Минималистские задачи

С.БЕЛЯЕВ

Дано – ничего, найти – все, всем, чем можно, – пренебречь.

Обобщенная формулировка качественной задачи по физике

КАЧЕСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ В ФИЗИКЕ ДАВНО И ВПОЛНЕ заслуженно пользуются популярностью. Именно они дают мощный эмоциональный заряд – почти из ничего, из минимального набора начальных данных (а порой и вообще без них) получаются глубокие и подчас неочевидные выводы. Приведем несколько примеров.

Задача 1. *На край абсолютно гладкого и абсолютно плоского стола положили абсолютно гладкий шарик. Трения нет, сопротивления воздуха нет. Определите, будет ли двигаться шарик, и если да, то как.*

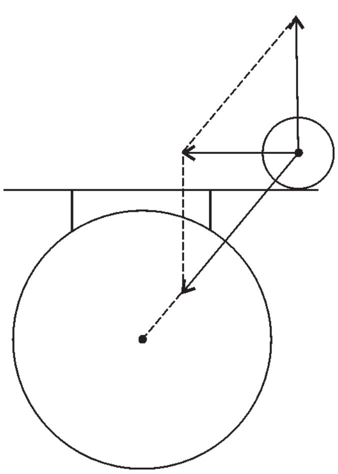

Рис. 1

Решение. Стандартный рисунок заставляет сделать вывод, что сила тяжести компенсируется силой реакции опоры и равнодействующая равна нулю, т.е. шарик будет оставаться в положении равновесия. Однако, если сделать рисунок, на котором размеры стола соизмеримы с размерами Земли (рис.1), то становится понятно, что в нашей ситуации равнодействующая не равна нулю. Таким образом, на шарик действует сила, которая имеет составляющую, направленную к центру стола. Под действием этой силы шарик начнет колебательные движения с амплитудой, равной половине ширины стола.

Подчеркнем, что в задаче идет речь об идеальных условиях: трения нет и Земля абсолютно круглая и однородная. Реально же этот эффект не может наблюдаться именно потому, что из-за малых размеров стола по сравнению с земным шаром сила тяжести образует такой малый угол с перпендикуляром к поверхности стола, что мы просто не сможем уменьшить трение настолько, чтобы шарик покатился.

Понятно также, что количество подробностей, как всегда, неисчерпаемо. Если уж учитывать размер Земли по сравнению с размером стола, то нужно еще учитывать неоднородность поля силы тяжести, неровности поверхности Земли, приливы и отливы (они тоже меняют местоположение центра тяжести Земли, а значит, и направление ускорения свободного падения). Однако качественные задачи для того и даются, чтобы научиться абстрагироваться от несущественных подробностей и видеть те основные законы и явления, которые работают в данной задаче. Эта задача показывает, сколь далеки идеальные условия, рассматриваемые в большинстве задач, от условий реально наблюдаемых.

Задача 2. *Как известно, летом железнодорожный рельс немного длиннее, чем зимой, что является следствием теплового расширения металла. Именно поэтому между рельсами оставляют небольшой зазор. Однако представим, что два рельса длиной по 1 км приставлены в стык и закреплены только по краям. Пусть летом длина каждого рельса увеличилась на 1 м и в середине рельсы встали «домиком», образуя равнобедренный треугольник (основание 2 км, боковая сторона 1 км и 1 м). Оцените, какова высота этого равнобедренного треугольника.*

Решение. Обычно на этот вопрос дается сильно заниженный ответ «на глаз». Прямой подсчет по теореме Пифагора дает совершенно фантастический ответ: $\sqrt{1001^2 - 1000^2} = \sqrt{2001} \approx 44{,}7$ метра!

* * *

В школьной геометрии тоже есть ряд задач, отличающихся минимальным количеством данных, в которых требуется найти то, что на первый взгляд и найти-то невозможно. Именно это роднит такие задачи с качественными задачами по физике. Вниманию читателя предлагается коллекция задач с минимальными условиями, из которых можно найти довольно много. И чем меньше дано в условии и чем больше получается в результате, тем красивее и изящнее задача. Ясно, что решение таких задач всегда будет связано либо со знанием некоторых замечательных фактов, либо с изобретательностью решающего.

Задача 3. *Представим себе, что земной шар плотно обтянут по экватору веревкой. Предположим, что длину этой веревки увеличили на 1 метр и расположили так, что она всюду одинаково отстоит от Земли. Может ли в образовавшийся зазор пролезть мышь?*

Решение. Это – хорошо известная задача с совершенно ошеломляющим ответом. Причем ответ настольно неожидан, что, даже когда его уже знаешь, – не веришь.

