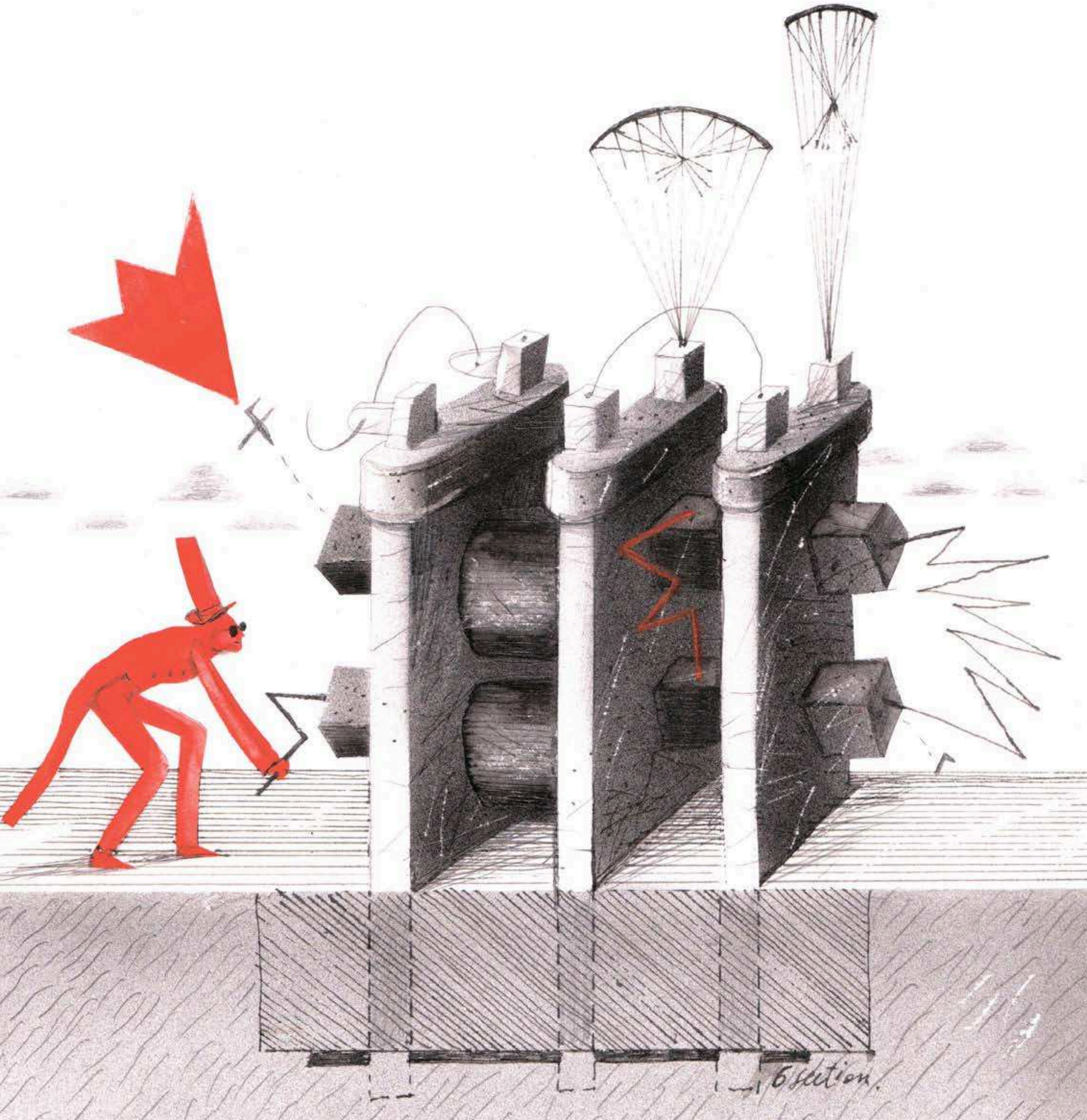
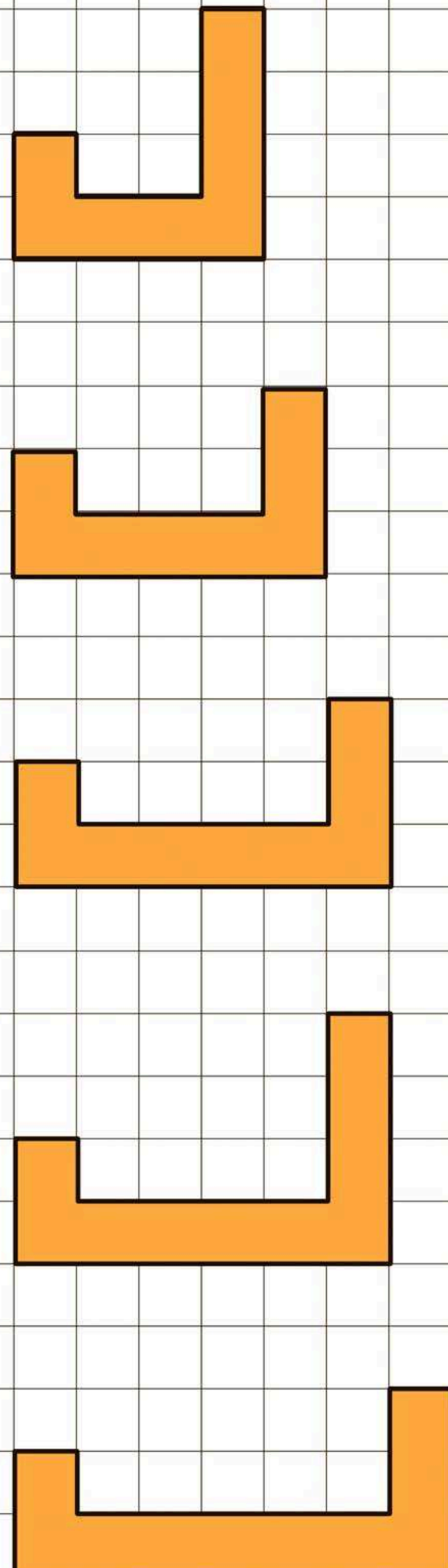
ISSN 0130-2221
МАРТ/АПРЕЛЬ
2013 • №2

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



ПОЛНОЕ ЗАЦЕПЛЕНИЕ



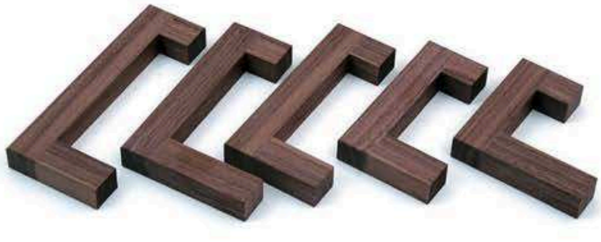
Автор этой головоломки Хироши Ямамото предлагает так расположить на столе все пять деталей, чтобы получить «полное зацепление»: если подвинуть любую деталь, то весь набор сдвинется в ту же сторону на такое же расстояние. Другими словами, части головоломки нельзя будет передвигать друг относительно друга по поверхности стола. Детали нужно класть плашмя и не накладывать друг на друга.

Головоломку можно сделать из дерева, фанеры или даже картона – важно лишь, чтобы все элементы были достаточно толстыми и хорошо держались друг за друга; их размеры показаны на рисунках.

Подобный принцип используется в так называемых самозаклинивающихся структурах, которые сейчас активно исследуются в материаловедении и применяются в строительстве. Прочитать об этом можно, например, в статье А. Белова в «Кванте» №1 за 2009 год.

Желаем удачи в решении этой головоломки!

Е. Епифанов



КВАНТ

МАРТ АПРЕЛЬ 2013 № 2

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

УЧРЕДИТЕЛЬ

Российская академия наук

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.Л.Семенов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов, А.Н.Виленкин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин, Н.П.Долбилин (*заместитель главного редактора*), В.Н.Дубровский, А.А.Егоров, П.А.Кожевников, С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан (*заместитель главного редактора*)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков, Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский, А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков, Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский, Я.А.Смородинский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Лазерный резонатор

А.ПАНОВ

Геометрическая оптика кажется простой наукой. В ее основе лежат три очевидных предложения:

• между последовательными отражениями/преломлениями световой луч движется по прямой;

• при отражении выполняется закон отражения;

• при преломлении выполняется закон преломления.

Закон отражения заключается в том, что «угол падения равен углу отражения». Законом преломления мы не будем пользоваться, так что оставим его за скобками.

На первый взгляд, основная задача геометрической оптики – это построение траектории светового луча. Но на самом деле правильная точка зрения состоит в том, что нужно следить не за *отдельным световым лучом*, а за целым *пучком лучей*. Как только мы ее примем, мы попадаем в новый мир, где правят бал каустические кривые и каустические поверхности (об этом рассказывалось, например, в статье А.Андреева и А.Панова «Каустики на плоскости и в пространстве» в «Кванте» №3 за 2010 год – *прим. ред.*).

В оптике есть и другой полезный принцип: нужно следить за лучом не на протяжении одного или нескольких отражений, а когда он претерпевает *многократные отражения*. Это уже задача о поведении светового луча в *оптическом резонаторе* (математики предпочитают называть ее *бильярдной*). Особенно интересен случай *лазерного резонатора.*

Лазерный резонатор представляет собой простейшую оптическую схему – два расположенных друг против друга сферических зеркала (рис.1). Луч, запущенный вдоль оси резонатора, при многократных отражениях так и будет двигаться вдоль оси. А что будет происходить с лучом, слегка отклоненным от оси? То ли при многократных отражениях он так и будет оставаться в пространстве между зеркалами, то ли его отклонение от оси будет увеличиваться и в какой-то момент он будет выброшен из резонатора? В первом случае резонатор называется *устойчивым*, и он может быть использован для генерации лазерного излучения; во втором случае резонатор называется *неустойчивым*.

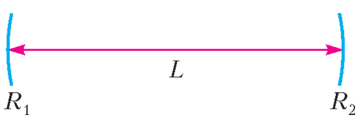


Рис.1. Лазерный резонатор; заданы радиусы сферических зеркал и расстояние между ними

Наша основная цель – вывод критерия устойчивости лазерного резонатора. По трем числам – радиусам зеркал R_1 и R_2 и расстоянию L между их вершинами – мы должны сказать, будет ли такой резонатор устойчивым или нет. Мы будем рассматривать только плоскую задачу, когда начальный отрезок светового луча, а значит, и вся его траектория лежат в одной плоскости с осью резонатора. Из всей оптики и всей математики для решения этой задачи нам понадобятся только формула сферического зеркала и квадратное уравнение с теоремой Виета.

Эллиптический резонатор

Решение задачи об устойчивости лазерного резонатора начнем с изучения поведения световых лучей в эллиптическом резонаторе.

Внутри эллипса есть две интересные для нас траектории светового луча. Это траектории, идущие вдоль осей эллипса, одна – вдоль большой и другая – вдоль малой оси. И если мы вырежем из эллипса две малые дуги на концах одной из осей (рис.2), то получим лазерный резонатор.

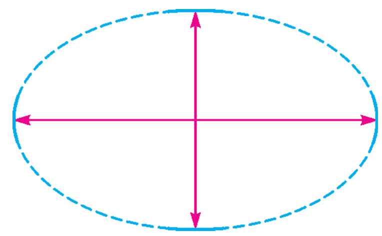


Рис.2. Из эллипса можно вырезать два лазерных резонатора

У эллипса есть много разных определений. Мы занимаемся оптикой, и для нас полезнее всего будет такое, оптическое, определение: *эллипсом с фокусами F_1 и F_2 называется такая кривая, что все лучи, выходящие из одного фокуса, после отражения от нее собираются в другом фокусе (рис.3).*

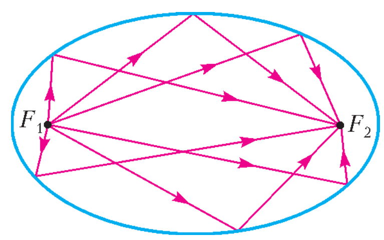


Рис.3. Все лучи, выходящие из одного фокуса, после отражения собираются в другом фокусе

Обычно длину большой оси эллипса обозначают $2a$, длину малой оси – $2b$. Фокусы эллипса находятся на его большой оси, они удалены от центра эллипса на расстояние $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Траектория, проходящая через фокусы. Кроме траекторий, идущих вдоль большой и малой осей эллипса, есть еще одна, для построения которой не требуется никаких вычислений. Это траектория, проходящая через фокусы эллипса. Если эллипс аккуратно нарисован и отмечены его фокусы, то кроме линейки и карандаша ничего больше не надо.

Из нижней вершины эллипса через правый фокус запустим световой луч. Из оптического определения эллипса следует, что после отражения луч пройдет через левый фокус, после следующего отражения –

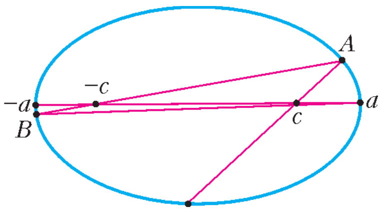


Рис.4. С каждым отражением траектория, проходящая через фокусы, все сильнее прижимается к большой оси

через правый фокус и так далее (рис. 4). При этом очевидно, что траектория будет приближаться к большой оси эллипса. Несложно даже оценить эту скорость приближения.

Обозначим две последовательные точки отражения через A и B. На большой оси введем систему координат с началом в центре эллипса. Тогда концы большой оси будут иметь координаты $\pm a$, а фокусы – координаты $\pm c$. Рассмотрим два треугольника: треугольник с вершинами $-c$, a, A и треугольник с вершинами $-c$, $-a$, B. Они почти что подобны, и в качестве коэффициента подобия разумно взять отношение их горизонтальных сторон:

$$k = \frac{a+c}{a-c}.$$

Эту величину и можно считать скоростью приближения траектории светового луча к большой оси – конец каждого отрезка траектории находится примерно в k раз ближе к оси, чем его начало. Для эллипса, изображенного на рисунке 4, отношение $a : c = 5 : 3$, поэтому $k = 4$. Можно сказать, что для этого эллипса после каждого отражения траектория становится в 4 раза ближе к оси.

Притяжение или отталкивание? Мы описали траекторию светового луча, проходящую через фокусы, как притягивающуюся к большой оси, но можно взглянуть на нее и с другого конца. Давайте повторим наш мысленный эксперимент и снова запустим луч из нижней вершины эллипса через правый фокус. Проследим за траекторией на протяжении большого числа отражений – луч все время будет притягиваться к большой оси. А затем в некоторый момент изменим направление светового луча на обратное. Теперь луч пойдет по той же самой траектории, но в противоположном направлении. При этом он, конечно, будет удаляться от большой оси – отталкиваться от нее.

Итак, на самом деле *вблизи большой оси эллипса существуют два типа траекторий светового луча: одни лучи притягиваются к большой оси, другие отталкиваются от нее.*

Компьютерный парадокс. Разумеется, мы пока не запускали реальный световой луч, а траектория, изображенная на рисунке 4, была построена на компьютере. Давайте повторим наш компьютерный эксперимент, но увеличим число отражений, например, до восьми (рис.5). На этот раз мы взяли эллипс с осями $a = 5$ и $b = 3$. Его фокус находится на расстоянии $c = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ от центра эллипса, а скорость прижатия к оси равна $k = (5+4)/(5-4) = 9$ – каждая следующая точка отражения в 9 раз ближе к большой оси, чем предыдущая. Мы еще можем различить первую и вторую точки отражения, остальные практически сливаются с концами большой оси.

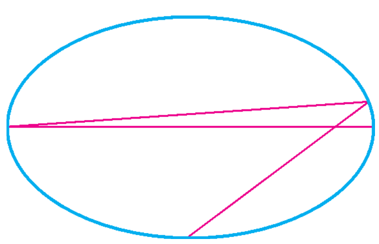


Рис.5. После 8 отражений луч практически прижат к большой оси

Продолжим следить за траекторией. Казалось бы, картина не должна меняться – траектория все сильнее и сильнее должна приближаться к оси и, поскольку на рисунке 5 она практически слилась с осью, ничего нового мы уже наблюдать не можем. Но тут нас ожидает сюрприз: после 17 отражений траектория оказывается отброшенной от большой оси (рис.6). Геометрия и построение траектории с помощью линейки говорят нам об одном, а компьютерный эксперимент убеждает в обратном!

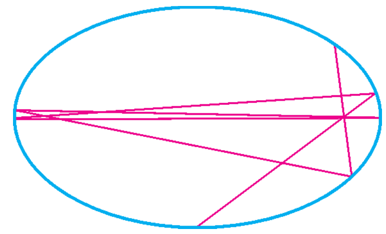


Рис.6. После 17 отражений траектория луча отброшена от большой оси

Прежде чем попытаться разобраться с этим парадоксальным явлением, обратим внимание на то, что и после отклонения от оси траектория продолжает проходить через фокусы. Поэтому следует ожидать, что через некоторое время она опять прижмется к большой оси, затем ее снова отбросит оттуда, и такие биения будут продолжаться. Рисунок 7 показывает, что так оно и происходит.

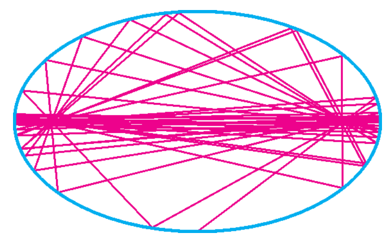


Рис.7. После 165 отражений биения не прекращаются

Разрешение парадокса. Конечно, геометрия гарантирует нам абсолютную точность умозаключений и, конечно, компьютерные вычисления имеют ограниченную точность. Ошибки округления имеют прямое отношение к нашей задаче. На компьютере мы можем регулировать точность вычислений, и с увеличением точности первый отход траектории от большой оси наступает позже. Но свою роль играет и геометрия эллиптического бильярда – она усиливает эти ошибки округления в геометрической прогрессии.

И все дело тут в фокусах эллипса. Именно они гарантируют наличие притягивающихся и отталкивающихся траекторий светового луча, проходящих вблизи большой оси. Мы видели, что луч, запущенный из нижней вершины эллипса и проходящий через фокусы, находится на притягивающейся траектории. При достаточном приближении к оси за счет ошибок округления происходит «пересадка» светового луча на отталкивающуюся траекторию, его отклонение от оси возрастает в геометрической прогрессии, и он отбрасывается оттуда.

Неустойчивость траектории, идущей вдоль большой оси. Такое поведение луча характерно для любой

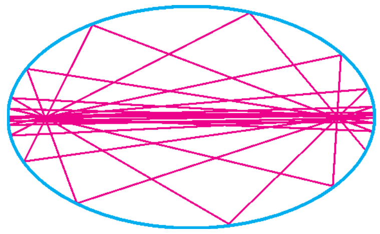


Рис.8. Световой луч запущен из левой вершины эллипса под малым углом к большой оси

траектории, идущей вблизи большой оси. Можно сказать, что каждая такая траектория является «смесью» отталкивающейся и притягивающейся траекторий. Отталкивающая компонента будет возрастать, и, значит, в какой-то момент траекторию обязательно должно отбросить от оси. На рисунке 8 изображена траектория светового луча, выходящего из левой вершины эллипса под углом 0,001 радиана к горизонтали. Видно, что эта траектория того же типа, что и на рисунке 7.

Итак, периодическая траектория, идущая вдоль большой оси, неустойчива. При малейшем начальном отклонении по высоте и по углу траектория после некоторого числа отражений обязательно сильно отклонится от оси.

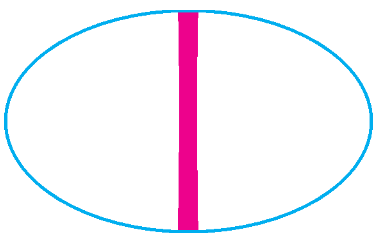


Рис.9. Траектория, идущая вблизи малой оси, после 1000 отражений

Устойчивость траектории, идущей вдоль малой оси. Напротив, траектория, идущая вблизи малой оси, все время остается близкой к этой оси. На рисунке 9 приведен такой пример. Световой луч был запущен из нижней вершины эллипса с отклонением от вертикали в 0,035 радиан, траектория наблюдалась на протяжении 1000 отражений.

От эллиптического резонатора – к лазерному

Подведем предварительные итоги. Световые лучи, проходящие вблизи большой оси и вблизи малой оси эллиптического резонатора, демонстрируют различное поведение. Если из эллипса вырезать лазерный резонатор, состоящий из дуг на концах большой оси, то такой резонатор будет неустойчивым. Наоборот, резонатор, состоящий из дуг на концах малой оси, – устойчивый. Неустойчивость траектории, идущей вдоль большой оси эллипса, вызвана наличием двух фокусов, лежащих на этой оси, и вытекающим отсюда наличием притягивающихся и отталкивающихся траекторий, проходящих вблизи оси.

Мы убедимся, что описанный механизм неустойчивости будет работать и в случае лазерного резонатора. Но сначала – несколько слов о параксиальных лучах и о том, как они отражаются от сферического зеркала.

Формула сферического зеркала. В геометрической оптике есть еще один полезный принцип, который звучит следующим образом: *все значительно упрощается, если иметь дело с параксиальными лучами*. В применении к сферическому зеркалу или к лазерному резонатору параксиальными называются лучи, проходящие вблизи оси зеркала или резонатора.

В качестве примера рассмотрим сферическое зеркало. Широкий пучок световых лучей, выходящих из точки, лежащей на оси сферического зеркала, после отражения не будет сходиться в одной точке (рис.10). По-другому обстоит дело с параксиальными пучками. Пучок параксиальных лучей, выходящих из одной точки, после отражения от сферического зеркала сходится в другой точке (рис.11). Эти точки называются *сопряженными* – каждая из них служит изображением другой при отражении в сферическом зеркале. В этом смысле фокусы эллипса сопряжены одновременно относительно левой и правой дуг на конце большой оси эллипса. На малой же оси эллипса сопряженных точек нет.

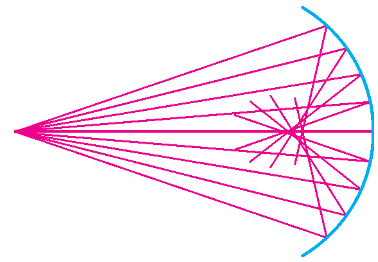


Рис.10. Широкий пучок лучей после отражения от сферического зеркала перестает быть сходящимся

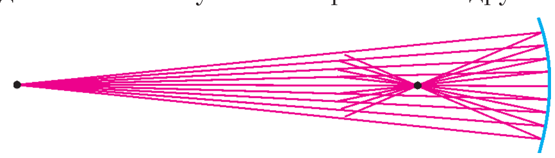


Рис.11. Параксиальный пучок, выходящий из одной точки, после отражения от сферического зеркала сходится в другой точке

Обозначим радиус сферического зеркала через R, а расстояния от сопряженных точек до вершины сферического зеркала – через l_1 и l_2. Формула сферического зеркала, связывает эти три величины:

$$\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}=\frac{2}{R}.$$

Сейчас мы используем эту формулу для вывода критерия устойчивости лазерного резонатора.

Сопряженные точки в резонаторе. Предположим, что на оси лазерного резонатора имеются две точки, сопряженные одновременно относительно левого и правого зеркал (рис.12). Возьмем карандаш и линейку, отметим начальную точку где-то вблизи оси между сопряженными точками x_1 и x_2, например в том месте, где стоит буква L. Из этой точки запустим световой луч через точку x_2. После отражения от правого зеркала он пройдет через точку x_1, отразится от левого зеркала, пройдет через x_2 и так далее. Траектория луча будет притягиваться к оси резонатора. Если обратить направление этой траектории, то она превратится в отталкивающуюся. Опять вблизи оси есть притягивающаяся траектория и есть отталкивающаяся. Каждая траектория, проходящая вблизи оси, является «смесью» притягивающейся и отталкивающейся. Отклонение от оси отталкивающейся компоненты растет, и после нескольких отражений траектория

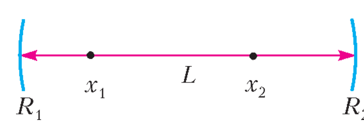


Рис.12. Существуют ли сопряженные точки?

выбрасывается из пространства между зеркалами – резонатор неустойчив.

Вы видите, что эти рассуждения ничем не отличаются от тех, что мы провели раньше для эллипса. Таким образом, вопрос об устойчивости лазерного резонатора сводится к вопросу о существовании двух точек, сопряженных одновременно относительно левого и правого зеркал. Если такие точки существуют, резонатор неустойчивый, если их нет – резонатор устойчивый.

Вывод критерия устойчивости. В качестве нулевой точки на оси резонатора выберем вершину левого зеркала (см. рис.12). Тогда координата вершины правого зеркала будет L, а координаты сопряженных точек так и обозначим x_1 и x_2. Запишем формулу сферического зеркала для сопряженных точек x_1 и x_2 для левого и для правого зеркал:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{2}{R_1},$$

$$\frac{1}{L-x_1}+\frac{1}{L-x_2}=\frac{2}{R_2}.$$

Все зависит от решений этой системы: если решения существуют, то имеются сопряженные точки и резонатор неустойчив; если решения не существуют – резонатор устойчив.

После несложных преобразований система приводится к виду

$$x_1+x_2=\frac{2L(R_2-L)}{R_1+R_2-2L},$$

$$x_1x_2=\frac{LR_1(R_2-L)}{R_1+R_2-2L}.$$

Теперь понятно, почему эта система может иметь решения, а может и не иметь. По теореме Виета ее решения являются корнями квадратного уравнения с коэффициентами, составленными из правых частей системы. Но соответствующее квадратное уравнение может и не иметь корней – все определяется знаком дискриминанта $D=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$. Если он положителен, корни есть; если отрицателен, корней нет. Итак, если $D<0$, резонатор устойчив, в противном случае он неустойчив.

Подставляя вместо x_1+x_2 и x_1x_2 правые части уравнений системы и раскладывая на множители, получим

$$D=\frac{4L(L-R_1)(L-R_2)(L-R_1-R_2)}{(2L-R_1-R_2)^2}.$$

После отбрасывания заведомо положительных сомножителей критерий приобретает такой окончательный вид:

если $(L-R_1)(L-R_2)(L-R_1-R_2)<0$, *резонатор устойчив;*

если $(L-R_1)(L-R_2)(L-R_1-R_2)\geq 0$, *резонатор неустойчив.*

Зафиксируем радиусы зеркал $R_1<R_2$ и будем считать расстояние L переменным. Расставив знаки выражения $(L-R_1)(L-R_2)(L-R_1-R_2)$ на оси L, мы получаем диаграмму, представленную на рисунке 13.

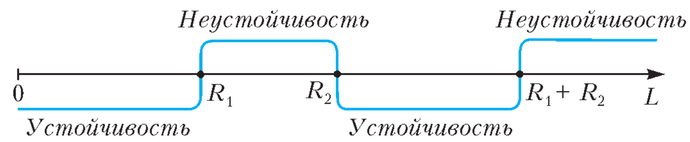


Рис.13. Диаграмма устойчивости и неустойчивости лазерного резонатора

Она же подсказывает и идею следующего эксперимента.

Компьютерный эксперимент. Положим $R_1=40$, $R_2=70$ (условных единиц). Расстояние между зеркалами будем менять от $L=5$ до $L=110$. Световой луч будет стартовать с левого зеркала на высоте $h=1{,}5$ от оси в горизонтальном направлении. Будем следить за лучом до тех пор, пока он не отклонится от оси резонатора на расстояние $h=10$ (для неустойчивого резонатора) или пока не произойдет 1000 отражений (для устойчивого резонатора).

Результат показан на рисунке 14. Поведение светового луча полностью соответствует полученному критерию устойчивости. Как и предсказывает критерий, имеются две зоны устойчивости:

$$L\in(0;\,40)\ \text{ и }\ L\in(70;\,110)$$

и две зоны неустойчивости:

$$L\in[40;\,70]\ \text{ и }\ L\in[110;\,\infty).$$

Наша цель достигнута – получен критерий устойчивости лазерного резонатора, и мы проверили его с помощью компьютера.

Конечно, хотелось бы подтвердить эти результаты еще и с помощью физического эксперимента. Но об этом – в другой раз.

Что еще стоит почитать на эту тему

1. В 1960 году Теодор Мейман создал первый лазер. В 2000 году он написал автобиографическую книгу «Лазерная одиссея» о том, как он это сделал. В 2010 году к пятидесятилетию создания лазера она была переведена на русский язык. Это увлекательная книга, ее стоит прочесть.

2. В книге А.Г.Дорфмана «Оптика конических сечений» (Популярные лекции по математике, вып. 31) рассказано об оптических свойствах эллипса, гиперболы и параболы.

3. Также рекомендуем книгу Г.А.Гальперина и А.Н. Землякова «Математические бильярды» (Библиотечка «Квант», вып. 77).

4. Недавно вышедшая книга С.Л. Табачникова и Д.Б.Фукса «Математический дивертисмент» основана на статьях, опубликованных авторами в журнале «Квант» в период с 1970 по 1990 год, и на многочисленных популярных лекциях, прочитанных ими в СССР и в США. Одна из лекций в этой книге называется «Бильярды в эллипсах и геодезические на эллипсоидах».

Дополнительные вопросы и задачи

1. Оптическое определение эллипса приводит еще к одному парадоксу. Пусть M – произвольная точка, лежащая на эллипсе. По определению эллипса световой луч F_1M, выходящий из одного фокуса, после отражения в точке M должен попасть в другой фокус F_2. Измерим длину всех двузвенных ломаных F_1MF_2. Тогда, во-первых, по принципу Ферма световой луч должен пойти только по кратчайшей из них и

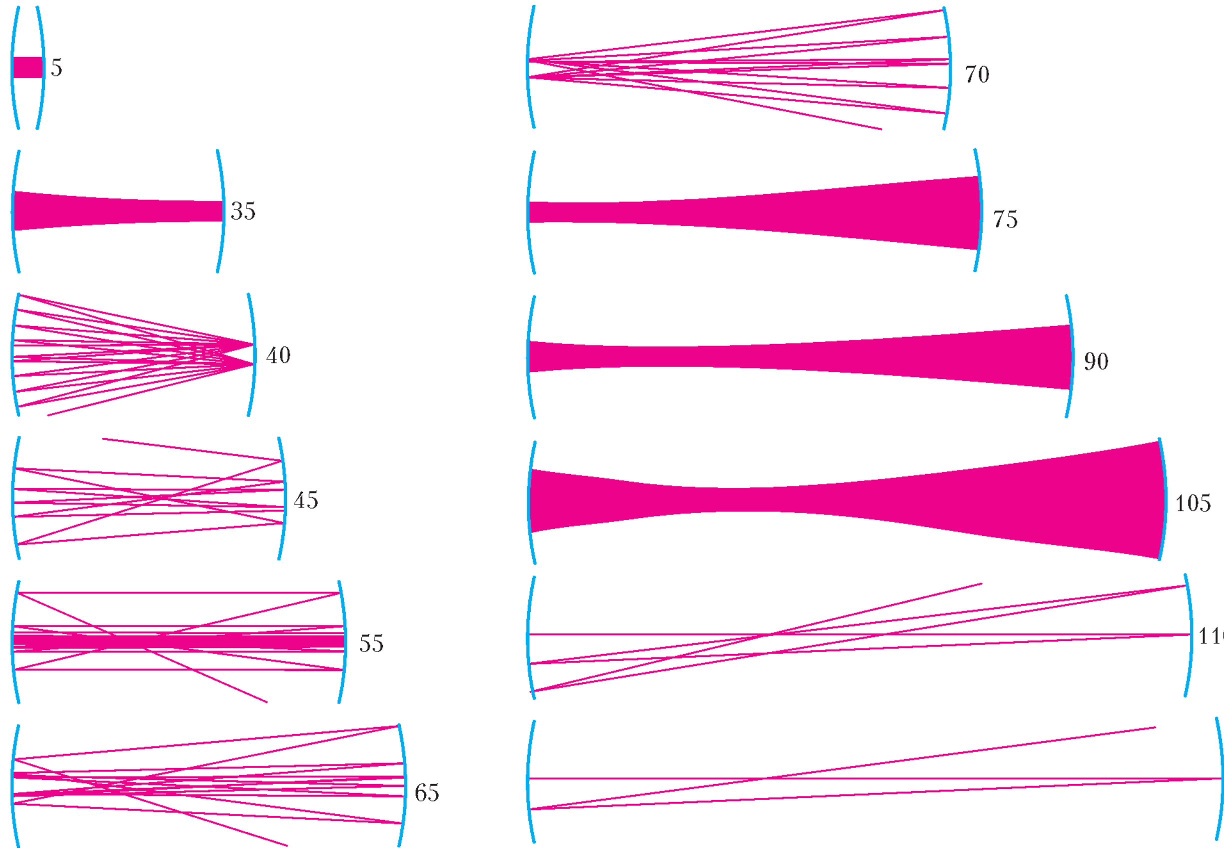


Рис.14. Компьютерный эксперимент, подтверждающий полученный критерий устойчивости

ни по каким другим, и выходит, что кривых, удовлетворяющих оптическому определению эллипса, не должно существовать. Но, во-вторых, все наши компьютерные рисунки с 3-го и по 7-й, на которых углы падения в точности равны углам отражения и траектории проходят через фокусы, подтверждают, что эллипсы все-таки существуют. Попытайтесь разрешить это явное противоречие.

2. Исследуйте поведение светового луча внутри резонатора, ограниченного окружностью.

3. Покажите, что в лазерном резонаторе с сопряженными точками x_1 и x_2, изображенном на рисунке 12, притягивающаяся траектория параксиального светового луча приближается к оси резонатора со скоростью

$$k = \frac{L - x_1}{x_1} \frac{x_2}{L - x_2}.$$

Здесь это означает, что каждая последующая точка отражения на одном и том же зеркале оказывается в k раз ближе к оси, чем предыдущая. Коэффициент k можно записать в виде

$$k = \frac{L - x_1}{L - x_2} : \frac{0 - x_1}{0 - x_2}.$$

Правая часть этой формулы называется двойным отношением точек 0, x_1, x_2, L. (Двойное отношение четырех точек – одно из важнейших понятий в проективной геометрии.)

4. Используя формулу сферического зеркала, докажите, что его фокус, т.е. точка, где сходятся после отражения параксиальные лучи, параллельные оси зеркала, расположен на расстоянии $R/2$ от его вершины.

5. С помощью рисунка 14 попытаемся разобраться, как расположены сопряженные точки неустойчивых лазерных резонаторов с $L \in [R_1; R_2] = [40; 70]$.

а) Пусть расстояние между зеркалами равно радиусу одного из них, т.е. $L = 40$ или $L = 70$. В обоих этих случаях на рисунке отчетливо видны две сопряженные точки, расположенные на одном из зеркал. Они симметричны относительно оси резонатора. Где находятся сопряженные друг относительно друга точки, лежащие на самой оси резонатора?

б) Теперь выделим фрагменты с $L = 45$ и с $L = 65$. Отчетливо видна одна из сопряженных точек на оси. А где находится другая?

в) Рассмотрим случай $L = (R_1 + R_2)/2 = 55$. Такой резонатор называется софокусным, потому что в нем фокусы зеркал совпадают. Этот резонатор нас интересует особо, ибо в этом случае знаменатель дискриминанта D, возникающего при нахождении сопряженных точек, равен 0. На рисунке видно, что одна из сопряженных точек как раз находится в общем фокусе зеркал. Где другая?

6. Эта задача для тех, кто собирается проводить компьютерные эксперименты по построению траекторий светового луча в эллиптическом резонаторе. Для построения такой траектории нужно последовательно вычислять и координаты n-й точки отражения (x_n, y_n), и координаты вектора скорости (u_n, v_n) после этого отражения (считаем, что длина этого вектора постоянна, а при отражении меняется только направление). Убедитесь, что для построенной вами траектории светового луча в эллиптическом резонаторе величина $\frac{u_n x_n}{a^2} + \frac{v_n y_n}{b^2}$ не зависит от номера отражения n. (Такие сохраняющиеся величины называются интегралами соответствующего резонатора или бильярда.)

Быстрее быстрого, или Можно ли обогнать бинарный алгоритм

В.ЖУРАВЛЕВ, П.САМОВОЛ

Чтобы преодолеть путь, нужно сначала преодолеть половину пути, а чтобы преодолеть половину пути, нужно сначала преодолеть половину половины, и так до бесконечности.

Зенон Элейский. Апория «Дихотомия»

Введение

Современный мир немыслим без калькуляторов и компьютеров. Эти средства вычислительной техники могут быстро складывать, умножать, возводить в степень и делать еще массу разнообразнейших операций. Однако быстрое возведение в степень сводится к быстрому умножению, а быстрое умножение – к быстрому сложению. Некоторые алгоритмы, которые позволяют ускорять вычисления, были известны еще древним.

В нашей статье, на примере нескольких задач, мы хотим сравнить различные алгоритмы и посмотреть, какой из них и в каких случаях работает быстрее. Некоторые из этих задач с простыми формулировками в общем случае оказались достаточно крепкими орешками. Мы будем формулировать задачи так, как они нам встречались для частных случаев, с соответствующей ссылкой на источник, и если в источнике не было обобщения, то отдельным пунктом мы будем формулировать соответствующее обобщение. Иногда задачи будут очень похожи и связаны между собой, однако все же у них будут определенные отличия. Для тех, кто не хочет останавливаться на достигнутом, мы предложим несколько новых задач для исследования.

Задачи

Задача 1

а) ([1]) Дан ящик сахарного песка, чашечные весы и гирька в 1 г. Как возможно быстрее отвесить покупателю 1 кг сахара? (Укажите схему уравновешиваний.)

б) Тем, кто предпочитает не метрическую систему мер и весов, мы предлагаем решить эту задачу для гирьки в 1 унцию и 100 фунтов сахара (1 фунт = 12 унций).

в) Как решить общую задачу по взвешиванию n г сахара с помощью чашечных весов и гирьки в 1 г?

Задача 2 (М1086, М.В.Сапир)

С числом разрешено производить две операции: «увеличить вдвое» и «увеличить на 1». За какое наименьшее число операций можно из числа 0 получить: а) 100; б) n, если сумма цифр двоичной записи числа n равна s?

Задача 3 [1] (М240, Э.Г.Белага)

По заданному x значение x^8 можно найти за три арифметических действия: $x^2 = x \cdot x$, $x^4 = x^2 \cdot x^2$, $x^8 = x^4 \cdot x^4$, а x^{15} – за пять действий: первые три – те же самые, затем $x^8 \cdot x^8 = x^{16}$ и $x^{16} : x = x^{15}$. Докажите, что:

а) x^{1000} можно найти за 12 действий (умножений и делений);

б) для любого натурального n значение x^n можно найти не более чем за $\frac{3}{2}\log_2 n + 1$ действий.

Следующая задача была опубликована в 1894 году во французском математическом журнале и до сих пор актуальна.

Задача 4 ([2], Х.Деллак)

Какое наименьшее число операций умножения необходимо для возведения числа x в степень n?

Задача 5

а) (фольклор) Есть два стеклянных шарика и 100-этажный дом. Вы бросаете шарик с разных этажей этого дома, чтобы выяснить, начиная с какого этажа шарик будет разбиваться от падения (например, падая с пятого, уже разбивается, а с четвертого – еще нет). Вопрос: какое минимальное количество бросков понадобится для того, чтобы точно узнать, с какого именно этажа шарики начинают разбиваться? Тот же вопрос в случае n-этажного дома.

б) Предположим, что шариков неограниченное количество. Какое минимальное число испытаний (бросков с этажей дома) наверняка хватит, чтобы определить крепость шарика (т.е. этаж, начиная с которого шарики начинают разбиваться). Тот же вопрос в случае n-этажного дома.

Задача 6

а) (Третья Соросовская олимпиада школьников, задача 10-II-6, В.Протасов)

Имеется 76 карточек, на которых написаны различные числа. Эти карточки разложены на столе по кругу числами вниз. Надо найти какие-нибудь три идущие подряд карточки такие, что число, написанное на средней из этих трех карточек, больше, чем на каждой из двух соседних. Перевернуть можно последовательно не более 10 карточек. Как надо действовать, чтобы наверняка найти три карточки, для которых выполняется указанное условие?

---

[1] В задачах 3 и 4 предполагается, что $x \neq 0$ и $x \neq 1$.

б) ([3], В.Протасов) По кругу растут 199 деревьев, все разного возраста. Можно ли выяснить возраст 12 деревьев так, чтобы наверняка найти дерево, старшее обоих своих соседей (слева и справа)?

в) По кругу растут n деревьев разного возраста, $n \geq 3$. У какого минимального числа деревьев необходимо выяснить возраст, чтобы наверняка найти дерево, старшее обоих своих соседей (слева и справа)?

Обсуждение задач

В каждой из этих задач каждому натуральному числу n мы можем сопоставить соответствующее минимальное число операций (действий, взвешиваний), тем самым получив для каждой задачи свою числовую последовательность. Фактически мы получаем некие алгоритмы для каждой задачи, при этом n-й член последовательности в точности равен числу шагов соответствующего алгоритма. Так, в условии задачи 3 приведены алгоритмы получения x^8 и x^{15}, соответственно, за 3 и за 5 шагов, а поскольку эти алгоритмы являются минимальными (проверьте), то восьмой член этой последовательности равен 3, а 15-й член последовательности равен 5.

Введем обозначения для последовательностей, которые у нас появились:

$w(n)$ – минимальное число взвешиваний, необходимое для получения n г сахара на чашечных весах с гирькой в 1 г (задача 1,в);

$t(n)$ – минимальное число операций, необходимое для получения числа n (задача 2,б);

$m(n)$ – минимальное число действий (умножений и делений), необходимое для возведения числа x в степень n (задача 3);

$l(n)$ – минимальное число умножений, необходимое для возведения числа x в степень n (задача 4);

$b(n)$ – минимальное число бросков в задаче с шариками (задача 5,б).

Выпишем в таблицу несколько начальных значений этих последовательностей:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$w(n)$	1	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5
$t(n)$	1	2	3	3	4	4	5	4	5	5	6	5	6	6	7	5
$m(n)$	0	1	2	2	3	3	4	3	4	4	5	4	5	5	5	4
$l(n)$	0	1	2	2	3	3	4	3	4	4	5	4	5	5	5	4
$b(n)$	1	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5

Как видно из таблицы, у первой последовательности есть явная закономерность: присмотритесь к членам последовательности, стоящим на 2-м, 4-м, 8-м, 16-м местах. Этих данных вполне достаточно, чтобы сформулировать предположение индукции.

Закономерность существует и для второй последовательности, хотя она и не так заметна. Посмотрите, например, на значения членов последовательности, стоящих на нечетных местах, и на значения членов последовательности, стоящих перед ними. Хотя, конечно, для предположения индукции необходимы дополнительные рассуждения.

Сравнив задачи 3 и 4, логично заключить, что операциями умножения и деления мы достигнем результата не медленнее, чем только операциями умножения, т.е. $m(k) \leq l(k)$. Как ни странно, но мы видим, что начальные члены последовательностей $m(n)$ и $l(n)$ совпадают. Тем не менее, существует бесконечно много чисел k, для которых $m(k) < l(k)$. Точные формулы для членов этих последовательностей не найдены, но все-таки можно оценить значения членов последовательности или, как мы говорили, число шагов соответствующего алгоритма.

Что же объединяет все эти задачи? По нашему мнению, ко всем этим задачам применим бинарный метод, или дихотомия[2]. Вероятно, правильно говорить о бинарном методе, когда мы что-то удваиваем, и о дихотомии, когда мы что-то делим пополам.

Рассмотрим пункт б) первой задачи. Очевидно, что мы можем взвесить еще столько же сахара, сколько лежит на одной из чашек весов. Таким образом, взвешиваем с помощью гирьки 1 унцию сахара, затем, убрав гирьку, взвешиваем на весах еще одну унцию сахара и ссыпаем сахар на одну чашу весов. Получаем на одной чаше весов 2 унции сахара, взвешиваем еще две унции сахара, ссыпаем на одну чашу, получаем уже четыре унции сахара. Повторяем эту процедуру, получая последовательно 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 унций сахара. Поскольку 100 фунтов = 1200 унций, а 1200 = 1024 + 128 + 32 + 16, то мы можем управиться не более чем за 30 = 11 + 8 + 6 + 5 взвешиваний. А если бы мы, имея 16 унций сахара, взвесили один раз 16 унций сахара и отсыпали бы их в другую емкость, а затем, взвесив во второй раз 16 унций, пересыпали бы их на другую чашу весов, то получили бы опять 32 унции на чаше весов плюс уже отмеренные 16 унций. Поступая точно так же с 32 унциями, а затем – со 128 унциями, мы управились бы за 14 = 11 + 1 + 1 + 1 взвешиваний. Понятно, что это достаточно быстрый, хотя и не минимальный алгоритм. Все дело в том, что после первого взвешивания мы убрали гирьку и больше ее не использовали.

Использование гирьки в дальнейших взвешиваниях позволяет нам не только обойтись без дополнительной емкости, но и получить минимальный алгоритм взвешивания. Хитрость заключается еще и в том, что гирьку мы можем положить как на одну, так и на

[2] Дихотомия – от греч. διχοτομια. Слово составлено из διχη – надвое и τομη – деление.

другую чашу весов. Таким образом, если мы взвесили k унций сахара, то за следующее взвешивание мы можем получить на другой чаше весов $k-1$, k или $k+1$ унций сахара в зависимости от того, использовали ли мы гирьку, и если использовали, то на какую чашу весов ее положили. Ссыпав сахар вместе, мы получим на этом шаге $2k-1$, $2k$ или $2k+1$ унцию сахара соответственно. Именно из-за этой хитрости значения членов последовательности $w(n)$ от номера 2^q до номера $2^{q+1}-1$ все равны $q+1$. Другими словами,

$$w(n)=[\log_2 n]+1,$$

где $[x]$ – целая часть числа x. Мы оставляем читателю провести несложное доказательство этого факта при помощи метода математической индукции. Поскольку $2^{10}=1024<1200<2047=2^{11}-1$, то минимальное число взвешиваний для 100 фунтов сахара равно 11.

Посмотрим на вторую задачу через призму первой. Во-первых, нетрудно понять, что $t(2^q)=q+1$. Во-вторых, по условию из числа k на следующем шаге мы можем получить либо $k+1$, либо $2k$. На этом сходство с первой задачей вроде бы заканчивается.

Попробуем все-таки решить пример. Будем действовать с конца. Применим к полученному на каком-то шаге числу операции, обратные к имеющимся в условии, т.е. будем делить на 2 и вычитать 1. Мы легко построим цепочку:

$$100\xrightarrow{1/2}50\xrightarrow{1/2}25\xrightarrow{-1}24\xrightarrow{1/2}$$

$$12\xrightarrow{1/2}6\xrightarrow{1/2}3\xrightarrow{-1}2\xrightarrow{1/2}1\xrightarrow{-1}0.$$

Теперь остается вновь обратить операции, и мы получим искомую минимальную цепочку:

$$0\xrightarrow{+1}1\xrightarrow{\times2}2\xrightarrow{+1}3\xrightarrow{\times2}6\xrightarrow{\times2}12$$

$$12\xrightarrow{\times2}24\xrightarrow{+1}25\xrightarrow{\times2}50\xrightarrow{\times2}100.\ (*)$$

Вот он, бинарный метод, в действии!

Понятно, что если мы действуем с конца и у нас получается нечетное число, то мы можем только вычесть 1. Если же мы получаем четное число, то, раз мы ищем минимальную цепочку, нам необходимо делить на 2, поскольку при вычитании единицы число шагов будет больше. Строгое доказательство этого факта также можно провести методом математической индукции.

