Где ошибка?

В этом калейдоскопе мы собрали несколько задач с неверными решениями. Найдете ошибки?

1. Бывают ли квадратные уравнения, у которых есть три корня? Пожалуйста! Возьмите любые три разных числа a, b, c и составьте уравнение

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=1.$$

Оно, очевидно, квадратное относительно x (не верите – раскройте скобки и приведите подобные). Но каждое из чисел a, b, c будет его корнем (подставьте вместо x и убедитесь). В чем дело?

2. Решим такую задачу:

Найдите все такие пары (p, q), что каждое из чисел p и q будет корнем уравнения $x^2+px+q=0$.

Проще всего воспользоваться теоремой Виета: если p и q – корни, то $p+q=-p$ и $pq=q$. Из последнего равенства либо $q=0$ и тогда $p=0$, либо $p=1$ и тогда $q=-2$. Задача решена? Но возьмем пару $p=-\frac{1}{2}$ и $q=-\frac{1}{2}$. Подстановкой легко убедиться, что $x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0$ при $x=-\frac{1}{2}$. Как же мы эту пару потеряли?

3. Попробуем доказать методом математической индукции такое утверждение:

Если треугольник разбит отрезками на треугольники, то хотя бы один из треугольников разбиения не остроугольный.

База индукции. Если треугольник разбит отрезком на два треугольника, то один из них не остроугольный (ясно).

Шаг индукции. Пусть имеется треугольник, как-то разбитый на n треугольников. Проведем еще один отрезок, разбив один из маленьких треугольников на два. Получим разбиение на $n+1$ треугольник, причем один из двух новых треугольников будет не остроугольный.

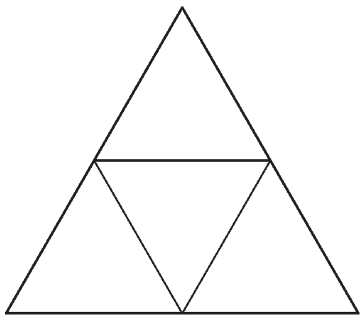

Рис. 1

Кажется, что по индукции теорема доказана. Но как тогда быть с разбиением, изображенным на рисунке 1?

4. У короля была бесконечная башня из прямоугольных параллелепипедов-комнат, поставленных одна на другую. Первая комната имела размеры $1\times1\times\frac{1}{2}$, вторая – $1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$, третья – $1\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$ и так далее. Однажды король приказал слуге выкрасить все комнаты изнутри красной краской.

– Но, повелитель, – ответил слуга. – Даже если в комнате с номером n взять только стену $1\times\frac{1}{n}$ площади $\frac{1}{n}$, сумма площадей всех этих стен уже будет бесконечной, а столько краски…

– Почему бесконечной? – перебил король.

– Получается сумма $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$, а это же гармонический ряд! Я прочитал в «Кванте» №1 за 2011 год на странице 59, что…

– Меня это не интересует, – остановил слугу король. – Комнаты должны быть выкрашены.

Слуга совсем уж было пригорюнился, как вдруг его осенила гениальная идея. Ведь суммарный объем всех комнат конечен – он равен

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots=$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots=1.$$

А значит, можно просто залить всю башню краской! Потом вылить лишнее, и все стены окажутся покрашенными.

Не кажется ли вам, что в этой истории что-то не так?

5. Докажем, что любой тупой угол равен прямому. Из концов отрезка AB проведем два равных между собой отрезка AC и BD, лежащих по одну сторону от прямой AB и образующих с ней прямой угол DBA и тупой CAB; равенство этих углов и будем доказывать. Соединив C с D, получим четырехугольник $ABDC$, у которого стороны AC и BD, очевидно, не параллельны, как и стороны AB и CD (иначе $ABDC$ был бы равнобедренной трапецией с неравными углами при основании AB). К каждому из отрезков AB, CD проведем его срединный перпендикуляр. Так как отрезки не параллельны, то и перпендикуляры к ним тоже не параллельны и не сливаются, а пересекаются, пусть в точке N. Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1: *точка N лежит «выше» прямой AB*, точнее – по ту же сторону от прямой AB, что и четырехугольник $ABDC$ (рис. 2). Соединим эту точку со всеми вершинами четырехугольника; так как она одинаково удалена от концов отрезка AB и одинаково – от концов отрезка CD, треугольники NAC и NBD равны по трем сторонам. Отсюда

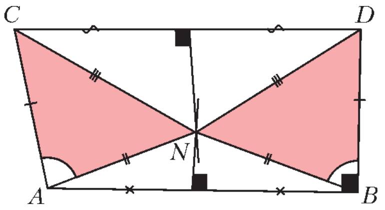

Рис. 2

следует, что $\angle NAC = \angle NBD$. Прибавляя к первому углу угол NAB, ко второму – угол NBA и учитывая, что $\angle NAB = \angle NBA$ по свойству равнобедренного треугольника, приходим к равенству $\angle CAB = \angle DBA$.

