ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант+» №1)

1. 19.
Когда у Синеглазки кончилась вода, осталось 10 не политых цветов, среди которых ровно 5 тюльпанов. Поэтому, когда Незнайка собирал свой букет, последний сорванный им цветок – это как раз тот тюльпан, после которого у Синеглазки кончилась вода. Значит, уцелели все остальные политые цветы, т.е. 20 − 1 = 19 цветов.

2. Рычаг применяется для того, чтобы можно было… проиграть в расстоянии! Большому расстоянию, которое проходит конец рычага, ведомый рукой фотокорреспондента, соответствует поворот камеры на малый угол. Это обеспечивает плавный поворот камеры, а также более точное ее наведение (направление) на снимаемый объект.
Заметим кстати, что для этой же цели в старых радиоприемниках ручка настройки также имела довольно большой диаметр.

3. Невозможно.
В слове ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ встречаются 10 разных букв (буква Е – четыре раза, а остальные буквы – по разу). Как их не заменяй цифрами, придется использовать все 10 цифр. Тогда сумма цифр получившегося числа равна 1 + 2 + … … + 9 + 0 + $3x$ = 45 + $3x$, где x – цифра, на которую заменили букву Е. Эта сумма делится на 3 независимо от значения x, поэтому само число делится на 3 и не может быть простым.

4. Ответ: 22.
Разделим бруски на две группы: первая – бруски с площадями поверхности 148, 72, 46 и 28, вторая – остальные бруски, включая невидимый. В каждой группе сумма площадей поверхностей брусков равна площади поверхности большого бруска. Значит, площадь поверхности невидимого бруска равна 148 + 72 + 46 + 28 − 126 − 88 − 58 = 22.

5. Когда микроволновая печь работает, внутри вращается подставка, на которой стоит чашка. Через минуту чашка останавливалась неудобно: за ручку было не взяться. За лишние три секунды чашка поворачивалась так, что ее удобно было доставать.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6-8»

(см. «Квант» №5 за 2010 г.)

6. В каждом треугольнике со стороной 2 сумма чисел должна равняться 20, поэтому сумма чисел в шести таких треугольниках равна 120. При этом числа, стоящие во внутренних треугольниках со стороной 1, учтены трижды, а остальные числа – по одному разу. Сумма чисел от 1 до 12 равна 78, значит, разница 120 − 78 = 42 – это удвоенная сумма «внутренних» чисел. Отсюда получаем, что сумма этих чисел равна 21, следовательно, это могут быть только числа от 1 до 6 (их сумма как раз равна 21, а у любого другого набора из шести чисел сумма будет больше). Теперь расставить числа по треугольникам уже несложно. Пример такой расстановки показан на рисунке 1.

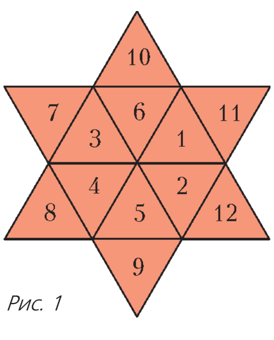
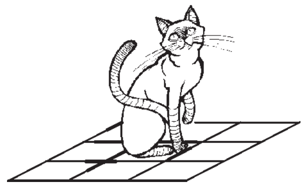


Рис. 1

7. 8.
Сначала кот сидит в одной из комнат, а остальные восемь ему недоступны. Наметим двери, которые мы хотим открыть, и будем открывать их последовательно так, чтобы каждая новая дверь вела из уже доступной коту комнаты. Ясно, что мы каждый раз присоединяем не более одной новой комнаты. Поэтому придется открыть не меньше 8 дверей.



Придумайте сами, какие восемь дверей можно открыть, чтобы кот смог гулять по всей квартире (это можно сделать многими разными способами).

8. 5.
После столкновения быстрый шар становится медленным и наоборот. Удобнее считать, что быстрый шар как бы проходит сквозь медленный, а их скорости не меняются. Скорость сближения шаров равна разности их скоростей, т.е. 5 оборотов в минуту. Значит, после очередной встречи шаров следующая произойдет через 1/5 минуты. За это время быстрый шар сделает 12/5 оборотов, т.е. удалится от точки предыдущей встречи на 2/5 оборота. Следующая точка встречи будет еще через 2/5 оборота и т.д. Нарисовав эти точки на окружности, увидим, что получаются пять точек, которые делят окружность на пять равных частей (шестая точка встречи совпадет с первой, так как от одной до другой надо сдвинуться на 10/5 оборотов, т.е. на 2 оборота).

9. Найдется.
Любая точка из красной области (рис.2) подойдет. Попробуйте самостоятельно понять, почему это так, и найдите геометрическое место точек, удовлетворяющих условию.

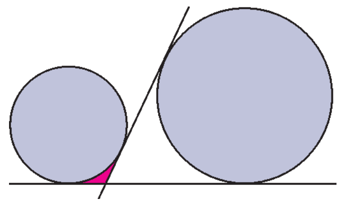


Рис. 2

10. а) На заполнение плоской упаковки уходит больше крошки.
Разрежем длинную упаковку на семь одинаковых цилиндрических коробочек высотой, равной диаметру мячика. При взгляде сверху такая коробочка не отличается от мячика – их проекции совпадают. Поскольку в плоской коробке лежат семь мячиков, то туда влезет семь коробочек, и еще останется место (на рисунке 3 показан вид сверху). Значит, крошки в плоской упаковке больше.

