая школа при МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) Московского физико-технического института (государственного университета) (МФТИ) проводит набор в 8–11 классы учащихся 7–10 классов общеобразовательных учреждений (школ, лицеев, гимназий и т.п.), расположенных на территории Российской Федерации.

ЗФТШ работает в сфере профильного дополнительного образования детей с 1966 года. За прошедшие годы школу окончили более 90 тысяч учащихся; практически все ее выпускники поступают в ведущие вузы страны, а каждый второй студент МФТИ – ее бывший ученик.

Научно-методическое и общее руководство школой осуществляет Московский физико-технический институт (государственный университет).

Обучение в школе ведется по трем предметам научно-технической направленности – физике, математике и информатике. В 8–9 классах изучаются только физика и математика. В 10–11 классах к этим предметам добавляется еще один предмет «Математические основы информатики и ИКТ» (информатика). Учащиеся 10–11 классов могут по своему выбору изучать либо только два предмета, а именно: физику и математику, физику и информатику или математику и информатику, либо все три предмета вместе: и физику, и математику, и информатику. Разрешается также обучение только по одному из указанных предметов.

Цель нашей школы – помочь учащимся 8–11 классов общеобразовательных учреждений, интересующимся предметами научно-технической направленности, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам, а так-

же способствовать их профессиональному самоопределению.

Слушателям направляются оригинальные учебные пособия, созданные на основе многолетнего опыта работы авторов курса. Проверка знаний осуществляется с помощью общепринятой системы тестирования.

Для записи на курс необходимо отправить заявление *до 15 июня 2014 года*. В заявлении укажите: фамилию, имя, отчество, свой полный домашний адрес (с индексом!), e-mail, класс, в котором будете учиться с 1 сентября 2014 года.

Заявление отправьте по адресу: 119234 Москва, Воробьевы горы, МГУ, ВЗМШ (курс «Обществознание») или на адрес электронной почты: vzms@yandex.ru

Для школьников 7–10 классов мы предлагаем два спецкурса по граждановедению.

1. Беседы о правах человека, нравственности, праве, законе и государстве. В этом годовом курсе даются современные представления об основных понятиях, связанных с правом, законом и государством, рассказывается об основах российского законодательства, правах человека. Разбираются примеры судебных процессов, приводятся общекультурные примеры, связанные с направленностью курса.

2. Беседы об основах демократии. Это – полугодовой курс.

Желающие обучаться на спецкурсах должны *до 15 июня 2014 года* отправить заявление. В нем укажите свой полный почтовый адрес (и адрес электронной почты, если есть), фамилию, имя и отчество, сколько классов закончено (мы учитываем возраст поступающего).

Заявление отправьте по адресу: 119234 Москва, Воробьевы горы, МГУ, ВЗМШ (граждановедение) или на адрес электронной почты: vzms@yandex.ru

же способствовать их профессиональному самоопределению.

Набор в 8, 9, 10 и 11 классы на 2014/15 учебный год проводится на заочное, очно-заочное и очное отделения.

Заочное отделение (индивидуальное заочное обучение)
Тел./факс: (495) 408-51-45, e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Прием на заочное отделение проводится на конкурсной основе по результатам выполнения приведенных ниже вступительных заданий по физике и математике (для поступающих в 8–9 классы) или по выбранной совокупности предметов (для поступающих в 10–11 классы). Если школьник выбрал для изучения только один предмет, то вступительное задание выполняется им только по этому выбранному предмету. Полная программа обучения рассчитана на 4 года с 8 по 11 классы включительно, но начать обучение можно с любого из указанных классов.

В течение учебного года, в соответствии с программой ЗФТШ, ученик будет получать по каждой теме задания по физике, математике и информатике (по 5–6 заданий по физике и математике для 8–9 классов, по 6–7 заданий по физике и математике и 4–5 заданий по информатике для 10–11 классов), а затем рекомендуемые авторские решения этих заданий вместе с проверенной работой. Задания содержат теоретический материал, разбор характерных примеров и задач по соответствующей теме и 8–12 контрольных вопросов и задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные. Задания составляют опытные преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ, а также выпускники МФТИ и другие специалисты. Примеры заданий можно посмотреть на сайте ЗФТШ в интернете : <http://www.school.mipt.ru>. Работы учащихся-заочников проверяют студенты, аспиранты и вы-

пускники МФТИ (из них 80% – выпускники нашей школы).

Срок отправки решений вступительных заданий – не позднее 1 марта 2014 года.

Проверенные вступительные работы обратно поступающему не высылаются. Решение приемной комиссии будет выслано в июле 2014 года.

Тетрадь с выполненными заданиями высылайте по адресу: 141700 Московская область, г.Долгопрудный, Институтский пер., д.9, ЗФТШ.

Школьники, уже обучающиеся в ЗФТШ, могут изменить совокупность изучаемых предметов по личному заявлению на имя директора ЗФТШ. Изменение совокупности изучаемых предметов допускается только в конце текущего учебного года, до начала следующего учебного года. В течение учебного года изменять совокупность изучаемых предметов, а также добавлять к уже выбранным новые предметы нельзя! Если ученик ЗФТШ хочет добавить в следующем учебном году к уже изучаемым предметам еще один или два, то ему не требуется выполнять вступительные задания по этим предметам при условии хорошей или отличной успеваемости по уже изучаемым предметам за предыдущий период обучения в ЗФТШ. В ином случае выполнение вступительных заданий по добавляемым предметам обязательно.

Вступительные задания по выбранным предметам ученик выполняет самостоятельно в одной школьной тетради на русском языке, сохраняя тот же порядок задач, что и в задании. Тетрадь нужно выслать в конверте *простой* бандеролью. На внутреннюю сторону обложки тетради наклейте справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса. На лицевую сторону обложки наклейте лист бумаги, четко заполненный по приведенному здесь образцу:

Л.№																			
№ задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Σ		
Ф																			
М																			
И																			

1. Республика, край, область *Кемеровская область*
2. Фамилия, имя, отчество *Чистова Галина Сергеевна восьмой*
3. Класс, в котором учитесь
4. Если вы уже учитесь в ЗФТШ, напишите свой личный номер
5. Предметы, по которым выполнены задания (отметьте галочками)
 - физика
 - математика
 - информатика
6. Номер школы *35*
7. Вид школы (обычная, лицей, гимназия, центр образования) *лицей*
8. Фамилия, имя, отчество учителей:
 - по физике *Смирнов Евгений Васильевич*
 - по математике *Кочетов Петр Александрович*
 - по информатике *Дронова Вера Ивановна*
9. Подробный домашний адрес (с указанием индекса), телефон, e-mail *654041 г.Новокузнецк, ул. Волжская, д.74, кв.3, e-mail: dio@rdsc.ru*
10. Адрес школы и телефон, факс, e-mail *654041 г.Новокузнецк, ул. Циолковского*

го, д.65,
тел.: (3843)35-19-72,
e-mail: must@yandex.ru

11. Как вы узнали о ЗФТШ?

На конкурс ежегодно приходит более 3 тысяч вступительных работ. Пожалуйста, обратите внимание на правильность заполнения анкеты! Пишите аккуратно, лучше печатными буквами.

Для получения ответа на вступительное задание и для отправки вам первых заданий *обязательно* вложите в тетрадь два одинаковых бандерольных конверта размером 160 × 230 мм. На конвертах четко напишите свой домашний адрес.

Очно-заочное отделение (обучение в факультативных группах)

Тел./факс: (498) 744-63-51, e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Факультативные группы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении *двумя или тремя преподавателями* – физики, математики и информатики, в отдельных случаях разрешается обучение только по одному предмету. Руководители факультатива принимают в него учащихся, успешно выполнивших вступительные задания ЗФТШ.

Группа (не менее 7 человек) принимается в ЗФТШ по заявлению директора общеобразовательного учреждения (образец можно посмотреть в разделе «очно-заочное отделение» сайта ЗФТШ в интернете), в котором должны быть указаны фамилии, имена, отчества руководителей факультативной группы и поименный алфавитный список обучающихся (Ф.И.О. полностью с указанием класса *текущего учебного года* и итоговых оценок за вступительные задания по выбранным предметам, *адрес, телефон, факс и e-mail школы*). Заявление и конверт для ответа о приеме в ЗФТШ с обратным адресом одного из руководителей следует высылать *до 25 мая 2014 года* по адресу: 141700 Московская обл., г.Долгопрудный, Институтский пер., д.9, ЗФТШ (с пометкой «Факультатив»). Тетради с работами учащихся *не высылаются*.

Работа руководителей факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением как руководство профильными факультативными занятиями по предоставлению ЗФТШ соответствующих сведений.

Руководители, работающие с учащимися, в течение учебного года будут получать учебно-методические материалы (программы по физике, математике и информатике, задания по темам программ, решения заданий с краткими рекомендациями по оценке работ учащихся); приглашаться на курсы повышения квалификации учителей физики и математики, проводимые на базе МФТИ. Работы учащихся проверяют и оценивают руководители факультативных групп, а в ЗФТШ ими высылаются ведомости с итоговыми оценками по каждому заданию и итоговая ведомость за год.

Очное отделение (обучение в вечерних консультационных пунктах)

Тел.: (499) 755-55-80, e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Для учащихся Москвы и Московской области по программе ЗФТШ работают вечерние консультационные пункты. Набор в них проводится по результатам вступительных экзаменов по физике и математике и собеседования, которые проходят в середине сентября. Обучение ведется по трем предметам (информатика – по желанию учащегося).

Программы ЗФТШ являются профильными дополнительными образовательными программами и едины для всех

отделений. Кроме того, ученикам всех отделений будет предложено участвовать в физико-математической олимпиаде «ФИЗТЕХ–2014», которая, проводится на базе МФТИ и в ряде городов России в марте, в других очных и заочных олимпиадах МФТИ и его факультетов. Для учащихся 9–11 классов работает субботний лекторий по физике и математике по программе ЗФТШ. Лекции читают преподаватели института (как правило, авторы заданий). Подробнее об этих мероприятиях можно прочитать на сайте ЗФТШ: <http://www.school.mipt.ru>

По окончании учебного года учащиеся, успешно выполнившие программу ЗФТШ, переводятся в следующий класс, а выпускники (одинадцатиклассники) получают свидетельство об окончании школы с итоговыми оценками по изучавшимся в 11 классе предметам.

Ученикам, зачисленным в ЗФТШ, будет предложено оплатить безвозмездный целевой взнос для обеспечения учебного процесса. Сумма взноса может ориентировочно составлять для учащихся заочного отделения 1100–1700 руб. за каждый предмет в год, для очного 2000–3000 руб. за каждый предмет в год, для очно-заочного – 1500–2400 руб. за каждый предмет (с каждой факультативной группы) в год.

Для учащихся Украины работает УЗФТШ при ФТННЦ НАН Украины (обучение платное). Желающим поступить туда следует высылать работы по адресу: 03680 Украина, г. Киев, б-р Вернадского, д. 36, ГСП, УЗФТШ. Тел.: 8-(10-38-044) 424-30-25, 8-(10-38-044)422-95-64. Сайт УЗФТШ: www.mfti.in.ua, e-mail: ftsch@imp.kiev.ua

Для учащихся из зарубежных стран возможно только платное обучение на заочном и очно-заочном отделениях.

Внимание! Прислав нам решенное вступительное задание, вы даете согласие на обработку ваших персональных данных (в соответствии с Федеральным законом от 27.07.2006 г. №152-ФЗ), которые будут использованы исключительно для отправки вам материалов по почте и учета вашей успеваемости.

Ниже приводятся вступительные задания по физике, математике и информатике. Номера задач, обязательных для выполнения (заочное и очно-заочное отделения), указаны в таблице (номера классов даны на текущий 2013/14 учебный год):

	7 класс	8 класс	9 класс	10 класс
Физика	1–5	6–10	9–13	11–16
Математика	1–5а	3.5–8	5–10	8–14
Информатика	–	–	1–5	3–7

Максимальные баллы:

	7 класс	8 класс	9 класс	10 класс
Физика	25	25	25	30
Математика	16	22	27	27
Информатика	–	–	11	12

Вступительное задание по физике

1. Ровно в полдень по местному времени от пристани «Верхняя» вниз по течению реки отправились плот и катер. В 12:45 катер подошел к пристани «Нижняя», расположенной в 6 км от пристани «Верхняя», а плот причалил к этой

пристани в 15:00. Определите скорость катера в стоячей воде, считая ее постоянной за все время движения.

2. Колонна автомобилей движется по шоссе со скоростью $v_1 = 60$ км/ч. Длина колонны (расстояние по шоссе от первого автомобиля до последнего) составляет $L = 150$ м. По пути следования колонне встречается аварийный участок дороги, протяженность которого значительно больше длины колонны. Попав на него, каждый автомобиль, поддерживая безопасный интервал, быстро снижает скорость до $v_2 = 40$ км/ч. Определите длину колонны на аварийном участке дороги.

3. На дне сосуда с вертикальными стенками лежит сплошной стальной куб с ребром 8 см. В сосуд наливают 400 г воды. Определите уровень воды в сосуде. Как и на сколько изменится уровень при удалении куба? Площадь квадратного дна сосуда $S = 100$ см². Уровень воды не доходит до верхнего края сосуда.

4. Даны два сплошных деревянных куба равных объемов, каждый из которых изготовлен из двух сортов древесины: тополя и березы. При изготовлении первого куба использовались одинаковые объемы этих материалов, а при изготовлении второго – равные массы материалов. Известно, что вес первого куба составил $P_1 = 40$ Н. Определите: 1) длины ребер этих кубов; 2) вес второго куба. Плотность тополя $\rho_1 = 400$ кг/м³, плотность березы $\rho_2 = 600$ кг/м³. Считайте $g = 10$ Н/кг.

5. Колена сообщающихся сосудов представляют собой вертикально расположенные трубки диаметром $d = 2$ см каждая. В одно из колен заливают сначала воду объемом $V = 100$ мл, а затем – такой же объем масла. Определите уровни жидкостей в коленах. Объемом изогнутой части трубок пренебречь. Плотность масла $\rho_1 = 800$ кг/м³, плотность воды $\rho_2 = 1000$ кг/м³.

6. Большой брусок квадратного сечения площадью $S = 100$ см² и высотой $a = 5$ см плавает в воде так, что глубина погружения его нижней грани равна $h = 3$ см. После того как на него положили второй брусок объемом $V = 50$ см³, глубина погружения первого бруска увеличилась на $\Delta h = 1,5$ см. Определите плотности материалов обоих брусков.

7. Однородный стержень длиной $L = 6$ м подвешен в вертикальном положении на легкой нити, привязанной к одному из концов стержня. На расстоянии $l = 4$ м от точки крепления первой нити закрепляют вторую легкую нить и переводят стержень в горизонтальное положение (обе нити при этом расположены вертикально). Как и во сколько раз при этом изменилась сила натяжения первой нити?

8. Медленно летящий металлический шарик массой $m_1 = 10$ г попадает в свинцовый шар, жестко закрепленный на поверхности земли. Температура шара равна $t_2 = -16$ °С. Определите радиус шара, при котором можно зафиксировать изменение его температуры на $\Delta t = 1$ °С. Начальную температуру металлического шарика принять равной $t_1 = 500$ °С. Плотность свинца $\rho = 11700$ кг/м³, теплоемкости свинца и материала шарика равны $c_{св} = 130$ Дж/(кг·К) и $c_m = 500$ Дж/(кг·К) соответственно. Объем шара $V = (4/3)\pi r^3$, где r – радиус шара. Потерями тепла и переходом кинетической энергии шарика в его внутреннюю энергию пренебречь.

