Язык симметрии

Д.МАМФОРД, Д.РАЙТ, К.СИРИС

Вскипятите его, остудите во льду
И немножко припудрите мелом,
Но одно безусловно имейте в виду:
Не нарушить симметрию в целом!

Льюис Кэрролл. Охота на Снарка
(пер. Г.Кружкова)

Для математика понятие симметрии имеет гораздо более широкий смысл, нежели тот, который мы используем в повседневной жизни. Одним из первых, кто пришел к этому более глубокому пониманию симметрии, был выдающийся и очень влиятельный немецкий математик Феликс Клейн. В 1872 году, в докладе по случаю вступления в должность профессора Эрлангенского университета (в необычайно молодом возрасте всего 23 лет) Клейн предложил математическому сообществу радикально расширить общепринятый взгляд на симметрию и считать симметричными объекты, которые прежде никто не подумал бы так называть. Процитированные выше строки Льюиса Кэрролла (настоящее имя которого – Чарльз Доджсон), математика, преподавателя оксфордского колледжа Крайст-Чёрч, были написаны всего четырьмя годами позже. Не исключено, что Доджсон был наслышан об идеях Клейна и именно о них думал, сочиняя эту нелепицу.

В написанной по материалам этого доклада вошедшей в историю короткой статье[1] молодой Клейн подвел итог более чем пятидесятилетнего развития математики, выдвинув новые идеи, коренным образом изменившие ее дальнейшее развитие. Сегодня трудно оценить в полной мере значимость сказанного Клейном, потому что его лекция привела к смене парадигмы, которая задним числом кажется совершенно очевидной, и трудно даже поверить, что раньше кто-то мог думать иначе.

Коротко говоря, Клейн предложил рассматривать геометрию как «изучение свойств пространства, инвариантных относительно данной группы преобразований». При изучении геометрии, утверждал Клейн, нужно рассматривать не только объекты (треугольники, окружности, икосаэдры или же фигуры гораздо более дикого вида – как, например, фрактал на первой странице обложки), но и перемещения. При классическом евклидовом взгляде на геометрию, господствовавшем на протяжении более чем двух тысячелетий, под перемещениями всегда понимались только движения

Феликс Христиан Клейн (1849–1925)

Феликс Клейн родился в Дюссельдорфе, принадлежащем в то время Прусской империи, в 1849 году. Он изучал математику и физику в Боннском университете. Работу над диссертацией Клейн начал, намереваясь стать физиком, однако под влиянием своего научного руководителя Плюккера он увлекся геометрией. Плюккер умер в 1868 году, в том же году, когда Клейн получил докторскую степень; естественно, что именно Клейну выпало завершать работу своего руководителя. Этим он обратил на себя внимание Клебша, одного из ведущих профессоров Гёттингенского университета. Вскоре Клебш убедился, что Клейн имеет все шансы стать ведущим математиком своего времени.

В 1872 году Клейн получил приглашение на должность профессора Эрлангенского университета в Баварии, и последующие 10 лет были для него периодом расцвета творческой активности. В 1875 году он перешел в Высшую техническую школу в Мюнхене, где нашел много талантливых студентов, и его педагогический талант раскрылся в полной мере. В том же году он женился на Анне Гегель, внучке знаменитого философа. В 1880 году Клейн перебрался в Лейпциг, где в то время кипела математическая жизнь. Здесь он создал ту глубокую теорию, которой посвящена эта книга. Но здесь же из-за сильного напряжения, вызванного острым соперничеством с блестящим молодым французским математиком Пуанкаре, резко ухудшилось его и без того слабое здоровье. В 1883–1884 годах Клейн страдал от постоянных депрессий, и впоследствии он так и не смог полностью восстановить свой математический потенциал. Та его работа, которая относится к предмету нашей книги, была существенно развита в двух трактатах, написанных совместно с Робертом Фрике в период с 1890 по 1912 год.

В 1886 году Клейн занял кафедру в Гёттингене, где и работал до выхода в отставку. Он был не только выдающимся математиком, но обладал и значительными организационными и административными способностями. Именно благодаря его таланту и энергии была создана знаменитая гёттингенская математическая школа, которая была ведущим мировым математическим центром, пока в 1930-е годы ее не разрушил Гитлер. Распространению идей и влияния Клейна во всем мире во многом способствовали учившиеся у него иностранцы. Среди его учеников – американцы Фрэнк Коул и Уильям Осгуд, итальянцы Луиджи Бьянки и Грегорио Риччи-Курбастро, а также одни из первых женщин-математиков Мэри Ньюсон и Грейс Чизхолм Янг. На рубеже столетий Клейн активно заинтересовался вопросами преподавания математики и содействовал введению в школьную программу основ математического анализа. Он вышел в отставку по состоянию здоровья в 1913 году и скончался в Гёттингене в возрасте 76 лет.

Глава из книги «Ожерелье Индры. Видение Феликса Клейна». – М.: МЦНМО, 2011. Печатается в сокращении.

[1] *Опубликованной под высокоученым названием «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований», но известной ныне как «Эрлангенская программа».*

твердого тела: можно взять фигуру и поместить ее идентичную копию в новое место. Радикальная идея Клейна состояла в том, что и другие перемещения, которые могут существенно растягивать или скручивать объекты, также следует считать геометрическими. При таком подходе геометрия охватывает гораздо более широкий класс задач, чем в классическом понимании. Геометры должны изучать те свойства объектов, которые сохраняются при перемещениях, – как нам изящно советует Кэрролл в своем четверостишии.

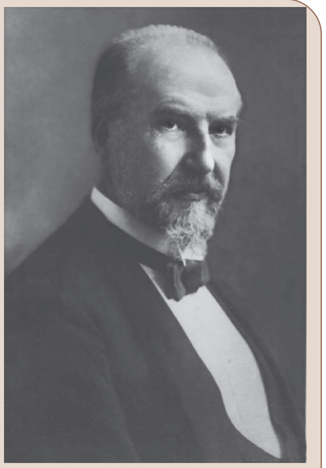
Круг идей, занимавших Клейна, связан с двумя понятиями: это идея подобных или симметричных объектов и идея «преобразования» или «перемещения». Клейн соединил их вместе, используя понятие **группы**, разработанное пятьюдесятью годами ранее другим исключительно молодым математиком Эваристом Галуа. За время своей короткой карьеры, в период с 1829 по 1831 год, Галуа осознал, что корни многочлена можно изучать при помощи их «симметрий»; так, например, $+\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ можно рассматривать как симметричные решения уравнения $x^2 - 2 = 0$. Идеи Галуа были совершенно недоступны пониманию современников, и его работа едва не оказалась потерянной навсегда.[2] Клейн понял, что не стоит пытаться каталогизировать все возможные типы симметрий и выставлять их напоказ, как это делали средневековые мусульманские строители Альгамбры. Понятие группы дает очень простой и в то же время необычайно мощный математический инструмент для описания симметрий всех возможных типов.

