XXXII Турнир городов

ЗАДАЧИ ОСЕННЕГО ТУРА (2010 год)

Базовый вариант

8–9 классы

1 (4)[1]. В пифагоровой таблице умножения выделили прямоугольную рамку толщиной в одну клетку, причем каждая сторона рамки состоит из нечетного числа клеток. Клетки рамки поочередно раскрасили в два цвета – черный и белый. Докажите, что сумма чисел в черных клетках равна сумме чисел в белых клетках.

(Пифагорова таблица умножения – это клетчатая таблица, в которой на пересечении m-й строки и n-го столбца стоит число mn (для любых натуральных m и n).)

С.Прика

2 (4). Равнобокая трапеция описана около окружности. Докажите, что биссектриса тупого угла этой трапеции делит ее площадь пополам.

Р.Гордин

3 (4). На шахматной доске 8×8 стоит кубик (нижняя грань совпадает с одной из клеток доски). Его прокатили по доске, перекатывая через ребра, так что кубик побывал на всех клетках (на некоторых, возможно, несколько раз). Могло ли случиться, что одна из его граней ни разу не лежала на доске?

А.Шаповалов

4 (4). В некоторой школе более 90% учеников знают английский и немецкий языки и более 90% учеников знают английский и французский языки. Докажите, что среди учеников, знающих немецкий и французский языки, более 90% знают английский язык.

Фольклор, предложил А.Шень

5 (4). Концы N хорд разделили окружность на $2N$ дуг единичной длины. Известно, что каждая из хорд делит окружность на две дуги четной длины. Докажите, что число N четно.

В.Произволов

10–11 классы

1. Банкомат обменивает монеты: дублоны на пистоли и наоборот. Пистоль стоит s дублонов, а дублон – $1/s$ пистолей, где s – не обязательно целое. В банкомат можно вбросить любое число монет одного вида, после чего он выдаст в обмен монеты другого вида, округляя результат до ближайшего целого числа (если ближайших чисел два, выбирается большее).

а) (2) Может ли так быть, что, обменяв сколько-то дублонов на пистоли, а затем обменяв полученные пистоли на дублоны, мы получим больше дублонов, чем было вначале?

б) (3) Если да, то может ли случиться, что полученное число дублонов еще увеличится, если проделать с ними такую же операцию?

Л.Стунжас

[1] *В скобках после номера задачи указано максимальное количество баллов, присуждавшихся за ее решение.*

2. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O. Известно, что сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники AOB и COD, равна сумме радиусов окружностей, вписанных в треугольники BOC и DOA. Докажите, что:

а) (2) четырехугольник $ABCD$ – описанный;

б) (3) четырехугольник $ABCD$ симметричен относительно одной из своих диагоналей.

П.Кожевников

3 (5). См. задачу М2206, а) «Задачника «Кванта».

4 (5). См. задачу М2207 «Задачника «Кванта».

5 (5). 55 боксеров участвовали в турнире по системе «проигравший выбывает». Бои шли последовательно. Известно, что у участников каждого боя число предыдущих побед отличалось не более чем на 1. Какое наибольшее число боев мог провести победитель турнира?

А.Шаповалов

Сложный вариант

8–9 классы

1 (4). На плоскости дана прямая. С помощью пятака постройте две точки какой-нибудь прямой, перпендикулярной данной. Разрешаются такие операции: отметить точку, приложить пятак к ней и обвести его; отметить две точки (на расстоянии меньше диаметра пятака), приложить пятак к ним и обвести его. Нет возможности прикладывать пятак к прямой так, чтобы она его касалась.

Г.Фельдман

2 (5). Петя умеет на любом отрезке отмечать точки, которые делят этот отрезок пополам или в отношении $n:(n+1)$, где n – любое натуральное число. Петя утверждает, что этого достаточно, чтобы на любом отрезке отметить точку, которая делит его в любом заданном рациональном отношении. Прав ли он?