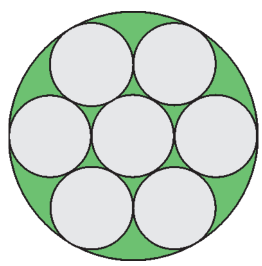


Рис. 3

б) $167\frac{1}{7}$ грамм.
Объем цилиндра высоты h с основанием радиуса r равен $\pi r^2 h$ (произведение площади основания на высоту). Пусть радиус мячика равен 1. Тогда высота длинной упаковки равна 14, а ее объем – 14π. 90 грамм крошки занимают треть этого объема, т.е. $\frac{14\pi}{3}$. Радиус основания плоской упаковки равен 3, а высота – 2, поэтому ее объем равен 18π. Как мы видели в пункте а), в этот объем можно поместить всю длинную упаковку, и еще останется место объемом $18\pi - 14\pi = 4\pi$, которое полностью занято крошкой. Вес x этой части крошки найдем из пропорции $\frac{90}{x} = \frac{14\pi/3}{4\pi}$, откуда $x = \frac{540}{7} = 77\frac{1}{7}$ грамм. Тем самым, вся крошка в плоской упаковке весит $167\frac{1}{7}$ грамм.

Рисунок 4 показывает, что интересующий нас многочлен при переходе от k-го треугольника к $(k+1)$-у подвергается двум операциям: замене x на $x+1$ и домножению на $(x+1)^{n_{k+1}-n_k}$.

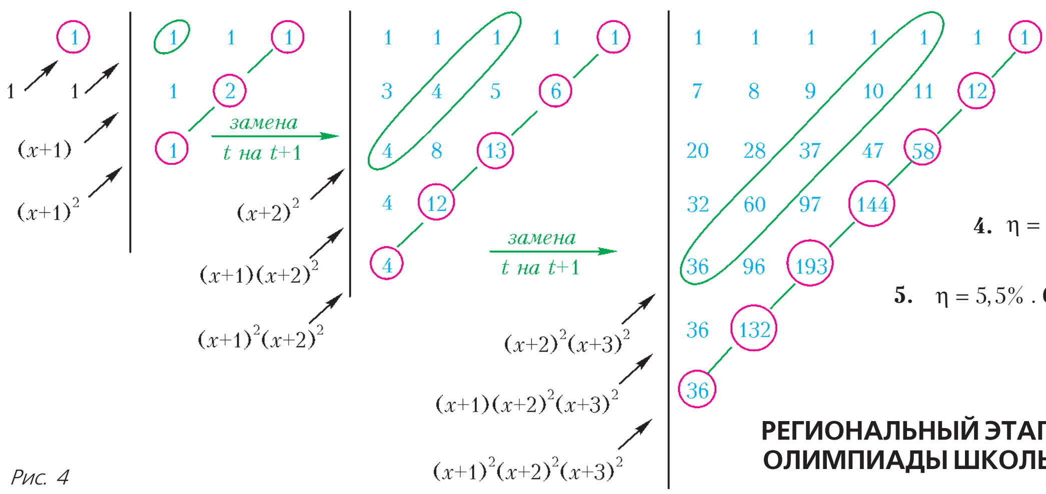


Рис. 4

НЕВОЗМОЖНЫЕ ЗАМОЩЕНИЯ

1. Белых и черных клеток в этой фигуре поровну, но в ее левой половине черных клеток больше, чем белых, а в правой — наоборот (16 против 9 в обоих случаях). Предположим, что замощение доминошками существует. Тогда не более чем одно домино пересекает волнистую линию в середине рисунка 27 статьи, так что левая половина фигурки (кроме, возможно, клетки, примыкающей к волнистой линии) вся замощена доминошками. Поскольку в этой части фигуры черных и белых клеток не поровну, такое невозможно.

4. Будем рассуждать, как в доказательстве теоремы 1. Существование замощения при n, сравнимом с 0, 2, 9 или 11 по модулю 12, при $n \le 12$ показывается явной конструкцией, а далее из замощения для $n = 12k$ строится замощение для $n = 12k + l$, где l равно 2, 9, 11 или 12.

Чтобы доказать, что при остальных n замощение невозможно, заметим для начала, что при наличии замощения общее количество точек должно делиться на 3. Значит, $n(n+1)/2 \equiv 0 \pmod 3$, так что n сравнимо с 0 или 2 по модулю 3. Тем самым нам надо рассмотреть случаи, когда остаток от деления n на 12 равен 3, 5, 6, или 8. Граничные слова трехточечных треугольников имеют вид $x^2yx^{-1}yx^{-1}y^{-2}$ и $xy^2x^{-2}y^{-1}xy^{-1}$. Их дублеры на шестиугольной решетке замкнуты. Сопоставим каждому замкнутому ориентированному пути по шестиугольной решетке сумму чисел оборотов вокруг шестиугольных областей. Для граничных путей треугольников эти числа равны ± 1, а для пути вокруг всего треугольника это число равно $[(n+1)/3]$. Стало быть, если в замощении участвуют m треугольников, то $[(n+1)/3] \equiv m \pmod 2$. С другой стороны, $n(n+1)/2 = 3m$, откуда $n(n+1)/2 \equiv m \pmod 2$. Значит, $[(n+1)/3] \equiv n(n+1)/2 \pmod 2$, и легко видеть, что при n, сравнимом с 3, 5, 6 или 8 по модулю 12, это сравнение не выполняется.

