Региональный этап XXXVII Всероссийской олимпиады школьников по математике

Как и в прошлом году, региональный этап Всероссийской олимпиады школьников 2010-11 учебного года проводился одновременно во всех регионах России по единым заданиям и являлся отборочным для участия в заключительном этапе Всероссийской олимпиады. По традиции, в каждом из двух туров (дней) задачи располагаются в порядке возрастания сложности (по мнению составителей). И если первые задачи каждого тура были доступными для многих участников олимпиады, то трудность задач 4 и 8 в каждой параллели оказалась на уровне задач заключительного этапа.

ЗАДАЧИ

9 класс

Первый день

1. Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Верно ли, что все числа равны?

Л.Емельянов

2. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$). На меньшей дуге AB описанной около него окружности взята точка D. На продолжении отрезка AD за точку D выбрана точка E так, что точки A и E лежат в одной полуплоскости относительно BC. Описанная окружность треугольника BDE пересекает сторону AB в точке F. Докажите, что прямые EF и BC параллельны.

Р.Женодаров

3. Через центры некоторых клеток шахматной доски 8×8 проведена замкнутая несамопересекающаяся ломаная. Каждое звено ломаной соединяет центры соседних по горизонтали, вертикали или диагонали клеток. Докажите, что в ограниченном ею многоугольнике общая площадь черных частей равна общей площади белых частей.

Д.Храмцов

4. Даны положительные числа x, y, z. Докажите неравенство

$$\frac{x+1}{y+1}+\frac{y+1}{z+1}+\frac{z+1}{x+1}\le\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}.$$

А.Храбров, Б.Трушин

Второй день

5. Найдите все числа a такие, что для любого натурального n число $an(n+2)(n+4)$ будет целым.

О.Подлипский

6. Вначале на плоскости были отмечены три различные точки. Каждую минуту выбирались некоторые три из отмеченных точек – обозначим их A, B и C, после чего на плоскости отмечалась точка D, симметричная A относительно серединного перпендикуляра к BC. Через сутки оказалось, что среди отмеченных точек нашлись три различные точки, лежащие на одной прямой. Докажите, что три исходных точки также лежали на одной прямой.

В.Шмаров

7. См. задачу М2215,*а* «Задачника «Кванта».

8. См. задачу М2218 «Задачника «Кванта» для $M = 100$.

10 класс

Первый день

1. Два бегуна стартовали одновременно из одной точки. Сначала они бежали по улице до стадиона, а потом до финиша – три круга по стадиону. Всю дистанцию оба бежали с постоянными скоростями, и в ходе забега первый бегун дважды обогнал второго. Докажите, что первый бежал по крайней мере вдвое быстрее, чем второй.

И.Рубанов

2. На стороне AC остроугольного треугольника ABC выбраны точки M и K так, что $\angle ABM = \angle CBK$. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников ABM, ABK, CBM и CBK, лежат на одной окружности.

Т.Емельянова

3. Даны различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{14}$. На доску выписаны все 196 чисел вида $a_k + a_l$, где $1\le k$, $l\le 14$. Может ли оказаться, что для любой комбинации из двух цифр среди написанных на доске чисел найдется хотя бы одно число, оканчивающееся на эту комбинацию (т.е. найдутся числа, оканчивающиеся на 00, 01, 02, … …, 99)?

П.Кожевников

4. Ненулевые числа a, b, c таковы, что любые два из трех уравнений $ax^{11}+bx^4+c=0$, $bx^{11}+cx^4+a=0$, $cx^{11}+ax^4+b=0$ имеют общий корень. Докажите, что все три уравнения имеют общий корень.

И.Богданов

Второй день

5. Найдите все числа a такие, что для любого натурального n число $an(n+2)(n+3)(n+4)$ будет целым.

О.Подлипский

6. См. задачу М2214 «Задачника «Кванта» для $N = 2011$.

7. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC точки C_0 и B_0 – середины сторон AB и AC соответственно, O – центр описанной окружности, H – точка пересечения высот. Прямые BH и OC_0 пересекаются в точке P, а прямые CH и OB_0 – в точке Q. Оказалось, что четырехугольник $OPHQ$ – ромб. Докажите, что точки A, P и Q лежат на одной прямой.