Подсчет не представляет трудностей: пусть R – радиус Земли, тогда начальная длина веревки $2\pi R$. Радиус R_0 окружности, длина которой на 1 метр больше, находится из уравнения $2\pi R_0 = 2\pi R + 1$, т.е. $R_0 = R + 1/(2\pi)$. Откуда величина возникающего зазора равна $R_0 - R = 1/(2\pi) \approx 16$ см. Так что в такую щель вполне может проскочить мышь. Однако важно не это – удивительно, что ответ не зависит от радиуса Земли! Другими словами, тот же результат получится на Луне, на Марсе и, во что уже совсем поверить невозможно, на футбольном мяче. Из полученного результата вытекает, что если футбольный мяч обтянуть веревкой по экватору и затем увеличить ее длину на 1 метр, то зазор, будучи равномерно распределенным по экватору, будет точно такой же – 16 см!

Задача 4. *К двум пересекающимся окружностям проведена общая касательная. Через точки касания и точку пересечения проведена окружность. Найдите ее радиус, если радиусы исходных окружностей равны R и r.*

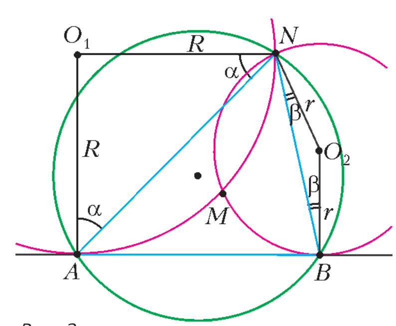

Рис. 2

Решение. Пусть AB – общая касательная к пересекающимся в точках M и N окружностям с центрами O_1 и O_2 (рис.2). Удивительно, что ответ не зависит от того, будем мы рассматривать треугольник ABM или треугольник ABN – радиусы их описанных окружностей равны!

Пусть $\angle O_1AN = \alpha$, $\angle O_2BN = \beta$, ρ – радиус окружности, описанной около треугольника ABN. Тогда $AN = 2R\cos\alpha$, $BN = 2r\cos\beta$. По теореме синусов для треугольника ABN имеем $\rho = \dfrac{BN}{2\sin\angle A}$, а также $\rho = \dfrac{AN}{2\sin\angle B}$. Так как в треугольнике ABN $\angle A = 90^\circ - \alpha$, $\angle B = 90^\circ - \beta$, то $\rho = \dfrac{2R\cos\alpha}{2\cos\beta} = R\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ и $\rho = \dfrac{2r\cos\beta}{2\cos\alpha} = r\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$, откуда $\rho^2 = Rr$, или $\rho = \sqrt{Rr}$.

Более того, совсем уж неправдоподобно, что ответ не будет зависеть от расстояния между центрами окружностей, что и делает эту задачу минималистской.

Задача 5. *В треугольники ABC и CDA (точки B и D расположены по одну сторону от CA) вписаны окружности. Найдите длину общей внешней касательной к этим окружностям, если:*

а) AB = 5, BC = 7, CD = DA; б) AB = 7, BC = CD, DA = 9.

Решение. а) Как известно, существует формула для вычисления длины d общей внешней касательной к двум окружностям радиусов R и r, расстояние между центрами которых равно a: $d = \sqrt{a^2 - (R-r)^2}$. Однако ясно, что в задаче дано столь мало, что не представляется возможным найти все эти величины. Тем не менее, искомую длину найти все же можно. Для этого понадобится лишь следующий факт: если p – полупериметр треугольника ABC и $BC = a$, то длина касательной из вершины A к вписанной окружности равна $p - a$.

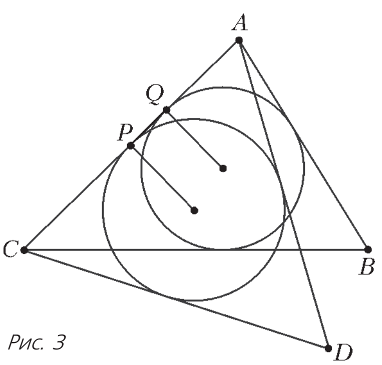

Рис. 3

Упражнение 1. Докажите это.