5. Будем рассуждать, как в доказательстве теоремы 3. Определим аддитивную функцию f следующим образом: $f(1) = 1$, $f(\sqrt{2}) = -0{,}5$ и $f(x) = 0$, если x не является рациональной линейной комбинацией 1 и $\sqrt{2}$. «Площадью» прямоугольника со сторонами u и v будем называть число $f(u)f(v)$. Тогда «площадь» области на рисунке 28 статьи равна $-0{,}75$, а если бы эту область можно было замостить квадратами, ее «площадь» была бы неотрицательна — противоречие.

КПД ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ

1. $\eta = 1 - \dfrac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$.

2. $\eta = \dfrac{A - \nu RT_1}{A + 1{,}5\nu RT_1} = 29\%$.

3. $\eta' = \dfrac{\eta}{1 + 7\eta} = 7{,}3\%$.

4. $\eta = \dfrac{p_1 - p_2}{5p_1}$.

5. $\eta = 5{,}5\%$. **6.** $\eta = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2$.

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП XXXVII ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

1. Нет, неверно.

Подойдет, например, тройка 1/3, 1/3, 2/3.

Замечание. Все такие тройки можно получить, решив соответствующую систему: $a + b^2 + c^2 = a^2 + b + c^2 = a^2 + b^2 + c$. Из первых двух равенств имеем $a^2 - a = b^2 - b$; перенося все в левую часть, получаем $(a-b)(a+b-1) = 0$. Значит, $a = b$ или $b = 1 - a$; аналогичные утверждения верны для остальных пар чисел. Итого, кроме троек из равных чисел, подходят все тройки вида a, a, $1-a$ и только они.

2. Обозначим через Ω и ω описанные окружности треугольников ABC и BDE (рис.5). Положим $\angle ACB = \angle ABC = \alpha$. Четырехугольник $BDAC$ вписан в Ω, значит, $\angle ADB = 180° - \angle ACB = 180° - \alpha$. Углы ADB и EDB – смежные, откуда $\angle EDB = 180° - \angle ADB = 180° - \alpha$. Далее, поскольку четырехугольник $EDFB$ вписан в ω, имеем $\angle EFB = \angle EDB = \alpha$.

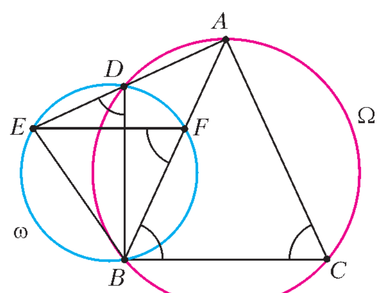


Рис. 5

Итого, $\angle EFB = \angle FBC = \alpha$, а значит, прямые EF и BC параллельны.

3. Проведем пунктиром вертикальные и горизонтальные линии через центры клеток доски. На получившейся пунктирной сетке каждое звено нашей ломаной соединяет узлы, соседние по вертикали, горизонтали или диагонали (рис.6). Поэтому пунктирные прямые

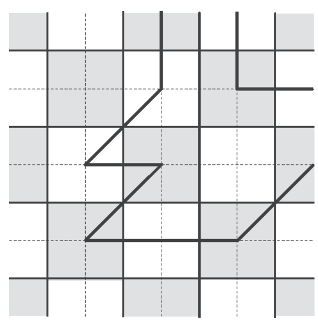


Рис. 6

разбивают область, ограниченную ломаной, на единичные квадратики и половинки квадратиков, получаемые разрезанием их по диагонали.

Осталось заметить, что в каждом таком квадратике и в каждом таком треугольнике площади черной и белой частей равны.

4. Заметим, что $\frac{a+1}{b+1}-\frac{a}{b}=\frac{b-a}{b(b+1)}$ для любых положительных a и b. Значит, после переноса всех членов в левую часть требуемое неравенство приобретает вид

$$\frac{y-x}{y(y+1)}+\frac{z-y}{z(z+1)}+\frac{x-z}{x(x+1)}\le 0. \qquad (*)$$

Можно считать, что x – наибольшее из трех данных чисел. Возможны два случая.

Случай 1: $y\ge z$. В этом случае имеем

$$\frac{x-y}{x(x+1)}\le\frac{x-y}{y(y+1)},\quad \frac{y-z}{x(x+1)}\le\frac{y-z}{z(z+1)}.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\frac{x-z}{x(x+1)}\le-\frac{y-x}{y(y+1)}-\frac{z-y}{z(z+1)},$$

что равносильно $(*)$.

Случай 2: $y<z$. Тогда имеем

$$\frac{z-y}{z(z+1)}\le\frac{z-y}{y(y+1)},\quad \frac{x-z}{x(x+1)}\le\frac{x-z}{y(y+1)}.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\frac{z-y}{z(z+1)}+\frac{x-z}{x(x+1)}\le-\frac{y-x}{y(y+1)},$$

что опять же равносильно $(*)$.

5. Подставив $n=1$ и $n=2$, получаем, что числа $15a$ и $48a$ – целые. Значит, и число $48a-3\cdot 15a=3a$ – тоже целое. Таким образом, $a=k/3$ для некоторого целого k.