Л.Емельянов

8. См. задачу М2218 «Задачника «Кванта» для $M = 100$.

11 класс

Первый день

1. Существует ли такое вещественное α, что число $\cos\alpha$ иррационально, а все числа $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\cos 4\alpha$, $\cos 5\alpha$ рациональны?

В.Сендеров

2. Даны 2011 ненулевых целых чисел. Известно, что сумма любого из них с произведением оставшихся 2010 чисел отрицательна. Докажите, что если произвольным образом разбить все данные числа на две группы и перемножить числа в группах, то сумма двух полученных произведений также будет отрицательной.

Н.Агаханов, И.Богданов

3. На окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, выбрана точка K. Оказалось, что прямая CK пересекает отрезок AD в точке M такой, что $AM : MD = 2$. Пусть O – центр прямоугольника. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника OKD лежит на окружности, описанной около треугольника COD.

В.Шмаров

4. 2011 складов соединены дорогами так, что от любого склада можно проехать к любому другому, возможно, проехав по нескольким дорогам. На складах находится по $x_1, \ldots, x_{2011}$ кг цемента соответственно. За один рейс можно провезти с произвольного склада на другой склад по соединяющей их дороге произвольное количество цемента. В итоге на складах по плану должно оказаться по $y_1, \ldots, y_{2011}$ кг цемента соответственно, причем

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2011} = y_1 + y_2 + \ldots + y_{2011}.$$

За какое минимальное количество рейсов можно выполнить план при любых значениях чисел x_i и y_i и любой схеме дорог?

Р.Карасёв

Второй день

5. См. задачу 5 для 10 класса.

6. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательные к ω, проведенные через точки B и C, пересекают касательную к ω, проведенную через точку A, в точках K и L соответственно. Прямая, проведенная через K параллельно AB, пересекается с прямой, проведенной через L параллельно AC, в точке P. Докажите, что $BP = CP$.

П.Кожевников

7. Вася нарисовал на плоскости несколько окружностей и провел всевозможные общие касательные к каждой паре этих окружностей. Оказалось, что проведенные прямые содержат все стороны некоторого правильного 2011-угольника. Какое наименьшее количество окружностей мог нарисовать Вася?

Н.Агаханов

8. Даны положительные числа b и c. Докажите неравенство

$$(b-c)^{2011}(b+c)^{2011}(c-b)^{2011} \geq$$
$$\geq \left(b^{2011}-c^{2011}\right)\left(b^{2011}+c^{2011}\right)\left(c^{2011}-b^{2011}\right).$$

В.Сендеров

Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, П.Кожевников, О.Подлипский, Д.Терёшин

Региональный этап XLV Всероссийской олимпиады школьников по физике

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

7 класс

Задача 1. Про тазики. Для стирки белья в квадратном душевом поддоне со стороной $a = 80$ см и высотой бортика $h = 20$ см хозяйка использует находящийся в поддоне частично заполненный водой квадратный тазик со стороной $b = a/2 = 40$ см и глубиной h, а для полоскания белья – круглый цилиндрический тазик радиусом $R = a/4 = 20$ см и глубиной h, полностью заполненный водой (рис.1). Какой высоты H будет уровень воды в поддоне, если хозяйка выльет в него всю воду из круглого тазика и круглый тазик уберет? Сливное отверстие поддона закрыто пробкой. Квадратный тазик остается в поддоне и не всплывает.

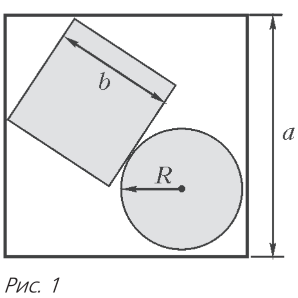

Рис. 1

Примечание. Площадь круга вычисляется по формуле $S = \pi R^2$, где $\pi = 3{,}14$.

Фольклор

Задача 2. Забег Глюка и Бага. Экспериментатор Глюк и теоретик Баг решили соревноваться в беге. Известно, что Глюк пробегает $s_1 = 125$ м, а Баг $s_2 = 100$ м за одно и то же время t. Так как Глюк бегает быстрее Бага, он решил дать ему фору (преимущество) в $s = 300$ м.

1) На каком расстоянии L от места своего старта Глюк догонит Бага?