Б.Френкин

3 (8). На кольцевом треке 10 велосипедистов стартовали одновременно из одной точки и поехали с постоянными различными скоростями (в одну сторону). Если после старта два велосипедиста снова оказываются одновременно в одной точке, назовем это встречей. До полудня любые два велосипедиста встретились хотя бы раз, при этом никакие три или больше не встречались одновременно. Докажите, что до полудня у любого велосипедиста было не менее 25 встреч.

Б.Френкин

4 (8). Клетчатый прямоугольник разбит на двуклеточные домино. В каждом домино провели одну из двух диагоналей. Оказалось, что никакие диагонали не имеют общих концов. Докажите, что ровно два из четырех углов прямоугольника являются концами диагоналей.

А.Шаповалов

5 (8). Имеется пятиугольник. Для каждой стороны поделим ее длину на сумму длин всех остальных сторон. Затем сложим все получившиеся дроби. Докажите, что полученная сумма будет всегда меньше 2.

Г.Гальперин

6 (8). В остроугольном треугольнике ABC на высоте BH выбрана произвольная точка P. Точки A' и C' – середины сторон BC и AB соответственно. Перпендикуляр из A' на CP пересекается с перпендикуляром из C' на AP в точке K. Докажите, что точка K равноудалена от точек A и C.

Ф.Ивлев

7 (12). За круглым столом заседают N рыцарей. Каждое утро чародей Мерлин сажает их в другом порядке. Начиная со второго дня Мерлин разрешил рыцарям делать в течение дня сколько угодно пересадок такого вида: два сидящих рядом рыцаря меняются местами, если только они не были соседями в первый день. Рыцари стараются сесть в том же порядке, что и в какой-нибудь из предыдущих дней: тогда заседания прекратятся. Какое наибольшее число дней Мерлин гарантированно может проводить заседания? (Рассадки, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми. Мерлин за столом не сидит.)

М.Прасолов

10–11 классы

1. В некой стране 100 городов (города считайте точками на плоскости). В справочнике для каждой пары городов имеется запись, каково расстояние между ними (всего 4950 записей).

а) (2) Одна запись стерлась. Всегда ли можно однозначно восстановить ее по остальным?

б) (3) Пусть стерлись k записей, и известно, что в этой стране никакие три города не лежат на одной прямой. При каком наибольшем k всегда можно однозначно восстановить стершиеся записи?

И.Богданов

2 (6). См. задачу М2209 «Задачника «Кванта».

3 (6). См. задачу М2208 «Задачника «Кванта».

4. Два мага сражаются друг с другом. Вначале они оба парят над морем на высоте 100 м. Маги по очереди применяют заклинания вида «уменьшить высоту парения над морем на a м у себя и на b м у соперника», где a, b – действительные числа, $0 < a < b$. Набор заклинаний у магов один и тот же, их можно использовать в любом порядке и неоднократно. Маг выигрывает дуэль, если после чьего-либо хода его высота над морем будет положительна, а у соперника – нет. Существует ли такой набор заклинаний, что второй маг может гарантированно выиграть (как бы ни действовал первый), если при этом число заклинаний в наборе

а) (2) конечно;

б) (5) бесконечно?

И.Митрофанов

5 (8). См. задачу М2210 «Задачника «Кванта».

6 (12). В каждой клетке таблицы 1000×1000 стоит ноль или единица. Докажите, что можно либо вычеркнуть 990 строк так, что в любом столбце будет хотя бы одна невычеркнутая единица, либо вычеркнуть 990 столбцов так, что в любой строке будет хотя бы один невычеркнутый ноль.

А.Ромащенко

7 (14). Квадрат $ABCD$ разрезан на одинаковые прямоугольники с целыми длинами сторон. Фигура F является объединением всех прямоугольников, имеющих общие точки с диагональю AC. Докажите, что AC делит площадь фигуры F пополам.

В.Произволов

Публикацию подготовили
С.Дориченко, Л.Медников, А.Шаповалов

ИНФОРМАЦИЯ

Малый мехмат МГУ

Малый механико-математический факультет (МММФ) — школа юных математиков при механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова – работает более 30 лет. Основные задачи Малого мехмата – углубление знаний по темам школьной программы и расширение математического кругозора за рамки программы средней школы.