Осталось показать, что все числа такого вида подходят. Действительно, одно из трех последовательных четных (или нечетных) чисел n, $n+2$, $n+4$ делится на 3; значит, $n(n+2)(n+4)$ делится на 3, а поэтому

$$an(n+2)(n+4)=k\frac{n(n+2)(n+4)}{3}$$

– целое число.

6. Предположим противное; тогда исходные три точки лежат на некоторой окружности ω (рис.7). Докажем индукцией по количеству минут, что все отмеченные точки также лежат на ω. Действительно, изначально это верно. Пусть в некоторый момент по точкам A, B, C строится точка D. Тогда серединный перпендикуляр l к BC проходит через центр ω, значит, эта окружность симметрична относительно l. Так как точка A лежит на ω, то и D также на ней лежит.

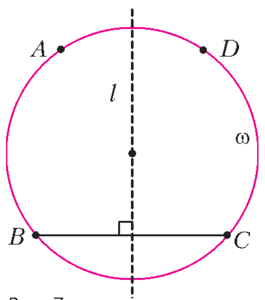


Рис. 7

Итак, через сутки все отмеченные точки лежат на ω. Но любая прямая пересекает ω не более чем по двум различным точкам; значит, на ней не найдется трех отмеченных точек. Противоречие.

10 класс

1. Первый мог обогнать второго только на кольцевой дорожке стадиона. Так как он вбежал на стадион первым, на своем первом круге он обогнать второго не мог. Стало быть, обгоны случились, когда первый бежал по стадиону свои второй и третий круги. Пока первый бежал эти два круга, он обогнал второго по крайней мере на круг. Следовательно, второй за это время пробежал не больше одного круга, откуда и вытекает требуемое утверждение.

2. Без ограничения общности можно считать, что точка M лежит между A и K. Пусть O_1, O_2, O_3 и O_4 – центры описанных окружностей треугольников ABM, ABK, CBM и CBK соответственно. Прямые O_1O_3 и O_1O_2 являются серединными перпендикулярами к отрезкам BM и AB соответственно. Значит, углы $O_2O_1O_3$ и ABM равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами (рис.8). Аналогично, $\angle O_2O_4O_3=\angle CBK$, а значит, $\angle O_2O_4O_3=$ $=\angle O_2O_1O_3$. Это и означает, что точки O_1, O_2, O_3, O_4 лежат на одной окружности.

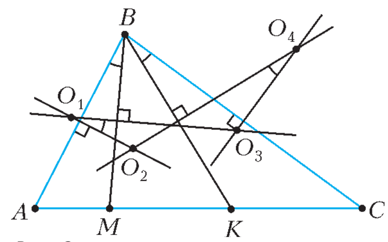


Рис. 8

Замечание. Нетрудно видеть, что точка пересечения прямых O_1O_2 и O_3O_4 – центр O описанной окружности треугольника ABC, причем точки O_2 и O_3 лежат на отрезках OO_1 и OO_4 соответственно. Это позволяет обосновать расположение точек на рисунке.

3. Не может.

Пусть среди наших 14 чисел есть a четных и $b=14-a$ нечетных. Нечетное число на доске может появиться лишь как сумма четного и нечетного, т.е. таких чисел будет ab (при этом каждое будет выписано по два раза). Но

$$ab=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}\le\frac{(a+b)^2}{4}=49.$$

Значит, на доске будет не более 49 различных нечетных чисел; а чтобы выполнялось условие, их должно быть хотя бы 50. Значит, требуемое невозможно.

4. *Первое решение.* Заметим сразу, что все корни наших уравнений – ненулевые, поскольку свободные члены не равны нулю.

Пусть p – общий корень первых двух уравнений. Тогда имеем

$$0=b\left(ap^{11}+bp^4+c\right)-a\left(bp^{11}+cp^4+a\right)=p^4\left(b^2-ac\right)-\left(a^2-bc\right),$$

$$0=b\left(bp^{11}+cp^4+a\right)-c\left(ap^{11}+bp^4+c\right)=p^{11}\left(b^2-ac\right)-\left(c^2-ab\right).$$

Отсюда следует, что если одно из чисел $A=a^2-bc$, $B=b^2-ac$, $C=c^2-ab$ равно нулю, то и все три равны нулю. Но тогда $a/b=b/c=c/a$, а поскольку произведение этих чисел равно 1, то и все они равны 1, т.е. $a=b=c$. В этом случае утверждение задачи очевидно.

В противном случае все три числа A, B, C ненулевые. Тогда $p^4=\frac{A}{B}$, $p^{11}=\frac{C}{B}$. Обозначив через q общий корень второго и третьего уравнений, а через r общий корень третьего и первого уравнений. Аналогично предыдущему, имеем $q^4=\frac{B}{C}$, откуда $p^{11}q^4=1$. Таким же образом получаем равенства $q^{11}r^4=1$, $r^{11}p^4=1$. Отсюда $p^{11\cdot 11\cdot 11}=q^{-4\cdot 11\cdot 11}=r^{4\cdot 4\cdot 11}=p^{-4\cdot 4\cdot 4}$, следовательно, $p^{11^3+4^3}=1$, значит, $p=1$. Аналогично $q=r=$ $=1$. Но тогда 1 является общим корнем всех трех уравнений.