2) Во время забега выяснилось, что расстояние $s_0 = 1000$ м Глюк пробегает быстрее Бага на $\Delta t = 50$ с. Определите скорости бега Глюка и Бага.

И.Бажанский

Задача 3. Два кубика. Имеются два кубика. Один изготовлен из железа плотностью $\rho = 7{,}8$ г/см^3, а другой изготовлен из неизвестного вещества – сплава X. Масса кубика из сплава X в $k = 1{,}67$ раза меньше массы железного кубика, а длина его ребра на 20% больше длины ребра железного кубика. Определите плотность неизвестного вещества.

И.Бажанский

Задача 4. Уборка снега. По дороге на снегосборный пункт с постоянной скоростью v_1 [м/с] едет самосвал, груженый снегом. В кузове самосвала имеется дырка, через которую постоянно высыпается снег, причем за одинаковые промежутки времени высыпается одинаковая масса снега μ [кг/с]. Вдогонку за самосвалом отправляется снегоуборочный комбайн с бункером. Он едет со скоростью v_2 [м/с] и собирает весь просыпавшийся снег.

1) Определите линейную плотность просыпавшегося снега λ [кг/м], т.е. сколько килограммов снега приходится на каждый метр длины дороги.

2) Пусть при данных величинах бункер комбайна заполняется за время τ. За какое время t заполнится бункер в 2 раза большего объема, если комбайн поедет в 2 раза быстрее, самосвал поедет в 2 раза медленнее, а снег из кузова будет сыпаться в 2 раза быстрее (с расходом 2μ)?

Считайте что изначально бункер пустой, его объем меньше объема снега в самосвале и за время заполнения бункера комбайн не догоняет самосвал.

М.Замятнин

8 класс

Задача 1. Про тазики. Для стирки белья в квадратном душевом поддоне со стороной a = 80 см и высотой бортика h = 20 см хозяйка использует находящийся в поддоне частично заполненный водой квадратный тазик со стороной $b = a/2$ = 40 см, глубиной h и общей массой m = 5 кг, а для полоскания белья – круглый цилиндрический тазик радиусом $R = a/4$ = 20 см и глубиной h (см. рис.1). Каким может быть уровень воды H в круглом тазике, если при ее выливании в поддон квадратный тазик не всплывает? После выливания воды круглый тазик убирают из поддона. Сливное отверстие поддона закрыто пробкой.

Примечание. Площадь круга S вычисляется но формуле $S = \pi R^2$, где π = 3,14. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3.

С.Кармазин

Задача 2. Изогнутая проволока. Однородную проволоку длиной L = 1,5 м и постоянного сечения согнули буквой Z так, что в местах сгиба участки проволоки образовали прямые углы, а длины прямолинейных участков проволоки поделились в отношении $a : b : c$ = = 1 : 10 : 4. Проволоку подвесили на нити в точке O (рис.2). Определите расстояние l от точки подвеса O до места сопряжения участков a и b проволоки, если участок b горизонтален.

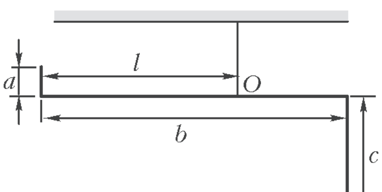

Рис. 2

И.Бажанский

Задача 3. Плавление льда. В теплоизолированном сосуде с ничтожно малой теплоемкостью находится кусок льда при температуре 0 °С. В сосуд впустили тонкой струйкой такое количество пара при температуре 100 °С, что при его конденсации выделившегося количества теплоты в точности хватило на плавление льда. Какая температура t установилась в сосуде после того, как система пришла в термодинамическое равновесие? Известно, что удельная теплота плавления льда λ = 340 кДж/кг, а удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}3 \cdot 10^3$ кДж/кг.