Однако во второй задаче нас интересует подсказка, которая фигурирует в самом условии задачи, а именно фраза «сумма цифр двоичной записи числа n». Дело в том, что не только двоичная запись числа, но и параметр «сумма цифр двоичной записи» играют одну из ключевых ролей не только в этой, но и в следующих задачах. Но об этом чуть позже.

В первых двух задачах мы умножали на 2, добавляли или вычитали 1, а в третьей и четвертой задаче мы возводим числа в степень. Неужели существует связь между этими задачами? Да: дело в том, что основание степени мы нигде не используем, и все операции происходят с показателями.

Так, пример получения из x значения x^8 из задачи 3 аналогичен получению из 1 числа 8 при помощи удвоения. Рассмотрим построенную выше цепочку $(*)$, начиная с 1. Мы получим следующий быстрый алгоритм возведения в 100-ю степень:

$$x\cdot x=x^2,\ x^2\cdot x=x^3,\ x^3\cdot x^3=x^6,\ x^6\cdot x^6=x^{12},$$

$$x^{12}\cdot x^{12}=x^{24},\ x^{24}\cdot x=x^{25},\ x^{25}\cdot x^{25}=x^{50},$$

$$x^{50}\cdot x^{50}=x^{100}.$$

Казалось бы, за исключением «сдвига» (в задаче 2 операции начинаются с 0, а в задачах 3 и 4 операции начинаются с 1), мы имеем нужный нам алгоритм для решения задачи 4. Чтобы устранить «сдвиг», достаточно рассмотреть последовательность $t(n)-1$, соответствующий алгоритм которой ровно на один шаг короче, чем у последовательности $t(n)$. Для начальных значений нужно вычесть в соответствующей строке таблицы по 1 из каждой клетки этой строки. Чтобы увидеть разницу между задачами, посмотрим, как получить из x значение x^{15}.

Бинарный метод нам дает

$$15\xrightarrow{-1}14\xrightarrow{1/2}7\xrightarrow{-1}6\xrightarrow{1/2}3$$

$$3\xrightarrow{-1}2\xrightarrow{1/2}1 \text{ и обратно}$$

$$1\xrightarrow{\times2}2\xrightarrow{+1}3\xrightarrow{\times2}6\xrightarrow{+1}7\xrightarrow{\times2}14$$

$$14\xrightarrow{+1}15 \text{ – всего 6 шагов.}$$

В терминах возведения в степень имеем следующий быстрый алгоритм:

$$x\cdot x=x^2,\ x^2\cdot x=x^3,\ x^3\cdot x^3=x^6,\ x^6\cdot x=x^7,$$

$$x^7\cdot x^7=x^{14},\ x^{14}\cdot x=x^{15}.$$

Но мы можем пойти и по-другому, а именно

так: $x\cdot x=x^2$, $x^2\cdot x=x^3$, $x^3\cdot x^3=x^6$, $x^6\cdot x^6=x^{12}$, $x^{12}\cdot x^3=x^{15}$;

или так: $x\cdot x=x^2$, $x^2\cdot x=x^3$, $x^3\cdot x^2=x^5$, $x^5\cdot x^5=x^{10}$, $x^{10}\cdot x^5=x^{15}$.

Эти алгоритмы состоят из 5 шагов! Отметим, что мы получили x^{15} за 5 шагов только одними умножениями без деления (сравните с примером задачи 3). Следовательно, бинарный метод является *быстрым*, но не всегда *минимальным* алгоритмом.

Искушенный читатель отметит, что, несмотря на сходство задачи 2 с задачами 3 и 4, между ними есть важное, хотя и не заметное на первый взгляд отличие. Это отличие легко понять любому школьнику, знакомому с программированием. Ведь в задаче 2 мы не запоминаем промежуточные результаты вычислений, а в задачах 3 и 4 промежуточные результаты вычислений используются нами неоднократно. Поэтому можно сказать, что уменьшение количества операций при использовании соответствующих алгоритмов в задачах 3 и 4 достигается за счет использования большей памяти.

В предыдущем примере для быстрого возведения в степень мы применили так называемый *метод множителей*. Обе короткие цепочки из примера построены исходя из того, что $3\cdot5=5\cdot3=15$. Если вспомнить свойство степеней $x^{mk}=(x^m)^k=(x^k)^m$, то становится понятным второй алгоритм построения цепочек. Если мы имеем разложение на отличные от 1 множители $n = mk$, то сначала мы находим x^m, а затем возводим результат в степень k. Если же n – простое число, то мы таким способом находим x^{n-1} и на последнем шаге умножаем на x. В зависимости от n, лучшим оказывается то один, то другой метод. Оба эти алгоритма могут быть «модернизированы», и, конечно, их можно скомбинировать. Известен и еще один метод, но об этом чуть ниже.

В настоящее время в общем виде задача нахождения минимального алгоритма для быстрого возведения в степень не решена и вполне может рассматриваться как задача для серьезного исследования. В то же время, разными математиками получен ряд результатов, которые мы хотим сообщить и которые могут рассматриваться как самостоятельные задачи и упражнения, поскольку их решение вполне по силам школьникам и студентам.

Как мы уже говорили выше, основание степени нигде не используется, поэтому мы можем переформулировать задачи 3 и 4 в терминах сложения и вычитания (умножение на 2 – это прибавление к числу самого себя). Вот что получится.

1) Калькулятор может только складывать числа, имеющиеся в его памяти. Первоначально в памяти калькулятора забита 1 (единица), количество ячеек памяти не ограничено. Спрашивается, за какое минимальное число операций из 1 можно получить n?

2) Калькулятор может складывать или вычитать числа, имеющиеся в его памяти. Первоначально в памяти калькулятора забита 1 (единица), количество ячеек памяти не ограничено. Спрашивается, за какое минимальное число операций из 1 можно получить n?

Отметим, что если задачу 2 тоже переформулировать на языке калькуляторов, то у такого калькулятора будет всего две ячейки памяти, в одну из которых всегда забита 1.

Упражнения

1 ([4], Н. Агаханов). Число, написанное на доске, каждую минуту либо удваивается, либо из него вычитается единица. После нескольких таких операций из числа 1 было получено число 2002. Докажите, что в некоторый момент на доске было записано число, содержащее в своей записи цифру 3.

2 [5]. Компьютерная программа преобразует набор из натуральных чисел по следующему правилу: каждое четное число делится на два, а из каждого нечетного числа вычитается единица. Докажите, что если начальный набор состоял из пяти последовательных натуральных чисел, то после двух преобразований в нем появятся хотя бы два равных числа.

Однако вернемся к двоичной записи числа n. Пусть

$$n = b_q \cdot 2^q + b_{q-1}\cdot 2^{q-1}+\ldots+b_1\cdot 2+b_0,$$

$$\text{где } b_q = 1,\ b_i \in \{0,1\}.$$

Обозначим через $\lambda(n) = q$ уменьшенную на 1 длину двоичной записи числа n, а через $\nu(n)$ – сумму цифр, т.е. количество тех чисел b_i, которые равны 1. Понятно, что $\lambda(n) = q = [\log_2 n]$. Теперь мы можем легко получить ответ к задаче 2 для любого числа n, а именно с учетом «сдвига»:

$$t(n) = \lambda(n) + \nu(n) = [\log_2 n] + \nu(n).$$

Как мы отмечали, задача 4 оказалась в общем случае «крепким орешком», и вокруг нее образовалось серьезное поле для исследований. Мы приведем без доказательства несколько теорем, которые показывают, как развивались и усовершенствовались быстрые алгоритмы. Теоремы и их доказательства, а также некоторые упражнения можно найти в [7]. Для начала все же посмотрим на несколько частных примеров.

Если $\nu(n) = 1$, то n является степенью двойки. Поскольку $l(n)$ – это число шагов в минимальном алгоритме, то $l(2^q) = q$. Это равенство доказывается по индукции и с учетом сдвига согласуется с приведенным ранее равенством $t(2^q) = q+1$. Если $\nu(n) = 2$, т.е. n является суммой двух различных степеней двойки, то $l(n) = l(2^q + 2^r) = q+1$ для $q > r$.

Если $\nu(n) = 3$, т.е. n является суммой трех различных степеней двойки, то выполняется следующая

Теорема 1. $l(2^q + 2^r + 2^p) = q+2$ *для* $q > r > p$.

Доказательство этой теоремы не лежит на поверхности и требует детального рассмотрения возможных вариантов.

Из этих примеров наглядно видно, что бинарный метод является оптимальным, когда $\nu(n) \le 3$. Более того, непосредственное рассмотрение свойств бинарного метода позволяет нам получить оценки на $l(n)$ для общего случая. Эти оценки сформулированы в следующей теореме.

Теорема 2. *Выполняются неравенства* $\lambda(n) \le l(n) \le \lambda(n) + \nu(n) - 1$.

Доказательство теоремы 2 вполне элементарно, и мы оставляем его читателям в качестве упражнения.

Упражнение 3. Докажите неравенство $l(n) \ge \log_2 n$ и приведите примеры, когда оно обращается в равенство.

Мы уже видели, что при m = 15 бинарный метод не оптимален. Нетрудно проверить, что он не оптимален для m = 23 или m = 39 (в этих частных случаях $\nu(n) = 4$). Исследования показывают, что при возрастании числа $\nu(n)$ количество возможных случаев существенно увеличивается. Это иллюстрирует следующая теорема, в которой рассмотрен случай $\nu(n) = 4$, еще поддающийся разумному описанию.

Теорема 3 (Д.Кнут). *Если* $\nu(n) \ge 4$, *то* $\lambda(n) + 3 \le l(n)$ *за исключением следующих четырех случаев а)–г), для которых* $l(2^q + 2^r + 2^p + 2^t) = q+2$, *где* $q > r > p > t$:

а) $q - r = p - t$ *(пример: n = 15);*
б) $q - r = p - t + 1$ *(пример: n = 23);*
в) $q - r = 3$, $p - t = 1$ *(пример: n = 39);*
г) $q - r = 5$, $r - p = p - t = 1$ *(пример: n = 135).*

Улучшение верхней оценки, полученной в теореме 2, достигается за счет рассмотрения m-арного метода. Мы вскользь упоминали, что такой алгоритм является «модернизацией» бинарного метода.

Теорема 4 (А.Брауэр). *Для всех* $k \geq 1$ *выполняется неравенство* $l(n) \leq (1+1/k)(\lambda(n)+1)+2^k$.

Упражнение 4. Используя оценки, полученные в теоремах 2 и 4, докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l(n)}{\log_2 n} = 1 .$$

Если рассмотреть метод множителей, то мы получим следующую теорему.

Теорема 5 (Де Жонкиэр). *Выполняется неравенство* $l(nm) \leq l(n)+l(m)$.

Надеемся, что доказательство этой теоремы не составит труда для читателей. Оно следует из построения разобранного выше примера.

Если взять частный случай предыдущей теоремы для $m = 2$, то нетрудно видеть, что $l(2n) \leq l(n)+1$. А если немного покопаться с числами, то кажется, что здесь на самом деле выполнено равенство, ведь интуитивно ясно, что быстрее удвоения ничего быть не может. Тем не менее, это не так! Существуют такие числа, что $l(2n) = l(n)$. Более того, как ни парадоксально, но совсем недавно (см. [8]) с помощью компьютеров было вычислено, что для n = 375494703 выполнено $34 = l(2n) < l(n) = 35$. Существование таких чисел n и m, что $l(nm) < l(n)$, вы можете попытаться проверить сами, решив упражнение 5.

Упражнения

5. Проверьте, что для чисел $n = \frac{2^{13}+1}{3} = 2731$ и m = 3 выполнено неравенство $l(nm) < l(n)$.

6. Приведите примеры, подтверждающие, что иногда метод множителей лучше, чем бинарный метод, а иногда наоборот. Покажите, что таких примеров бесконечно много.

Возможность скомбинировать бинарный метод и метод множителей применяется в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 6 (В.Хансен). $l(2^q+km) \leq q+\nu(k)+\nu(m)-1$, *если* $\lambda(k)+\lambda(m) \leq q$.

Мы упоминали еще об одном методе. Визуально этот метод отличается от бинарного метода и метода множителей. Связано это с построением графов, являющихся деревьями. Тем не менее, такие построения нетрудно программируются. Можно сказать, что эти деревья приносят неплохие плоды.

Построим дерево, основанное на бинарном алгоритме. Принцип построения этого дерева объясним, как и ранее, «с конца». Отметим числами от 1 до n различные точки на плоскости; они будут вершинами графа. Теперь возьмем любую точку k, $k > 1$, и соединим ее ребром с точкой $k - 1$, если k нечетное, и с точкой $k/2$, если k четное. В результате таких построений мы получаем граф, являющийся деревом. На рисунке 1 показано дерево для n = 32. Красным цветом мы показали путь на дереве, соответствующий одной из рассмотренных выше цепочек:

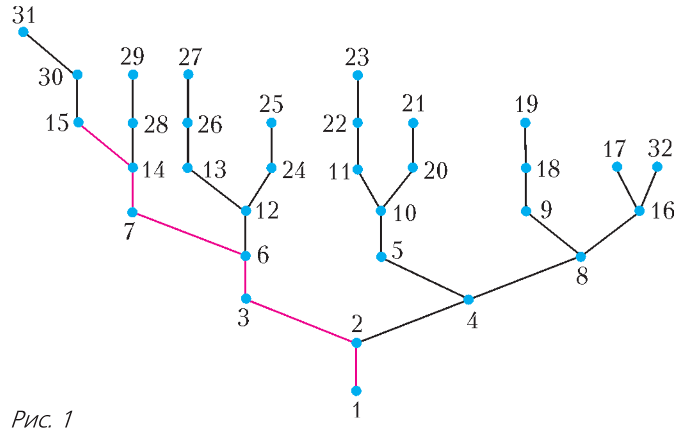


Рис. 1

$$15 \xrightarrow{-1} 14 \xrightarrow{1/2} 7 \xrightarrow{-1} 6 \xrightarrow{1/2} 3 \xrightarrow{-1} 2$$

$$2 \xrightarrow{1/2} 1 .$$

Построим также другое дерево немного иной формы (рис.2). Поуровневый алгоритм построения этого дерева будет сложнее. Первый уровень начинается с 1. Предположим, что мы построили k-й уровень дерева, построим теперь $(k+1)$-й уровень. Будем брать вершины по очереди, начиная с вершины с самым *большим* номером и далее по убыванию. Пусть мы дошли по очереди до вершины с номером m на k-м уровне, и при этом последовательность вершин $m = a_{k-1},\ldots,a_2,a_1,1$ будет обозначать путь от нашей вершины до корня дерева (вершины с номером 1). Теперь с $(k+1)$-го уровня присоединим к вершине с номером m только те вершины с номерами $2m = m+a_{k-1},\ldots,m+a_2,m+a_1,m+1$, которых еще нет в дереве.

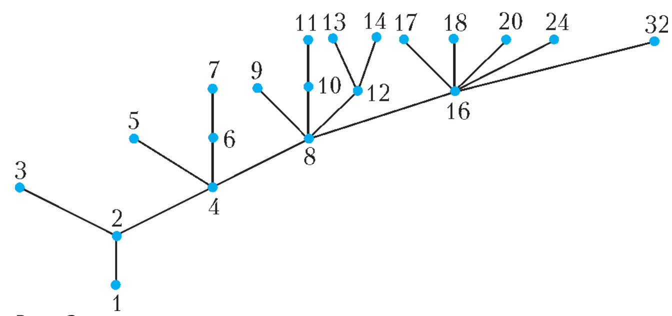


Рис. 2

Нетрудно видеть, что это дерево дает еще один метод возведения в степень. Заметим, что длина цепочки по этому алгоритму совпадает с длиной цепочки, вычисленной бинарным методом. Попробуйте доказать это.

Оказывается, что небольшие изменения в построении дерева приводят к методу, который работает быстрее бинарного метода и метода множителей на большом массиве чисел. Так, например, первое значение, на котором метод множителей быстрее метода дерева степеней, это n = 19879. Понятно, что такие вычисления могут быть проделаны только благодаря компьютерам.

Сформулируем алгоритм построения дерева для *метода дерева степеней.* Будем рассматривать это дерево как настоящие математики, т.е. перевернем его корнем вверх. Итак, как и прежде, первый уровень начинается с 1. Если k-й уровень дерева построен, то будем строить $(k+1)$-й уровень дерева. Вершины с k-го уровня берем по очереди, начиная с вершины с *наименьшим* номером и далее по возрастанию номеров. Пусть мы дошли по очереди до вершины с номером m на k-м уровне, и при этом последовательность вершин $m = a_{k-1}, \ldots, a_2, a_1, 1$ будет обозначать путь от корня дерева (вершины с номером 1) до нашей вершины. Теперь с $(k+1)$-го уровня присоединим к вершине с номером m только те вершины с номерами $2m = m + a_{k-1}, \ldots, m + a_2, m + a_1, m + 1$, которых еще нет в дереве. На рисунке 3 построено дерево степеней до 7-го уровня.

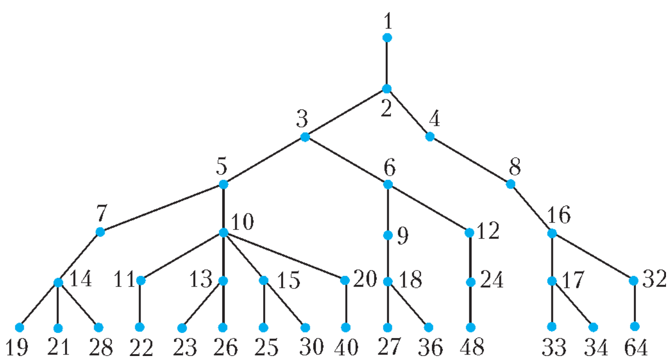


Рис. 3

Наличие таких разнообразных алгоритмов и применение комбинированных методов пока не дало окончательного решения этой, казалось бы простой, задачи. И даже в частном случае существует нерешенная *гипотеза Шольца–Брауэра*, утверждающая, что

$$l\left(2^n - 1\right) \le n - 1 + l(n).$$

Поскольку число $2^n - 1$ имеет максимальное количество единиц в двоичном представлении, то этот частный случай интересен тем, что является наихудшим случаем для бинарного метода. Вычисления на компьютерах показали, что для $1 \le n \le 64$ имеет место равенство (см. [7]).

Рассмотренные выше алгоритмы можно представить в наглядных терминах аддитивных цепочек. Однако мы не будем делать этого в рамках этой статьи. Пытливый читатель найдет информацию, относящуюся к аддитивным цепочкам, в литературе, приведенной ниже (см. [7–10]).

В нашем обсуждении мы практически не коснулись задачи 3. Дело в том, что в большинстве случаев при построении оптимального алгоритма нахождения степени при помощи умножений и делений можно построить алгоритм, который справляется только умножениями за то же число шагов. Выше мы построили пример без делений для получения x^{15} за 5 шагов. Предлагаем читателю построить 12-шаговый алгоритм получения x^{1000} с помощью умножения и деления и 12-шаговый алгоритм получения x^{1000} только с помощью умножения. Оценка, приведенная в пункте б) этой задачи, гораздо более слабая, чем оценка в теореме 4. Справедливости ради, стоит отметить, что существуют примеры, когда при помощи умножений и делений возведение в степень получается за меньшее число шагов, чем когда используются только умножения. Это, например, уже упоминавшееся в гипотезе Шольца–Брауэра число $2^n - 1$. С помощью умножений и делений получить число можно не более чем за $n + 1$ шаг.

Упражнения

7. Приведите еще примеры, когда при помощи умножений и делений возведение в степень получается за меньшее число шагов, чем когда используются только умножения.

8 ([5], Н. Агаханов). На доске написаны многочлены $x + 1$ и $x^2 + 1$. Разрешается дописывать на доску многочлен f, равный сумме, разности или произведению любых двух различных из написанных многочленов, если многочлен f не был написан на доске ранее. Можно ли написать на доске многочлен $x^{2006} + 1$?

Отвлечемся от темы степеней и посмотрим на задачу 5. Начнем с конца, т.е. с пункта б). В этом месте читатель должен был бы воскликнуть: «Бинарный метод!» Предлагаем читателю справиться с решением этого пункта, а точнее, найти полную аналогию с задачей 1 про гирьку и сахарный песок.

Пункт а) готовит нам сюрприз. Мы, конечно, можем применить бинарный метод и сбросить стеклянный шарик с 50-го этажа. И в случае если он разобьется, т.е. при неблагоприятном исходе, мы будем вынуждены провести еще 49 проверок. Мы не можем больше рисковать оставшимся шариком и применять бинарный метод дальше, поэтому придется бросать оставшийся шарик с 1-го этажа, со 2-го и так далее – возможно, до 49-го этажа. Выходит, при самом неблагоприятном исходе мы вынуждены затратить 50 попыток. Естественно, возникают подозрения в оптимальности такого алгоритма.

Любитель десятичной системы счисления предложит сбрасывать первый шарик с 10-го, 20-го, ..., 90-го, 100-го этажей, а вторым шариком проверять оставшийся интервал в девять этажей. Такой алгоритм в самом неблагоприятном случае справится с поставленной задачей уже за 19 попыток. И хотя получился не оптимальный алгоритм, но стало понятно, что необходимо делать.

На самом деле, ответ для здания в 100 этажей – 14 попыток. Предоставим читателю в качестве упражнения найти соответствующую последовательность этажей. Остается сделать небольшую ремарку: ответ, который получился для здания в 100 этажей, подойдет и для зданий высотой в 101–105 этажей.

Варьируя число этажей, число шариков и даже число попыток, мы получим хорошую задачу для исследования, являющуюся обобщением задачи 5.

Упражнения

9. Есть B одинаковых стеклянных шариков и небоскреб. Вы можете бросать шарик с разных этажей небоскреба, чтобы выяснить, начиная с какого этажа шарик начинает разбиваться от падения (например, начиная с пятого уже разбивается, а с четвертого – еще нет). В целях экономии средств вам заранее установлено постоянное число T таких тестов. Укажите оптимальный алгоритм проверки и найдите максимальный номер этажа небоскреба, который можно наверняка проверить.

10 ([6], С.Токарев). Мишень «бегущий кабан» находится в одном из n окошек, расположенных в ряд. Окошки закрыты занавесками так, что для стрелка мишень все время остается невидимой. Чтобы поразить мишень, достаточно выстрелить в окошко, в котором она в момент выстрела находится. Если мишень находится не в самом правом окошке, то сразу после выстрела она перемещается на одно окошко вправо; из самого правого окошка мишень никуда не перемещается. Какое наименьшее число выстрелов нужно сделать, чтобы наверняка поразить мишень?

Что делает задача 6 во всей этой истории, не совсем понятно. Тем не менее, формулировка вопроса «Как надо действовать, чтобы наверняка найти три карточки, для которых выполняется указанное условие?» подразумевает, что мы должны указать некоторый алгоритм действий, который приведет за некоторое количество шагов (не более 10 шагов в пункте а) и не более 12 шагов в пункте б) к требуемому результату.

Сразу отметим, что числа 76 и 199, определяющие количество карточек и деревьев, были подобраны не случайно. Автор задачи построил соответствующий алгоритм нахождения тройки предметов с требуемой упорядоченностью. Тем не менее, эти числа занижены. Мы утверждаем, что даже в случае, когда 89 карточек расположены по кругу, мы сможем найти не более чем за 10 шагов три идущие подряд карточки, удовлетворяющие условиям. Аналогично для случая, когда по кругу стоят 233 дерева: не более чем за 12 шагов нам удастся найти дерево, старшее своих соседей. Читатель, знакомый с последовательностью Фибоначчи, может определить, что 89 – это одиннадцатый член последовательности Фибоначчи, а 233 – это тринадцатый член этой последовательности. Пусть F_m обозначает m-й член последовательности Фибоначчи, где $F_{m+2} = F_{m+1} + F_m$, $F_1 = F_2 = 1$. Вот несколько начальных членов этой последовательности: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ... Теперь видно, что $76 = 21 + 55 = F_8 + F_{10} < F_{11} = 89$ и $199 = 55 + 144 = F_{10} + F_{12} < F_{13} = 233$.

Обозначим через $h(n)$ минимальное число шагов алгоритма, которое необходимо, чтобы наверняка (в самой неблагоприятной ситуации) найти три рядом расположенных предмета (карточек или деревьев), удовлетворяющих условиям задачи 6. Чтобы сразу доказать сформулированные в предыдущем абзаце утверждения, решим следующее упражнение.

Упражнение 11. По кругу растут $n = F_m$ деревьев разного возраста, $n \geq 3$. За один шаг разрешается узнать возраст одного дерева. Постройте алгоритм, позволяющий находить дерево, которое старше обоих своих соседей (слева и справа), не более чем за $m - 1$ шагов. Другими словами, докажите, что $h(F_m) \leq m - 1$.

Обсудим доказательство этого упражнения. Представим деревья точками, расположенными на окружности длины $n = F_m$ в вершинах некоторого правильного n-угольника. Нетрудно заметить, что длина дуги между соседними точками равна 1. Узнав возраст дерева, будем помечать соответствующую точку числом.

Теперь попытаемся избавиться от окружности. На первом шаге узнаем возраст любого дерева и отметим соответствующую точку окружности этим числом. Обозначим это число через a. На втором шаге от точки, помеченной числом a, пройдем по окружности по часовой стрелке[3] расстояние F_{m-1}. Мы попадем в точку, соответствующую некоторому дереву, и узнаем его возраст. Пометим эту точку числом b. Другими словами, длина дуги между точкой, помеченной числом a, и точкой, помеченной числом b, равна F_{m-1}. В точке с меньшим значением разрежем окружность и выпрямим ее в отрезок длины F_m. Окружность исчезла! И мы можем производить наши построения на отрезке целочисленной прямой.

Не теряя общности, можем считать, что $a < b$. Таким образом, мы проводим разрезание окружности в точке, помеченной числом a. Получаем отрезок с расположенными на нем точками (деревьями) через равные расстояния длины 1. Концы отрезка помечены одинаковыми числами, и одна из точек внутри отрезка помечена числом большим, чем числа на концах отрезка. Расстояние от помеченной точки до одного конца отрезка равно F_{m-1}, а расстояние до другого конца отрезка равно $F_{m-2} = F_m - F_{m-1}$.

Теперь нетрудно провести индукционные построения.

Предположение индукции.

Рассмотрим целочисленный отрезок длины F_k со следующими свойствами:

1) концы отрезка помечены числами x, y;

2) внутри отрезка есть точка, помеченная числом z, при этом $x < z$, $y < z$;

3) расстояние от точки, помеченной z, до одного конца отрезка равно F_{k-1}, а до другого конца отрезка равно $F_{k-2} = F_k - F_{k-1}$.

Тогда можно найти дерево, старшее обоих своих соседей, и соответственно помеченную точку, значение которой больше, чем значения соседних точек, не более чем за $k - 3$ шага. (С учетом двух первых шагов для разрезания, общее число шагов для окружности составит $k - 1 = k - 3 + 2$.)

Основание индукции для $n = 3 = F_4$ выполнено. Действительно, в этом случае остается сделать один шаг, узнав значение оставшейся на отрезке точки w (рис.4), при этом если $w < z$, то искомой будет точка z, если $w > z$, то искомой будет точка w.

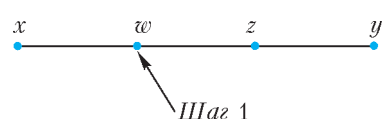


Рис. 4

Допустим теперь, что индукционное предположение выполнено для случая $k = m - 1$, т.е. чтобы отыскать требуемое дерево на отрезке с заданными свойствами длины F_{m-1}, нам нужно не более $m - 4$ шагов. Докажем, что индукционное предположение выполняется для $k = m$. Мы имеем ситуацию,

[3] Это направление выбрано для определенности.

которая изображена на рисунке 5. За один шаг мы проверяем возраст дерева и помечаем числом w точку, разбивающую отрезок AC длины F_{m-1} на части

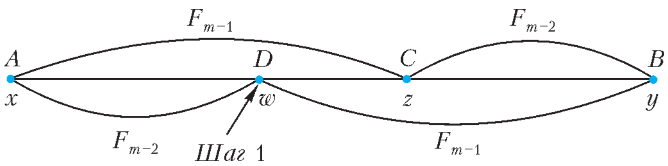


Рис. 5

длины F_{m-2} и $F_{m-3} = F_{m-1} - F_{m-2}$. Если $w < z$, то отрезок DB имеет длину F_{m-1} и для него выполнено индукционное предположение. Если $w > z$, то индукционное предположение выполнено для отрезка AC, также имеющего длину F_{m-1}. При этом мы затрачиваем не более $m - 3 = m - 4 + 1$ шагов.

Итак, методом математической индукции наше утверждение доказано.

Следовательно, с учетом двух первых шагов для разрезания окружности, общее число шагов для определения дерева, старшего своих соседей, составит не более $m - 1 = m - 3 + 2$ шагов.

Упражнение 12. Постройте алгоритм, который находит дерево, старшее своих соседей, для любого n, удовлетворяющего условиям $F_{m-1} < n \le F_m$, не более чем за $m - 1$ шаг. Другими словами, докажите, что $h(n) \le m - 1$.

Как видно из приведенных выше построений, нам удалось получить оценку сверху на минимальное число шагов алгоритма $h(n)$. По всей видимости, если $F_{m-1} < n \le F_m$, то имеет место равенство $h(n) = m - 1$. Тем не менее, в настоящий момент авторам статьи неизвестно доказательство этого факта.

Конечно, кроме алгоритма, основанного на числах Фибоначчи, мы можем предложить и другие алгоритмы для нахождения дерева, которое старше обоих своих соседей.

Еще раз посмотрим на общие принципы построения таких алгоритмов.

Как и ранее, на первых двух шагах мы узнаем возраст двух некоторых деревьев и помечаем соответствующие точки окружности числами. Затем проводим операцию разрезания окружности в точке с меньшим значением и выпрямляем окружность в отрезок.

Пусть на каком-то шаге у нас получился отрезок со следующими свойствами:

– концы отрезка помечены числами a, b;

– внутри отрезка есть точка, помеченная числом c, при этом $a < c$, $b < c$.

Если на следующем шаге нам удастся найти (построить) отрезок с аналогичными свойствами, но меньшей длины, то понятно, что через конечное число таких шагов этот процесс завершится построением отрезка длины 2 и нахождением трех точек (деревьев), удовлетворяющих условию задачи.

Остается выполнить этот шаг. Если длина отрезка $[a;b]$ больше 2, то возьмем один из отрезков $[a;c]$ или $[c;b]$, узнаем возраст дерева и пометим некоторую точку этим числом d. Не теряя общности, предположим, что эта точка лежит на отрезке $[a;c]$. Если $d < c$, то отрезок $[d;b]$ с помеченной точкой c имеет меньшую длину и обладает необходимыми свойствами. Если $d > c$, то необходимыми свойствами обладает отрезок $[a;c]$ с помеченной точкой d.

При таком построении мы можем рассмотреть уже упоминавшийся бинарный алгоритм. И хотя нам не всегда удастся выбирать очередную точку ровно посередине отрезка, в силу того что деревья расположены в целочисленных точках отрезка, мы можем выбирать эту точку как можно ближе к его середине. Мы можем получить и другие пропорциональные алгоритмы, если будем делить отрезок не пополам, а придерживаться какой-то пропорции. Так какой же из этих алгоритмов самый быстрый? Подробный ответ на этот вопрос нам неизвестен.

Наши дальнейшие рассуждения не будут строгим доказательством, а будут представлять некоторую приблизительную схему исследования этого вопроса. Попытаемся оценить скорость действия алгоритмов при самых неблагоприятных условиях. Откуда здесь возникли неблагоприятные условия? Дело в том, что при таких построениях, в зависимости от расположения точки d, длины отрезков $[a;c]$ и $[d;b]$ могут быть разными и поэтому скорость достижения нашей цели также может варьироваться. Понятно, что здесь имеется определенное сходство с задачей 5.

Посмотрим на несколько шагов действия бинарного алгоритма и алгоритма с коэффициентом пропорции k (рис.6). Пусть длина исходного отрезка равна l. Для построения пропорционального алгоритма возьмем

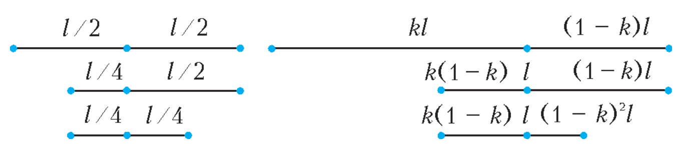


Рис. 6

$k > 1 - k$; при этом должно выполнятся неравенство $kl \le k(1-k)l + (1-k)l$. Такие построения возможны, если $\frac{1}{2} < k \le \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Кажется, что после первого шага бинарный алгоритм действует быстрее, однако посмотрим, что происходит после двух шагов. После двух шагов бинарный алгоритм дает отрезок длины $l/2 = l/4 + l/4$. Пропорциональный алгоритм после двух шагов дает отрезок длины $(1-k)l = k(1-k)l + (1-k)^2 l$. Заметим, что $\left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)l < \frac{l}{2}$. Это означает, что при значениях k, близких к $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, пропорциональный алгоритм будет действовать быстрее бинарного алгоритма. Причем самым быстрым был бы пропорциональный алгоритм золотого сечения. Известно, что наилучшее рациональное приближение к золотому сечению достигается при помощи дробей, числители и знаменатели которых являются последовательными числами Фибоначчи. Если в приведенных рассуждениях мы сделаем поправки на то, что имеем дело с целочисленными точками, то рассмотренный выше алгоритм, основанный на числах Фибоначчи, выглядит вполне закономерно. Повторим, что приведенные выше построения с золотым сечением и числами Фибоначчи являются только некоторой схемой рассуждений и никак не претендуют на строгость.

Конечно, для небольших значений n можно написать соответствующую компьютерную программу, которая с помощью перебора вариантов подтвердит или опровергнет равенство $h(n) = m-1$ при $F_{m-1} < n \le F_m$.

Упражнения

13. Проверьте, что для $n = 8$ бинарный алгоритм приводит к цели за 6 шагов (необходима проверка возраста 6 деревьев), в то время как алгоритм, основанный на числах Фибоначчи, приводит к цели за 5 шагов. Докажите, что при неблагоприятной ситуации знание возраста 4 деревьев недостаточно.

14. У скольких деревьев необходимо определить возраст (сколько нужно шагов) по бинарному алгоритму для $n = 2^m$?

15 ([6], М.Островский). Загадано число от 1 до 144. Разрешается выделить одно подмножество множества чисел от 1 до 144 и спросить, принадлежит ли ему загаданное число. За ответ «да» надо заплатить 2 рубля, за ответ «нет» – 1 рубль. Какая наименьшая сумма денег необходима для того, чтобы наверняка угадать число? (Само число нужно назвать, т.е. 2 рубля в любом случае придется заплатить.)

Задачи для исследования

Мы рассматривали алгоритмы, связанные с числовыми последовательностями. Однако на современных компьютерах устанавливают и графические редакторы. В связи с этим предлагаем вам новые задачи.

Задача 7. Задача о графическом редакторе

Графический редактор на плоскости может выполнять операции копирования следующего вида: 1) скопировать и одновременно отразить фигуру относительно какой-то выбранной оси. 2) скопировать текущую фигуру или фигуру из памяти и параллельно ее сдвинуть. При таких операциях старая фигура остается на месте. Полученные фигуры на плоскости можно сохранить в памяти компьютера. За какое минимальное число операций копирования из исходной фигуры можно получить заданную, если:

а) исходная фигура – квадрат 1×1, заданная фигура – квадрат $n\times n$;

б) исходная фигура – квадрат 1×1, заданная фигура – прямоугольник $n\times m$?

в) исходная фигура – равносторонний треугольник со стороной 1, заданная фигура – треугольник с длиной стороны n;

г) Исследуйте случай, когда исходная фигура – правильный шестиугольник со стороной 1.

Например, из квадрата 1×1 квадрат 2×2 можно получить за две операции так: сначала с помощью симметрии или параллельного переноса получаем доминошку 1×2, затем, аналогично, либо параллельным переносом, либо симметрией относительно длинной стороны получаем квадрат 2×2.

Попробуйте исследовать случай, когда разрешена только операция 1), а операция 2) недоступна.

В случае, когда исходная фигура является квадратом 1×1, мы можем применить результаты, полученные для задач 1–4.

Упражнение 16. Решите задачи 7 а), б) для исходной фигуры – квадрата 1×1.

Случаи треугольника и шестиугольника являются более сложными, и мы оставляем их для исследования.

В следующей задаче мы предлагаем заменить удвоение умножением на какое-то заданное число p. Какой алгоритм будет быстрее: p-арный, метод множителей или метод дерева степеней? Ответ на эту задачу авторам неизвестен.

Задача 8. а) У Пети и Васи есть калькуляторы с двумя операциями. Петин калькулятор умеет:

- умножить число на натуральное число p;
- увеличить число на 1.

Васин калькулятор умеет:

- умножить число на натуральное число q;
- увеличить число на 1.

Известно, что p и q взаимно простые числа, при этом $1 < p < q$. В начальный момент на обоих калькуляторах нули. Можно ли указать все натуральные числа, которые Петя может посчитать за меньшее число операций, чем Вася?

б) Исследуйте задачу для $p = 2$, $q = 3$.

Упражнение 17. Докажите, что существует бесконечно много чисел, которые Васин калькулятор может подсчитать за меньшее число операций, чем Петин калькулятор. Приведите примеры чисел, которые Петин калькулятор может подсчитать за меньшее число операций, чем Васин калькулятор.

Литература

1. *Е.А.Морозова, И.С.Петраков, И.Ф.Скворцов.* Международные математические олимпиады. – М.: Просвещение, 1976. – Задача 105.

2. *E. de Jonquiéres.* Question 49 (H.Dellac). – L'Intermédiaire Math. V.1(20), 1894. – P.162–164.

3. Геометрические олимпиады имени И.Ф.Шарыгина. Составители А.А.Заславский, В.Ю.Протасов, Д.И.Шарыгин. – М.: МЦНМО, 2007. – С.124.

4. *Н.Х.Агаханов, И.И.Богданов, П.А.Кожевников и др.* Математика. Областные олимпиады. – М.: Просвещение, 2010. – Задача 258.

5. *Н.Х.Агаханов, И.И.Богданов, П.А.Кожевников и др.* Математика. Всероссийские олимпиады. – М.: Просвещение, 2008. – Задачи 9.3; 9.6.

6. *Н.Х.Агаханов, И.И.Богданов, П.А.Кожевников и др.* Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2009. Заключительные этапы. – М.: МЦНМО, 2010. – Задачи 344; 160.

7. *Д.Э.Кнут.* Искусство программирования. Т.2, разд.4.6.3.

8. *N.M.Clift.* Calculating optimal addition chains. – Computing. V.91, 2011. – P.265–284.

9. *С.Б.Гашков.* Системы счисления и их применение. – М.: МЦНМО (Библиотека «Математическое просвещение», вып.29), 2004.

10. *С.Б.Гашков.* Задача об аддитивных цепочках и ее обобщения. – «Математическое просвещение», третья серия, т.3, вып.15, 2011.

Мог ли Галилей открыть закон всемирного тяготения

Г.ГОРЕЛИК

С небес на землю и обратно

В современной физике говорится о четырех фундаментальных силах. Первой открыли силу гравитации. Известный *закон всемирного тяготения* определяет силу притяжения F между любыми массами m и M, разделенными расстоянием R:

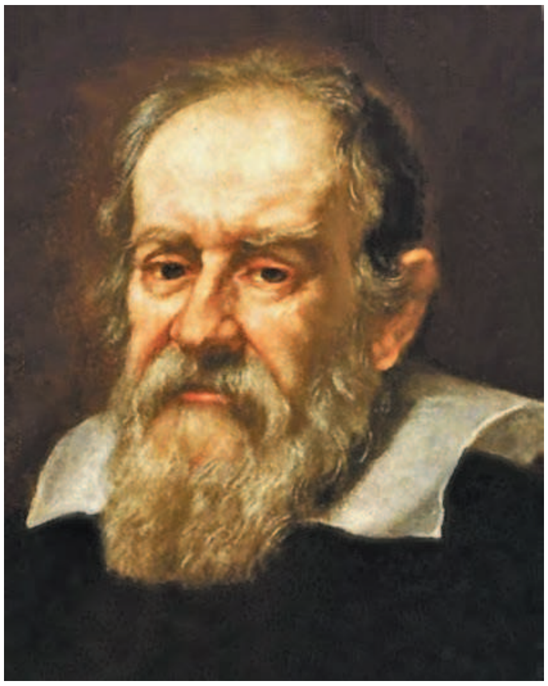
$$F = G\frac{mM}{R^2}.$$

Любопытно, что сам Ньютон такую формулу не писал. Он лишь утверждал, что притяжение пропорционально количеству вещества и обратно пропорционально квадрату расстояния. Пропорциональность количеству вещества не удивительна, а вот как Ньютон догадался, что сила зависит от расстояния именно в квадрате, а, скажем, не в кубе?

Оказывается, догадался об этом он не первым. Открытие Ньютоном закона гравитации можно даже назвать закрытием. Он закрыл вопрос, подтвердив догадку астрономическими наблюдениями, подытоженными Кеплером в его планетных законах. Величайший успех Ньютона в глазах его современников – в том, что он вывел законы Кеплера из закона гравитации. Для этого ему пришлось сделать дело, великое уже в глазах мировой истории: создать общую теорию движения – механику, изобретя для нее новый математический язык. Главный закон движения связал ускорение a массы m с действующей на нее силой F:

$$F = ma,$$

а изобретенный математический аппарат – дифференциальное исчисление – позволил решать любую задачу о движении тел на небе и на земле.



Галилео Галилей

Вниманию читателей предлагается отрывок из книги Г.Е.Горелика «Новые слова науки – от маятника Галилея до квантовой гравитации», которая будет опубликована в одном из ближайших выпусков «Библиотечки «Квант».

Первую небесную задачу решил астроном Эдмонд Галлей (Хэли). Опираясь на закон движения и закон гравитации, он предсказал, что комета 1682 года (известная теперь как комета Галлея) вернется через 76 лет. И она действительно явилась в должное время! До того можно было еще сомневаться в теории Ньютона, которая «всего лишь» вывела старые законы Кеплера из новых законов движения и гравитации. Но небесный триумф физики обещал ей победы и в задачах земных.

По этому поводу один историк заметил: «Современная наука спустилась с небес на землю по наклонной плоскости Галилея». Не меньше оснований сказать, что – по той же наклонной плоскости – земная физика поднялась до небес. Галилей получил с неба лишь один вопрос: почему столь неощутимо движение Земли с огромными скоростями в тысячи километров в час вокруг своей оси и вокруг Солнца? Ответ на этот вопрос он искал – и нашел – на Земле, изучая движение с помощью двух своих главных инструментов: эксперимента и математически точного языка. Его ответ – закон инерции и принцип относительности – Ньютон назвал Первым законом механики. А галилеевский закон свободного падения, обнаружив ключевую роль ускорения, дал подсказку для Второго закона – главного закона движения.

Лишь в законе гравитации роли Галилея не видно. Исправляя эту несправедливость спустя два века после его смерти, некий умелец с антикварным уклоном смастерил коллекцию исторических документов, которую получила Французская академия наук. Бумаги – с именами Галилея, Паскаля, Ньютона и других видных фигур – рисовали такую картину. В последние годы жизни (итальянец) Галилей якобы теоретически вывел из второго закона Кеплера, что небесные тела притягиваются обратно пропорционально квадрату расстояния. Об этом открытии он сообщил (французу) Паскалю, который на этой основе построил Небесную механику, вычислив еще и массы планет, о чем сообщил (англичанину) Ньютону. А уж тот, без стыда и совести, опубликовал чужие результаты как свои собственные.

Во Французской академии, ревностно следившей за успехами англичан, азартно изучали сенсационные документы, пока не обнаружили, что одно из писем коллекции адресовано Ньютону, когда тому было всего 10 лет от роду. Автор коллекции не ладил с хронологией. И совсем не ладил с историей науки. История, конечно, зависит от сохранившихся документальных свидетельств – писем, рукописей, публикаций. Но когда свидетельств о каком-то человеке сохранилось много, подделать совершенно новое свидетельство очень нелегко. Поверить, что 75-летний Галилей вывел закон гравитации из второго закона Кеплера, может лишь тот, кто не читал их книг и совсем не понимает, как можно вывести одно из другого.

Иоганн Кеплер

Галилей не придавал значения законам Кеплера и тем более его высказываниям о Солнце как источнике силы, движущей планетами, о том, что сила эта убывает обратно пропорционально расстоянию (а не его квадрату), и о силе притяжения как о «симпатии родственных тел», их «стремлении к соединению». Это «стремление» Кеплер то уподоблял магнетизму, то считал его проявлением. Из его текстов не ясно, имел ли он в виду одну силу или две. Ясно лишь, что он надеялся на физиков, раз писал: «пусть физики проверят...»

В 1600 году англичанин Гильберт опубликовал книгу «О магните, магнитных телах и большом магните – Земле», где, кроме прочего, высказал идею о том, что земной шар – огромный магнит. Он экспериментально обосновал это с помощью модели Земли – шарообразного магнита, следя за поведением стрелки компаса на поверхности шара. Под впечатлением от этой книги Кеплер и писал о магнитных силах в планетной системе, внедряя последнее слово физики в астрономию. Но, в отличие от Гильберта, Кеплер не дал никаких конкретных, хотя бы качественных, доводов и никак не связал магнитную физику ни с его гипотезой о планетных силах, убывающих обратно пропорционально расстоянию, ни с собственными точными законами планетного движения. В таком обращении с наукой физик Галилей видел проявление «слишком свободного» ума, а попросту – легкомыслие. По поводу же исследований Гильберта он, высоко их оценив, пожелал, чтобы тот был «немного больше математиком». Не потому, что Галилей любил математику, а потому, что математически точный язык открывает путь к экспериментальной проверке и, стало быть, к точному знанию.

Фундаментальный физик Галилей мог смотреть на законы Кеплера как на математические соотношения, не менее изящные, чем космография планет юного Кеплера, но и не более проникающие в физическую суть планетной системы. Через две точки можно провести только одну прямую, а через множество точек планетных наблюдений – сколько угодно разных кривых, в том числе, быть может, и изящных. С планетами не поэкспериментируешь, меняя параметры их движения. Поэтому Галилей старался проникнуть в фундаментальные законы планетной физики, опираясь на земной эксперимент, который надо придумать, и используя простейшую орбиту из возможных – круговую, тем более что орбиты Земли и Венеры почти точно круговые.

Чтобы вывести закон гравитации, надо было слово «притяжение» сделать физическим понятием, доступным для экспериментального исследования. Надо было связать это понятие с измеримыми величинами, прежде всего с самим движением. Это и сделал Ньютон. А до того о планетных силах и их зависимости от расстояния можно было лишь говорить.

Самый ранний «разговор» о силе, пропорциональной $1/R^2$, состоялся в книге французского астронома Буйо в 1645 году. Автор чтил Коперника, Галилея и Кеплера, но планетную силу – не по Кеплеру – уподобил освещенности, убывающей с расстоянием от источника света именно как $1/R^2$. Но затем, в той же самой книге, Буйо отверг само существование движущей силы. Уже отсюда ясна неубедительность гипотезы Кеплера. Легко представить себе, что Галилей ребяческими счел бы и разговоры Буйо: откуда аналогия между светом и планетными силами?! Впрочем, к моменту выхода книги французского астронома Галилей уже три года как ушел в историю. А неубедительные слова о силе, обратно пропорциональной квадрату расстояния, тем не менее, в историю вошли. И дошли до времен Ньютона.