Замечание. В случае если все три числа A, B, C ненулевые, решение можно завершить по-другому. Переименовав, если надо, переменные по циклу, можно считать, что $|B|$ – среднее по величине из чисел $|A|$, $|B|$, $|C|$. Тогда из полученных выше равенств следует, что одно из чисел $|p|^4=\frac{|A|}{|B|}$ и $|p|^{11}=\frac{|C|}{|B|}$ не больше единицы, а другое – не меньше единицы. Это возможно лишь тогда, когда оба они равны единице, т.е. $|p| = 1$. Аналогично $|q| = |r| = |p| = 1$, и два из чисел p, q, r равны, скажем $p = q$. Но тогда это число является общим корнем всех трех уравнений.

Второе решение. Достаточно доказать, что одно из данных уравнений имеет ровно один корень; тогда он будет общим у этого уравнения с каждым из остальных. Рассмотрим среди данных уравнений то, в котором коэффициенты при x^4 и свободный член имеют одинаковый знак, пусть для определенности $b = -b' < 0$, $c = -c' < 0$ (случай $b > 0$, $c > 0$ сводится к случаю $b < 0$, $c < 0$ домножением уравнения на -1). Пусть $a > 0$ (случай $a < 0$ сводится к случаю $a > 0$ заменой переменной x на $-x$).

Покажем, что уравнение $f(x) = 0$, где $f(x) = ax^{11} - b'x^4 - c'$, имеет не более одного корня (на самом деле, оно имеет ровно один корень). Перепишем это уравнение в виде

$$x^4\left(ax^7 - b'\right) = c'.$$

Видим, что при $x < d = \left(\frac{b'}{a}\right)^{1/7}$ уравнение не имеет решений, так как левая часть отрицательна. На промежутке же $[d, +\infty)$ левая часть монотонно возрастает, поскольку оба сомножителя неотрицательны и возрастают. Значит, на этом промежутке не более одного корня.

Замечание. Кроме рассуждения, проведенного выше, единственность корня у многочлена $f(x)$ можно показать с использованием производной.

5. $a = \frac{k}{6}$, где k – любое целое число.

Подставив $n = 1$, $n = 3$ и $n = 4$, получаем, что числа $2^2 \cdot 3 \cdot 5a$, $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7a$ и $2^6 \cdot 3 \cdot 7a$ – целые. Значит, a – рациональное число, имеющее несократимую запись $\frac{p}{q}$, где q является делителем числа $\text{НОД}\left(2^2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7, 2^6 \cdot 3 \cdot 7\right) = 6$, и $a = k/6$ при некотором целом k.

Осталось показать, что все числа такого вида подходят. Действительно, одно из трех последовательных чисел $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$ делится на 3, а одно из последовательных чисел $n + 2$, $n + 3$ делится на 2; значит, $n(n+2)(n+3)(n+4)$ делится на 2 и на 3, а значит, и на 6. Поэтому

$$an(n+2)(n+3)(n+4) = k\frac{n(n+2)(n+3)(n+4)}{6}$$

– целое число.

7. Пусть BB' и CC' – высоты треугольника (рис.9). Так как OB_0 и OC_0 – серединные перпендикуляры к сторонам AC и AB, то отрезки $B'B_0$ и $C'C_0$ равны высотам ромба $OPHQ$, значит, $B'B_0 = C'C_0$. Но эти отрезки являются проекциями отрезка OH на прямые AB и AC; значит, OH составляет равные углы с этими прямыми. Это означает, что прямая OH параллельна либо внутренней, либо внешней биссектрисе угла BAC.

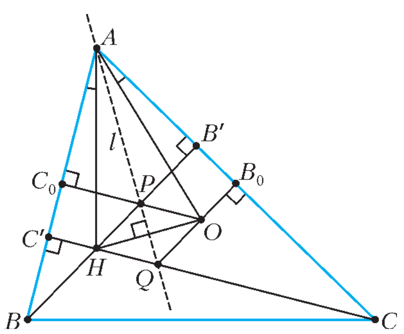


Рис. 9

Так как $\angle AOC = 2\angle ABC$, то $\angle CAO = 90° - \frac{1}{2}\angle AOC = 90° - \angle ABC = \angle BAH$. Это значит, что лучи AO и AH симметричны относительно биссектрисы l угла BAC; в частности, OH пересекает l и потому не может быть ей параллельна. Итак, $OH \perp l$, и l является биссектрисой и высотой треугольника AOH. Отсюда $AH = AO$, и точка A, как и точки P, Q, лежит на серединном перпендикуляре к отрезку OH.

11 класс

1. Не существует.

Предположим противное. Тогда число $A = \cos\alpha + \cos 5\alpha$ иррационально как сумма рационального и иррационального; с другой стороны, $A = 2\cos 2\alpha \cos 3\alpha$ рационально как произведение трех рациональных чисел. Противоречие.

Замечание. Если убрать из условия $\cos 5\alpha$, то ответ будет другим. Например, при $\alpha = \pi/6$ число $\cos\alpha$ иррационально, а числа $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\cos 4\alpha$ рациональны. С другой стороны, из решения видно, что $\cos 4\alpha$ можно удалить из условия безболезненно.

2. Предположим, что среди данных чисел четное количество отрицательных. Тогда среди них есть положительное число a, и произведение всех чисел, кроме a, положительно. Это противоречит условию.