Идея группы состоит в том, чтобы описывать правила, отвечающие за *повторяемость*, присущую симметрии. Например, если какой-то шаг можно сделать один раз, то его же можно сделать еще раз, и еще, и еще. Это может вернуть вас обратно в то же самое положение, с которого вы начинали (как в случае зеркала, когда два отражения возвращают в исходное состояние), а может привести к возникновению расширяющейся мозаики из объектов, покрывающих регулярным узором все большую и большую площадь, наподобие плиток, устилающих огромный пол.

Коротко говоря, обычно симметрия понимается в терминах рисунков и пропорций как трудноопределимое свойство некой сбалансированности и правильности.[3] Со времен Клейна в распоряжении математиков имеется более точное определение: симметрия – это баланс, создаваемый повторением многих движений одного и того же вида, а именно всех движений из некоторой группы. Эти две идеи – введение в геометрию групповых соображений и расширение класса изучаемых движений – и легли в основу собственных исследований Клейна. Именно эти сюжеты он объединил в своей знаменитой Эрлангенской программе.

Значительная часть последующей работы Клейна была связана с выявлением и изучением одного конкретного нового типа симметрии, о котором и пойдет речь в книге «Ожерелье Индры». Однако прежде чем исследовать эти новые миры, давайте потратим немного времени и взглянем на хорошо знакомые евклидовы симметрии с новой клейновской точки зрения.

Роберт Фрике (1861–1930)



Роберт Фрике родился в Хельмштедте, Германия. Некоторое время он учился и преподавал в Гёттингене, а в 1885 году закончил Лейпцигский университет, написав диссертацию под руководством Клейна. Его сотрудничество с Клейном началось с публикации двух томов их первого совместного труда «Лекции по теории эллиптических модулярных функций», вышедших в 1890 и 1892 годах. В этот период Фрике преподавал в двух гимназиях Брауншвейга, а также, что более любопытно, был наставником двух сыновей прусского принца-регента Альбрехта. Он защитил диссертацию, дающую право на занятие профессорской должности («Habilitation»), в Киле и с 1892 года работал приват-доцентом в Гёттингене. В 1894 году Фрике занял место ушедшего в отставку Дедекинда в университете Кароло-Вильгельмина в Брауншвейге, а его давние дружеские отношения с Клейном упрочились, когда в том же году он женился на племяннице Клейна Элеоноре Флендер.

Фрике пользовался большим авторитетом и как математик, и как человек. В тесном сотрудничестве с Клейном они создали большую часть теории, известной ныне как теория клейновых групп, которой и посвящена наша книга. Фрике играл важнейшую роль в управлении университетом, являясь его ректором в период с 1904 по 1906 год, а также с 1921 по 1923 год. Он принимал участие в работе над государственной образовательной программой (здесь очень пригодился его опыт работы школьным учителем) и занимал несколько официальных постов. Этим обилием обязанностей объясняется длинный промежуток между выходом первого и второго тома (в 1897 и 1912 году соответственно) второго совместного с Клейном труда «Лекции по теории автоморфных функций», фактическим автором которого был именно Фрике, хотя Клейн также внес свой немалый вклад. В последнем томе Фрике использовал новейшие достижения математики, такие как канторовская теория множеств и теория размерности Брауэра, для решения ряда ранее не поддававшихся задач. Он работал в Брауншвейге до самого конца жизни.

Таксономия симметрии

На рисунке 1 приведена часть спутникового снимка сельскохозяйственного штата Айова, а рядом с ней – идеализированное изображение той же местности с доведенной до совершенства симметрией. Простирающийся насколько хватает глаз ландшафт выглядит как правильный узор, составленный из отдельных ферм величиной в одну квадратную милю, каждая из кото-

[2] *История Галуа – одна из самых романтических в истории математики; подробнее об этом будет рассказано во второй части статьи, которая будет опубликована позже.*

[3] *В словаре Чемберса находим: «Точное соответствие частей по обе стороны от прямой или плоскости, либо же относительно центра или оси; баланс или верная пропорция; красота формы; расположение частей».*

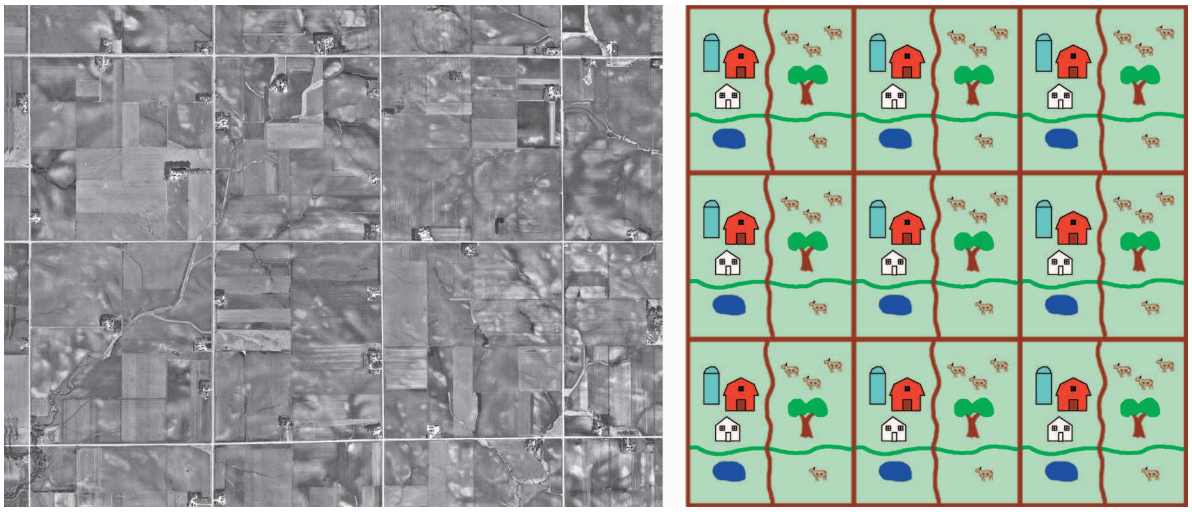


Рис.1. Спутниковый снимок штата Айова слева не сильно отличается от его идеализированной версии справа. Обратите внимание на коричневые тропинки, пересекающие каждую ферму в направлении с севера на юг, и на зеленые тропинки в направлении с востока на запад

рых содержит один дом, один пруд и одно дерево. Этот мир настолько симметричен, что, проехав одну милю на север, юг, запад или восток, вы окажетесь в точке, вид из которой неотличим от того, который вы наблюдали ранее.