Что же получается? Важнейшая физическая идея родилась незаконно и долгое время жила подкидышем?! А ее рождению более всех противился отец современной физики?! Так, но не совсем. Во-первых, и к научным идеям применимы слова поэта: «Когда б вы знали, из какого сора / Растут стихи, не ведая стыда...» Рождение нового – всегда чудо. А, во-вторых, идея $1/R^2$ стала важной лишь в сочетании с другими идеями, которые появились спустя десятилетия.

История науки, как и всякая интересная история, это неповторимый ход событий. Отсюда шаблонная фраза о том, что история не знает сослагательного наклонения. История не знает, но физик, вглядываясь в историю, привычно делает *мысленные эксперименты*, меняя – *в пределах возможного* – поступки исторических персонажей и разворачивая новую цепь событий, чтобы оценить вероятности и невероятности реально происшедшего. За этот прием мышления надо благодарить Галилея, который, создавая современную физику, мастерски им пользовался. Мысленный эксперимент – схема эксперимента, допускаемая известными фактами, не считаясь с затратами. Свободно меняя условия эксперимента, легче ставить вопросы и отвечать на них с помощью известных фактов и законов природы.

Перенося этот прием из физики в ее историю, зададим вопрос: «Мог ли Галилей узнать скорость света?», разумеется, в пределах его исторически реальных возможностей – его знаний, способа мышления и его предубеждений. На этот вопрос история позволяет ответить отрицательно. В эксперименте придуманного им типа, даже если дать ему все ресурсы тогдашней техники, заведомо не хватало точности. А чтобы придумать эксперимент с участием спутников Юпитера, ему надо было оставить физику, стать астрономом-наблюдателем и не менее года вести наблюдения, зачем-то уточняя уже измеренные им периоды спутников. Это представляется невероятным. Так что скорость света определить он не мог, хоть и был убежден, что она конечна.

Галилей был также убежден, что никакого планетного притяжения нет. Но это не значит, что ясен ответ на вопрос: «Мог ли Галилей открыть закон всемирного тяготения?»

Выдающийся физик и веселый человек Ричард Фейнман так изложил предысторию закона гравитации:

«Во времена Кеплера некоторые считали, что планеты движутся вокруг Солнца, потому что невидимые ангелы толкают их вдоль орбиты. Это не так уж далеко от истины: ангелы толкают планеты, но не вдоль, а поперек орбиты, в направлении к ее центру».

Стремясь к краткости, Фейнман опустил важный промежуточный этап. Галилей обходился вовсе без ангелов, считая круговое движение планеты вокруг Солнца движением естественным, свободным. Вопрос о размерах орбит и о скоростях планет оставался открытым, но Галилей видел массу открытых вопросов, что его не огорчало и не смущало, а лишь раззадоривало. Как и Кеплер, Галилей верил, что другие планеты по своей природе подобны Земле, и укрепил свою веру, увидев в телескоп гористую поверхность Луны. Его вера давала надежду, что изучение законов природы на Земле поможет понять и законы планетных движений.

На Земле Галилей открыл закон свободного падения, а также закон движения тела, брошенного под углом к горизонту. Траектория такого движения, как знают ныне школьники, – парабола. Это свое открытие Галилей долго не публиковал. Он понимал, что результат получен в приближении «плоской Земли»: парабола тем точнее описывает траекторию, чем ее размер меньше по сравнению с радиусом Земли, т.е. чем меньше начальная скорость или же чем меньшую часть траектории рассматривать. Он не знал, какова форма траектории в случае «большого движения», когда начальная скорость достаточно велика и уже нельзя пренебречь сферичностью Земли.

Трудность была теоретической, и эксперимент не мог помочь: чтобы в лаборатории заметить сферичность Земли, размеры лаборатории должны быть сравнимы с радиусом Земли. Галилей мог, однако, воспользоваться мысленным экспериментом, в чем был большой мастак. Надо было лишь придумать вопрос для мысленного экспериментатора. Например, такой.

Если бросить шар в горизонтальном направлении с небольшой скоростью, он упадет на землю поблизости, двигаясь по крутой параболе (рис.1). Если начальную скорость увеличить, парабола станет более пологой. А с какой скоростью надо бросить шар, чтобы, падая, он оставался на одном и том же удалении от поверхности Земли, уходящей «вниз» из-за своей сферичности?

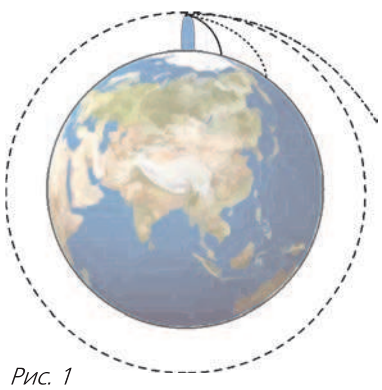


Рис. 1

Эту задачу Галилей мог решить, пользуясь математикой не сложнее теоремы Пифагора, зная радиус Земли R и ускорение свободного падения g, им измеренное. Искомая скорость, как может убедиться нынешний школьник, равна

$$v = \sqrt{gR} \sim 8 \text{ км/с}.$$

Это, конечно же, *первая космическая скорость,* т.е. скорость, с которой нужно бросить шар, чтобы он стал *искусственным спутником Земли.* Впервые это удалось сделать в Советском Союзе в 1957 году, а в Италии семнадцатого века слов таких не знали и величину скорости назвали бы астрономической. Она была, скорее, астрофизической. Но астрофизику Галилею мысленный шар, летящий на постоянном расстоянии от поверхности Земли, конечно, напомнил бы Луну.

Он бы легко убедился, однако, что для Луны полученное соотношение, увы, не выполняется, и очень сильно. Скорость Луны в 60 раз меньше, «чем надо». Поскольку скорость Луны и расстояние до нее были хорошо известны, Галилей подумал бы об ускорении свободного падения g, которое сам измерил. Но измерил-то на поверхности Земли, а не на высоте Луны. Соотношение выполнилось бы, если бы ускорение свободного падения на высоте Луны было в 3600 раз меньше земного. Расстояние до Луны в 60 раз больше радиуса Земли. Напрашивается гипотеза: ускорение свободного падения меняется с удалением от Земли обратно пропорционально квадрату расстояния. Эту гипотезу Галилей мог подтвердить и на спутниках Юпитера, и на спутниках Солнца – планетах. В результате он получил бы новый закон природы – *общий закон свободного падения*, определяющий ускорение свободного падения $g(R)$ в точке, удаленной на расстояние R от небесного тела массой M:

$$g(R) = G\frac{M}{R^2}.$$

Здесь G – константа, одинаковая для любого небесного тела, а значит, константа фундаментальная.

Новый закон уже намекает на гравитацию Ньютона, до которой оставалось более полувека. Но для Галилея всего важнее было бы оправдание его веры в физическое единство мира – и мира подлунного, и мира надлунного. Он понял бы, что причина падения тел на Земле и причина, определяющая орбиты планет, одна и та же. А поскольку причину падения естественно называть притяжением (к Земле), то так можно назвать и планетную силу. Мысленный спутник Земли помог бы Галилею увидеть, что свободное падение и движение планет – явления глубоко родственные.

Так, он понял бы, что слова Кеплера о планетно-солнечных притяжениях не столь и ребяческие. Никакой солнечной силы, движущей планетами, конечно, нет, но притяжение есть и подчиняется вполне определенному закону. Более того, из этого закона следует и (третий) закон Кеплера, связывающий время, за которое планета проходит свою орбиту, с ее радиусом ($T^2 \sim R^3$). Значит, из закона свободного падения, установленного в земных физических опытах, следует астрономический закон, полученный Кеплером в результате многолетнего анализа множества астрономических наблюдений. Следует пока лишь для круговых орбит. Но если ускорение свободного падения известно в каждой точке пространства вокруг большого небесного тела, то можно ставить задачу и о том, как изменится круговая орбита спутника, если его толкнуть. Труднее, конечно, было заподозрить и тем более доказать, что при этом окружность превратится в эллипс. Но зато теперь Галилей мог уже принять подсказку первого закона Кеплера об эллиптичности планетных орбит – к великой радости автора и к успокоению историков, ломающих головы над молчанием Галилея по поводу законов Кеплера.

Имея в своем распоряжении мысленный спутник, Галилей вряд ли бы остановился на достигнутом, а понял бы также, что законы Кеплера… лишь приближенные. Запуская мысленный спутник на разных расстояниях от Земли, легко дойти до места посередине между Землей и Марсом. А тогда возникнет вопрос: мы запускаем спутник Земли или Марса? Владея понятием составного движения, Галилей «сложил» бы оба ускорения свободного падения с учетом разных направлений (нынешними словами – векторно) и получил бы суммарное движение, совсем не похожее на эллипс. Отсюда следовало бы, что законы Кеплера – приближенные, они тем точнее, чем дальше находятся все массивные тела от одного, «центрального». И возникла бы общая задача о движении «спутника» вблизи нескольких массивных тел. Все это вело бы к представлению о всеобщем – «всемирном» – притяжении. Но оно уже было бы основано не на словах полуастрологического происхождения, как у Кеплера, а на физическом исследовании свободного падения вблизи поверхности Земли.

Кроме всего прочего, в итоге Галилей убедился бы, что был прав, взяв фундаментальной моделью планетного движения не эллипс Кеплера, а круговую орбиту. Только это простое движение позволило нам – вместе с Галилеем или вместо него – пройти путь от закона свободного падения до закона всеобщего притяжения, откуда уже рукой подать до ньютоновой физики, если под рукой окажется человек уровня Ньютона.

Почему же Галилей не пошел по этому пути?

Вглядываясь в его многотрудную и многомерную жизнь, можно предположить, что главная причина такой незадачи – его религиозная вера. Будь он атеистом, его бы устроила формула, предложенная ему Папой Римским для спокойной научной работы, – называть свои научные исследования гипотезами. Ироничный Галилей вовсе не был фанатиком. Общественные условности его смешили, но искоренять их – не его забота. Будь он атеистом, он бы вовсе не думал о том, соответствуют ли его «гипотезы» Библии – старой ненаучной книге, которую многие люди почему-то принимают всерьез. Он бы не тратил время и силы на свои «Диалоги» и «Беседы» с подобными людьми, а делал бы чисто научные работы, излагал бы их профессионалам, предохраняя себя парой ритуальных фраз о гипотетичности науки. И тогда не отняли бы у него столько времени и сил преследования церкви и пожизненное домашне-тюремное заключение.

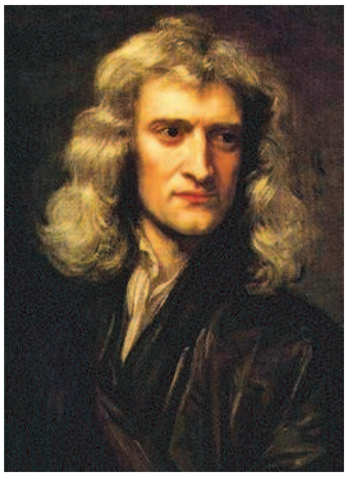
Историк науки, однако, в интересах самой же науки поостерегся бы советовать Всевышнему лишить Галилея веры в Него. А вдруг эта вера каким-то образом помогла Галилею открыть закон свободного падения? Например, тем, что дала ему веру в существование подобного закона, веру, совершенно необходимую для поиска … Но к этому странному вопросу вернемся, подождав, пока Ньютон откроет закон всемирного тяготения, изобретет математические инструменты, с помощью которых выведет из этого физического закона все астрономические законы Кеплера и создаст первую всеобъемлющую физическую теорию, которую теперь называют классической механикой.

Сделал все это Ньютон на основе трудов Галилея, изучив его «Диалоги» и «Беседы», которые, помимо изложения найденных Галилеем научных истин, дали новый метод поиска истины. А метод дороже отдельных результатов – с его помощью можно получить и многие другие результаты. Книги Галилея, прочитанные в Европе, сделали для современной науки не меньше, чем его результаты – яркие демонстрации его метода.

Рождение теории гравитации

Вернемся из сослагательной истории в реальную, в которой закон всемирного тяготения носит имя Ньютона. Это – непростая и невеселая история, в которой неустанно обсуждают вопрос, по праву ли этот закон носит это имя. При всей мировой славе сэра Исаака Ньютона, начавшейся при его жизни, ему давно предъявляют моральную претензию в том, что он якобы не поделился славой с Робертом Гуком, выдающимся физиком-экспериментатором. Тот очень даже претендовал на соавторство, считая, что именно он сообщил Ньютону ключевую гипотезу: притяжение планет к Солнцу, обратно пропорциональное квадрату расстояния, определяет эллиптическую форму орбиты. Сам он это доказать не мог и в 1679 году обратился за помощью к Ньютону, уже известному своей математической мощью.

История надежно подтверждает и это обращение, и тот факт, что лишь после него Ньютон написал свой знаменитый труд «Математические начала натуральной философии», или просто «Начала», где изложил и теорию гравитации, и общую теорию движения. Однако Ньютон претензию Гука на соавторство отвергал, указывая, что о притяжении, обратно пропорциональном квадрату расстояния, говорили до Гука, начиная с Буйо, что вообще дело не в словесных гипотезах, а в точных количественных соотношениях, и, наконец, что сам он – Ньютон – открыл закон всемирного тяготения задолго до письма Гука, но об этом не сообщал из-за неправильного значения радиуса Земли, которое он тогда использовал в своих вычислениях.



Исаак Ньютон

Эти доводы Ньютона не убеждают многих историков, особенно любителей, которые смотрят на фундаментальную физику «сбоку» – со стороны математики или судебной психологии. В приоритетном конфликте Гука с Ньютоном действовали совершенно разные человеческие характеры и чувства, которые трудно оценить однозначно. Очевидны раздражение и досада Ньютона, но что за этим стояло: жадность к славе, личная антипатия или нежелание признать правдой неправду, пусть и «во имя мира»? Отвечая на этот вопрос, обычно меряют на свой аршин, а этот измерительный прибор у каждого свой. Характер Гука, даже по свидетельствам его друзей, был далеко не ангельский. Плодовитый и разносторонний экспериментатор, он предъявлял свои авторские претензии – в самой острой форме – далеко не только Ньютону. И сочувствие к Гуку нередко питается тем, что материально и социально он был гораздо менее благополучен, чем Ньютон.

Вместо того чтобы погружаться в личностные детали этого конфликта, сосредоточимся на его научном драматизме. Оба прежде всего были людьми науки, для каждого наука – дело его жизни.

Те, кто оправдывают претензии Гука, опираются на то, что тот поставил перед Ньютоном *задачу об эллиптических орбитах*, ответ на которую знал, но не мог доказать, а Ньютон доказал, проведя необходимые математические выкладки. Поэтому принимающие сторону Гука считают отговорками слова Ньютона о том, что он якобы открыл закон всемирного тяготения еще во время знаменитых чумных каникул 1665-66 годов, когда из-за чумы в Лондоне 23-летний Ньютон уехал на родительскую ферму.

Еще менее серьезно сторонники Гука относятся к знаменитой истории – или легенде? – о падающем яблоке, которое якобы помогло Ньютону в его открытии. Эта история привлекла новое внимание, когда недавно Лондонское Королевское общество опубликовало рукопись одной из самых первых биографий Ньютона, написанную человеком, лично знакомым с ним. Биограф, кроме прочего, рассказал о своем визите к 83-летнему сэру Исааку в апреле 1726 года. После обеда они вышли в сад:

«Мы пили чай в тени яблонь, беседуя на разные темы, когда он мне рассказал, как в точно такой обстановке ему в голову пришла идея гравитации. Он был погружен в размышления, когда увидел падающее яблоко. И подумал: "Почему яблоко всегда падает отвесно вниз, к земле, а не в сторону или вверх? Конечно, причина в том, что Земля притягивает его. В веществе должна быть какая-то притягивающая сила. А суммарное притяжение вещества Земли должно быть в ее центре. Потому-то яблоко падает по направлению к центру. И притяжение должно быть пропорционально количеству вещества. Яблоко притягивает Землю так же, как Земля притягивает яблоко". Значит, сила, подобная той, что мы называем тяжестью, простирается по всей Вселенной. … Так родилось поразительное открытие, которое легло в фундамент построенной им науки – к изумлению всей Европы».

Рассказ, написанный четверть века спустя после смерти

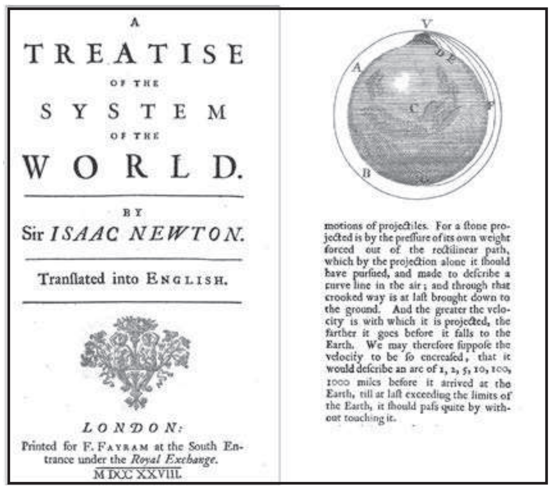
Ньютона, содержит его прямую речь и мысли, откуда ясно, что рассказчика более заботит литературное качество истории, чем необходимость изложить свои воспоминания как можно точнее. Рассказчик не был ни физиком, ни историком науки, он был археологом и относил себя к друидам (жрецы кельтов в древности). Есть все основания принимать его свидетельство лишь условно. Во-первых, «точно такой» обстановка быть не могла – в апреле яблоки еще не падают. Во-вторых, вряд ли Ньютон объяснял гуманитарию ход своих астрофизических мыслей; еще менее вероятно, чтобы нефизик точно воспроизвел их спустя много лет. Скорее, он свои давние воспоминания скрестил с научно-популярными описаниями достижений Ньютона.

В сухом остатке – простое свидетельство: падение яблока каким-то образом направило мысль Ньютона к идее всемирного тяготения. Надеюсь, я не единственный историк физики, для кого объяснение археолога-друида не работает: не видна убедительная последовательность мыслей Ньютона, в начале которой «яблоко падает отвесно вниз», а в конце – великий закон. Поэтому я бы рискнул предположить, что тот счастливый для Ньютона день был ветреный, а ветер – порывистый. Тогда Ньютон мог увидеть, как порыв ветра сорвал яблоко и оно падало не отвесно вниз, а по законной галилеевской параболе. Физик-теоретик вполне мог спросить себя: а как бы оно падало, если бы порыв ветра был сильней, еще сильней, гораздо сильней ...? И этот мысленный вопрос привели бы его к открытию закона всемирного тяготения тем путем, которым в предыдущей главе прошли «мы с Галилеем».

Для такого предположения есть несколько оснований. Из записных книжек Ньютона, относящихся к 1660-м годам, ясно, что он пришел к зависимости $1/R^2$, рассматривая именно *круговые* орбиты. О том же говорит его ссылка на неправильное значение радиуса Земли, задержавшее его мысль. И, наконец, важнейшее указание содержится в первой версии его главного труда, предшественнице «Начал». Эту версию Ньютон писал общедоступно, фактически то был научно-популярный текст. И, подводя к идее всемирного тяготения, он использовал мысленный эксперимент с пушкой, выбрасывающей снаряд в горизонтальном направлении со все большей скоростью, пока снаряд не превратится в спутник Земли. Закончив рукопись, Ньютон, однако, отложил ее, решительно изменил жанр и стал писать лаконичным языком, предназначенным лишь коллегам-профессионалам. В систематическом изложении, по примеру Евклида, не требовалось объяснять и оправдывать введение новых понятий.

Удивляться надо не тому, что он изменил характер изложения, а тому, что начал с научно-популярного. Возможно, он брал пример с «Диалогов» Галилея. Но уж очень они с Галилеем различались и характерами, и обстоятельствами жизни. Галилей был общителен, красноречив, рвался в бой, стремился к публикации, Ньютон – молчалив, уединен, избегал открытых конфликтов, замыкал свои рукописи на десятилетия. У Галилея было мало коллег для общения на равных, Ньютон уже входил в научное общество, которое издавало научный журнал. Галилей знал, что за его словами бдительно следит инквизиция, Ньютон жил в условиях академической и изрядной духовной свободы. Так что у Ньютона не было резонов, подобных галилеевским, чтобы публиковать общедоступное изложение своих идей. К счастью, его рукопись сохранилась и была издана посмертно под названием «Трактат о Системе Мира» (рис.2). Первая иллюстрация в этой книге изображает ту самую мысленную пушку.

Возвращаясь к малоприятному конфликту между Гуком


A
TREATISE
OF THE
SYSTEM
OF THE
WORLD.

BY
Sir ISAAC NEWTON.

Tranſlated into ENGLISH.

LONDON:
Printed for F. FAYRAM at the South Entrance under the *Royal Exchange*.
MDCCXXVIII.

motions of projectiles. For a ſtone projected is by the preſſure of its own weight forced out of the rectilinear path, which by the projection alone it ſhould have purſued, and made to deſcribe a curve line in the air; and through that crooked way is at laſt brought down to the ground. And the greater the velocity is with which it is projected, the farther it goes before it falls to the Earth. We may therefore ſuppoſe the velocity to be ſo encreaſed, that it would deſcribe an arc of 1, 2, 5, 10, 100, 1000 miles before it arrived at the Earth, till at laſt exceeding the limits of the Earth, it ſhould paſs quite by without touching it.

Рис. 2

и Ньютоном, отделим *закон всемирного тяготения* от *задачи об эллиптической орбите*: первое возможно без второго. И тогда легче понять Ньютона и посочувствовать ему. Ведь он пришел к астрономическому закону всемирного тяготения, начав путь от физического явления, вполне исследованного Галилеем, – свободного падения вблизи поверхности Земли. А его побуждали признать ценность фраз Гука, не имеющих четкого физико-математического смысла. То, что Гук, болезненно ревнивый, выдвигает свои приоритетные претензии направо и налево, не достаточное основание, чтобы искажать истину. Максимум, что можно сделать, это промолчать. После приоритетных претензий Гука на оптические результаты Ньютона тот замолчал до смерти Гука, замолчал на четверть века, хотя его исследования свойств света – вторая важнейшая область его достижений. Накопленные результаты Ньютон опубликовал в монографии «Оптика» лишь после смерти Гука, притом несколько раз упомянув его добрым словом. Он бы, возможно, отложил и публикацию своей теории тяготения, но книга эта издавалась по инициативе и на средства его друга и коллеги. Ньютон пошел ему навстречу и упомянул Гука наряду с другими, кто говорил о законе $1/R^2$. Это было правдой, хоть и не обязательной для изложения теории в научном стиле.

Отношение Ньютона к предшественникам, по книгам которых он учился, и его здравое отношение к собственным результатам не укладываются в какую-то манию величия. Известные слова Ньютона: «Если я видел дальше других, то лишь потому, что стоял на плечах гигантов» поясняются его же записью: «В науке нет иного правителя, кроме истины... Кеплеру, Галилею, Декарту следует поставить памятники из золота, на каждом написав: “*Платон – друг, Аристотель – друг, но главный друг – истина*”...»

Мировая слава пришла к Ньютону при жизни, что выразил его современник-поэт с библейской лаконичностью: «Природа и ее законы были скрыты во тьме, когда Бог сказал: “*Да будет Ньютон*”. И осветилось все».

Но сам Ньютон видел себя иначе: «Себе я кажусь ребенком, который нашел пару камешков поглаже и ракушек покрасивее на берегу океана нераскрытых истин». Это касалось и его главного открытия: «Причину свойств гравитации я до сих пор не мог вывести из явлений...»

Ньютон легко бы понял и принял два уточнения теории гравитации, ждать которых пришлось целый век. Сначала британский физик Кавендиш сумел измерить в лаборатории крошечную силу гравитационного притяжения между двумя телами известных масс. Массы он взял 350 килограммов и 1,5 килограмма, а измеренная сила притяжения оказалась равна весу песчинки. Это измерение дало возможность точно определить массу нашей планеты, а значит, и массы других небесных тел. И это же измерение позволило определить фундаментальную константу гравитации G в формуле $F = G\frac{mM}{R^2}$, как только такая запись появилась в начале девятнадцатого века.

Однако вряд ли Ньютон мог предположить, что пройдут еще два столетия, прежде чем физики узнают нечто более глубокое о гравитации. За это время ученые расширили применения физики Галилея–Ньютона, не зря называемой ныне классической. Тем труднее было предположить появление новых фундаментальных понятий, сопоставимых по глубине с первыми понятиями современной физики. Метод, изобретенный Галилеем и триумфально примененный Ньютоном, дал новые плоды в руках Максвелла, Планка, Эйнштейна, Бора и других современных физиков.

Как Галилей мог открыть общий закон свободного падения

Исследуя свободное падение, Галилей выяснил, что шар, брошенный горизонтально в пустоте, падает по параболе, форма которой определяется начальной скоростью v и ускорением свободного падения g. При этом скорость движения по горизонтали сохраняется: $v_г = v$, а по вертикали растет со временем: $v_в = gt$.

Сделаем мысленный эксперимент, поднявшись вместе с мысленным Галилеем на легендарную башню. Будем бросать шары горизонтально со все большей скоростью (рис.3). Если скорость броска мала, шар упадет – по крутой параболе – на землю поблизости от башни. А если скорость очень велика, парабола станет очень пологой и шар улетит очень далеко от Земли. Спрашивается, с какой скоростью надо бросить шар, чтобы, свободно падая, он оставался на той же высоте от земной поверхности, уходящей закругленно «вниз»? На этот вопрос ныне может ответить и школьник, нарисовав указанную схему, применив теорему Пифагора и учтя, что радиус Земли $R \approx 6000$ км, а ускорение свободного падения $g \approx 10$ м/с^2. Эти величины, как и теорему Пифагора, знал также и Галилей. И мог получить, что искомая скорость связана с g и R соотношением $v^2 = gR$ и равна примерно 8 км/с. Летя с такой скоростью, шар оставался бы на постоянном удалении от земной поверхности. Совсем, как Луна.

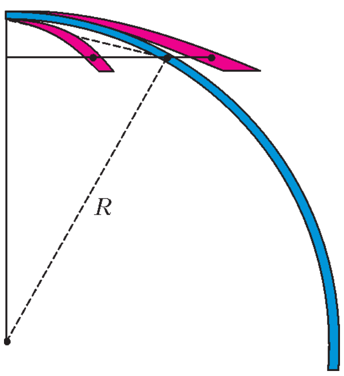


Рис. 3

Однако Галилей легко обнаружил бы, что лунные величины $R_Л \approx 400000$ км и $v_Л \approx 1$ км/с никак не укладываются в полученное соотношение. А чтобы уложились, нужно значение $g_Л$, примерно в 3600 раз меньшее измеренного Галилеем на поверхности Земли. Расстояние до Луны больше радиуса Земли примерно в 60 раз, а $60 \times 60 = 3600$. Таким образом, Галилей мог предположить, что ускорение свободного падения g меняется с удалением от Земли обратно пропорционально квадрату расстояния R: $g \sim 1/R^2$. Отсюда, с учетом предыдущего соотношения, следует, что скорость спутника v меняется с расстоянием R от небесного тела по закону $v \sim 1/\sqrt{R}$. А если небесное тело имеет несколько спутников, то для них всех величина $v\sqrt{R}$ одна и та же. Подтвердить это свойство Галилей мог на им же открытых спутниках Юпитера, что отражено в приведенной здесь таблице. Подтвердили бы это и спутники Солнца, т.е. планеты (орбиты которых близки к круговым).

Спутники Юпитера	*Ио*	*Европа*	*Ганимед*	*Каллисто*
Расстояние от Юпитера R, 10^3км	421,6	670,9	1070,4	1882,7
Скорость v, км/с	17,34	13,74	10,88	8,204
$v\sqrt{R}$	**11253**	**11253**	**11249**	**11251**

Так закон свободного падения, установленный в земных физических опытах, поднялся бы до астрономических высот. И так Галилей пришел бы к новому закону природы, который мог назвать *общим законом свободного падения*: ускорение свободного падения на расстоянии R от центра небесного тела равно

$$g(R) = \frac{A}{R^2},$$

где A – некая константа, определяемая свойствами небесного тела. Из наблюдательных данных Галилей мог вычислить соотношения таких констант для Земли, Юпитера и Солнца:

$$A_Ю \approx 300 A_З, \quad A_С \approx 300000 A_З.$$

Глядя на эти три величины, характеризующие Землю, Юпитер и Солнце, естественно было спросить, какие различия небесных тел ведут к различиям их констант A. Из явных различий в размере, в количестве вещества (массе) и в состоянии светимости легче всего предположить, что величина A пропорциональна массе небесного тела M с неким коэффициентом G (который тоже можно грубо оценить, считая среднюю плотность Земли близкой к плотности ее твердых пород):

$$A = GM.$$

В результате Галилей получил бы общую зависимость сразу для всех трех небесных тех – Земли, Юпитера и Солнца:

$$g(R) = G\frac{M}{R^2}.$$

И здесь константа G – не простая, а фундаментальная, поскольку одинакова для Земли, Юпитера, Солнца и, судя по всему, для любого другого тела.

Это и есть *общий закон свободного падения*, открыть который вполне мог Галилей на его уровне знаний и умений.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №2–2013» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2294» или «Ф2300». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2294б, М2296, М2298 предлагались на региональном этапе XXXIX Всероссийской олимпиады школьников по математике, задачи М2295, М2297 – на VII Южном математическом турнире.

Задачи Ф2302, Ф2306 предлагались на Московской физической олимпиаде 2013 года.

Задачи М2294–М2300, Ф2300–Ф2307

М2294. Натуральные a, b, c удовлетворяют равенству
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}.$$
а) Докажите, что число $a+b$ составное.
б) Докажите, что при $c \geq 2$ хотя бы одно из чисел $a+c$, $b+c$ составное.

В.Сендеров

М2295. Дан тетраэдр. Может ли радиус вписанной окружности одной из его граней быть меньше, чем радиус вписанной в тетраэдр сферы?

П.Кожевников

М2296. В клетках доски 8×8 расставлены числа 1 и -1 (в каждой клетке – по одному числу). Рассмотрим всевозможные расположения фигурки из четырех клеток (рис.1) на доске (фигурку можно поворачивать, но ее клетки не должны выходить за пределы доски). Назовем такое расположение *неудачным*, если сумма чисел, стоящих в четырех клетках фигурки, не равна 0. Найдите наименьшее возможное число неудачных расположений.

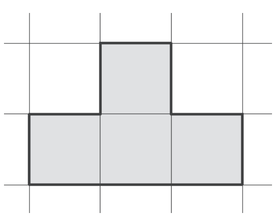


Рис. 1

М.Антипов

М2297. Салон самолета состоит из 50 рядов по 6 мест, помеченных буквами A, B, C, D, E, F. Свои места в салоне заняли 73 пассажира. Докажите, что найдутся два ряда, которые заняты одинаковым образом (т.е. в этих рядах заняты места, помеченные одними и теми же буквами).

И.Богданов (по мотивам олимпиады Словении)

М2298. На окружности длины 2013 отмечены 2013 точек, делящих ее на равные дуги. В каждой отмеченной точке стоит фишка. Назовем *расстоянием* между двумя точками длину меньшей дуги между этими точками. При каком наибольшем n можно переставить фишки так, чтобы снова в каждой отмеченной точке было по фишке, а расстояние между любыми двумя фишками, изначально удаленными не более чем на n, увеличилось?

Д.Храмцов

М2299. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность Ω. Пусть B_0 и C_0 – середины сторон AC и AB соответственно. Пусть D – основание высоты из точки A, а G – точка пересечения медиан треугольника ABC. Окружность ω проходит через точки B_0, C_0 и касается окружности Ω в точке $X \neq A$. Докажите, что точки D, G, X лежат на одной прямой.

И.Исаев, М.Исаев

М2300. Пусть p – простое число вида $8n+1$ (n – натуральное). Докажите, что множество чисел $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ можно разбить на два подмножества с равным количеством чисел так, чтобы разность произведений чисел этих подмножеств делилась: а) на p; б*) на p^2; в*) на p^3.

И.Вайнштейн

Ф2300. Какую минимальную по величине скорость по отношению к поверхности Земли нужно сообщить космическому аппарату, находящемуся уже вне атмосферы Земли на высоте 200 км над ее экватором, чтобы он не только навсегда покинул Землю, но и улетел навсегда от Солнца, пролетев далеко от всех других планет солнечной системы? Радиус Земли

R = 6400 км. Расстояние от Земли до Солнца L = 150 млн км. Орбиту Земли считайте круговой.

Фольклор

Ф2301. При «сбрасывании» показаний медицинского ртутного максимального термометра (рис.2) резкими движениями руки добиваются ускорений порядка a = = $60g$. При такой «перегрузке» ртуть начинает вытекать из капилляра через малое отверстие (сужение внутреннего сечения трубки капилляра) в резервуар термометра. Форма отверстия – узкая щель. Оцените ширину щели, обеспечивающей термометру его свойство максимальности. Коэффициент поверхностного натяжения ртути σ = $= 0{,}5$ Дж/м^2, плотность ртути $\rho = 13600$ кг/м^3. Остаточная длина столбика ртути (от отметки шкалы 35 °С до места сужения капилляра) L = 20 мм.

Рис. 2

Д.Пилюлькин

Ф2302. Над идеальным одноатомным газом совершают циклический процесс *1–2–3–4–1*, график которого изображен на pV-диаграмме (рис.3). Минимальный объем газа равен V_0, а максимальный – в n раз больше. Участки *2–3* и *4–1* – изохоры, участок *3–4* – адиабата, а участок *1–2* получен из участка *3–4* сдвигом на отрезок длиной p_0 вверх вдоль оси давления. Определите количества теплоты, полученные или отданные на участках *1–2*, *2–3*, *4–1*, а также КПД этого цикла.

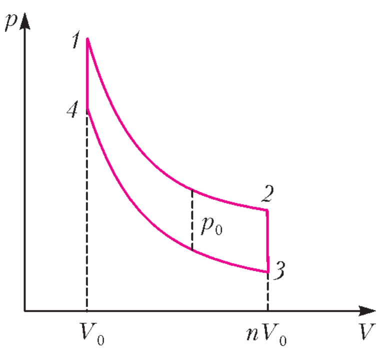


Рис. 3

О.Шведов

Ф2303. При низких температурах молярная теплоемкость твердых веществ при постоянном давлении зависит от абсолютной температуры T по закону $C_T = C_{T_0}\left(T/T_0\right)^3$. Один моль (40 г) твердого аргона при температуре 8К привели в тепловой контакт с двумя килограммами твердого аргона при температуре 1К и все вместе теплоизолировали. Какой будет температура вещества, когда установится тепловое равновесие?

С.Варламов

Ф2304. В конденсаторе находится свернутая рулоном пачка чередующихся листов из металла и изолятора с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 3$ одной и той же толщины $d = 0{,}01$ мм. Четные листы металла соединены электрическим контактом вместе и от места соединения сделан вывод. Так же соединены и нечетные листы. Между каждой парой четный – нечетный лист металла имеется слой изолятора. Размеры металлического корпуса конденсатора $a \times a \times a = 5 \times 5 \times 5$ см. Пробойная напряженность электрического поля в диэлектрике $E = 3 \cdot 10^7$ В/м. Какова емкость такого конденсатора? Какое максимальное напряжение выдерживает такой конденсатор?

Д.Электрик

Ф2305. В воздухе при нормальных условиях (T = = 273 К, $p = 10^5$ Па) создано однородное электрическое поле с напряженностью E. Ионизация молекул воздуха происходит за счет космического излучения. Возникшие при ионизации свободные электроны долго путешествуют, прежде чем встретить на своем пути положительно заряженный ион и снова образовать нейтральную молекулу. Считая удары нейтральных молекул с электронами абсолютно упругими, найдите среднюю скорость упорядоченного движения электронов и среднюю скорость неупорядоченного хаотического движения электронов. Размер (диаметр) молекул воздуха $D \approx 0{,}3$ нм. Рассмотрите два случая: E_1 = = 100 В/м и $E_2 = 10^6$ В/м. При какой величине напряженности E возникает электрический пробой в воздухе, если для гарантированной ионизации одной молекулы требуется энергия не меньше w_0 = 10 эВ и каждый из двух свободных электронов после ионизации молекулы должен иметь примерно такую же энергию?

С.Дмитриев

Ф2306. Глаз наблюдателя расположен так, что муравей и его изображение в «кривом» (сферическом) зеркале для наблюдателя имеют одинаковые угловые размеры и полностью накладываются друг на друга. Наблюдатель отодвинулся от зеркала на расстояние L вдоль линии, на которой находятся муравей и его изображение, и теперь видит, что угловой размер муравья составляет 75% от углового размера его изображения. Затем наблюдатель отодвинулся в том же направлении еще на L, и угловой размер изображения стал в 1,5 раза больше углового размера муравья. Во сколько раз изображение муравья больше его самого? Каков радиус кривизны зеркала?

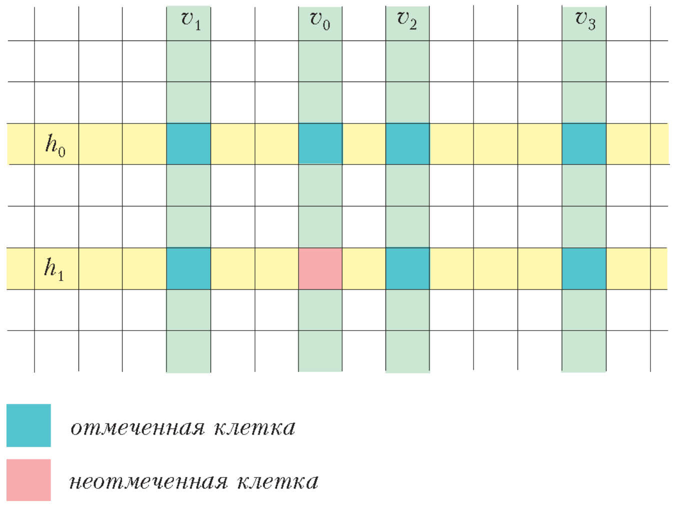
С.Варламов

Ф2307. Два радиотелескопа, работающие синхронно на длине волны $\lambda = 3$ см, располагаются на расстоянии L = 1000 км друг от друга. С помощью этих телескопов обнаружены две звезды, которые излучают в радиодиапазоне. Массы звезд одинаковы и равны массе Солнца. Звезды обращаются друг вокруг друга с периодом T = 1 год (двойная система). На каком максимальном расстоянии от Земли они могут находиться?

С.Варламов

Решения задач М2276–М2285, Ф2283–Ф2292

М2276. *На клетчатой доске отмечено несколько клеток. Ладья ходит только по отмеченным клеткам (возможно, перепрыгивая через неотмеченные). Известно, что эта ладья может дойти от любой отмеченной клетки до любой другой за два хода. Докажите, что существует горизонталь, на кото-*



рую ладья может попасть из любой отмеченной клетки за один ход. (Напомним, что ладья ходит по горизонтали или вертикали на любое число клеток.)

Докажем, что горизонталь h_1, содержащая наибольшее количество отмеченных клеток, – искомая. Пусть (v_1, h_1), (v_2, h_1), …, (v_n, h_1) – все отмеченные клетки этой горизонтали (здесь и далее через (v, h) обозначаем клетку на пересечении вертикали v и горизонтали h). Предположим противное нашему утверждению, тогда имеется хотя бы одна отмеченная клетка, которая находится в вертикали, отличной от $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (см. рисунок). Пусть это клетка (v_0, h_0). По условию из клетки (v_0, h_0) в клетку (v_1, h_1) можно попасть за два хода по отмеченным клеткам. Есть два таких пути: $(v_0, h_0) \to (v_1, h_0) \to (v_1, h_1)$ и $(v_0, h_0) \to (v_0, h_1) \to$ $\to (v_1, h_1)$. Но клетка (v_0, h_1) – не отмечена, поэтому второй путь невозможен.

Значит, возможен первый путь, откуда следует, что клетка (v_1, h_0) отмеченная. Рассуждая аналогично, доказываем, что клетки (v_2, h_0), …, (v_n, h_0) также отмеченные. Получаем, что в горизонтали h_0 уже найдены $n+1$ отмеченных клеток: (v_0, h_0), (v_1, h_0), … …, (v_n, h_0). Это противоречит нашему предположению.

С.Волчёнков

M2277. *Пусть $k \ge 2$ – натуральное число. Найдите все натуральные n такие, что число $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots + (2^k - 1)^n$ делится на 2^k.*

Ответ: все нечетные $n \ge 3$.

Пусть n нечетно. Тогда

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots + (2^k - 1)^n =$$

$$= \left(1^n + (2^k - 1)^n\right) + \left(2^n + (2^k - 2)^n\right) +$$

$$+ \left(3^n + (2^k - 3)^n\right) + \ldots + \left((2^{k-1} - 1)^n + (2^{k-1} + 1)^n\right) + (2^{k-1})^n.$$

Так как при нечетном n имеем

$$a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}\right),$$

в полученной сумме все слагаемые, кроме последнего, делятся на 2^k, а последнее слагаемое, равное $2^{(k-1)n}$, делится на 2^k только при $n \ge 2$.

Теперь зафиксируем четное n и докажем индукцией по k, что $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots + (2^k - 1)^n$ не делится на 2^k. База $k = 1$ очевидна. Пусть утверждение верно для некоторого k, докажем его для $k + 1$. Так как $a^n \equiv (2^{k+1} - a)^n \pmod{2^{k+1}}$, то

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots + (2^{k+1} - 1)^n =$$

$$= \left(1^n + (2^k - 1)^n\right) + \left(2^n + (2^k - 2)^n\right) +$$

$$+ \left(3^n + (2^k - 3)^n\right) + \ldots + \left((2^{k-1} - 1)^n + (2^{k-1} + 1)^n\right) +$$

$$+ (2^{k-1})^n \equiv 2\left(1^n + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots + (2^k - 1)^n\right) + (2^k)^n \equiv$$

$$\equiv 2\left(1^n + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots + (2^k - 1)^n\right) \pmod{2^{k+1}}.$$

Но так как $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots + (2^k - 1)^n$ не делится на 2^k, то $2\left(1^n + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots + (2^k - 1)^n\right)$ не делится на 2^{k+1}.

П.Кожевников

M2278. *Изначально на столе лежат 111 кусков пластилина одинаковой массы. За одну операцию можно выбрать несколько групп по одинаковому количеству кусков и в каждой группе весь пластилин слепить в один кусок. За какое наименьшее количество операций можно получить ровно 11 кусков, любые два из которых имеют различные массы?*

Ответ: за две операции.

Пусть масса одного исходного куска равна 1. Если при первой операции в каждой группе k кусков, то после нее каждый кусок будет иметь массу 1 или k; значит, одиннадцати кусков различной массы за одну операцию получить не удастся.

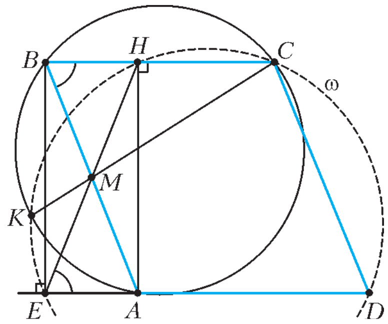
Покажем, что за две операции требуемое сделать можно. На первой операции выберем 37 групп по 2 куска; после операции получатся по 37 кусков с массами 1 и 2. На второй операции выберем 9 групп по 8 кусков: в i-й группе ($1 \le i \le 9$) будет $i - 1$ кусков массы 2 и $9 - i$ кусков массы 1. Тогда останутся неиспользованными два куска масс 1 и 2, а из i-й группы получится кусок массы $9 - i + 2(i-1) = 7 + i$. Итак, получатся 11 кусков с массами 1, 2, 8, 9, …, 16, что и требовалось.

Замечание. Можно показать, что приведенный способ – единственный возможный.

И.Богданов

M2279. *Дан параллелограмм ABCD с тупым углом A. Точка H – основание перпендикуляра, опущенного из точки A на BC. Продолжение медианы треугольника ABC, проведенной из вершины C, пересекает описанную около него окружность в точке K. Докажите, что точки K, H, C и D лежат на одной окружности.*

Пусть E – основание перпендикуляра, опущенного из точки B на AD. Тогда четырехугольник $AHBE$ –



прямоугольник. Значит, $\angle HED = \angle ABC = 180° - \angle BCD$, т.е. точки D, C, H, E лежат на некоторой окружности ω (см. рисунок).

Пусть M – точка пересечения диагоналей прямоугольника $AHBE$, т.е. $MA = MB = MH = ME$ (по условию точка M лежит на CK). Поскольку точки A, K, B, C лежат на одной окружности, имеем $MK \cdot MC = MA \cdot MB = MH \cdot ME$. Это равенство означает, что точки C, K, H и E лежат на одной окружности. Эта окружность является описанной окружностью треугольника CHE, т.е. совпадает с ω; итого, все четыре точки K, H, C, D лежат на ω.

Ф.Ивлев

М2280. *Любые два из действительных чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 отличаются не менее чем на 1. Оказалось, что для некоторого действительного k выполнены равенства $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2k$ и $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 2k^2$. Докажите, что $k^2 \geq 25/3$.*

Без ограничения общности можно считать, что $a_1 < \ldots < a_5$. По условию $a_{i+1} - a_i > 1$ при всех $i = 1, 2, 3, 4$. Значит, $a_j - a_i \geq j - i$ при всех $1 \leq i < j \leq 5$. Возведем каждое из полученных неравенств в квадрат и сложим их все. Получим

$$\sum_{1\leq i<j\leq 5} (a_j - a_i)^2 \geq \sum_{1\leq i<j\leq 5} (j-i)^2 = 4\cdot 1^2 + 3\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + 4^2 = 50,$$

т.е.

$$4\sum_{i=1}^{5} a_i^2 - 2\sum_{1\leq i<j\leq 5} a_i a_j \geq 50. \qquad (1)$$

С другой стороны, по условию имеем

$$\sum_{i=1}^{5} a_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq 5} a_i a_j = (a_1 + \ldots + a_5)^2 = 4k^2. \qquad (2)$$

Складывая (1) и (2), получаем

$$5\sum_{i=1}^{5} a_i^2 = 10k^2 \geq 50 + 4k^2,$$

откуда $6k^2 \geq 50$, или $k^2 \geq 25/3$.

Замечание. Условию задачи удовлетворяют, например, числа $a_i = (3-i) + 2/\sqrt{3}$, $k = 5/\sqrt{3}$. Таким образом, число 25/3 в условии нельзя заменить на большее.

И.Богданов

М2281. *На координатной плоскости нарисованы n парабол, являющихся графиками квадратных трехчленов; никакие две из них не касаются. Они делят плоскость на несколько областей, одна из которых расположена над всеми параболами. Докажите, что у границы этой области не более $2(n-1)$ углов (т.е. точек пересечения пары парабол).*

Докажем утверждение задачи индукцией по n. При $n = 1$ оно очевидно. Пусть теперь $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ – данные квадратные трехчлены ($n \geq 2$), причем $f_n(x)$ – трехчлен с минимальным старшим членом (если таких несколько, то любой из них). Обозначим границу нашей области через T. Можно считать, что T содержит участки всех графиков.