9. В медный сосуд, нагретый до температуры $t_1 = 350$ °С, положили лед массой $m = 600$ г при температуре $t_2 = -10$ °С. После установления теплового равновесия оказалось, что в сосуде находится смесь льда и воды, причем масса льда уменьшилась на $\Delta m = 50$ г. Определите массу

сосуда. Масса содержимого сосуда не изменилась. Потеря тепла пренебречь. Удельная теплоемкость меди $c_m = 380 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, удельная теплоемкость льда $c_l = 2100 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, удельная теплота плавления льда $\lambda_l = 3,35 \cdot 10^5 \text{ Дж}/\text{кг}$. Внешнее давление равно нормальному атмосферному давлению.

10. Соединенные последовательно резистор сопротивлением $R_1 = 400 \text{ Ом}$ и резистор с неизвестным сопротивлением R_2 подключены к источнику постоянного напряжения. При этом сила тока в цепи составляет $I_1 = 8 \text{ мА}$. Если эти два резистора соединить параллельно и подключить к тому же источнику напряжения, то сила тока в цепи увеличится до значения $I_2 = 32 \text{ мА}$. Определите сопротивление R_2 .

11. На автодроме проходят испытания два автомобиля. Про их технические характеристики известно следующее: первый автомобиль способен разогнаться с места с постоянным ускорением $a_1 = 3 \text{ м}/\text{с}^2$ до максимальной скорости $v_1 = 40 \text{ м}/\text{с}$, второй автомобиль – с постоянным ускорением $a_2 = 2,5 \text{ м}/\text{с}^2$ до максимальной скорости $v_2 = 60 \text{ м}/\text{с}$. Какому из автомобилей потребуется меньшее время на преодоление дистанции $l = 400 \text{ м}$? Оба автомобиля стартуют с места. После окончания разгона до максимальной скорости автомобиль продолжает движение с той же скоростью.

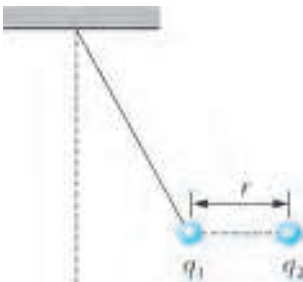
12. Брусок массой $m = 0,8 \text{ кг}$ прижимается одной из своих граней к вертикальной шероховатой стенке горизонтальной силой $F_1 = 15 \text{ Н}$, направление которой перпендикулярно стенке. При каком значении приложенной к бруску и направленной вертикально вверх силе F_2 брусок начнет скользить по поверхности с постоянной скоростью? Коэффициент трения бруска о плоскость $\mu = 0,6$. Считайте $g = 10 \text{ м}/\text{с}^2$.

13. Мячик массой $m = 50 \text{ г}$ начинает свободное падение с высоты $H = 2 \text{ м}$ на горизонтальную жестко закрепленную плиту. При неупругом ударе мячик теряет 20% скорости. Определите количество теплоты, выделившееся при ударе, а также максимальную высоту, на которую поднимется мячик после удара. Считайте $g = 10 \text{ м}/\text{с}^2$. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

14. В баллоне объемом $V = 50 \text{ л}$ находится сжатый воздух под давлением $p_1 = 50 \text{ атм}$. После того как часть воздуха была выпущена наружу, давление в баллоне упало до $p_2 = 30 \text{ атм}$. На сколько уменьшилась масса воздуха в баллоне? Считайте, что температура воздуха в баллоне остается постоянной и равной $t = 22 \text{ }^\circ\text{C}$. Молярная масса воздуха $M = 29 \text{ г}/\text{моль}$.

15. В герметичном сосуде постоянного объема $V = 1 \text{ м}^3$ с теплоизолирующими стенками находится идеальный одноатомный газ под давлением $p_1 = 1 \text{ атм}$. После 5 минут работы нагревателя постоянной мощности, установленного внутри сосуда, давление в сосуде возросло на 10%. Определите мощность N нагревателя. Объемом нагревателя и теплоемкостью стенок пренебречь.

16. Маленький шарик массой $m = 6 \text{ г}$ несущий заряд $q_1 = 300 \text{ нКл}$, подвешен на легкой непроводящей нити. При приближении к нему заряда q_2 противоположного знака (см. рисунок) нить отклонилась от вертикали, а ее сила натяжения увеличилась в 2 раза. Найдите модуль заряда q_2 , если расстояние между шариками $r = 3 \text{ см}$. Оба шарика находятся на одной горизонтали.



Вступительные задачи по математике

1 (3 балла). Турист проехал расстояние между двумя городами за 3 дня. В первый день он проехал $\frac{1}{5}$ всего пути и еще 60 км, во второй – $\frac{1}{4}$ всего пути и еще 20 км, а в третий – $\frac{23}{80}$ всего пути и оставшиеся 25 км. Найдите расстояние между городами.

2 (3б.). Угол A треугольника ABC равен 28° . Внутри треугольника отмечена точка F такая, что $\angle CBF : \angle ABF = 4 : 15$, $\angle BCF : \angle ACB = 4 : 19$. Найдите угол BFC .

3 (3б.). Студент купил 2 книги, уплатив за них 800 рублей. Если бы первая стоила на 20% дешевле, а вторая – на 52% дешевле, то цены книг были бы одинаковыми. Сколько денег уплатил студент за каждую книгу?

4 (3б.). Упростите выражение

$$\frac{p^2 - 1}{q^2 + q} \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{q}} \right) \frac{1 + q - q^3 - q^4}{1 - p^2}.$$

5 (7б.). а) (4б.) Отметьте на координатной плоскости точки $A(1;5)$, $B(3;6)$, $C(2;13)$, $D(5;5)$, $E(7;8)$, $F(12;4)$. Соедините их последовательно отрезками AB , BC , CD , DE , EF и FA и найдите площадь получившейся фигуры.

б) (3б.) При каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с данной фигурой хотя бы одну общую точку?

6 (4б.). Через точку C , лежащую вне окружности с центром O , проведены две секущие к этой окружности. Одна из них пересекает окружность в точках A и B (B лежит между A и C), а вторая проходит через точку O и пересекает окружность в точках P и Q (Q – между P и C). Найдите угол ACP , если угол OAP равен 72° , а отрезок BC равен радиусу окружности.

7 (4б.). Есть два сосуда, первый из которых содержит 100 кг, а второй – 50 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 28% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 36% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

8 (4б.). Три комбайна типа A и пять комбайнов типа B убрали поле за 25 часов. За один час 5 комбайнов типа A и 3 комбайна типа B убирают $\frac{17}{375}$ этого поля. За сколько часов уберут это поле 6 комбайнов типа A и 15 комбайнов типа B ?

9 (4б.). Спустя год после того как некоторая сумма внесена на сберегательную книжку, вклад за счет процентов увеличился на 2016 рублей. Добавив еще 7984 рубля, вкладчик оставил свой вклад в банке еще на год. По истечении этого периода общая сумма вклада стала равна 62816 рублей. Какой процент годовых выплачивает банк?

10 (4б.). Биссектриса PC и медиана QA треугольника PQR взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке F . Площадь треугольника PQR равна 40. Найдите площадь треугольника FPQ .

11 (3б.). Решите уравнение $\sin 4x + \cos^2 x = \sin^2 x$.

12 (4б.). Между числом 3 и неизвестным числом вставлено еще одно число так, что все три числа образуют арифметическую прогрессию. Если средний член этой прогрессии уменьшить на 6, то получится геометрическая прогрессия. Найдите неизвестное число.

13 (4б.). В треугольник со сторонами 10, 17 и 21 вписан прямоугольник так, что две его вершины лежат на большей

стороне треугольника, а две другие – на меньших сторонах. Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 25.

14 (46.). Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 + 6x + 4} + \sqrt{x^2 + 6x + 1} = \sqrt{2x^2 + 12x + 9}.$$

Вступительное задание по информатике

1 (1 балл). Первый вторник месяца Толик провел в Смоленске, а первый вторник после первого понедельника – в Вологде. В следующем месяце Толик первый вторник провел в Пскове, а первый вторник после первого понедельника – во Владимире. Сможете ли вы определить, какого числа и какого месяца Толик был в каждом из городов?

2 (26.). Почтовый индекс в некоторой стране состоит из одной первой буквы (используется 26-символьный алфавит) и двух десятичных цифр, одновременно не равных 0. Сколько различных индексов можно построить?

3 (26.). На фирме «Ромашка» ровно треть сотрудников составляют менеджеры, ровно треть – разнорабочие и ровно треть – инженеры. Ровно половина всех сотрудников работают в отделе сбыта, ровно четверть – в производственном отделе и ровно четверть – в отделе снабжения. Какие из следующих высказываний (не обязательно одно) относительно этой фирмы являются истинными?

(А) В отделе сбыта есть хотя бы один менеджер.

(Б) В каждом отделе может быть поровну менеджеров, инженеров и разнорабочих при любом не противоречащем условию задачи общем числе работников.

(В) Если в отделе снабжения работают только менеджеры, то в производственном отделе есть хотя бы один разнорабочий.

(Г) Если в отделе снабжения работают только инженеры, то в отделе сбыта есть хотя бы один разнорабочий.

4 (36.). Автомат получает на вход два трехзначных числа без значащих нулей. По этим числам строится новое число по следующим правилам.

1. Вычисляются три числа – сумма старших разрядов заданных трехзначных чисел, сумма средних разрядов этих чисел, сумма младших разрядов. Во всех числах отсутствуют значащие нули.

2. Полученные три числа записываются друг за другом в порядке невозрастания.

Выпишите через запятую номера чисел, которые могут быть результатом работы автомата.

- 1) 151303 2) 161410 3) 191615 4) 16123
5) 210 6) 111 7) 12101

Ноль называется «незначащим», если удаление его из записи числа не приводит к изменению значения числа.

5 (36.). Если «жало» – это «двор», а «хна» – это «зев», то чему равна «ель»? А также – «мель» и «щель»?

6 (26.). Исполнитель Черепашка перемещается на экране компьютера, оставляя след в виде линии. В каждый конкретный момент известно положение исполнителя и направление его движения. У исполнителя существуют две команды:

Вперед n (n – целое число) – вызывает передвижение Черепашки на n шагов в направлении движения.

Направо m (m – целое число) – вызывает изменение направления движения на m градусов по часовой стрелке.

Запись Повтори k [Команда1 Команда2] означает, что последовательность команд в скобках повторится k раз.

Напишите программу для данного исполнителя, которая приведет к появлению на экране правильного шестиугольника.

7 (26.). Сколько значащих нулей в двоичной записи числа 130? Ноль называется «значащим», если удаление его из записи числа ведет к изменению значения числа.

Новый прием в школы-интернаты при университетах

Специализированный учебно-научный центр Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова (СУНЦ МГУ – школа имени академика А.Н.Колмогорова), а также СУНЦ НГУ, СУНЦ УрГУ и Академическая гимназия СПбГУ объявляют набор учащихся в 10 класс (двухгодичное обучение) на физико-математическое и химико-биологическое отделения и в 11 класс (одногодичное обучение) на физико-математическое отделение. В СУНЦ МГУ в рамках двухгодичного физико-математического отделения кроме основного профиля выделяется компьютерно-информационный класс, а химико-биологическое отделение представлено специализациями по химии и биологии.

Зачисление в школы проводится на конкурсной основе, по результатам вступительных испытаний. Подробности можно узнать на сайтах школ или обратившись в соответствующие Приемные комиссии по почте. Вот адреса школ:

121357 Москва, Кременчугская ул., 11, СУНЦ МГУ (<http://internat.msu.ru>);

630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11, СУНЦ НГУ (<http://nsesc.ru>);

620137 Екатеринбург, ул. Голощекина, 30, СУНЦ УрГУ (<http://lyceum.urfu.ru>);

199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/96, Академическая гимназия (<http://adum.spbu.ru>).

Ежегодно СУНЦ МГУ осуществляет ряд образовательных проектов для школьников 7–11 классов, увлеченных математикой, физикой, информатикой, химией или биологией.

1) *Заочная школа.* Обучение в школе бесплатное, отбор – конкурсный. Большинство материалов Заочной школы находится в открытом доступе на официальном сайте СУНЦ МГУ. Но только учащиеся Заочной школы имеют возможность общения через интернет с преподавателями Заочной школы и в случае успешного освоения программы обучения могут быть приглашены на весеннюю очную сессию (учащиеся оплачивают лишь свою дорогу). В настоящее время в Заочную школу СУНЦ МГУ принимаются учащиеся 9 классов, а со следующего учебного года будут приниматься учащиеся 8 и 9 классов.

2) *Летние школы.* С 23 июня по 7 июля 2013 года была проведена крупнейшая за последние годы Летняя школа СУНЦ МГУ (Колмогоровская школа), в которой участвовали около 330 учащихся 9 и 10 классов. Кроме того, в 2013 году впервые была проведена небольшая (около 30 человек) Летняя школа для учащихся 8 классов. В 2014 году Летнюю школу планируется провести по следующим специализациям:

- естественно-научная (физика, математика, информатика, химия и, возможно, биология; для учащихся 8 классов);
- физико-математическая (для учащихся 9 и 10 классов);
- химическая (только для учащихся 9 классов);
- биологическая (только для учащихся 9 классов).

Летние школы традиционно проводятся в период с начала июня по начало июля. Продолжительность каждой школы

около 2 недель. Точные сроки проведения Летних школ будут объявлены не позже апреля 2014 года. В рамках Летней школы школьники 9 и 10 классов будут иметь возможность сдать вступительные экзамены в классы соответствующей специализации школы имени А.Н.Колмогорова (СУНЦ МГУ). Ученики 9 класса, желающие поступить в компьютерно-информационный класс СУНЦ МГУ, должны будут пройти обучение в Летней школе по физико-математической специализации.

3) *Турнир юных физиков.* Это лично-командное состязание старшеклассников в умении решать сложные исследовательские и научные проблемы, убедительно представлять свои решения, отстаивать их в научных дискуссиях и критически анализировать результаты других докладчиков.

4) *Колмогоровские чтения школьников.* Эта конференция традиционно проводится в начале мая в СУНЦ МГУ. В

конференции принимают участие различные факультеты МГУ, Российская академия наук, Российская академия образования. Конференция проводится для учащихся старших классов и разделяется на несколько секций.

5) *Различные олимпиады.* Это интернет-олимпиада, олимпиадные сборы, турнир «Математическое многоборье» и другие.

Отбор участников всех проектов происходит бесплатно на конкурсной основе. Школьники, приглашенные в Летнюю школу и на олимпиадные сборы, оплачивают только дорогу.

Подробное описание наших образовательных проектов и условия конкурсного отбора участников размещены на официальном сайте СУНЦ МГУ: www.internat.msu.ru в разделе «Образовательные проекты». Там можно также оставить заявку на участие в проектах.

Школе-интернату имени академика А.Н.Колмогорова (СУНЦ МГУ) – 50 лет!



Редколлегия и редакция журнала «Квант» от всей души поздравляют преподавателей, выпускников и учащихся СУНЦ МГУ с юбилеем. Школа, основанная в 1963 году для школьников из разных уголков нашей страны, увлекающихся физикой и математикой, дает своим нынешним ученикам уникальное образование по математике, физике, информатике, химии и биологии, готовит их к поступлению в ведущие вузы страны. Система образования в СУНЦ МГУ сочетает лучшие традиции фундаментального образования с развитием индивидуальных способностей, творческих задатков, умением самостоятельно ориентироваться в передовых направлениях современной науки.

Желаем педагогическому коллективу школы дальнейших успехов в работе с одаренными детьми!

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №4)

1. 400 г.

Пусть пес собирается откусить на x граммов больше, чем кот, а кусок между ними весит y граммов. Тогда из условия получаются уравнения $y - x = 300$ и $y + x = 500$, откуда $y = 400$.

2. Квадрат можно закрасить за три перегибания, поэтому во всех пунктах ответ: «можно».

На рисунке 1 показано, как это сделать за три перегибания. Зеленым цветом показаны уже закрасненные клетки, синим – клетки, которые будут закраснены после перегибания по красному пунктиру.