Фольклор

Задача 4. Уборка снега. После снегопада на снегоприемный пункт по заснеженной дороге с постоянной скоростью v_1 [м/с] едет самосвал, груженый снегом. В кузове самосвала имеется дырка, через которую на дорогу ровной струйкой сыпется снег, причем за одинаковые промежутки времени высыпается одинаковая масса μ [кг/с]. Следом за самосвалом едет снегоуборочный комбайн с бункером. Он едет с постоянной скоростью и собирает снег по всей ширине дороги до тех пор, пока бункер не заполнится. Выяснилось, что если бы скорость самосвала возросла в 3 раза при неизменной скорости комбайна, то время заполнения бункера увеличилось бы в 2 раза. Выразите через v_1 и μ линейную плотность снега λ [кг/м] на заснеженной дороге, т.е. сколько килограммов снега приходилось на каждый метр длины дороги, до того как по ней проехал самосвал. Считайте, что изначально бункер пустой, его объем меньше объема снега в самосвале и за время заполнения бункера комбайн не догоняет самосвал.

М.Замятнин

9 класс

Задача 1. В прачечной. Для стирки белья в квадратном душевом поддоне со стороной a = 80 см и высотой бортика h = 20 см хозяйка использует находящийся в поддоне частично заполненный водой и бельем квадратный тазик со стороной $b = a/2$, высотой бортика h и общей массой m = 2,4 кг. Для полоскания белья хозяйка использует находящийся в том же поддоне круглый цилиндрический тазик, полностью заполненный водой. Радиус дна тазика $R = a/4$ и высота его бортика h (см. рис.1). Каким будет уровень H воды в поддоне, если вылить в него всю воду из круглого тазика? После выливания воды круглый тазик убирают из поддона. Сливное отверстие поддона закрыто пробкой.

Примечание. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3. Площадь круга вычисляется по формуле $S = \pi R^2$, где $\pi = 3{,}14$.

С.Кармазин

Задача 2. Испорченный кран. В большой комнате с температурой воздуха $t_0 = 20$ °С находится испорченный кран. Из него тоненькой струйкой в единицу времени вытекает μ = 0,1 г/с воды. Вода попадает в тонкостенную металлическую раковину с квадратным сечением $a^2 = 30$ см $\times$ 30 см. Температура воды в кране $t_1 = 54$ °С. Слив раковины прикрыт так, что вода из него частично вытекает. При этом уровень воды в раковине устанавливается на высоте H = 10 см, равной глубине раковины. Пренебрегая теплоемкостью раковины и считая, что она очень хорошо проводит тепло, определите установившуюся температуру t воды в раковине. Считайте, что поток тепла от воды в раковине равен $q = kS(t - t_0)$, где $k = 0{,}3$ Вт/(м$^2 \cdot$ °С), а S – площадь поверхности воды, включая стенки и дно раковины. Удельная теплоемкость воды $c_в = 4200$ Дж/(кг $\cdot$ °С). Вода в раковине перемешивается.

Н.Кудряшова

Задача 3. Мелкокалиберная винтовка. Мелкокалиберную винтовку закрепили на стенде так, что ее ствол оказался горизонтальным (рис.3). После этого из винтовки начали

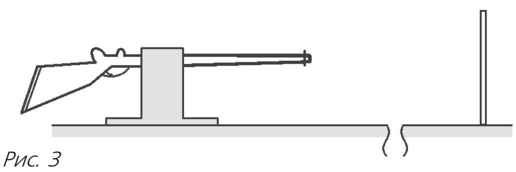
Рис. 3

стрелять в мишень, находящуюся от нее на расстоянии L = = 50 м. Из-за небольшого разброса Δv скоростей пуль они попадают в мишень на разной высоте (рис.4), причем максимальное отклонение высоты их попадания в мишень от ее среднего значения составляет Δh = 17 мм. Определите максимальное отклонение Δv скорости пули от ее среднего значения v_0 = 350 м/с. Ускорение свободного падения

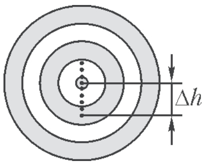

Рис. 4

$g = 10$ м/с^2. Изменение скорости нули из-за сопротивления воздуха не учитывать.

В.Слободянин

Задача 4. Очень скользкая дорога. Девятиклассник стоит на границе газона и обледеневшего участка дороги шириной L. Трение между обувью мальчика и дорогой практически отсутствует. Он решил сначала отбежать назад, а затем, разогнавшись, преодолеть скользкий участок по инерции. Коэффициент трения между обувью и газоном μ. Ускорение свободного падения g.