Пусть S – множество всех таких чисел a, что точка множества T с абсциссой a лежит на графике трехчлена $f_n(x)$. Иначе говоря, число a принадлежит S тогда и только тогда, когда выполнены неравенства $f_n(a) \geq f_i(a)$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Обозначим через S_i множество всех решений i-го неравенства; тогда $S = S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_{n-1}$. Поскольку трехчлен $f_n(x) - f_i(x)$ либо обладает отрицательным старшим коэффициентом, либо является на самом деле линейным, S_i – это либо отрезок (возможно, вырожденный), либо луч, либо вся прямая. Значит, и S является множеством такого же вида.

Итак, у T не более двух углов, принадлежащих графику $f_n(x)$. Если мы удалим этот график, исчезнут эти углы (и, возможно, появятся новые). При этом по предположению индукции новая область будет иметь не более $2(n-2)$ углов; значит, исходная имела не более $2(n-2) + 2 = 2(n-1)$ углов, что и требовалось доказать.

Замечания

1. Оценка, указанная в условии задачи, достигается. В качестве примера можно взять квадратные трехчлены $2x^2$, $2x^2 - (x-1)(x-2)$, $2x^2 - (x-3)(x-4)$, $2x^2 - (x-5)(x-6)$, ….

2. Приведем схему другого подхода к задаче, который годится не только для квадратных трехчленов, но и для любых непрерывных функций f_1, f_2, ..., f_n, графики любых двух из которых пересекаются не более чем в двух точках.

Пусть T разбивается точками пересечения функций на участки I_0, I_1, ..., I_k графиков функций f_{m_0}, f_{m_1}, ..., f_{m_k} (считаем, что участки занумерованы слева направо). Выписав подряд индексы, мы получим *слово* $M = (m_0, m_1, m_2, \ldots, m_k)$ в *алфавите* из n *букв* $\{1, 2, \ldots, n\}$. Ясно, что в слове M нет двух подряд идущих одинаковых букв (условие 1). Также нетрудно показать, что из слова M нельзя, вычеркнув несколько букв, получить слово вида (a, b, a, b), где $a \neq b$ (условие 2).[1] Утверждение задачи теперь можно получить, доказав, что длина слова, удовлетворяющего условиям 1 и 2, не превосходит $2n - 1$. Это можно сделать различными методами.

И.Богданов, Р.Карасев, П.Кожевников

[1] Слова, удовлетворяющие таким условиям, называются последовательностями Дэвенпорта–Шинцеля.

M2282. *а) Найдите все натуральные c, для которых существуют различные натуральные числа a и b такие, что ab делится на a + c и на b + c.*

б) Докажите, что для каждого натурального c множество пар чисел (a, b) из пункта а) конечно.

в) Пусть $n \ge 3$. Докажите, что для любых натуральных c и k существуют попарно различные натуральные числа a_1, a_2, …, a_n, большие k, такие, что произведение $a_1a_2\ldots a_n$ делится на каждое из чисел a_1+c, a_2+c, …, a_n+c.

а) **Ответ**: все натуральные $c \ge 2$.

Предположим, что для $c = 1$ искомые числа a и b существуют. Тогда $ab \vdots (a+1)$, отсюда (так как $\text{НОД}(a,a+1)=1$) $b \vdots (a+1) \Rightarrow b > a$. Аналогично, $a > b$ – противоречие.

Пусть $c \ge 2$. Тогда нетрудно проверить, что в качестве искомой пары чисел подойдут $a = c^4+c^3-c^2-c$ и $b = c^3+c^2-c$. Существуют и другие примеры. Приведем еще один пример (пожалуй, более простой): $a = 2c^2-c$ и $b = 2c^2-2c$.

б) Пусть натуральные a и b таковы, что $a \ge b$, $ab \vdots (a+c)$ и $ab \vdots (b+c)$. Тогда $bc = \left(b(a+c)-ab\right) \vdots (a+c)$. Положим $bc = \gamma(a+c)$.

Далее,

$$\gamma a^2 + \gamma ac = a\gamma(a+c) = abc = (ab)c \vdots (b+c)c =$$

$$= bc + c^2 = \gamma(a+c)+c^2 = \gamma a + \gamma c + c^2 .$$

Положим $P = \gamma a^2 + \gamma ac$, $Q = \gamma a + \gamma c + c^2$. Как мы видели, $P \vdots Q$. В следующих выкладках мы фактически разделим «столбиком» P на Q (как многочлены от переменной a). Имеем $ac^2 = aQ - P \vdots Q$ и $c^4 + \gamma c^3 = c^2Q - \gamma\left(ac^2\right) \vdots Q$. Отсюда $c^4+\gamma c^3 \ge Q > \gamma a$, значит, $a < c^4/\gamma + c^3 \le c^4 + c^3$. Из полученной оценки сверху [1] на a вытекает утверждение б).

в) Достаточно подобрать числа a_1, a_2, …, a_n, большие k и такие, что их произведение $p = a_1a_2\ldots a_n$ делится на любое из них, увеличенное на 1. Умножив каждое из чисел a_1, a_2, …, a_n на c, мы получим требуемый пример.

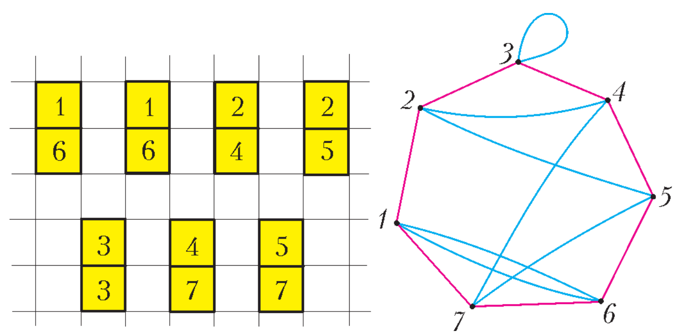
Рассмотрим произвольное $t > k$. Пусть $a_1 = 2t$, $a_2 = 2a_1+1 = 4t+1$, $a_3 = a_1a_2 - 1 = 8t^2+2t-1 = (4t-1)(2t+1)$, …, $a_i = a_1a_2\ldots a_{i-1}-1$ при $i = 4, \ldots, n$. Тогда $p \vdots a_1a_2\ldots a_{i-1} = a_i + 1$ при $i \ge 3$, а кроме того, $p \vdots a_1a_3 \vdots (2t+1)\cdot 2 = a_2 + 1 = 2(a_1+1)$. Итак, p делится на a_i+1 при всех $i = 1, 2, \ldots, n$, что и требовалось.

В.Сендеров

M2283. *Набор домино состоит из $n \ge 4$ доминошек. Каждый квадратик помечен числом из множества {1, 2, …, n}, причем каждым числом помечено ровно два квадратика. По правилам игры две доминошки можно приставить друг к другу квадратиками, если эти квадратики помечены числами, отличающимися на 1 или на n – 1. Докажите, что по таким правилам можно выложить все доминошки в одну замкнутую цепь.*

Определим следующую диаграмму (граф). Возьмем n вершин, занумеруем их 1, 2, …, n. Для каждой доминошки (k, l) из нашего набора в графе проведем *синее* ребро, соединяющее точки с номерами k и l. В результате из каждой вершины выходят два синих ребра. Кроме того, *красными ребрами* соединим вершины с номерами 1 и 2, 2 и 3, …, n и 1. Пример того, как по набору доминошек выстраивается граф, показан на рисунке.

Теперь в нашей диаграмме достаточно построить замкнутый маршрут, проходящий по каждому ребру ровно один раз и в котором цвета ребер чередуются. Действительно, прохождение синего ребра соответствует выкладыванию доминошки. Прохождение красного ребра – переход между двумя доминошками (в согласии с условием переход возможен между числами, отличающимися на 1, либо между 1 и n).



Доказать существование замкнутого маршрута с такими свойствами можно следующим образом (аналогично доказывается теорема Эйлера об обходе ребер связного графа).

Рассмотрим максимальный (т.е. содержащий максимальное число ребер) замкнутый маршрут Π, проходящий по каждому ребру не более одного раза и в котором цвета ребер чередуются (в том числе первое и последнее пройденные ребра – разного цвета). Ребро, принадлежащее маршруту Π, назовем *пройденным*. В силу чередования цветов, для каждой вершины количества выходящих из нее пройденных красных и синих ребер равны.

Предположим, что не все ребра пройденные (иначе Π – требуемый обход). Пусть V – множество вершин, в которых мы побывали, проходя маршрут Π. В силу связности нашего графа, тогда найдется вершина из V (назовем ее A), для которой хотя бы одно выходящее ребро еще не пройдено. Будем строить путь p, начинающийся в A и состоящий из различных непройденных ребер. Выйдя из A по красному не пройденному ребру, мы придем в некоторую вершину, из которой сможем выйти по синему еще не пройденному ребру. Придя в вершину по синему ребру, мы сможем выйти из нее по красному еще не пройденному ребру и т.д. В процессе построения пути p, для каждой вершины, которую мы посещаем (кроме вершины A), количества выходящих из нее непройденных красных и синих ребер уменьшаются на 1 (и, значит, остаются равными), поэтому

[1] Интересно сравнить полученную оценку с первым примером из решения пункта а).

построение пути p можно продолжать, пока мы не вернемся в A по синему ребру. Итак, p – замкнутый путь, начинающийся и заканчивающийся в A, состоящий из различных ребер, не пройденных в Π, и в котором цвета чередуются.

Теперь начнем проходить маршрут Π, но только до первого попадания в вершину A. Далее, проходим замкнутый путь p в прямом либо в обратном направлении (в прямом – если в A вошли по синему ребру, и в обратном – иначе). Возвратившись после прохождения пути p в A, продолжим маршрут Π. Пройденный нами маршрут (Π и «заход» на p) противоречит максимальности маршрута Π. Полученное противоречие показывает, что Π содержит все ребра графа.

Д.Фон-Дер-Флаасс

М2284. *Существует ли бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел a_1, a_2, a_3,… такая, что для любой возрастающей арифметической прогрессии b_1, b_2, b_3, … с натуральными членами последовательность a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, … содержит лишь конечное число простых чисел (возможно, ни одного)?*

Ответ: существует.

Покажем, что последовательность, заданная формулой $a_n=\left(n^2\right)!$ (где $k!$ обозначает произведение $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k$), удовлетворяет условию.

Пусть $b_1, b_2, \ldots$ – арифметическая прогрессия. Тогда начиная с некоторого номера n выполнено неравенство $n^2\ge b_n$. Действительно, если d – разность прогрессии, то

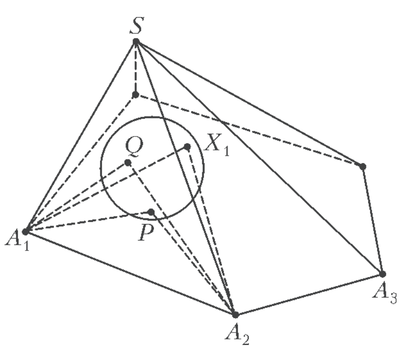
$$n^2\ge b_n \Leftrightarrow n^2\ge b_1+(n-1)d \Leftrightarrow n^2-dn+(d-b_1)\ge 0,$$

а неравенство $x^2-dx+(d-b_1)\ge 0$ верно при всех достаточно больших x.

Итак, нашелся номер N такой, что при $n>N$ выполнено $n^2\ge b_n$. Но тогда число $a_n+b_n=\left(n^2\right)!+b_n$ делится на b_n и больше b_n. Так как $b_n>1$ (при $n>1$), мы получаем, что число a_n+b_n составное для всякого $n>N$.

А.Голованов

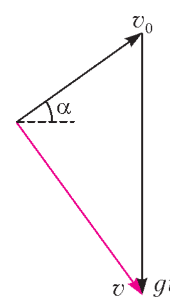
М2285*. *Дана пирамида $SA_1A_2\ldots A_n$, основание которой – выпуклый многоугольник $A_1\ldots A_n$. Для каждого i = 1, 2, …, n в плоскости основания построили треугольник $X_iA_iA_{i+1}$, равный треугольнику SA_iA_{i+1} и лежащий по ту же сторону от прямой A_iA_{i+1}, что и основание (мы полагаем $A_{n+1}=A_1$). Докажите, что построенные треугольники покрывают все основание.*



Рассмотрим произвольную точку P основания и докажем, что она покрыта одним из треугольников. Рассмотрим маленькую сферу, лежащую внутри пирамиды и касающуюся основания в точке P (такая, очевидно, найдется). Начнем увеличивать ее радиус, сохраняя условие касания; тогда в некоторый момент она впервые коснется боковой поверхности пирамиды. Пусть, скажем, она коснулась грани SA_1A_2 в точке Q (см. рисунок). Тогда $PA_1=QA_1$, $PA_2=QA_2$ как касательные из одной точки; стало быть, треугольники PA_1A_2 и QA_1A_2 равны. Это значит, что при повороте грани SA_1A_2 вокруг A_1A_2, переводящем ее в $X_1A_1A_2$, точка Q переходит в P, т.е. P лежит внутри $X_1A_1A_2$.

И.Богданов

Ф2283. *Камень брошен со скоростью v = 10 м/с под углом α = 30° к горизонту с высокой башни. Найдите время t, через которое скорость камня станет перпендикулярна начальной. Ускорение свободного падения принять равным g = 10 м/с^2, сопротивление воздуха не учитывать.*



Из треугольника скоростей $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{g}t$ (см. рисунок) при $\vec{v}\perp\vec{v}_0$ находим

$$v_0=gt\sin\alpha,$$

откуда

$$t=\frac{v_0}{g\sin\alpha}=2\ \text{с}.$$

Д.Александров

Ф2284. *Маленький массивный шарик закреплен на конце легкого жесткого стержня длиной R, другой конец которого прикреплен к неподвижному шарниру. Трение в шарнире отсутствует. Шарик со стержнем движутся по инерции так, что траектория движения шарика – это окружность, лежащая в вертикальной плоскости. На прохождение нижней половины окружности шарик затрачивает 49% времени оборота, а на прохождение верхней половины окружности – 51%. Чему равен период обращения?*

Механическая энергия при таком движении шарика сохраняется. Пусть скорость шарика при прохождении положения, когда стержень горизонтален, равна v. Тогда угловая скорость стержня в моменты времени, когда шарик выше центра окружности, по которой он движется, и стержень составляет с горизонтом угол φ, равна

$$\omega_{\text{в}}=\frac{\sqrt{v^2-2gR\sin\varphi}}{R}.$$

На прохождение верхней половины траектории нужно время

$$t_{\text{в}}=2\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\omega_{\text{в}}}=2\int_0^{\pi/2}\frac{R}{\sqrt{v^2-2gR\sin\varphi}}\,d\varphi.$$

Аналогично, на прохождение нижней половины траектории нужно время

$$t_{\text{н}}=2\int_0^{\pi/2}\frac{R}{\sqrt{v^2+2gR\sin\varphi}}\,d\varphi.$$

Поскольку по условию задачи эти времена отличаются мало, можно упростить:

$$t_в \approx \frac{\pi R}{v}\left(1+\frac{2gR}{\pi v^2}\right),\quad t_н \approx \frac{\pi R}{v}\left(1-\frac{2gR}{\pi v^2}\right).$$

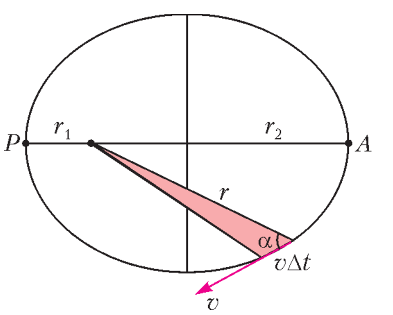
Отсюда следует, что $\frac{2gR}{\pi v^2} = \frac{1}{50}$, или $v = 10\sqrt{\frac{gR}{\pi}}$. Тогда период обращения шарика будет равен

$$T \approx \frac{2\pi R}{v} \approx 1{,}1\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

С.Варламов

Ф2285. *Барон Мюнхгаузен верхом на пушке завис неподвижно относительно Солнца где-то между Марсом и Юпитером. Используя законы Кеплера, помогите барону определить, в каком направлении ему необходимо выстрелить, чтобы период обращения ядра вокруг Солнца был: а) минимален; б) максимален. Чему равны эти периоды, если расстояние r_0 от барона до Солнца в $\alpha = 4$ раза больше радиуса орбиты Земли ($r_0 = \alpha R_З$, $R_З = 1$ а.е. $= 150$ млн км), а начальная скорость ядра v_0 в $\beta = 2$ раза меньше скорости Земли ($v_0 = v_З/\beta$, $v_З = 30$ км/с)? Считайте ядро и Солнце точками, взаимодействующими по закону всемирного тяготения. Ядро на Солнце не падает. Влияние планет на движение ядра не учитывать.*

Согласно третьему закону Кеплера, квадрат отношения периодов обращения планет равен кубу отношения больших полуосей. Поэтому нахождение орбиты с максимальным периодом сводится к нахождению орбиты с максимальной большой полуосью a.



По второму закону Кеплера скорость заметания площади радиусом-вектором постоянна. За малое время Δt эта площадь равна (см. рисунок)

$$\Delta S = \frac{1}{2} v\Delta t \cdot r\sin\alpha,$$

откуда получаем, что величина

$$l = vr\sin\alpha \qquad (1)$$

при движении ядра остается постоянной. В частности, для моментов минимального (точка P) и максимального (точка A) удаления ядра от Солнца имеем

$$l = v_1 r_1 = v_2 r_2.$$

Кроме того, по закону сохранения энергии

$$E = \frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{r} = \text{const}$$

остается постоянной величина

$$\varepsilon = \frac{E}{m} = \frac{v^2}{2} - G\frac{M}{r}, \qquad (2)$$

представляющая собой полную энергию, приходящуюся на единицу массы ядра. Для эллиптической орбиты $\varepsilon < 0$.

Подставив выражение (1) в формулу (2) и положив $\sin\alpha = 1$, что выполняется только в точках A и P, получим уравнение, корнями которого должны быть r_1 и r_2:

$$\varepsilon = \frac{l^2}{2r^2} - G\frac{M}{r}, \text{ или } r^2 + \frac{GM}{\varepsilon}r - \frac{l^2}{2\varepsilon} = 0.$$

По теореме Виета сумма корней этого уравнения, $r_1 + r_2 = 2a$ равна $-GM/\varepsilon$, откуда для большой полуоси получаем (напоминаем, что $\varepsilon < 0$)

$$a = -\frac{GM}{2\varepsilon}. \qquad (3)$$

Этот результат означает, что большая полуось орбиты, а с ней и период, полностью определяются энергией ядра, поэтому период обращения *не зависит* от направления начальной скорости.

Теперь найдем этот период. Сравним по третьему закону Кеплера орбиты Земли и ядра, для чего приравняем удельные энергии ε, выраженные из равенств (2) и (3):

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{2a}.$$

Для Земли:

$$\frac{v_З^2}{2} - \frac{GM}{R_З} = -\frac{GM}{2R_З}, \text{ или } v_З^2 = \frac{GM}{R_З}.$$

Для ядра:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{2a},\quad \frac{v_З^2}{2\beta^2} - \frac{GM}{\alpha R_З} = -\frac{GM}{2a},$$

$$\frac{GM}{2\beta^2 R_З} - \frac{GM}{\alpha R_З} = -\frac{GM}{2a},\quad \frac{1}{a} = \frac{2}{\alpha R_З} - \frac{1}{\beta^2 R_З}.$$

Для отношения периодов получаем

$$\frac{T}{T_З} = \left(\frac{a}{R_З}\right)^{3/2} = \left(\frac{2}{\alpha} - \frac{1}{\beta^2}\right)^{-3/2},$$

откуда находим

$$T = T_З\left(\frac{2}{\alpha} - \frac{1}{\beta^2}\right)^{-3/2} = T_З\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^{-3/2} \approx 8 \text{ лет}.$$

Д.Александров

Ф2286. *Деревянная линейка длиной $L = 40$ см, с постоянным поперечным сечением вдоль всей длины, падает, сохраняя положение, при котором ее длинная сторона остается вертикальной. Начальная скорость линейки равна нулю, до момента удара о жесткую горизонтальную поверхность линейка успевает пролететь в воздухе расстояние $d = 5$ см. Скорость распространения звука в дереве $v = 3{,}6$ км/с. Во сколько раз вес линейки во время удара больше силы тяжести?*

Определения. Вес тела это сумма всех сил негравитационного происхождения, с которыми это тело действует на другие тела. Сила тяжести тела это *сумма всех сил гравитационного происхождения, с которыми другие тела действуют на это тело.*

Сила тяжести линейки равна

$$F_т = Mg ,$$

где M – масса линейки. Во время удара на линейку действует сила со стороны горизонтальной поверхности, и она определяется скоростью v распространения звуковых волн в материале, из которого изготовлена линейка. Скорость u линейки перед ударом направлена вертикально вниз и равна

$$u = \sqrt{2gd} = 1 \text{ м/с} ,$$

и за весьма короткое время

$$\tau = \frac{L}{v} \approx 0{,}1 \cdot 10^{-3} \text{ с}$$

вся линейка останавливается. Если разделить импульс линейки, который был у нее за мгновение до начала удара, на время τ, то получится сила, с которой на линейку действовала жесткая горизонтальная поверхность (действием силы тяжести в этот промежуток времени можно пренебречь ввиду ее малости). По третьему закону Ньютона линейка действовала на поверхность с такой же по величине, но противоположно направленной силой. Значит, вес линейки во время удара равен

$$P = \frac{Mu}{\tau} = \frac{Mv\sqrt{2gd}}{L} .$$

Отношение веса и силы тяжести (они в рассматриваемом случае направлены в одну сторону) равно

$$\frac{P}{F_т} = \frac{v\sqrt{2gd}}{Lg} = 900 .$$

С.Варламов

Ф2287. *При подведении количества теплоты $Q = 600$ Дж к смеси гелия и азота при постоянном объеме смесь нагревается на $\Delta t_1 = 15$ К, а если то же количество теплоты подвести к тому же количеству той же смеси при постоянном давлении, температура смеси повысится на $\Delta t_2 = 10$ К. Найдите отношение числа молекул азота к числу молекул гелия в смеси.*

Первое решение. Теплоемкости всей смеси при постоянном объеме и при постоянном давлении равны, соответственно,

$$C_V = \frac{600 \text{ Дж}}{15 \text{ К}} = 40 \text{ Дж/К} , \quad C_p = \frac{600 \text{ Дж}}{10 \text{ К}} = 60 \text{ Дж/К}$$

и

$$C_p - C_V = 20 \text{ Дж/К} .$$

Так как отношение $\frac{C_V}{C_p - C_V} = 2$ не зависит от количества вещества и для одного моля любого идеального газа $c_p - c_V = R$, молярная теплоемкость смеси при постоянном объеме равна

$$c_V = 2R .$$

Пусть на одну молекулу гелия в смеси приходится x молекул азота. Тогда в одном моле смеси содержится $\frac{1}{1+x}$ молей гелия и $\frac{x}{1+x}$ молей азота. Внутренняя энергия моля смеси равна

$$U = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{3}{2} RT + \frac{x}{1+x} \cdot \frac{5}{2} RT = \frac{3+5x}{2(1+x)} RT ,$$

откуда находим

$$c_V = \frac{U}{T} = \frac{3+5x}{2(1+x)} R .$$

Решив уравнение

$$\frac{3+5x}{2(1+x)} = 2 ,$$

получим

$$x = 1.$$

Д.Александров

Второе решение. Поскольку $C_p - C_V = 20$ Дж/К, количество молей частиц в смеси газов равно

$$\nu = \frac{C_p - C_V}{R} \approx 2{,}4 \text{ моль} .$$

Если бы весь газ состоял только из гелия, то теплоемкость при постоянном объеме была бы равна $\nu R \cdot (3/2) = 30$ Дж/К. А если бы весь газ был только азотом, то теплоемкость при постоянном объеме была бы равна $\nu R \cdot (5/2) = 50$ Дж/К. На самом деле эта теплоемкость равна 40 Дж/К. Пусть число молей гелия равно X, а число молей азота – соответственно, $(2{,}4 - X)$. Уравнение

$$X(3/2)R + (2{,}4 - X)(5/2)R = 4{,}8R$$

имеет решение

$$X = 1{,}2 \text{ моль}.$$

Следовательно, искомое отношение равно 1.

С.Варламов

Ф2288. *Муха-Цокотуха, научившаяся летать по эквипотенциальным поверхностям (в электростатических полях), пролетает через уединенный плоский конденсатор на расстоянии $799d/1600$ от одной из его круглых пластин, где d – расстояние между пластинами, много меньшее их радиусов R. Заряды на пластинах равны $+Q$ и $-Q$. На какое максимальное расстояние r от конденсатора может удалиться Муха-Цокотуха при дальнейшем движении?*

Если считать, что на бесконечном удалении от конденсатора потенциал поля равен нулю, а разность потенциалов пластин составляет

$$\Delta\varphi = \frac{Qd}{\pi R^2 \varepsilon_0} = \frac{4kQd}{R^2} ,$$

то на оси конденсатора (в «центре») потенциал тоже равен нулю, а в том месте, где через конденсатор пролетает муха, потенциал равен

$$\varphi = \pm \frac{\Delta\varphi}{1600} .$$

При удалении на большое расстояние r от центра конденсатора в направлении, составляющем угол α с осью конденсатора, потенциал поля конденсатора (поле конденсатора дипольное) будет равен

$$\varphi_1 = \frac{kQ}{r} - \frac{kQ}{r + d\cos\alpha} \approx \frac{kQd\cos\alpha}{r^2}.$$

Приравняем потенциалы φ и φ_1:

$$\frac{4kQd}{1600R^2} \approx \frac{kQd\cos\alpha}{r^2}$$

и учтем, что расстояние r будет максимальным, если косинус угла будет равен единице, т.е. муха окажется на оси симметрии конденсатора. Получим

$$r \approx 20R.$$

В.Плис

Ф2289. *Кольцо радиусом R однородно заряжено зарядом Q. Бусинка с тем же по знаку зарядом q может свободно скользить по тонкой спице, совпадающей с диаметром кольца. Найдите период T малых колебаний бусинки относительно положения равновесия. Масса бусинки m. Кольцо закреплено.*

Для определения зависимости напряженности электрического поля E от расстояния r до центра кольца вблизи центра кольца воспользуемся теоремой Гаусса: поток вектора напряженности $\vec{E}$ через поверхность соосного с кольцом цилиндра с радиусом основания r и высотой h ($r, h \ll R$) равен нулю. Найдем по отдельности величины потоков через основания и через боковую поверхность цилиндра:

$$\Phi_{\text{осн}} = 2k\frac{Q}{R^2 + \frac{h^2}{4}}\frac{h/2}{\sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4}}}\pi r^2 \approx 2k\frac{Qh}{R^2 \cdot 2R}\pi r^2 =$$

$$= k\frac{Q}{R^3}\pi r^2 h, \quad \Phi_{\text{бок}} = 2\pi r h E(r)$$

(для определенности Q, $q > 0$). Суммарный поток равен нулю:

$$\Phi_{\text{осн}} + \Phi_{\text{бок}} = 0.$$

Отсюда получаем

$$E(r) = -k\frac{Q}{2R^3}r$$

– при смещении из центра в плоскости кольца напряженность поля пропорциональна смещению и направлена к оси кольца.

Теперь запишем уравнение движения бусинки:

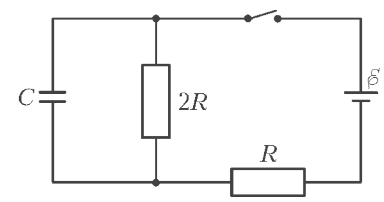
$$mr'' = -k\frac{Q}{2R^3}qr$$

и найдем частоту и период ее гармонических колебаний:

$$\omega = \sqrt{k\frac{Qq}{2R^3m}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2R^3m}{kQq}}.$$

В.Плис

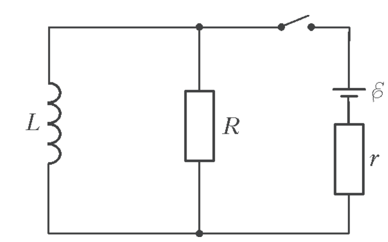
Ф2290. *В электрической цепи, изображенной на рисунке, все элементы можно считать идеальными. В некоторый момент после замыкания ключа тепловые мощности, выделяющиеся на резисторах сопротивлениями R и 2R, равны 9 Вт и 2 Вт соответственно. С какой скоростью в этот момент растет энергия конденсатора?*



Пользуясь формулой для мощности $P = I^2r$, находим, что в рассматриваемый момент времени ток в резисторе сопротивлением R в три раза больше тока в резисторе сопротивлением $2R$. Тогда ток через конденсатор в два раза больше тока в резисторе сопротивлением $2R$, а так как напряжения на них равны, то их мощности относятся как токи. Значит, энергия конденсатора изменяется со скоростью 4 Вт.

Д.Александров

Ф2291. *В схеме, показанной на рисунке, все элементы можно считать идеальными, параметры элементов указаны на рисунке. До замыкания ключа ток в цепи отсутствовал. Ключ замыкают на некоторое время, а затем размыкают. Оказалось, что величина тока через резистор сопротивлением R непосредственно перед размыканием ключа и сразу после размыкания ключа одна и та же. Какое количество теплоты выделится в цепи после размыкания ключа?*



Пусть I_0 – ток через катушку сразу после размыкания. Перед размыканием ток в катушке был тем же по направлению и величине. Через резистор сопротивлением R после размыкания ток тоже равен I_0 и идет вверх. Перед размыканием ток через этот резистор шел вниз и по условию его величина не изменилась, т.е. была I_0. Тогда ток через источник равен $I_0 + I_0 = 2I_0$. Запишем второе правило Кирхгофа для контура из источника и резистора:

$$\mathcal{E} = I_0R + 2I_0r.$$

Отсюда найдем

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R + 2r}.$$

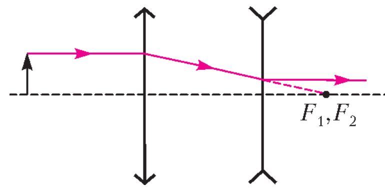
Количество теплоты, которое выделится в цепи после размыкания ключа, найдем из закона сохранения энергии:

$$Q = \frac{LI_0^2}{2} = \frac{L\mathcal{E}^2}{2(R + 2r)^2}.$$

А.Шеронов

Ф2292. *Оптическая система, состоящая из расположенных на общей оптической оси на расстоянии l = = 10 см друг от друга собирающей линзы с фокусным расстоянием F_1 = 15 см и рассеивающей линзы с* *фокусным расстоянием* $|F_2| = 5$ *см, создает изображение предмета, расположенного перпендикулярно оптической оси на некотором расстоянии перед собирающей линзой. Во сколько раз изменится размер изображения, если линзы поменять местами?*

Разумеется, нас будут интересовать только поперечные (т.е. перпендикулярные оптической оси) размеры изображений. Фокусы линз совпадают, поэтому параллельный оптической оси луч после прохождения системы останется параллельным оси (см. рисунок). Тогда из подобия соответствующих треугольников получаем, что расстояние до оси уменьшилось в $F_1/|F_2| = 3$ раза. Отсюда следует, что увеличение системы не зависит от расстояния до предмета и равно $1/3$. Если линзы поменять местами, то аналогично получим, что увеличение будет равно 3. Таким образом, размер изображения изменится в 9 раз.



Д.Александров

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

Экзамен

– Поздравляю, четыре, прервал Антона профессор и протянул руку к экзаменационному листу.

Абитуриенты редко баловали экзаменатора своими знаниями, и поэтому он давно взял себе за правило, не вслушиваясь в их ответы, сразу ставить четверку. Профессор был очень добрым и очень усталым человеком, и будущие мелиораторы, измученные долгими экзаменами, покидали аудиторию, преисполненные к нему самых добрых чувств.

Антон тоже вполне мог быть доволен результатом. Оценка гарантировала его другу Денису, за которого он держал экзамен по математике, поступление на мелиоративный факультет. Однако профессор, сам того не подозревая, сильно задел самолюбие Антона. Как-никак в свое время он был первым студентом мехмата, и четверка в этом не самом престижном учебном заведении несколько диссонировала с его университетским дипломом, к тому же с отличием.

– Извините, а за что, собственно, четыре? – спросил Антон, придав своему голосу максимальную корректность.

Профессор оторопел и выронил из рук экзаменационный лист. За сорок лет он не слышал ничего подобного. Разумеется, ни одного слова, произнесенного Антоном, он не помнил, но ведь и пятерку нельзя ставить только за то, что человек ее требует.

– Вы ошиблись при исследовании функции на максимум, – сказал профессор как можно мягче.

Он рассчитывал на свой авторитет и полагал, что таким образом инцидент будет исчерпан. Напрасные ожидания! Именно этой теме была посвящена диссертация Антона, которую он защитил совсем недавно. В искусстве анализа функций Антон не знал равных и, почувствовав себя уязвленным, несколько запальчиво заявил:

– Ошибка исключена. Я готов повторить доказательство слово в слово.

– Извольте! – воскликнул профессор. Настойчивость абитуриента позволяла ему выйти из положения.

Антон стремительно воспроизводил на бумаге математические значки. С одной стороны, его подхлестывало недоверие, выраженное профессором, с другой – еще не прошло состояние легкого похмелья после кутежа, который они устроили вчера с Денисом. В школьные времена в Норильске Денис был его лучшим другом. Потом их пути разошлись. Пока Антон штурмовал науку, Денис познавал жизнь. Возмужавший, окрепший и денежный, он вернулся с Севера, внезапно решив стать мелиоратором, инженером с высшим образованием. По слухам, требования при поступлении на этот факультет были не слишком жесткими. Все лето приятели предавались удовольствиям, а оставшиеся деньги, припасенные на обратный билет до Норильска, исчезли после вчерашней гулянки. Впрочем, о возвращении домой не могло быть и речи, ведь математику за Дениса сдавал сам Антон, надежда отечественной науки.

На этот раз профессор внимательно следил за ходом мысли странного абитуриента, и чем больше он его слушал, тем больше убеждался, что юноша обладает незаурядными математическими способностями. Профессор наблюдал за Антоном и невольно возвращался к своей далекой юности, отмеченной непостижимыми ошибками и разбитыми надеждами. Полвека назад он был лучшим математиком школы, учителя прочили ему блестящее будущее, но, увы, характер молодого человека оказался недостоин его таланта. Будущий профессор не решился пойти на мехмат и поступил в этот институт, который и стал его судьбой. Сколько воды утекло с тех пор, а чувство невыполненного долга перед наукой по-прежнему терзало по ночам его сердце.

И вот в лице этого неизвестного самородка ему представился последний шанс – оправдать бессмысленно прожитую жизнь. Пусть сам он погиб для науки, он спасет Антона!

– Послушайте меня, мой юный друг! – торжественно провозгласил профессор. – Я был несправедлив к вам. Бесспорно, вы заслуживаете самой высшей оценки – пять с плюсом! Однако вы совершаете ужасную ошибку. Я понимаю, вы хотите избежать риска, вам нужен верный выигрыш в этой лотерее. Но поверьте мне, старику, привольная жизнь среди коллег мелиораторов погубит ваш талант, и вся ваша жизнь пройдет в горьких угрызениях совести. Нет, нет, – глаза профессора сверкнули, – вы не смеете так расправљаться со своим даром! Вы должны принадлежать математике, божественной математике, и только ей! – Профессор дрожал, не то капли пота, не то слезы стекали по его порозовевшим щекам. – Знайте, ваше место на мехмате!

Закончив свой монолог, со всей решимостью, на какую был способен, он схватил экзаменационный лист Антона и в графе «математика» жирными чернилами вывел: «Неудовлетворительно».

Антон собрал свои вещи и, гордый признанием маститого ученого, направился к двери.

– Ну что? – воскликнул Денис, глядя на сияющее лицо Антона. – Порядок?!

– Порядок! – ликуя, ответил Антон. – Вот только где мы теперь возьмем денег тебе на обратный билет?

Е.Гик (из книги «Люди и фигуры»)

Классические средние в треугольнике

К классическим средним двух и более положительных чисел обычно относят:

- среднее арифметическое $A_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$,
- среднее геометрическое $G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$,
- среднее квадратичное $K_n = \sqrt[n]{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$,
- среднее гармоническое $H_n = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$.

Эти величины связаны *неравенствами о средних*:

$$H_n \le G_n \le A_n \le K_n. \qquad (1)$$

Равенства здесь возможны, только если все числа в наборе равны друг другу: $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Если в наборе всего два числа a и b, то неравенства (1) превращаются в такие:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}. \qquad (2)$$

Упражнения

1. Докажите неравенства (2).

2 (сложное!). Докажите неравенства (1).

Любопытно, что у этих на первый взгляд чисто алгебраических неравенств есть красивые геометрические интерпретации. Например, все четыре средние величины можно «увидеть» в трапеции.

Упражнение 3. В трапеции с основаниями a и b проведены четыре отрезка, параллельных основаниям: первый – это средняя линия, второй делит трапецию на две подобные трапеции, третий делит трапецию на две трапеции равной площади, а четвертый проходит через точку пересечения диагоналей. Найдите длины этих отрезков и докажите неравенства (2).

Средние величины можно найти не только в трапециях, но и в треугольниках. Вот лишь один из общеизвестных примеров.

Упражнение 4. Докажите, что в прямоугольном треугольнике каждый катет равен среднему геометрическому гипотенузы и своей проекции на гипотенузу.

Ниже приведены еще несколько задач, в которых искомый отрезок равен какому-либо среднему других отрезков. Некоторые из этих задач мы разбираем, а некоторые оставляем читателю для самостоятельного решения. Начнем со среднего арифметического.

Среднее арифметическое

Задача 1. Биссектриса угла B треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке W. Точка T – проекция точки W на сторону AB. Докажите, что $BT = \dfrac{AB + BC}{2}$.

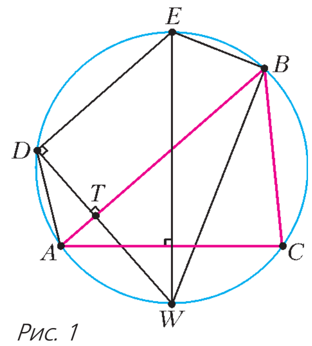


Рис. 1

Решение. Продлим отрезок WT до пересечения с окружностью в точке D (рис. 1). Проведем хорду DE, параллельную AB. Тогда трапеция $ABED$ будет равнобокой, а отрезок BT равен ее средней линии. Значит, $BT = \dfrac{DE + AB}{2}$.

Докажем, что $DE = BC$, а это равносильно равенству стягиваемых этими хордами дуг. Значит, достаточно доказать, что $\angle BAC = \angle DWE$. А эти углы равны, потому что у них взаимно перпендикулярные стороны ($AB \perp WD$ и $AC \perp WE$).

Задача 2. Биссектриса угла B треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке W. Точка I_a – центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC, точка I – инцентр (центр вписанной окружности). Докажите, что $BW = \dfrac{BI + BI_a}{2}$.

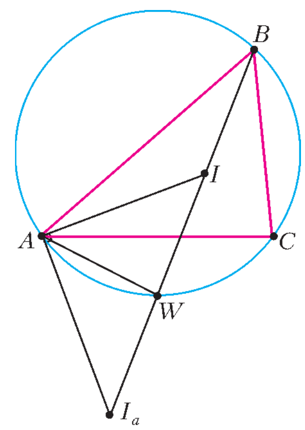


Рис. 2

Решение. Докажем, что описанная окружность треугольника делит пополам отрезок, соединяющий центры вписанной и вневписанной окружностей (это утверждение известно как теорема Мансиона). В наших обозначениях это значит, что $IW = WI_a$ (рис. 2). По теореме трилистника $IW = AW = CW$. Поскольку $\angle IAI_a = 90^\circ$, то AW – медиана в треугольнике IAI_a, и $IW = WI_a$.

Далее, $BI_a + BI = (BI + 2IW) + BI = 2(BI + IW) = 2BW$, откуда следует требуемое.

Теперь немного изменим подход и рассмотрим треугольники, в которых одна из сторон равна среднему арифметическому двух других сторон (это условие можно переформулировать так: стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию). Такие треугольники называют *разностными*. В задачах 3, 4 и 5 перечислено несколько свойств разностных треугольников. Считаем, что треугольник ABC разностный, в нем $AC = \dfrac{AB + BC}{2}$; остальные обозначения те же, что и в первых задачах.

Задача 3. Докажите, что $BI = IW$. Верно ли обратное?

Задача 4. Докажите, что треугольник ABC является разностным тогда и только тогда, когда:

а) прямая IM, где M – центр тяжести треугольника ABC, параллельна стороне AC;

б) сторона AC пересекает отрезок IW в его середине;

в) высота, проведенная из вершины B, равна радиусу вневписанной окружности, касающейся стороны AC.

Задача 5. Докажите, что в разностном треугольнике ABC:

а) вершина B, центры описанной и вписанной окружностей, а также середины сторон AB и BC лежат на одной окружности;

б) прямая IM касается этой окружности (I – инцентр, M – центр тяжести треугольника ABC).

У разностных треугольников есть еще много свойств. Сколько вы сможете придумать? А мы тем временем переходим к среднему геометрическому.

Среднее геометрическое

Наверное, недаром эта величина названа именно средним *геометрическим*. Отрезков такого вида в треугольнике предостаточно – например, высота в прямоугольном треугольнике. А если треугольник не прямоугольный? Пожалуйста!

Задача 6. На стороне BC тупоугольного треугольника ABC ($\angle A > 90^\circ$) найдите такую точку X, чтобы выполнялось равенство $AX = \sqrt{BX \cdot XC}$.

Решение. Опишем около треугольника ABC окружность с центром O (рис. 3) и на радиусе AO как на диаметре построим окружность. Она пересечет сторону BC в точках X_1 и X_2. Докажем, что нам годится любая из этих точек. В самом деле, поскольку $\angle AX_1O = 90^\circ$, то хорда AA_1 описанной окружности делится точкой X_1 пополам. По теореме о произведении отрезков пересекающихся хорд получаем, что $AX_1 \cdot X_1A_1 = BX_1 \cdot CX_1$, откуда $AX_1^2 = BX_1 \cdot CX_1$. С точкой X_2 все аналогично.

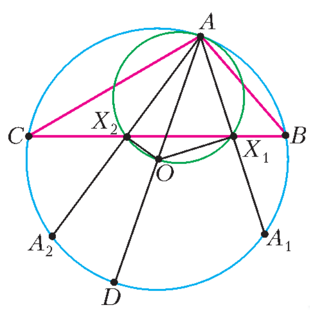


Рис. 3

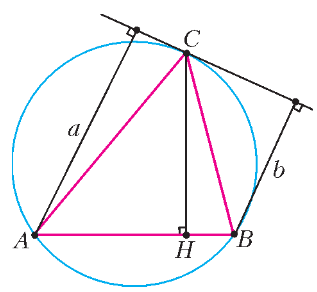


Рис. 4

Задача 7. Продолжение биссектрисы BL треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке W. Докажите, что $AW = \sqrt{BW \cdot WL}$.

Задача 8. Найдите высоту CH треугольника ABC, если известно, что расстояния от вершин A и B до касательной в точке C к описанной окружности этого треугольника равны a и b соответственно (рис. 4).

Задача 9. Пусть H – ортоцентр треугольника ABC. На отрезке AH выбрана точка K такая, что $\angle BKC = 90^\circ$. Докажите, что площадь треугольника BKC равна среднему геометрическому площадей треугольников ABC и HBC.

Среднее квадратичное

Треугольник, в котором сторона равна среднему квадратичному двух других сторон, называют *автомедианным*.

Задача 10. Докажите, что если треугольник подобен треугольнику, составленному из своих медиан, то он автомедианный. (Эта задача проясняет такое название.)

Задача 11. В треугольнике ABC проведена медиана CC_1 и отмечены точки A_1 и B_1 – середины сторон BC и AC соответственно, M – точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите, что если точки A_1, B_1, C и M лежат на одной окружности, то треугольник ABC автомедианный.

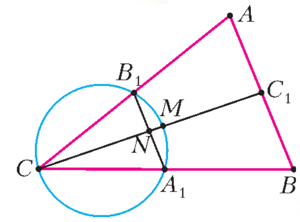


Рис. 5

Решение. Пусть N – середина средней линии A_1B_1 (рис. 5). Поскольку $CN = \frac{1}{2}CM$, то $NM = CM - CN = \frac{2}{3}CM - \frac{1}{2}CM = \frac{1}{6}CM$, и по теореме о произведении отрезков пересекающихся хорд получаем $A_1N \cdot B_1N = \frac{CM}{2} \cdot \frac{CM}{6}$. Отсюда $\frac{AB^2}{4} = \frac{CM^2}{3}$. Осталось использовать формулу для медианы треугольника: $CM^2 = \frac{2\left(AC^2 + BC^2\right) - AB^2}{4}$ и получить равенство $2AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Вот еще пара свойств и признаков автомедианного треугольника. Попробуйте придумать еще что-нибудь самостоятельно. Кто знает, вдруг это будет совсем новая теорема?

Задача 12. Докажите, что треугольник автомедианный тогда и только тогда, когда:

а) медианы этого треугольника, взятые в порядке возрастания, обратно пропорциональны его высотам, взятым в порядке убывания;

б) одна из его медиан является средним квадратичным двух других медиан.

Среднее гармоническое

Задача 13. Докажите, что высота AH треугольника ABC есть среднее гармоническое радиусов вневписанных окружностей, касающихся сторон AB и AC.

Задача 14. Диаметр круга, касающегося сторон AB и AC треугольника ABC, принадлежит стороне BC. Докажите, что радиус круга равен среднему гармоническому радиуса вписанной в треугольник ABC окружности и радиуса вневписанной окружности, касающейся стороны BC.

Назовем треугольник гармоническим, если его сторона равна среднему геометрическому двух других его сторон. Оказывается, есть удивительная связь между разностными и гармоническими треугольниками.

Задача 15. Докажите, что треугольник является гармоническим тогда и только тогда, когда треугольник, составленный из его высот, разностный.

Задача 16 (гармоническая формула биссектрисы). Пусть AL – биссектриса треугольника ABC, I – инцентр, I_a – центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Докажите, что $AL = \frac{2}{\frac{1}{AI} + \frac{1}{AI_a}}$.

Разумеется, сюжеты со средними величинами в геометрии и даже только в треугольнике вовсе не исчерпываются задачами из этого калейдоскопа. Известно еще много фактов, и, можно надеяться, еще больше фактов ожидают своего открытия! Чтобы лучше познакомиться с этой темой, вы можете обратиться к книгам А.Блинкова «Классические средние в арифметике и геометрии» (М: МЦНМО, 2012) и И.Кушнира «Геометрия. Поиск и вдохновение» (М: МЦНМО, 2013).

И.Кушнир

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

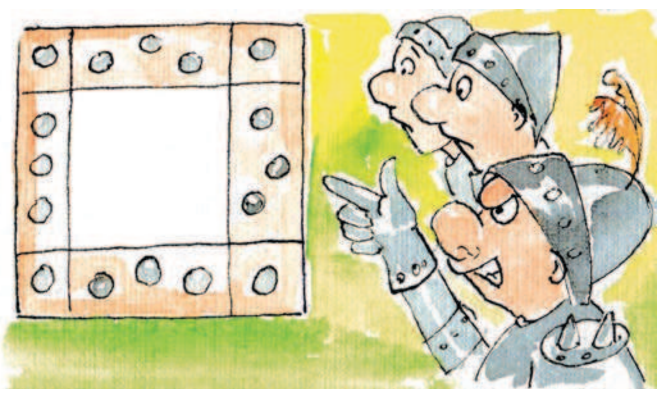
Задачи

1. Магазин купил у производителя наборы фломастеров и продает их по 100 рублей. Если покупатель приобретает сразу два набора фломастеров, то третий набор выдается ему в подарок. Известно, что магазин получает одну и ту же выгоду как от покупки одного набора, так и от покупки двух наборов. По какой цене магазин купил наборы фломастеров у производителя?