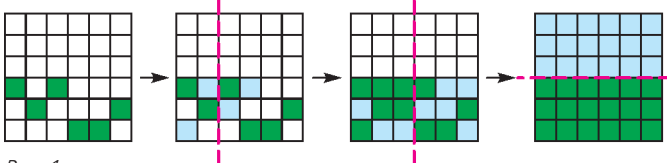


Рис. 1

Отметим, что меньшим числом перегибаний обойтись не получится: каждый раз количество закрасненных клеток увеличивается не больше чем в два раза, поэтому после двух перегибаний их будет не больше 24, а всего их 36.

3. 10.

Если за столом сидят n человек, то на втором круге каждый возьмет на n семечек больше, чем на первом. Значит, всего на втором круге будет взято на n^2 семечек больше, чем на первом. Отсюда $n = 10$.

4. Без десяти пять.

Стрелки А и Б указывают ровно на часовые отметки, поэтому если бы одна из них была часовой стрелкой, то две другие должны были бы совпасть и указывать на 12 часов. Но на этих часах нет совпадающих стрелок, поэтому часовая стрелка – это В.

Теперь разберемся с минутной и секундной. Поскольку на часах уже точно целое число минут, то секундная стрелка стоит на 12 часах. И это не может быть стрелка А, ведь тогда минутная стрелка Б стояла бы на 10 минутах, а это не согласуется с положением часовой стрелки. Значит, стрелка А – минутная, стрелка Б – секундная, а на часах без десяти пять.

5. 2.

Алиса всегда может действовать так, чтобы Базилио получил не больше двух купюр. Для этого ей нужно представить (еще пока пустые) номера купюр в виде таблицы из 20 строк и 7 столбцов, клетки которой она будет заполнять. Если кот называет единицу, то лиса вписывает ее в какую-нибудь пустую клетку самого левого столбца, в котором еще есть пустые клетки; если кот называет двойку, то лиса вписывает ее в какую-нибудь пустую клетку самого правого столбца, в котором еще есть пустые клетки. Когда в какой-то столбец начнут попадать и единицы, и двойки, все остальные клетки таблицы будут уже заполнены: слева – единицами, справа – двойками. Поэтому номера купюр будут различаться только в этом столбце, т.е. всего будет не более двух разных номеров.

Ну, а две купюры Базилио все-таки себе заполучит: подбирая самую последнюю цифру последнего номера, он всегда сможет выбрать ее так, чтобы этот номер отличался от какого-то другого.

ЗАДАЧИ

(см. с. 23)

1. 20 рублей.

С одной стороны, если Маша сложит все свои деньги, то ей не будет хватать $60 + 60 = 120$ рублей на $4 + 5 = 9$ пирожков. С другой стороны, как сказано в условии, ей не хватает 60 рублей на 6 пирожков. Значит, 3 пирожка стоят 60 рублей, а один – 20 рублей.

2. Один из возможных ответов показан на рисунке 2.

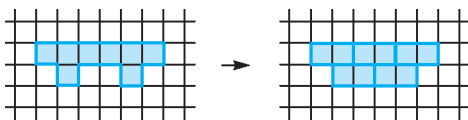


Рис. 2

3. Сначала выгоднее ловить ближнего зайца.

Догадаться до ответа несложно: если оба зайца просто сидят и покорно ждут своей участи, то ясно, что волку выгоднее дважды пробежать меньшее расстояние, т.е. сначала надо бежать за ближним зайцем.

Теперь докажем, что так надо действовать в любом случае. Пусть сначала волк побежит за тем зайцем, который от него дальше. Тогда в какой-то момент он окажется ровно посередине между зайцами. И в этот момент совершенно неважно, за каким из зайцев гнаться дальше, – в обоих случаях дальнейшее время охоты одинаково. Значит, волк может передумать и побежать назад – за тем зайцем, который вначале был к нему ближе. И это не скажется на времени. Но если он так сделает, то в какой-то момент он пробежит мимо места, из которого начинал. Получится, что он дважды пробежал лишнее расстояние, да еще и зайцы оказались дальше от него. Значит, так действовать точно невыгодно.

4. Могло.

Например, из восьми правильных треугольников можно сложить правильный октаэдр, а можно – два правильных тетраэдра.

5. Налеты бомбардировщиков обычно были по ночам, и точность бомбометания обеспечивали при помощи прожекторов. Два прожектора крепились в нижней части самолета и светили вниз и вперед, чтобы освещенные участки воды было видно пилоту. Их лучи пересекались под самолетом как раз на нужном расстоянии. Летчик должен был выбрать высоту полета так, чтобы два светлых пятна от прожекторов слились в одно наименьшего размера.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

- Ионизация воздуха под действием света – фотоионизация – приводит к тому, что воздух становится проводником электрического тока.
- Часть лучей поглощается окружающей Солнце газовой оболочкой, а часть – земной атмосферой.
- Черная, так как она поглощает практически все падающие на нее лучи.
- Такой же – зеленый, а также желтый, оранжевый и красный.
- Это явление объясняется фотолюминесценцией – свечением тел под действием облучения светом меньшей длины волны.
- Часть энергии поглощенных фотонов превращается во внутреннюю энергию люминесцирующего вещества.
- Проводимость металлов от излучения не зависит, если только оно не вызывает их нагревания. Проводимость полупроводников под действием излучения резко возрастает, так как излучение приводит к образованию пар «электрон-дырка», т.е. к росту свободных носителей заряда.
- Освещенному фоторезистору соответствует график 2. Закон Ома применим при постоянном освещении.
- Сопротивление фоторезистора увеличивается, так как при перекрытии светового потока проводимость фоторезистора уменьшается.
- Фоторезистор пропускает ток в обоих направлениях, а фотодиод – только в одном.
- Кремний обладает наибольшей чувствительностью к длинам волн, на которые приходится наибольшая энергия в солнечном спектре.
- Зависимость тока насыщения от концентрации фотонов – прямая пропорциональная (рис.3). Угловой коэффициент графика определяется квантовым выходом фотоэффекта, т.е. числом фотоэлектронов, приходящихся на один фотон.
- Графики получены при различных материалах фотокатода с разными работами выхода. Угловой коэффициент наклона прямых равен отношению постоянной Планка к заряду электрона.
- Хвост кометы отбрасывается силой светового солнечного давления. Эта сила увеличивается по мере приближения к Солнцу; увеличивается при этом и длина хвоста.
- а) За счет уменьшения энергии отраженных фотонов;
б) за счет поглощения части энергии света.
- На фотопленке – негативное, на фотобумаге – негативное по отношению к изображению на пленке и позитивное по отношению к фотографируемому объекту.



Рис. 3

Микроопыт

Нет, не будут, поскольку возможны расхождения показаний вследствие различной степени поглощения солнечных лучей спиртом разной окраски.

ТАИНСТВЕННЫЙ УТЮГ

В прежние времена такой утюг ставили в печь или же на кухонную плиту, которую топили дровами или углем. Утюг нагревался, и им можно было гладить. Когда утюг остывал, его снова нагревали. Иногда одновременно использовали два

утюга: пока одним гладят, другой нагревается. Очень удобно. Такой ретроутюг вполне можно использовать и сейчас, нагревая его, например, на газовой конфорке. В утюге нет ни спирали, которая может перегореть, ни провода, который может перетереться. Этот утюг поистине вечный...

Если, вдобавок, вы платите за газ фиксированную сумму, не зависящую от потребления газа, то пользование таким утюгом для вас будет абсолютно бесплатным.

ЭТЮД О СИМЕДИАНАХ

1. Из теоремы косинусов для треугольников ABA_1 , ABC

$$g_a^2 = AA_1^2 = AB^2 + BA_1^2 - 2AB \cdot BA_1 \cdot \cos \angle B = c^2 + \left(\frac{ac^2}{b^2 + c^2} \right)^2 - 2c \cdot \frac{ac^2}{b^2 + c^2} \cdot \frac{(a^2 + c^2 - b^2)}{2ac},$$

откуда $AA_1^2 = g_a^2 = \frac{b^2 c^2 (2b^2 + 2c^2 - a^2)}{(b^2 + c^2)^2}$.

2. Имеем $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{a^2}{c^2} = 1$. Следовательно, по теореме Чебы симедианы пересекаются в одной точке.

3. Указание. Примените теорему Чебы.

4. Указание. Примените результат упражнения 5.

5. Достаточно доказать, что если $a \geq b$, то $g_a \leq g_b$. Пусть $a \geq b$. Тогда

$$g_b - g_a = \frac{a^2 c^2 (2a^2 + 2c^2 - b^2)}{(a^2 + c^2)^2} - \frac{b^2 c^2 (2b^2 + 2c^2 - a^2)}{(b^2 + c^2)^2} = c^2 \left(\left(\frac{2}{1 + \frac{c^2}{a^2}} - \frac{2}{1 + \frac{c^2}{b^2}} \right) + a^2 b^2 \left(\frac{1}{(b^2 + c^2)^2} - \frac{1}{(a^2 + c^2)^2} \right) \right) \geq 0.$$

6. Указание. Докажите равенство треугольников BB_1A_1 и CC_1A_1 (см. рис. 4 статьи).

7. Пусть в треугольнике ABC проведены высоты к его сторонам. Соединим основания высот и рассмотрим полученный треугольник $A_1B_1C_1$. Понятно, что $\angle CC_1B = \angle BB_1C = 90^\circ$. Поэтому четыре точки C, C_1, B, B_1 принадлежат одной окружности, при этом BC – диаметр. По условию $A_1C_1 = A_1B_1$, поэтому точка A_1 лежит на серединном перпендикуляре точек C_1, B_1 и, кроме того, она лежит на диаметре BC . Значит, A_1 – центр этой окружности, но тогда высота также будет и медианой. Значит, треугольник ABC должен быть равнобедренным.

8. Решение М2001 см. в «Кванте» №6 за 2006 г.

9. Решение М1862 см. в «Кванте» №6 за 2003 г.

10. $f(x) = \frac{2}{3} + \sqrt[3]{-\frac{1}{27} + \sqrt{x^3 - \frac{x^2}{3} + \frac{x}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{27} - \sqrt{x^3 - \frac{x^2}{3} + \frac{x}{27}}}$.

11. Указание. а) $l = 3$. В этом случае получаем кубическое уравнение $4x^3 - 152x^2 + 321x - 171 = 0$. Пусть корнем уравнения будет рациональное число $x = \frac{p}{q}$, где p, q – целые взаимно простые числа, $q > 0$. Тогда $4p^3 = q(152p^2 - 321pq + 171q^2)$ и, кроме того, $p(4p^2 - 152pq + 321q^2) = 171q^3$. Таким образом, необходимо проверить случаи $q \in \{1, 2, 4\}$ и $p \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 19, \pm 57, \pm 171\}$. Получаем, что многочлен $4x^3 - 152x^2 + 321x - 171$ неприводим над полем рациональных чисел. Поэтому треугольник с длинами симедиан 1, 1, 3 с помощью циркуля и линейки построить нельзя.

б) $l = 1/2$. В этом случае получаем кубическое уравнение $4x^3 - 12x^2 + 6x + 4 = 0$. Поскольку $4x^3 - 12x^2 + 6x + 4 = 2(x-2)(2x^2 - 2x - 1)$, то мы имеем приводимый многочлен над полем рациональных чисел. Поэтому треугольник с длинами симедиан 1, 1, $1/2$ можно построить с помощью циркуля и линейки.

12, 13. Доказательства можно найти в статье А.Жукова, И.Акулича «Однозначно ли определяется треугольник?» в «Кванте» №1 за 2003 год.

14. а) $a = b = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{6}}$, $c = \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}}$. Поскольку длины двух симедиан равны, то треугольник равнобедренный. Из формул (3) следует, что для нахождения длин сторон треугольника с длинами симедиан 1, 1, $1/2$ необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} (a^2 + c^2)^2 = a^2 c^2 (a^2 + 2c^2), \\ 1 = 4a^2 - c^2, \\ a = b. \end{cases}$$

Сделаем замену $u = a^2$, $v = c^2$. Получим $v = 4u - 1$. Остается решить уравнение $(5u - 1)^2 - u(4u - 1)(9u - 2) = 0$. Корни этого уравнения $u_1 = \frac{1}{6}$, $u_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$. Поскольку $v = c^2 > 0$, то

нам подходит только $u = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$.

б) Существует. Длины сторон треугольника с длинами симедиан 1, 1, 2 являются решениями системы

$$\begin{cases} (a^2 + c^2)^2 = a^2 c^2 (a^2 + 2c^2), \\ 16 = 4a^2 - c^2, \\ a = b. \end{cases}$$

С помощью замен $u = a^2$, $v = c^2$ систему можно свести к кубическому уравнению $(5u - 16)^2 - u(4u - 16)(9u - 32) = 0$.

Корни этого уравнения можно найти с помощью формулы Кардано.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП XXXIX ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

1. Пусть для определенности $a < b < c$. Рассмотрим графики функций $f_{bc}(x) = (x - b)(x - c)$ и $f_a(x) = x - a$. При $x = a$ точка первого графика выше точки второго:

$$f_{bc}(a) = (a - b)(a - c) > 0 = f_a(a),$$

а при $x = b$ – ниже:

$$f_{bc}(b) = 0 < b - a = f_a(b).$$

Значит, уравнение $f_{bc}(x) = f_a(x)$ имеет корень на отрезке $[a; b]$ (рис.4).

Аналогично, если рассмотреть графики функций $f_{ac}(x) = (x - a)(x - c)$ и $f_b(x) = x - b$, то получим, что $f_{ac}(a) > f_b(a)$ и $f_{ac}(b) < f_b(b)$, т.е. уравнение $f_{ac}(x) = f_b(x)$ также имеет решение на отрезке $[a; b]$ (рис.5).

5. Обозначим данные числа в порядке обхода по часовой стрелке через a_1, a_2, \dots, a_{2n} ; обозначим через $S > 0$ сумму всех чисел и положим $S_i = a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+n-1}$ (все индексы

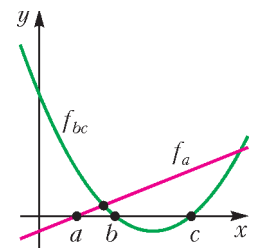


Рис. 4

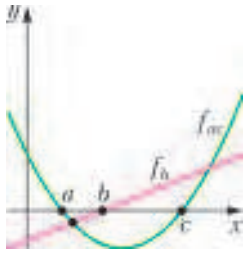


Рис. 5

мы рассматриваем по модулю $2n$, так что $a_{2n+i} = a_i$ и $S_{2n+i} = S_i$). Тогда нам надо доказать, что при некотором i обе суммы S_i и S_{i+1-n} положительны. Заметим, что $S_i + S_{n+i} = S > 0$. Значит, среди чисел S_i есть положительные. Если все суммы S_i положительны, то любой индекс i подходит. В противном случае найдется такой индекс i , что $S_i > 0$, а $S_{i+1} \leq 0$. Тогда

$S_{i+1-n} = S - S_{i+1} > 0$, и индекс $i - n$ - искомым.

6. 20 чисел.

Докажем, что в каждый трехчлен $P(x)$ Петя мог подставить не более двух чисел. Действительно, пусть n -й член получившейся арифметической прогрессии равен $an + b$, а n -е из Васьиных последовательных чисел равно $k + n$. Тогда Петя мог подставить это число в $P(x)$, если $P(k + n) = an + b$, а это квадратное уравнение относительно n имеет не более двух корней. Поэтому чисел не могло быть больше 20.

Осталось показать, что 20 чисел могли получиться. Пусть, например, были выбраны трехчлены $P_k(x) = (x - (2k - 1))(x - 2k) + x$ при $k = 1, 2, \dots, 10$, а Вася называл по очереди числа от 1 до 20. Так как $P_k(2k - 1) = 2k - 1$ и $P_k(2k) = 2k$, то Петя мог получить эти же числа в том же порядке.

