

# Раскраски графов и линейные уравнения

В. ДОРОФЕЕВ, А. СПИВАК

Величайшие истины – самые простые.

Л.Н. Толстой

И.Ф. АКУЛИЧ РАССМОТРЕЛ РАСКРАСКИ ШАХМАТНОЙ доски и других клетчатых фигур, в которых каждая черная клетка граничит с четным числом черных клеток, а каждая белая граничит с нечетным числом черных. В статье «Призрак Леонардо» («Квант» №1 за 2008 год) он поставил несколько интересных вопросов, тесно связанных с системами линейных уравнений, решать которые надо «по модулю два» (четные числа соответствуют белому цвету, нечетные – черному).

## Раскраски и системы сравнений

Напомним, о каких раскрасках идет речь. Рассмотрим произвольный конечный граф – например, изображенный на рисунке 1. Акулич спрашивает, можно ли покрасить некоторые вершины так, чтобы у каждой покрашенной вершины было четное число покрашенных соседей (соседними называем вершины, соединенные ребром), а у каждой непокрашенной вершины – нечетное число покрашенных соседей.

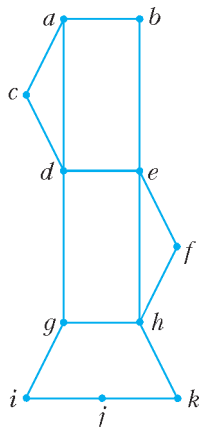


Рис. 1

Для некоторых графов он при помощи компьютера нашел все такие раскраски. Например, для графа рисунка 2 раскраска единственная, а на рисунке 3

изображены пять из 16 существующих раскрасок соответствующего графа – остальные получаются при помощи поворотов и осевых симметрий.

Найдем все раскраски для графа рисунка 1. Его вершины обозначены буквами. Присвоим значение 1 буквам, вершины которых покрашены, и 0 – тем, где не покрашены. Рассмотрим следующую систему сравнений, где знаки сравнения (три черточки вместо двух черточек привычного знака равенства) указывают, что нас интересует только четность (два числа сравнимы по модулю 2 в том и только том случае, когда

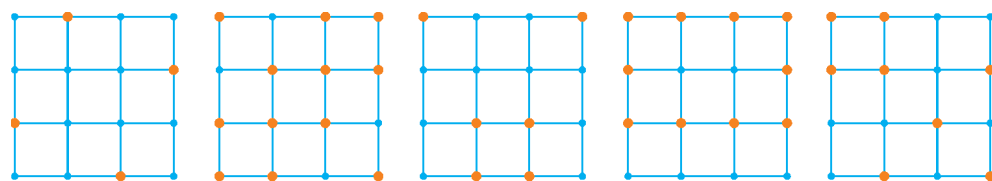


Рис. 3

их разность четна – кратна числу 2):

$$\begin{cases} a + b + c + d \equiv 1, \\ b + a + e \equiv 1, \\ c + a + d \equiv 1, \\ d + a + c + e + g \equiv 1, \\ e + b + d + f + h \equiv 1, \\ f + e + h \equiv 1, \\ g + d + h + i \equiv 1, \\ h + e + f + g + k \equiv 1, \\ i + g + j \equiv 1, \\ j + i + k \equiv 1, \\ k + j + h \equiv 1. \end{cases}$$

Вы еще не поняли, какое отношение система сравнений имеет к раскраскам Акулича? Посмотрите на первую строку: число  $a + b + c + d$  нечетно либо в случае, когда  $a = 1$  и среди чисел  $b, c, d$  четное число единиц, либо в случае, когда  $a = 0$  и среди чисел  $b, c, d$  нечетное число единиц. Таким образом, первое сравнение системы выражает для вершины  $a$  условие «у каждой покрашенной вершины четное число покрашенных соседей, а у каждой непокрашенной вершины – нечетное число покрашенных соседей» из статьи «Призрак Леонардо».

Аналогична ситуация и для всех остальных строк системы: для каждой вершины графа в составленной нами системе есть соответствующая строка.

## Последовательное исключение неизвестных

А теперь – простая, но очень важная идея: **любую систему линейных уравнений можно решить методом Гаусса последовательного исключения неизвестных**. Скептик скажет, что у нас не уравнения, а сравнения по модулю 2. Но это даже упрощает вычисления: для любого целого числа  $x$ , очевидно,  $2x \equiv 0 \pmod{2}$  и  $x \equiv -x \pmod{2}$ .