Пусть p_1 и p_2 – полупериметры треугольников ABC и ACD соответственно, тогда (рис.3)

$$PQ = |AP - AQ| = |(p_2 - CD) - (p_1 - BC)| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|(AC + \cancel{AD} - \cancel{CD}) - (AC + AB - BC)\right| = \frac{1}{2}|BC - AB| = 1.$$

б) Этот пункт решается аналогично:

$$PQ = |AP - AQ| = |(p_2 - CD) - (p_1 - BC)| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|(AC + AD - \cancel{CD}) - (AC + AB - \cancel{BC})\right| = \frac{1}{2}|AD - AB| = 1.$$

Задача 6. *Точки A, B и C расположены на одной прямой. Через точку B проходит некоторая прямая. Пусть M – произвольная точка на этой прямой. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников MAB и MBC, если $AC = a$, $\angle MBC = \alpha$.*

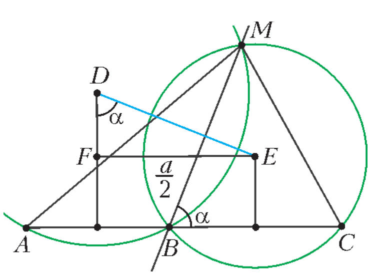

Рис. 4

Решение. Центры D и E данных окружностей проектируются в середины отрезков AB и BC (рис.4). Расстояние между этими проекциями равно $AC/2 = a/2$. Углы EDF и MBC равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Из треугольника DEF имеем

$$DE = \frac{a}{2\sin\alpha}.$$

Задача 7. *На гипотенузе прямоугольного треугольника во внешнюю сторону построен квадрат и проведен отрезок, соединяющий вершину прямого угла с центром квадрата. Найдите углы между этим отрезком и катетами. Найдите также длину этого отрезка, если сумма катетов равна d.*

Решение. Эта задача – прекрасная иллюстрация метода вспомогательной окружности. В самом деле, так как углы ACB и AFB – прямые (F – центр квадрата; рис. 5,*а*), то они опираются на диаметр AB окружности, описанной около треугольника ABC. Но тогда $\angle BCF = \angle BAF = 45^\circ$ как опирающиеся на одну и ту же дугу.

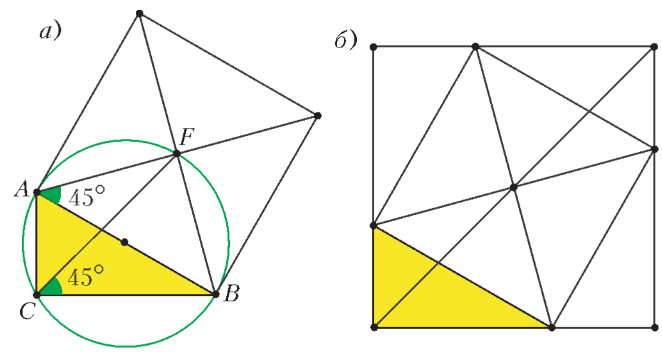

Рис. 5

Длину отрезка CF легко найти, если заметить, что данные треугольник и квадрат порождают квадрат, стороны которого содержат вершины данного квадрата, причем центры обоих квадратов совпадают (рис. 5,*б*). Следовательно, удвоенная длина отрезка CF равна диагонали большого квадрата, сторона которого равна сумме катетов исходного прямоугольного треугольника. Окончательно,

$$CF = \frac{1}{2}d\sqrt{2} = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

Задача 8. *На плоскости проведены прямая и окружность с центром на этой прямой. Только с помощью одной линейки опустите перпендикуляр к данной прямой из точки, не лежащей на данной окружности и данной прямой.*

Решение. *Построение.* Несмотря на то, что существует три способа расположить точку D, из которой будет опущен перпендикуляр к прямой AB (AB – диаметр данной окружности; рис.6), все построения аналогичны. Эти случаи таковы: треугольник ABD остроугольный, точка D лежит вне круга, ограниченного данной окружностью; треугольник ABD тупоугольный, точка D лежит вне круга; точка D лежит внутри круга. Опишем все построения сразу (последовательность построения показана на всех рисунках цифрами).

1. Строим точку E – точку пересечения прямой AD с окружностью.
2. Строим точку F – точку пересечения прямой BD с окружностью.
3. Строим прямую AF.
4. Строим прямую BE. Пусть H – точка пересечения прямых AF и BE.
5. Строим прямую DH – она и есть искомый перпендикуляр.