7. Пусть Q - точка пересечения прямых KL и MN (рис.6). Поскольку $\angle QLC = \angle NMY = 90^\circ$, четырехугольник $QLYM$

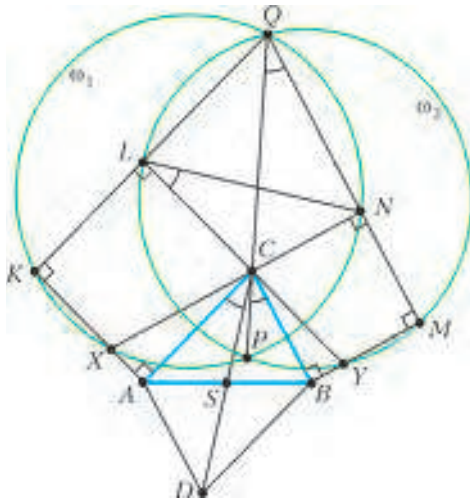


Рис. 6

- вписанный. Аналогично, четырехугольник $QN XK$ - вписанный. Тем самым, Q - вторая точка пересечения окружностей ω_1 и ω_2 , описанных около треугольников KXN и LYM соответственно.

Докажем, что C лежит на прямой PQ . Прямоугольные треугольники $CA X$ и $CB Y$ подобны, так как $\angle XCA = 90^\circ - \angle ACB = \angle YCB$. Отсюда $XC \cdot CB = YC \cdot CA$ или $XC \cdot CN = YC \cdot CL$, т.е. степени точки C относительно окружностей ω_1 и ω_2 равны. Значит, C лежит на их радикальной оси PQ .

Продлив медиану CS на ее длину, построим треугольник ABC до параллелограмма $ACBD$. Так как $\angle CAD = 180^\circ - \angle ACB = \angle LCN$, $CA = CL$ и $AD = CB = CN$, треугольники CAD и LCN равны. Отсюда $\angle ACS = \angle ACD = \angle CLN$. Но четырехугольник $QLCN$ вписанный (в нем $\angle QLC = \angle QNC = 90^\circ$), поэтому $\angle CLN = \angle CQN = \angle PCB$ (поскольку $BC \parallel MN$). Итак, $\angle ACS = \angle CLN = \angle PCB$, что и требовалось.

8. Добавим к каждой фигуре такую каемку, как показано на рисунке 7. Предположим, что вырезанные фигуры не имеют общих сторон. Тогда фигуры с добавленными каемками не накладываются друг на друга. Действительно, каемка фигуры F состоит ровно из тех точек, расстояние от которых до F не больше, чем расстояние до любой клетки, не имеющей общих сторон с F . Значит, если точка X лежит в каемках двух фигурок (не имеющих общих сторон), то расстояние от X до первой фигурки не больше, чем до второй, и одновременно не меньше, чем до второй. Тогда эти расстояния равны, т.е. X лежит на границах обеих каемок.

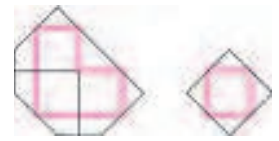


Рис. 7

Таким образом, фигуры с каемками не должны перекрываться. Далее, площадь «уголка» с каемками равна $11/2$, а площадь клетки с каемкой равна 2. Так как вырезано 400 «уголков» и 500 клеток, то суммарная площадь этих фигур с каемками составляет $2200 + 1000 = 3200$. Но все эти фигуры с каемками лежат в квадрате 56×56 с тем же центром, что и исходный. Но его площадь равна 3136, т.е. меньше 3200. Значит, каемки не могут не накладываться.

10 класс

4. Обозначим окружности, описанные около четырехугольника $ABCD$ и треугольников ABP , CDP , ABQ , CDQ через Ω , ω_1 , ω_2 , ω_3 , ω_4 соответственно (рис.8).

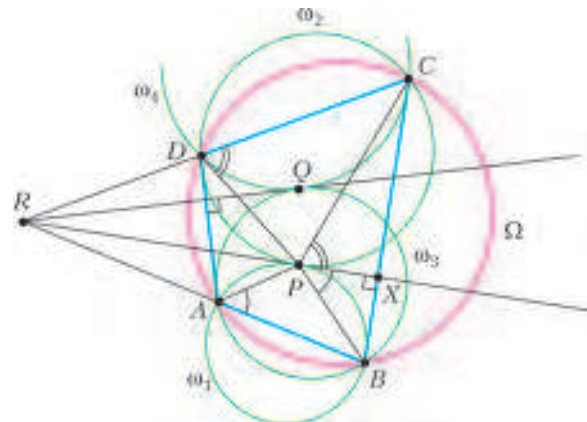


Рис. 8

Пусть X - проекция P на BC ; обозначим прямую PX через l_1 . Тогда $\angle BPX = 90^\circ - \angle PBC = \angle PAB$; значит, прямая l_1 и окружности ω_1 , ω_2 касаются в точке P . Аналогично получаем, что прямая l_2 , проходящая через Q и перпендикулярная AD , и окружности ω_3 , ω_4 касаются в точке Q . Предположим, что прямые AB и CD пересекаются в некоторой точке R . Покажем, что прямая RP совпадает с l_1 . Обозначим через P_1 и P_2 вторые точки пересечения прямой RP с окружностями ω_1 и ω_2 (таким образом, $P_1 = P$, если RP касается ω_1 ; аналогично для P_2). Тогда

$$RP \cdot RP_1 = RA \cdot RB = RD \cdot RC = RP \cdot RP_2,$$

т.е. $P_1 = P_2$. Так как P - единственная общая точка ω_1 и ω_2 , то $P_1 = P_2 = P$. Значит, RP совпадает с l_1 , т.е. $RP^2 = RA \cdot RB$. Аналогично можно показать, что RQ совпадает с l_2 и $RQ^2 = RA \cdot RB$. Следовательно, $RP^2 = RA \cdot RB = RQ^2$. Поэтому треугольник PQR равнобедренный и его основание PQ образует равные углы с прямыми QR и PR , а значит, и с перпендикулярными им прямыми AD и BC .
Осталось рассмотреть случай, когда AB и CD параллельны.

Тогда $ABCD$ является равнобокой трапецией или прямоугольником. Этот четырехугольник и все рассматриваемые окружности симметричны относительно общего серединного перпендикуляра к AB и CD . Следовательно, точки P и Q лежат на этой прямой, а она, очевидно, образует равные углы с прямыми AD и BC .

8. kl .

Возьмем горизонтальную прямую h , проходящую через верхнюю сторону квадрата, и будем двигать ее вниз. Рассмотрим момент, когда она проходит через какой-нибудь отрезок разбиения I (по условию, такой отрезок в этот момент только один). Пусть к нему прилегают a прямоугольников сверху и b снизу. Количество прямоугольников, которые пересекает h , в этот момент уменьшается на a и увеличивается на b . Но поскольку по условию оно не должно изменяться, то $a = b$.

Докажем теперь индукцией по k , что количество прямоугольников равно kl . Если $k = 1$, то утверждение очевидно. Пусть теперь $k > 1$. Рассмотрим все прямоугольники разбиения, прилегающие к нижней стороне квадрата; их l штук, ибо горизонтальная прямая, проходящая достаточно близко от этой

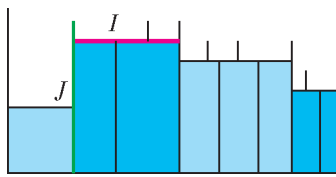


Рис. 9

стороны, пересекает только их. Разобьем их на группы стоящих подряд прямоугольников равной высоты (рис.9). У каждой такой группы верхней границей является один отрезок.

Рассмотрим одну такую группу с верхним отрезком

I . Заметим, что вертикальные отрезки, ограничивающие эту группу, продолжаются выше, чем I . Действительно, иначе, скажем, верхний конец левого вертикального отрезка J лежит на I . Но тогда справа к J примыкает один прямоугольник, а слева – больше одного (ибо J граничный для группы), а это невозможно.

Выкинем эту группу и «продлим» прямоугольники, лежащие сверху от I , до нижней стороны квадрата. Поскольку сверху и снизу к I прилегало равное количество прямоугольников, любая горизонтальная прямая по-прежнему будет пересекать l прямоугольников.

Прделаем эту операцию с каждой группой (рис.10). Мы выкинем ровно l прямоугольников; при этом каждая вертикальная прямая будет пересекать на один

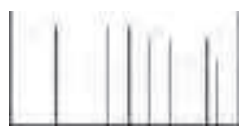


Рис. 10

прямоугольник меньше, чем изначально, т.е. $k-1$ прямоугольник. По предположению индукции, общее количество прямоугольников станет равно $(k-1)l$, а значит, до перестройки оно было равно

$(k-1)l + l = kl$, что и требовалось доказать.

11 класс

1. Пусть $P(x) = x^{10} + p_9x^9 + \dots + p_0$ и $Q(x) = x^{10} + q_9x^9 + \dots + q_0$. Тогда многочлен $P(x) - Q(x) = (p_9 - q_9)x^9 + \dots + (p_0 - q_0)$ не имеет корней. Отсюда получаем, что $p_9 = q_9$, ведь любой многочлен нечетной степени имеет хотя бы один корень. Заметим теперь, что $P(x+1) = x^{10} + (p_9 + 10)x^9 + \dots$ и $Q(x-1) = x^{10} + (q_9 - 10)x^9 + \dots$. Значит, многочлен $P(x+1) - Q(x-1) = 20x^9 + \dots$ имеет нечетную степень и, следовательно, имеет корень.

2. Пусть X – точка касания плоскости BCD со вписанной сферой (рис.11). Гомотетия с центром в точке A , переводящая вневписанную сферу во вписанную, переводит точку Y в некоторую точку Z вписанной сферы. Эта гомотетия переводит плоскость BCD в параллельную плоскость, которая каса-

ется вписанной сферы в точке Z . Это означает, что точки X и Z – диаметрально противоположные точки вписанной сферы, а следовательно, XZ перпендикулярно плоскости BCD . Поскольку Z лежит на отрезке AU , то $\angle AXU > \angle ZXY = 90^\circ$, откуда и следует требуемое.

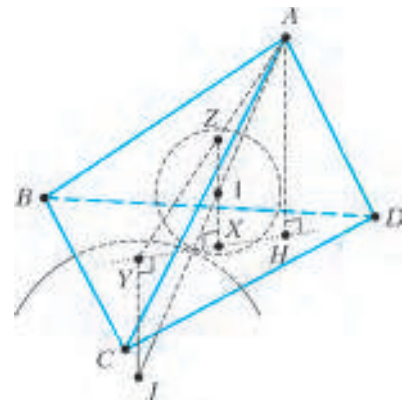


Рис. 11

4. $t = 1986 = 2013 - 27$. Можно считать, что на карточках написаны числа от 1 до 2013.

Сначала покажем, что 1987 карточек угадать не получится. Занумеруем карточки A_1, \dots, A_{2013} и покажем, как нужно отвечать, чтобы ни одно из чисел на карточках A_1, \dots, A_{27} определить не удалось.

При каждом $i = 1, \dots, 9$ объединим карточки $A_{3i-2}, A_{3i-1}, A_{3i}$ в тройку T_i . Если среди указанных 10 карточек присутствует карточка A_n с $n > 27$, то ответим число n . Если же все 10 карточек лежат в тройках, то в какой-то тройке T_i лежат хотя бы две карточки. В этом случае ответим число, стоящее на ребре между этими карточками на рисунке 12. Этим ответам удовлетворяют такие две ситуации: на карточках с номерами, большими 27, написаны их номера и либо на каждой карточке из троек стоит число на ребре, выходящем из нее против часовой стрелки, либо – выходящем по часовой стрелке. Значит, ни одного из чисел на карточках в тройках определить нельзя.

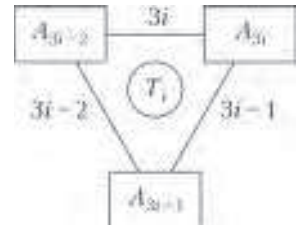


Рис. 12

Осталось доказать, что числа на всех карточках, кроме 27, можно определить. Для этого мы покажем, что если задать все возможные вопросы о каких-то 28 карточках, то по ответам на них получится определить число на одной из этих карточек. Затем эту карточку можно будет заменить другой и повторить процедуру. Действуя так, определим числа на всех карточках, кроме 27.

Нам потребуется следующая лемма: Пусть в графе не менее чем $3n - 2$ вершины и не более чем $3n - 2$ ребра ($n \geq 2$). Тогда найдутся n вершин, между которыми нет ребер.

Докажем это утверждение индукцией по n . Сразу заметим, что можно выкинуть несколько вершин и после этого добавить несколько ребер так, чтобы и вершин, и ребер стало по $3n - 2$. При $n = 2$ на 4 вершинах меньше 6 ребер, значит, какая-то пара вершин не соединена ребром, и можно взять эти вершины.

Пусть теперь $n > 2$. Обозначим степени вершин через d_1, \dots, d_{3n-2} . Тогда $d_1 + \dots + d_{3n-2} = 2(3n - 2)$, поэтому либо найдутся число $d_i < 2$ и число $d_j > 2$, либо степени всех вершин равны 2. В первом случае выкинем из графа i -ю и j -ю вершины, а также единственного соседа i -й вершины (если он вообще есть). Мы выкинем не более 3 вершин и не менее 3 ребер. Во втором случае выкинем произвольную вершину (пусть ее номер равен i) и двух ее соседей. Так как их степени равны 2, то мы выкинем не менее 3 ребер (и ровно 3 вершины). В оставшемся графе по предположению индукции найдется $n - 1$ вершина без ребер между ними. Добавив к

этой вершине выкинутые вершины, получим n вершин, между которыми нет ребер.

ним i -ю вершину, получим требуемый набор из n вершин. Лемма доказана.

Продолжим решение задачи. Пусть мы задали все вопросы о 28 карточках и пусть c_1, \dots, c_k – встречающиеся в ответах. Отметим, что $k \leq 28$. Для каждого $i = 1, \dots, k$ рассмотрим все десятки карточек, в ответ на которые мы получали число c_i . Обозначим их пересечение через S_i (ясно, что это множество непусто, так как оно содержит карточку с числом c_i). Если в этом множестве один элемент, то это и есть карточка с числом c_i , и мы определили число на ней.

В противном случае в каждом из множеств хотя бы по две карточки. При каждом i выберем две карточки в S_i и соединим их ребром. Мы получим граф, удовлетворяющий условию леммы при $n = 10$, а значит, в нем можно выбрать 10 карточек без ребер между ними. Ответом на эту десятку было какое-то число c_i . Но тогда в этой десятке должно было содержаться множество S_i , т.е. две карточки из десятки соединены соответствующим ребром. Противоречие, завершающее решение задачи.

5. Пусть $a_0 < a_1 < \dots < a_{100}$ – выбранные числа, упорядоченные по возрастанию. Сумма десяти разностей $a_{10} - a_0, a_{20} - a_{10}, \dots, a_{100} - a_{90}$ равна $a_{100} - a_0 \leq 1000$, поэтому одна из этих разностей не превосходит 100. Пусть это разность $a_{10i+10} - a_{10i}$. Тогда

$$0 < a_{10i+10} - a_{10i} < a_{10i+20} - a_{10i} < \dots < a_{10i+100} - a_{10i} \leq 100,$$

и мы нашли требуемые 10 разностей.

6. Возможны два случая.

Случай 1. Предположим, что $abcd \geq 16$. Тогда по неравенству между средним квадратичным и средним арифметическим имеем

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4 \left(\frac{a+b+c+d}{4} \right)^2 \geq 4 \left(\frac{abcd}{8} \right)^2 = \frac{(abcd)^2}{16} \geq abcd,$$

что и требовалось.

Случай 2. Пусть теперь $abcd < 16$. Тогда по неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим имеем

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4\sqrt{a^2b^2c^2d^2} = \sqrt{16abcd} > \sqrt{a^2b^2c^2d^2} = abcd,$$

что и требовалось доказать.