Начинаем работу. Из первого сравнения выражаем

$$a \equiv b + c + d + 1$$

(последний раз напоминаем, что все сравнения по модулю 2). Заменяя во всех других сравнениях (втором, третьем и четвертом)  $a$  на  $b + c + d + 1$  и упрощая, получаем систему

$$\begin{cases} c + d + e \equiv 0, \\ b \equiv 0, \\ b + e + g \equiv 0, \\ e + b + d + f + h \equiv 1, \\ f + e + h \equiv 1, \\ g + d + h + i \equiv 1, \\ h + e + f + g + k \equiv 1, \\ i + g + j \equiv 1, \\ j + i + k \equiv 1, \\ k + j + h \equiv 1. \end{cases}$$

Следовательно,  $b = 0$  и  $c \equiv d + e$ ; получаем систему восьми сравнений

$$\begin{cases} e + g \equiv 0, \\ e + d + f + h \equiv 1, \\ f + e + h \equiv 1, \\ g + d + h + i \equiv 1, \\ h + e + f + g + k \equiv 1, \\ i + g + j \equiv 1, \\ j + i + k \equiv 1, \\ k + j + h \equiv 1. \end{cases}$$

Заметьте: для шага метода последовательного исключения неизвестных можно воспользоваться *любым* из сравнений системы; принципиального значения это не имеет. Идея метода в том, что мы из некоторого имеющегося сравнения выражаем любую из входящих в него переменных и, подставляя полученное выражение в остальные сравнения, уменьшаем тем самым количество неизвестных и сравнений; при этом могут образовываться сравнения вида  $0 \equiv 0$ , которые сразу отбрасываем.

Если бы образовалось сравнение  $0 \equiv 1$ , то из исходной системы сравнений мы получили бы противоречие. Такие системы называют несовместными – они не имеют ни одного решения. (Вскоре мы докажем, что для любого графа система, соответствующая раскраскам Акулича, совместна.)

Продолжим вычисления. Поскольку  $e \equiv g$ , получаем сами понимаете какую систему семи сравнений.

Обратите внимание: переменные  $a, b, c$  и  $e$  уже исчезли, сравнений тоже стало на четыре меньше. А теперь самостоятельно повторите наши вычисления. Поскольку вариантов, какие именно переменные выражать на очередном шаге, довольно много, договоримся: сначала выразите  $d$ , затем  $f, i, k, h$  и  $g$ .

Посчитали? Вот ответ: величина  $j$  – свободная переменная, она может принимать любое из двух возможных значений 0 и 1, а остальные переменные выражаются по формулам таблицы 1, в нижних двух строках которой приведены оба решения системы.

Таблица 1

$j$	$g \equiv 1$	$h \equiv j$	$k \equiv 1$	$i \equiv j$	$f \equiv j$	$d \equiv 0$	$e \equiv 1$	$c \equiv 1$	$b \equiv 0$	$a \equiv 0$
0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0

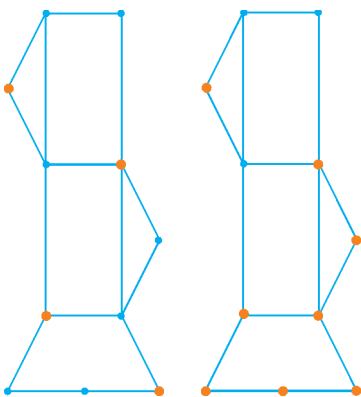


Рис. 4

Рис. 5

На рисунках 4 и 5 изображены соответствующие раскраски. В общем случае получаем  $2^k$  раскрасок, где  $k$  – число свободных переменных; например, в случае  $k = 0$  система имеет единственное решение.

#### Упражнения

1. Составьте и решите аналогичные системы для графа рисунка а) 2; б) 3.

2. Нарисуйте какой-нибудь граф, составьте систему сравнений Акулича, решите ее и нарисуйте все возможные раскраски Акулича.

3 (M665\*). Световое табло состоит из нескольких ламп, каждая из которых может находиться в двух состояниях (гореть или не гореть). На пульте несколько кнопок, при нажатии каждой из которых одновременно меняется состояние некоторого набора ламп (для каждой кнопки – своего). Вначале лампы не горят.

а) Докажите, что число различных узоров, которые можно получить на табло, – степень двойки.

