Биссектриса и сумма синусов

В 1982 году в «Задачнике «Кванта» была опубликована задача М734 (Р.Мазов).

Рассмотрим точку K пересечения биссектрисы угла A треугольника ABC с описанной окружностью и опустим перпендикуляр KH на прямую AC (рис.1). В задаче М734 требовалось доказать, что *длина проекции отрезка AK на прямую AC равна полусумме длин сторон AB и AC.*

Рассмотрим сначала тригонометрическое решение. Обозначив $\angle ACK = \alpha$ и $\angle BCK = \beta$, по теореме синусов имеем

$$AB = 2R\sin(\alpha - \beta),\quad AK = 2R\sin\alpha$$

и

$$AC = 2R\sin(180^\circ - \angle ACK - \angle CAK) = 2R\sin(\alpha + \beta),$$

где R – радиус описанной окружности треугольника ABC. Длина проекции AH отрезка AK на прямую AC равна $AK\cos\beta = 2R\sin\alpha\cos\beta$. Таким образом, формула $\frac{AB + AC}{2} = AH$ записывается в виде

$$R\sin(\alpha - \beta) + R\sin(\alpha + \beta) = 2R\sin\alpha\cos\beta .$$

Сокращая на R, приходим к известной тригонометрической формуле суммы синусов.

Теперь – красивое геометрическое решение. В силу теоремы о вписанном угле, K – середина дуги BC. Отразив симметрично точку B относительно прямой AK, получаем на луче AC точку D, для которой $AD = AB$ и $BK = DK = CK$. Высота KH равнобедренного треугольника DKC является его медианой:

$$AH = (AD + AC)/2 = (AB + AC)/2,$$

что и требовалось доказать. Так вот какова она, формула суммы синусов!

Упражнение. *Центр I вписанной окружности треугольника ABC и центр J той его вневписанной окружности, которая касается стороны BC и прямых AB и AC, лежат на окружности с центром K и радиусом BK (рис.2). Докажите это.*

Указание. В силу теоремы о внешнем угле треугольника AIB имеем $\angle BIK = \angle IAB + \angle IBA$. Поскольку

$$\angle IAB = \angle BCK = \angle KBC \text{ и } \angle IBA = \angle IBC,$$

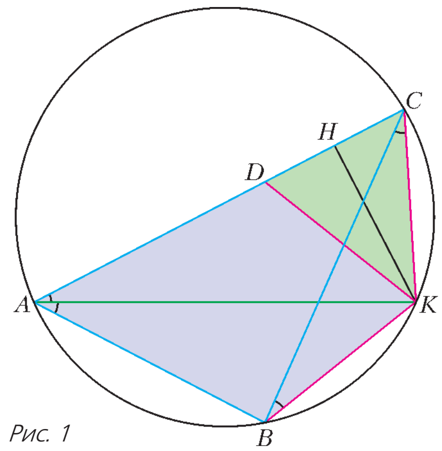

Рис. 1

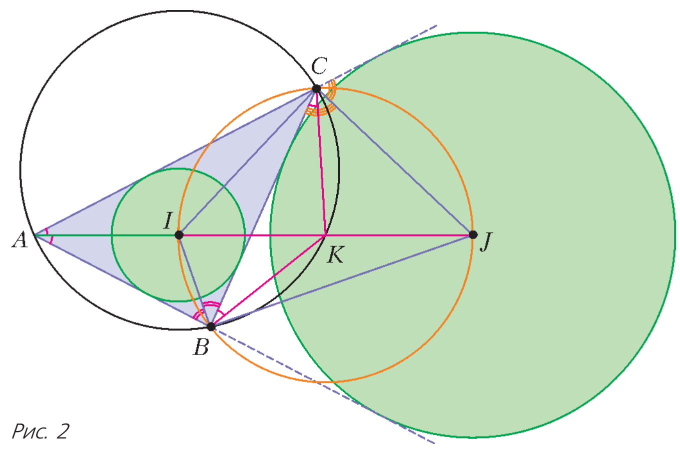

Рис. 2

то

$$\angle BIK = \angle KBC + \angle IBC = \angle IBK,$$

откуда $KB = KI$. Равенство $KC = KJ$ можно доказать аналогично (применив теорему о внешнем угле к треугольнику ACJ) или же заметив, что угол ICJ прямой.

А.Спивак