8. Обозначим окружность, описанную около треугольника ABC , через Ω . Пусть биссектриса CI пересекает Ω повторно в точке S (рис.13). Тогда, как известно, $SA = SB = SC$, т.е. точка S – центр окружности Γ . Из симметрии получаем, что точка Z лежит на прямой SC .

Пусть общие касательные к окружностям ω и Γ касаются Γ

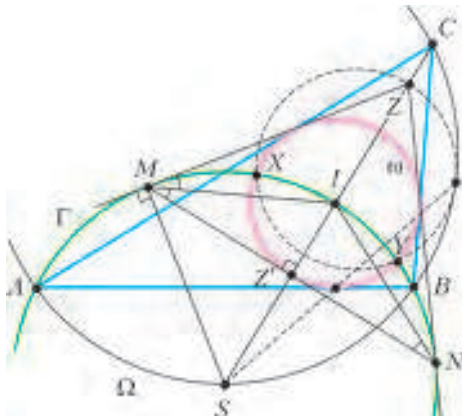


Рис. 13

в точках M и N . Линия центров SI является серединным перпендикуляром к отрезку MN , поэтому $\angle IMN = \angle INM = \angle IMZ$ (последнее равенство верно, поскольку прямая MZ касается Γ). Значит, MI – биссектриса угла ZMN , т.е. расстояния от I до ZM и MN равны. Поскольку ω касается ZM , она также касается прямой MN в некоторой точке Z' . Из соображений симметрии следует, что эта точка лежит на SI .

Прямоугольные треугольники $SZ'M$ и SMZ подобны, поэтому $SZ \cdot SZ' = SM^2$. Это означает, что при инверсии относительно окружности Γ точка Z' перейдет в точку Z . Значит, окружность ω , содержащая точки X, Y и Z' , перейдет в описанную окружность треугольника XYZ . Далее, при такой инверсии прямая AB переходит в окружность Ω . Поскольку ω и AB касаются, то их образы тоже будут касаться. Что и требовалось доказать.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП XLVII ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс

1. Перейдем в систему отсчета, связанную с одной из частиц – например, с первой. Тогда вторая частица начинает движение со скоростью $5v$ и ускорением $5a$ (рис.14). Пусть вторая частица двигалась вдоль оси x . В новой системе отсчета угол α между этой осью и начальной скоростью (и начальным ускорением) найдем из условия перпендикулярности скоростей (и ускорений частиц) в старой системе отсчета:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}, \quad \alpha = 36,87^\circ.$$

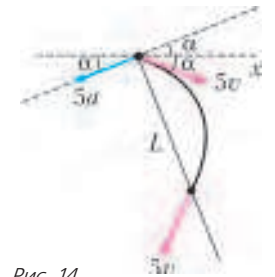


Рис. 14

По аналогии с задачей о дальности полета тела, брошенного под углом 2α к вертикали, получим

$$L = \frac{(5v)^2 \sin 4\alpha}{5a} = \frac{5v^2 \sin 4\alpha}{a} = 500 \text{ м}.$$

Относительная скорость станет минимальной в тот момент, когда вектор скорости окажется перпендикулярным вектору ускорения. Таким образом,

$$v_{\text{отн мин}} = 5v \sin 2\alpha = 48 \text{ м/с}.$$

2. Пусть в первом случае столб воды имеет длину $L_{\text{в}}$, а столб льда – $L_{\text{л}}$. Тогда

$$L_{\text{в}} + L_{\text{л}} = L_2.$$

Так как масса содержимого между поршнями постоянна, то

$$L_{\text{в}}\rho_{\text{в}} + L_{\text{л}}\rho_{\text{л}} = L_1\rho_{\text{в}}.$$

Поскольку тепловые потоки через лед и воду равны, то

$$\frac{kS(t_2 - t_0)}{L_{\text{в}}} = \frac{4kS(t_0 - t_1)}{L_{\text{л}}}, \text{ где } t_0 = 0^\circ\text{C}.$$

Отсюда получим

$$L_{\text{в}} = 8 \text{ см}, \text{ и } L_2 = 11L_{\text{в}} = 88 \text{ см}.$$

Тепловой поток P через каждое сечение цилиндра одинаков:

$$P = \frac{kS(t'_2 - t'_1)}{\Delta L},$$

где t'_1, t'_2 – температуры слева и справа от фрагмента цилиндра.

дра длиной ΔL . Отсюда

$$t'_2 - t'_1 = \frac{P\Delta L}{kS}, \text{ и } \Delta t \sim \Delta L.$$

Это означает, что температура льда и воды от поршня до границы раздела изменятся по линейному закону, поэтому можно считать, что соответствующие части системы имеют среднюю температуру, т.е.

$$t_{\text{л}} = -20^\circ\text{C}, \quad t_{\text{в}} = 8^\circ\text{C}.$$

После того как систему теплоизолировали, между поршнями устанавливается тепловое равновесие с некоторой температурой t . При охлаждении воды до температуры плавления выделится количество теплоты

$$Q_1 = L_{\text{в}} S \rho_{\text{в}} c_{\text{в}} t_{\text{в}} = 33600 L_{\text{в}} S \rho_{\text{в}}.$$

Для нагревания льда до температуры плавления потребуется количество теплоты

$$Q_2 = 10 L_{\text{л}} S \cdot 0,9 \rho_{\text{л}} \cdot 0,5 c_{\text{л}} (0 - t_{\text{л}}) = 378000 L_{\text{л}} S \rho_{\text{л}}.$$

Видно, что $Q_2 > Q_1$. Следовательно, вода точно охладится до 0°C и начнет замерзать. При замерзании выделится количество теплоты

$$Q_3 = \lambda L_{\text{л}} S \rho_{\text{л}} = 330000 L_{\text{л}} S \rho_{\text{л}}.$$

Этого тепла не хватит, чтобы нагреть лед до температуры плавления. Значит, вся вода замерзнет. Тогда

$$L_3 = \frac{10}{9} L_1 \approx 88,9 \text{ см}.$$

3. В силу симметрии системы, при движении бусинок кольцо не будет смещаться по горизонтали. Для отрыва кольца от плоскости необходимо, чтобы выполнялось условие $N_1 = 0$ (рис.15). Это возможно, если силы реакции N со стороны бу-

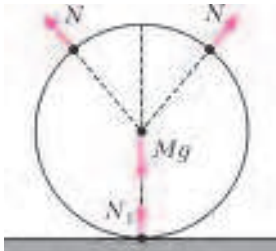


Рис. 15



Рис. 16

синок на кольцо направлены от центра кольца. К этому моменту времени каждая из бусинок сместится от вертикали на угол α (рис.16). Тогда по второму закону Ньютона для каждой из них будет справедливо соотношение

$$m \frac{v^2}{R} = F + mg \cos \alpha,$$

где $F = N$ – сила, действующая на бусинку со стороны кольца. Согласно закону сохранения энергии,

$$m \frac{v^2}{2} = mgR(1 - \cos \alpha).$$

Решая совместно эти уравнения, получим

$$N = mg(2 - 3 \cos \alpha).$$

Для момента отрыва кольца

$$2N \cos \alpha = Mg.$$

Отсюда найдем

$$n = \frac{m}{M} = \frac{1}{2(2 \cos \alpha - 3 \cos^2 \alpha)}.$$

В знаменателе – квадратичная зависимость с максимумом, соответствующим $\cos \alpha = 1/3$, при этом $m/M = 3/2$. Следова-

тельно, отрыв происходит при

$$n = \frac{m}{M} \geq \frac{3}{2}.$$

4. Пусть сила натяжения самой нижней нити равна T . Тогда силы натяжения последующих нитей будут $2T$, $4T$ и $8T$ соответственно. Из условия равновесия висящей льдинки находим

$$T = mg.$$

По мере уменьшения ее массы пропорционально будет уменьшаться сила натяжения всех нитей в системе.

Изменение уровня воды в стакане можно связать с изменением внешней силы, действующей на систему со стороны штатива. Найдем силу, действующую на дно стакана со стороны содержимого, двумя разными способами, с учетом того, что масса системы (льда, воды, блоков, нитей) при этом не изменяется. Во-первых, как силу, равную действующей по третьему закону Ньютона на содержимое со стороны дна, найденную из условия равновесия содержимого:

$$8T + F = m_{\text{системы}} g, \text{ где } T = mg.$$

Во-вторых, как сумму реальных сил, с которыми содержимое действует на дно, т.е. как силу гидростатического давления:

$$F = \rho g h S.$$

После сообщения льдинке количества теплоты Q ее масса уменьшается на $\Delta m = Q/\lambda$. Уравнения для новой силы, действующей на дно, примут вид

$$8(m - \Delta m)g + F^* = m_{\text{системы}} g,$$

$$F^* = \rho g S (h + \Delta h_1).$$

Отсюда находим площадь дна стакана:

$$S = \frac{8Q}{\Delta h_1 \rho \lambda} = 20 \text{ см}^2.$$

Заметим, что знак Δh_1 положительный, следовательно, уровень воды в стакане поднимается. Причем высота уровня будет линейно увеличиваться по мере уменьшения массы висящей льдинки. После полного плавления система уравнений для силы, действующей на дно, будет такой:

$$F^{**} = m_{\text{системы}} g,$$

$$F^{**} = \rho g S (h + \Delta h_2).$$

Отсюда получим, что диапазон изменения силы натяжения нити, прикрепленной к льдинке массой $6m$, составит

$$0 < T_1 < \frac{\rho g S \Delta h_2}{4}, \text{ или } 0 < T_1 < 0,15 \text{ Н}.$$

5. 1) Из данного графика следует, что при $x = 0,2$ м ток через амперметр не идет. Поскольку сопротивление однородного проводника постоянной площади пропорционально длине, отношение сопротивлений участков реостата равно

$$r_1 : r_2 = 1 : 4.$$

При этом токи через резисторы сопротивлениями R_1 и R_2 равны, и отношение напряжений на этих сопротивлениях составляет

$$U_1 : U_2 = R_1 : R_2.$$

Аналогично, из совпадения токов через сопротивления r_1 и r_2 получим

$$U_1 : U_2 = r_1 : r_2.$$

Отсюда находим

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{4}.$$

2) Общее сопротивление параллельно соединенных сопротивлений R_1 и r_1 не превосходит r_1 , а параллельно соединенных сопротивлений R_2 и r_2 не превосходит r_2 . Следовательно, цепь, состоящая из R_1 , r_1 , R_2 и r_2 , не может иметь со-

противление больше $r_1 + r_2 = 1$ кОм. Поэтому общее сопротивление всей цепи с учетом сопротивления R_3 будет лежать в интервале от 1 МОм до 1,001 МОм. Таким образом, с точностью не более 0,1% сила тока через источник напряжения будет равна $I_0 = U_0/R_3$ на протяжении всего опыта – график Глюка для показания амперметра A_2 был бы на глаз неотличим от горизонтальной прямой.

3) Когда амперметр находится в положении 1 и через него проходит ток $I_1 = |I| = 2$ мкА, напряжение на реостате составляет $(I_0 - I_1)r$, а напряжение на резисторе сопротивлением R_2 равно I_1R_2 . Отсюда

$$(I_0 - I_1)r = I_1R_2.$$

Когда амперметр находится в положении 2 и через него проходит ток $I_2 = |I| = 3$ мкА, напряжение на реостате составляет $(I_0 - I_2)r$, а напряжение на резисторе сопротивлением R_1 равно I_2R_1 . Отсюда

$$(I_0 - I_2)r = I_2R_1.$$

Из этих соотношений, используя свойство $R_2/R_1 = 4$, находим, что $I_0 = 3,6$ мкА, откуда с учетом предыдущего следует $R_1 = 0,2$ кОм, $R_2 = 0,8$ кОм, $U_0 = I_0R_3 = 3,6$ В.

10 класс

1. Перед ударом о землю скорость мешочка равна v_0 и направлена под углом α к горизонту. Во время соударения на мешочек действует вертикальная сила реакции опоры N и горизонтальная сила трения F . Если в течение всего удара выполняется равенство $F = \mu N$, то импульс, сообщенный мешочку силой трения, будет в μ раз больше импульса, сообщенного силой N . Отсюда можно найти скорость мешочка по окончании удара:

$$mu = mv_x - \mu mv_y, \text{ или } u = v_0(\cos\alpha - \mu \sin\alpha).$$

При $\mu > \text{ctg}\alpha$ скорость u получается отрицательной. Это означает, что в этом случае горизонтальная скорость мешочка обратится в ноль еще до окончания удара по вертикали, т.е. мешочек сразу после удара будет неподвижен. Таким образом, в этой задаче возможны два случая, требующие раздельного рассмотрения.

1. При $\text{ctg}\alpha < \mu$ мешочек в результате удара останавливается, дальность полета равна

$$L_1 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha, \text{ и } L_{1\max} = \frac{v_0^2}{g},$$

при этом $\alpha = 45^\circ$.

2. При $\text{ctg}\alpha > \mu$ мешочек после удара некоторое время скользит по поверхности, проходя дополнительное расстояние. Полная дальность L_2 в этом случае складывается из дальности полета l_1 и расстояния l_2 , пройденного мешочком по поверхности до остановки:

$$l_1 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha,$$

$$l_2 = \frac{u^2}{2a}, \text{ где } u = v_0(\cos\alpha - \mu \sin\alpha), \ a = \mu g,$$

$$\begin{aligned} L_2 = l_1 + l_2 &= \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha + \frac{v_0^2}{2\mu g} (\cos\alpha - \mu \sin\alpha)^2 = \\ &= \frac{v_0^2}{2\mu g} (4\mu \sin\alpha \cos\alpha + (\cos\alpha - \mu \sin\alpha)^2) = \\ &= \frac{v_0^2}{2\mu g} (\cos\alpha + \mu \sin\alpha)^2. \end{aligned}$$

Максимум выражения $\cos\alpha + \mu \sin\alpha$ достигается при $\text{tg}\alpha = \mu$ и равен $\sqrt{\mu^2 + 1}$, поэтому для максимальной дальности во втором случае получаем

$$L_{2\max} = \frac{v_0^2}{g} \frac{\mu^2 + 1}{2\mu}.$$

2. Сосуд теплоизолирован, поэтому первое начало термодинамики выглядит так:

$$0 = \Delta U + p_0 \Delta V_2,$$

где p_0 – атмосферное давление, ΔV_2 – изменение объема второго отсека. Запишем уравнение состояния газа во втором отсеке:

$$p_0 \Delta V_2 = v_2 R \Delta T_2$$

и первое начало термодинамики для обоих газов:

$$\Delta U_1 + \Delta U_2 + p_0 \Delta V_2 = \Delta U_1 + \frac{5}{2} v_2 R \Delta T_2 + p_0 \Delta V_2 = \Delta U_1 - \frac{7}{2} \Delta U = 0.$$

Отсюда получаем

$$\Delta U_1 = \frac{7}{2} \Delta U.$$

3. В критическом случае, при минимально возможной v_0 , отрыв нижнего шарика произойдет в момент, когда нить вертикальна и ее натяжение равно mg . Скорость верхнего шарика v в этот момент горизонтальна, и из сохранения горизонтальной проекции импульса системы получаем, что скорость нижнего шарика равна по величине и противоположна по направлению скорости верхнего. Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = 2 \frac{mv^2}{2} + mgl,$$