Доказательство. Углы AEB и AFB – прямые, так как опираются на диаметр AB, следовательно, H – ортоцентр

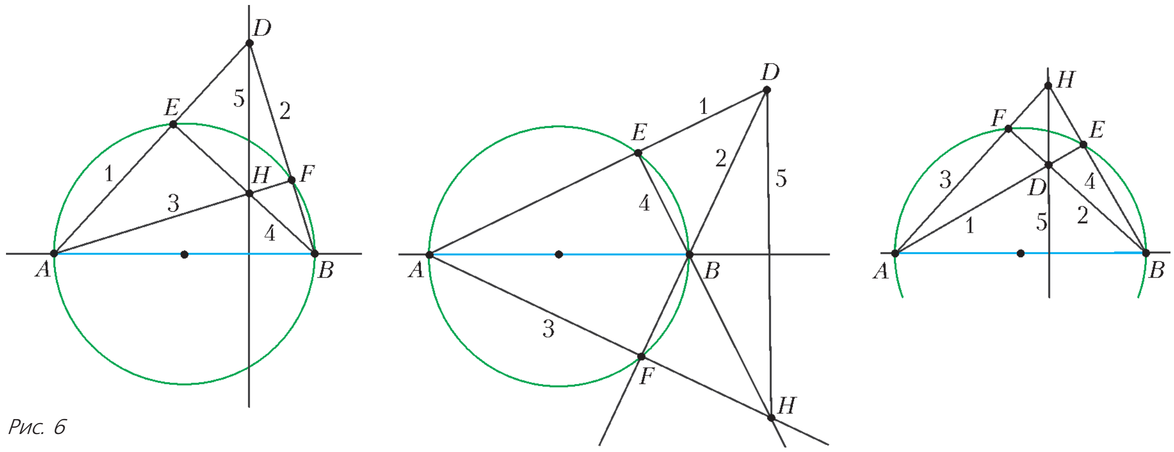

Рис. 6

треугольника ABD. Значит, прямая DH – высота этого треугольника, т.е. $DH \perp AB$.

Задача 9. *Пусть R и r – радиусы описанной и вписанной окружностей некоторого треугольника. Докажите, что $R \geq 2r$. Найдите аналогичное неравенство в стереометрии.*

Решение. Эта задача легко решается с использованием формулы Эйлера для расстояния d между центрами вписанной и описанной окружностей (радиусы которых равны r и R соответственно): $d^2 = R^2 - 2Rr = R(R - 2r)$. Откуда непосредственно следует требуемое неравенство. Однако его можно получить и без применения формулы Эйлера.

В самом деле, из всех окружностей, пересекающих все стороны треугольника, наименьший радиус имеет вписанная окружность. Известно, что радиус окружности, проходящей через середины сторон треугольника (окружность 9 точек), равен $R/2$. Значит, $R/2 \geq r$, т.е. $R \geq 2r$, что и требовалось доказать.

Аналогом формулы Эйлера в пространстве является формула Дюранда: $d^2 = (R - r)(R - 3r)$, где d – расстояние между центрами вписанной и описанной сфер (радиусы которых равны r и R) *правильной* треугольной пирамиды. Из нее непосредственно следует, что $R \geq 3r$. Однако можно не пользоваться столь экзотической формулой и предложить доказательство неравенства $R \geq 3r$ не только для правильной треугольной пирамиды, но и для произвольного тетраэдра.

В самом деле, из всех сфер, пересекающих все грани тетраэдра, наименьший радиус имеет вписанная сфера. Известно, что радиус сферы, проходящей через точки пересечения медиан граней тетраэдра, равен $R/3$. Значит, $R/3 \geq r$, т.е. $R \geq 3r$, что и требовалось доказать.

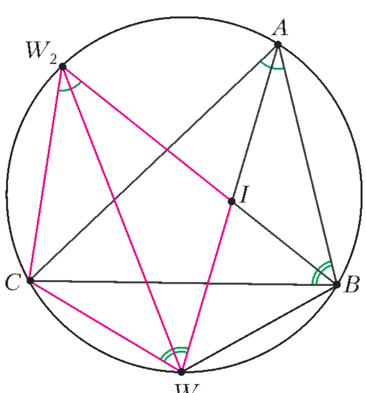

Рис. 7

Упражнения

2. Докажите формулу Дюранда.

3. Рассмотрите рисунок 7 (I – центр вписанной окружности треугольника ABC). Найдите на нем равные треугольники CW_1W_2 и IW_1W_2. Докажите теорему трилистника: $CW_1 = IW_1 = BW_1$.

4. Рассмотрите рисунок 8. Почему равны треугольники CHH_1 и CN_1H_1? Докажите, что точка, симметричная ортоцентру относительно стороны треугольника, лежит на описанной окружности.