Математика, изучающего симметрию, интересуют не подробности наблюдаемой картины – пасется ли на каждом поле одна овца или две коровы, – а **движения**, которые необходимо совершить, чтобы добиться повтора. Такое движение легко осуществить с помощью компьютера: нарисуйте цветок, а затем скопируйте изображение в другое место страницы. При этом можно думать, что вы переместили цветок, а можно – и именно эту точку зрения предпочитают математики – считать, что вы взяли всю страницу целиком и положили ее обратно таким образом, что цветок оказался на новом месте. Стало быть, движение цветка может быть реализовано определенным движением всей плоскости. На рисунке 2 показаны два цветка, перемещающиеся под действием **параллельного переноса**. Сами цветки совершенно не похожи, но с точки зрения математика оба рисунка обладают одной и той же **трансляционной симметрией**.

Симметрия создается при помощи многократного повторения, или **итерирования**, одного и того же движения. Рисунок или объект **симметричен** относительно движения, если при этом движении отдельные точки перемещаются, но весь рисунок или объект в целом остается без изменений. Простейшим типом симметрии обладает форма, которая повторяет себя бесконечно, каждый раз сдвигаясь на одно и то же фиксированное расстояние в одном и том же фиксированном направлении. Хороший пример такого рода – прямое железнодорожное полотно через плоскую прерию, тянущееся от горизонта до горизонта,[4] как на рисунке 3. Мысленно сдвиньте все полотно вперед так, чтобы каждая шпала переместилась на место следующей. Это движение называется **параллельным переносом** или **сдвигом**: величина сдвига есть расстояние между шпалами, а его направление – направление полотна. После параллельного переноса полотно выглядит в точности так же, как и раньше, но на самом деле каждая шпала сдвинулась вперед и заняла место следующей за ней. Заметьте, что мы опять имеем дело с двумя разными вещами: абстрактным движением (параллельным переносом) и физическим объектом (железнодорожным полотном). Говоря, что объект обладает трансляционной симметрией, мы имеем в виду, что при физическом перемещении этого объекта в новое положение отдельные его части сдвигаются, но вид всего объекта в целом не изменяется.

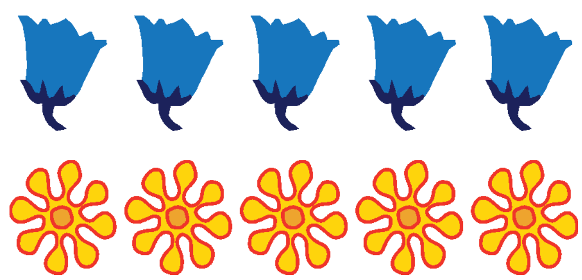


Рис.2. Два ряда цветов, полученные с помощью одного и того же параллельного переноса. Сами цветки совершенно не похожи, но оба ряда обладают одинаковой симметрией

Архитекторы с блеском применяют трансляционную симметрию. Повторяющаяся структура может создавать превосходный зрительный эффект, как видно на примере фриза, изображенного на рисунке 3.

Морская звезда на рисунке 4 – хороший пример **вращательной** симметрии. У звезды 12 лучей, поэтому при повороте на $360° : 12 = 30°$ относительно центра каждый луч повернется, но сама звезда будет выглядеть в точности так же, как и раньше.

Третий тип симметрии – это **зеркальная** симметрия, или симметрия относительно отражения. Такой симметрией обладает наше тело, что демонстрирует знаме-

[4] *В Англии железнодорожные пути обычно не настолько длинные и прямые.*

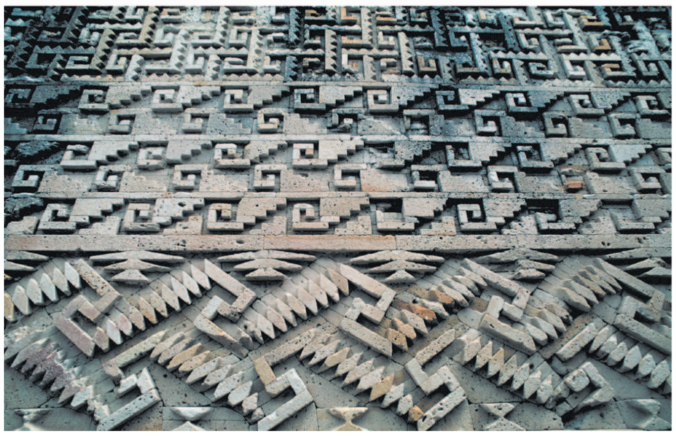


Рис.3. Два проявления трансляционной симметрии: железнодорожный путь через прерию и фриз из древнего мексиканского города Оахака

нитый рисунок Леонардо да Винчи (см. рис.4). Вообразите вертикальную плоскость или зеркало, разделяющее правую и левую половину стоящего человека, и представьте себе, что каждый атом с левой стороны от зеркала перемещается в точку, которая находится на том же горизонтальном уровне и на том же расстоянии от зеркала, только справа, и наоборот. Портретисты возразят, что левая сторона лица отражает иные грани нашей личности, нежели правая, а врачей озадачит нестандартное положение печени и толстой кишки, но в целом можно сказать, что тело не изменилось. Большинство транспортных средств – автомобили, лодки, велосипеды, самолеты – обладают почти идеальной зеркальной симметрией, особенно снаружи. Может быть, подсознательно мы создаем их по своему подобию.

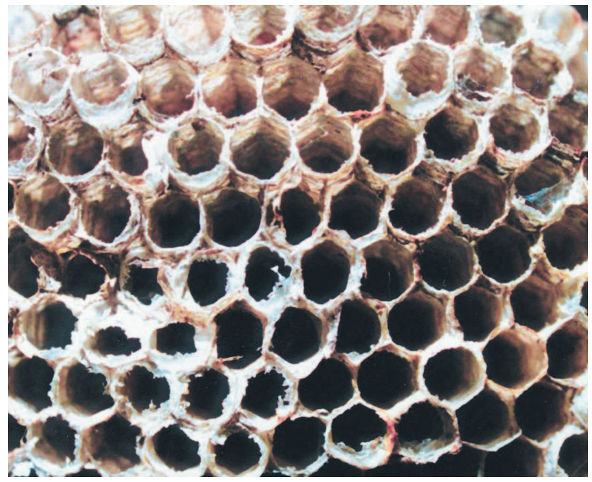
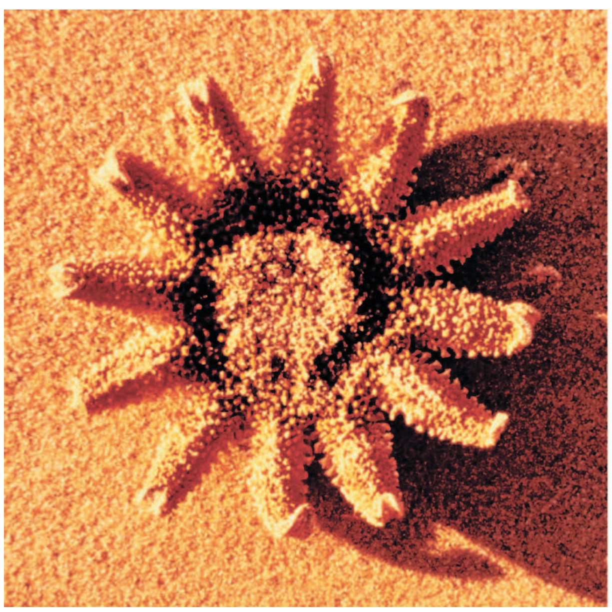


