Заключительный этап XXXVII Всероссийской олимпиады школьников по математике

Заключительный этап Всероссийской математической олимпиады прошел с 25 по 29 апреля в Великом Новгороде. Несмотря на финансово-организационные сложности нынешнего года, оргкомитет сумел провести олимпиаду на очень высоком уровне. Состав участников олимпиады формировался по итогам регионального этапа (общероссийский рейтинг), что позволило выступить на заключительном этапе большинству сильнейших юных математиков России: 92 девятиклассникам, 80 десятиклассникам и 74 одиннадцатиклассникам.

Публикуем условия задач и список победителей и призеров заключительного этапа XXXVII Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Задачи олимпиады

9 класс

1. Квадратный трехчлен $P(x)$ с единичным старшим коэффициентом таков, что многочлены $P(x)$ и $P(P(P(x)))$ имеют общий корень. Докажите, что $P(0)\cdot P(1)=0$.

А.Храбров

2. Дан остроугольный треугольник ABC. Окружность, проходящая через вершину B и центр O его описанной окружности, вторично пересекает стороны BC и BA в точках P и Q соответственно. Докажите, что точка пересечения высот треугольника POQ лежит на прямой AC.

Т.Емельянова, Л.Емельянов

3. На доске нарисован выпуклый 2011-угольник. Петя последовательно проводит в нем диагонали так, чтобы каждая вновь проведенная диагональ пересекала по внутренним точкам не более одной из проведенных ранее диагоналей. Какое наибольшее количество диагоналей может провести Петя?

С.Берлов

4. Существуют ли три взаимно простых в совокупности натуральных числа, квадрат каждого из которых делится на сумму двух оставшихся?

С.Берлов

5. См. задачу М2237 «Задачника «Кванта».

6. У Пети и Коли в тетрадях записаны по два числа; изначально это числа 1 и 2 у Пети, 3 и 4 – у Коли. Раз в минуту Петя составляет квадратный трехчлен $f(x)$, корнями которого являются записанные в его тетради два числа, а Коля составляет квадратный трехчлен $g(x)$, корнями которого являются записанные в его тетради два числа. Если уравнение $f(x) = g(x)$ имеет два различных корня, то один из мальчиков заменяет свою пару чисел на эти корни, иначе – ничего не происходит. Какое второе число могло оказаться у Пети в тетради в тот момент, когда первое стало равным 5?

И.Богданов, А.Гарбер

7. Пусть ABC – правильный треугольник. На его стороне AC выбрана точка T, а на дугах AB и BC его описанной окружности выбраны точки M и N соответственно так, что $MT \parallel BC$ и $NT \parallel AB$. Отрезки AN и MT пересекаются в точке X, а отрезки CM и NT – в точке Y. Докажите, что периметры многоугольников $AXYC$ и $XMBNY$ равны.

В.Шмаров

8. В некоторых клетках доски 100×100 стоит по фишке. Назовем клетку *красивой*, если в соседних с ней по стороне клетках стоит четное число фишек. Может ли ровно одна клетка доски быть красивой?

К.Кноп

10 класс

1. В каждой клетке таблицы, состоящей из 10 столбцов и n строк, записана цифра. Известно, что для любой строки A и любых двух столбцов найдется строка, отличающаяся от A ровно в этих двух столбцах. Докажите, что $n \ge 512$.

Р.Карасёв

2. См. задачу М2236 «Задачника «Кванта».

3. Назовем компанию *k-неразбиваемой*, если при любом разбиении ее на k групп в одной из групп найдутся два знакомых человека. Дана 3-неразбиваемая компания, в которой нет четырех попарно знакомых человек. Докажите, что ее можно разделить на две компании, одна из которых 2-неразбиваемая, а другая – 1-неразбиваемая.

В.Дольников

4. Периметр треугольника ABC равен 4. На лучах AB и AC отмечены точки X и Y так, что $AX = AY = 1$. Отрезки BC и XY пересекаются в точке M. Докажите, что периметр одного из треугольников ABM и ACM равен 2.