А.Саблин

2. Вдоль стен квадратного бастиона требовалось расставить 16 часовых. Комендант расставил их по 5 человек на стену, как показано на рисунке. Затем пришел полковник и велел расставить их по 6 человек на стену. А после этого пришел генерал и приказал расставить часовых по 7 человек на стену. И, наконец, явился маршал и приказал расставить часовых по 8 человек на стену. Коменданту удалось выполнить все эти приказы. Попробуйте и вы.

Фольклор



3. У Пети в кармане несколько монет. Если Петя наугад вытащит из кармана 3 монеты, среди них обязательно найдется монета в 1 рубль. Если Петя наугад вытащит 4 монеты из кармана, среди них обязательно найдется монета в 2 рубля. Петя вытащил из кармана 5 монет. Можно ли точно сказать, что это за монеты?

С.Дориченко

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

4. Вася подпилил все ножки у квадратной табуретки и четыре отпиленных кусочка потерял. Оказалось, что длины всех кусочков различны и что табуретка после этого стоит на полу пусть наклонно, но по-прежнему касаясь пола всеми четырьмя концами ножек. Дедушка решил починить табуретку, однако нашел только три кусочка с длинами 8, 9 и 10 см. Какой длины может быть четвертый кусочек? (Ножки крепятся к табуретке перпендикулярно сидению.)

Г.Гальперин

5. На хоккейной площадке лежат три шайбы (не на одной прямой). Хоккеист бросает любую из шайб по прямой на любое расстояние, но так, чтобы она пролетела между двумя другими шайбами. Могут ли все шайбы оказаться на своих начальных местах после тринадцати бросков хоккеиста?

Фольклор

Иллюстрации Д.Гришуковой

Ежу понятно

И.АКУЛИЧ

Один мой знакомый (он просил не называть имени) обладает удивительной способностью быстро давать ответы на различные (в том числе математические) вопросы и при этом довольно редко ошибаться. Бывают, конечно, досадные проколы, но в целом баланс уверенно склоняется в его пользу. Свои пояснения рассуждений, приведших к тому или иному выводу, он, как правило, начинает словами: «Так это же ежу понятно...», за что и получил среди знакомых заслуженное прозвище «Еж».

Как-то предложил я ему давнюю стихотворную задачу Д.Ботина (будем называть ее **Задачей 1**):

Один сапфир и два топаза
Ценней, чем изумруд, в три раза.
А семь сапфиров и топаз
Его ценнее в восемь раз.
Определить мы просим вас:
Сапфир ценней или топаз?

Бумаги и ручки у Ежа не было, и я с любопытством ожидал, как он в уме будет решать систему двух уравнений с двумя неизвестными. И в самом деле – такое решение буквально просится в руки. Если ценность изумруда принять за единицу, а ценности сапфира и топаза обозначить через C и T соответственно, то получаем

$$\begin{cases} C + 2T = 3, \\ 7C + T = 8. \end{cases}$$

Осталось решить систему, а затем сравнить полученные C и T. Что-либо более простое вряд ли возможно. Иное дело сам способ решения системы: таковых придумано великое множество – от последовательного исключения неизвестных до «бронебойного» матричного, но все они требуют приличного времени и непременного наличия того, чем писать и на чем писать.

К моему несказанному удивлению, Еж задумался секунд на десять, не больше, после чего заявил:

– Одинаково!

– Что одинаково? – не понял я.

– Ценность у них одинакова!

– Правильно... – пробормотал я, поскольку знал ответ заранее. – Но как ты определил?

– Так это же ежу понятно! Заметь: один сапфир и два топаза – всего получается три камня, верно?

– Верно...

– И они ценней изумруда ровно втрое! А семь сапфиров и топаз – это всего восемь камней, и они ценней изумруда в восемь раз. Короче, каждый раз сколько камней – столько и изумрудов. Значит, и сапфир, и топаз по цене равны изумруду – тогда все сходится.

А ведь и впрямь – из одного внешнего вида нашей

системы можно без труда выявить, по крайней мере, одно решение: $C = T = 1$. Правда, Еж посчитал его единственным, что, учитывая затраченное на решение время, вполне приемлемо. Строго говоря (если обратиться к теории), могли бы быть и другие решения, но только если бы одно из уравнений было прямым следствием второго (т.е. получалось бы из него умножением всех элементов на любое ненулевое число). Тогда, по сути, имело бы место одно уравнение с двумя неизвестными и бесконечным числом решений. В данном случае такого нет, ведь в первом равенстве сапфиров меньше, чем топазов, а во втором – больше. Так что получить одно уравнение из другого невозможно.

Оправившись от потрясения, я решил взять реванш и предложил Ежу чуть видоизмененный вариант задачи Ботина (который назовем **Задачей 2**), и в нем вторая строфа звучала так:

А *шесть* сапфиров и топаз
Его ценнее в восемь раз.

Уж теперь-то ему не выкрутиться, надеялся я. И зря! Потому что через считанные секунды послышалось:

– Сапфир дороже!

– Ты уверен? – сам-то я не знал верного ответа, поскольку вставил в текст шестерку вместо семерки, что называется, «от балды», лишь бы сохранить стихотворный размер. Поэтому, составив чуть измененную систему, [1] я после очевидных манипуляций выяснил, что $C=\frac{13}{11}$, $T=\frac{10}{11}$. Да, действительно $C>T$! Но как он узнал?

Естественно, я потребовал разъяснений.

– Так это же ежу понятно! – раздался традиционный ответ. – В исходной системе семь сапфиров и топаз уравновешивали (по цене) восемь изумрудов, а здесь мы один сапфир сняли. Ясно, что оставшимся сапфирам придется стать *дороже*, чтобы сохранить баланс.

– Но тогда нарушится первое равенство! – возразил я.

– Верно, нарушится. При некотором росте цены сапфира получится «перекос», и для его компенсации придется *снизить* цену топаза. Тогда во втором равенстве опять нарушится равновесие, и придется опять сделать сапфир подороже. А значит, в первом равенстве вновь надо удешевить топаз, а во втором – поднять цену на сапфир и так далее...

– До бесконечности, что ли?

– А нас это не пугает! Каждая новая поправка будет заведомо меньше предыдущей, и процесс наверняка «сойдется». Но главное для нас, что сапфир становится все дороже, а топаз – все дешевле. Ведь спрашивалось, *что ценней*, а не *какова цена*.

Опять Еж утер мне нос! Однако ж, битому неймется. Что-то мне в его рассуждениях показалось некорректным, но что именно? Позже на досуге я проверил рассуждения о постепенном росте C и уменьшении T в бесконечном процессе их уточнения (такие процессы называются *итерационными*).

Итак, положим, во втором уравнении (которое теперь выглядит так: $6C+T=8$) первоначальное значение T осталось прежним: $T=1$. Тогда легко найти $C=\frac{7}{6}$, и из первого уравнения (подставив в него это значение C) получим $T=\frac{11}{12}$. Далее, из второго уравнения имеем $C=\frac{85}{72}$, и опять из первого $T=\frac{131}{144}$. Действительно, C хотя и растет, но все медленней: после первой итерации оно увеличилось на $\frac{7}{6}-1=\frac{1}{6}$, а после второй – лишь на $\frac{85}{72}-\frac{7}{6}=\frac{1}{72}$. С ценой топаза та же история. Стало быть, есть реальная надежда, что итерационный процесс и впрямь сойдется. Впрочем, можно в этом убедиться и с должной строгостью, используя найденное выше точное решение $C=\frac{13}{11}$, $T=\frac{10}{11}$. Положим, после очередной итерации C отличается от истинного значения на некую величину Δ, т.е. $C=\frac{13}{11}+\Delta$. Тогда, на основании первого уравнения,

$$T=\frac{3-C}{2}=\frac{3-\left(\frac{13}{11}+\Delta\right)}{2}=\frac{10}{11}-\frac{\Delta}{2},$$

и после этого, используя второе уравнение, имеем

$$C=\frac{8-T}{6}=\frac{8-\left(\frac{10}{11}-\frac{\Delta}{2}\right)}{6}=\frac{13}{11}+\frac{\Delta}{12}.$$

Как видно, после следующей итерации отклонение C от истинного значения снизится аж в 12 раз! Аналогичная (проверьте и убедитесь) ситуация и с T. Посему описанный Ежом итерационный процесс неизбежно сойдется (и притом очень даже быстро). Повезло ловкачу!

И все же – неужели процесс сойдется *всегда*, т.е. и при других исходных данных? Как-то не верится. От тоски я стал так и эдак «шевелить» условие – и в результате родилась следующая редакция второй строфы (получилась уже **Задача 3**):

А *шесть* сапфиров и *два* топаза
Его ценнее в восемь раз.

Рифма, правда, напрочь исчезла, но зато какие удивительные получились выводы! Действительно, к такому сюжету применимы все первоначальные рассуждения Ежа из задачи 1: суммарное число камней каждый раз соответствует числу изумрудов, так что сапфир и топаз имеют одинаковую ценность. Но далее, если удалить теперь из второго равенства один *топаз*, то, следуя идее Ежа, мы получим, что уже топаз дороже сапфира! Почти дословно, но с поправкой на новые реалии

[1] У меня-то, в отличие от Ежа, ручка и бумага были.

повторим его аргументы (сверяйте с текстом, приведенным выше). Итак, в исходной системе шесть сапфиров и два топаза уравновешивали восемь изумрудов, а здесь мы один топаз сняли. Ясно, что оставшемуся топазу придется стать дороже, чтобы сохранить баланс. Но в таком случае нарушится первое равенство, поскольку при некотором росте цены топаза получится «перекос», и для его компенсации придется *снизить* цену сапфира. Тогда во втором равенстве опять нарушится равновесие, и придется опять сделать топаз подороже. А значит, в первом равенстве вновь надо удешевить сапфир, а во втором – поднять цену на топаз и так далее… Результат очевиден: топаз *дороже* сапфира!

Однако, удалив этот самый топаз, мы фактически возвратились обратно к задаче 2 (с шестью сапфирами и одним топазом), для которой удалось убедительно доказать, что $C > T$ (мы даже нашли их числовые значения). Как же так?

Ничего не остается, как попробовать наглядно понаблюдать итерационный процесс.

Как и прежде, возьмем второе уравнение $6C + T = 8$, но теперь будем исходить из первоначального значения $C = 1$. Тогда $T = 2$, и из первого уравнения (подставив в него это значение T) получим $C = -1$. Ого, отрицательное число! Далее бессмыслица нарастает, потому что из второго уравнения имеем $T = 14$, и потом из первого $C = -25$. И так далее… Понятно, что такая «болтанка» ни к чему хорошему не приведет.

В чем же дело? Почему итерации Ежа дали вполне разумный результат, а наши – нет? Иначе говоря, почему можно стартовать от первоначальной единичной стоимости топаза, но нельзя «отталкиваться» от сапфира? Чем один камень хуже другого?

Для ответа на этот вопрос запишем систему уравнений в общем виде, с произвольными ненулевыми коэффициентами при неизвестных (и даже сами неизвестные обозначим через x и y):

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}$$

Пусть точное ее решение таково: $x = x_0$, $y = y_0$. Чтобы применить итерацию, надо из одного уравнения выразить x через y, а для другого – наоборот, выразить y через x. Ясно, что такое можно сделать двумя способами; возьмем наугад один из них. Тогда получаем

$$\begin{cases} y = \dfrac{b_1 - a_{11}x}{a_{12}}, \\ x = \dfrac{b_2 - a_{22}y}{a_{21}}. \end{cases}$$

Пусть в процессе итераций x в какой-то момент отличается от истинного значения на некую величину Δ, т.е. $x = x_0 + \Delta$. Тогда, на основании первого уравнения,

$$y = \frac{b_1 - a_{11}(x_0 + \Delta)}{a_{12}} = \frac{b_1 - a_{11}x_0}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}}\Delta .$$

Подумаем, что собой представляет $\dfrac{b_1 - a_{11}x_0}{a_{12}}$. Но тут и думать-то нечего – из первого уравнения исходной системы моментально следует, что это есть не что иное, как y_0. Поэтому

$$y = y_0 - \frac{a_{11}}{a_{12}}\Delta .$$

Затем, используя второе итерационное уравнение, имеем

$$x = \frac{b_2 - a_{22}\left(y_0 - \dfrac{a_{11}}{a_{12}}\Delta\right)}{a_{21}} = \frac{b_2 - a_{22}y_0}{a_{21}} + \frac{a_{11}a_{22}}{a_{12}a_{21}}\Delta .$$

И поскольку $\dfrac{b_2 - a_{22}y_0}{a_{21}} = x_0$, то

$$x = x_0 + \frac{a_{11}a_{22}}{a_{12}a_{21}}\Delta .$$

Теперь все видно как на ладони. Величина отклонения x от истинного значения после очередной итерации изменилась в $\dfrac{a_{11}a_{22}}{a_{12}a_{21}}$ раз (и если рассчитать отклонение для y, то для него получится та же величина). Поэтому если дробь $\dfrac{a_{11}a_{22}}{a_{12}a_{21}}$ по абсолютной величине *меньше* 1, то итерационный процесс сойдется, если же *больше* 1, то разойдется. Ну, а при строго единичном значении процесс «застынет» (что для нас, разумеется, эквивалентно расходимости – решения-то мы не получим!).

Если же мы при итерациях будем, наоборот, из первого уравнения выражать x, а из второго – y, то критерием сходимости станет перевернутая дробь $\dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$ (с теми же выводами).

Так что теперь ясно, почему итерация Ежа удалась: он использовал зависимости, для которых дробь оказалась равной $\dfrac{1 \cdot 1}{2 \cdot 6} = \dfrac{1}{12}$, а у меня потом вышло наоборот: $\dfrac{2 \cdot 6}{1 \cdot 1} = 12$, со всеми вытекающими неприятностями.

И пусть в тот раз не удалось посрамить самодовольного оппонента, но само по себе выяснение истины даже в столь частном вопросе – несомненно, дело полезное. Это и ежу понятно.

Шайба, мяч и копье

А.СТАСЕНКО

Вообразите себе казака или джигита, который «бросает и ловит копье на скаку». Всякий здравомыслящий школьник скажет: ну, что же тут необыкновенного? – копье опишет параболу и, если пренебречь сопротивлением воздуха и считать горизонтальную составляющую скорости копья и всадника неизменной, вновь попадет в руки джигита. Но конь и всадник должны же чем-то дышать, так что сопротивление воздуха есть. Сила этого сопротивления зависит и от длины и толщины копья, и от его угла атаки (т.е. угла между вектором скорости и осью копья). Поэтому, строго говоря, центр масс копья опишет не параболу, а сложную баллистическую траекторию.

А вот два хоккеиста скользят к воротам противника параллельными курсами со скоростью U на расстоянии h друг от друга. И один из них передает шайбу другому, сообщив ей в начальный момент времени $t = 0$ скорость с компонентами u_0, w_0 в своей системе координат – назовем эту систему, связанную с хоккеистами, Х-системой (рис.1,*а*). Второй хоккеист должен получить шайбу в момент времени t_*, чтобы послать ее в ворота противника. Значит, он должен после удара первого проскользить не далее чем на расстояние $x_* = l$ (линия атаки).

Как описать скольжение шайбы по льду в Х-системе и в Л-системе, связанной со льдом? Наверняка сила сопротивления движению шайбы – тоже сложная функция скорости относительно льда и воздуха, температуры и шероховатости поверхности… И наверняка об этом написана не одна диссертация. Например, какую зависимость силы сопротивления от скорости шайбы можно ожидать? Если температуру слишком понизить, то между движущейся шайбой и льдом возникнет сухое трение, так что искомую зависимость можно представить в виде прямолинейной функции AOB (рис.2). Если шайба свободно летит в воздухе, то аэродинамическая сила сопротивления приблизительно пропорциональна квадрату скорости – кривая COD. А поскольку в рассматриваемом нами случае шайба и скользит по льду (лед при более высоких температурах покрыт тончайшим слоем воды), и обтекается воздухом, предположим, что эта результирующая сила – прямая EOJ – прямо пропорциональна скорости шайбы в Л-системе, где ее компоненты равны $u + U$, w (рис.1,*б*).

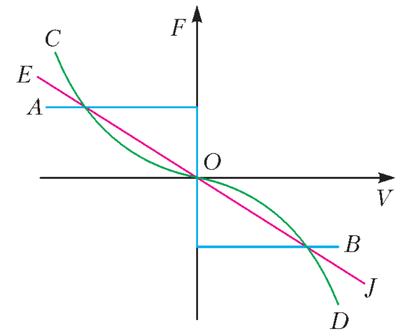


Рис.2. Возможные зависимости силы сопротивления от скорости движения тела по поверхности и в воздухе: AOB – «сухое» трение, сила трения $\vec{F}$ не зависит от модуля скорости $\vec{V}$; COD – аэродинамическая сила сопротивления, $\vec{F} \sim -\left|\vec{V}\right|\vec{V}$; EOJ – вязкое трение, $\vec{F} \sim -\vec{V}$

Итак, компоненты (отрицательного) ускорения шайбы можно записать в виде

$$a_z = -\frac{w}{\tau}, \quad a_x = -\frac{u+U}{\tau}$$

(в постоянную величину $1/\tau$ вошли и коэффициент пропорциональности между силой и скоростью, и масса шайбы). Очевидно, хотя бы из соображений размерности, что τ является некоторым характерным временем, пропорциональным массе шайбы. Учтем далее, что ускорение есть быстрота изменения скорости по времени:

$$a_z = \frac{\Delta w}{\Delta t}, \quad a_x = \frac{\Delta(u+U)}{\Delta t}.$$

Тогда первое из уравнений движения – в направлении, перпендикулярном вектору $\vec{U}$, – примет вид

$$\Delta w = -\frac{\Delta t}{\tau} w.$$

Если бы в правой части стоял знак «плюс», то уравнение означало бы прирост «банковского вклада»: он пропорционален самому вкладу w и времени Δt. А поскольку тут стоит знак «минус», то это как бы «прирост наоборот», т.е. убыль. Интересно, что таким же уравнением описывается, например, и распад радиоактивного вещества. Его решение выглядит так:

$$w = w_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \qquad (1)$$

где w_0 – значение скорости в начальный момент времени. Аналогичные выкладки можно сделать и для u, т.е. x-компоненты скорости шайбы в Х-системе:

$$\Delta u \equiv \Delta(u+U) = -\frac{\Delta t}{\tau}(u+U).$$

Заметим, что здесь к скорости шайбы u добавлена скорость хоккеистов U. Поскольку она считается постоянной, ее приращение равно нулю ($\Delta U = 0$), так что это ее добавление к скорости u ничему не мешает, зато позволяет записать уравнение, аналогичное уравнению для w. В таком случае и решение уравнения аналогично:

$$u + U = (u_0 + U)e^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (2)$$

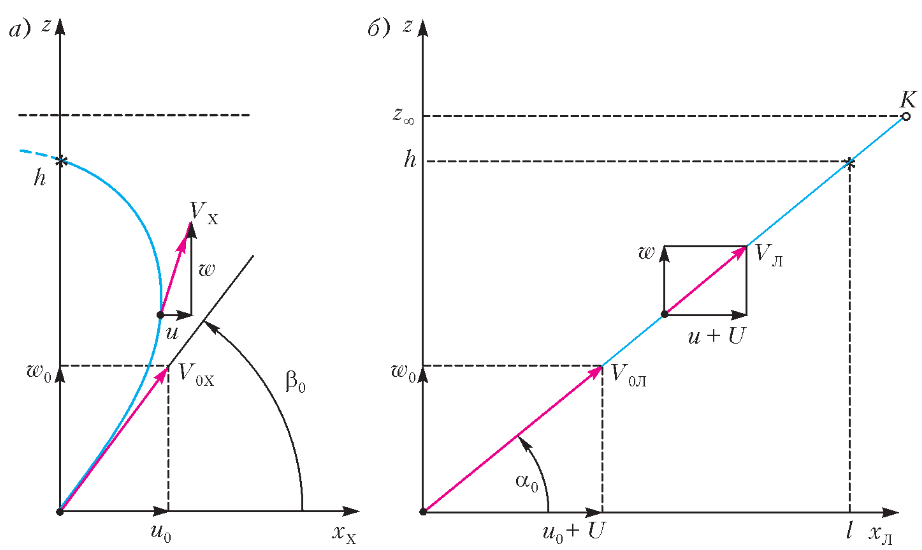


Рис.1. Траектория шайбы: а) в системе координат, связанной с движущимися хоккеистами (Х-система); б) в системе координат, связанной со льдом (Л-система)

Исключив из уравнений (1) и (2) время

(или $e^{-\frac{t}{\tau}}$), получим связь между составляющими скоростей:

$$\frac{w}{w_0} = \frac{u+U}{u_0+U}\text{, или } \frac{w}{u+U} = \frac{w_0}{u_0+U} = \operatorname{tg}\alpha .$$

Это означает, что в Л-системе шайба движется по прямой линии (см. рис.1,*б*), составляющей угол $\alpha \approx \alpha_0$ с направлением движения хоккеистов, хотя обе компоненты скорости и убывают со временем.

Впрочем, это ясно и так: в Л-системе координат движение всегда будет происходить по прямой линии, ибо действующая сила (сопротивления) коллинеарна скорости.

Осталось сделать еще одно усилие и найти координаты шайбы в Л-системе. Учтем, что составляющие скорости суть изменения соответствующих координат по времени:

$$w = \frac{\Delta z}{\Delta t},\quad u+U = \frac{\Delta(x+Ut)}{\Delta t}.$$

Поскольку левые части этих уравнений уже известны как функции времени, нужно их проинтегрировать, учитывая, что в момент удара по шайбе ($t = 0$) имеем $x = 0$, $z = 0$. А прелесть экспоненты состоит в том, что сколько ее ни интегрируй (или дифференцируй), получится вновь экспонента.

Итак,

$$z = w_0\tau\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right),\qquad x+Ut = (u_0+U)\tau\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Отсюда видно, что если бы хоккеисты двигались бесконечно долго, то шайба остановилась бы на льду в точке K (см. рис.1,*б*) на расстоянии $z_\infty = w_0\tau$ от направления движения ударившего ее хоккеиста, а координата x в Х-системе устремилась бы в $-\infty$ (см. рис.1,*а*). Конечно, в пределах небольшого хоккейного поля скорость шайбы во время атаки столь высока, что ее траектория мало отклоняется от прямой в Х-системе.

Но где же мяч, обещанный в заглавии? Представим себе теперь двух баскетболистов, бегущих вдоль краев площадки с одной и той же скоростью U к корзине противника, и в какой-то момент один из них перебрасывает мяч другому через головы игроков. Для описания движения мяча потребуется еще одно уравнение – для вертикальной составляющей скорости v. Однако при взгляде сверху проекция траектории мяча будет похожа на траекторию шайбы, а при взгляде сбоку – на траекторию центра масс копья (попробуйте нарисовать эту пространственную картину). Но теперь и сила сопротивления уже не будет линейной функцией скорости мяча в воздухе, она будет пропорциональна $-|\vec{V}|\vec{V}$, или, в проекциях на оси x, y, z,

$$\vec{F} \sim -\sqrt{(u+U)^2+v^2+w^2}\left(\vec{e}_x u + \vec{e}_y v + \vec{e}_z w\right),$$

где $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ – орты этой декартовой системы координат. А кроме того, в уравнении для вертикального ускорения добавится ускорение земного тяготения, так что система уравнений станет довольно сложной.

Но какая польза от всех этих рассуждений? Польза есть: как уже было сказано, при заданных значениях h (расстояния между хоккеистами или волейболистами) и l (расстояния до линии атаки) из системы уравнений можно найти вектор скорости $\vec{V}_{0X}$, которую должен сообщить шайбе или мячу первый хоккеист или волейболист, чтобы второй поймал эти предметы в точке $x_* = l$, $z_* = h$. Впрочем, можно представить и другую ситуацию – например, два самолета летят параллельными курсами со скоростью U и в какой-то момент из одного из них на другой перебрасывают новогодний подарок (скажем, шар с конфетами)... Такую задачу решает или бортовой компьютер, или, как в случае спортсменов, опыт, накопленный в долгих тренировках. Так что если вам не удастся эту систему решить в явном виде (в виде конечных формул, как в случае с шайбой) – садитесь за компьютер или поступайте на факультет аэромеханики и летательной техники Московского физико-технического института.

ПРОГУЛКИ С ФИЗИКОЙ

Почему хурма вяжет во рту?

(Начало см. на 4-й странице обложки)

...Важнейшая характеристика смазывающей жидкости – ее динамическая вязкость. Величину динамической вязкости (или коэффициент вязкости) η можно определить, измеряя горизонтальную силу F, которую необходимо приложить к пластинке площадью S, плавающей на тонком слое жидкости толщиной h, чтобы она двигалась со скоростью v (рис.1). В соответствии с формулой, предложенной еще Ньютоном,

$$\eta = \frac{F/S}{v/h},$$

где выражение, стоящее в числителе, называют напряжением сдвига, а стоящее в знаменателе – скоростью сдвига. В Международной системе единиц (СИ) единицей динамической вязкости является $\text{Па}\cdot\text{с}$. Значения вязкости различных жидкостей приведены в таблице.

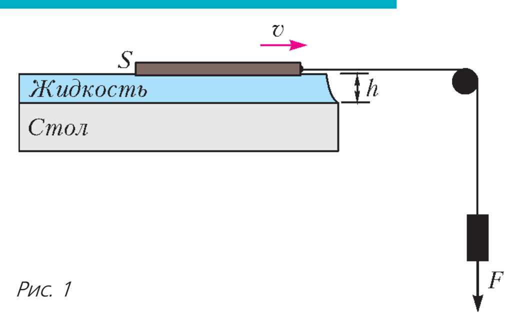


Рис. 1

Жидкость	Динамическая вязкость, Па · с	Жидкость	Динамическая вязкость, Па · с
ацетон	0,0003	глицерин	1,5
вода	0,001	мед	10
молоко	0,003	кетчуп	50
слюна	0,008	горчица	70
машинное масло	0,1–0,7	сметана	100

Хурма «не хочет» быть съеденной, пока ее семена не созреют. Поэтому в хурме, как и во многих других растениях (черноплодная рябина, кофе, чай, черный виноград и др.), содержатся таннины (полифенолы), которые являются дубильными веществами, так как издавна применялись для дубления кожи. Таннины обладают способностью связываться с белками и объединять их в конгломераты (рис.2), в результате чего вязкость раствора резко возрастает, а белки выпадают в осадок.

(Продолжение см. на с. 54)

Одной рукой узелок не развяжешь!

А.ПОЛЯНСКИЙ

О ЧЕМ ЖЕ ПОЙДЕТ РЕЧЬ? ДУМАЮ, ЧТО МНОГИЕ СРАЗУ догадались, прочитав название, что мы поговорим об узлах, но не о тех, которые обычно мы завязываем у себя на кроссовках, фартуке, альпинистском снаряжении и т.д., а о целочисленных точках на плоскости. Давайте начнем с определений.

Определение 1. *Узлом* будем называть такую точку на плоскости, у которой обе координаты (по оси x и по оси y) целые.

Определение 2. *Целым* будем называть такой многоугольник (отрезок или вектор) на плоскости, вершины (концы) которого являются узлами.

Замечание. Следует отметить, что все рассуждения, которые мы приведем ниже, не будут зависеть от того, какая у нас система координат – прямоугольная или косоугольная (т.е. когда координатные оси не обязательно расположены под прямым углом, а единичные отрезки по оси x и по оси y не обязательно равны).

Обратим внимание на три очень простых факта, которые читатель сможет самостоятельно доказать.

Факт 1 (правило параллелограмма). *Если вектор $\overrightarrow{AB}$ – целый, а точка C является узлом, то точка D, определяемая равенством $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, также является узлом (рис.1).*

Факт 2 (правило отрезка). *Если целый отрезок AB содержит ровно $n \geq 0$ узлов (не считая концы), то эти узлы делят AB на $n+1$ равный отрезок (рис.2).*

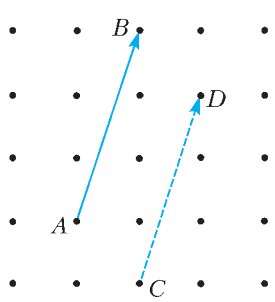


Рис. 1

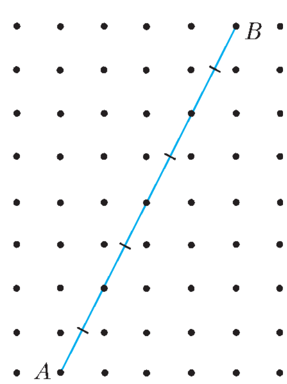


Рис. 2

Факт 3 (правило пяти узлов). *Если на плоскости даны 5 узлов, то середина хотя бы одного из отрезков, соединяющих два из этих узлов, также является узлом (рис.3).*

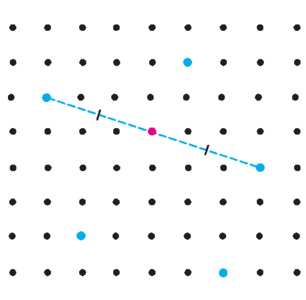


Рис. 3

Итак, приступим к решению задач.

Задача 1 (Всероссийская олимпиада школьников, 1983 год). *Докажите, что внутри выпуклого целого пятиугольника найдется узел.*

Решение. Выберем среди вершин пятиугольника $ABCDE$ две соседние такие, что сумма углов при этих вершинах больше $180°$. Мы можем это сделать, так как если бы таких вершин не было, то мы получили бы неверное неравенство

$$540° = \frac{\angle A + \angle B}{2} + \frac{\angle B + \angle C}{2} + \frac{\angle C + \angle D}{2} + \frac{\angle D + \angle E}{2} + \frac{\angle E + \angle A}{2} \leq 90° \cdot 5 = 450° .$$

Допустим, что это вершины A и B (рис.4). Выберем теперь из вершин E и C ту, которая находится ближе к прямой AB (если они находятся на одинаковом расстоянии, то выберем любую). Допустим, что это вершина C. Тогда рассмотрим точку F такую, что $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BA}$. Нетрудно убедиться, что точка F является узлом и лежит внутри этого пятиугольника.

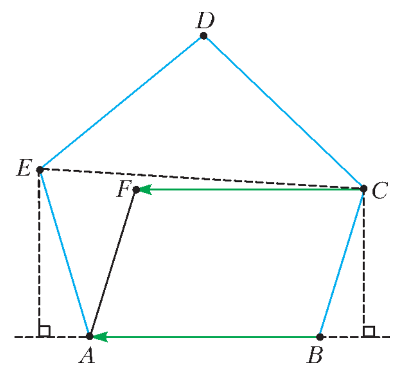


Рис. 4

Попробуйте самостоятельно решить следующее упражнение, используя практически те же рассуждения, что и в задаче 1.

Упражнение 1. Докажите, что если внутри и на границе выпуклого целого четырехугольника нет узлов, кроме вершин, то это параллелограмм.

Перейдем к задачам потруднее.

Задача 2. *Строго внутри целого треугольника расположен целый выпуклый четырехугольник. Докажите, что внутри треугольника расположен по крайней мере еще один узел, отличный от вершин четырехугольника.*

Решение. Если внутри или на границе указанного целого четырехугольника есть узлы, отличные от вершин, то утверждение данной задачи становится очевидным. Поэтому будем считать, что внутри и на границе данного четырехугольника нет узлов, кроме вершин, тогда из упражнения 1 следует, что это параллелограмм.

Будем действовать от противного: предположим, что кроме вершин параллелограмма больше узлов внутри нет. Рассмотрим вершины нашего параллелограмма и одну из вершин треугольника. По правилу пяти узлов середина одного из отрезков, соединяющих вершину треугольника и одну из вершин параллелограмма, является узлом. Следовательно, согласно нашему предположению, эта середина является одной из вершин параллелограмма. Таким образом, вершинами треугольника могут быть только те точки, которые симметричны одной из вершин параллелограмма относительно другой вершины параллелограмма. Значит, вершины треугольника располагаются в одной из

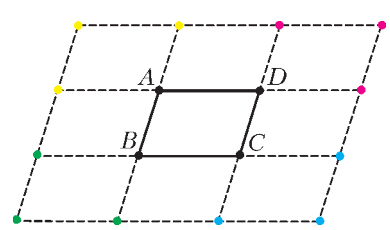


Рис. 5

12 точек (рис.5). Разобьем эти 12 точек на 4 группы (в группу входят точки, расположенные возле соответствующей вершины параллелограмма (см. раскраску на рисунке 5)). По принципу Дирихле среди точек одной из групп нет вершин треугольника. Допустим, что их нет среди красных точек. Нетрудным перебором можно проверить, что точка D лежит либо с той же стороны, что и точки красной группы, относительно любой из сторон треугольника, либо на одной из сторон треугольника, т.е. либо вне треугольника, либо на его границе. Получаем противоречие. Значит, внутри треугольника есть еще одна точка, отличная от вершин параллелограмма. Утверждение задачи доказано.

Задача 3 (Математическое многоборье, 2012 год). *Внутри целого треугольника ABC расположены n > 0 узлов. Какое наибольшее число узлов может находиться на стороне BC (не считая вершины)?*

Ответ: $2n + 1$ узел.

Решение. Пусть на стороне BC находятся m узлов. Тогда в соответствии с правилом отрезка они делят сторону BC на $m + 1$ равный отрезок. Обозначим $\vec{e} = \dfrac{\overrightarrow{BC}}{m+1}$, т.е. $BC = (m+1)\cdot|\vec{e}|$. Рассмотрим среди всех узлов внутри треугольника ABC узлы с наименьшим расстоянием до BC. Проведем через них прямую l, параллельную стороне BC (рис.6). Пусть прямая l пересекает AB в точке B', а AC – в точке C'. Ближайший узел к B' среди узлов, расположенных внутри треугольника ABC и на прямой l, обозначим через B_1, а ближайший узел к C' среди узлов, расположенных внутри треугольника ABC и на прямой l, обозначим через C_1. Тогда $B'B_1 \le |\vec{e}|$, $B_1C_1 \le (n-1)\cdot|\vec{e}|$ и $C_1C' \le |\vec{e}|$ (почему верны эти неравенства?). Поэтому получаем неравенство

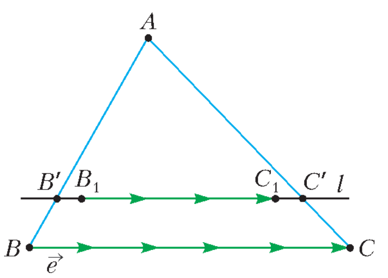


Рис. 6

$$B'C' \le B'B_1 + B_1C_1 + C_1C' \le (n+1)\cdot|\vec{e}|. \qquad (1)$$

С другой стороны, прямая l должна лежать между средней линией (может совпадать с ней) и стороной BC, так как если она лежит «выше средней линии», то, отражая узел A симметрично относительно узла B_1, мы получим узел, лежащий внутри треугольника ABC и находящийся ближе к стороне BC, чем узел B_1 (рис.7). Значит, длина $B'C'$ не меньше длины средней линии, т.е.

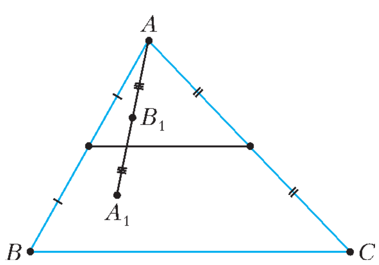


Рис. 7

$$B'C' \ge \frac{BC}{2} = \frac{(m+1)|\vec{e}|}{2}. \qquad (2)$$

Совмещая неравенства (1) и (2), получаем

$$\frac{(m+1)\cdot|\vec{e}|}{2} \le B'C' \le (n+1)\cdot|\vec{e}|.$$

Значит, $m \le 2n+1$.

Построить пример для $m = 2n + 1$ несложно, исходя из решения (главное, чтобы все узлы внутри треугольника лежали на средней линии): $A(0; 2)$; $B(0; 0)$; $C(2n+2; 0)$. Нетрудно проверить, что на стороне BC ровно $2n + 1$ узел, а внутри треугольника ровно n узлов.

Контрольный вопрос. Где в предложенном решении мы использовали условие $n > 0$? Чем плох случай $n = 0$?

Интересный сюжет проглядывается в задаче 4 и упражнениях 2 и 3.

Задача 4 (XXXIV Турнир городов). *Внутри целого треугольника расположены n узлов. Докажите, что из этих n узлов можно выбрать два различных узла таких, что прямая, проходящая через них, содержит одну из вершин треугольника или параллельна одной из сторон, если: а) n = 2; б) n > 2.*

Решение. а) Предположим противное: пусть прямая l, проходящая через два узла P и Q, не параллельна ни одной из сторон треугольника и не проходит ни через одну из вершин треугольника (рис.8). Тогда проведем через вершины A, B, C соответственно три прямые l_a, l_b, l_c, параллельные l. Тогда эти четыре прямые различны, прямая l и еще одна из прямых l_a, l_b, l_c лежат между двух других прямых (допустим, что l и l_b лежат между l_a и l_c). Предположим также, что прямая l лежит также между l_b и l_c. Тогда обозначим через B' точку пересечения l_b и стороны AC, а через P', Q' – точки пересечения прямой l и сторон AC и BC соответственно. Нетрудно проверить, что $PQ < P'Q' < BB'$. Если мы отложим от точки B вектор, равный по длине PQ и сонаправленный $\overrightarrow{BB'}$, то по правилу параллелограмма получим третий узел внутри треугольника ABC, отличный от P и Q. Противоречие с условием: оказалось, что внутри треугольника находятся три узла.

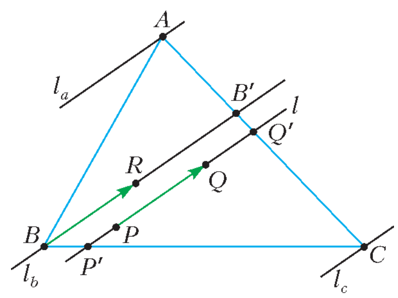


Рис. 8

Задачу б) предлагаем читателям в качестве упражнения.

Упражнения

2. Внутри целого выпуклого многоугольника расположены n узлов. Докажите, что из этих n узлов можно выбрать два различных узла таких, что прямая, проходящая через них, содержит одну из вершин многоугольника или параллельна одной из сторон, если: а) $n = 2$; б) $n > 2$.

3. Внутри целого невыпуклого многоугольника расположено ровно $n > 1$ узлов. Верно ли, что из этих n узлов можно выбрать два различных узла таких, что прямая, проходящая через них, содержит одну из вершин многоугольника или параллельна одной из сторон?

И напоследок осталась еще одна задача.

Задача 5. *Центр описанной окружности O неравнобедренного остроугольного целого треугольника ABC является узлом. Какое наименьшее число узлов может быть внутри этого треугольника ABC?*

Ответ: 3 узла.

Решение. Заметим, что точка пересечения высот H также является узлом, если центр описанной окружности O – узел. Действительно, рассмотрим ромб $AOCO'$ (рис.9). По правилу параллелограмма точка O' – узел. Но тогда для целого вектора $\overrightarrow{OO'}$ верно $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{BH}$ (почему это верно?). Значит, по правилу параллелограмма точка H тоже узел.

Предположим, что внутри треугольника расположены ровно 2 узла O и H (они различны, так как иначе треуголь-

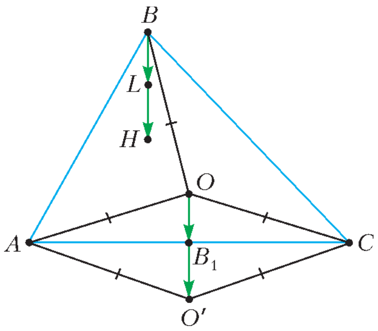


Рис. 9

ник был бы равносторонним). Согласно правилу пяти узлов для точек A, B, C, O, H, середина одного из отрезков является узлом. Но это не может быть середина отрезка, соединяющего точку внутри с вершинами треугольника, так как это была бы вторая точка, лежащая внутри, т.е. треугольник был бы равнобедренным (так как тогда O, H и вершина треугольника лежали бы на одной прямой). Она также не может быть серединой OH, так как тогда мы получили бы еще одну точку внутри треугольника. Значит, середина одной из сторон является узлом. Допустим, это середина B_1 стороны AC. Тогда $\overline{OB_1}$ является целым вектором. Значит, по правилу параллелограмма точка L такая, что $\overline{BL} = \overline{OB_1}$, будет узлом (см. рис.9). Следовательно, середина отрезка BH является узлом, и эта точка не совпадает с O, так как иначе треугольник был бы равнобедренным. Получили третью точку внутри треугольника. Противоречие.

Построить пример для 3 узлов теперь уже несложно. В прямоугольной системе координат рассмотрим точки $A(0;0)$, $B(1;3)$, $C(4;0)$, тогда внутри треугольника лежат такие точки: $O(2;1)$, $H(1;1)$ и $L(1;2)$.

Итак, с помощью совсем простых приемов нам удалось решить достаточно сложные задачи! Ниже – еще несколько задач, которые так или иначе связаны с узлами, но в них иногда требуются знания, выходящие за рамки данной статьи.

Упражнения

4 (Всероссийская олимпиада, 2002 год). В выпуклом многоугольнике (возможно не целом) на плоскости содержится не меньше m^2+1 узлов. Докажите, что в нем найдутся $m+1$ узлов, которые лежат на одной прямой.

5 (Всероссийская олимпиада, 2000 год).[1] Дан целый выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Докажите, что внутри или на границе выпуклого пятиугольника, образованного диагоналями пятиугольника $ABCDE$, находится узел.

6 (Олимпиада ФМЛ 239, Санкт-Петербург, 1998 год). Докажите, что площадь выпуклого целого $2n$-угольника не меньше: а) $\frac{n(n-1)}{2}$; б) $\frac{n^3}{100}$.

7. Докажите, что среди 9 узлов можно выбрать 3 так, чтобы их центр масс был узлом.

К сожалению, многие задачи и другие вопросы, связанные с узлами, нам не удалось разобрать в рамках одной статьи. В частности, в стороне осталась известная формула Пика. Поэтому автор будет очень рад, если читатель не поленится и обратит внимание на предложенную литературу.

Литература

1. *В.В.Прасолов*. Задачи по планиметрии. – М.: МЦМНО, 2007. Глава 24 «Целочисленные решетки».

2. Математика в задачах. Сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую олимпиаду.– М.: МЦМНО, 2009. Статья В.В.Прасолова и М.Б.Скопенкова «Теорема о 12».

3. *В.В.Вавилов, А.В.Устинов*. Многоугольники на решетках. – М.: МЦМНО, 2006.

4. *Н.Б.Васильев*. Вокруг формулы Пика. – «Квант», 1974, №12.

[1] Эта задача предлагалась также на Межнациональном Венгерско-Израильском соревновании 1992 года.

ЛЮБОПЫТНО, ЧТО

Здание знаменитой московской 57-й школы прежде принадлежало частному реальному училищу К.К.Мазинга. Интересно узнать, какие задачи там решали лет 100 назад – например, на испытаниях зрелости в 1899 году. Приводим их в старой орфографии. А вы сможете их решить?

Задачи на испытаніяхъ зрѣлости въ 1899 г.

Частное реальное училище К.К.Мазинга въ Москвѣ.

VI классъ.

Алгебра. Разность коэффиціентовъ 3-го членовъ разложенія по биному Ньютона $\left(\frac{1}{\sqrt{a^3}} + \sqrt[3]{a^2}\right)^m$ равна 90. Опредѣлить число членовъ ариѳметической прогрессіи, 1-й членъ которой равенъ m; сумма всѣхъ членовъ равна коэффиціенту того члена даннаго разложенія, который содержитъ $a^{1,(3)}$ и разность прогрессіи есть число, логариѳмъ котораго при основаніи 0,04 равенъ $-\frac{1}{2}$.

Геометрія. Даны двѣ окружности; площадь правильнаго шестиугольника, описаннаго около меньшаго круга, равна площади равносторонняго треугольника, вписаннаго въ большій кругъ. Вычислить, во сколько разъ периметръ правильнаго треугольника, описаннаго около большаго круга, болѣе периметра квадрата, вписаннаго въ меньшій кругъ, а также найти отношеніе между поверхностями шаровъ, которые получаются отъ вращенія данныхъ круговъ около ихъ діаметровъ.

Тригонометрія. Къ кругу, радіусъ котораго $v = 28{,}3$ дм., проведены изъ внѣшней точки P касательныя, прикасающіяся въ точкахъ R и S. Вычислить стороны, углы и площадь треугольника PRS, если извѣстно, что перпендикуляръ RT, опущенный изъ R на прямую PS, равенъ 40,9 дм.

VII (дополнительный) классъ.

Алгебра. Рѣшить уравненіе: $ax^4 + bx^2 + c = 0$, причемъ: $a = 0{,}4\left(\frac{4}{1-i} - \frac{5}{4-\sqrt{-4}} + \frac{3}{1+i}\right)$; b равно наименьшему значенію выраженія: $2z^2 - z + 10{,}125$ и c равно предѣлу выраженія:

$$\left(2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\right)^2.$$

Геометрія. Въ правильной четыреугольной пирамидѣ плоскій уголъ при вершинѣ равенъ углу между ребромъ и плоскостью. Вычислить двугранные углы при основаніи и между боковыми гранями этой пирамиды.

Приложеніе алгебры къ геометріи. Данъ кругъ радіуса R и внѣ его точка A на разстояніи a отъ центра; построить равнобедренный треугольникъ такъ, чтобы вершина его лежала въ точкѣ A, а основаніе было хордою даннаго круга и равнялось высотѣ 3-ка.

Преподаватель Г.Чистяковъ

Многоликая тень

В.ПТУШЕНКО

Тень – темное пятно, с очерком предмета, от которого тень падает.

Толковый словарь Даля

Вопрос

Тени часто довольно точно передают форму предметов (рис.1). Например, наблюдая за лунными затмениями, Аристотель по форме тени на поверхности Луны сделал вывод, что Земля имеет форму шара. Более того, в чем-то тени даже лучше, чем те тела, которые их отбрасывают. Так, один из персонажей увлекательной книги В.А.Лёвшина «Нулик-мореход» приводил тени как исключительный пример истинных геометрических, точнее планиметрических, объектов в реальном окружающем мире – объектов, имеющих форму, но не имеющих толщины.

Рис. 1

Но случается, что тень не совсем похожа на отбрасывающий ее объект. К примеру, огромная тень на стене может принадлежать мелкому насекомому, вьющемуся около лампы. Неровности поверхности могут причудливо исказить форму тени – как, например, на рисунке 2, где у тени обычного коробка спичек оказалось два «рога». Подобные примеры всем знакомы и не вызывают удивления.

Однако иногда тень, отбрасываемая предметом, просто ставит в тупик: ну откуда, скажем, могла взяться четвертая тень на рисунке 3? Не торопитесь читать объяснение, попробуйте найти ответ сами.