б) Сколько различных узоров можно получить на табло, состоящем из  $m$  лампочек, расположенных в форме прямоугольника размером  $m \times n$ , если кнопками можно переключить как любой горизонтальный, так и любой вертикальный ряд ламп?

4 (M205\*). 24 студента решали 25 задач. Преподаватель составил таблицу размером  $24 \times 25$ , в которой записано, кто какие задачи решил. Докажите, что

а) можно отметить некоторые задачи «галочкой» так, что каждый из студентов решил четное число (в частности, может быть, нуль) из отмеченных задач;

б) можно отметить некоторые из задач знаком «+», а некоторые из остальных – знаком «-» и приписать каждой задаче некоторое натуральное число баллов так, чтобы каждый студент набрал поровну баллов за задачи, отмеченные знаками «+» и «-».

#### Сумма степеней вершин

Доказательство того, что при решении системы мы не можем прийти к противоречию – сравнению  $0 \equiv 1$ , основано на следующем важном свойстве графов.

**Лемма.** Сумма степеней всех вершин графа четна.

**Доказательство.** Разрезав все ребра графа пополам, видим, что удвоенное число ребер равно сумме степеней всех вершин графа – например, для графа рисунка 1 получаем равенство

$$2 \cdot 15 = 3 + 2 + 2 + 4 + 4 + 2 + 3 + 4 + 2 + 2 + 2.$$

Следовательно, интересующая нас сумма четна; лемма доказана.

#### Совместность системы

Теперь докажем, что в процессе решения системы, соответствующей раскраскам Акулича, не получится сравнение  $0 \equiv 1 \pmod{2}$ .

Если мы складываем несколько сравнений системы (а ничего другого по сути мы делать не можем: все операции исключения неизвестных, как легко сообразить, являются по сути операциями почленного сложения – так уж замечательно устроены сравнения по модулю 2), то для получения в правой части единицы мы должны сложить нечетное число сравнений.

Рассмотрим подграф исходного графа, вершины которого – «центры» складываемых сравнений. Для получения в левой части нулевого коэффициента при каждой из соответствующих переменных степени всех вершин рассматриваемого подграфа должны быть нечетны. Но в силу леммы не существует ни одного графа с нечетным числом вершин, степени которых все нечетны.

Таким образом, для математика ответы на большинство вопросов статьи Акулича кратко можно выразить тремя фразами: его раскраски – это решения систем линейных уравнений; система уравнений над полем вычетов по модулю два либо имеет  $2^k$  решений, где  $k$  – число свободных неизвестных, либо несовместна; система совместна вследствие того, что в графе, степени всех вершин которого нечетные, количество вершин обязательно четное.

**Упражнение 5.** Рассмотрим граф. Первоначально все его вершины покрашены в белый цвет. Рассмотрим операции следующего вида: выбираем любую вершину и одновременно перекрашиваем в противоположный цвет ее саму и всех ее соседей. Докажите, что при помощи нескольких таких операций можно перекрасить все вершины графа в черный цвет.

#### Разность двух раскрасок Акулича

Любая система линейных уравнений обладает тем свойством, что если  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  – ее решения, то  $(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n)$  – решение системы, которая получается из данной нам системы заменой всех чисел правой части на нули (докажите!). В нашем случае это соответствует тому, что для любых двух разных раскрасок Акулича при их наложении (по принципу «дважды красить – то же самое, что ни разу не красить») получается раскраска, в которой каждая окрашенная вершина соседствует с нечетным числом

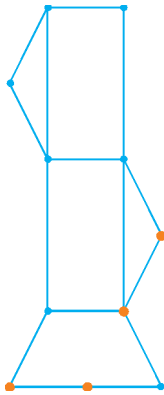


Рис. 6

окрашенных, а каждая неокрашенная – с четным числом окрашенных.

Например, вычитая из раскраски рисунка 5 раскраску рисунка 4, получаем раскраску рисунка 6.

**Упражнения**

**6.** На рисунке 7 изображены (с точностью до поворотов и осевых симметрий) все возможные варианты раскрасок упражнения 1 б), кроме той, в которой нет ни одной покрашенной вершины. Убедитесь в этом.

**7.** Количество раскрасок Акулича равно количеству раскрасок, в которых у каждой покрашенной вершины нечетное число покрашенных соседей, а у каждой неокрашенной вершины – четное число покрашенных соседей. Докажите это.