В.Шмаров

5. Даны 10 попарно различных чисел. Для каждой пары данных чисел Вася записал у себя в тетради квадрат их разности, а Петя записал у себя в тетради модуль разности их квадратов. Могли ли в тетрадях у мальчиков получиться одинаковые наборы из 45 чисел?

С.Берлов

6. См. задачу М2238 «Задачника «Кванта».

7. См. задачу М2240 «Задачника «Кванта».

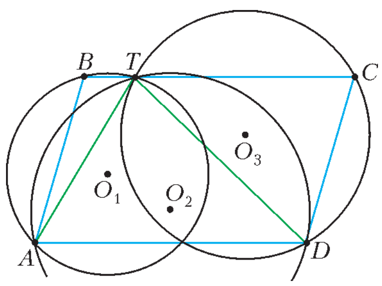
8. См. задачу М2242 «Задачника «Кванта».

11 класс

1. Натуральные числа d и d', $d' > d$, – делители натурального числа n. Докажите, что $d' > d + \dfrac{d^2}{n}$.

А.Голованов

2. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ ($\angle A < 90°$) отмечена точка T так, что треугольник ATD – остроуголь-



ный. Пусть O_1, O_2 и O_3 – центры описанных окружностей треугольников ABT, DAT и CDT соответственно (см. рисунок). Докажите, что точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на прямой AD.

Т.Емельянова

3. В Академии наук 999 академиков. Каждая научная тема интересует ровно троих академиков, и у каждых двух академиков есть ровно одна тема, интересная им обоим. Докажите, что можно выбрать 250 тем из их общей области научных интересов так, чтобы каждый академик интересовался не более чем одной из них.

А.Магазинов

4. См. задачу М2243 «Задачника «Кванта».

5. Даны два различных кубических многочлена $F(x)$ и $G(x)$ с единичными старшими коэффициентами. Выписали все корни уравнений $F(x) = 0$, $G(x) = 0$, $F(x) = G(x)$. Оказалось, что выписаны 8 различных чисел. Докажите, что наибольшее и наименьшее из них не могут одновременно являться корнями многочлена $F(x)$.

И.Богданов

6. См. задачу М2239 «Задачника «Кванта».

7. Для натурального a обозначим через $P(a)$ наибольший простой делитель числа a^2+1. Докажите, что существует бесконечно много троек различных натуральных чисел a, b, c таких, что $P(a) = P(b) = P(c)$.

А.Голованов

8. См. задачу М2241 «Задачника «Кванта».

ДИПЛОМАНТЫ ОЛИМПИАДЫ

Диплом победителя

по 9 классам получили
Баев Будимир – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Белов Дмитрий – Набережные Челны, гимназия 26,
Воронецкий Егор – Петрозаводск, школа 42 с углубленным изучением английского языка и математики,
Шабанов Лев – Ангарск, школа 10 с углубленным изучением отдельных предметов,
Волгин Андрей – Москва, гимназия 1543;

по 10 классам –
Ахмедов Максим – Москва, СУНЦ МГУ,
Ишкуватов Руслан – Казань, лицей 131,
Горелов Иван – Москва, школа 25,
Игошина Виктория – Ижевск, ЭМЛ 29,
Крохмаль Николай – Белгород, лицей 38;

по 11 классам –
Цыбышев Алексей – Самара, гимназия 1,
Егоров Дмитрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Пахарев Алексей – Москва, СУНЦ МГУ,
Макаров Даниил – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Решетников Иван – Долгопрудный, ФМЛ 5,
Григорьев Михаил – Казань, лицей 131,
Крачун Дмитрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239.