Рис.5. Соты – прекрасный пример объекта, обладающего множественными симметриями всех трех типов

Эти три типа симметрии в разных проявлениях нередко можно увидеть в одной и той же фигуре. Например, посмотрим на соты, изображенные на рисунке 5. Читатель должен без труда распознать здесь следующие симметрии:



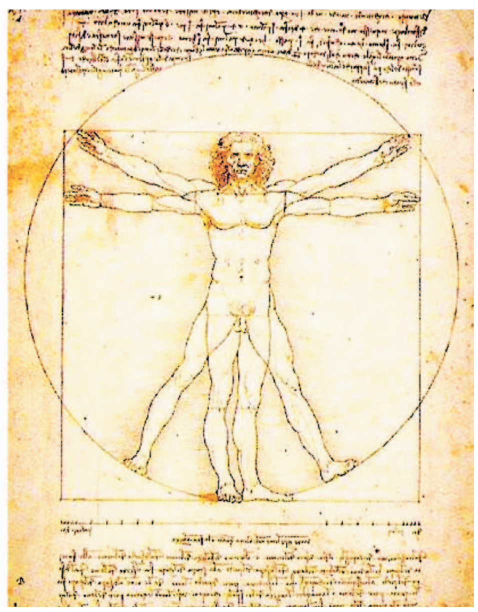


Рис.4. Слева: морская звезда обладает вращательной симметрией. Данная звезда имеет 12 лучей, поэтому она симметрична относительно поворотов на $360^\circ : 12 = 30^\circ$. Справа: знаменитый рисунок Леонардо да Винчи, демонстрирующий пропорции мужской фигуры; рисунок обладает почти идеальной зеркальной симметрией

• трансляционные симметрии в каждом из трех различных направлений,

• вращательная симметрия на 120° относительно точек, где сходятся три ячейки,

• вращательная симметрия на 60° относительно центра каждой ячейки,

• зеркальная симметрия относительно ребер между двумя соседними ячейками,

• зеркальная симметрия относительно прямых, соединяющих середины двух противоположных сторон.

Без сомнения, читатель найдет здесь и другие, более сложные симметрии, но все они получаются комбинациями симметрий, перечисленных выше. Как это делается строго математически, мы выясним ниже.

Прежде чем закончить с основными видами симметрий, мы хотели бы представить вам доктора Стрелкина, давнего коллегу авторов, который будет вашим надежным гидом по страницам этой книги. Его портрет вы видите на левом верхнем фрагменте рисункеа 6; остальные фрагменты этого рисунка демонстрируют перемещения доктора Стрелкина под действием трансляционной, зеркальной и вращательной симметрии плоскости. Сейчас доктор ведет себя относительно солидно, но по мере расширения наших представлений о симметрии и изучения новых видов движений он будет двигаться все более экзотическим образом.

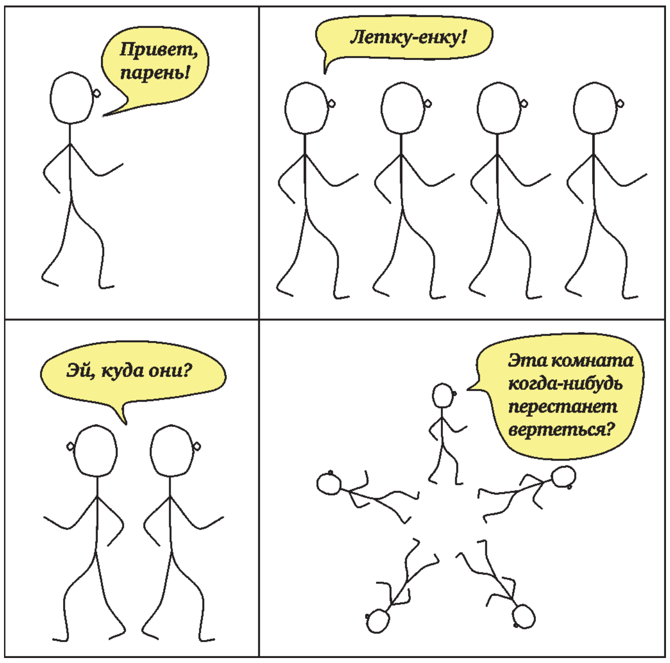


Рис.6. В левом верхнем углу — портрет доктора Стрелкина; остальные три рисунка показывают, как он движется под действием параллельного переноса, отражения и поворота соответственно

Как мы видели, есть два способа рассуждать о симметрии. С одной стороны, можно указать на симметричные объекты и сказать, что они служат примерами трансляционной, вращательной или зеркальной симметрии. Однако другой, более глубокий подход состоит в том, чтобы абстрагироваться от рисунка и изучать лежащие в его основе движения сами по себе. Первый способ привлекателен тем, что дает нам нечто осязаемое и видимое; но второй подход более фундаментален, так как абстракция не содержит ненужных подробностей и позволяет сосредоточиться на симметрии как таковой.

Преобразования плоскости

В предыдущем разделе мы говорили о симметриях как о «перемещениях» или «движениях» плоскости. Математики, которые стремятся к исключительной точности языка даже больше, чем юристы, обычно используют несколько более широкое понятие **преобразования**; общеупотребительным синонимом преобразования является **отображение**. Как часто бывает в математике, эти обычные слова используются в специальном и очень точном смысле. Объясним подробно, что они означают. В максимально широком смысле **преобразование** плоскости – это правило, сопоставляющее каждой точке P плоскости новую точку Q. Например, правило может иметь вид «новая точка находится на 3 дюйма левее старой» или «новое положение точки получается поворотом на 90° относительно центра O». Точка Q, в которую мы попадаем, следуя правилу, называется **образом** [5] исходной точки P. Можно придумать огромное количество разных правил, однако мы будем рассматривать только те из них, действие которых обратимо. Например, эффект от применения правила «сдвинуть все точки на 3 дюйма влево» можно обратить с помощью правила «сдвинуть все точки на 3 дюйма вправо» (рис. 7).