Значит, среди данных чисел нечетное число отрицательных. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и $y_1, y_2, \ldots, y_m$ – две группы, на которые разбиты данные числа ($k + m = 2011$). Ровно одно из двух произведений $x_1x_2 \ldots x_k$ и $y_1y_2 \ldots y_m$ (а именно то, в котором нечетное число отрицательных сомножителей) – отрицательно; пусть для определенности $x_1x_2 \ldots x_k < 0$, $y_1y_2 \ldots y_m > 0$. Тогда среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$ найдется отрицательное, скажем, $x_1 < 0$. Отсюда $x_2 \ldots x_k > 0$, а значит, $x_2 \ldots x_k \geq 1$ (так как данные числа целые). Следовательно,

$$x_1x_2 \ldots x_k + y_1y_2 \ldots y_m \leq x_1 + y_1y_2 \ldots y_m \leq x_1 + y_1y_2 \ldots y_m x_2 \ldots x_k.$$

Но по условию $x_1 + y_1y_2 \ldots y_m x_2 \ldots x_k < 0$.

Замечание. Можно показать, что условие задачи выполняется тогда и только тогда, когда среди данных чисел ровно одно отрицательное, и его модуль больше произведения всех остальных.

3. Отметим на продолжении отрезка AD такую точку T, что $AT = DM$ (рис.10). Тогда прямоугольные треугольники CDM и BAT равны, а значит, $BT \parallel CM$. Заметим, что $DT = DA + AT = 3DM + DM = 4DM$. По теореме Фалеса, прямая CM пересекает отрезок BD в точке N такой, что $DB = 4DN$. Значит, $DN = NO$, т.е. KN – медиана треугольника OKD.

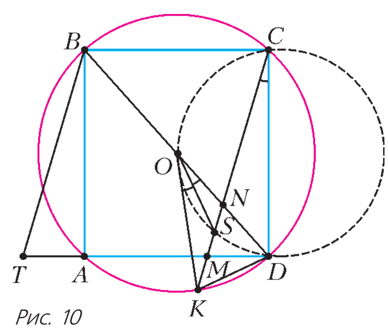


Рис. 10

Пусть S – точка пересечения медиан треугольника OKD. Поскольку $OD = OK$, точка S лежит на биссектрисе угла KOD, и $\angle SOD = \frac{1}{2}\angle KOD$. С другой стороны, вписанный угол KCD равен половине центрального угла KOD, откуда $\angle SOD = \frac{1}{2}\angle KOD = \angle SCD$. Это и означает, что точки S, D, O, C лежат на одной окружности.

4. За 2010 рейсов.

Покажем вначале, что за 2009 рейсов план выполнить удастся не всегда. Пусть (при произвольной схеме дорог) изначально весь цемент расположен на одном складе S, а распределить его нужно по всем складам поровну. Тогда на каждый склад, кроме S, нужно в каком-нибудь рейсе цемент завезти; ясно, что такие 2010 рейсов различны, поэтому всего рейсов должно быть не меньше 2010.

Нам осталось показать, что за 2010 рейсов план всегда удастся выполнить. Мы докажем индукцией по n, что при n складах всегда удастся обойтись $n-1$ рейсом. База при $n = 1$ очевидна.

Пусть $n > 1$. Так как с любого склада можно добраться до любого другого, то существует маршрут, проходящий по всем складам (может быть, неоднократно). Рассмотрим любой такой маршрут и склад A, который впервые появился на этом маршруте позже всего. Тогда, если удалить склад A и все дороги, ведущие из него, то по-прежнему от любого склада до любого другого можно добраться (по предыдущим дорогам маршрута).

Можно считать, что A – склад с номером n. Если $y_n \le x_n$, то вывезем из A на любой соединенный с ним склад $x_n - y_n$ кг цемента, а после этого забудем про него и про все дороги, из него ведущие. По предположению индукции, для оставшихся складов можно выполнить план за $(n-1)-1$ рейс. В итоге через $(n-2)+1$ рейс получится требуемое распределение цемента.

Если же $y_n > x_n$, то мы уже доказали, что из распределения, когда на i-м складе находится y_i кг, можно получить распределение, когда на i-м складе находится x_i кг, за $n-1$ рейс. Проведя теперь все эти перевозки в обратном порядке (и обратном направлении), мы осуществим требуемый план.

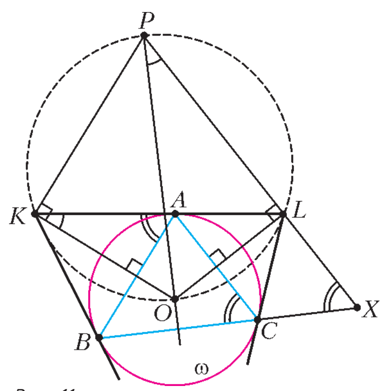


Рис. 11

5. См. решение задачи 5 для 10 класса.

6. *Первое решение.* Докажем, что точка P лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BC. Пусть O – центр окружности ω, а X – точка пересечения прямых BC и PL (рис.11). Так как O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BC, достаточно доказать, что $OP \perp BC$.