Малый мехмат состоит из двух отделений: вечернего и заочного. На вечернем отделении по субботам работают кружки по математике для школьников 1–11 классов из Москвы и Московской области; для учащихся 9–11 классов организованы еще и лекции. В основном на занятиях вечернего отделения рассматривают темы, не входящие в школьную программу, и задачи олимпиадного типа, направленные на развитие логического мышления.

На заочное отделение принимают учащихся из России, стран СНГ и Прибалтики, а также русскоязычных учащихся из стран дальнего зарубежья. В 2011 году заочное отделение Малого мехмата объявляет прием учащихся на 2011/12 учебный год в 8–10 классы.

Обучение на заочном отделении Малого мехмата осуществляется по переписке: школьники выполняют задания по высылаемым им методическим разработкам и отправляют свои решения для проверки. Преподаватели, проверяющие работы, указывают на ошибки в рассуждениях или вычислениях и дают указания, помогающие школьникам самостоятельно исправить эти ошибки. После проверки работы отсылаются обратно. Методические разработки заочного отделения содержат необходимый для изучения данной темы теоретический материал и решения типовых задач, а также задачи для самостоятельного решения.

На заочном отделении существует возможность обучения нескольких учеников из одной школы по форме «Коллективный ученик». Группа работает под руководством своего школьного преподавателя и может включать не более 15 учащихся из одной параллели (если учащихся, желающих заниматься, больше, то можно сформировать несколько групп). Как правило, группы изучают материалы методических разработок во время факультативных (кружковых) занятий. Группа «Коллективный ученик» обучается как *один учащийся*, т.е. оформляет по каждому заданию одну работу.

Школьники, прошедшие полный курс обучения (трех- или четырехлетний) и успешно закончившие обучение на заочном отделении (с итоговой оценкой «хорошо» или «отлично»), получают свидетельства об окончании Малого мехмата. Школьники, прошедшие неполный курс обучения или закончившие заочное отделение с оценкой «удовлетворительно», получают справки об окончании Малого мехмата.

Обучение на заочном отделении *бесплатное*, за исключением почтовых расходов (если таковые имеются).

Условия приема

Зачисление индивидуальных учеников производится *на конкурсной основе* по результатам выполнения приведенной ниже вступительной работы.

Ученики, желающие поступить на заочное отделение Малого мехмата, должны *не позднее 30 апреля 2011 года* выслать в наш адрес письмом или по электронной почте решения задач вступительной работы. Для разных классов предусмотрены задачи с разными номерами, но при этом они не обязательно должны быть решены все. Вступительную работу необходимо выполнить в школьной тетради в клетку. Записывать решения в тетрадь следует в том же порядке, в каком задачи идут во вступительной работе. На обложку тетради следует наклеить лист бумаги со следующими данными:

1. Фамилия, имя, отчество учащегося
2. Класс (*в 2011/12 учебном году*)
3. Полный домашний адрес *с указанием почтового индекса*
4. Адрес электронной почты (если он у вас есть)
5. Телефон (с кодом города)
6. Источник, из которого вы узнали о наборе на заочное отделение

Вступительные работы обратно не высылаются.

Группам «Коллективный ученик» *не нужно* выполнять вступительную работу, необходимо лишь *не позднее 15 сентября 2011 года* выслать письмом или по электронной почте следующие данные:

1. Фамилия, имя, отчество руководителя группы
2. Фамилии, имена, отчества учащихся (не более 15 человек)
3. Класс (*в 2011/12 учебном году*)
4. Полный адрес руководителя группы (по которому будут высылаться задания) *с указанием почтового индекса*
5. Адрес электронной почты (если он есть)
6. Телефон (с кодом города)
7. Источник, из которого вы узнали о наборе на заочное отделение

Наш адрес: 119991 Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, мехмат, ММФ

Телефон: (495) 939–39–43

Электронная почта:

zaoch.mmmf@gmail.com (для вступительных работ)

zaoch.questionsf@gmail.com (для вопросов)

Сайт: http://mmmf.math.msu.su

Вступительная работа

После каждой задачи в скобках указаны классы, для поступления в которые предназначена эта задача.