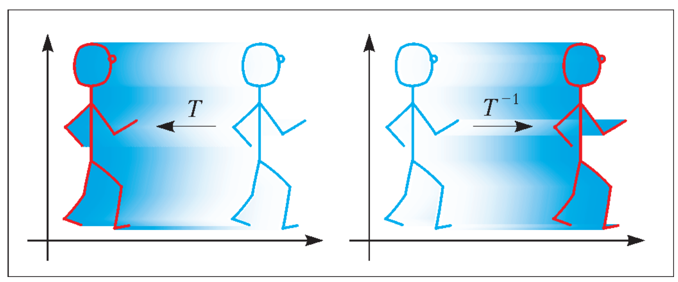


Рис.7. На доктора Стрелкина действует преобразование T, которое сдвигает его на 3 дюйма влево. На втором рисунке видно, как на доктора действует обратное преобразование T^{-1}, сдвигающее его обратно на 3 дюйма вправо

Практичнее подход, состоящий в том, чтобы рассматривать преобразование как процедуру физического перемещения точек плоскости. При этом относительное положение точек может сильно исказиться, но все фигуры и объекты, находящиеся на плоскости, вовлекаются в движение и перемещаются одновременно. Подобное искажение можно наблюдать на примере классической скульптуры Паолины, см. левый фраг-

[5] *Математики склонны давать специальные названия всему, о чем они говорят. И не только для солидности: так хирург раскладывает инструменты перед операцией и проверяет, что ассистенты знают их правильные названия, ибо он должен быть уверен, что в случае необходимости ему дадут именно то, что нужно.*

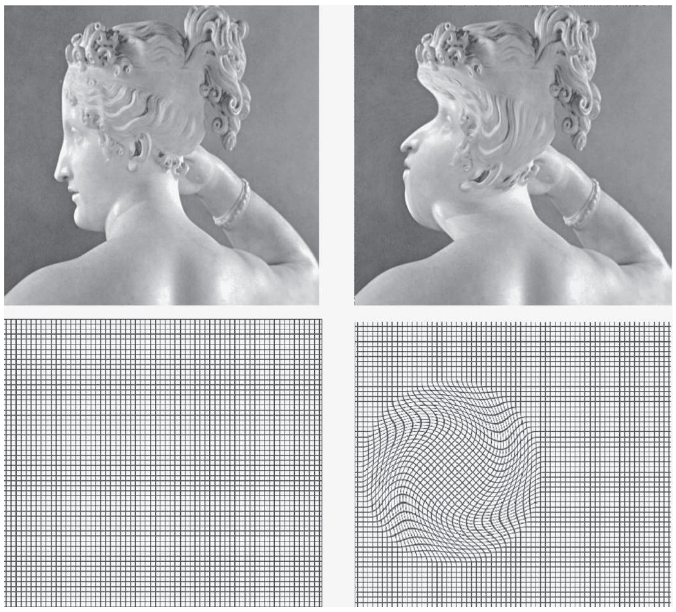


Рис.8. Действие сильно искажающего преобразования на скульптуру Паолины. На левом верхнем фрагменте мы видим изящную греческую фигуру, а на правом – результат применения отображения, превратившего ее в ужасную карикатуру. Решетки внизу иллюстрируют примененное правило. Следя за тем, что происходит в каждом квадратике, можно выяснить, как преобразование действует на все точки плоскости. Грубо говоря, правило состоит в следующем: нужно повернуть область, ограниченную некоторой окружностью, на 45° по часовой стрелке, а затем сгладить полученный эффект, поворачивая точки, лежащие внутри расширяющихся концентрических колец, на все меньший и меньший угол, вплоть до самой внешней окружности, вне которой все точки остаются неподвижными

мент рисунка 8. Хотя на правом фрагменте форма Паолины радикально изменилась, отдельные ее черты по-прежнему хорошо различимы. Чтобы получить правый рисунок, мы применили правило, предписывающее, как именно следует перемещать каждую точку левого рисунка в ее новое положение. Это преобразование существенно изменило форму Паолины, сохранив все ее характерные черты.

Чтобы продолжить обсуждение и при этом избежать многословия, к которому мы вынуждены были прибегать выше, необходимо ввести обозначения. Обычно мы используем буквы S и T для обозначения преобразований, а буквами P и Q, следуя Евклиду, обозначаем точки плоскости. Как и большинство математиков, через $T(P)$ мы обозначаем образ точки P под действием преобразования T; таким образом, $T(P)$ есть «новая точка, полученная применением правила T к точке P». Например, правило преобразования может быть таким:

$T(P)$ есть точка, находящаяся на 3 дюйма левее P.

Нередко мы будем говорить о преобразовании в активном залоге: «T **отображает** P в $T(P)$».

Правило, которое обращает эффект, произведенный преобразованием T, называется **обратным** к T и обозначается T^{-1}. Так, например, обращением правила

$T(P)$ есть точка, находящаяся на 3 дюйма левее P,

является правило

$T(P)$ есть точка, находящаяся на 3 дюйма правее P.

Часто нас будет интересовать действие правила или преобразования T на целую конфигурацию точек, скажем, окружность C или пару параллельных прямых L и M. Обозначение $T(C)$ – это удобное сокращение для «множества всех таких точек $T(P)$, что P лежит в C». Иными словами, $T(C)$ есть образ множества C под действием преобразования T.

До сих пор мы не уточняли, что именно понимается под «плоскостью». Каждый, кто изучал работы Евклида (или читал прекрасную старую книгу о Флатландии[6]), скорее всего, имеет некоторое представление об этом идеализированном двумерном мире, но иногда проще оперировать формулами, чем словами, которые часто грешат неточностью. Как вы, несомненно, учили в школе, стандартные декартовы координаты позволяют задавать точки «плоскости» с помощью двух чисел x и y; для этого нужно выбрать

- начало координат, которым может служить любая точка;
- две перпендикулярные прямые, проходящие через начало координат, которые называются осью x (или горизонтальной осью) и осью y (или вертикальной осью)[7].

Любая точка P на плоскости представляется двумя числами x и y, которые задают расстояния от нее до координатных осей; обычно эти числа записывают в виде пары (x, y). Расстояние x от точки P до вертикальной оси считается положительным, если точка находится справа от нее, и отрицательным, если слева; расстояние y от точки P до горизонтальной оси считается положительным, если точка находится выше нее, и отрицательным, если ниже.