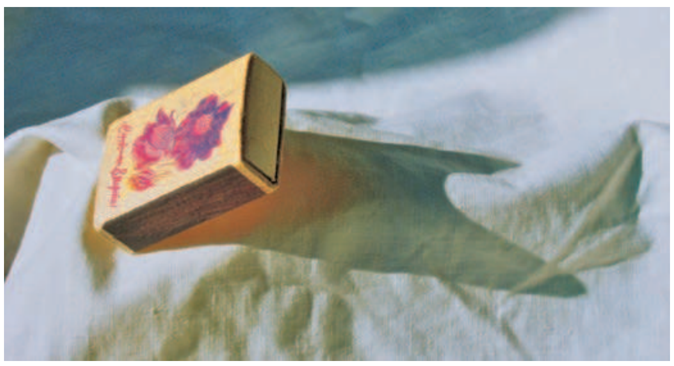


Рис. 2

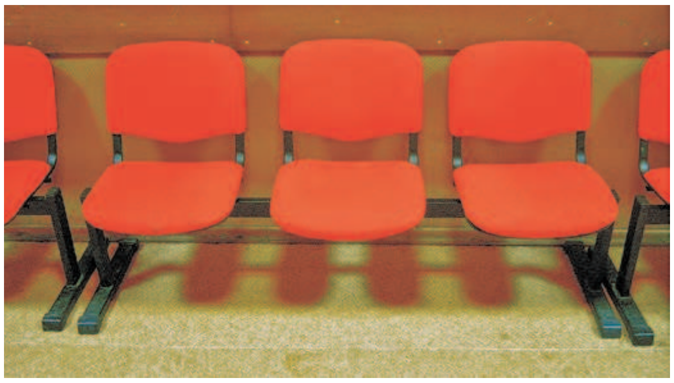


Рис. 3

Замечательно, что приведенная фотография – отнюдь не «постановочная», такая тень получилась сама собой, от обыкновенной мебели, буднично стоящей в самом обыкновенном коридоре. А значит, нечто достойное удивления – всегда рядом с нами, стоит только внимательно приглядеться!

Объяснение

Разгадку этой «размножившейся» тени можно понять, глянув на потолок коридора, в котором стоят кресла (рис.4). Как и всякое длинное помещение, коридор освещается несколькими лампами. Лампы размещены по потолку вдоль коридора периодически, причем этот период настолько удачно согласуется с периодом расположения кресел в сцепленных «тройках», что, в каком бы месте коридора ряд из трех кресел ни оказался, от него всегда получатся «лишние», но достаточно четкие и практически одинаковые тени.

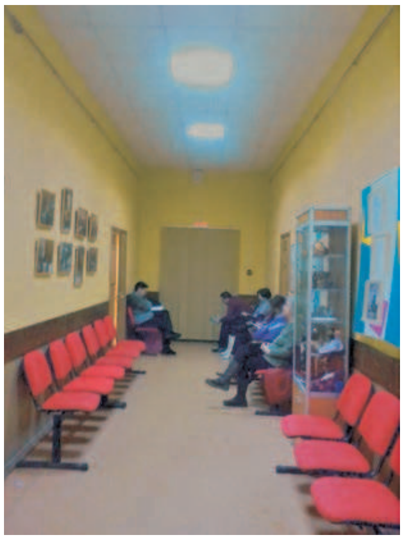


Рис. 4

Покажем, как образуются такие тени. Для простоты не будем рассматривать все лампы, висящие в коридоре и вносящие незначительный вклад в создание рисунка тени и света под нашими креслами; ограничимся только ближайшими к интересующим нас креслам лампам.

Разберем случай, когда три лампы висят симметрично над рядом из трех кресел. На рисунке 5 желтыми прямоугольниками обозначены потолочные лампы, коричневыми – сиденья кресел, толстой черной линией под ними – пол; вертикальная пунктирная линия отмечает ось симметрии. Посмотрим сначала, какие тени создает центральная лампа. Свет от нее совсем не попадает в область между лучами 1 и 4, 2 и 5, 3 и 6. Это – области тени. Участки между ними свет заполняет, конечно, неравномерно, но профилем яркости освещенных участков мы сейчас интересоваться не будем и изобразим его условно, небольшими дугами (см. условный график интенсивности освещенности пола в самом низу рисунка 5).

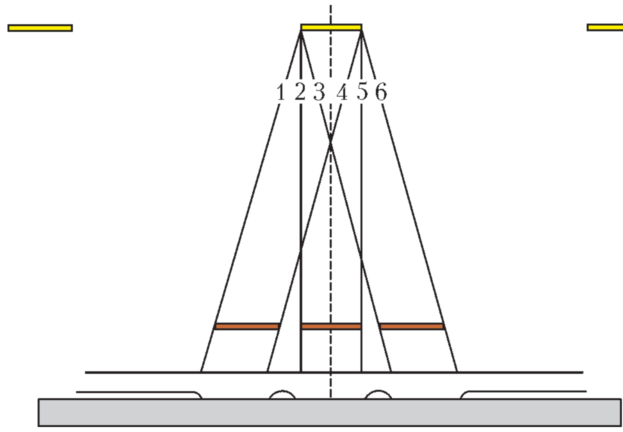


Рис. 5

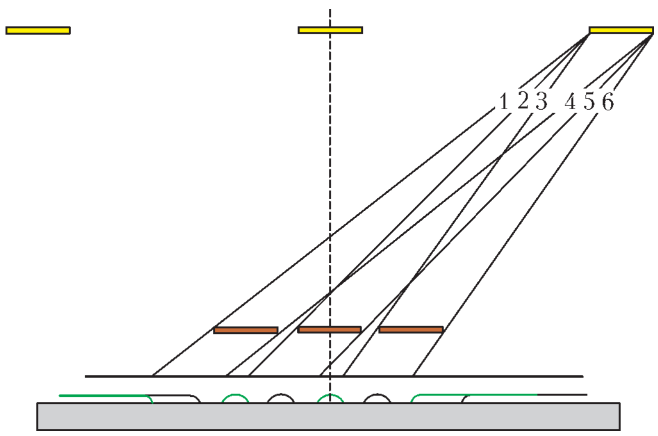


Рис. 6

Что изменит в этой картине правая лампа? Она добавит в пространство под креслами свои «световые пятна». Проведем для нее аналогичное построение (рис.6) и добавим новые «световые пятна» на наш условный график распределения освещенности; для наглядности мы обозначим их зеленым цветом. Видно, что они располагаются практически симметрично, поэтому свет от симметрично расположенной левой лампы ляжет туда же, куда и свет от правой лампы, только расширит не правую, а левую светлую область. На рисунке 7 «вклад» левой лампы показан розовыми линиями. Созданные лампами световые узоры практически совпадут и дадут

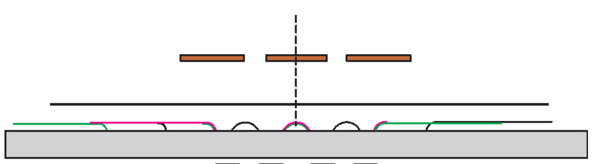


Рис. 7

четкую, контрастную картину. В итоге мы увидим четыре тени, расположенные по внутренним краям боковых кресел и по обоим краям центрального кресла, как это и видно на приведенной на рисунке 3 фотографии.

Выше упоминалось, что в этом «волшебном», хотя и самом обычном коридоре могут получиться и совсем другие тени, столь же четкие и столь же «неправильные». Вот на фотографии на рисунке 8 вы видите тот же ряд из трех кресел, стоящих рядом, но теней на полу теперь... пять. Этот ряд несколько иначе расположен относительно ламп, и, как видите, картина теней уже иная. Попробуем объяснить и ее.

Рис. 8

В этом случае кресла сдвинуты на «полпериода», так что над ними оказываются две лампы (рис.9). Свет от правой лампы оставляет тени в областях между лучами 1 и 4, 2 и 5,

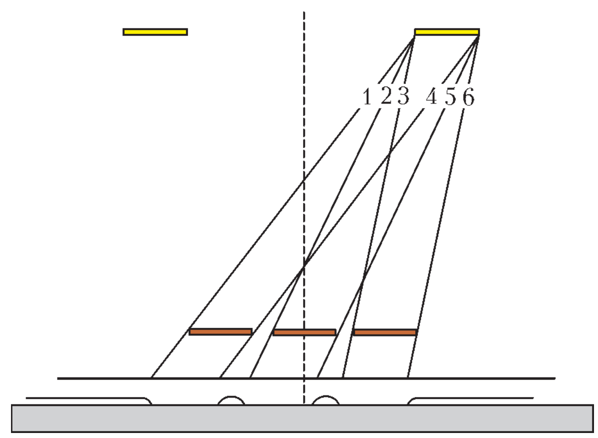


Рис. 9

3 и 6. «Световые пятна» от левой лампы, висящей симметрично, дорисуем на графике из соображений симметрии (рис.10; здесь они также обозначены зеленым цветом). Мы

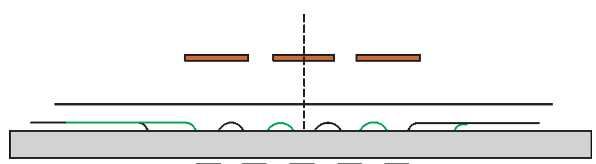


Рис. 10

видим, что суммарный «световой профиль» представляет собой шесть светлых областей, между которыми образуются пять теней практически одинаковой ширины. Свет от двух ламп раздробил тени от трех кресел на пять частей. Причем сделал это столь изящно, что, заглядевшись, и не сразу догадаешься, как такое могло получиться!

Автор благодарен А.Г.Базыкиной, чей интерес к математике позволил ему увидеть это замечательное явление.

Криволинейное движение в задачах

В.ДРОЗДОВ

Рассмотрим серию задач о движении тел вблизи земной поверхности. Пусть их скорости относительно невелики – тогда мы вправе пренебречь сопротивлением воздуха, зависимостью ускорения свободного падения от высоты над поверхностью Земли и кривизной этой поверхности.

Однако и при этих упрощающих предположениях задачи на криволинейное равноускоренное движение представляют для многих абитуриентов серьезную проблему. Для ее преодоления необходимо и достаточно учесть следующее.

Во-первых, не надо запоминать массу второстепенных, частных кинематических формул. Это и трудно, и нецелесообразно. Например, можно ошибочно «вспомнить» формулу, перепутав, скажем, синус с косинусом или плюс с минусом. На самом деле нужно знать две основные формулы – зависимости перемещения $\vec{s}$ и мгновенной скорости $\vec{v}$ от времени:

$$\vec{s} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}, \qquad (1)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t, \qquad (2)$$

где $\vec{v}_0$ – начальная скорость тела, $\vec{g}$ – ускорение свободного падения.

Во-вторых, нужно уметь обращаться с векторами, знать простейшие тригонометрические формулы и свойства квадратичной функции. При проектировании вектора на ось не рационально из его концов опускать перпендикуляры на нее. Лучше воспользоваться формулой $a_x = a\cos\alpha$ – проекция вектора $\vec{a}$ на ось x равна его модулю, умноженному на косинус угла между этим вектором и осью. Не забудьте, что угол α может изменяться от $0°$ до $180°$ включительно. Три простейших случая: параллельность, антипараллельность и перпендикулярность вектора и оси запоминаются сами собой, хотя и следуют из общей формулы.

В-третьих, обязательна тренировка в решении задач: и разбор с карандашом в руках решенных задач, и самостоятельное решение упражнений. Отметим, что среди задач встречается немало объективно трудных.

Для примера рассмотрим тело, брошенное из начала координат с начальной скорость $\vec{v}_0$ под углом α к горизонту. Формула (1) в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси x и y дает соответственно

$$x = v_0\cos\alpha\cdot t, \qquad y = v_0\sin\alpha\cdot t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (1')$$

При этом дальность полета тела по горизонтали равна

$$L = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}, \qquad (3)$$

максимальная высота подъема тела составляет

$$H = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}, \qquad (4)$$

а время полета тела равно

$$T = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}. \qquad (5)$$

Формулы (1′), (3), (4), (5) приведены не для запоминания, а для компактности записи решений разобранных ниже задач.

Задача 1. *Двое играют в мяч, бросая его друг другу. Какой наибольшей высоты достигает мяч во время игры, если от одного игрока к другому он летит T = 2 с?*

Решение. Формулы (4) и (5) образуют систему двух уравнений с тремя неизвестными H, v_0 и α:

$$H = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}, \qquad T = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}.$$

Мы не будем бесплодно искать третье уравнение – оно не нужно, ибо величину $v_0\sin\alpha$ можно рассматривать как единую. Выразив ее из второго уравнения, из первого уравнения найдем

$$H = \frac{(v_0\sin\alpha)^2}{2g} = \frac{gT^2}{8} = 5\ \text{м}$$

(здесь и далее мы полагаем $g = 10\ \text{м/с}^2$).

Очевидно, что определить v_0 и α отдельно невозможно. Но это и не требуется по условию задачи.

Задача 2. *Из шланга, лежащего на земле, бьет под углом $\alpha = 45°$ к горизонту вода с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с. Площадь сечения отверстия шланга $S = 5$ см^2. Определите массу струи, находящейся в воздухе.*

Решение. Ясно, что масса струи, вытекаемая в единицу времени, равна $\rho S v_0$, где $\rho = 10^3\ \text{кг/м}^3$ – плотность воды. Тогда масса воды, находящейся в воздухе, составляет

$$m = (\rho S v_0)T = \rho S v_0\frac{2v_0\sin\alpha}{g} = \frac{2v_0^2\rho S\sin\alpha}{g} \approx 7\ \text{кг}.$$

Задача 3. *Дальность полета снаряда, летящего по навесной траектории, равна максимальной высоте подъема H = = 1200 м. Найдите максимальную высоту h настильной траектории при той же дальности полета.*

Решение. Из формулы (3) и из тождества $\sin 2\alpha = \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ следует, что дальности полета тел, брошенных с одной и той же начальной скоростью под углами α и $\frac{\pi}{2} - \alpha$ к горизонту, равны. Навесной траектории соответствует угол бросания, больший $45°$, настильный – меньший $45°$. В соответствии с условием задачи запишем такую систему уравнений:

$$H = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g},$$

$$L = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g},$$

$$H = L,$$

$$h = \frac{v_0^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{2g}.$$

Эта система очевидно упрощается:

$$\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g},$$

$$h = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{2g},$$

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Далее имеем

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{4},$$

$$\frac{h}{H} = \operatorname{ctg}^2\alpha,$$

откуда находим

$$h = H\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{H}{16} = 75 \text{ м}.$$

Задача 4 (МГТУ имени Н.Э.Баумана). *В потолке помещения проделаны две дыры на расстоянии L друг от друга (рис.1). Мяч находится на расстоянии a от первой дыры (по горизонтали). Под каким углом α к горизонту нужно бросить мяч, чтобы он пролетел через обе дыры? Высота потолка равна h.*

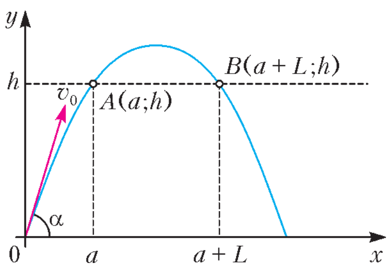


Рис. 1

Решение. Исключив из формул (1′) время t, получим уравнение траектории мяча

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

Подставив сюда координаты точек $A(a;h)$ и $B(a+L;h)$, придем к системе уравнений

$$h = a\operatorname{tg}\alpha - \frac{ga^2}{2v_0^2\cos^2\alpha},$$

$$h = (a+L)\operatorname{tg}\alpha - \frac{g(a+L)^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

Приравняв первые части этих уравнений, имеем

$$L\operatorname{tg}\alpha = \frac{g\left(2aL+L^2\right)}{2v_0^2\cos^2\alpha}, \text{ или } 2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha = g(2a+L).$$

Объединив это равенство с первым уравнением системы, получаем относительно $\operatorname{tg}\alpha$ линейное уравнение

$$a^2\operatorname{tg}\alpha = (2a+L)(a\operatorname{tg}\alpha - h),$$

откуда находим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{a}\frac{2a+L}{a+L}, \text{ и } \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{h}{a}\frac{2a+L}{a+L}\right).$$

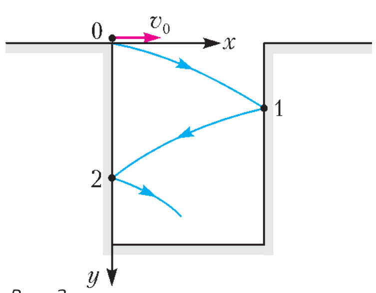


Рис. 2

Задача 5 (МГТУ имени Н.Э.Баумана). *Небольшое тело скользит со скоростью $v_0 = 10$ м/с по горизонтальной плоскости, приближаясь к щели (рис.2). Щель образована двумя отвесными параллельными стенками, находящимися на расстоянии d = 0,05 м друг от друга. Глубина щели H = 1 м. Определите, сколько раз ударится тело о стенки, прежде чем упадет на дно. Удары о стенки абсолютно упругие.*

Решение. При упругих ударах о стенки щели угол отражения равен углу падения, а время полета тела между стенками t постоянно и равно

$$t = \frac{d}{v_0}.$$

Первый удар произойдет на глубине

$$h_1 = v_1 t + \frac{gt^2}{2},$$

второй – на глубине

$$h_2 = v_2 t + \frac{gt^2}{2}$$

от точки первого удара, третий – на глубине

$$h_3 = v_3 t + \frac{gt^2}{2}$$

от точки второго удара и т.д. Здесь

$$v_1 = 0,\ v_2 = gt,\ v_3 = 2gt,\ \ldots,\ v_n = (n-1)gt$$

– вертикальные составляющие скорости тела, n – номер удара. Очевидно, что

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_n = H,$$

или

$$(v_2 + v_3 + \ldots + v_n)t + n\frac{gt^2}{2} = H.$$

Далее последовательно имеем

$$\big(gt + 2gt + 3gt + \ldots + (n-1)gt\big)t + n\frac{gt^2}{2} = H,$$

$$gt^2\big(1+2+3+\ldots+(n-1)\big) + n\frac{gt^2}{2} = H,$$

$$\frac{gt^2}{2}n(n-1) + n\frac{gt^2}{2} = H.$$

Отсюда получаем

$$n = \sqrt{\frac{2H}{gt^2}} = \frac{v_0}{d}\sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 89{,}4.$$

Так как n – натуральное число, то n = 89. Тело ударится о стенки щели 89 раз.

Задача 6. *Упругое тело падает с высоты h на наклонную плоскость. Определите, через какое время T после отражения тело снова упадет на наклонную плоскость. Как время T зависит от угла α наклонной плоскости?*

Решение. На рисунке 3 изображена векторная конфигурация, соответствующая формуле

$$\vec{l} = \vec{v}_0 T + \frac{\vec{g}T^2}{2}.$$

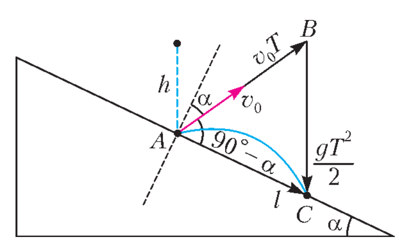


Рис. 3

Так как при упругом ударе модуль скорости тела сохраняется, то

$$v_0 = \sqrt{2gh}.$$

Геометрически очевидно, что треугольник ABC – равнобедренный. Но тогда

$$v_0 T = \frac{gT^2}{2},$$

откуда

$$T = \frac{2v_0}{g} = 2\sqrt{\frac{2h}{g}} .$$

Таким образом, время T от угла α не зависит.

Обратите внимание, насколько геометрия кинематических векторов упрощает решение задачи, и возьмите этот прием на вооружение.

Задача 7. *Небольшой шарик свободно падает на наклонную плоскость и абсолютно упруго отражается от нее. Найдите отношение расстояний между точками последовательных ударов шарика о плоскость.*

Решение. Считаем, что размеры плоскости позволяют шарику многократно отражаться от нее. Поскольку точки удара расположены на плоскости, то разумно ось x направить не горизонтально, а наклонно – вдоль плоскости, а ось y – перпендикулярно ей (рис.4). Пусть угол наклона плоскости α, модуль скорости шарика при первом ударе v_0, а угол отскока $90° - \alpha$. Проектируя уравнение (1) на оси x и y, имеем соответственно

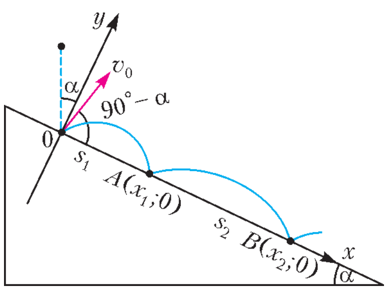


Рис. 4

$$x = v_0 \sin\alpha \cdot t + \frac{g \sin\alpha \cdot t^2}{2} ,$$

$$y = v_0 \cos\alpha \cdot t - \frac{g \cos\alpha \cdot t^2}{2} .$$

Шарик будет двигаться по любой дуге параболы одно и то же время T, определяемое из второго уравнения при $y = 0$, $t = T$:

$$T = \frac{2v_0}{g} .$$

Найдем абсциссы точек ударов:

$$x_1 = v_0 \sin\alpha \cdot T + \frac{g \sin\alpha \cdot T^2}{2} = \frac{4v_0^2}{g} \sin\alpha ,$$

$$x_2 = v_0 \sin\alpha \cdot 2T + \frac{g \sin\alpha \cdot (2T)^2}{2} = \frac{12v_0^2}{g} \sin\alpha ,$$

$$\ldots$$

$$x_n = v_0 \sin\alpha \cdot nT + \frac{g \sin\alpha \cdot (nT)^2}{2} = n(n+1)\frac{2v_0^2}{g} \sin\alpha .$$

Отсюда получим

$$s_1 = x_1 = \frac{4v_0^2}{g} \sin\alpha ,$$

$$s_2 = x_2 - x_1 = \frac{8v_0^2}{g} \sin\alpha ,$$

$$\ldots$$

$$s_n = x_n - x_{n-1} = n\frac{4v_0^2}{g} \sin\alpha .$$

Следовательно,

$$s_1 : s_2 : \ldots : s_n = 1 : 2 : \ldots : n .$$

Весьма интересно, что в физической задаче возник натуральный ряд чисел.

Задача 8. *При какой наименьшей начальной скорости камня, брошенного с поверхности Земли, можно попасть в цель, находящуюся на расстоянии l по горизонтали и на высоте h по вертикали? Под каким углом α к горизонту надо бросить камень?*

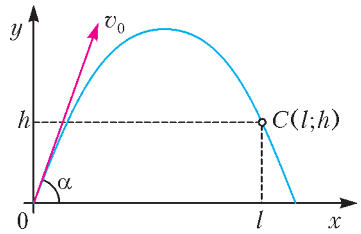


Рис. 5

Решение. Так как траектория тела проходит через точку C с координатами $(l; h)$ (рис.5), то ее координаты удовлетворяют уравнению траектории (см. задачу 4). Запишем его как квадратное относительно $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\frac{gl^2}{2v_0^2}\operatorname{tg}^2\alpha - l\operatorname{tg}\alpha + \left(h + \frac{gl^2}{2v_0^2}\right) = 0$$

и потребуем неотрицательности его дискриминанта:

$$l^2 - 4\frac{gl^2}{2v_0^2}\left(h + \frac{gl^2}{2v_0^2}\right) \geq 0 .$$

Последнее неравенство легко преобразовать к квадратному относительно v_0^2:

$$v_0^4 - 2ghv_0^2 - g^2l^2 \geq 0 .$$

Оно, очевидно, верно при

$$v_0^2 \geq gh + \sqrt{g^2\left(h^2 + l^2\right)} ,$$

т.е. при

$$v_0 \geq \sqrt{g\left(h + \sqrt{h^2 + l^2}\right)} .$$

Следовательно,

$$v_{0\,\min} = \sqrt{g\left(h + \sqrt{h^2 + l^2}\right)} ,$$

чему соответствует нулевой дискриминант, и

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_{\min}^2}{gl} = \frac{h}{l} + \sqrt{\left(\frac{h}{l}\right)^2 + 1} , \quad \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{h}{l} + \sqrt{\left(\frac{h}{l}\right)^2 + 1}\right) .$$

Заметим, что при $h = 0$ (наземная цель) $\alpha = 45°$ и $v_{0\,\min} = \sqrt{gl}$, как и должно быть.

Задача 9. *Под каким углом α к горизонту надо бросить тело с башни высотой H, чтобы оно упало как можно дальше от основания башни? Чему равна наибольшая дальность полета тела $l_{\max}$? Начальная скорость тела равна v_0.*

Решение. Спроецируем радиус-вектор тела

$$\vec{r} = \vec{H} + \vec{s} = \vec{H} + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$$

на оси x и y (рис.6):

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t ,$$

$$y = H + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} .$$

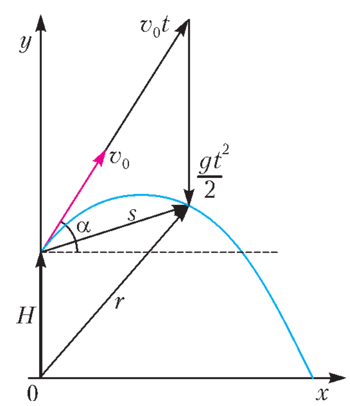


Рис. 6

Исключая отсюда время t, получим уравнение траектории тела

$$y = H + x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2}\left(1 + \operatorname{tg}^2\alpha\right) .$$

Очевидно, что при $y = 0$ дальность полета $l = x$, и для $\operatorname{tg}\alpha$ получим следующее уравнение:

$$l^2g^2\operatorname{tg}^2\alpha - 2lgv_0^2\operatorname{tg}\alpha + \left(l^2g^2 - 2gHv_0^2\right) = 0 ,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^2\left(v_0^2 + 2gH\right) - l^2g^2}}{lg}.$$

Это выражение имеет смысл только при неотрицательном дискриминанте, следовательно,

$$l \le \frac{v_0\sqrt{v_0^2 + 2gH}}{g}, \text{ и } l_{\max} = \frac{v_0\sqrt{v_0^2 + 2gH}}{g}.$$

Наибольшей дальности полета соответствует угол бросания такой, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0^2}{gl_{\max}} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gH}}, \text{ и } \alpha = \operatorname{arctg}\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gH}}.$$

При $H = 0$ получаем $\alpha = 45°$, как и должно быть. При $H > 0$ $\operatorname{tg}\alpha < 1$, значит, $\alpha < 45$.

Задача 10 (МФТИ, 1994). *С верхней точки шара радиусом $R = 54$ см, закрепленного на горизонтальной поверхности стола, соскальзывает без начальной скорости и без трения небольшой шарик. На какую максимальную высоту от стола поднимется шарик после упругого удара о стол?*

Решение. Прежде чем приступить к кинематике, необходимо из динамических соображений определить положение точки отрыва A шарика от шара (рис.7). В этой точке

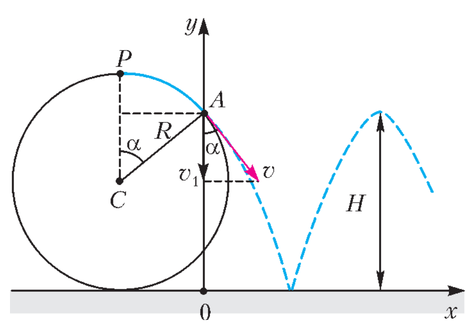


Рис. 7

исчезает сила реакции поверхности шара, и с момента отрыва и до падения на стол ускорение шарика равно $\vec{g}$. Проекция вектора $\vec{g}$ на радиус шара AC равна нормальной составляющей ускорения:

$$g\sin\alpha = \frac{v^2}{R},$$

где v – скорость шарика в точке A. Применив закон сохранения энергии для точек P и A, получим

$$mg\left(R - R\sin\alpha\right) = \frac{mv^2}{2}.$$

Отсюда находим

$$\sin\alpha = \frac{2}{3} \text{ и } v = \sqrt{\frac{2}{3}gR}.$$

Вертикальная составляющая скорости в точке A равна

$$v_1 = v\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}gR}\,\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10}{3}gR}.$$

Она будет увеличиваться в свободном падении и при ударе о стол составит

$$v_2 = v_1 + gT,$$

где T – время от отрыва до удара шарика. Его найдем из квадратного уравнения

$$\frac{gT^2}{2} + v_1T - \frac{5}{3}R = 0,$$

ибо в момент падения тела его ордината равна нулю, откуда получаем

$$T = \sqrt{\frac{10}{3}\frac{R}{g}}\left(\frac{\sqrt{10} - 1}{3}\right), \text{ и } v_2 = \frac{\sqrt{10}}{3}\sqrt{\frac{10}{3}Rg}.$$

Поскольку максимальная высота H подъема шарика определяется лишь его вертикальной составляющей v_2, то по формуле $H = \dfrac{v_2^2}{2g}$ найдем

$$H = \frac{50}{27}R = 1 \text{ м}.$$

Упражнения

1 (мехмат МГУ, 1973). Небольшое тело соскальзывает без начальной скорости с гладкой наклонной плоскости, длина которой $l = 16$ см, а угол наклона $\alpha = 30°$. Затем оно падает на гладкую горизонтальную плоскость, находящуюся на расстоянии $h = 20$ см от нижнего конца наклонной плоскости. На какую наибольшую высоту H от горизонтальной плоскости поднимется тело после удара о нее, если этот удар абсолютно упругий?

2 (мехмат МГУ, 1975). Тело брошено под углом α к горизонту. При каком минимальном угле $\alpha_{\min}$ кинетическая энергия тела может сравняться с его потенциальной энергией (отсчитываемой от точки бросания)?

3 (физфак МГУ, 1977). После взрыва ракеты, летящей вертикально, образовались три осколка одинаковой массы, которые упали на землю одновременно. Расстояния от места старта до места падения двух из них равны $s_1 = 3$ км и $s_2 = 4$ км, причем линии, соединяющие места их падения с местом старта, составляют между собой прямой угол. Каково расстояние s_3 от места старта до места падения третьего осколка?

4 (физфак МГУ, 1978). Зенитное орудие может производить выстрелы во всевозможных направлениях. Определите границу области, которая простреливается из этого орудия, если модуль начальной скорости снаряда равен v_0.

5 (мехмат МГУ, 1979). Теннисный мяч ударяют ракеткой у самой земли, сообщая ему начальную скорость, равную $v_0 = 20$ м/с и направленную под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Мяч летит к вертикальной стене, двигаясь в плоскости, перпендикулярной этой стене, и испытывает со стеной абсолютно упругое соударение. Стена находится от места удара на расстоянии $l = 15$ м. На каком расстоянии от места удара упадет мяч?

6. Тело, брошенное с вышки высотой $h = 10$ м, упало на землю со скоростью, равной $v = 15$ м/с и направленной под прямым углом к начальной скорости. Определите время падения.

7. Какую минимальную скорость должен иметь камень, брошенный мальчиком, чтобы он перелетел дом высотой $H = 25$ м и шириной $L = 12{,}5$ м? Для броска мальчик может выбрать место на любом расстоянии от дома. Ростом мальчика можно пренебречь.

8. Мальчик бросает мяч в вертикальную стенку так, чтобы он после отскока упал точно к его ногам. Найдите начальную скорость мяча, если бросок производится с высоты $h = 1{,}5$ м под углом $\alpha = 45°$ к горизонту, а мальчик находится от стенки на расстоянии $l = 6$ м. Удар абсолютно упругий.

9 (XXXVII Всероссийская олимпиада школьников по физике). Мальчик бросил камень под некоторым углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, при каких значениях угла α камень все время (до падения на землю) будет удаляться от мальчика.

10 (XXXVIII Всероссийская олимпиада школьников по физике). При осаде древней крепости осажденные вели стрельбу по наступающему противнику с помощью катапульт из-за крепостной стены высотой $h = 20{,}4$ м. Начальная скорость снарядов $v_0 = 25$ м/с. На каком максимальном расстоянии $s_{\max}$ от стены находились цели, которых могли достигать снаряды катапульт? Сравните это расстояние с максимальной дальностью полета $L_{\max}$ снаряда катапульты. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Региональный этап XXXIX Всероссийской олимпиады школьников по математике

Третий (региональный) этап Всероссийской олимпиады прошел во всех регионах нашей страны 26 и 27 января 2013 года. Этот этап олимпиады одновременно решает несколько задач: популяризация математики и ознакомление широкого круга школьников с красивыми математическими идеями, выявление лучших юных математиков в регионах России, а также формирование состава участников заключительного этапа (финала) Всероссийской олимпиады. Более доступными для участников олимпиады стали задачи 1, 2, 5 для 9 класса, 1 для 10 класса и 2 для 11 класса, а более трудными (близкими по сложности к заданиям финала) стали задачи 4 и 7 для 9 класса, 4 и 8 для 10 класса и 4 для 11 класса.

ЗАДАЧИ

9 класс

Первый день

1. Даны натуральные числа M и N, большие десяти, состоящие из одинакового количества цифр и такие, что $M = 3N$. Чтобы получить число M, надо в числе N к одной из цифр прибавить 2, а к каждой из остальных цифр прибавить по нечетной цифре. Какой цифрой может оканчиваться число N? Найдите все возможные ответы.

Н.Агаханов

2. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть B_1H – высота треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что точка H лежит на биссектрисе угла CAB.

Н.Агаханов

3. Можно ли разбить клетчатую доску 12×12 на уголки из трех соседних клеток  так, чтобы каждый горизонтальный и каждый вертикальный ряд клеток доски пересекал одно и то же количество уголков? (Ряд пересекает уголок, если содержит хотя бы одну его клетку.)

Д.Храмцов

4. По кругу выписаны 1000 чисел. Петя вычислил модули разностей соседних чисел, Вася – модули разностей чисел, стоящих через одно, а Толя – модули разностей чисел, стоящих через два. Известно, что любое Петино число больше любого Васиного хотя бы вдвое. Докажите, что любое Толино число не меньше любого Васиного.

И.Богданов

Второй день

5. Ненулевые числа a и b таковы, что уравнение $a(x-a)^2+b(x-b)^2=0$ имеет единственное решение. Докажите, что $|a|=|b|$.

Н.Агаханов

6. Тридцать девочек – 13 в красных платьях и 17 в синих платьях – водили хоровод вокруг новогодней елки. Впоследствии каждую из них спросили, была ли ее соседка справа в синем платье. Оказалось, что правильно ответили те и только те девочки, которые стояли между девочками в платьях одного цвета. Сколько девочек могли ответить утвердительно?

Р.Женодаров

7. Серединный перпендикуляр к стороне AC остроугольного треугольника ABC пересекает прямые AB и BC в точках B_1 и B_2 соответственно, а серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямые AC и BC в точках C_1 и C_2 соответственно. Окружности, описанные около треугольников BB_1B_2 и CC_1C_2, пересекаются в точках P и Q. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на прямой PQ.

Л.Емельянов

8. См. задачу М2296 «Задачника «Кванта».

10 класс

Первый день

1. См. задачу 1 для 9 класса.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Окружность Ω, описанная около треугольника ABC, пересекает прямую A_1C_1 в точках A' и C'. Касательные к Ω, проведенные в точках A' и C', пересекаются в точке B'. Докажите, что прямая BB' проходит через центр окружности Ω.

Л.Емельянов

3. Даны три квадратных трехчлена $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ с положительными старшими коэффициентами, имеющие по два различных корня. Оказалось, что при подстановке корней трехчлена $R(x)$ в многочлен $P(x)+Q(x)$ получаются равные значения. Аналогично, при подстановке корней трехчлена $P(x)$ в многочлен $Q(x)+R(x)$ получаются равные значения, а также при подстановке корней трехчлена $Q(x)$ в многочлен $P(x)+R(x)$ получаются равные значения. Докажите, что три числа: сумма корней трехчлена $P(x)$, сумма корней трехчлена $Q(x)$ и сумма корней трехчлена $R(x)$ равны между собой.

Н.Агаханов

4. Можно ли множество всех натуральных чисел разбить на непересекающиеся конечные подмножества $A_1, A_2, A_3,\ldots$ так, чтобы при любом натуральном k сумма всех чисел, входящих в подмножество A_k, равнялась $k + 2013$?

Р.Женодаров

Второй день

5. См. задачу 6 для 9 класса.

6. См. задачу М2294,б «Задачника «Кванта».

7. К двум непересекающимся окружностям ω_1 и ω_2 проведены три общие касательные – две внешние, a и b, и одна внутренняя, c. Прямые a, b и c касаются окружности ω_1

в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно, а окружности ω_2 – в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно. Докажите, что отношение площадей треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равно отношению радиусов окружностей ω_1 и ω_2.

Л.Емельянов

8. См. задачу М2298 «Задачника «Кванта».

11 класс

Первый день

1. Три натуральных числа таковы, что последняя цифра суммы любых двух из них является последней цифрой третьего числа. Произведение этих трех чисел записали на доске, а затем все, кроме трех последних цифр этого произведения, стерли. Какие три цифры могли остаться на доске? Найдите все возможные ответы.

Н.Агаханов

2. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ – приведенные квадратные трехчлены, имеющие по два различных корня. Оказалось, что сумма двух чисел, получаемых при подстановке корней трехчлена $P(x)$ в трехчлен $Q(x)$, равна сумме двух чисел, получаемых при подстановке корней трехчлена $Q(x)$ в трехчлен $P(x)$. Докажите, что дискриминанты трехчленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны.

Н.Агаханов

3. См. задачу 4 для 10 класса.

4. В окружность Ω вписан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB > BC$. Пусть P и Q – середины меньшей и большей дуг AC окружности Ω соответственно. Пусть M – основание перпендикуляра, опущенного из точки Q на отрезок AB. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BMC, делит пополам отрезок BP.

Ф.Ивлев

Второй день

5. Существуют ли такие 2013 различных натуральных чисел, что сумма любых 2012 из них не меньше квадрата оставшегося?

О.Подлипский

6. Три попарно непересекающиеся окружности ω_x, ω_y, ω_z радиусов r_x, r_y, r_z соответственно лежат по одну сторону от прямой t и касаются ее в точках X, Y, Z соответственно. Известно, что Y – середина отрезка XZ, $r_x = r_z = r$, а $r_y > r$. Пусть p – одна из общих внутренних касательных к окружностям ω_x и ω_y, а q – одна из общих внутренних касательных к окружностям ω_y и ω_z. В пересечении прямых p, q, t образовался неравнобедренный треугольник. Докажите, что радиус вписанной в него окружности равен r.

П.Кожевников

7. Найдите все натуральные k такие, что при каждом нечетном $n > 100$ число $20^n + 13^n$ делится на k.

А.Голованов

8. Фигура «мамонт» бьет как слон (по диагоналям), но только в трех направлениях из четырех (отсутствующее направление может быть разным для разных мамонтов). Какое наибольшее число не бьющих друг друга мамонтов можно расставить на шахматной доске 8×8?

О.Дмитриев

Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, П.Кожевников, О.Подлипский

Региональный этап XLVII Всероссийской олимпиады школьников по физике

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс

Задача 1. Скорость погружения стакана

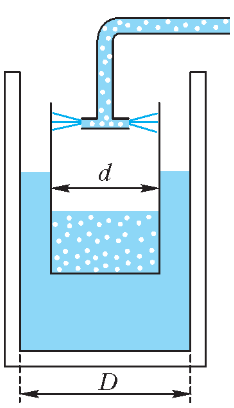


Рис. 1

В цилиндрическом сосуде, внутренний диаметр которого $D = 10$ см, плавает в вертикальном положении узкий длинный тонкостенный цилиндрический стакан диаметром $d = 8$ см (рис.1). В стакан через распылитель наливают воду. Ее массовый расход $\mu = 14$ г/с. Какова скорость v стакана относительно дна цилиндра? Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3.

С.Кармазин

Задача 2

В лаборатории по работе с одаренными детьми экспериментатор Глюк обнаружил два одинаковых теплоизолированных сосуда. В каждый из них было налито одинаковое количество неизвестной жидкости. В первый сосуд Глюк налил почти доверху из стоящего рядом кувшина воду и насыпал немного разогретых металлических опилок. Сосуд оказался заполненным доверху. После установления теплового равновесия температура в сосуде увеличилась на $\Delta t_1 = 2$ °C, а опилки остыли на $\Delta t_2 = 60$ °C.

Затем Глюк проделал опыт со вторым сосудом. В него он насыпал опилок в 10 раз больше, чем в первом опыте, и сосуд вновь оказался заполненным. Ко времени установления теплового равновесия температура в сосуде повысилась на столько же градусов, на сколько понизилась температура опилок.

Определите удельную теплоемкость металлических опилок, если их плотность $\rho_м = 1{,}72$ г/см^3, а удельная теплоемкость воды $c_в = 4{,}20$ Дж/(г·°C).

Д.Домарецкий

Задача 3. Яблоко времени

Побывав на компьютерной выставке, Вовочка в качестве сувенира получил электронные часы в форме яблока, спо-

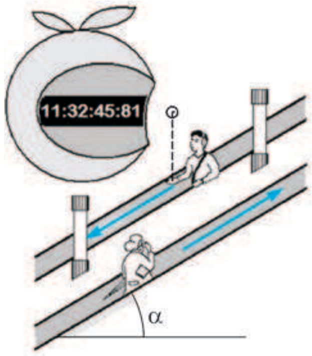


Рис. 2

собные показывать время с точностью до сотых долей секунды. Стоя на эскалаторе, движущемся вниз, он подкинул яблоко вверх и заметил, что в верхней точке траектории часы показали (рис.2) 11 : 32 : 45 : 81. Между тем, его учительница Марьиванна, поднимавшаяся в это время на соседнем эскалаторе, заметила, что в верхней точке электронные часы показали 11 : 32 : 45 : 74. Определите по этим данным скорость движения эскалаторов u, если известно, что они движутся с одной и той же скоростью и наклонены под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Сопротивлением воздуха пренебречь. Примите $g = 10\ \text{м/с}^2$.

В.Бабинцев

Задача 4

На ровном гладком полу установлены два шеста высотой H с небольшими кольцами наверху (рис.3). Расстояние между кольцами d, а их плоскости перпендикулярны линии, соединяющей вершины шестов. По полу может перемещаться маленький робот, функция которого – запускать небольшие мячики с фиксированной скоростью v_0 под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Скорость v_0 подобрана так, что $v_0^2 > 4gH$. При каком минимальном $d \neq 0$ робот может выполнить бросок так, чтобы мячик пролетел сквозь оба кольца? Удар мяча о пол считайте абсолютно упругим. Отдельно рассмотрите случай $gH \ll v_0^2$.

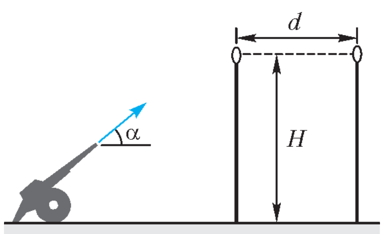


Рис. 3

Е.Савинов

Задача 5. Вольтметры и амперметры

Электрическая цепь (рис.4) состоит из двух одинаковых вольтметров и двух амперметров. Их показания U_1 = = 10,0 В, U_2 = 10,5 В, I_1 = 50 мА, I_2 = 70 мА соответственно. Определите сопротивление резистора R. (Получите для R общую алгебраическую формулу.)

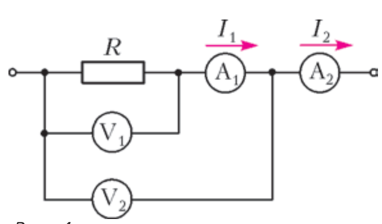


Рис. 4

И.Воробьев

10 класс

Задача 1. Цилиндр в мерном стакане

Деревянный цилиндр диаметром d плавает в мерном стакане, внутренний диаметр которого D (рис.5). При этом нижний край цилиндра находится на уровне отметки $V_{0\text{н}}$ = = 70 мл, нанесенной на шкале мерного стакана, а уровень воды в стакане соответствует объему $V_{0\text{в}}$ = 120 мл. Если цилиндр плавно погружать в воду тонкой спицей так, чтобы его ось оставалась вертикальной, то уровень воды $V_\text{в}$ в мерном стакане и положение $V_\text{н}$ нижнего края цилиндра будут изменяться. В таблице приведены экспериментальные данные (они, естественно, получены с некоторой погрешностью, но не превышающей 1 мл).

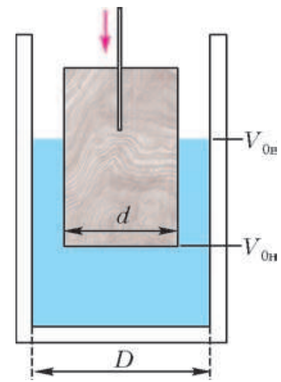


Рис. 5

С помощью этих данных определите:

а) плотность дерева, из которого изготовлен цилиндр;

б) отношение диаметров D/d;

в) объем воды в стакане до погружения в нее деревянного цилиндра.

$V_\text{н}$, мл	70	60	50	40	30	20	10	0
$V_\text{в}$, мл	120	127	134	140	147	150	150	150

С.Кармазин

Задача 2. Цепная реакция

Экспериментатор Глюк решил исследовать силу реакции опоры, действующую со стороны чаши весов на падающую однородную цепочку. Для этого он подвесил цепочку за верхнее звено так, что нижним звеном она почти касалась чаши электронных весов, и затем отпустил ее. В момент начала падения автоматически запустился электронный секундомер. Мгновенные показания весов P и секундомера t передавались на обработку в компьютер. Результаты измерений несколько озадачили экспериментатора:

t, с	0,2	0,4	0,6
P, г	50	200	100

По этим данным определите массу цепочки m, ее длину L и время падения t_1. Силами сопротивления воздуха пренебречь. Считать $g = 10\ \text{м/с}^2$.

М.Замятнин

Задача 3. Воздушный шарик

Воздушный шарик радиусом r = 12 см надут до давления $p_0 = 1{,}2 \cdot 10^5$ Па. Масса оболочки $M_\text{об}$ = 20 г. Шарик погружают в глубокую воду на некоторую глубину h. При каком значении h шарик начнет тонуть? Считайте, что температура воды t = 4 °С и ее плотность $\rho = 10^3\ \text{кг/м}^3$ не зависят от глубины. Воздух считайте идеальным газом.

С.Козел

Задача 4. Тепловая пушка

Диаметр входного отверстия воздухопровода тепловой пушки (рис.6) D_1 = 20 см, выходного – D_2 = 22 см. При стационарной работе вентилятора и нагревателя скорость воздуха на входе и на выходе оказалась одной и той же и равной v = 1,5 м/с при разных давлениях $p_1 = 10^5$ Па и $p_2 = 1{,}05 \cdot 10^5$ Па. Найдите температуру t_2 воздуха на вы-

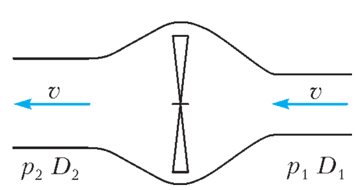


Рис. 6

ходе и мощность N, потребляемую тепловой пушкой. Температура воздуха на входе в пушку $t_1 = 7\ °C$.

И.Воробьев

Задача 5. Электрическая цепь

Электрическая цепь (рис.7) состоит из шести резисторов, сопротивления которых R_1 = 1 кОм, R_2 = 2 кОм, R_3 = = 3 кОм, R_4 = 4 кОм, и трех одинаковых амперметров,

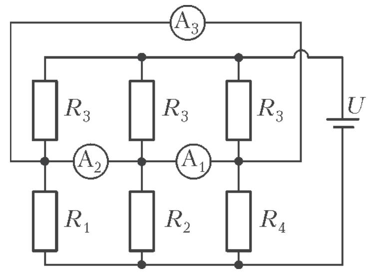


Рис. 7

внутреннее сопротивление r каждого из которых мало ($r \ll R_1$). Вычислите показания амперметров, если напряжение батарейки U = 3,3 В.