1 (8). К приходу подружек Юля испекла круглый торт. Но она не знает, сколько подружек придет в гости – две или три. Она хочет заранее разрезать торт на куски так, чтобы независимо от того, сколько придет подружек, можно было разделить весь торт поровну на всех (включая Юлю), причем дополнительных разрезов делать не придется. Каково минимальное число кусков, на которое придется разрезать торт?

2 (8). Даны семь чисел. Сумма любых трех из них равна нулю. Найдите эти числа.

3 (8). Илья Муромец, Алеша Попович, Добрыня Никитич и Микула Селянинович поразили стрелами несколько Змеев Горынычей. В каждого из змеев попало ровно по три стрелы, причем это были стрелы разных богатырей. Больше всего попаданий – шесть – было у Ильи Муромца, а меньше всего – три – у Алеши Поповича. Сколько змеев было подстрелено?

4 (8–10). Среди жителей города 85% знают русский язык, 80% – украинский, а 10% – не знают ни того, ни другого языка. Сколько процентов жителей знают оба языка?

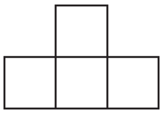
5 (8–10). Сколькими нулями оканчивается число $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 125$?

6 (8–10). Можно ли разрезать произвольный треугольник на четыре треугольника, любые два из которых не имеют общих сторон (но, возможно, имеют общие участки сторон)?

7 (8–10). Докажите, что если $q = p - 1$, то

$$\left(p^{16}+q^{16}\right)\left(p^{8}+q^{8}\right)\left(p^{4}+q^{4}\right)\left(p^{2}+q^{2}\right)(p+q)=p^{32}-q^{32}.$$

8 (8–10). Таблица 20×20 клеток заполнена числами так, что в каждых четырех клетках, которые можно покрыть фигурой, изображенной на рисунке (фигуру можно поворачивать), сумма чисел равна 100. Найдите все числа, заполняющие таблицу.



9 (9–10). Три хорды окружности пересекаются в одной точке, причем две из них делятся этой точкой пополам. В каком отношении делится третья хорда и почему?

10 (9–10). Изобразите на координатной плоскости линию, заданную уравнением $|x-y|+|x+y|=2$. Определите длину этой линии.

11 (9–10). Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M так, что треугольник AMD равносторонний. Найдите величину угла AMB.

12 (9–10). На арену цирка, имеющую форму круга радиуса 7 м, выбежали 7 клоунов. Обязательно ли расстояние между какими-нибудь двумя из них не превосходит 7 м?

13 (9–10). Решите систему

$$\begin{cases} xy + yz = 2009, \\ yz + zx = 2010, \\ xy + zx = 2011. \end{cases}$$

* * *

Почему расходится гармонический ряд?

Пусть гармонический ряд сходится и x – его сумма:

$$x = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n + \ldots$$

Тогда сумма членов с четными номерами равна $x/2$, так как

$$1/2 + 1/4 + 1/6 + \ldots + 1/(2n) + \ldots = 1/2\,(1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n + \ldots) = x/2.$$

Значит, и сумма остальных членов (с нечетными номерами) тоже равна $x/2$. Поэтому

$$1 + 1/3 + 1/5 + \ldots = 1/2 + 1/4 + 1/6 + \ldots$$

Но $1 > 1/2$, $1/3 > 1/4$, $1/5 > 1/6, \ldots$, и, складывая неравенства, получаем

$$1 + 1/3 + 1/5 + \ldots > 1/2 + 1/4 + 1/6 + \ldots$$

Противоречие. Следовательно, гармонический ряд расходится.

Интересно, что ряд $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - \ldots$ сходится и его сумма равна ln2. Докажем это аналогичным способом:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots - 1/(2n)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + 1/2 + \ldots + 1/(2n) - 2\left(1/2 + 1/4 + \ldots + 1/(2n)\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + 1/2 + \ldots + 1/(2n) - \left(1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1/(n+1) + 1/(n+2) + \ldots + 1/(2n)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_n^{2n} 1/x\,dx = \lim_{n\to\infty}(\ln 2n - \ln n) = \lim_{n\to\infty}\ln 2 = \ln 2.$$

А.Канель