Открытие Декарта состояло в том, что алгебра – это мощное средство для изучения геометрии. Вместо слов «сдвиньте все точки на 3 дюйма влево» можно сказать «сдвиньте точку с координатами (x, y) в точку с координатами $(x-3, y)$». Уменьшение x на 3 перемещает точку на 3 единицы (в данном случае, 3 дюйма) влево, а тот факт, что y не изменяется, означает, что точка остается на той же горизонтальной прямой. Таким образом, преобразование T, заданное правилом

$T(P)$ есть точка, находящаяся на 3 дюйма левее P,

записывается в сжатом виде формулой

$$T(x, y) = (x-3, y).$$

Желая показать динамику преобразования, мы иногда пишем

$$T : (x, y) \mapsto (x-3, y);$$

эта запись читается так: «преобразование T отображает точку (x, y) в точку $(x-3, y)$».

[6] *Э.Эбботт. «Флатландия». – М.:Мир, 1976.*
[7] *Или осями абсцисс и ординат. (Прим. перев.)*

Трансляционные, вращательные и зеркальные симметрии – примеры преобразований плоскости. Так, параллельный перенос всегда можно записать формулой

$$T(x, y) = (x + a, y + b).$$

Эта запись означает, что каждая точка (x, y) плоскости сдвигается на a единиц вправо (или влево, если a отрицательно) и b единиц вверх (или вниз, если b отрицательно). Отражение относительно оси y задается правилом

$$T(x, y) = (-x, y).$$

Эта формула означает, что каждая точка остается на той же горизонтали, но при этом точка, лежащая на расстоянии x от оси y, переходит в точку, лежащую на том же расстоянии от оси, но по другую сторону.

Формула, задающая поворот, немного сложнее. На рисунке 9 показано, как вывести формулу для поворота на 90° против часовой стрелки относительно начала

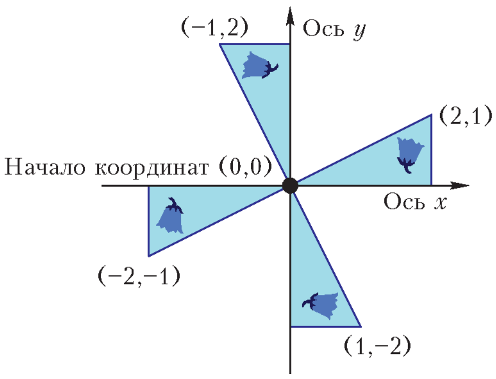


Рис.9. Для задания любой точки плоскости можно использовать декартовы координаты. На этом рисунке видно, как угол с вершиной в точке (2,1) поворачивается на 90° под действием отображения $T(x, y) = (-y, x)$ и оказывается в точке (−1,2)

координат O. В этом случае правило имеет вид $T(x, y) = (-y, x)$.

Формулы для трех основных типов симметрий в декартовых координатах приведены ниже. Если эти формулы вам незнакомы, рекомендуем вывести их самостоятельно, следуя указаниям упражнения 2.

Вооружившись новым языком, мы готовы придать точный смысл понятию, которое мы называли «движением плоскости». А именно, это преобразование, не меняющее ни относительные положения объектов, ни их размеры, так что, в частности, любые две точки P и Q всегда находятся на том же расстоянии друг от друга, что и их образы $T(P)$ и $T(Q)$. Кроме того, угол

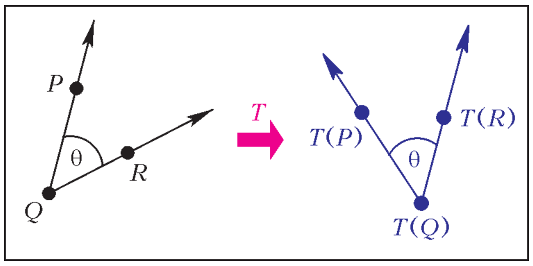


Рис.10

$\angle PQR$ равен углу $\angle T(P)T(Q)T(R)$ (рис.10), образованному их образами. Любое движение плоскости, обладающее этими свойствами, является либо параллельным переносом, либо поворотом, либо отражением, либо же отражением относительно прямой с последующим сдвигом вдоль этой прямой. Преобразование четвертого типа, называемое **скользящей симметрией**, можно увидеть на фризе, изображенном на рисунке 3.[8]

Формулы для трех основных типов симметрий

Здесь приведены общие формулы для трех основных типов симметрий.

1. Параллельный перенос T, который сдвигает точку на a единиц вправо и b единиц вверх:

$$T(x, y) = (x + a, y + b).$$

2. Поворот R на угол θ против часовой стрелки относительно начала координат:

$$R(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta).$$

3. Симметрия S относительно вертикальной оси y:

$$S(x, y) = (-x, y).$$

Композиция, или Как получить много преобразований из нескольких

Вернемся к составленному из шестиугольников узору сот (см. рис.5), известному также в своем более прозаическом воплощении как узор плиток на полу общественной уборной. Как мы видели, симметрии – это такие движения или преобразования узора или фигуры, которые, перемещая отдельные точки, оставляют весь узор в целом без изменений. В нашем случае это преобразования, обладающие следующим очень специальным свойством: они сдвигают весь пол целиком и вновь совмещают его с собой таким образом, что каждая плитка оказывается на месте какой-то другой плитки. Рассматривая пол, подвергнутый такому преобразованию, вы не заметите никаких изменений. Иными словами, симметрия пола – это преобразование T, которое перемещает каждую плитку U на место какой-то другой плитки V; на языке формул $T(U) = V$.[9] Это означает, что каждая точка плитки U под действием преобразования T переходит в точку, принадлежащую ее образу V. Мы не исключаем возможности, что $U = V$, т.е. плитка U как единое целое остается на своем месте, хотя, возможно, поворачивается или отражается так, что некоторые или все ее точки меняют свое положение. Так будет, например, если сделать поворот на 60° относительно центра одной из плиток. Коротко мы говорим, что «преобразование T **сохраняет**, или

[8] *На самом деле свойство сохранения углов следует из свойства сохранения расстояний. Чтобы убедиться в этом, вспомните, что углы треугольника определяются длинами трех его сторон.*

[9] *Здесь мы игнорируем проблемы, связанные с наличием стен, и предполагаем, что плиточный узор простирается сколь угодно далеко во всех направлениях.*

оставляет инвариантным, плиточный узор». Итак, мы придали точный математический смысл утверждению, что T является **симметрией** замощенного плитками пола.

Теперь рассмотрим новую операцию над преобразованиями. Мы хотим, начав с двух преобразований S и T плоскости, составить новое правило, задающее третье преобразование. Это новое преобразование называют **композицией** S и T и символически записывают в виде произведения: ST. Правило, задающее ST, очень просто:

сначала применить T, а затем S.