Точки A и B симметричны относительно прямой OK, поэтому $OK \perp AB \parallel KP$. Аналогично, $OL \perp LP$. Поскольку $\angle OKP = \angle OLP = 90°$, четырехугольник $OKPL$ вписанный, откуда $\angle OPL = \angle OKL$. Из касания вытекает, что $\angle KAB = \angle ACB = \angle PXB$. Таким образом, $\angle OPX + \angle PXB = \angle OKL + \angle KAB = 90°$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Пусть прямые BK и CL пересекаются в точке M (рис.12). Поскольку треугольник ABK равнобедренный, имеем

$$\angle PKA = \angle BAK = \frac{1}{2}(180° - \angle AKB).$$

Значит, KP – биссектриса внешнего угла при вершине K треугольника KLM. Аналогично, LP – биссектриса внешнего угла при вершине L. Тогда P – центр вневписанной окружности этого треугольника, касающейся стороны KL, поэтому P лежит на биссектрисе угла M. Поскольку $MB = MC$, точки B и C симметричны относительно этой биссектрисы. Значит, и отрезки PB и PC также симметричны и потому равны.

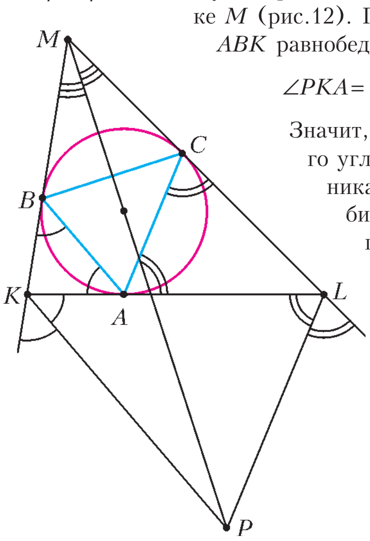


Рис. 12

7. 504.

Обозначим полученный правильный 2011-угольник через M, его вершины (по часовой стрелке) – через $X_1, X_2, \ldots, X_{2011}$, его вписанную окружность через ω, а его центр – через O. Назовем прямые, содержащие стороны многоугольника, *выделенными*.

Заметим, что для любых пяти последовательных вершин A, B, C, D, E многоугольника M существует окружность, отличная от ω, касающаяся прямых AB, BC, CD и DE (рис.13). Действительно, вершины A и E, а также B и D симметричны относительно прямой CO. Тогда точка пересечения внешней биссектрисы угла ABC с прямой CO отлична от O и равноудалена от прямых AB, BC, CD и DE, а значит, является центром искомой окружности. Теперь, если Вася нарисует 503 такие окружности для точек (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5), (X_5, X_6, X_7, X_8, X_9), …, ($X_{2009}, X_{2010}, X_{2011}, X_1, X_2$), а также окружность ω, то любая выделенная прямая будет общей касательной к двум проведенным окружностям. Итак, 504 окружностей достаточно.

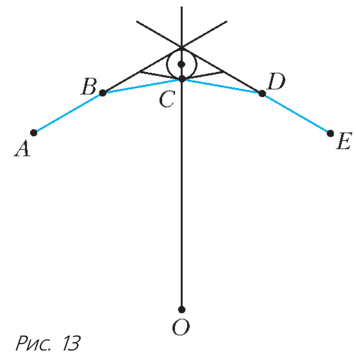


Рис. 13

Осталось доказать, что окружностей должно быть не менее 504. Каждой выделенной прямой должны касаться хотя бы две окружности. Окружность ω касается всех 2011 этих прямых. У любой другой окружности есть не более четырех общих касательных с ω; значит, она касается не более четырех выделенных прямых. Итак, если окружностей n, то всего происходит не более чем $2011 + 4(n-1)$ касаний окружности с выделенными прямыми; с другой стороны, их должно быть не меньше $2011 \cdot 2 = 4022$. Итак, $2011 + 4(n-1) \ge 2 \cdot 2011$, откуда $n \ge 2011/4 + 1 > 503$, что и требовалось доказать.

8. Лемма. *Для любых вещественных $x \ge y \ge 0$ и натурального n верно неравенство*

$$x^n - y^n \ge (x-y)^n.$$

Доказательство. Пусть $x = y + t$, $t \ge 0$. Раскрывая $x^n = (y+t)^n$ по биному Ньютона, имеем $x^n = y^n + \ldots + t^n \ge y^n + t^n$, или $x^n - y^n \ge t^n$. Лемма доказана.

Без ограничения общности можно считать, что $b \ge c$. Обозначим $n = 2011$. Применим лемму к числам b, c, а также к числам b^2, c^2; мы получим

$$b^n - c^n \ge (b-c)^n,$$

$$(b^n - c^n)(b^n + c^n) = (b^2)^n - (c^2)^n \ge (b^2 - c^2)^n = $$
$$= (b-c)^n = (b-c)^n (b+c)^n.$$

Перемножив полученные неравенства, получаем неравенство

$$(b^n - c^n)(b^n + c^n)(b^n - c^n) \ge (b-c)^n (b+c)^n (b-c)^n.$$

Поскольку

$$b^n - c^n = -(c^n - b^n) \text{ и } (b-c)^n = -(c-b)^n,$$

полученное неравенство равносильно требуемому.

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП XLV ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

7 класс

1. $H = \frac{\pi}{12} h = 5{,}2$ см .

2. 1) $L = \frac{ss_1}{s_1 - s_2} = 1500$ м ; 2) $v_2 = \frac{s_0}{\Delta t}\left(1 - \frac{s_2}{s_1}\right) = 4$ м/с , $v_1 = v_2 \frac{s_1}{s_2} = 5$ м/с .