откуда находим

$$v^2 = \frac{v_0^2}{2} - gl.$$

В системе отсчета (неинерциальной), в которой нижний шарик все время неподвижен, верхний шарик движется по окружности радиусом l и его скорость в рассматриваемый момент равна $2v$, поэтому ускорение верхнего шарика направлено вниз и равно $a = (2v)^2/l$. Ускорение нижнего шарика в момент отрыва равно нулю, поэтому ускорение верхнего шарика относительно инерциальной системы отсчета тоже равно $a = 4v^2/l$. Второй закон Ньютона для верхнего шарика имеет вид

$$m \frac{4v^2}{l} = mg + T, \text{ где } T = mg,$$

или

$$v_0^2 = 3gl.$$

Таким образом, нижний шарик оторвется от плоскости при

$$v_0 > \sqrt{3gl}.$$

4. Теоретический вид зависимости давления газа от температуры представлен на рисунке 17. На участке KA

$$p_{KA} = p_0 + \left(\frac{m_i}{S_i} \right)_{\min} g,$$

где $\left(\frac{m_i}{S_i} \right)_{\min}$ – меньшая из двух величин $\frac{m_1}{S_1}$ и $\frac{m_2}{S_2}$. В дальнейшем, для определенности, будем считать меньшей $\frac{m_1}{S_1}$. На этом участке в цилиндре площадью S_1 протекает изобарический процесс до момента поднятия поршня до упора (точка A на графике). При дальнейшем увеличении температуры

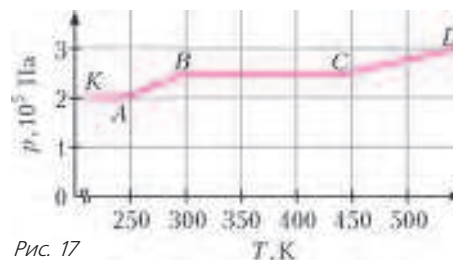


Рис. 17

объем газа не меняется, а давление растет вплоть до момента начала движения второго поршня (точка B). На участке AB

$$p_{AB} = \frac{\nu RT}{S_1 h}.$$

В точке B

$$p_B = p_0 + \frac{m_2 g}{S_2}.$$

При дальнейшем росте температуры давление не меняется до момента, когда второй поршень достигает верхнего положения (точка C). Далее снова протекает изохорный процесс при объеме $(S_1 + S_2)h$, так что

$$p_{CD} = \frac{\nu RT}{(S_1 + S_2)h}.$$

Заметим, что по данным таблицы

$$\frac{p_2}{p_3} = \frac{T_2}{T_3}, \quad \frac{p_4}{p_5} = \frac{T_4}{T_5}, \quad p_1 = p_2, \quad p_3 = p_4.$$

Значит, параметры во второй, третьей и четвертой ячейках таблицы соответствуют точкам A , B и C , и для участка AB

$$p_B - p_A = \frac{\nu R}{S_1 h} (T_B - T_A), \text{ откуда } S_1 = 0,01 \text{ м}^2.$$

Массу m_1 найдем из уравнения

$$p_A = p_0 + \frac{m_1 g}{S_1}, \text{ откуда } m_1 = 100 \text{ кг}.$$

Аналогично,

$$S_1 + S_2 = \frac{\nu R (T_D - T_C)}{(p_D - p_C)h}, \text{ откуда } S_2 = 0,005 \text{ м}^2, \text{ и } m_2 = 75 \text{ кг}.$$

5. 1) Количество теплоты Q_2 , выделившееся в схеме после размыкания ключа, равно энергии конденсатора в момент размыкания:

$$Q_2 = \frac{q_C^2}{2C}, \text{ откуда } q_C = \sqrt{2CQ_2} = 2,00 \text{ мКл}.$$

Полное количество теплоты равно работе источника:

$$\varepsilon q_\varepsilon = Q_1 + Q_2, \text{ откуда } q_\varepsilon = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon} = 2,11 \text{ мКл}.$$

Через резистор сопротивлением R протек заряд

$$q_R = q_\varepsilon - q_C = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon} - \sqrt{2CQ_2} = 0,11 \text{ мКл}.$$

2) При замкнутом ключе в произвольный момент справедливо следующее из второго правила Кирхгофа равенство

$$\varepsilon = I_R R + I_r r.$$

Домножив его на малое время Δt , получим связь протекших за это время зарядов:

$$\varepsilon \Delta t = R I_R \Delta t + r I_r \Delta t = R \Delta q_R + r \Delta q_r.$$

Просуммировав подобные равенства за все время до размыкания ключа, получим

$$\varepsilon t = R q_R + r q_r,$$

откуда с учетом равенства $q_r = q_\varepsilon$ находим

$$t = \frac{R q_R + r q_\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{R + r}{\varepsilon^2} (Q_1 + Q_2) - \frac{R}{\varepsilon} \sqrt{2CQ_2} = 30,4 \text{ с}.$$

11 класс

1. Рассмотрим вращение спицы вокруг левого ребра подставки. Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий шариков:

$$E_k = \frac{m}{2} \left(\frac{L-l}{2} \right)^2 \varphi'^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{L+l}{2} \right)^2 \varphi'^2 = \frac{m}{2} \frac{2(L^2 + l^2)}{4} \varphi'^2 \approx \frac{mL^2}{4} \varphi'^2.$$

Потенциальная энергия системы равна

$$E_{II} = -mg \left(\frac{L-l}{2} \right) \varphi + mg \left(\frac{L+l}{2} \right) \varphi = mgl \varphi.$$

Механическая энергия системы сохраняется, поэтому

$$E'_k + E'_{II} = \frac{mL^2}{2} \varphi'' \varphi' + mgl \varphi' = 0.$$

Разделив на φ' (решение $\varphi' = 0$ нас не интересует), получим уравнение равноускоренного движения:

$$\varphi'' = -\frac{2gl}{L^2}.$$

Время τ , за которое спица вернется в горизонтальное положение, найдем из условия

$$\frac{\varphi'' \tau^2}{2} = -\varphi_0, \text{ откуда, } \tau = L \sqrt{\frac{\varphi_0}{gl}}, \text{ и } T = 4\tau = 4L \sqrt{\frac{\varphi_0}{gl}}.$$

2. 1) Через достаточно большое время конденсатор зарядится так, что ток через него течь не будет, и токи во всей цепи установятся. Предположим, что токи текут так, как показано на рисунке 18. Запишем второй закон Кирхгофа для двух контуров:

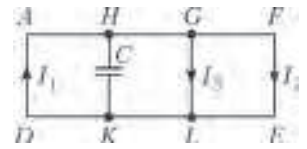


Рис. 18

$$\varepsilon_{AFED} = 5I_1 r + 3I_2 r,$$

$$\varepsilon_{AGLD} = 5I_1 r + I_3 r$$

и первый закон Кирхгофа для точки L :

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Согласно закону электромагнитной индукции Фарадея,

$$\varepsilon_{AFED} = \frac{d(B \cdot 3a^2)}{dt} = 3ka^2, \quad \varepsilon_{AGLD} = 2ka^2.$$

Обозначим $\frac{ka^2}{r} = I_0$ и получим

$$I_1 = \frac{9}{23} I_0, \quad I_2 = \frac{8}{23} I_0, \quad I_3 = \frac{1}{23} I_0.$$

Отсюда и из условия $k > 0$ следует, что ток I_1 на участке AD течет от D к A .

2) Рассмотрим контур $AHKD$ и запишем

$$I_0 r = ka^2 = \varepsilon_{AHKD} = I_1 \cdot 3r + U_C,$$

где U_C – напряжение между верхней и нижней обкладками конденсатора. Следовательно,

$$U_C = -\frac{4}{23} ka^2, \text{ откуда } Q = \frac{4}{23} Cka^2,$$

при этом заряд верхней обкладки отрицательный, нижней – положительный.

3) Тепловая мощность в цепи равна сумме мощностей на всех проводниках:

$$P = 5I_1^2 r + 3I_2^2 r + I_3^2 r = \frac{26 k^2 a^4}{23 r}, \text{ откуда } W = N\tau = \frac{26 k^2 a^4}{23 r} \tau.$$

3. Предположим, что стержень с источниками – одна из сторон треугольника, например AB , точки A_1 и B_1 – изображения источников (рис.19). Тогда лучи AA_1 и BB_1 пересекаются на середине стороны BB_1 в точке O , которая является центром линзы. Луч, идущий от A через B , преломляется в плоскости линзы и идет далее через изображения A_1 и B_1 . Тогда середина AB – точка K – принадлежит плоскости линзы. Но в этом случае плоскость линзы OK пересекает стержень AB , что невозможно. Следовательно, центр треугольника – это один из концов

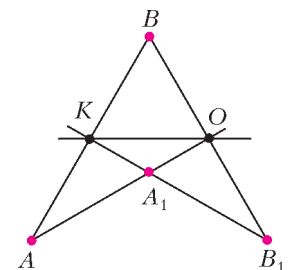


Рис. 19

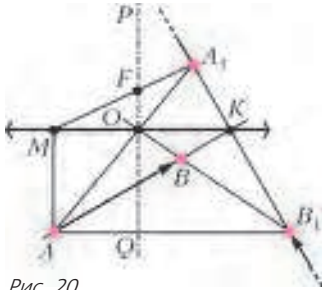


Рис. 20

изображения. Само изображение «разорвано» и представляет два луча, лежащие на прямой A_1B_1 : уходящий из точки A_1 в бесконечность и приходящий в B_1 из бесконечности. Линза собирающая, только такая линза может давать «разорванное» изображение.

Определить положение фокусов и фокусное расстояние несложно. Пусть луч AM из точки A параллельно оси линзы PQ до пересечения с плоскостью линзы в точке M . После преломления луч пойдет через изображение A_1 . Пересечение MA_1 с PQ – точка F – и есть главный фокус линзы. Так как OK – средняя линия треугольника, а точка O – середина

AA_1 , то $OF = \frac{1}{4}h$, где $h = \frac{3}{2}AB = \frac{3}{2}l$ – высота треугольника. Таким образом, фокусное расстояние $OF = \frac{3}{8}l$.

4. При увеличении температуры в объеме V между поверхностью воды и крышкой увеличивается давление газа. Это происходит из-за уменьшения растворимости углекислого газа и его выхода из жидкости. В предельном случае при максимальной температуре t_2 внутри бутылки должно оказаться максимально допустимое давление p_2 . Найдем массу углекислого газа, которая дополнительно окажется в объеме V при повышении температуры от t_1 до t_2 . Для этого определим растворимости углекислого газа при этих температурах, воспользовавшись графиком и законом Генри:

$$\sigma_1 = \sigma'_1 \frac{p_1}{p_0} \approx 4,50 \text{ г/кг}, \quad \sigma_2 = \sigma'_2 \frac{p_2}{p_0} \approx 4,07 \text{ г/кг},$$

где $\sigma'_1 = 3 \text{ г/кг}$ и $\sigma'_2 = 1,1 \text{ г/кг}$. Таким образом, из-за роста температуры масса углекислого газа увеличилась на

$$\Delta m = (\sigma_1 - \sigma_2)m_v = 0,86 \text{ г}.$$

Если учесть еще массу m_1 углекислого газа, который находился над поверхностью воды при герметизации бутылки, то выражение для общей массы углекислого газа будет таким:

$$m_2 = m_1 + \Delta m = \frac{p_1 VM}{RT_1} + \Delta m.$$

Давление этого газа в критическом случае равно p_2 , и

$$p_2 V = \frac{m_2}{M} RT_2 = p_1 V \frac{T_2}{T_1} + \frac{\Delta m}{M} RT_2.$$

Таким образом, минимальный надводный объем бутылки равен

$$V = \frac{\Delta m}{M} \frac{RT_1 T_2}{p_2 T_1 - p_1 T_2} \approx 250 \text{ см}^3.$$

Этот объем складывается из верхнего цилиндрического объема и нижнего конического. Из геометрии находим допустимый уровень жидкости:

$$x \approx 20 \text{ см}.$$

5. Если источник звука движется, то частота звука f , которую слышит неподвижный наблюдатель, может отличаться от испускаемой частоты f_0 . Этот эффект называется эффектом Доплера.

стержня. Рассмотрим этот вариант (рис.20). Прямые AB и A_1B_1 пересекаются в середине A_1B_1 – в точке K , принадлежащей плоскости линзы. Тогда OK – плоскость линзы, точка O – ее центр. Прямая PQ , проходящая через точку O перпендикулярно OK , – главная оптическая ось. Точки A_1 и B_1 – концы

1) Если ракета летит прямо на датчик, то

$$f = f_{\max} = \frac{f_0}{1 - v/v_{зв}},$$

и частота звука повышается.

2) При произвольном угле φ

$$f = \frac{f_0}{1 - (v/v_{зв}) \cos \varphi}.$$

Частота $f > f_0$, если проекция скорости ракеты на направление на датчик положительная ($\cos \varphi > 0$), и $f < f_0$ – в обратном случае. Если $\varphi = \pi/2$, то $f = f_0$.

3) Существуют два принципиальных положения датчика: внутри круга, описываемого ракетой, и снаружи. Если датчик находится снаружи, то в этом случае точки, из которых от ракеты приходят максимальная и минимальная частоты, являются концами (M_1 и M_2 соответственно) отрезков касания из положения датчика A к траектории ракеты (рис.21). А так как, в силу симметрии, $AM_1 = AM_2$, то задержки между испусканием и приемом звука для точек M_1 и M_2 одинаковы. Это означает, что они делят длину окружности в том же

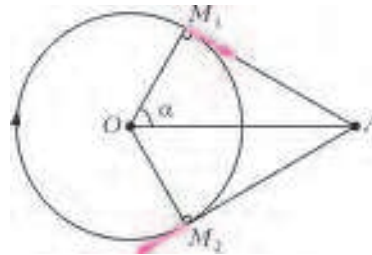


Рис. 21

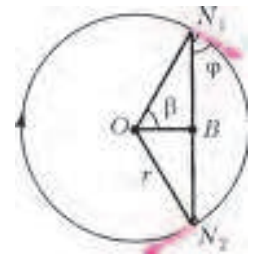


Рис. 22

отношении, что и точки максимума и минимума на графике частоты делят период сигнала, и максимальная частота равна

$$f_{\max}^{\text{внеш}} = f_{\max}.$$

Если датчик находится внутри траектории (рис.22), то угол φ между скоростью ракеты и направлением на датчик уже не сможет принимать значения 0 и π , как в предыдущем случае. Проведя рассуждения, аналогичные предыдущим, и воспользовавшись рисунком 22, найдем, что теперь максимальная частота равна

$$f_{\max}^{\text{внут}} = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{v_{зв}} \cos \varphi} = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{v_{зв}} \frac{OB}{r}} < f_{\max}.$$

Обратимся теперь к графику частоты и заметим, что для обоих датчиков время от максимума до минимума частоты одно и то же: $t_1 = t_2 = T/4 = 6 \text{ с}$, где $T = 24 \text{ с}$ – период сигнала (период вращения ракеты). Таким образом, в обоих случаях $2\alpha = 2\beta = \pi/2$. А так как при этом максимальная частота для датчика 1 больше максимальной частоты для датчика 2, то это возможно, только когда датчик 1 находится снаружи траектории, а датчик 2 – внутри. Из графика

$$f_{\max}^{\text{внеш}} = 1,32 \text{ кГц}, \quad f_{\min}^{\text{внеш}} = 0,88 \text{ кГц}.$$

Тогда

$$f_0 = 1,056 \text{ кГц} \text{ и } v = \frac{v_{зв}}{5} = 66 \text{ м/с}.$$

Зная период T и скорость ракеты v , определим радиус ее траектории:

$$r = \frac{vT}{2\pi} = 252 \text{ м}$$

и расстояния от центра траектории до датчиков:

$$OA = \frac{r}{\cos \alpha} = \sqrt{2}r = 357 \text{ м}, \quad OB = r \cos \beta = \frac{r}{\sqrt{2}} = 178 \text{ м}.$$

Осталось найти угол ψ между OA и OB , который приводит к тому, что между максимумами графиков образуется по времени сдвиг $\tau = T/3 = 8$ с. Однако надо учитывать, что в этот сдвиг входит разница во времени распространения сигнала от ракеты до датчиков. Таким образом,

$$\psi = \frac{\tau}{T} + \frac{AM_1}{v_{зв}} - \frac{BN_1}{v_{зв}} = \frac{2\pi}{3} + \frac{2 - \sqrt{2}}{10} = 2,15 \text{ рад}.$$

Отметим, что вклад от разницы задержек сигналов составляет около 3%, что является погрешностью того же порядка, что и погрешность определения времен по графику. Окончательно расстояние между датчиками найдем по теореме косинусов:

$$L = \sqrt{OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \psi} = 478 \text{ м}.$$

LIV МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

1 (Б.Баев). Для решения задачи достаточно подобрать последовательность $n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1}$, удовлетворяющую следующим условиям: (i) $n_1 = n$; (ii) набор разностей $d_1 = n_2 - n_1, d_2 = n_3 - n_2, \dots, d_k = n_{k+1} - n_k$ совпадает с набором степеней $1, 2, 2^2, \dots, 2^{k-1}$ (взятом в некотором порядке); (iii) d_i является делителем n_i для всех $i = 1, 2, \dots, k$. Действительно, при выполнении этих условий имеем:

$$n_{k+1} = n_1 + (d_1 + d_2 + \dots + d_k) = n_1 + (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1}) = n + 2^k - 1,$$

выражение $1 + \frac{2^k - 1}{n} = \frac{n_{k+1}}{n_1}$ представляется в виде произведения k сомножителей $\frac{n_2}{n_1}, \frac{n_3}{n_2}, \dots, \frac{n_{k+1}}{n_k}$, каждый из которых имеет вид $\frac{n_{i+1}}{n_i} = 1 + \frac{d_i}{n_i} = 1 + \frac{1}{m_i}$, где $m_i = \frac{n_i}{d_i}$ – натуральное.