Иными словами, оно состоит в следующем. Возьмем точку P. Применяя правило, задающее преобразование T, получим точку $T(P)$, в которую T переводит P. Теперь применим правило, задающее преобразование S, к образу $T(P)$. Мы получим точку, в которую S переводит $T(P)$, т.е. $S(T(P))$. Это и есть правило, задающее преобразование ST. В символьной записи имеем

$$ST(P) = S(T(P)).$$

Обратите особое внимание на порядок, который здесь очень важен. Хотя символы читаются слева направо, правило ST означает, что надо

сначала применить T, а затем S.

Если вы хотите произвести операции в другом порядке, т.е.

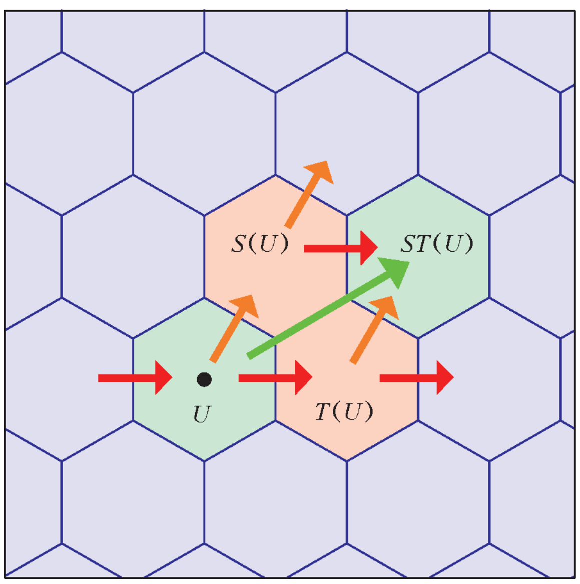
сначала применить S, а затем T,

то вам следует применить композицию TS.

Композиция преобразований подобна кулинарному рецепту: каждый шаг, описанный в рецепте, предписывает произвести определенные преобразования с набором ингредиентов, а весь рецепт в целом есть не что иное как композиция всех этих преобразований. При этом, как и в рецепте, порядок имеет значение. Взбить яичные белки и подмешать к ним сливки – совсем не то же самое, что сначала подмешать сливки к яичным белкам, а затем попытаться взбить полученную массу. В тех случаях, когда на самом деле порядок не важен, говорят, что преобразования **коммутируют**.

Предположим, что мы начинаем с преобразований S и T, которые являются симметриями шестиугольного плиточного узора. Пусть U – некоторая плитка. Поскольку T – симметрия, каждая точка плитки U под действием преобразования T переходит в точку, принадлежащую некоторой другой плитке V. Поскольку S – симметрия, точки плитки V под действием преобразования S переходят в точки некоторой третьей плитки W. Соединяя все вместе, мы видим, что преобразование ST переводит точки плитки U в точки плитки W. Отсюда мы заключаем, что ST – симметрия, поскольку она тоже сохраняет плиточный узор.

Проверим это в нескольких простых случаях. В примере на левом фрагменте рисунка 11 оба преобразования S и T – сдвиги. На рисунке красными стрелками обозначено действие горизонтального сдвига T, который перемещает каждый шестиугольник на место его правого соседа, а оранжевыми стрелками – действие диагонального сдвига S, который сдвигает каждый шестиугольник по диагонали на один ряд вверх и полпозиции вправо. Чтобы выяснить, как действует композиция ST, мы выбрали зеленую плитку U и покрасили плитку $T(U)$ в розовый цвет. Затем мы нашли плитку $S(T(U))$ – она расположена на один ряд выше и полпозиции правее $T(U)$. Можно проверить, что, начав с любой другой плитки и проделав те же действия, мы получим тот же эффект. Иными словами, композиция ST есть сдвиг, обозначенный



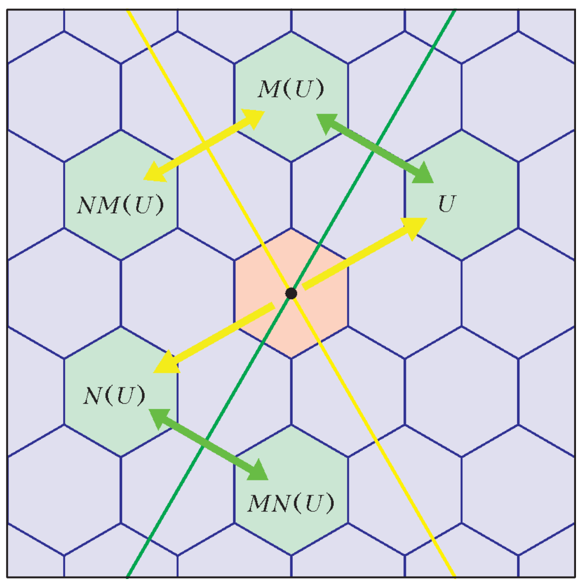


Рис.11. Слева: красными стрелками обозначен горизонтальный сдвиг T на одну позицию вправо, а оранжевыми – сдвиг S на одну позицию вверх по диагонали. Зеленая стрелка соответствует композиции ST, которая в этом случае совпадает с TS. Справа показаны два отражения: отражение M относительно зеленого зеркала и отражение N относительно желтого зеркала. Следя за тем, что происходит с одной плиткой (например, U), можно заметить, что композиция MN действует как поворот на 120° по часовой стрелке относительно точки пересечения зеркал, а композиция NM неожиданно оказывается поворотом против часовой стрелки