1) Какое наименьшее время T_1 потребуется мальчику, чтобы отбежать от дороги и вновь вернуться к границе обледеневшего участка, разогнавшись до скорости v_0?

2) Какое наименьшее время T_2 от момента начала движения понадобится ему для преодоления всего скользкого участка?

И.Воробьев

Задача 5. Амперметры и вольтметры. У экспериментатора Глюка и теоретика Бага было 5 идеальных амперметров и 5 идеальных вольтметров. Они соединили последовательно амперметры и вольтметры, а затем подключили к ним резисторы сопротивлениями $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 2$ кОм, $R_3 = 3$ кОм, $R_4 = 4$ кОм, $R_5 = 5$ кОм, $R_6 = 6$ кОм. В результате получились электрические цепи, изображенные на рисунках 5 и 6, которые подключили к источнику постоянного напряжения $U_0 = 12$ В.

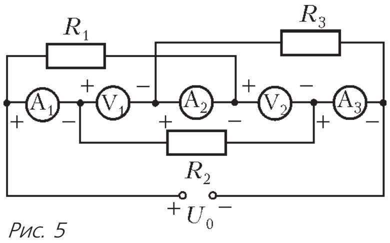

Рис. 5

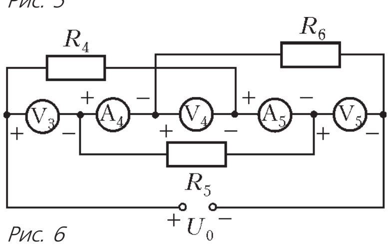

Рис. 6

1) Определите показания вольтметров V_1, V_2 и амперметров A_1, A_2, A_3 в схеме Глюка. В какую сторону отклонятся стрелки приборов, если при подключении их клемм, помеченных символом (+) к положительному выводу батареи, а клемм, помеченных символом (−), к отрицательному выводу батареи, стрелка отклоняется вправо (рис.7)?

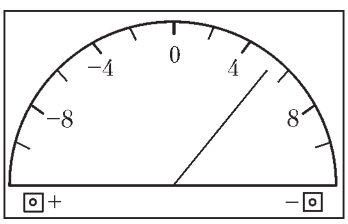

Рис. 7

2) Определите показания вольтметров V_3, V_4, V_5 и амперметров A_4 и A_5 в схеме Бага. В какую сторону отклонятся стрелки приборов в этом случае?

Фольклор

10 класс

Задача 1. Про тазики. Для стирки белья в квадратном душевом поддоне со стороной $a = 80$ см и высотой бортика $h = 20$ см хозяйка использует находящийся в поддоне частично заполненный водой и бельем квадратный тазик со стороной $a/2$, высотой бортика h и общей массой $m = 16$ кг (рис.8). Для полоскания белья хозяйка использует находящийся в том же поддоне круглый цилиндрический тазик с радиусом дна R и высотой бортика h. Чему равен максимально возможный радиус $R_м$ круглого тазика, полностью заполненного водой, если при выливании воды из него в поддон квадратный тазик не всплывает? Сливное отверстие поддона закрыто пробкой.

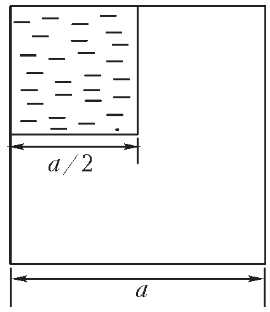

Рис. 8

Примечание. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3. Площадь круга вычисляется по формуле $S = \pi R^2$, где $\pi = 3{,}14$.

С.Кармазин

Задача 2. Блоки и веревка. Металлический куб прикреплен в точке A к тяжелой однородной веревке, перекинутой через два легких блока; другой конец веревки закреплен на неподвижной опоре в точке B так, что точки A и B находятся на одной и той же высоте (рис.9). Силы $F_1 = 110$ Н и $F_2 = 90$ Н, приложенные к осям блоков, удерживают систему в равновесии. Определите длину веревки L. Линейная плотность веревки (масса единицы длины) $\rho = 0{,}25$ кг/м, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Трения в осях блоков нет. Радиусом блоков по сравнению с длиной веревки пренебречь нельзя.