Случай 2: *точка N лежит на AB*, т.е. служит серединой отрезка AB. Предыдущее доказательство упрощается – равенство $\angle CAB = \angle DBA$ получается сразу из равенства треугольников NAC и NBD.

Случай 3: *точка N лежит «ниже» AB*, т.е. не по ту сторону от прямой AB, по какую лежит четырехугольник $ABDC$ (рис. 3). Снова из равенства тре-

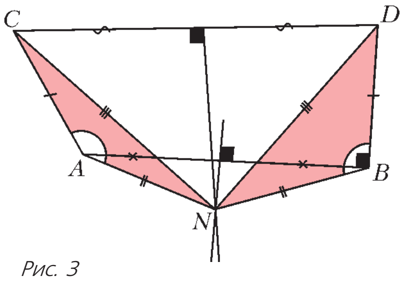

Рис. 3

угольников получается $\angle NAC = \angle NBD$, но теперь от этих углов надо отнять равные углы NAB и NBA, и снова получится $\angle CAB = \angle DBA$.

Ну надо же! А вы заметили подвох?

6. Найдите ошибку в следующем доказательстве.

С одной стороны, по формуле Ньютона–Лейбница,

$$\int_1^2 (\ln 2x)' \, dx = \int_1^2 (\ln x)' \, dx = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

С другой стороны, по формуле замены переменной $(2x \leftrightarrow u)$,

$$\int_1^2 (\ln 2x)' \, dx = \frac{1}{2}\int_2^4 (\ln u)' \, du = \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 2) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

В итоге получаем, что $\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2$.

7. Найдем площадь круга $x^2 + y^2 = r^2$. Разобьем его на криволинейные треугольники лучами, выходящими из начала координат O. Площадь одного такого треугольника с достаточно малым углом $\Delta\varphi$ при вершине O (рис.4) с большой точностью равна $\frac{1}{2}r^2 \sin\Delta\varphi$, что, в свою очередь, примерно равно $\frac{1}{2}r^2\Delta\varphi$ (так как $\sin\varphi \approx \varphi$ при малых φ). Тогда

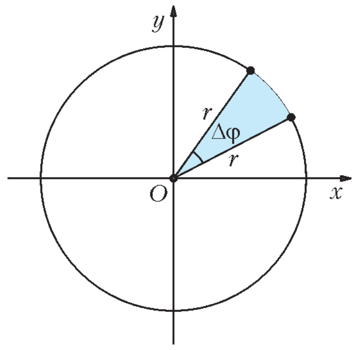

Рис. 4

площадь круга равна $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}r^2 d\varphi = \frac{1}{2}r^2 \cdot 2\pi = \pi r^2$ – хорошо знакомая нам формула.

Применим этот метод для вычисления площади эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 5). Зададим его параметрически: точка $R(\varphi) = (a\cos\varphi; b\sin\varphi)$, очевидно,

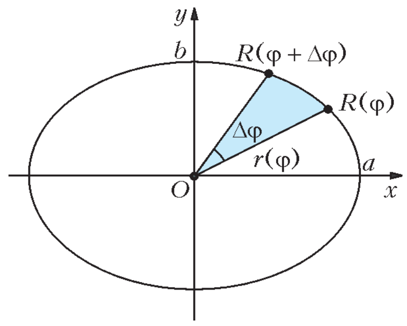

Рис. 5

пробегает весь эллипс, когда угол φ изменяется от 0 до 2π. Длину радиуса-вектора $OR(\varphi)$ будем обозначать $r(\varphi)$.

Разобьем эллипс на криволинейные треугольники лучами, выходящими из начала координат O. Площадь одного такого треугольника со сторонами $OR(\varphi)$ и $OR(\varphi + \Delta\varphi)$ при достаточно малом угле $\Delta\varphi$ с большой точностью равна $\frac{1}{2}r^2(\varphi)\Delta\varphi$. Тогда площадь всего эллипса равна

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}r^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi + \frac{b^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{a^2+b^2}{2}\pi.$$

Но во всех справочниках написано, что площадь такого эллипса равна $ab\pi$.

Неужели справочники врут?

Материал подготовил С.Дориченко