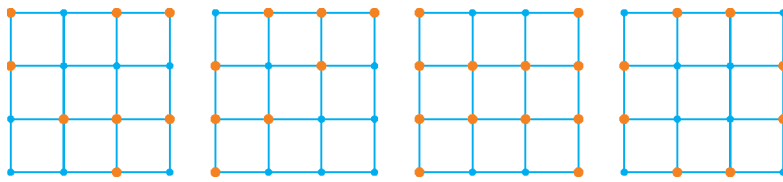


Рис. 7

**Без систем уравнений**

Докажем без использования систем уравнений существование для любого графа хотя бы одной раскраски Акулича. Рассуждаем по индукции. Для графа с одной вершиной утверждение очевидно: достаточно ее покрасить.

Предположим, что раскраска Акулича существует для любого графа с  $n$  вершинами, и рассмотрим граф с вершинами  $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ . Отбросив некоторую вершину  $A_k$ , получим граф с  $n$  вершинами. Для него существует хотя бы одна раскраска Акулича. Если в некоторой такой раскраске с вершиной  $A_k$  связано нечетное число покрашенных вершин, то искомая раскраска Акулича для графа с  $n+1$  вершинами построена.

Осталось разобрать случай, когда для каждой вершины  $A_k$ , где  $1 \leq k \leq n+1$ , мы нашли такую раскраску Акулича  $C_k$  графа на остальных  $n$  вершинах, что  $A_k$  соединена с четным числом покрашенных вершин. Если  $n$  нечетно, то искомую раскраску получаем, суммируя  $n+1$  таких раскрасок  $C_1, C_2, \dots, C_n, C_{n+1}$  (суммируем по модулю 2, т.е. красим те и только те вершины, которые оказались окрашены в нечетном числе из рассматриваемых  $n+1$  раскрасок). (Подумайте, почему!)

Если же  $n$  четно, то в силу леммы о сумме степеней вершин существует хотя бы одна вершина  $A_k$  четной степени. Искомую раскраску получаем, складывая раскраску, в которой  $A_k$  покрашена, а остальные вершины не покрашены, с раскрасками, построенными для ее соседей. (Опять-таки подумайте, почему!)

**Пятый вопрос Акулича**

*История не повторяется – это истории повторяют друг друга.*

Рассмотрим граф, вершины которого – центры клеток прямоугольника размером  $m \times n$ , а соседними считаем центры клеток, имеющих общую сторону. Сколько для него существует раскрасок Акулича, выяснить непросто. Пятый вопрос статьи «Признак Леонардо» звучит так: «Существует ли такое  $m$ , что для любого  $n$  раскраска единственна?»

Ответ отрицательный. Более того, для любого  $m$  существует такое  $n$ , что количество раскрасок равно  $2^m$ . Более того, для каждого данного  $m$  множество таких  $n$  бесконечно!

Чтобы это доказать, раскрасим  $m$  клеток крайнего левого столбца произвольным образом. Очевидно, условие Акулича «у каждой покрашенной вершины четное число покрашенных соседей, а у каждой неокрашенной вершины – нечетное число покрашенных соседей» однозначно определяет второй столбец, первый и второй столбцы определяют третий и так далее.

Например, для  $m = 2$  дело обстоит так, как показано в таблице 2. При  $m = 3$  – так, как в таблице 3. А при  $m = 4$  – так, как в таблице 4. Доказать, что при любом  $m$  в таблице бесконечно много столбцов, состоящих только из нулей (это и означает, что для соответствующих  $n$  количество раскрасок Акулича равно  $2^m$ ), довольно просто. Достаточно рассмотреть всевозможные пары соседних столбцов  $(B, C)$ . По каждой такой паре однозначно строится следующий столбец  $D$ . Таким образом, задано отображение  $(B, C) \rightarrow (C, D)$ .

Таблица 2

$a$	$a+b+1$	$a+1$	$0$	$a$	$a+b+1$	$a+1$	$0$	...
$b$	$a+b+1$	$b+1$	$0$	$b$	$a+b+1$	$b+1$	$0$	...

Поскольку множество пар столбцов конечно, то с какой бы пары столбцов мы ни начали, рано или поздно произойдет заикливание.

Возникший цикл не может обладать хвостом (предпериодом) вроде того, что изображен на рисунке 8. Дело в том, что

Таблица 3

$a$	$a+b+1$	$a+c+1$	$b+c+1$	$c+1$	$0$	$c$	$b+c+1$	...
$b$	$a+b+c+1$	$0$	$a+b+c$	$b+1$	$0$	$b$	$a+b+c+1$	...
$c$	$b+c+1$	$a+c+1$	$a+b+1$	$a+1$	$0$	$a$	$a+b+1$	...