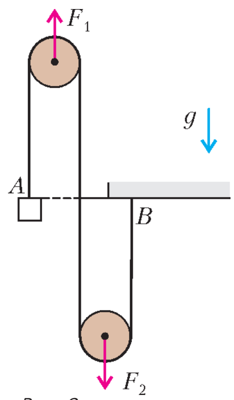

Рис. 9

Фольклор

Задача 3. Брусочки. Система, состоящая из двух одинаковых брусков массой m каждый, движется с постоянной скоростью v_0 вдоль гладкой горизонтальной плоскости по направлению к вертикальной стенке (рис. 10). Верхний брусок смещен относительно нижнего на расстояние b_0 в направлении движения. Через некоторое время система сталкивается со стенкой. Соударение любого из брусков с ней можно считать абсолютно упругим. Коэффициент трения между брусками μ.

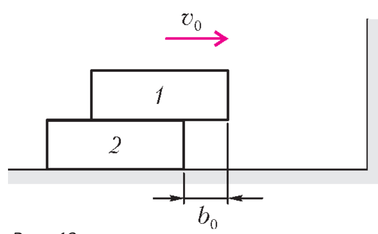

Рис. 10

1) Определите смещение b (модуль и направление) верхнего бруска относительно нижнего после того, как прекратится взаимодействие системы брусков со стенкой, а верхний брусок перестанет скользить по нижнему.

2) С какой скоростью $v_к$ после этого будет двигаться система?

3) В каких координатах зависимость $b(v_0)$ будет линейной? Постройте график этой зависимости в соответствующих координатах.

Д.Антоненко

Задача 4. Потерянные оси. Говорят, что в архиве лорда Кельвина нашли рукопись, на которой был изображен процесс *1 → 2 → 3* (рис. 11), совершенный над одним молем гелия. От времени чернила выцвели, и стало невозможно разглядеть, где находятся оси p (давле-

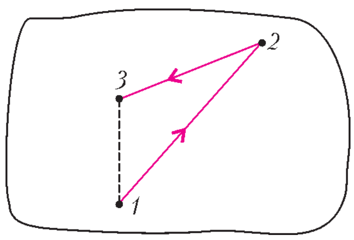

Рис. 11

ние) и V (объем). Однако из текста следовало, что состояния *1* и *3* лежат на одной изохоре, соответствующей объему V_1. Кроме того, было сказано, что количество теплоты, подведенное к газу в процессе $1 \to 2 \to 3$, равно нулю. Определите объем V_2.

В.Слободянин

Задача 5. Мостик. Четыре резистора сопротивлениями $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 7$ Ом и $R_4 = 6$ Ом соединены с батареей, напряжение на которой $U_{01} = 9{,}1$ В, а ее внутренним сопротивлением можно пренебречь (рис.12).

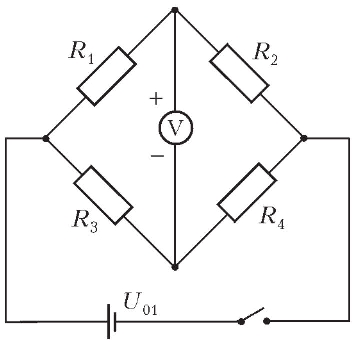

Рис. 12

1) Между резисторами включен идеальный вольтметр. Найдите его показания. В какую сторону отклонится стрелка вольтметра? Известно, что при подключении клеммы вольтметра, помеченной символом (+), к положительному выводу батареи, а клеммы вольтметра, помеченной символом (–), к отрицательному выводу батареи, стрелка отклоняется вправо (рис.13).

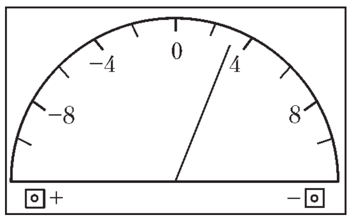

Рис. 13

2) Через какое-то время батарея частично разрядилась, и напряжение на ее выводах уменьшилось до $U_{02} = 9{,}0$ В. Вместо вольтметра в цепь включили амперметр (рис.14), сопротивление которого пренебрежимо мало. Найдите показания амперметра. В какую сторону отклонится стрелка амперметра, если при протекании через него тока от клеммы, помеченной символом (+), к клемме, помеченной символом (–), стрелка отклоняется вправо?