Диплом призера

по 9 классам получили
Котельникова Юлия – Москва, гимназия 1543,
Нарышкин Петр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Жевнерчук Антон – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Клюев Даниил – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Матушкин Александр – Ижевск, лицей 41,
Турбин Максим – Челябинск, лицей 31,
Афризонов Денис – Курган, гимназия 47,
Акбаров Артур – Екатеринбург, политехническая гимназия,
Галимов Тимур – Казань, лицей 131,
Зимин Александр – Ульяновск, школа 52,
Бубнова Анна – Курган, гимназия 19,
Малыгин Виталий – Киров, ФМЛ,
Мокин Александр – Саратов, лицей прикладных наук,
Садыков Ринат – Казань, лицей им. Н.И.Лобачевского при КГУ,
Зайков Александр – Краснодар, гимназия 36,
Корякин Данил – Киров, ФМЛ,
Латышев Алексей – Киров, ФМЛ,
Рыков Никита – Ангарск, школа 10 с углубленным изучением отдельных предметов,
Дюжев Евгений – Курган, лицей 12,
Крылов Василий – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Олухов Андрей – Курган, лицей 12,
Зуев Антон – Москва, школа 179,
Крачун Владимир – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Ясновидов Григорий – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Карпушкин Данил – Челябинск, лицей 31,
Еськова Елизавета – Белгород, лицей 38,
Крюков Николай – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Сокол Евгений – Челябинск, лицей 31,
Щербаков Артем – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Александров Никита – Набережные Челны, гимназия 26,
Голованов Александр – Казань, лицей им. Н.И.Лобачевского при КГУ,
Горбачев Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Зверев Иван – Москва, школа 853,
Симарова Екатерина – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Смирнова Наталия – Москва, лицей «Вторая школа»,
Струков Георгий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Сурин Михаил – Железнодорожный, гимназия 2,
Хроменков Ярослав – Новороссийск, школа «Личность»,
Целищев Антон – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Горохов Павел – Кострома, лицей 17,
Софронова Алина – Киров, ФМЛ;

по 10 классам –
Деев Родион – Саратов, ФТЛ 1,
Иванов Андрей – Екатеринбург, гимназия 9,
Новиков Владислав – Уфа, лицей 60,
Останин Александр – Ижевск, ЭМЛ 29,
Пышкин Игорь – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Рухович Алексей – Москва, СУНЦ МГУ,
Южаков Александр – Курган, гимназия 31,
Иванов Константин – Москва, школа 25,
Кузин Михаил – Москва, школа 25,
Нурумов Андрей – Москва, СУНЦ МГУ,
Осипов Павел – Томск, школа 54,
Бесман Михаил – Курган, школа 48,

Исхаков Линар – Ижевск, ЭМЛ 29,
Ненашев Денис – Камчатский край, школа 8 Елизовского муниципального района,
Косинов Никита – Ульяновск, многопрофильный лицей 20,
Семенов Тимофей – Иркутск, лицей 36 ОАО «Российские железные дороги»,
Рябцева Мария – Москва, СУНЦ МГУ,
Бусыгин Игорь – Ижевск, ЭМЛ 29,
Кравцов Дмитрий – Москва, СУНЦ МГУ,
Салихов Аяз – Казань, лицей 131,
Александрова Екатерина – Иваново, лицей 33,
Коротин Александр – Самара, медико-технический лицей,
Абугалиев Ренат – Самара, медико-технический лицей,
Лазарев Денис – Долгопрудный, ФМЛ 5,
Лежнин Михаил – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Лопатников Алексей – Москва, СУНЦ МГУ,
Миронов Максим – Ижевск, ЭМЛ 29,
Сандрикова Мария – Москва, Центр образования 218,
Хайруллин Рустэм – Казань, гимназия 7;