Таблица 4

$a$	$a+b+1$	$a+c+1$	$b+c+d+1$	$0$	$b+c+d$	$a+c+1$	$a+b+1$	...
$b$	$a+b+c+1$	$d$	$a+b+d+1$	$0$	$a+b+d$	$d+1$	$a+b+c$	...
$c$	$b+c+d+1$	$a$	$a+c+d+1$	$0$	$a+c+d$	$a+1$	$b+c+d$	...
$d$	$c+d+1$	$b+d+1$	$a+b+c+1$	$0$	$a+b+c$	$b+d+1$	$c+d+1$	...

пара столбцов  $(B, C)$  однозначно определяет не только следующий за ними столбец  $D$ , но и предшествующий им столбец  $A$ : ситуация  $A_1 \neq A_2$  невозможна!

Осталось вспомнить, что к рассматриваемой нами таблице слева с соблюдением правила «у каждой покрашенной вершины четное число покрашенных соседей, а у каждой неокрашенной – нечетное» можно приписать только столбец из одних нулей. Значит, когда произойдет заикливание, мы вновь увидим нулевой столбец.

Таким образом, для математика ответ на пятый вопрос статьи Акулича таков: любое взаимнооднозначное отображение конечного множества в себя (короче говоря, перестановка) разлагается на циклы, и среди этих циклов не может быть ни одного цикла с хвостом.

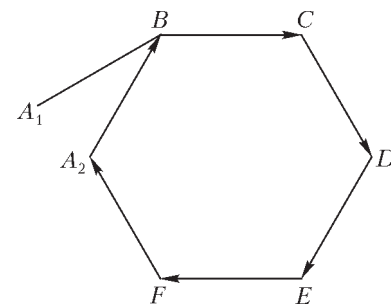


Рис. 8

### Упражнения

8. Постройте такого рода таблицу для а)  $n = 5$ ; б)  $n = 6$ .
9. Существует бесконечно много чисел Фибоначчи, десятичная запись которых оканчивается на шесть нулей. Докажите это.
10. Нужно построить из одинаковых по размеру белых и черных кубиков сплошную башню в форме параллелепипеда так, чтобы каждый черный кубик башни граничил с четным числом белых, а каждый белый – с нечетным числом черных. Докажите, что для любого нижнего слоя можно построить такую башню конечной высоты.

### Второй вопрос Акулича

При  $m = n \leq 28$  количество раскрасок Акулича, как он проверил при помощи компьютера, является не только степенью числа 2, но и степенью числа 4 (т.е. соответствующая размерность  $k$  четна). Причин для такого явления не видно, однако и отвергать с порога его наблюдение не будем. Любящие компьютер читатели могут заняться составлением соответствующих таблиц и вычислением  $k$  для других значений  $m = n$ . Интересно, встретится ли нечетное значение  $k$ ? И какова ситуация для других графов?

### Плюсы и минусы

На II Всесоюзной олимпиаде (1968 год) была предложена следующая задача: *В клетках квадратной таблицы  $4 \times 4$  расставлены плюсы и минусы, как показано на рисунке 9. Разрешено одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке, в одном столбце или на прямой, параллельной какой-нибудь диагонали (в частности, в любой угловой клетке). Докажем, что сколько ни проводи таких перемен, таблицу из одних плюсов не получишь.*

+	-	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Рис. 9

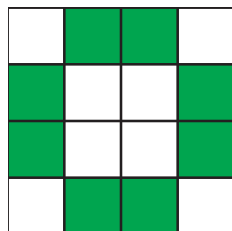


Рис. 10

Решение – на рисунке 10: каждая прямая, параллельная сторонам или диагоналям квадрата, пересекает четное число из восьми зеленых клеток. Поэтому четность количества минусов, стоящих в этих клетках, при рассматриваемых операциях не меняется.