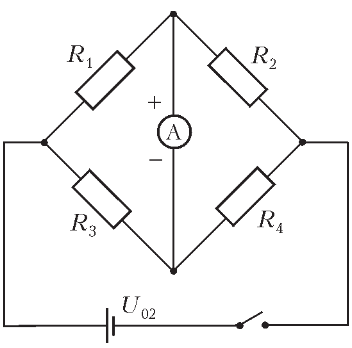

Рис. 14

Фольклор

11 класс

Задача 1. Стержень и вода. Тонкий стержень постоянного сечения состоит из двух частей. Первая из них имеет длину $l_1 = 10$ см и плотность $\rho_1 = 1{,}5$ г/см^3, вторая имеет плотность $\rho_2 = 0{,}5$ г/см^3. При какой длине l_2 второй части стержня он будет плавать в воде (плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3) в вертикальном положении (рис.15)?

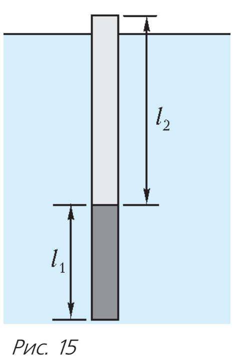

Рис. 15

О.Шведов

Задача 2. Грузы и блоки. На гладкой горизонтальной поверхности покоится уголок массой M, который с помощью легкой нити и двух блоков соединен со стенкой и бруском массой m (рис.16). Брусок касается внутренней поверхности уголка. Участки нити, перекинутые через блок, прикрепленный к стене, натянуты горизонтально. Вначале систему удерживают в состоянии покоя, а затем отпускают. Найдите ускорение a уголка. Блоки легкие. Трение в системе отсутствует.

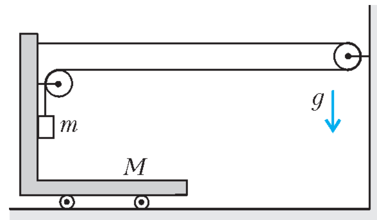

Рис. 16

Д.Александров

Задача 3. Потерянные оси. Говорят, что в архиве лорда Кельвина нашли рукопись, на которой был изображен процесс $1 \to 2 \to 3$, совершенный над одним молем азота (см. рис.11). От времени чернила выцвели, и стало невозможно разглядеть, где находятся оси p (давление) и V (объем). Однако из текста следовало, что состояния *1* и *3* лежат на одной изохоре, а также то, что в процессах $1 \to 2$ и $2 \to 3$ объем газа изменяется на ΔV. Кроме того, было сказано, что количество теплоты, подведенное в процессе $1 \to 2 \to 3$ к азоту, равно нулю. Определите, на каком расстоянии (в единицах объема) от оси p находится изохора, проходящая через точки *1* и *3*.

В.Слободянин

Задача 4. Переменный резистор. В электрической цепи, схема которой изображена на рисунке 17, ЭДС батареек равны $3\mathscr{E}$ и $2\mathscr{E}$, а сопротивления резисторов составляют $R_1 = R$, $R_2 = 2R$ и $R_x = 3R$. На сколько процентов изменится сила тока, проходящего через амперметр, если сопротивление переменного резистора R_x увеличить на 5%?

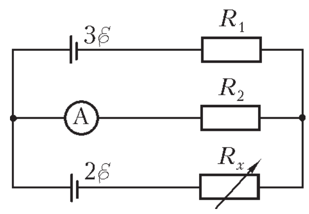

Рис. 17

Фольклор

Задача 5. Диод в колебательном контуре. Электрическая цепь состоит из идеального источника тока с ЭДС $\mathscr{E}$, двух конденсаторов емкостями C и $2C$, катушки индуктивностью L, резисторов сопротивлениями R и r, идеального диода D и двух ключей K_1 и K_2 (рис.18). В начальный момент времени конденсаторы не заряжены, а ключи разомкнуты.

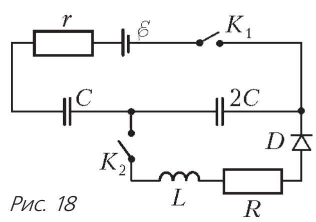

Рис. 18

1) Сначала замыкают ключ K_1. Найдите напряжение U_{2C}, установившееся на конденсаторе емкостью $2C$, и работу A, совершенную источником тока.