Нгуен Нхат Мин

11 класс

Задача 1. Два блока

Два легких блока соединены нерастяжимой легкой нитью (рис.8). На краю нижнего блока радиусом R закреплена точечная масса M, соединенная с нитью. К другому концу нити прикреплен груз массой m, причем $M > m$. Найдите период T малых колебаний системы около положения равновесия.

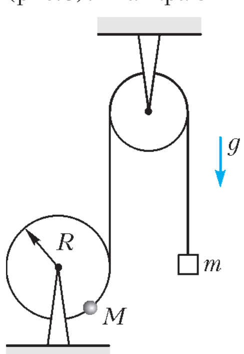


Рис. 8

М.Осин

Задача 2. Треугольный цикл

Говорят, что в архиве лорда Кельвина нашли рукопись с pV-диаграммой, на которой был изображен циклический процесс в виде прямоугольного треугольника ADB. При этом угол D был прямым, а в точке K, лежащей на середине стороны AB, теплоемкость многоатомного газа (CH_4) обращалась в ноль. Газ можно считать идеальным. От времени чернила выцвели, и на рисунке остались видны только координатные оси и точки D и K (рис.9). С помощью циркуля и линейки без делений восста-

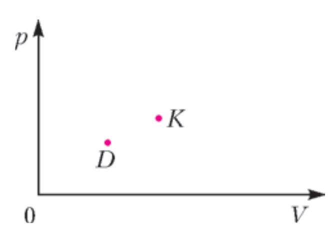


Рис. 9

новите положение треугольника ADB. Известно, что в точке A объем был меньше, чем в точке B.

Е.Савинов

Задача 3. Перевороты

В вертикальном цилиндре сечением S тяжелый поршень массой m лежит на шероховатом дне при открытых отверстиях в верхнем и нижнем торцах так, что в цилиндре находится ν_0 молей воздуха. Отверстия закрывают и переворачивают цилиндр. После этого открывают отверстие в верхнем торце и дожидаются установления равновесия. Затем отверстие закрывают и еще раз переворачивают цилиндр. Снова открывают верхнее отверстие, дожидаются установления равновесия и так далее. Определите максимальное количество воздуха ν_{max}, оказавшееся в цилиндре. Какое количество воздуха ν окажется в цилиндре после многократного повторения процедуры переворачивания? Атмосферное давление p_0, температура постоянна, трение между поршнем и цилиндром отсутствует. Ускорение свободного падения равно g.

В.Баткин, И.Воробьев

Задача 4. Барьер Шоттки

Можно считать, что при комнатной температуре в полупроводнике n-типа (с электронной проводимостью) все атомы донорной примеси ионизированы (каждый отдал по одному электрону). Электроны этих атомов являются свободными носителями заряда (основные носители), а ионизированные доноры «закреплены» в узлах кристаллической решетки. При напылении на поверхность такого полупроводника металлического контакта все основные носители из прилегающей к металлу области полупроводника шириной D переходят в металл, а непосредственно под контактом образуется область объемного заряда ионизированных доноров – барьер Шоттки. Между металлическим контактом и объемом полупроводника возникает контактная разность потенциалов $U_к$ (рис.10). Вычислите ширину D барьера

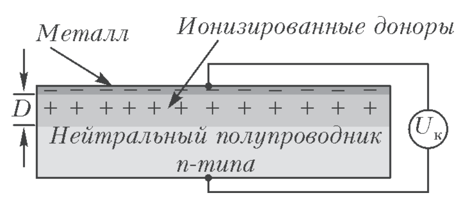


Рис. 10

Шоттки, если донорная примесь распределена в полупроводнике однородно с концентрацией $N_д = 10^{16}\ см^{-3}$, контактная разность потенциалов $U_к$ = 0,7 В, а диэлектрическая проницаемость полупроводникового кристалла ε = 13. Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

С.Кармазин

Задача 5. Электрическая цепь с ключом

Электрическая цепь (рис.11) состоит из конденсатора емкостью C = 125 мкФ, резистора, сопротивление которого R неизвестно, источника постоянного тока с ЭДС $\mathscr{E}$ = 70 В и внутренним сопротивлением $r = R/2$. Вначале конденсатор не заряжен, ток отсутствует. Ключ K замыкают и через некоторое время размыкают. Оказалось, что сразу после размыкания ключа сила тока, текущего через конденсатор, в 2 раза больше силы тока, текущего через конденсатор непосредственно перед размыканием ключа. Найдите количество теплоты, которое выделилось в цепи после размыкания ключа.

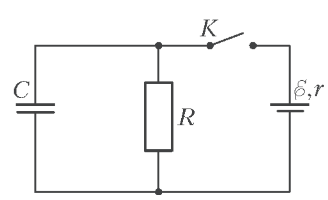


Рис. 11

А.Шеронов

Публикацию подготовили С.Козел, В.Слободянин

XIX Международная олимпиада школьников «Туймаада». Физика

Международная олимпиада «Туймаада» по физике, математике, информатике и химии проводится в Якутске каждое лето начиная с 1994 года – вот уже почти 20 лет. Для всех участников, руководителей команд, членов жюри и гостей олимпиада всегда была праздником, наполненным встречами с оригинальными задачами, известными учеными и самой Якутией, которая предстает краем контрастов, где новые технологии обработки алмазов соседствуют со старинными обычаями, а ледники не тают даже в сорокаградусную жару.

В этой статье будет рассказано о физической части олимпиады, которая проводилась с 12 по 21 июля 2012 года. Как обычно, участники соревновались в двух лигах: старшей и младшей (жюри распределяет участников по лигам в зависимости от их возраста и класса). Олимпиада в каждой лиге состояла из двух туров – теоретического и экспериментального. На теоретическом туре предлагались 4 задачи, каждая из которых оценивалась из 10 баллов, а на экспериментальном туре – 2 задачи по 15 баллов каждая. Условия задач выдавались на русском и на английском языках, а решения участники писали на родном языке, которым для большинства стал язык физики и математики. Согласно программе олимпиады по физике, участникам могут быть предложены задачи на любые темы, содержащиеся в углубленной школьной программе (в младшей лиге – за исключением тем, относящихся к выпускному классу).

Российские и зарубежные школьники, желающие испытать свои силы на олимпиаде «Туймаада» в следующем году, и их преподаватели могут согласовать организационные вопросы, связанные с участием, с жюри олимпиады по физике (fiztuy@mail.ru). Авторы оригинальных задач (как теоретических, так и экспериментальных) могут присылать их методической комиссии (a_v_ch@mail.ru) –лучшие задачи войдут в итоговый комплект и будут опубликованы после олимпиады в образовательных журналах.

Ниже приводятся избранные задачи теоретического тура и список дипломантов олимпиады. Первые две задачи предлагались в младшей лиге, вторые две – в старшей.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ТУРА

Задача 1. Авторская методика заварки чая

Экспериментатор Глюк решил заварить холодный чай по своей авторской методике. Для этого он взял пустую кастрюлю диаметром $d = 23$ см и высотой $h = 13$ см и стал последовательно наливать в нее порции воды объемом $\Delta V = 100$ мл каждая, причем первая порция имела температуру $t_1 = 1\ ^\circ\text{C}$, а каждая следующая – на $\Delta t = 1\ ^\circ\text{C}$ выше, чем предыдущая. Когда кастрюля заполнилась, Глюк высыпал в нее один грамм сухого чая и перемешал. Какую температуру t чая предпочитает Глюк, если судить по его авторской методике? Общая теплоемкость стенок кастрюли $C = 420$ Дж/К, а ее начальная температура $t_0 = 19\ ^\circ\text{C}$. Теплообменом с окружающей средой можно пренебречь. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг · °C).

Ответ в общем виде в данной задаче не требуется.

P.S. Как вы думаете, почему наш персонаж любит чай именно такой температуры? (Вопрос шуточный и в баллах не оценивается.)

Задача 2. Простенькая схемка

Экспериментатор Глюк собрал цепь из одинаковых идеальных источников постоянного напряжения, конденсаторов различных емкостей и резисторов, сопротивления которых указаны на схеме (рис.1). Далее Глюк подключил идеальный амперметр поочередно к двум парам точек цепи.

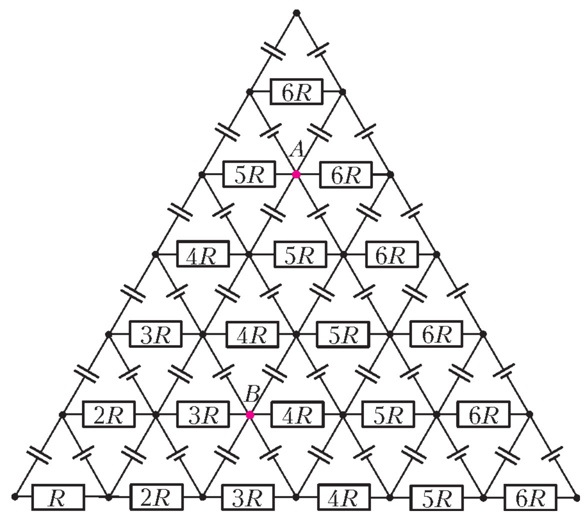


Рис. 1

После каждого подключения амперметра Глюк ждал достаточно долго, чтобы ток перестал изменяться, и только после этого записывал показания. Результаты измерений таковы: $I_{A1} = 20$ мА, $I_{A2} = 720$ мА.

1) Определите, к каким точкам схемы Глюк подключал амперметр в каждом из опытов.

2) Чему будет равна установившаяся сила тока I_{A3} через идеальный амперметр, если его подключить к точкам A и B?

Задача 3. Тонущий стакан

Большой неподвижный герметичный сосуд частично заполнен водой и поддерживается при постоянной температуре T. В воду пустили плавать открытый сверху цилиндрический тонкостенный стакан радиусом r, причем края стакана оказались на h выше, а дно – на H ниже уровня воды (рис.2). Дно стакана утяжелено, так что стакан плавает вертикально. При температуре T давление насыщенных паров воды равно p. Плотность ρ и молярная масса M воды известны. Коэффициент прилипания молекул пара к поверхности воды равен α.

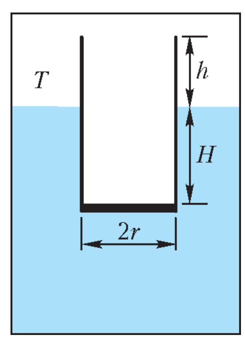


Рис. 2

1) Какая минимальная масса m воды должна накопиться в стакане, чтобы он утонул? Поверхностным натяжением можно пренебречь.

2) Найдите поток Φ молекул, покидающих поверхность воды.

3) Найдите разность концентраций Δn пара над поверхностями воды в стакане и в сосуде, предполагая, что процессы диффузии протекают много быстрее процессов испарения.

4) Оцените время t , через которое стакан утонет.

Коэффициент прилипания – это вероятность того, что молекула пара, налетевшая на поверхность воды, присоединится к воде. Поток молекул – это количество молекул, отнесенное к площади и ко времени.

Задача 4. Микроэлектромеханическое устройство

Микроэлектромеханические системы (МЭМС) – это устройства, сочетающие одновременно электрические и механические функции. Они нашли широкое применение за счет миниатюрности и технологий, полностью совместимых со стандартными полупроводниковыми циклами. Данная задача посвящена одному из самых распространенных электромеханических преобразователей – электростатическому.

В качестве модели рассмотрим плоский конденсатор, имеющий пластины площадью S, одна из которых неподвижна, а другая прикреплена к пружине жесткостью k и может перемещаться в вертикальном направлении (рис.3). Обкладки конденсатора подключены к источнику регулируемого постоянного напряжения. В начальном состоянии напряжение источника равно нулю, а верхняя пластина покоится на расстоянии d от нижней. Электрическим сопротивлением цепи можно пренебречь во всех случаях.

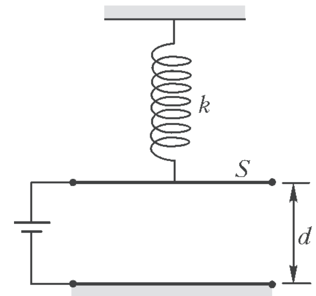


Рис. 3

1) Определите электростатическую силу F_1, действующую на верхнюю пластину конденсатора со стороны нижней, сразу после резкой подачи на конденсатор напряжения U_1.

2) Напряжение на конденсаторе плавно и медленно увеличивают от нулевого значения. При каком напряжении U_2 пластины схлопнутся?

3) Какое минимальное напряжение U_3 нужно резко подать на конденсатор, чтобы его пластины схлопнулись, если сразу после зарядки конденсатора цепь будет разомкнута?

4) Какое минимальное напряжение U_4 нужно резко подать на конденсатор, чтобы его пластины схлопнулись, если поданное напряжение далее будет поддерживаться постоянным?

Дипломанты по младшей лиге

№	*Участник*	*Команда*	*Диплом*
1	Игнат Иоан	Румыния	I
2	Шарипов Динай	Казахстан	II
3	Новицкий Василий	Московская область	III
4	Турсынбек Нурислам	Казахстан	III
5	Иванов Айсиэн	Республика Якутия	III
6	Шевченко Александр	Приморский край	III
7	Дьяконов Радимир	Республика Якутия	III
8	Иванова Светлана	Республика Якутия	III

Дипломанты по старшей лиге

№	*Участник*	*Команда*	*Диплом*
1	Слободсков Игорь	Сборная России	I
2	Дегтяренко Антон	Приморский край	I
3	Маслов Иван	Сборная России	I
4	Ноговицын Петр	Республика Якутия	II
5	Седов Александр	Сборная России	II
6	Гаврильев Владимир	Республика Якутия	II
7	Кис Алекс	Румыния	II
8	Денисов Артем	Приморский край	II
9	Константинов Федор	Московская область	III
10	Новгородов Айаал	Республика Якутия	III
11	Винокуров Лев	Республика Якутия	III
12	Ключиков Евгений	Приморский край	III

Публикацию подготовили
А.Чудновский, Ю.Григорьев, В.Потапов

Почему хурма вяжет во рту?

(Начало см. на с. 39)

Таким же образом таннины хурмы действуют и на белки слюны – ее вязкость увеличивается, она превращается в клей, во рту становится сухо, и съесть несозревший плод

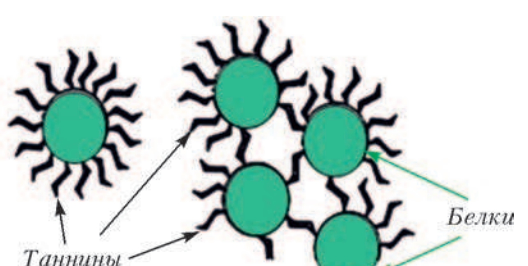


Рис. 2

представляется невозможным. Когда же семена хурмы созревают, концентрация таннинов падает, и хурма уже не вяжет во рту. Однако ее плоды становятся такими мягкими и нежными, что довезти их до жителей крупных городов очень непросто.

К.Богданов

Шахматы и математика

Постоянный автор журнала «Квант», более 30 лет ведущий рубрику «Шахматная страничка», Евгений Гик написал немало книг, посвященных двум родственным темам – математике на шахматной доске и компьютерным шахматам.

В новом солидном томе «Шахматы. Математика. Компьютеры» (издатель «Андрей Ельков», Москва, 2013) автор подводит итоги своих многолетних исследований в обоих направлениях. Эта книга будет интересна как поклонникам шахмат, так и любителям математики и компьютеров.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №1)

1. Теплопроводность металла лучше (выше), чем у пластмассы. Зимой металлические поручни быстро отводят тепло от рук – руки мерзнут. А летом наоборот: желательно как-то охладиться.

2. Назовем апельсины и бананы экзотическими фруктами. По условию задачи каждый из богатырей за один удар сбивает с чудо-березы два экзотических фрукта (либо 2 + 0, либо 0 + 2, либо 1 + 1). Всего с березы упало 2000 + 1000 = 3000 экзотических фруктов, значит, всего богатыри сделали 3000/2 = = 1500 ударов. Но каждый из ударов каждого из богатырей дает ровно одно яблоко, поэтому яблок всего будет 1500.

3. У современных локомотивов – электровозов и тепловозов – две кабины, машинист может управлять локомотивом из любой кабины. Нет необходимости разворачивать локомотив. По схожему принципу работают поезда метро и электрички. Но в некоторых депо поворотный круг до сих пор функционирует: от него лучами расходятся много путей, и он используется в качестве компактной развилки (например, для распределения локомотивов по боксам депо).

4. Конечно, такое могло быть. Например, так: Карлсон видит 9699 + 6, а Малыш видит 9 + + 6696. Тогда у Малыша получается 6705, а у Карлсона 9705 – ровно на 3000 больше!

5. См. рис. 1.

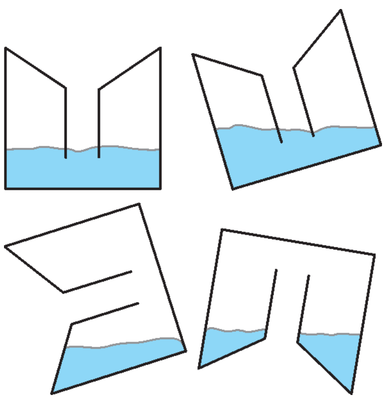


Рис. 1

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6-8»

(см. «Квант» №5-6 за 2012 г.)

6. Один из вариантов разрезания показан на рисунке 2.

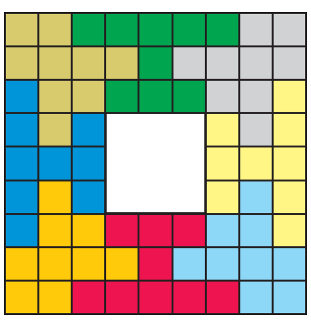


Рис. 2

7. 10.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_N$ – выписанные Пашей натуральные числа. По условию все отношения $\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \ldots, \frac{a_N}{a_{N-1}}$ равны одному и тому же числу. Обозначим его q. Видно, что Пашины числа образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q. Можно считать, что числа выписаны в порядке возрастания и что $q > 1$. А так как все эти числа натуральные, то q – рациональное и его можно записать в виде $q = \frac{u}{v}$, где u и v – взаимно простые натуральные числа. Перемножим все отношения:
$q^{N-1} = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_N}{a_{N-1}} = \frac{a_N}{a_1}$, откуда получим, что
$a_N = a_1 \cdot q^{N-1} = a_1 \cdot \frac{u^{N-1}}{v^{N-1}}$. Значит, a_N должно делиться на u^{N-1} (а a_1 – на v^{N-1}). В пределах от 1 до 1000 самая большая степень делителя у числа $512 = 2^9$. Поэтому $N - 1 \le 9$, т.е. $N \le 10$, а примером с десятью числами служит последовательность степеней двойки: 1, 2, 4, …, 512.

8. $\frac{1}{2}$.

Куб вместе с многогранником (кристаллом) разобьем на восемь равных кубиков тремя плоскостями, проходящими через середины параллельных ребер куба. Заметим, что часть многогранника, попавшая в каждый кубик, составляет половину этого кубика, потому что она содержит три из шести равных пирамид, из которых составлен кубик. (Вообще, каждый куб составлен из шести равных пирамид, основанием которых являются грани куба, а вершиной – центр куба.) Поэтому объем искомого многогранника равен половине объема куба.

9. Вничью.

Обозначим победу Холмса буквой Х, победу Мориарти – буквой М, ничейный исход – буквой Н. Тогда последовательность результатов всех «битв» можно записать в виде «слова» из этих букв, причем из условия следует, что количество букв равно «почти сотне», а строго говоря – меньше 100. Так как за каждой победой Холмса следовали две ничьи, то после каждой буквы Х этого слова идут буквы НН. Кроме того, поскольку после каждой победы Мориарти следовала победа Холмса, а за ней, как мы знаем, опять-таки две ничьи, то после каждой буквы М должно следовать сочетание букв ХНН. А вот после буквы Н может быть что угодно – в условии на это ограничений нет. Следовательно, наше слово составлено из «блоков» трех видов: ХНН, МХНН и Н. Пусть блоков первого вида было a, второго вида – b, третьего вида – c. Тогда, как видно, Холмс одержал $a + b$ побед, Мориарти – b побед, а всего состоялось $3a + 4b + c$ поединков.

Так как Мориарти одержал в полтора раза меньше побед, чем Холмс, то $b = \frac{a+b}{1,5}$, откуда $b = 2a$. Тогда получаем, что Холмс победил в $a + b = 3a$ боях и всего схваток было $3a + 4b + c = 11a + c$. Так как это последнее значение меньше 100, то $11a < 11a + c < 100$, и $a < \frac{100}{11}$, т.е. $a \le 9$.

Далее, Холмс одержал победу более чем в 27% состоявшихся боев, т.е. $\frac{3a}{11a + c} > 0,27$, откуда после несложных преобразований получаем $c < \frac{a}{9} \le \frac{9}{9} = 1$. Поэтому $c = 0$. Таким образом, однобуквенных блоков типа Н в слове нет вообще! Поэтому слово начинается либо с блока ХНН, либо с блока МХНН. В обоих случаях третья буква слова – Н. А это означает, что третья по счету схватка героя-сыщика Шерлока Холмса с профессором преступного мира Мориарти закончилась вничью.

10. 90°.

Требуется найти сумму углов BAE и ACD (рис. 3). Продолжим треугольную сетку и отметим узел K. Ясно, что $\angle BAE = \angle DCK$, так как это углы между стороной и диаго-

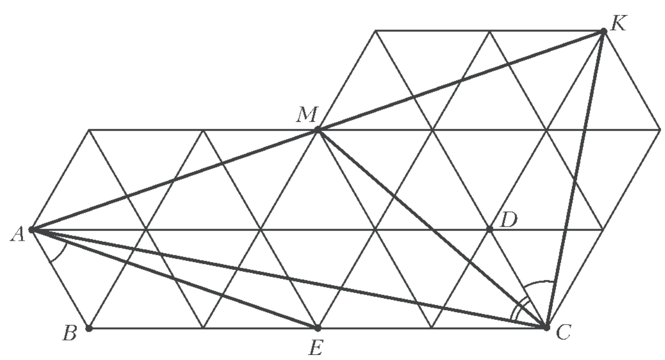


Рис. 3

налью в одинаковых параллелограммах. Теперь покажем, что треугольник ACK прямоугольный. Заметим, что отрезок AK проходит через узел M и делится им пополам. Далее, $CM = AM$ как диагонали в одинаковых параллелограммах. Таким образом, в треугольник ACK медиана CM в два раза меньше стороны AK, поэтому $\angle ACK$ – прямой.

БЫСТРЕЕ БЫСТРОГО, ИЛИ МОЖНО ЛИ ОБОГНАТЬ БИНАРНЫЙ АЛГОРИТМ

1. Будем действовать с конца. Применим к полученному на каком-то шаге числу операции, обратные к заданным в условии, т.е. будем делить на 2 (если число четное) и прибавлять 1. Рассмотрим всевозможные варианты цепочек, которые получаются таким образом. Покажем, что в любой из возможных цепочек появится число, содержащее 3:

$$2002 \xrightarrow{+1} 2003$$

$$2002 \xrightarrow{1/2} 1001 \xrightarrow{+1} 1002 \xrightarrow{+1} 1003, \quad 1002 \xrightarrow{1/2} 501 \xrightarrow{+1} 502$$

$$502 \xrightarrow{+1} 503, \quad 502 \xrightarrow{1/2} 251 \xrightarrow{+1} 252 \xrightarrow{+1} 253, \quad 252 \xrightarrow{1/2} 126$$

$$126 \xrightarrow{1/2} 63, \quad 126 \xrightarrow{+1} 127 \xrightarrow{+1} 128 \xrightarrow{+1} 129 \xrightarrow{+1} 130, \quad 128 \xrightarrow{1/2} 64 \xrightarrow{+1} 65 \xrightarrow{+1} 66$$

$$66 \to 67 \to 68 \to 69 \to 70 \to 71 \to 72 \to 73$$

Каждое из четных чисел 64, 66, 68, 70, 72 при делении на 2 дает число, содержащее 3, что и требовалось доказать.

2. Покажите, что любой набор из пяти последовательных чисел содержит два соседних числа вида $4k+1$ и $4k+2$. Тогда после двух преобразований получаем $4k+1 \to 4k \to 2k$ и $4k+2 \to 2k+1 \to 2k$, что и требовалось доказать.

3. Для $n = 2^q$ имеем $l(n) = l(2^q) = q = \log_2 2^q = \log_2 n$. Если $\nu(n) \ge 2$, то $\log_2 n < \lambda(n) + 1 \le l(n)$.

4. В теореме 4 возьмем $k = \left[\frac{1}{2}\log_2\lambda(n)\right] \le \frac{1}{2}\log_2\lambda(n)$. Тогда из упражнения 3 и неравенства $l(n) \le (1+1/k)(\lambda(n)+1) + 2^k$ получаем

$$1 = \frac{\log_2 n}{\log_2 n} \le \frac{l(n)}{\log_2 n} \le \frac{(1+1/k)(\lambda(n)+1)+2^k}{\lambda(n)} \le$$

$$\le \left(1 + \frac{1}{\left[\frac{1}{2}\log_2\lambda(n)\right]}\right)\left(1 + \frac{1}{\lambda(n)}\right) + \frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}.$$

Остается перейти к пределам и применить «лемму о двух милиционерах».

5. *Указание.* $l(2^{13}+1) = 14$. Докажите, что $l(2731) = 15$.

6. *Указание.* Бинарный метод оптимален для случая $\nu(n) \le 3$. Проверьте, что для чисел вида $2^{2q} - 1 = (2^q - 1)(2^q + 1)$ метод множителей работает быстрее бинарного метода.

7. *Указание.* Рассмотрите числа вида $2^r(2^q - 1)$.

8. Можно.

Докажем по индукции, что можно получить любой многочлен вида $f_n = x^n + 1$. Основание индукции для $n = 1$ и $n = 2$ выполнено по условию (на доске написаны многочлены $x + 1$ и $x^2 + 1$). Предположим, что на доске уже есть многочлены $f_{n-2} = x^{n-2} + 1$ и $f_{n-1} = x^{n-1} + 1$. Тогда, поскольку

$$f_n = x^n + 1 = (x+1)\left(x^{n-1} - x^{n-2}\right) + x^{n-2} + 1 = f_1\left(f_{n-1} - f_{n-2}\right) + f_{n-2},$$

по условию мы сможем написать на доске и многочлен $f_n = x^n + 1$, что и требовалось.

9. $\sum\limits_{i=1}^{\min(B,T)} \binom{T}{i}$, где $\binom{T}{i} = C_T^i$ – биномиальные коэффициенты.

Указание. Пусть $H(B,T)$ – это максимальный номер этажа, который можно проверить с помощью B шариков при разрешенных T тестах. Ясно, что $H(B,0) = 0$ и $H(1,T) = T$. Для $B \ge 2$ докажите рекуррентную формулу

$$H(B,T) = \sum_{k=1}^{T}\left(H(B-1, T-k) + 1\right).$$

Эту формулу можно переписать так:

$$H(B,T) = H(B-1, T-1) + 1 + H(B, T-1).$$

Затем примените индукцию по упорядоченной паре (B, T): используя свойство биномиальных коэффициентов $\binom{T}{k} = \binom{T-1}{k} + \binom{T-1}{k-1}$, докажите, что

$$H(B,T) = \sum_{i=1}^{\min(B,T)}\binom{T}{i} = \sum_{i=1}^{\min(B-1,\,T-1)}\binom{T-1}{i} + 1 + \sum_{i=1}^{\min(B,\,T-1)}\binom{T-1}{i}.$$

В частности, для двух шариков получается

$$H(2,T) = T + T - 1 + T - 2 + \ldots + 1 = \frac{T(T+1)}{2}.$$

Последовательность этажей, с которой бросается первый шарик (пока не разобьется), будет следующей: T, $2T - 1 = T + T - 1$, $3T - 3 = T + T - 1 + T - 2$ и т.д. Если первый шарик разбивается, то вторым шариком последовательно проверяем этажи с максимального уровня, с которого не разбивался первый шарик. Таким образом, для 105-этажного дома имеем 14 попыток и такую последовательность этажей: 14, 27, 39, 50, 60, 69, 77, 84, 90, 95, 99, 102, 104, 105. Чтобы получить количество попыток для 100-этажного дома, нужно решить неравенство $\frac{T(T+1)}{2} \ge 100$, откуда $T \ge 14$.

Для трех шариков имеем $H(3,T) = \frac{T(T^2+5)}{6}$.

10. $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$.

Занумеруем окошки слева направо числами от 1 до n. Вначале сделаем $\left[\frac{n}{2}\right]$-й выстрел по окошку с номером $\left[\frac{n}{2}\right]$ и последний выстрел сделаем по окошку с номером n. При таком алгоритме стрельбы мишень будет гарантированно поражена. Докажем, что никакая серия из меньшего числа выстрелов не гарантирует поражения мишени. Пусть k_i обозначает номер окошка, по которому делается i-й выстрел. Тогда если сделано не более $\left[\frac{n}{2}\right]$ выстрелов, то для $m = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ условием поражения мишени, находившейся в самом начале в окне с номером m, является равенство $k_i = m + i - 1$ хотя бы для одного из значений i. Но каждый выстрел обеспечивает выполнение не более одного из равенств. Следовательно, существует такое $m_0 \le \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, что $k_i \ne m_0 + i - 1$ для $i = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$. Это означает, что для произвольной серии из не более чем $\left[\frac{n}{2}\right]$ выстрелов существует начальное поражение мишени, при котором она останется непораженной.

12. Будем рассуждать аналогично упражнению 11. Имеем

$F_{m-1} < n \le F_m$. Следуя нашему алгоритму, первый тест проводим с любым деревом, затем проверяем дерево, расположенное на расстоянии F_{m-1} от него. Произведем операцию разрезания окружности в точке с меньшим значением и выпрямление окружности в отрезок (рис.4).

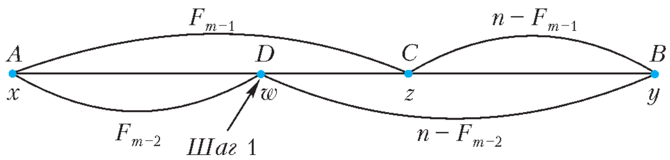


Рис. 4

Дальнейшие построения производим на отрезке целочисленной прямой. Не теряя общности, считаем $x < z$, $y < z$.
Индукционное предположение.
Рассмотрим целочисленный отрезок длины n, $F_{k-1} < n \le F_k$ со следующими свойствами:
– концы отрезка помечены числами x, y;
– внутри отрезка есть точка, помеченная числом z, при этом $x < z$, $y < z$;
– расстояние от точки, помеченной z, до одного конца отрезка не больше F_{k-1}, а до другого конца отрезка не больше F_{k-2}.
Тогда можно найти дерево, которое старше обоих своих соседей, и соответственно помеченную точку, значение которой больше, чем значения соседних точек, не более чем за $k - 3$ шага. (С учетом двух первых шагов для разрезания общее число шагов для окружности составит $k - 1 = k - 3 + 2$.)
Основание индукции очевидно выполнено. Допустим теперь, что индукционное предположение выполнено для случая $k = m - 1$, т.е. чтобы отыскать требуемое дерево на отрезке с заданными свойствами длины не большей чем F_{m-1}, нам нужно не более $m - 4$ шагов. Докажем, что индукционное предположение выполняется для $k = m$.
Протестируем дерево под номером F_{m-2}.
Если $w < z$, то отрезок DB с помеченной точкой c имеет длину $n - F_{m-2}$. Поскольку $F_{m-3} = F_{m-1} - F_{m-2} < n - F_{m-2} \le F_m - F_{m-2} = F_{m-1}$, то применимо индукционное предположение. Поэтому в этом случае $h(n) \le m - 4 + 1 + 2 = m - 1$.
Если $w > z$, то необходимыми свойствами обладает отрезок AC с помеченной точкой d. Этот отрезок имеет длину F_{m-1}, и для него также применимо индукционное предположение. Поэтому и в этом случае $h(n) \le m - 4 + 1 + 2 = m - 1$.
Что и требовалось доказать.

13. *Указание*. Проведите операцию разрезания окружности и разберите все возможные варианты ходов в три вершины.

14. $2m$.

15. 12 рублей.
Обозначим загаданное число через z. Рассмотрим последовательность Фибоначчи $F_{m+2} = F_{m+1} + F_m$, $F_1 = F_2 = 1$. Отметим, что $F_{12} = 144$. Докажем по индукции, что, для того чтобы наверняка угадать загаданное число из не менее чем F_m чисел $m \ge 2$, нужно иметь не меньше чем m рублей.
Основание индукции для $m = 2$ и $m = 3$ выполнено. Когда мы имеем одно число ($m = 2$), мы его просто называем, угадываем и платим 2 рубля. Если $m = 3$, то достаточно проверить одно из двух чисел. При ответе «да» мы платим 2 рубля. Если ответ «нет», то платим 1 рубль, затем спрашиваем другое число, угадываем и платим еще 2 рубля. Всего в этом случае мы тратим 3 рубля.
Пусть чисел не меньше чем F_m. Если множество M чисел, выделенных в первом вопросе, содержит не менее чем F_{m-2} чисел, то в случае $z \in M$ мы имеем ответ «да», платим 2 рубля и по индукции находим это число, потратив не менее $m - 2$ рублей, т.е. всего не менее $2 + m - 2 = m$ рублей. В случае $z \notin M$ оставшееся подмножество, содержащее z, состоит не более чем из F_{m-1} числа, и мы за ответ «нет» платим 1 рубль. Чтобы найти z, по индукции платим $m - 1$ рубль, всего опять не менее $1 + m - 1$ рублей. Если множество M чисел, выделенных в первом вопросе, содержит менее чем F_{m-2} чисел, то в этом случае минимальная затраченная сумма для угадывания числа наверняка будет больше m рублей.
Алгоритм нахождения загаданного числа за m рублей из F_m чисел, $m \ge 2$, понятен из следующего построения. Разобьем множество из F_m чисел на два непересекающихся подмножества, содержащих F_{m-2} и F_{m-1} чисел. Спросим, есть ли указанное число в множестве из F_{m-2} чисел. Если ответ «да», то по индукции, чтобы найти загаданное число, потратим не более чем $2 + m - 2 = m$ рублей. Если ответ «нет», то ищем загаданное число в множестве из F_{m-1} чисел и затратим не более чем $1 + m - 1 = m$ рублей. Что и требовалось.

16. $\lceil \log_2 n \rceil + \lceil \log_2 m \rceil$, где $\lceil x \rceil$ – ближайшее целое число, не меньшее x.
Указание. Сначала с помощью горизонтальных осей симметрии получаем доминошку 1×2, затем прямоугольники 1×4, 1×8 и т.д., пока не накроем прямоугольник $1\times\frac{m}{2}$. Теперь подберем ось симметрии так, чтобы получить прямоугольник $1\times m$. Используем вертикальные оси симметрии и будем последовательно получать прямоугольники $2\times m$, $4\times m$, $8\times m$ ..., пока не накроем прямоугольник $\frac{n}{2}\times m$. На последнем шаге скопируем полученный прямоугольник и сдвинем его параллельно так, что в результате получим прямоугольник $n\times m$.

17. *Указание*. Рассмотрите числа вида q^r. Поскольку $1 < p < q$, то докажите, что в этом случае Васин калькулятор эти числа вычисляет за меньшее число операций, чем Петин калькулятор. Если $p \ne 2$, то очевидно, что число p Петин калькулятор считает за 2 операции, а Васин – за p операций. Для $p = 2$, $q = 3$ рассмотрите число 8. Существуют и другие примеры.

КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ В ЗАДАЧАХ

1. $H = h + l\sin^3\alpha = 22$ см. **2.** $\alpha_{\min} = 45°$.

3. $s_3 = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} = 5$ км.

4. Граница описывается уравнением $y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2$.

5. $L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} - 2l = 10$ м. **6.** $t = \frac{\sqrt{2\left(v^2 - gh\right)}}{g} = 1{,}6$ с.

7. $v_{\min} = \sqrt{g(2H + L)} = 25$ м/с.

8. $v_0 = \frac{l}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{2g}{h + 2l\,\mathrm{tg}\,\alpha}} \approx 10$ м/с. **9.** $\alpha < \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3} = 70{,}5°$.

10. $s_{\max} = \frac{v_0^2}{g}\sqrt{1 - \frac{2gh}{v_0^2}} = 38$ м; $\frac{s_{\max}}{L_{\max}} = \sqrt{1 - \frac{2gh}{v_0^2}} = 0{,}6$.

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП XXXIX ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

1. Цифрой 6.
По условию, $M = 3N$, значит, число $A = M - N = 2N$ четно. Но, по условию, число A составлено из нечетных цифр и двойки. Значит, A оканчивается на 2. Поэтому вдвое меньшее число N оканчивается либо на 1, либо на 6.
Покажем, что N не может оканчиваться на 1. Если N оканчивается на 1, то при его удвоении не происходит переноса десятка из последнего в предпоследний разряд. Значит, пред-

последняя цифра числа $A = 2N$ будет четной, а она должна быть нечетной. Противоречие.

Замечание. Пары чисел N и M, удовлетворяющие условию, существуют, например: $N = 16$, $M = 48$. Более того, таких пар бесконечно много. Все подходящие числа N описываются так: первая цифра – 1 или 2, далее несколько (возможно, ноль) цифр, каждая из которых равна 5 или 6, и последняя цифра 6.

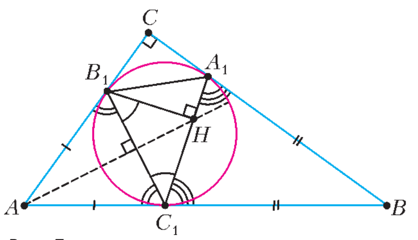


Рис. 5

2. Покажем, что $\angle A_1C_1B_1 = 45°$ (рис.5). Именно, из равнобедренных треугольников AB_1C_1 и BA_1C_1 имеем

$$\angle AC_1B_1 = 90° - \frac{1}{2}\angle BAC \text{ и } \angle BC_1A_1 = 90° - \frac{1}{2}\angle ABC,$$

а тогда

$$\angle A_1C_1B_1 = 180° - \angle AC_1B_1 - \angle BC_1A_1 = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC) = 45°.$$

Итак, острый угол в прямоугольном треугольнике B_1HC_1 равен $45°$; значит, этот треугольник равнобедренный. Поэтому точка H лежит на серединном перпендикуляре к отрезку B_1C_1. Но этим же серединным перпендикуляром является биссектриса равнобедренного треугольника AB_1C_1. Это и значит, что точка H лежит на биссектрисе угла CAB.

3. Нельзя.

Предположим, что такое разбиение нашлось. Рассмотрим первую и вторую снизу горизонтали доски; обозначим их H_1 и H_2. Каждый уголок на доске пересекается с двумя соседними горизонталями. Значит, если уголок пересекается с H_1, то он пересекается и с H_2. Теперь, если горизонталь H_2 пересекает какой-то уголок, не пересекающийся с H_1, то она пересекает больше уголков, чем H_1, что невозможно. Итак, все уголки, пересекающиеся с первой или второй горизонталями, не выходят за их пределы и образуют вместе горизонтальную полосу H размера 2×12.

Аналогично, все уголки, пересекающиеся с первой или второй слева вертикалями V_1 и V_2, образуют вместе вертикальную полосу V размера 12×2. В таком случае все уголки, пересекающиеся с левым нижним квадратом 2×2, должны лежать как в H, так и в V, т.е. должны лежать в этом квадрате. Но тогда квадрат 2×2 должен разбиться на трехклеточные уголки, что невозможно. Противоречие.

4. Пусть v – наибольшее из Васиных чисел, а t – какое-то из Толиных (скажем, $t = |a - d|$, где a, b, c, d – четыре выписанных подряд числа). Достаточно доказать, что $t \ge v$. Среди Петиных чисел встречается число $|a - b|$; значит, $|a - b| \ge 2v$. С другой стороны, $|b - d|$ – одно из Васиных чисел; значит, $|b - d| \le v$. Итак,

$$t = |a - d| = |(a - b) + (b - d)| \ge |a - b| - |b - d| \ge 2v - v = v,$$

что и требовалось доказать.

5. Пусть $|b| \ne |a|$. Тогда $b + a \ne 0$, и данное уравнение – квадратное: $(a+b)x^2 - 2(a^2+b^2)x + (a^3+b^3) = 0$. При этом его дискриминант $\frac{D}{4} = (a^2+b^2)^2 - (a+b)(a^3+b^3) = -ab(a-b)^2$ не равен нулю, так как a, b – ненулевые и $a - b \ne 0$. Значит, уравнение не может иметь ровно одно решение. Противоречие.

Замечание. Заметим, что при $b = -a$ данное уравнение – линейное: $-4a^2x = 0$, и оно имеет единственное решение $x = 0$. Если же $a = b$, то дискриминант обращается в ноль, и у уравнения также ровно одно решение.

6. 17.

Рассмотрим любую девочку. Цвета платьев ее соседок слева и справа могли быть такими: синий–синий, синий–красный, красный–синий, красный–красный. Девочка ответила «да» ровно в первых двух случаях; значит, она сказала «да» ровно в том случае, когда ее соседка *слева* была в синем платье.

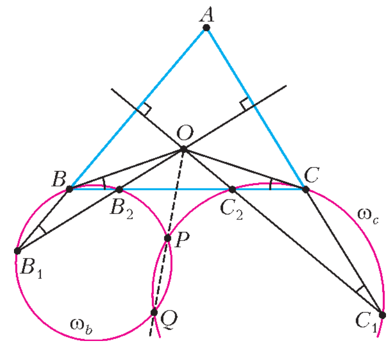


Рис. 6

Итак, поскольку ровно у 17 девочек соседка слева была в синем платье, то и ответ «да» прозвучал 17 раз.

7. Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника ABC (рис.6). Покажем сначала, что прямая OB касается окружности ω_b, описанной около треугольника BB_1B_2. Пусть $AB < BC$; тогда серединный перпендикуляр к стороне AC пересекает сторону BC в точке B_2, а продолжение стороны AB за точку B – в точке B_1 (см. рис.6). Имеем $\angle B_2B_1A = \angle OB_1A = 90° - \angle A$. С другой стороны, из равнобедренного треугольника BOC получаем

$$\angle B_2BO = \angle CBO = 90° - \frac{1}{2}\angle BOC = 90° - \angle A.$$

Таким образом, вписанный угол B_2B_1B равен углу между секущей BB_2 и прямой OB. Из обратной теоремы об угле между касательной и секущей следует, что OB касается ω_b. Если $AB > BC$, то проходит то же рассуждение с заменой точки A на C и наоборот.

Аналогично, прямая OC касается окружности ω_c, описанной около треугольника CC_1C_2. Теперь несложно доказать, что прямая OP проходит через Q. Допустим, что это не так и прямая OP пересекает ω_b и ω_c в различных точках Q_b и Q_c. Тогда по теореме о произведении отрезков секущих имеем $OQ_b \cdot OP = OB^2 = OC^2 = OQ_c \cdot OP$, откуда $OQ_b = OQ_c$; наконец, поскольку точки Q_b и Q_c лежат по ту же сторону от O, что и P, получаем $Q_b = Q_c$, что и требовалось доказать.

10 класс

2. Так как $\angle AA_1C = \angle AC_1C = 90°$, точки A, C_1, A_1 и C лежат на окружности с диаметром AC, значит, $\angle BA_1C_1 = 180° - \angle CA_1C_1 = \angle BAC$ (рис.7). Тогда $\angle BA_1C_1 = \angle BA_1C' = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{BC'} + \overset{\smile}{CA'}\right)$ как угол между хордами. С другой стороны, $\angle BAC = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{BA'} + \overset{\smile}{CA'}\right)$ как вписанный угол; значит, дуги BA' и BC' равны. Поэтому и отрезки BA' и BC' равны. Наконец, отрезки касательных $B'A'$ и $B'C'$ также равны, и, значит, точки B' и B лежат на серединном перпендикуляре к хорде $A'C'$ окружности Ω. Центр окружности Ω также лежит на этом серединном перпендикуляре.

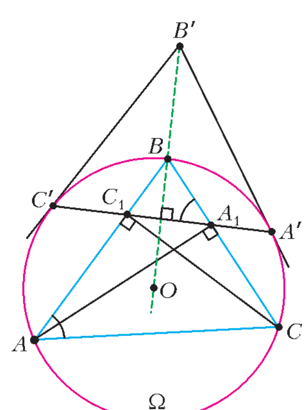


Рис. 7

3. Пусть a_1 и a_2, b_1 и b_2, c_1 и c_2 – пары корней трехчленов $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ соответственно. Рассмотрим трехчлен $S(x) = P(x) + Q(x) + R(x)$. Его значения в точках c_1 и c_2 совпадают со значениями в этих же точках трехчлена $P(x)+Q(x)$, так как $R(c_1)=R(c_2)=0$. Значит, из условия следует, что $S(c_1)=S(c_2)$. Аналогично, $S(a_1)=S(a_2)$ и $S(b_1)=S(b_2)$. Но квадратичная функция принимает равные значения в разных точках только тогда, когда эти точки симметричны относительно абсциссы вершины изображающей ее параболы. Значит, пары точек a_1 и a_2, b_1 и b_2, c_1 и c_2 симметричны относительно одной и той же точки – абсциссы $x=d$ вершины параболы $y=S(x)$. Это и означает, что $a_1+a_2=b_1+b_2=c_1+c_2=2d$.

4. Нельзя.

Предположим, что искомое разбиение существует. Назовем множество A_k *большим*, если оно содержит больше одного элемента. Докажем, что для любого n найдутся n больших множеств, индукцией по n. При $n = 1$ рассмотрим множество A_{k_1}, содержащее единицу; сумма чисел в нем равна $k_1+2013>1$, значит, оно содержит еще хотя бы одно число, т.е. оно большое. Для доказательства индукционного перехода предположим, что мы уже нашли большие множества $A_{k_1},\ldots,A_{k_n}$, где $k_1<\ldots<k_n$. Тогда число k_n+2013 не лежит в множестве A_{k_n} (в противном случае это множество не было бы большим). Значит, это число лежит в каком-то другом множестве $A_{k_{n+1}}$, сумма чисел в котором равна $k_{n+1}+2013>$ $>k_n+2013$; поэтому оно также большое и $k_{n+1}>k_n$.

Пусть $k_1<k_2<\ldots<k_{2014}$ – номера некоторых 2014 больших множеств. Рассмотрим множества $A_1,A_2,\ldots,A_{k_{2014}}$. В их объединении содержится не менее $k_{2014}+2014$ различных чисел, а значит, среди них есть число $d\geq k_{2014}+2014$. Но это число d не может входить ни в одно из множеств $A_{k_1},\ldots,A_{k_{2014}}$, ибо сумма в каждом из них меньше d. Противоречие.

7. Пусть r_1 и r_2 – радиусы окружностей ω_1 и ω_2 соответственно, а O_1 и O_2 – их центры (рис.8). Если $r_1=r_2$, то треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ симметричны относительно точки пересечения прямых O_1O_2 и C_1C_2 и их площади равны. Предположим, что $r_1\neq r_2$; пусть для определенности $r_1<r_2$. Тогда лучи A_2A_1 и B_2B_1 пересекаются в некоторой точке S.