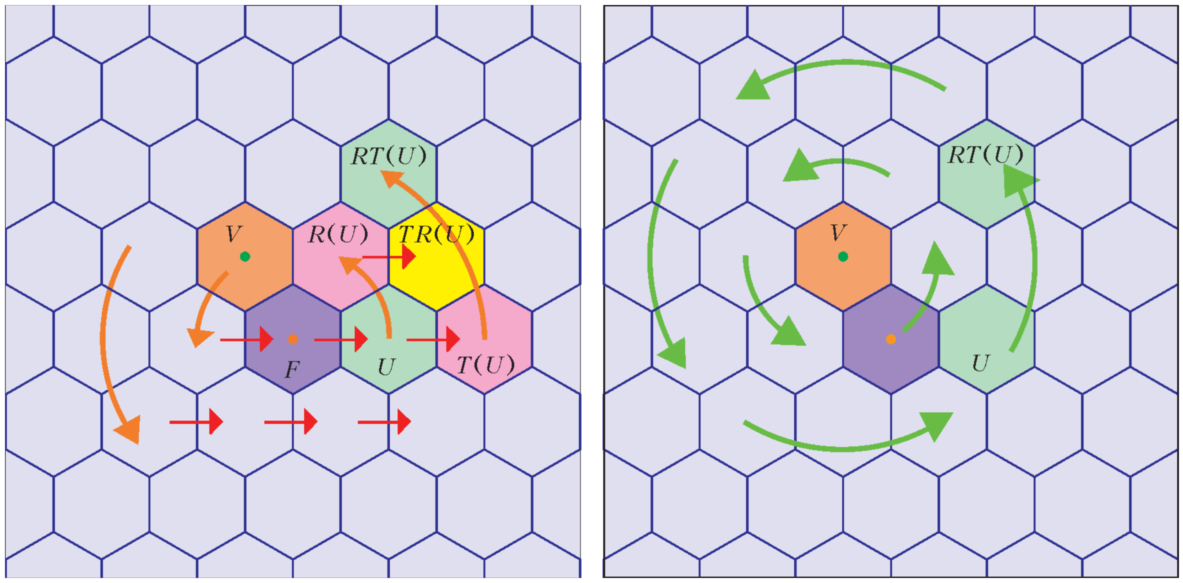


Рис.12. На левом фрагменте красными стрелками обозначен сдвиг T, а оранжевыми – поворот R. Проследив за судьбой зеленой плитки U сначала под действием TR, а затем под действием RT, мы видим, что на сей раз полученные плитки $T(R(U))$ и $R(T(U))$ различны, откуда заключаем, что TR не совпадает с RT. Глядя на правый фрагмент, вы можете убедиться, что RT – это поворот на 60° относительно центра другой плитки V!

зеленой стрелкой. Если бы мы строили композицию TS, которая переводит U сначала в $S(U)$, а затем в $T(S(U))$, мы получили бы ровно тот же результат. Отсюда можно заключить, что в этом случае $ST = TS$.

На первый взгляд, все просто, но иногда результат композиции оказывается неожиданным. На рисунке 12 преобразование T – тот же сдвиг, что и ранее. Но на сей раз в качестве второго преобразования рассмотрим поворот R на 60° против часовой стрелки относительно центра плитки F. Удивительным образом, композиция RT в этом случае также является поворотом на 60°, только относительно центра другой плитки V. На рисунке мы проследили за судьбой плитки U, которую подвергли сначала преобразованию T, а затем – преобразованию R. На левом фрагменте видно также, что плитка V под действием преобразования T сдвигается на одну позицию вправо, а затем под действием преобразования R возвращается в исходное положение. Попробуйте убедиться в том, что мы вас не обманываем, проследив за судьбой еще нескольких плиток под действием композиции RT.

Было бы интересно вывести общие правила, описывающие композицию ST двух симметрий S и T, но соответствующие рассуждения слишком длинны, чтобы приводить их здесь. Несколько примеров для изучения предложены в упражнении 1.

Упражнения

1. *Строим композиции с помощью рисунка.*

а) Вновь разберите пример, изображенный на рисунке 12 слева. На этот раз примените сначала отображение R, а затем T. Убедитесь, что TR – тоже поворот. Где находится его центр?

б) Используя ту же базовую решетку из шестиугольников, проследите за действием отражений N и M относительно двух зеркал, изображенных на рис.11. Проверьте утверждения про композиции NM и MN, сформулированные в подписи к рисунку.

2. *Формула для поворота.* Мы хотим убедиться в справедливости формулы для поворота R на угол θ против часовой стрелки относительно начала координат:

$$R(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta).$$

В качестве простой проверки подставьте $\theta = 90°$ и получите уже упоминавшееся правило $(x, y) \mapsto (-y, x)$ для этого поворота (рис. 9). Существует много способов проверить истинность общей формулы. Вот один из них:

Шаг 1. Проверьте, что формула правильно предсказывает судьбу точки $(1, 0)$. (Нарисуйте диаграмму!)

Шаг 2. Сделайте то же самое для точки $(0, 1)$.

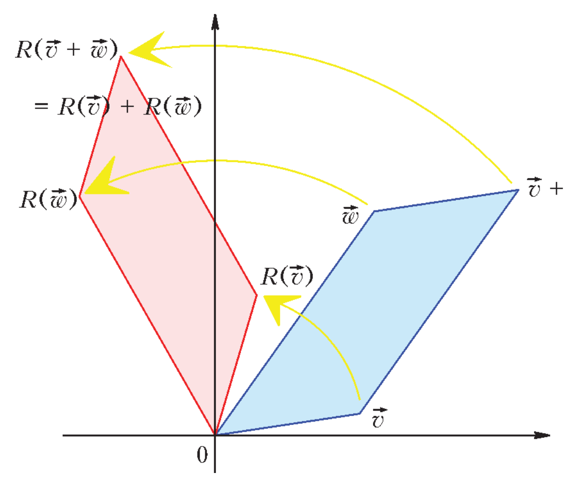


Рис.13. Наглядное объяснение, почему поворот R – линейное отображение. Он переводит вершины $\vec{v}$ и $\vec{w}$ голубого параллелограмма в вершины $R(\vec{v})$ и $R(\vec{w})$ розового параллелограмма. Точка $\vec{v} + \vec{w}$ – это вершина голубого параллелограмма, противоположная центру поворота 0; аналогично, $R(\vec{v}) + R(\vec{w})$ – это дальняя вершина розового параллелограмма. С другой стороны, поскольку R переводит голубой параллелограмм в розовый, дальняя розовая вершина должна совпадать с $R(\vec{v} + \vec{w})$.

Шаг 3. Докажите, что если $\vec{v}$ – вектор, отложенный от начала координат, то $R(t\vec{v}) = tR(\vec{v})$ для любого вещественного числа t.

Шаг 4. Докажите, что если $\vec{v}$ и $\vec{w}$ – векторы, отложенные от начала координат, то

$$R(\vec{v}+\vec{w}) = R(\vec{v}) + R(\vec{w}).$$

Шаг 5. Объедините результаты, полученные в шагах 1–4, и выведите из них искомую формулу.

На первых двух шагах мы проследили за тем, что происходит с двумя базисными векторами $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Результат шага 3 говорит нам, что точка, лежащая на расстоянии t от начала координат в направлении вектора $\vec{v}$, под действием отображения R переходит в точку, лежащую на том же расстоянии t от начала координат в направлении повернутого вектора $R(\vec{v})$, а результат шага 4 – что диагональ параллелограмма со сторонами, идущими вдоль векторов $\vec{v}$ и $\vec{w}$, переходит в диагональ параллелограмма со сторонами, идущими вдоль векторов $R(\vec{v})$ и $R(\vec{w})$. Эти два факта означают, что поворот R есть **линейное** отображение, т.е. R переводит прямые в прямые. Шаг 4 наглядно проиллюстрирован на рисунке 13.

(Окончание следует)