3. $\rho_X = \frac{\rho}{(1,2)^3 k} = 2{,}7$ г/см^3 (сплав мог оказаться, например, алюминием).

4. 1) $\lambda = \frac{\mu}{v_1}$; 2) $t = \frac{\tau}{4}$.

8 класс

1. $H < \frac{3m}{\pi R^2 \rho} = 11{,}9$ см . **2.** $l = 0{,}4L = 0{,}6$ м.

3. $t = t_п \frac{\lambda}{r + \lambda} \approx 12{,}9$ °C (здесь $t_п = 100$ °C). **4.** $\lambda = \frac{\mu}{3v_1}$.

9 класс

1. $H = \frac{m}{\rho a^2} + \frac{\pi R^2 h}{a^2} \approx 4{,}3$ см .

2. $t = \frac{c_в \mu t_1/(kS) + t_0}{c_в \mu/(kS) + 1} = 48$ °C , где $S = 2a^2 + 4aH$ – площадь поверхности воды.

3. $\Delta v = v_0\left(\frac{1}{\sqrt{1 - 2v_0^2 \Delta h/(gL^2)}} - 1\right) \approx \frac{v_0^3 \Delta h}{gL^2} \approx 29$ м/с .

4. 1) $T_1 = \frac{(\sqrt{2}+1)v_0}{\mu g}$; 2) $T_2 = 2\sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)L}{\mu g}}$.

5. 1) $U_1 = U_0 \frac{R_1}{R_2 + R_3} = 3$ В , $U_2 = U_0 \frac{R_3}{R_1 + R_3} = 9$ В , $I_1 = I_3 = \frac{U_0}{R_2} = 6$ мА , $I_2 = -\frac{U_0}{R_1 + R_3} = -3$ мА (стрелка прибора отклонится влево); 2) $U_3 = U_0 \frac{R_4 + R_5}{R_4 + R_5 + R_6} = 7{,}2$ В , $U_4 = -U_0 \frac{R_5}{R_4 + R_5 + R_6} = -4{,}0$ В (стрелка прибора отклонится влево), $U_5 = U_0 \frac{R_5 + R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = 8{,}8$ В , $I_4 = I_5 = \frac{U_0}{R_4 + R_5 + R_6} = 0{,}8$ мА .

10 класс

1. $R_м = a\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \approx 23{,}4$ см . **2.** $L = \frac{F_1 - F_2}{\rho g} = 8$ м .

3. 1) $b = b_0 - \frac{v_0^2}{\mu g}$, если $v_0 < \sqrt{2\mu g b_0}$, и $b = -b_0$, если $v_0 \geq \sqrt{2\mu g b_0}$; 2) $v_к = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g b_0}$; 3) график зависимости b от v_0^2 приведен на рисунке 14.

4. $V_2 = 4V_1$.

5. 1) $U = -1$ В , стрелка отклонится влево;
2) $I = 0{,}2$ А, стрелка отклонится вправо.

11 класс

1. 10 см $< l_2 <$ 30 см . **2.** $a = g\frac{2m}{M + 5m}$. **3.** $V_1 = \frac{\Delta V}{5}$.

4. Сила тока не изменится.

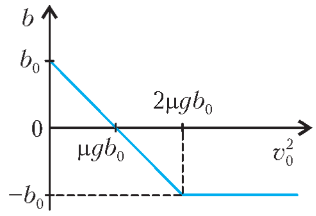


Рис. 14

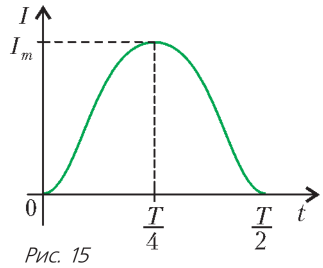


Рис. 15

5. 1) $U_{2C} = \frac{\mathcal{E}}{3}$, $A = \frac{2C\mathcal{E}^2}{3}$; 2) $I = I_m \sin \omega t$ при $t \leq \frac{T}{2}$ и $I = 0$ при $t \geq \frac{T}{2}$, где $I_m = \frac{2}{3}\mathcal{E}\sqrt{\frac{C}{L}}$ и $T = 2\pi\sqrt{2LC}$, см. рис.15, $Q_R = \frac{\pi\sqrt{2}}{9} CR\mathcal{E}^2\sqrt{\frac{C}{L}}$, $U_д = -\frac{\mathcal{E}}{3}$.

ВСЕРОССИЙСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКЕ 2010 ГОДА

1. $s = \frac{L}{\sqrt{1 + (v_2/v_1)^2 - 2(v_2/v_1)\cos\alpha}}$.

2. $H = \frac{1}{2}\left(v \sin\alpha \cdot \tau - g\tau^2 + L\left(1 - \cos\frac{v\cos\alpha \cdot \tau}{L}\right)\right)$.

3. $P = F_1 + F_2$, если, например, центр тяжести шкафа находится в секторе между ножками 1 и 2, образованном пересекающимися диагоналями.

4. $a = \frac{F}{3m}$. **5.** $T_2 = \frac{T_0}{0,62} = 1{,}6T_0$. **6.** $v_r = \sqrt{3}\frac{qD}{m}$.

7. $C = 4\pi\varepsilon_0 R$. **8.** $p_м = 2\pi\frac{BR^3}{\mu_0}$, $i_m = \frac{3B}{\mu_0}$. **9.** $9I_0$.