Подберем нужную последовательность $n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1}$ следующим образом. Будем обозначать через t_i наибольшее (целое неотрицательное) число такое, что n_i делится на 2^{t_i} . Если $t_1 < k$, положим $d_1 = 2^{t_1}$. Тогда $n_2 = n_1 + 2^{t_1} = 2^{t_1}(s + 1)$, где $n_1 = 2^{t_1} \cdot s$, и s нечетно. Значит, n_2 делится на 2^{t_1+1} , поэтому $t_2 > t_1$. Если $t_2 < k$, повторим процедуру (положим $d_2 = 2^{t_2}, n_3 = n_2 + 2^{t_2}$, при этом $t_3 > t_2$). И будем продолжать действовать так же. При этом либо мы получим $d_1 = 1, d_2 = 2, \dots, d_k = 2^{k-1}$, либо на некотором шаге впервые получим $t_j \geq k$ (т.е. $t_1 < \dots < t_{j-1} < k \leq t_j$). В последнем случае n_j делится на 2^k , и далее можно определить d_j, \dots, d_k как числа множества $\{1, 2, 2^2, \dots, 2^{k-1}\} \setminus \{d_1, d_2, \dots, d_{j-1}\}$ в порядке убывания. Ясно, что при этом условие (iii) выполняется (n_j очевидно делится на d_j , а при $i > j$ число $n_i = n_{i-1} + d_{i-1}$ будет делиться на d_{i-1} , которое, в свою очередь, делится на d_i).

2 (А.Волгин).

Ответ: 2013.

Приведем пример колумбийской конфигурации, для которой любой хороший набор содержит не менее 2013 прямых. Возьмем вершины правильного 4026-угольника и покрасим их поочередно в красный и синий цвета. Еще одну синюю точку отметим произвольно (но так, чтобы среди всех 4027 точек не нашлось трех точек на одной прямой). Каждая сторона 4026-угольника должна быть пересечена хотя бы одной прямой из хорошего набора, но каждая прямая пересекает границу 4026-угольника не более чем в двух точках, поэтому в хорошем наборе должно быть хотя бы $4026/2 = 2013$ прямых.

Докажем индукцией по n следующий более общий факт.

Пусть дана конфигурация из $2n + 1$ точек (никакие три из

которых не лежат на одной прямой), каждая из которых покрашена в красный или синий цвет (не обязательно $n + 1$ синих и n красных); тогда найдется хороший набор из n прямых. База индукции ($n = 0$) очевидна. Пусть верно предположение индукции, и наше утверждение верно для конфигурации из $2(n - 1) + 1 = 2n - 1$ точек. Рассмотрим произвольную конфигурацию M из $2n + 1$ точек и выделим две соседние точки A, B на границе выпуклой оболочки множества M . Отбросив A и B , рассмотрим хороший набор L из $n - 1$ прямых для оставшегося множества из $2n - 1$ точек (можно считать, что A и B не лежат на прямых набора L , иначе прямые можно немного сдвинуть так, чтобы ни одна из оставшихся точек не перешла в другую область). Докажем, что к этому набору можно добавить еще одну прямую l так, чтобы полученный набор из n прямых стал хорошим для M .

Случай 1: точки A и B одного цвета. Достаточно провести прямую l параллельно AB так, чтобы она отделяла A и B от остальных точек (рис. 23).

Случай 2: точки A и B разного цвета. Здесь есть два варианта.

2а) Если A и B лежат в разных областях (на которые разбита плоскость прямыми набора L), поступим так же, как в случае 1.

2б) Пусть A и B лежат в одной области. В этой области, возможно, есть несколько других точек из M какого-то одного цвета, для определенности будем считать, что они цвета точки A . Тогда достаточно провести прямую l , отсекающую точку B от остальных прямых (это возможно, так как B лежит на границе выпуклой оболочки, рис. 24).

4 (Д.Крачун). Пусть V – вторая точка пересечения окружности ω_1 и отрезка AW (рис. 25). Тогда $AV \cdot AW = AN \cdot AB = AN \cdot AC$. Поскольку точки B, C, M, N лежат на одной окружности, $AN \cdot AB = AM \cdot AC$, откуда $AV \cdot AW = AM \cdot AC$, значит, точки C, M, V и W лежат на одной окружности, т.е. V

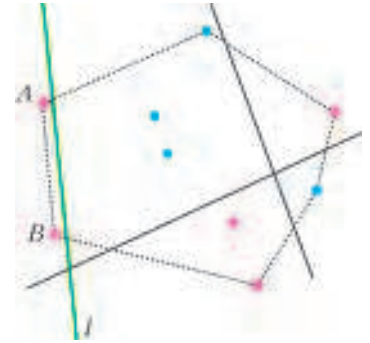


Рис. 23

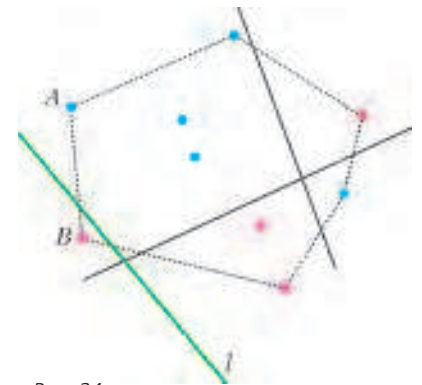


Рис. 24

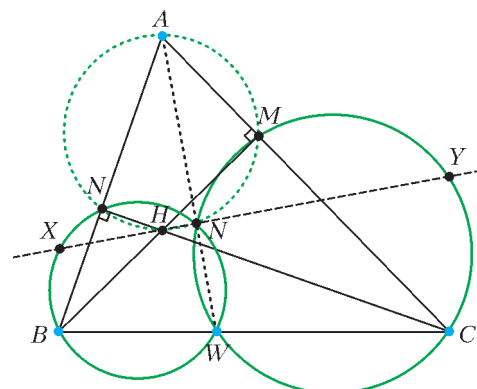


Рис. 25

– вторая точка пересечения окружностей ω_1 и ω_2 . Отсюда $\angle XVW = \angle YVW = 90^\circ$, или $VX \perp AV$, $VY \perp AV$. Точки A, M, N, H лежат на одной окружности ω с диаметром AH . Из окружностей ω_1 и ω_2 имеем $\angle BNV = \angle CWV = \angle AMV$. Но из равенства $\angle BNV = \angle AMV$ следует, что точки A, M, N, V тоже лежат на одной окружности, а значит, V лежит на ω . Отсюда $VH \perp AV$. Получается, что точки X, Y и H лежат на одной прямой, перпендикулярной AV и проходящей через V .

5 (Д.Клюев). Последовательно докажем неравенства 1)–7), в результате получим решение задачи. Ниже x – произвольное число из множества положительных рациональных чисел $\mathbb{Q}_{>0}$, n – натуральное.

- 1) $f(a^n x) \leq a^n f(x)$.
Для доказательства подставим $y = a$ в (i), далее применим (iii) и индукцию по n .
- 2) $f(1) \geq 1$.
Действительно, подставив $x = a, y = 1$ в (i), получим $f(a)f(1) \geq f(a)$, откуда $af(1) \geq a$ и $f(1) \geq 1$ (поскольку $a > 0$).
- 3) $f(x+n) \geq f(x) + n$.
Доказательство следует из (ii) и неравенства 2) индукцией по n (база: $f(x+1) \geq f(x) + f(1) \geq f(x) + 1$).
- 4) $f(n) \geq n$.
Это сразу вытекает из неравенств 2) и 3) для $x = 1$.
- 5) $f(x) > 0$.
Пусть $x = p/q$, где p и q – натуральные. Тогда из (i) получаем $f(x)f(q) \geq f(p)$. Но из 4) мы знаем, что $f(p) > 0$, $f(q) > 0$, поэтому и $f(x) > 0$.
- 6) $f(x) \geq x$.
Предположим, это не так, и существует $d \in \mathbb{Q}_{>0}$ такое, что $f(d) = d - \epsilon$, где $\epsilon > 0$. Подберем n такое, что $a^n d > 10$, $a^n \epsilon > 2$. По неравенству 1) $f(a^n d) \leq a^n (d - \epsilon) < a^n d - 2$. Значит, для $c = a^n d$ имеем $f(c) < c - 2$. Положим $k = [c] - 1$ (тогда k – натуральное и $0 < c - k < 2$). Согласно 3) и 5) получаем $f(c) = f((c - k) + k) \geq f(c - k) + k > k$, откуда $c - 2 > k$ и $c - k > 2$ – противоречие.
- 7) $f(x) \leq x$.
Найдем натуральное n такое, что $a^n > x$. Тогда из (i) имеем $f(a^n) \leq a^{n-1} f(a) \leq a^n$, а из (ii) имеем $f(a^n) \geq f(x) + f(a^n - x)$. Согласно 6), $f(a^n - x) \geq a^n - x$, отсюда получаем $f(x) \leq f(a^n) - f(a^n - x) \leq a^n - (a^n - x) = x$. Из 6) и 7) вытекает утверждение задачи.

XLIV МЕЖДУНАРОДНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

Задача 1

- 1.1. $v = 28,6$ км/с.
- 1.2а. $t = 0,87$ с. 1.2б. $\frac{E_{\text{кин}}}{E_{\text{расп}}} = 2 \cdot 10^2 \gg 1$.
- 1.3а. $\alpha = +\frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$, $\gamma = -\frac{1}{2}$, $\delta = +\frac{1}{2}$.
- 1.3б. $x = 1,6$ мм, $\frac{x}{R_M} = 0,012$.
- 1.4а. ${}^{87}_{37}\text{Rb} \rightarrow {}^{87}_{38}\text{Sr} + {}^0_{-1}e + \tilde{\nu}_e$.
- 1.4б. Указание: $N_{\text{Rb}}(t) = N_{\text{Rb}}(0)e^{-\lambda t}$, $N_{\text{Sr}}(t) = N_{\text{Sr}}(0) + (e^{\lambda t} - 1)N_{\text{Rb}}(0)$.

- 1.4в. $\tau_M = 3,4 \cdot 10^9$ лет.
- 1.5. $t_{\text{Э}} = 3,30$ лет = $1,04 \cdot 10^8$ с.
- 1.6а. $\Delta\theta = 4,27 \cdot 10^{-8}$ рад (смещение Северного полюса составляет 0,27 м).
- 1.6б. $\Delta\tau_{\text{вр1}} = 6,84 \cdot 10^{-5}$ с. 1.6в. $\Delta\tau_{\text{вр2}} = -3,62 \cdot 10^{-3}$ с.
- 1.7. $v_{\text{ст}} = 72,8$ км/с.

Задача 2

- 2.1. $V = 4,19 \cdot 10^{-24}$ м³, $M = 4,39 \cdot 10^{-20}$ кг.
- 2.2. $A = \frac{1}{3}$.
- 2.3. $\vec{F} = -\frac{4\pi}{9\epsilon_0} R^3 e^2 n^2 x_2 \vec{e}_x$, $W_{\text{эл}} = \frac{2\pi}{9\epsilon_0} R^3 e^2 n^2 x_2^2$.
- 2.4. $x_2 = \frac{3\epsilon_0}{en} E_0$, $-\Delta Q = -\pi R^2 n e x_2$.
- 2.5а. $C = \frac{9}{4} \epsilon_0 \pi R = 6,26 \cdot 10^{-19}$ Ф. 2.5б. $U_0 = \frac{4}{3} R E_0$.
- 2.6а. $W_{\text{кин}} = \frac{2}{3} \pi R^3 n m_e v^2$, $I = -en\pi R^2 v$.
- 2.6б. $L = \frac{4m_e}{3\pi R n e^2} = 2,57 \cdot 10^{-14}$ Гн.
- 2.7а. $\omega_{\text{н}} = \sqrt{\frac{ne^2}{3\epsilon_0 m_e}}$.
- 2.7б. $\omega_{\text{н}} = 7,88 \cdot 10^{15}$ с⁻¹, $\lambda_{\text{н}} = 239$ нм.
- 2.8а. $P_{\tau} = \frac{2}{3} \frac{\pi R^3 n m_e}{\tau} \langle v^2 \rangle$, $\langle I^2 \rangle = (en\pi R^2)^2 \langle v^2 \rangle$.
- 2.8б. $R_{\tau} = 2,46$ Ом.
- 2.9. $R_{\text{рас}} = 2,45$ Ом.
- 2.10а. $P_{\tau} = \frac{8R_{\tau} R^2}{9(R_{\tau} + R_{\text{рас}})^2} E_0^2$, $P_{\text{рас}} = \frac{8R_{\text{рас}} R^2}{9(R_{\tau} + R_{\text{рас}})^2} E_0^2$.
- 2.10б. $E_0 = 27,4$ кВ/м, $P_{\tau} = 6,82$ нВт, $P_{\text{рас}} = 6,81$ нВт.
- 2.11а. $\mu_{\text{н}} = 1,90 \cdot 10^{-3}$ кг/с.
- 2.11б. $\eta = 0,498 = 49,8\%$.

Задача 3

- 3.1. $p(x, z) = \rho_{\text{л}} g (H(x) - z)$.
- 3.2а. $k = \rho_{\text{л}} g$. 3.2б. $H(x) \sim \sqrt{L - x}$. 3.2в. $\gamma = \frac{5}{4}$.
- 3.3. $v_x(x) = \frac{cx}{H_m}$. 3.4. $v_z(z) = -\frac{cz}{H_m}$. 3.5. $z(x) = \frac{H_m x_i}{x}$.
- 3.6. $\tau(z) = \frac{H_m}{c} \ln \frac{H_m}{z}$.
- 3.7а. $c_1 = 0,1749$ м/год, $c_2 = 0,1232$ м/год. 3.7б. $\Delta T \approx 12$ °С.
- 3.8. $h = 8,79$ м. 3.9. $h_1 - h_2 \approx 4,56$ м.

ВСЕРОССИЙСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКЕ 2013 ГОДА

Московский тур

1. $L_{\text{max}} = \frac{ma}{b}$.
2. $v_0 = \sqrt{gR \text{sh}(4\pi\mu)}$ (здесь sh – гиперболический синус: $\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$).
3. $R = \frac{F}{m\omega^2 \text{tg } \alpha}$. 4. $\eta = 1 - \frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1}}$.
5. $\varphi = \frac{mv}{\mu q A}$. 6. $\Phi = \frac{1}{2} \mu_0 n I \pi R^2$.

$$7. B_x = \frac{\mu_0 i (\alpha_1 - \alpha_2)}{2\pi}, B_y = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}.$$

$$8. I = I_0.$$

Заключительный тур

$$1. F = \frac{m\alpha v_0^2}{2v}, f = \frac{m\alpha v}{2}.$$

$$2. M = gvR \sin \alpha \cdot (1 - \alpha \operatorname{tg} \alpha). \quad 3. v = r\sqrt{ag}, \beta = \alpha.$$

$$4. T = 2\pi \sqrt{\frac{2(m_a a^2 + m_b b^2)}{3g\sqrt{m_a^2 a^2 + m_b^2 b^2 + 2m_a m_b ab \cos \alpha}}}.$$

$$5. T_{\max} = 2T. \quad 6. F = \frac{\delta_0 \sigma r^2}{3R\epsilon_0}.$$

$$7. F = \frac{\mu_0 n_1 n_2 I_1 I_2 \pi r_2}{2}. \quad 8. I = \frac{2}{9} I_0.$$

НАПЕЧАТАНО В 2013 ГОДУ

№ журнала с.

№ журнала с.

К 150-летию А.Н.Крылова

Значение математики для кораблестроителя. <i>А.Крылов</i>	3	2
Корабельный инженер-самоучка. <i>А.Крылов</i>	3	9
О волновом сопротивлении воды и о спутной волне. <i>А.Крылов</i>	3	12

Статьи по математике

Автомобильные пробки: когда рациональность ведет к коллапсу. <i>А.Гасников, Ю.Дорн, Е.Нурминский, Н.Шармай</i>	1	13
Быстрее быстрого, или Можно ли обогнать бинарный алгоритм. <i>В.Журавлев, П.Самовол</i>	2	7
Окружности Вилларсо. <i>А.Акопян</i>	5-6	8
Чему смеялся Гельфанд (Математическая новелла для нематематиков). <i>Е.Глаголева, В.Пушченко</i>	4	2
Эллипс, симметричный как квадрат. <i>Д.Звонкин</i>	1	2

Статьи по физике

Где находится горизонт или край Вселенной? <i>С.Блинников, А.Зинковский</i>	5-6	2
Гравитационный бильярд, или Механическая модель лазерного резонатора. <i>А.Андреев, А.Панов</i>	3	15
Лазерный резонатор. <i>А.Панов</i>	2	2
Почему в хорошую пиццерию не надо ходить в «час пик». <i>А.Варламов</i>	1	8
Распространение сигнала от движущегося источника, или Что увидит наблюдатель. <i>А.Рыбаков</i>	4	8

Новости науки

Премия за «прорывные» эксперименты. <i>Л.Белопухов</i>	1	19
--	---	----

Из истории науки

История, полная загадок. <i>Л.Ткачев</i>	3	17
Мог ли Галилей открыть закон всемирного тяготения. <i>Г.Горелик</i>	2	16

Задачник «Кванта»

Задачи М2286 – М2325, Ф2293 – Ф2332	1 – 5-6
Решения задач М2269 – М2308, Ф2275 – Ф2314	1 – 5-6
Равные площади и повороты	3 27

«Квант» для младших школьников

Задачи	1–5-6
Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»	1, 4, 5-6
Статьи по математике	
Бумажный итератор. <i>И.Акулич</i>	5-6 24
Ежу понятно. <i>И.Акулич</i>	2 35

Меньше знаешь – крепче спишь. <i>И.Акулич</i>	1	35
Обмен мешочками на Поле Чудес. <i>А.Меньщиков</i>	4	24
Статьи по физике		
Вифлеемская звезда. <i>А.Андреев, Д.Панов, А.Панов</i>	5-6	27
Простой мини-робот. <i>А.Андреев, А.Панов</i>	1	37
Таинственный утюг. <i>С.Дворянинов</i>	5-6	27
Удивительная конструкция, или Рассказ о гофре. <i>С.Дворянинов</i>	3	31

Калейдоскоп «Кванта»

Математика		
Задачи на смекалку	4	32
Классические средние в треугольнике	2	«
Физика		
Взаимодействие света с веществом	5-6	48
Парабола	1	32
Термометрия	3	«

Школа в «Кванте»

Математика		
Множества и характеристические функции. <i>Л.Алтишулер</i>	3	34
Новый взгляд на теорему Штейнера – Лемуса. <i>Л.Штейнгарц</i>	1	44
Физика		
Вихри враждебные... <i>А.Стасенко</i>	1	42
Два слова о колодце (и не только о нем). <i>С.Дворянинов</i>	1	38
Как нанокластер с самолетом столкнулся. <i>И.Амелюшкин, А.Стасенко</i>	1	41
Капли, пузырьки и дирижабли. <i>А.Стасенко</i>	5-6	28
Орало и крыло. <i>В.Вышинский, А.Стасенко</i>	3	38
Прекрасные моменты физики. <i>А.Стасенко</i>	5-6	31
Энтропия, Демон Максвелла и тепловая смерть Вселенной. <i>А.Стасенко</i>	5-6	29
Эта манящая глубина. <i>А.Стасенко</i>	3	39

Физический факультатив

Второй закон Ньютона для трехмерного пространства. <i>Б.Мукушев</i>	3	40
Почему радуги бывают разными. <i>С.Варламов</i>	1	46
Сверххолодная вода. <i>И.Амелюшкин</i>	4	27
Шайба, мяч и копые. <i>А.Стасенко</i>	2	38
Шарики разлетаются не так! <i>А.Коновалов</i>	5-6	41

Математический кружок

Две фальшивые монеты. <i>К.Кноп</i>	1	49
Ну и денек! <i>И.Акулич</i>	4	34

	№ журнала	с.
Одной рукой узелок не развяжешь! <i>А.Полянский</i>	2	40
Сколько можно ждать? <i>И.Акулич</i>	3	43
Этюд о симедианах. <i>В.Журавлев, П.Самовол</i>	5-6	33
Лаборатория «Кванта»		
Двойное лучепреломление. <i>А.Андреев, И.Боголюбов, А.Панов</i>	5-6	50
Электрический ток в жидкости и фотоэффект. <i>С.Герасимов</i>	4	29
Наши наблюдения		
Многоликая тень	2	43
Пилотируемая полоска	4	52
Практикум абитуриента		
Физика		
Вот что-то с горочки спустилось... <i>А.Черноуцан</i>	3	46
Геометрия световых лучей. <i>В.Дроздов</i>	1	55
Идеальный газ в конкурсных задачах. <i>В.Дроздов</i>	4	38
Избранные задачи по физике. <i>А.Овчинников, В.Плис</i>	5-6	53
Криволинейное движение в задачах. <i>В.Дроздов</i>	2	45
Олимпиады		
Всероссийская студенческая олимпиада по физике 2013 года	5-6	72
Заключительный этап XXXIX Всероссийской олимпиады школьников по математике	5-6	58
Заключительный этап XLVII Всероссийской олимпиады школьников по физике	5-6	60
Избранные задачи Московской физической олимпиады	4	46
LIV Международная математическая олимпиада	5-6	64
XXI Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»	3	51
XIX Международная олимпиада школьников «Туймаада». Физика	2	53
XX Международная олимпиада школьников «Туймаада». Физика	4	51
XLIV Международная физическая олимпиада	5-6	66
LXXXVI Московская математическая олимпиада	4	43
Московская студенческая олимпиада по физике 2012 года	1	60
Региональная студенческая олимпиада по физике	3	55
Региональный этап XXXIX Всероссийской олимпиады школьников по математике	2	49
Региональный этап XLVII Всероссийской олимпиады школьников по физике	2	50
XXXIV Турнир городов. Задачи весеннего тура	4	42
XXXIV Турнир городов. Задачи осеннего тура	1	59
Информация		
Заочная физико-техническая школа при МФТИ	5-6	78
Заочная школа СУНЦ НГУ	3	56
Новый прием в школы интернаты при университетах	5-6	82
Очердной набор в ВЗМШ	5-6	73
Школе-интернату имени академика А.Н.Колмогорова – 50 лет!	5-6	83
«Квант» улыбается		
Экзамен	2	31
Любопытно, что	2	42

Нам пишут		
Еще раз о пространствах L_p и замечательных точках треугольника	5-6	45
Катастрофа замечательной точки	1	6
Смесь		
Число Эйлера в треугольнике Паскаля	4	26
Коллекция головоломок		
Восемь в одной	3	2-я с.обл.
Еще одна деталь	1	«
Невидимое рукопожатие	4	«
Полное зацепление	2	«
YES	5-6	«
Шахматная страничка		
Геометрия ладейных окончаний	4	3-я с.обл.
Компьютеры и претенденты	5-6	«
Компьютеры решают и опровергают?	1	«
«Ломоносов» и чемпион мира	2	«
Мемориал Алехина	3	«
Прогулки с физикой		
Как растянуть мгновение	3	4-я с.обл.
Как стекло сделать прозрачным?	5-6	«
Опыт Эрстеда ... в метро	1	«
Поляризация на носу	4	«
Почему хурма вяжет во рту?	2	«

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришук, А.Е.Пацхверия, Е.А.Силина, М.В.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: (495) 930-56-48

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

**в соответствии с предоставленными материалами в ООО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь
www.Pareto-print.ru**

КОМПЬЮТЕРЫ И ПРЕТЕНДЕНТЫ

В наши дни все шахматисты – и любители, и гроссмейстеры – во время турниров следят по интернету за партиями гроссмейстеров в режиме онлайн. Особенно интересно, когда мощная программа (чаще всего «Гудини») после каждого хода дает оценку данной позиции и предлагает сильнейшее продолжение. При этом компьютер приводит необходимые варианты, которые нередко остаются за кадром, т.е. соперники их не замечают. Таких примеров очень много. Приведем два – из соревнований, имеющих прямое отношение к борьбе за шахматную корону.

В марте 2013 года турнир претендентов в Лондоне выиграл норвежский экс-вундеркинд Магнус Карлсен.



П. Свидлер – М. Карлсен

У черных перевес, и партия продолжалась следующим образом: 26...c4 26. ♖:d3 ♗:d3 27. ♞:d3 c5 28. ♗e5 ♞:d3 29. ♗:b8 c4 30. ♗e5 (упорнее 30. ♖e1) 30... ♗e5 31. ♞b1 ♖d5 32. ♞b8+ ♗h7 33. ♖h5 (последняя ошибка, сопротивляться можно было посредством 33. ♞e8) 33... ♖e4 34. ♞b2 ♞d5 35. ♞e2 ♖b1+ 36. ♗h2 f6. Белые сдались.

Однако в позиции на диаграмме Карлсен, как обнаружила «Гудини», упустил возможность завершить борьбу красиво и без всяких хлопот: 25... ♗:h3! 26. de (26. gh ♖:h3 27. ♗e3 ♗d6 вело к мату) 26... ♞g5 27. g3 ♗g4 28. f3.

На доске материальное равенство, но здесь следовало эффектное 28... ♞b2!! – именно это отвлечение падо



М. Карлсен – Л. Аромян

У черных лишняя пешка, но белые ладьи сдвоились по линии «а» и в конце концов вторгнутся в неприятельский лагерь. Позиция пока примерно равная, пятнадцать ходов Аромян еще удерживал равновесие, но потом дрогнула и в конце концов уступил. Здесь черные сыграли 31... ♗e7, Карлсен защитил свою единственную слабость – 32. f3 и потом начал умело перегруппировывать свои фигуры. Но почему они не забрали центральную пешку – 31... ♞e4? Вот что говорит по этому поводу «Гудини».

32. ♗d3 ♞b5 33. c4! Аромяня подводит скученность фигур. 33...bc. При отступлении ладьи белые просто забирают двух коней на a5. 34. ♞:c4 ♗:b3 35. ♞a2 a5 36. ♞c4 ♗b4 37. ♗:b4 ab 38. ♞:c7 ♗c5 39. ♞aa7! Пешки «b» и «c» выглядят грозно, но далеко они не пройдут. Черный король в матовой сети, и далее компьютер указывает два геометрически четких варианта. Вот один из них:

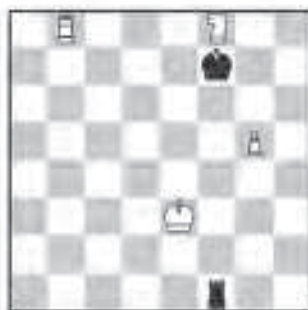
39...b3 40. ♞f7+ ♗g5 41. ♞:g7+ ♗f4 42. ♗e2! c2 43. ♞g7+ ♗e4 (43... ♗g5 44. h4+ ♗:b4 45. ♞f5!! ef 46. ♞g7) 44. ♗d2! b2 45. f3+ ♗d4 46. ♗:c2+ и 47. ♗a3 с победой.

Е. Гук

было иметь в виду прежде, чем ударить слоном на h3. После 29. ♖:b2 ♗:f3 30. ♖f2 ♗:d1 31. ♗a2 ♗h5 у черных лишняя пешка и решающий перевес в окончании.

Победа в турнире позволила Карлсену бросить перчатку чемпиону мира Виши Ананду. А ведь «Гудини», как мы видим, могла справиться с этой задачей еще успешнее...

Спустя полгода в норвежском городе Тромсе завершился Кубок мира, второй по престижности турнир после матча за шахматный трон. Кубок проходил по вокаут-системе, в каждом круге игрался матч из двух партий с полноценным, классическим контролем, а при равном счете соперники играли тай-брейк в быстрые шахматы. Два финалиста Кубка, будущий победитель Владимир Крамник и второй призер Дмитрий Андрейкин, завоевали путевки в следующий турнир претендентов. А до этого, в одном из полуфиналов, столкнулись Крамник и французский гроссмейстер Вашье-Лаграв. Обе классические партии закончились ничью, и все решала быстрая игра, где элемент случайности выиграл. Ранид сложился благополучно для Крамника, но он, как установила «Гудини», мог обойтись и без тай-брейка...



В. Крамник – М. Вашье-Лаграв

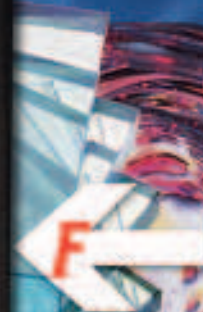
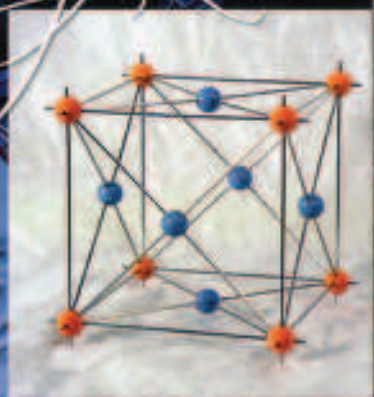
Это положение из второй партии. У белых большой материальный перевес, но пешка в опасности, а в случае ее потери выиграть невозможно. Здесь последовало 62. ♗e4 ♞e1+ 63. ♗f3 ♞f1+ 64. ♗g3 ♞g1 65. ♗f4 ♞f1+ 66. ♗e3 ♞e1+ 67. ♗f3 ♞f1+ 68. ♗g2 ♞f5 69. ♗h7 ♗g6 70. ♞b7 ♞f4 71. ♗g3 ♞a4 72. ♞e7 ♞g4+ 73. ♗f3 ♞a4 74. ♞b7 ♞h4 75. ♗f6 ♗:g5, и на доске ничейный эндшпиль ладья и конь против ладьи. Мир был заключен на 125-м ходу согласно «правилу 50 ходов».

И все же у белых был путь к победе, причем единственный: 62. ♗d7! ♞f5 63. ♞f8+ ♗g6 (63... ♗e6 64. ♞f6+) 64. ♞g8+ ♗f7 (или 64... ♗h7) 65. ♗e4! Именно этот промежуточный эндшпиль ход выпал из поля зрения Крамника. Белые оттягивают ладью с

Как стекло сделать прочным?

Можно, например, с помощью полировки убрать микротрещины на поверхности стекла. Но это не самый эффективный способ повышения его прочности...

Прочность с физикой



(Продолжение – на с. 47 внутри журнала)