2) После того как конденсаторы зарядятся, ключ K_1 размыкают, а ключ K_2 замыкают. Затухание в получившемся RLC-контуре мало, т.е. количество теплоты, которое выделяется на резисторе сопротивлением R за полпериода колебаний, намного меньше начальной энергии, запасенной в конденсаторе емкостью $2C$. Найдите зависимость силы тока $I = I(t)$ от времени. Постройте соответствующий график. Определите количество теплоты Q_R, которое выделится на резисторе сопротивлением R. Вычислите установившееся напряжение $U_д$ на диоде.

М.Осин

Публикацию подготовили С.Козел, В.Слободянин

Всероссийская студенческая олимпиада по физике 2010 года

15 ноября 2010 года в Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э.Баумана прошел заключительный тур очередной Всероссийской физической олимпиады студентов технических вузов.

По результатам олимпиады, в командном зачете первое место заняла команда Санкт-Петербургского государственного политехнического университета (СПГПУ), набравшая 142 балла, второе место заняла команда Национального исследовательского института «МИСИС» (74 балла), третье место – команда МГТУ им. Н.Э.Баумана (68 баллов).

В личном зачете первое место завоевал Ярослав Бельтюков (СПГПУ), второе место завоевал Антон Пахомов (Самарский государственный аэрокосмический университет им. С.П.Королева), третье место – Петр Кравчук (СПГПУ).

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Ракета догоняет цель, двигаясь все время со скоростью v_1 по соединяющей их линии. Цель, двигаясь со скоростью v_2, уходит от ракеты, сохраняя угол между векторами скоростей равным α. Определите перемещение ракеты до точки встречи, если начальное расстояние между ними было равно L.

2. Два одинаковых тела связаны нерастяжимой нитью длиной L и лежат на горизонтальной поверхности. Первое тело бросили под углом к горизонту таким образом, что в момент неупругого натяжения нити его скорость была направлена под углом α к горизонту и равна v, а нить находилась в вертикальном положении. В процессе дальнейшего движения второе тело достигло максимальной высоты за время τ. Определите эту максимальную высоту.

3. Шкаф стоит на четырех ножках. Под каждую ножку по очереди подкладывают пьезометрический датчик и измеряют силы давления F_1, F_2, F_3, F_4 каждой ножки на датчик. Определите вес шкафа, считая, что контакт ножки с полом точечный, при каждом измерении одна из ножек отрывается от пола и наклоном шкафа можно пренебречь.

4. Точечное тело массой m скользит по гладкой плоскости, удерживаемое нерастяжимой нитью, продетой через маленькое отверстие в плоскости. Нить может свободно скользить внутри отверстия, сила натяжения нити постоянна и равна T. Определите тангенциальное ускорение тела, если к нему приложена тангенциальная сила $F \ll T$.

5. Первое тело имеет температуру $2T_0$ и теплоемкость C, второе – температуру T_0 и теплоемкость $2C$. Определите, до какой максимальной температуры можно нагреть второе тело с использованием идеальной тепловой машины, если суммарная работа равна нулю. Известно, что уравнение $x^3 - 2x + 1 = 0$ имеет корень $x = 0{,}62$.

6. Заряд q массой m движется в плоскости в поперечном магнитном поле, индукция которого B меняется обратно пропорционально расстоянию r от точки O, находящейся на плоскости: $B = D/r$. Определите скорость, с которой будет удаляться заряд от точки O при $r \gg r_0$, где r_0 – начальное значение r. В начальный момент времени скорость заряда тангенциальна и равна $v_0 = 2qD/m$.

7. Сплошной металлический шар радиусом R разделен по диаметральной плоскости, и половинки изолированы друг от друга тонким слоем диэлектрика. Определите емкость каждой половинки шара.

8. Сферическая оболочка из сверхпроводника радиусом R помещена в однородное магнитное поле с индукцией B. Определите дипольный момент оболочки и максимальную линейную плотность тока.

9. На пути плоской световой волны интенсивностью I_0 стоит экран в виде кольца, площадь которого равна площади первой зоны Френеля. Определите максимальное значение интенсивности волны в точке наблюдения при расширении кольца.

Публикацию подготовили В.Голубев, В.Глушков