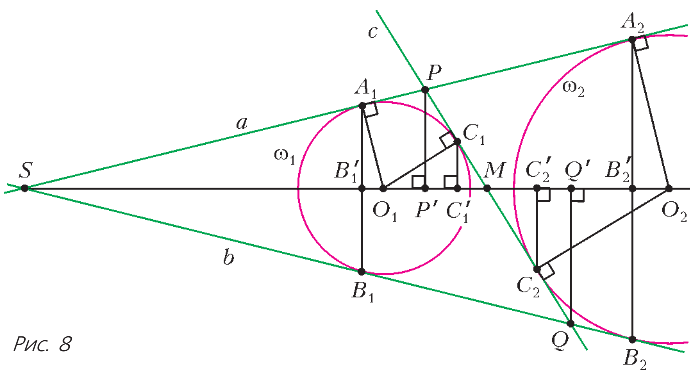


Рис. 8

Обозначим через P и Q точки пересечения прямой c с прямыми a и b соответственно. Мы докажем, что: 1) $\frac{A_1B_1}{A_2B_2}=\frac{r_1}{r_2}$, 2) высоты h_1 и h_2 треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, проведенные из вершин C_1 и C_2 соответственно, равны. Отсюда будет следовать, что $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{A_2B_2C_2}}=\frac{A_1B_1\cdot h_1/2}{A_2B_2\cdot h_2/2}=\frac{r_1}{r_2}$, что и требуется.

1) Прямоугольные треугольники SA_1O_1 и SA_2O_2 подобны, значит, $\frac{SA_1}{SA_2}=\frac{r_1}{r_2}$. Следовательно, равнобедренные треугольники SA_1B_1 и SA_2B_2 подобны с коэффициентом r_1/r_2, откуда и следует нужное утверждение.

2) Обозначим проекции точек B_1, C_1, B_2, C_2, P и Q на линию центров O_1O_2 через B_1', C_1', B_2', C_2', P' и Q' соответственно (проекциями точек A_1 и A_2 на O_1O_2 также являются B_1' и B_2'). Заметим, что длины отрезков $B_1'C_1'$ и $B_2'C_2'$ равны h_1 и h_2 соответственно. Из равенства отрезков касательных к ω_1 имеем

$$SP+PQ-SQ=(SA_1+PA_1)+(PC_1+QC_1)-$$
$$-(SB_1+QB_1)=2PA_1=2PC_1.$$

Аналогично, из равенства отрезков касательных к ω_2 получаем

$$SP+PQ-SQ=(SA_2-PA_2)+$$
$$+(PC_2+QC_2)-(SB_2-QB_2)=2QB_2=2QC_2.$$

Отсюда следует, что $PA_1=PC_1=QB_2=QC_2$. Пусть прямая c пересекает O_1O_2 в точке M. Положим $\alpha=\angle PSM=\angle QSM$, $\beta=\angle SMP=\angle O_2MQ$. Имеем

$$B_1'C_1'=B_1'P'+P'C_1'=A_1P\cos\alpha+PC_1\cos\beta=$$
$$=B_2Q\cos\alpha+QC_2\cos\beta=B_2'Q'+Q'C_2'=B_2'C_2',$$

т.е. $B_1'C_1'=B_2'C_2'$, что и требовалось.

11 класс

1. 000, 250, 500 или 750.

Пусть a, b, c – данные числа. По условию, числа $a+b-c$, $b+c-a$ и $c+a-b$ делятся на 10. Значит, на 10 делится и сумма этих чисел, равная $a+b+c$. С другой стороны, из равенства $a+b+c=(a+b-c)+2c$ и условия задачи следует, что последняя цифра суммы всех трех чисел равна последней цифре числа $2c$. Значит, число c оканчивается на 5 или на 0. Аналогично, на 0 или на 5 оканчиваются числа a и b. Наконец, поскольку сумма $a+b+c$ четна, то и одно из чисел a, b, c также четно. Итак, одно из этих чисел делится на 10, а два остальных – на 5. Тогда произведение делится на 250, а значит, может оканчиваться лишь на 250, 500, 750 или 000. Осталось привести примеры троек чисел, удовлетворяющие условиям, дающие данные последние цифры: $10\cdot10\cdot10=1000$; $5\cdot5\cdot10=250$; $5\cdot5\cdot20=500$; $5\cdot5\cdot30=750$.

2. Пусть a_1 и a_2 – корни трехчлена $P(x)$, а b_1 и b_2 – корни трехчлена $Q(x)$; тогда $P(x)=(x-a_1)(x-a_2)$ и $Q(x)=(x-b_1)(x-b_2)$. Поэтому условие задачи принимает вид

$$(b_1-a_1)(b_1-a_2)+(b_2-a_1)(b_2-a_2)=$$
$$=(a_1-b_1)(a_1-b_2)+(a_2-b_1)(a_2-b_2).$$

Перенося все слагаемые в одну часть, мы получаем

$$(b_1-a_1)(b_1-a_2+a_1-b_2)+(b_2-a_2)(b_2-a_1+a_2-b_1)=0,$$

т.е. $(b_1+a_2-a_1-b_2)(a_1+b_1-a_2-b_2)=0$, или $(b_1-b_2)^2-(a_1-a_2)^2=0$. Это значит, что $|b_1-b_2|=|a_2-a_1|$. Мы доказали, что расстояния между корнями трехчленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны. Но квадраты этих расстояний как раз и равны, согласно формуле корней квадратного уравнения, дискриминантам этих трехчленов.

4. Пусть S – середина BP, O – центр окружности Ω (рис.9). Тогда O – середина отрезка PQ, а S – проекция O на BP. Заметим, что $QA=QC$, так как Q – середина дуги AC. Равнобедренные треугольники AQC и POC подобны, так как $\angle QAC$ и $\angle OPC$ опираются на одну дугу QC. Прямо-

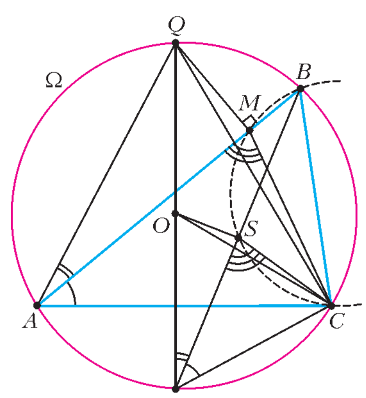


Рис. 9

угольные треугольники AQM и POS подобны, так как $\angle QAM$ и $\angle OPS$ опираются на одну дугу QB. Из доказанных подобий следует, что $\frac{AM}{PS} = \frac{AQ}{PO} = \frac{AC}{PC}$.

Поскольку $\angle MAC = \angle SPC$ (они опираются на одну дугу BC), получаем, что треугольники AMC и PSC подобны. Отсюда следует, что углы BMC и BSC равны как смежные с соответственными углами в этих треугольниках. Значит, точки B, C, M, S лежат на одной окружности.

5. Не существуют.

Предположим, что такие числа нашлись. Поскольку они различны и их 2013, наибольшее из них не меньше 2013; обозначим его через a. Тогда сумма всех остальных не превосходит $2012a$, а его квадрат равен $a^2 \geq 2013a$, т.е. он больше этой суммы. Противоречие.

6. Обозначим вершины данного треугольника через A, B, C, как показано на рисунке 10. Пусть q' – вторая общая внутренняя касательная к ω_y и ω_z, а t' – вторая их общая внешняя касательная. Обозначим через A' и B' точки пересечения прямой t' с q и t соответственно, а через M и N – точки пересечения прямой q' с t и t' соответственно. Обозначим также центры окружностей ω_x, ω_y и ω_z через I_x, I_y и I_z соответственно.

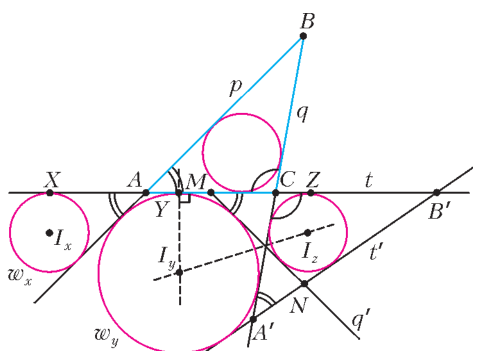


Рис. 10

Прямая p при симметрии относительно прямой I_yY переходит либо в q, либо в q'. Но если она переходит в q, то треугольник ABC равнобедренный. Значит, p и q' симметричны относительно I_yY. С другой стороны, прямые q и q', а также t и t' симметричны относительно линии центров I_yI_z. Значит, $\angle B'A'C = \angle NMB' = \angle BAC$. Кроме того, $\angle ACB = \angle A'CB'$ как вертикальные. Итак, треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны по двум углам.

Наконец, ω_y – их общая вневписанная окружность, касающаяся соответственных сторон AC и $A'C$; значит, коэффициент их подобия равен 1, и эти треугольники равны. Поэтому радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC и $A'B'C$, также равны. Но окружность, вписанная в треугольник $A'B'C$, – это ω_z, откуда и следует требуемое.

7. k = 1, 3, 11, 33.

Заметим сразу, что при любом нечетном n число

$$20^n + 13^n = (20+13)\left(20^{n-1} - 20^{n-2}\cdot 13 + \ldots 13^{n-1}\right)$$

делится на 20 + 13 = 33. Значит, если k является делителем числа 33, то условие задачи выполнено.

Покажем, что все остальные k не удовлетворяют условию.

Предположим противное; тогда числа $A = 20^{101} + 13^{101}$ и $B = 20^{103} + 13^{103}$ делятся на k. Значит, числа

$$20^2 \cdot A - B = (400-169)\cdot 13^{101} = 231\cdot 13^{101}$$

и

$$B - 13^2 \cdot A = 231 \cdot 20^{101}$$

также делятся на k. Однако

$$\text{НОД}\left(231\cdot 20^{101}, 231\cdot 13^{101}\right) = 231 = 7\cdot 33,$$

так что $231 \vdots k$.

Наконец, покажем, что $20^n + 13^n$ не делится на 7. Действительно,

$$20^n + 13^n = \left(20^n - 13^n\right) + 2\cdot 13^n,$$

где первое слагаемое делится на 20 – 13 = 7, а второе – нет. Итак, k является делителем числа 231 и не делится на 7; значит, $33 \vdots k$, что и требовалось доказать.

8. 20.

Из каждого мамонта выпустим три стрелки в тех направлениях, в которых он бьет. Сопоставим стрелку диагонали (не обязательно главной), если мамонт, из которого ведет стрелка, стоит в этой диагонали, а стрелка идет вдоль нее. Тогда каждой диагонали сопоставлено не более двух стрелок: в противном случае две из них будут идти в одном направлении, и один из мамонтов будет бить другого. Поскольку диагоналей всего 30 (по 15 в каждом направлении), стрелок им сопоставлено не более 60, а значит, всего мамонтов не больше 60/3 = = 20.

Три возможных примера расположения 20 мамонтов, не бьющих друг друга, показаны на рисунке 11. Есть и другие расположения.

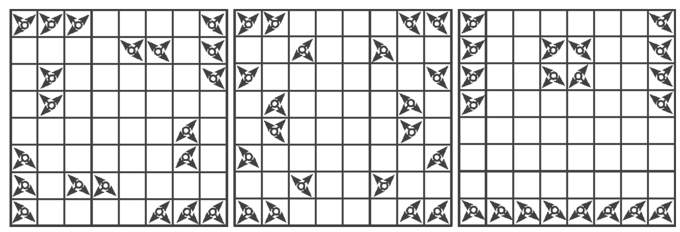


Рис. 11

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП XLVII ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс

1. $v = \frac{4\mu\left(D^2 - d^2\right)}{\rho\pi D^2 d^2} \approx 1$ мм/с.

2. $c_{\text{м}} = \frac{9}{20}\frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{м}}}c_{\text{в}} = 1{,}1$ Дж/(г·°С), где $\rho_{\text{в}} = 1$ г/см^3 – плотность воды.

3. $u = \frac{g\left(t_1 - t_2\right)}{2\sin\alpha} = 0{,}7$ м/с.

4. На рисунке 12 изображена траектория мячика. Расстояние d будет минимальным, если мячик пролетит через кольца либо в точках траектории B и C, либо в точках C и E. Расстояния между этими точками равны соответственно

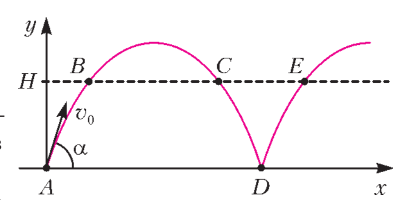


Рис. 12

$$BC = \frac{v_0^2}{g}\sqrt{1-\beta} \text{ и } CE = \frac{v_0^2}{g}\left(1 - \sqrt{1-\beta}\right), \text{ где } \beta = \frac{4gH}{v_0^2} < 1.$$

Таким образом,

$$d = BC \text{ при условии } \frac{gH}{v_0^2} > \frac{3}{16},$$

$$d = CE \text{ при условии } \frac{gH}{v_0^2} \leq \frac{3}{16}.$$

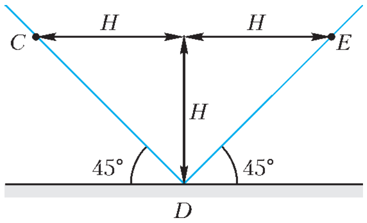


Рис. 13

В случае $gH \ll v_0^2$, т.е. $\beta \ll 1$,

$$d \approx \frac{v_0^2 \beta}{2g} = 2H.$$

Тот же ответ можно получить из простых геометрических соображений, заменив рассматриваемый участок траектории CDE двумя отрезками прямых (рис.13).

5. $R = \dfrac{U_1 U_2}{U_2 I_1 - (I_2 - I_1) U_1} = 323$ Ом.

10 класс

1. На рисунке 14 представлен график зависимости $V_в$ от $V_н$, построенный по данным эксперимента. Из графика видно,

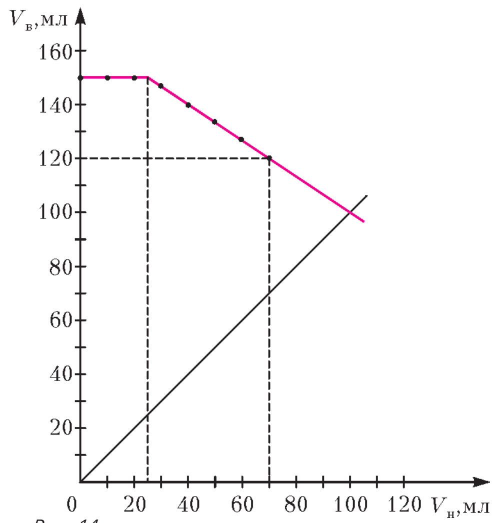


Рис. 14

что при $V_в$ = 150 мм уровень воды перестает изменяться. Отсюда находим плотность дерева:

$$\rho_д = 400 \text{ кг/м}^3,$$

отношение диаметров:

$$\frac{D}{d} = 1{,}58$$

и объем воды в стакане до погружения цилиндра:

$$V_0 = 100 \text{ мл}.$$

2. Сила реакции опоры равна силе, с которой цепочка действует на чашу весов. Она включает в себя две составляющие – статическую и динамическую:

$$F = F_{ст} + F_{дин} = \frac{mg^2t^2}{2L} + \frac{mg^2t^2}{L} = \frac{3mg^2t^2}{2L}.$$

Время падения цепочки на чашу равно

$$t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}}.$$

К этому моменту сила реакции достигает максимального значения $F_{max} = 3mg$, после чего весы будут показывать только вес цепочки, равный mg. С помощью данных таблицы находим массу цепочки:

$$m = 100 \text{ г},$$

ее длину:

$$L = 1{,}2 \text{ м}$$

и время падения:

$$t_1 = 0{,}49 \text{ с}.$$

3. На критической глубине h сила Архимеда равна силе тяжести шарика, а температура воздуха в шарике все время остается постоянной. Отсюда находим

$$h = \frac{p_0 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{gM} - \frac{p_{атм}}{\rho g} \approx 2800 \text{ м},$$

где $p_{атм} = 10^5$ Па – атмосферное давление.

4. $T_2 = T_1 \dfrac{p_2 D_2^2}{p_1 D_1^2} = 356$ К, $t_2 = 83$ °С;

$$N = \frac{7}{8}\pi v \left(p_2 D_2^2 - p_1 D_1^2\right) = 4{,}46 \text{ кВт}.$$

5. Через амперметры A_1, A_2 и A_3 текут токи

$$I_1 = 0{,}1 \text{ мА}, \quad I_2 = 0{,}3 \text{ мА} \quad \text{и} \quad I_3 = 0{,}2 \text{ мА}$$

соответственно. При этом через первый амперметр ток течет слева направо, а через второй и через третий амперметр ток течет справа налево.

11 класс

1. Линейное ускорение груза a связано с угловым ускорением точечной массы α'' соотношением $a = R\alpha''$, где α – угол, образованный радиусом, проведенным из центра нижнего блока к точечной массе, с вертикалью. Угол α можно представить в виде $\alpha = \alpha_0 + \beta$, где $\beta \ll 1$, а α_0 определяется из условия равновесия системы. Записав уравнения движения для груза и точечной массы, получим уравнение гармонических колебаний, из которого найдем период колебаний:

$$T = 2\pi \left(\frac{R}{g}\right)^{1/2} \left(\frac{M+m}{M-m}\right)^{1/4}.$$

2. Теплоемкость в точке K равна нулю, поэтому адиабата является касательной к прямой AB в точке K. Уравнение адиабаты $pV^\gamma = \text{const}$ продифференцируем по объему V:

$$p'_V V^\gamma + \gamma p V^{\gamma - 1} = 0$$

и найдем угловой коэффициент прямой AB:

$$k = p'_V = -\gamma \frac{p_K}{V_K}.$$

Для многоатомного газа $\gamma = 4/3$. Уравнение прямой AB имеет вид

$$p = p_K - \gamma \frac{p_K}{V_K}(V - V_K).$$

Удобно построить эту прямую, найдя значение объема V_1 при нулевом давлении:

$$V_1 = \frac{7V_K}{4}.$$

Из точки K проведем перпендикуляр KE к оси V (рис.15). Точке E соответствует значение объема V_K. Разделив отрезок OE пополам и его левую часть еще пополам, найдем отрезок GE равный $3V_K/4$. На оси V от точки E отложим отрезок EF, равный GE. По построению, $OF = V_1$. Проведем прямую через F и K, на которой находятся точки A и B. Треугольник ADB – прямоугольный, поэтому $DK = KB = KA$. Проведем окружность радиусом DK с центром в точке K. Точки A и B лежат на прямой KF.

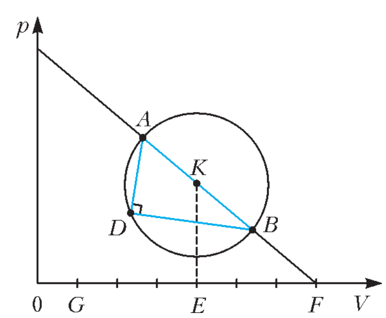


Рис. 15

3. Количество воздуха в цилиндре максимально после первого переворота и равно

$$\nu_{\max} = \nu_0 \frac{p_0 S + 2mg}{p_0 S + mg}.$$

После многократного переворачивания в цилиндре будет количество воздуха

$$\nu = \nu_0 \frac{2\left(p_0 S + mg\right)}{2p_0 S + mg}.$$

4. $D = \sqrt{\dfrac{2\varepsilon_0 \varepsilon U_{к}}{eN_{д}}} = 0{,}32$ мкм.

5. В тепло переходит энергия, запасенная в конденсаторе:

$$Q = \frac{CU_C^2}{2} = \frac{C\left(4\mathscr{E}/7\right)^2}{2} = 0{,}1 \text{ Дж}.$$

XIX МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ТУЙМААДА». ФИЗИКА

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ТУРА

1. Из величины объема кастрюли $V = \left(\pi d^2/4\right)h = 5401$ мл следует, что всего было налито $n = V/\Delta V = 54$ порции воды, а последний 1 мл объема остался для заварки. Средняя температура налитой воды $t_{ср} = \left(t_1 + t_n\right)/2 = 27$ °C. Поскольку теплоемкость кастрюли мала по сравнению с теплоемкостью всей налитой воды, то конечная температура t должна быть близка к $t_{ср}$, однако рассчитаем ее «точно». Согласно уравнению теплового баланса,

$$Ct_0 + c \cdot n\rho\Delta V \cdot t_{ср} = Q = Ct + c \cdot n\rho\Delta V \cdot t,$$

откуда

$$t = \frac{Ct_0 + cn\rho\Delta V t_{ср}}{C + cn\rho\Delta V} = 26{,}85 \text{ °C} \approx 27 \text{ °C}.$$

Поскольку $0 \text{ °C} = 273{,}15$ К, то искомая температура $t = (26{,}85 + 273{,}15)$ К $= 300{,}00$ К. Тогда становится ясно, почему нашему персонажу нравится именно такая температура чая – он просто любит «круглые» числа.

2. Установление постоянного тока через амперметр означает, что вызванные его подключением процессы перезарядки конденсаторов закончились и токи через конденсаторы больше не текут. В таком случае можно упростить схему, заменив каждый конденсатор разрывом цепи (рис.16). Для удобства обозначения узлов на схеме введена система координат (x, y). Рассмотрим произвольный контур, состоящий из двух источников и двух одинаковых резисторов (одну «клеточку» на схеме). Обозначив ЭДС источников через $\mathscr{E}$, сопротивления резисторов через r и направив вправо токи i_1 и i_2 через верхний и нижний резисторы, запишем второе правило Кирхгофа:

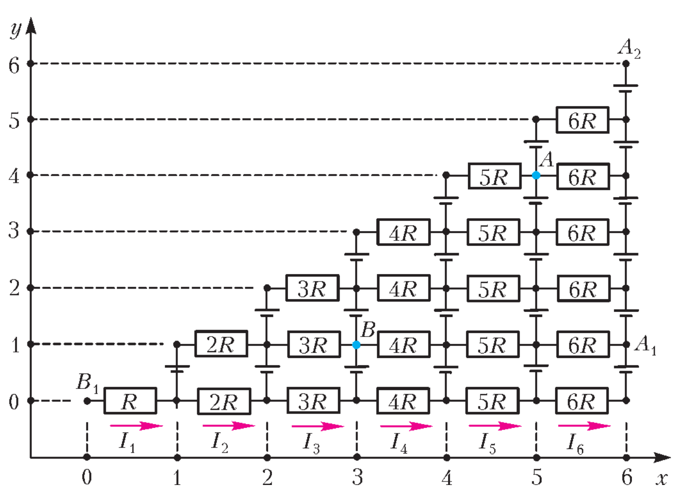


Рис. 16

$$\mathscr{E} - \mathscr{E} = ri_1 - ri_2, \text{ откуда } i_1 = i_2.$$

Это означает, что силы токов через все одинаковые резисторы равны между собой и направлены в одну сторону, поэтому можно обозначить через I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 и I_6 силы токов через резисторы сопротивлениями R, $2R$, $3R$, $4R$, $5R$ и $6R$ соответственно. Отметим, что обнаруженное равенство сил токов наблюдается только в случае идеальных источников.

Подключим амперметр к двум произвольным узлам $C(x_1, y_1)$ и $D(x_2, y_2)$, не лежащим на одной вертикали (в противном случае амперметр окажется подключенным напрямую к идеальным источникам и сила тока через него устремится к бесконечности). Без ограничения общности можно считать, что узел C лежит левее узла D, т.е. $x_1 < x_2$, а ток $I_{А}$ через амперметр направлен от D к C. Чтобы было проще следить по рисунку за ходом рассуждений, удобно выбрать для себя какие-нибудь конкретные положения точек C и D – например, считать C совпадающей с B, а D – с A. Вертикальные прямые, проходящие через точки C и D, разделяют схему на три части: левее C, между C и D, правее D. В двух крайних частях цепи токов нет, так как токи через одинаковые резисторы текут в одну сторону, а на краях цепи заряду негде накапливаться и неоткуда взяться, поэтому далее будем рассматривать только среднюю часть цепи – между точками C и D. Сгруппируем узлы, лежащие на одной вертикали, в обобщенные узлы, тогда токи через источники станут для них внутренними, а внутренние токи не учитываются при записи первого правила Кирхгофа. В обобщенный узел с координатой x_1 втекает ток силой $I_{А}$, а вытекают $x_1 + 1$ токов силой I_{x_1+1}; в обобщенный узел с координатой $x_1 + 1$ втекают те же $x_1 + 1$ токов силой I_{x_1+1}, а вытекают $x_1 + 2$ токов силой I_{x_1+2}; и т.д. до обобщенного узла с координатой $x_2 - 1$, в который втекают $x_2 - 1$ токов силой I_{x_2-1} и вытекают x_2 токов силой I_{x_2}. Тогда, по первому правилу Кирхгофа,

$$I_{А} = (x_1+1)I_{x_1+1} = (x_1+2)I_{x_1+2} = \ldots = (x_2-1)I_{x_2-1} = x_2 I_{x_2},$$

откуда для любого x от $x_1 + 1$ до x_2 находим

$$I_x = \frac{I_{А}}{x}.$$

Рассмотрим следующий контур: начинаем из узла $D(x_2, y_2)$, проходим через амперметр в узел $C(x_1, y_1)$, проходим через резисторы сопротивлениями $(x_1+1)R$, $(x_1+2)R$, …, x_2R по горизонтали до узла с координатой x_2, проходим через $\left|y_2 - y_1\right|$ источников по вертикали до узла D. Запишем для этого контура второе правило Кирхгофа:

$$(y_2 - y_1)\cdot\mathscr{E} = (x_1+1)R\cdot I_{x_1+1} + (x_1+2)R\cdot I_{x_1+2} + \ldots + x_2R\cdot I_{x_2},$$

откуда после подстановки выражения для I_x получим

$$(y_2 - y_1)\mathscr{E} = (x_2 - x_1)RI_{А}.$$

Поскольку амперметр показывает абсолютную величину силы тока, то

$$I_{А} = \frac{\mathscr{E}}{R}\cdot\left|\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right| = \frac{\mathscr{E}}{R}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

где Δx и Δy – модули разностей соответствующих координат точек подключения амперметра. Используя численные данные из условия, запишем

$$\frac{I_{А2}}{I_{А1}} = \frac{\Delta x_1 \cdot \Delta y_2}{\Delta x_2 \cdot \Delta y_1} = 36.$$

Поскольку все модули разностей координат являются натуральными числами от 1 до 6, то последнее равенство может быть выполнено только при $\Delta x_1 = \Delta y_2 = 6$ и $\Delta x_2 = \Delta y_1 = 1$.

Следовательно, в первом опыте амперметр был подключен к точкам $A_1(6, 1)$ и $B_1(0, 0)$, а во втором – к точкам $A_2(6, 6)$ и $B_2(5, 0)$.
Используя данные первого или второго опыта, из выражения для I_A находим

$$\frac{\mathscr{E}}{R} = I_{A1} \cdot \frac{\Delta x_1}{\Delta y_1} = I_{A2} \cdot \frac{\Delta x_2}{\Delta y_2} = 120 \text{ мА}.$$

Отсюда для силы тока, протекающего через амперметр, подключенный к точкам $A(5, 4)$ и $B(3, 1)$, получаем

$$I_{A3} = \frac{\mathscr{E}}{R} \cdot \frac{\Delta y_3}{\Delta x_3} = 180 \text{ мА}.$$

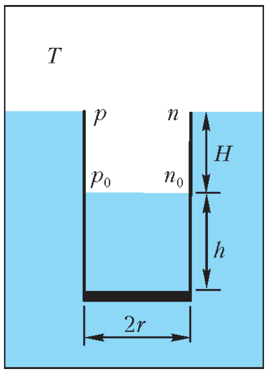


Рис. 17

3. 1) В силу закона Архимеда, разность уровней воды в сосуде и в стакане при погружении стакана будет постоянна и равна H (рис.17). Стакан утонет, когда в нем накопится вода массой $m = \rho\pi r^2 h$.
2) Когда жидкость находится в термодинамическом равновесии со своим паром, поток молекул, вылетающих из жидкости, равен потоку молекул пара, «прилипающих» к поверхности жидкости:

$\Phi = \alpha \cdot \frac{1}{4} nv$, где n – концентрация, v – средняя скорость молекул пара. После подстановки $n = \frac{p}{kT}$ и $v = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ получаем

$$\Phi = \frac{\alpha p}{k}\sqrt{\frac{R}{2\pi MT}}.$$

Здесь приведена точная формула для Φ, однако следует считать правильными ответы с немного отличающимися числовыми коэффициентами, которые могут возникнуть, например, из-за подстановки в качестве v среднеквадратичной скорости $v_{ск} = \sqrt{3RT/M}$ или из-за использования «школьной» формулы для потока, содержащей коэффициент $1/6$ вместо $1/4$.
3) Поскольку по условию сосуд большой по сравнению со стаканом, то насыщенным пар будет именно на уровне поверхности воды в сосуде. Пусть p_0 и n_0 – соответственно давление и концентрация пара на уровне поверхности воды в стакане, тогда из уравнения Менделеева–Клапейрона находим среднюю плотность пара в погруженной части стакана:

$$\rho_п = \frac{1}{2}\left(\frac{Mp}{RT} + \frac{Mp_0}{RT}\right) \approx \frac{Mp}{RT}.$$

Здесь $p_0 \approx p$, так как в данном случае учет разницы давлений проявился бы в дальнейшем лишь как поправка второго порядка малости. Добавочное гидростатическое давление столба пара в стакане равно

$$\Delta p = p_0 - p = \rho_п gH = \frac{MpgH}{RT},$$

а искомая разность концентраций составляет

$$\Delta n = n_0 - n = \frac{p_0}{kT} - \frac{p}{kT} = \frac{\Delta p}{kT} = \frac{MpgH}{kRT^2}.$$

4) Стакан становится все более тяжелым из-за постепенного накапливания в нем воды, возникшей в результате конденсации пара. При этом пар будет конденсироваться на внутренней поверхности погруженной части стакана, так как в этой области давление пара будет превышать давление насыщенного пара при данной температуре на величину гидростатического давления столба пара.

Приведем расчет в предположении, что внутренние стенки стакана до уровня поверхности воды в сосуде влажные, т.е. покрыты тонким слоем воды, однако можно считать верными решения участников с использованием модели сухих стенок.
Общее количество молекул, вылетающих с полной поверхности воды площадью S за время t, равно

$$Z_1 = \Phi St = \frac{\alpha}{4} nv\left(\pi r^2 + 2\pi rH\right)t.$$

Количество молекул, «прилипающих» к воде за то же время, определяется концентрацией пара на соответствующем уровне и равно

$$Z_2 = \frac{\alpha}{4} n_0 v\pi r^2 t + \frac{\alpha}{4} n_{ср} v \cdot 2\pi rHt,$$

где $n_{ср} = (n + n_0)/2 = n + \Delta n/2$ – средняя концентрация пара в погруженной части стакана.
Стакан утонет, когда общая масса накопившихся в нем молекул воды станет равна m:

$$(Z_2 - Z_1)\frac{M}{N_A} = m,$$

где M/N_A – масса одной молекулы. Подставив сюда соответствующие выражения для Z_2, Z_1 и m, получим искомое время:

$$t = \frac{\sqrt{2\pi}\rho}{\alpha pg}\left(\frac{RT}{M}\right)^{3/2} \frac{r}{r+H}\frac{h}{H}.$$

Аналогично второму пункту, оценочные ответы, отличающиеся только числовыми коэффициентами, следует считать правильными.
4. Малое сопротивление цепи позволяет считать, что все процессы перезарядки конденсатора происходят очень быстро, так что смещением верхней пластины за это время можно пренебречь.
1) Емкость плоского конденсатора $C = \varepsilon_0 S/d$. Заряд верхней пластины $q = CU_1 = \varepsilon_0 SU_1/d$. Напряженность однородного электрического поля между обкладками конденсатора $E = U_1/d$, причем каждая из пластин обеспечивает половину этой величины. Значит, искомая сила равна

$$F_1 = q\frac{E}{2} = \frac{\varepsilon_0 SU_1^2}{2d^2}.$$

В следующих пунктах будем считать, что пружина изначально не растянута и сила тяжести на верхнюю пластину не действует. Это упрощение не повлияет на результаты, так как силу упругости пружины можно представить в виде суммы ее начального значения и ее изменения, а поскольку согласно условию равновесия начальная сила упругости равна силе тяжести, то они взаимно уничтожатся во всех уравнениях, в том числе и при расчете работы.
2) Поскольку напряжение U увеличивают медленно, то расстояние x между пластинами уменьшается тоже медленно и можно считать, что электрическая сила в каждый момент времени уравновешивается силой упругости:

$$\frac{\varepsilon_0 SU^2}{2x^2} = k(d - x).$$

Это уравнение является кубическим относительно x, поэтому для его анализа применим графический метод. Графиком правой части уравнения является прямая, а левой – семейство квадратичных гипербол, зависящих от параметра U. На рисунке 18 показаны прямая и три характерные гиперболы для значений U, равных V_1, V_2, V_3 и удовлетворяющих условию $V_1 < V_2 < V_3$.
При $U = V_1$ уравнение имеет два корня – графики пересекаются при x_1 и x_2, причем x_1 соответствует устойчивому по-

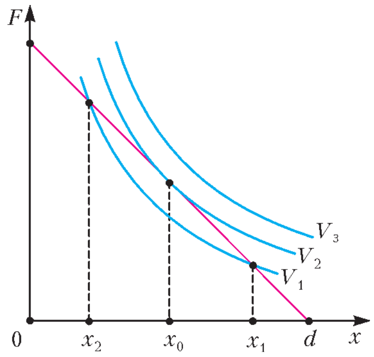


Рис. 18

ложению равновесия, а x_2 – неустойчивому (это определяется по направлению результирующей силы, возникающей при небольшом отклонении от положения равновесия). Отсюда следует, что при плавном уменьшении x от значения d система окажется сначала в состоянии x_1 и уже не попадет в состояние x_2.

По мере увеличения U от V_1 до V_2 точки x_1 и x_2 приближаются друг к другу и сходятся в точке x_0, соответствующей случаю касания гиперболы и прямой. Положение равновесия x_0 является устойчивым при увеличении x и неустойчивым при уменьшении x, поэтому при $U = V_2$ подвижная пластина конденсатора начнет двигаться ускоренно, и через некоторое время пластины схлопнутся. Таким образом, искомое $U_2 = V_2$. Отметим, что при $U = V_3$ положений равновесия уже нет, так что пластины начнут двигаться ускоренно и схлопнутся при любом x.

Для упрощения преобразований перепишем условие равновесия в виде

$$\frac{a}{2x^2} = d - x, \text{ где } a = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{k}.$$

В точке касания графиков функций должны быть равны не только значения функций, но и значения их производных:

$$\frac{a_0}{2x_0^2} = d - x_0, \quad -\frac{a_0}{x_0^3} = -x_0, \text{ где } a_0 = \frac{\varepsilon_0 S U_2^2}{k}.$$

Отсюда находим

$$x_0 = \frac{2}{3}d = \sqrt[3]{a_0}, \text{ и } U_2 = \sqrt{\frac{8kd^3}{27\varepsilon_0 S}}.$$

3) После размыкания цепи заряд на конденсаторе будет сохраняться, а потому напряженность поля и электрическая сила, действующая на подвижную пластину, изменяться не будут. Пользуясь результатом первого пункта, находим

$$F_3 = \frac{\varepsilon_0 S U_3^2}{2d^2} = \text{const}.$$

При минимальном значении U_3 пластина будет сначала ускоряться, а затем замедляться из-за постепенного растяжения пружины, так что пластины схлопнутся с пренебрежимо малой скоростью. Из закона сохранения энергии $F_3 d = kd^2/2$ получаем

$$U_3 = \sqrt{\frac{kd^3}{\varepsilon_0 S}}.$$

Отметим, что в данном случае потребовалось большее напряжение, чем во втором пункте, что вполне логично, так как в предыдущем случае по мере сближения пластин их заряд, напряженность поля и сила взаимодействия существенно возрастали за счет действия источника.

4) В этом пункте мы, наоборот, ожидаем получить меньшее напряжение, чем во втором случае, так как пластина может преодолеть участок между положениями равновесия x_1 и x_2 за счет кинетической энергии, накопленной при разгоне на участке от d до x_1.

Аналогично первому пункту, находим электрическую силу, действующую на подвижную пластину, находящуюся на расстоянии x от неподвижной:

$$F_4 = \frac{\varepsilon_0 S U_4^2}{2x^2}.$$

Работа этой силы на участке от d до x равна

$$A = \int_d^x \left(-\frac{\varepsilon_0 S U_4^2}{2x^2}\right)dx = \frac{\varepsilon_0 S U_4^2}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{d}\right).$$

С помощью закона сохранения энергии выразим кинетическую энергию:

$$W = A - \frac{k(d-x)^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 S U_4^2 (d-x)}{2xd} - \frac{k(d-x)^2}{2}.$$

Пластина не остановится, если в каждой точке $x \in (0;d)$ будет выполнено условие $W \ge 0$, откуда после упрощения получаем неравенство

$$x^2 - dx + \frac{\varepsilon_0 S U_4^2}{kd} \ge 0.$$

Графиком левой части этого неравенства является парабола с вершиной $x_4 = d/2$, лежащей в рассматриваемом промежутке, поэтому для нахождения минимального U_4 достаточно наложить на дискриминант условие

$$D = d^2 - \frac{4\varepsilon_0 S U_4^2}{kd} = 0,$$

откуда получим

$$U_4 = \sqrt{\frac{kd^3}{4\varepsilon_0 S}}.$$

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, Е.А.Силина М.В.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Л.В.Калиничева, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: (495) 930-56-48

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь www.Pareto-print.ru

«ЛомоносоВ» И ЧЕМПИОН МИРА

Мы не раз рассказывали о сильнейших шахматных программах, которые уже давно превзошли людей, включая сильнейших гроссмейстеров, прежде всего о «Рыбке», четырехкратной чемпионке мира среди ЭВМ. В 2011 году разработчики других программ, возможно, завидуя, что их серьезно обошли, предъявили «Рыбке» ряд претензий – мол, она заимствовала некоторые элементы из ранее известных программ. Даже потребовали лишить «Рыбку» всех завоеванных ею титулов. Смешно! Не станем детально обсуждать эту тему – если В.Райлих, чех, проживающий в США, создатель чемпионки, опираясь на старые программы, сумел соединить их в столь мощный гибрид, разве это не его заслуга? «Рыбка» – не только участник спортивных соревнований, но и весьма ценный научный продукт!

Другое дело, что в том же году бельгийский программист Р.Хударт разработал новую программу «Гудини», которая хотя и превзошла «Рыбку», но опиралась именно на нее. «Гудини» отличает быстрота и точность оценки позиции и эффективный поисковый алгоритм. Программа хорошо защищает трудные позиции, отличается и тактическим мастерством.

В начале 2011 года частная компьютерная фирма TCEC провела матч-марафон из 40 партий «Рыбка» – «Гудини». Игра проходила с полноценным контролем времени (150 минут на партию) в течение почти двух недель, причем в режиме нон-стоп, круглые сутки напролет – и днем, и ночью. В любой момент можно было включить компьютер и посмотреть по интернету, как складываются дела в очередной схватке. Надо сказать, что партии эти были почти безошибочны, но малозрелищны – медленные маневры, топтание на месте, длились они по 6–7 часов, некоторые продолжались по 100 ходов и больше. Рекорд установила вторая партия – ничья на... 250-м ходу после 9 часов игры! В конце концов «Гудини» оправдал свое название, продемонстрировал чудеса и обыграл «Рыбку» со счетом 23,5:16,5.

Казалось, произошла случайность, однако и второй марафон «Рыбка» – «Гудини» из 40 партий, также проходивший в режиме нон-стоп, завершился примерно с тем же перевесом «Гудини» – он взял верх со счетом 22,5:17,5, позиционно переигрывая своего опытного соперника. Этот матч (неофициальное первенство мира) показал, что в мире роботов тоже нет непобедимых! Вот одна из партий двух лидеров компьютерных шахмат.

«Рыбка» – «Гудини»

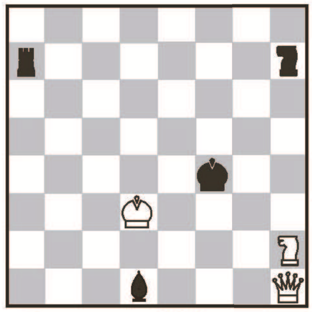
Сицилианская защита

1. e4 c5 2. c3 ♘f6 3. e5 ♘d5 4. ♘f3 ♘c6 5. ♗c4 ♘b6 6. ♗b3 c4 7. ♗c2 ♕c7 8. ♕e2 g5 9. e6 de 10. ♘:g5 ♕e5 11. d4 ♕:e2+ 12. ♔:e2 e5! Белый король застрял в центре, и черные жертвуют пешку ради инициативы. **13. de ♘:e5 14. ♘:h7 ♗g7 15. ♘g5 ♗d7 16. ♘a3 ♘d3!** А теперь и вторую. **17. ♗:d3 cd+ 18. ♔:d3 ♘a4 19. f3 a5 20. ♘e4 f5 21. ♘f2 b5 22. ♘c2 b4 23. cb ♔f7!** Решающая жертва третьей пешки. **24. ba ♖:a5 25. ♔d2 ♖d8 26. ♘b4 ♖e5 27. ♘fd3 ♗b5 28. ♖e1 ♘c5 29. ♖:e5 ♗:e5 30. f4 ♗f6 31. ♔e1 ♘:d3+ 32. ♘:d3 ♗:d3**, и «Гудини» легко выиграл.

В XXI веке компьютерные чемпионаты проходили регулярно раз в год. Но в 2012 году традиция была нарушена – юбилейное, 20-е первенство мира не состоялось. Почему? Возможно, интерес к сражению машин временно упал. В самом деле, «Рыбку» лишили права участвовать в официальных турнирах, а «Гудини» со своим рейтингом 3287 и так доказывает явное превосходство. В такой ситуации организаторы чемпионатов, видимо, решили подождать появления конкурента, достойного «Гудини».

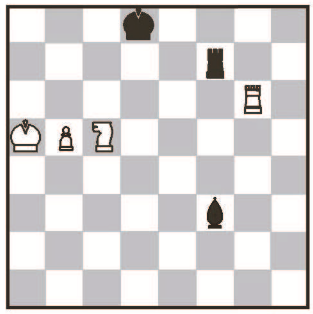
Впрочем, в начале 2013 года стартовал компьютерный супермарафон, устроенный кампанией TCEC, в котором участвовали «движки», большинство из которых имело рейтинг выше 3000. Сначала 32 программы сражались в 7 туров по швейцарской системе, затем 16 лучших образовали две группы по восемь программ. Они играли уже по круговой системе с отбором в следующие круги и так до суперфинала. Партии тоже получались очень затянутыми, многие длились больше 100 ходов, игрались on-line по две-три в день. Турнир длился несколько месяцев, причем во время написания этой статьи все еще продолжался. «Гудини» и «Рыбка» вышли в третий этап, обменялись ударами и держались на равных...

В предыдущих номерах «Кванта» рассказывалось о таблицах Налимова и компьютерных исследованиях М.Коновала и Я.Буржуцкого семифигурных окончаний. Исчерпывающий анализ таких эндшпилей недавно провели и московские программисты, сотрудники МГУ В.Захаров и В.Махнычев. Свой алгоритм они реализовали на суперкомпьютере «Ломоносов», а полученные таблицы назвали таблицами Ломоносова. В поисках самого «длинного» мата они натолкнулись на уникальный эндшпиль *ферзь и конь против ладьи, слона и коня.* Вот суперрекордная позиция при семи фигурах на доске.



Выигрыш в 545 ходов!

Здесь уместно напомнить, что в прошлогоднем поединке на первенство мира Ананд–Гельфанд в Третьяковской галерее единственная результативная партия тай-брейка после 56 ходов пришла как раз к семифигурному эндшпилю – *ладья, конь и пешка против ладьи и слона.* Такое материальное соотношение сил позволило Захарову и Махнычеву обратиться к таблицам Ломоносова и мгновенно определить место решающей ошибки претендента. Натолкнувшись в дебюте на домашнюю заготовку, Гельфанд 70 ходов упорно защищался, но на 71-м дрогнул...



В. Ананд – Б. Гельфанд

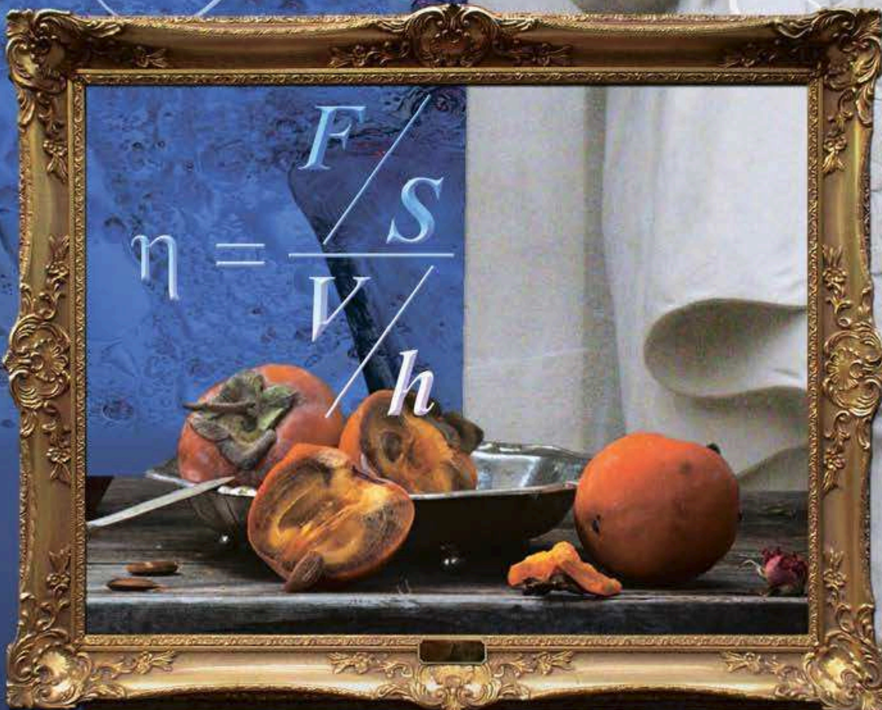
Здесь 71...♗h1(h5, e2), 71...♔e7 (e8,c8) или перемещение ладьи по седьмой горизонтали – 31...♖a7+ (e7, h7), согласно мнению компьютера, давало ничью, а последовавший ответ 71...♖f5?? привел черных к катастрофе. Программа сообщила, что при оптимальной игре обеих сторон белые выигрывают в 36 ходов. Впрочем, партия закончилась быстрее: **72. ♘e6+ ♔c8 73. ♘d4 ♖f8 74. ♘:f3 ♖:f3 75. ♔b6 ♖b3 76. ♖g8+ ♔d7 77. ♖b8. Черные сдались.**

Эта победа позволила Ананду сохранить шахматную корону. Что же получается? Если бы «Ломоносов» играл матч с индийским гроссмейстером, он имел бы все шансы стать чемпионом мира среди людей!

Е.Гик

Индекс 90964

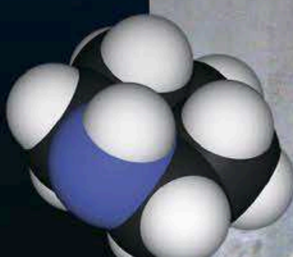
Прогулки с физикой



$$\eta = \frac{F/S}{V/h}$$

Почему хурма вяжет во рту?

Во время еды кусочки пищи касаются языка, неба, десен и зубов и движутся относительно них. А язык трется о разные участки ротовой полости. Чтобы облегчить это скольжение, во рту непрерывно выделяется слюна, служащая необходимой смазкой...



(Продолжение – на странице 39 внутри журнала