по 11 классам –
Бурова Ольга – Москва, лицей «Вторая школа»,
Малясова Виктория – Москва, СУНЦ МГУ,
Циглер Александр – Магнитогорск, школа 5 с углубленным изучением математики,
Балобанов Арсений – Москва, СУНЦ МГУ,
Хомутов Никита – Москва, СУНЦ МГУ,
Миронов Михаил – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Осипов Матвей – Ульяновск, многопрофильный лицей 20,
Морозков Алексей – Челябинск, лицей 31,
Бесман Дмитрий – Москва, СУНЦ МГУ,
Гонин Роман – Московская обл., Раменское, гимназия,
Великанов Дмитрий – Москва, СУНЦ МГУ,
Королев Николай – Казань, лицей им. Н.И.Лобачевского при КГУ,
Мукосеева Екатерина – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Чикин Владимир – Нижний Новгород, лицей 36,
Юркин Виктор – Курган, областной лицей-интернат для одаренных детей,
Ермишкина Екатерина – Москва, гимназия 1543,
Забиякин Иван – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Зайцев Константин – Челябинск, лицей 31,
Корчемкин Дмитрий – Киров, лицей 21,
Кунявский Павел – Саратов, ФТЛ 1,
Минеев Дмитрий – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа».

Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, П.Кожевников, О.Подлипский, Д.Терёшин

Заключительный этап XLV Всероссийской олимпиады школьников по физике

Ниже приводятся условия задач теоретического тура и список победителей и призеров олимпиады.

Теоретический тур

9 класс

Задача 1. Спуск по желобу

Небольшое тело отпустили без начальной скорости в некоторой точке M гладкого изогнутого желоба. Оторвавшись от желоба в точке O, оно упало на пол в точке A (рис.1). С помощью построений и расчетов покажите на рисунке положение точки M желоба, в которой тело было отпущено. Каково расстояние (в условных единицах) от пола до точки M? Масштабы по осям рисунка даны в некоторых условных единицах.

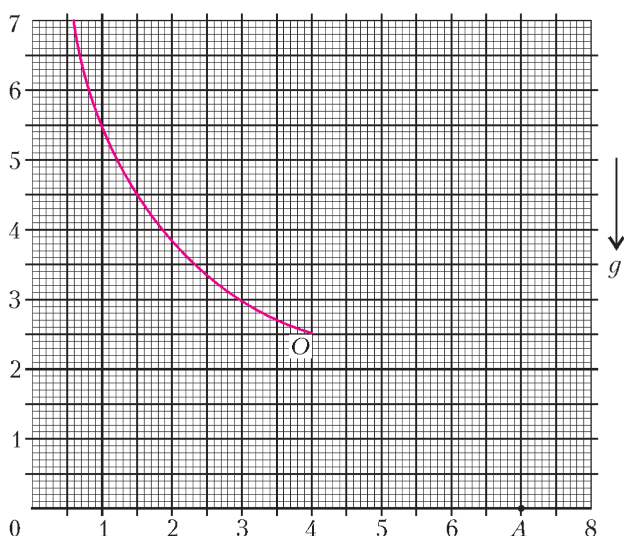


Рис. 1

И.Воробьев

Задача 2. Шайба и горка

Небольшая шайба, скользящая по гладкой горизонтальной поверхности, наезжает на гладкую горку, покоящуюся на той же поверхности (рис.2). После того как шайба соскользнула с горки, оказалось, что шайба и горка движутся по гладкой горизонтальной поверхности с одинаковыми по модулю скоростями.

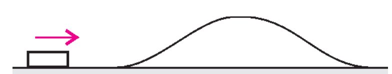


Рис. 2

1) Определите, при каком соотношении масс шайбы и горки это возможно.

2) Найдите отношение максимальной потенциальной энергии, которая была у шайбы во время подъема на горку, к начальной кинетической энергии шайбы.

Примечание. Во время подъема и спуска шайба не отрывается от горки.

А.Шеронов

Задача 3. Циклический теплообмен

Имеются два теплоизолированных сосуда с водой. Теплоемкость всей массы воды в первом сосуде C_1, ее температура t_1. Теплоемкость и температура воды во втором сосуде C_2 и