### Упражнения

11. В клетках квадратной таблицы  $8 \times 8$  расставлены плюсы, за исключением одной не угловой клетки, в которой стоит минус. Разрешено одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке, в одном столбце или на прямой, параллельной какой-нибудь диагонали (в частности, в любой угловой клетке). а) Докажите, что сколько ни проводи таких перемен, таблица из одних плюсов не получится. б) Сколько разных расстановок знаков можно получить из одной данной расстановки при помощи рассматриваемых операций?
- 12 (M109). а) В вершине  $A_1$  правильного 12-угольника  $A_1A_2A_3 \dots A_{12}$  стоит знак минус, а в остальных – плюсы. Разрешено одновременно менять знак на противоположный в любых последовательных а) шести; б) четырех; в) трех вершинах многоугольника. Докажите, что при помощи таких операций нельзя добиться того, чтобы в вершине  $A_2$  оказался знак минус, а в остальных вершинах – плюсы.
13. На пульте находятся 100 светящихся кнопок, расположенных в виде квадрата  $10 \times 10$ . Табло устроено так, что при

нажатии на любую кнопку она и все кнопки одного с ней ряда и все кнопки одного с ней столбца меняют свое состояние: светившиеся гаснут, а не светившиеся загораются. Какое наименьшее число кнопок нужно нажать, чтобы все кнопки оказались погашенными, если первоначально все светились?

14 (XXV Турнир городов).

а) В таблице  $m \times n$  расставлены знаки «+» и «-». За один ход разрешается поменять знаки на противоположные в любой строке или любом столбце. Докажите, что если такими действиями таблица не приводится к таблице из одних плюсов, то в ней есть квадрат  $2 \times 2$ , который тоже не приводится.

б) В таблице  $m \times n$  расставлены знаки «+» и «-». За один ход разрешается поменять знаки на противоположные в любой строке или любом столбце или на любой диагонали (угловые клетки тоже считаются диагоналями). Докажите, что если такими действиями таблица не приводится к таблице из одних плюсов, то в ней есть квадрат  $4 \times 4$ , который тоже не приводится.

### Лампы на табло

Итак, избавиться от одного минуса внутри «зеленого множества» (см. рис.10) невозможно. А если нет ни одного «зеленого множества»?

Только давайте от прямоугольной таблицы и плюсов-минусов перейдем в антураж задачи Московской олимпиады 1995 года. Там речь шла о лампах и кнопках. Каждая кнопка соединена с одной или несколькими лампами. Нажатие на кнопку меняет состояние лампы, с которой она соединена. Спрашивалось, всегда ли можно погасить все лампы, нажимая на кнопки? Оказывается, если нет ни одного «зеленого множества», то всегда!

**Теорема.** Если для любого непустого множества ламп существует кнопка, соединенная с нечетным числом ламп из этого набора, то при помощи нажатий на кнопки можно погасить все лампы.

**Доказательство.** Результат нажатия нескольких кнопок не зависит от порядка их нажатия. Применим индукцию по количеству ламп.

Сначала, как положено, база индукции: пусть лампа одна. Поскольку должна существовать кнопка, соединенная с нечетным числом ламп, то некоторая кнопка управляет в точности одной этой лампой.

Теперь – индукционный переход. Пусть утверждение доказано для  $n$  ламп и любой удовлетворяющей условиям теоремы системы кнопок. Рассмотрим лампы  $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ , некоторые из которых горят. Временно исключим из рассмотрения некоторую лампу  $A_k$ , где  $1 \leq k \leq n+1$ . По предположению индукции, можно при помощи некоторого набора кнопок погасить все горящие лампы из  $n$  рассматриваемых нами сейчас ламп. Если после этих нажатий на кнопки лампа  $A_k$  не горит, то мы добились своего.

Значит, осталось рассмотреть ситуацию, когда лампа  $A_k$  светится, а все остальные – нет. Рассмотрим  $m \neq k$ , где  $1 \leq m \leq n+1$ . В силу предположения индукции, все лампы, кроме  $A_m$ , можно погасить. Если при этом погаснет и  $A_m$ , то дело сделано.

Остался случай, когда  $A_m$  горит, а остальные лампы – нет. К нему мы пришли из ситуации, когда горела только лампа  $A_k$ . Таким образом, при помощи имеющегося набора кнопок мы для любых  $m \neq k$  можем гасить лампу  $A_k$  и зажигать  $A_m$ , не меняя состояния других ламп. Рассмотрим теперь какую-нибудь кнопку  $K$ , соединенную с нечетным числом ламп, и выберем какую-нибудь лампу  $L$ , соединенную с  $K$ . Погасим все лампы, кроме  $L$ . Нажмем кнопку  $K$ . Теперь горит четное число ламп; погасим их парами.