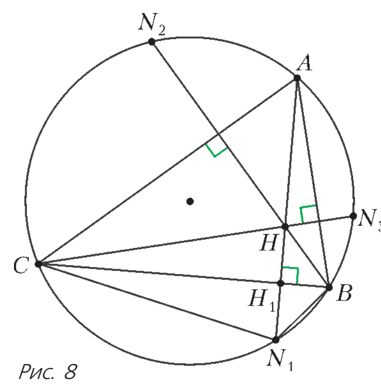

Рис. 8

Задача 10. *Ортоцентр равнобедренного треугольника лежит на его вписанной окружности. Найдите углы треугольника.*

Решение. Эта задача – одно из самых изящных применений теоремы трилистника: $CW = IW = BW$, где I – центр вписанной окружности треугольника ABC, W – точка пересечения биссектрисы AI с описанной окружностью (рис.9). Кроме того, при решении нам понадобится тот факт, что точка, симметричная ортоцентру относительно стороны треугольника, лежит на описанной окружности.

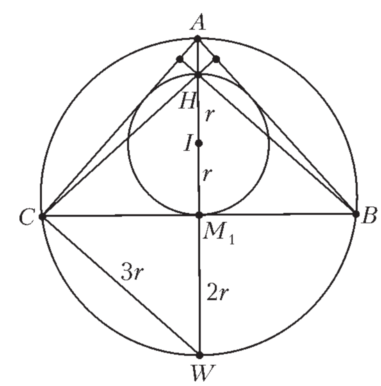

Рис. 9

Пусть M_1 – середина BC. Из условия задачи вытекает, что $HM_1 = 2r$, где r – радиус вписанной окружности. Кроме того, точкой, симметричной точке H относительно стороны BC, будет точка W. Следовательно, $M_1W = HM_1 = 2r$. Вместе с тем, инцентр I – середина отрезка HM_1, т.е. $IW = 3r$. По теореме трилистника $CW = IW = 3r$. Так как треугольник равнобедренный, то угол B равен углу C, а $\angle CBA = \angle CWM_1$ как опирающиеся на одну дугу. Из треугольника CWM_1 имеем

$$\cos \angle CWM_1 = \frac{2r}{3r} = \frac{2}{3} = \cos \angle B = \cos \angle C.$$

Итак, $\angle B = \angle C = \arccos \frac{2}{3}$, $\angle A = 180° - 2 \arccos \frac{2}{3}$.

Задача 11. Пусть *H – ортоцентр треугольника ABC. Найдите угол C, если $CH = AB$.*

Решение. Эта задача допускает даже два способа решения, и каждый из них по своему изящен.

Первый способ (геометрический). Так как $AB = CH$, то окружности, построенные на этих отрезках как на диаметрах, равны (рис.10). Точки M и N их пересечения – это

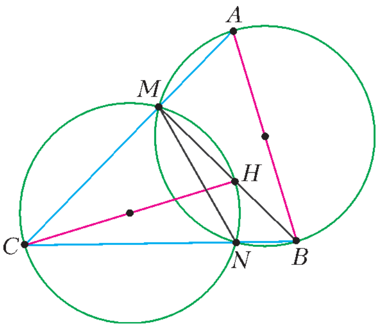

Рис. 10

точки, из которых рассматриваемые отрезки видны под прямым углом. Ясно, что это основания высот треугольника, проведенных из вершин A и B. Основное соображение: общая хорда MN двух равных окружностей видна из точек этих окружностей под одним и тем же углом.

Следовательно, $\angle MCN = \angle MBN$, т.е. треугольник MCB прямоугольный и равнобедренный, значит, $\angle C = 45°$.

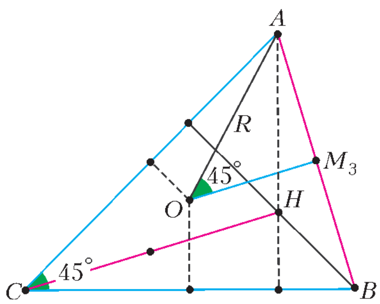

Рис. 11

Второй способ (формульно-геометрический). Пусть O (рис.11) – центр описанной окружности треугольника ABC. Тогда $\angle AOB = 2\angle C$ – центральный угол. Следовательно, $\angle AOM_3 = \angle C$, где M_3 – середина стороны AB. По формуле $CH = 2OM_3 = AB \operatorname{ctg} \angle C$ находим $\operatorname{ctg} \angle C = \frac{CH}{AB} = 1$, откуда $\angle C = 45°$.

Задача 12. *Ортоцентр H, инцентр I, а также вершины A и B треугольника ABC лежат на одной окружности. Найдите угол C.*

Решение. Воспользуемся тем, что $\angle AIB = 90° + \frac{\angle C}{2}$, а $\angle AHB = 180° - \angle C$ (рис.12), тогда имеем

$$90° + \frac{\angle C}{2} = 180° - \angle C,$$

откуда $\angle C = 60°$.

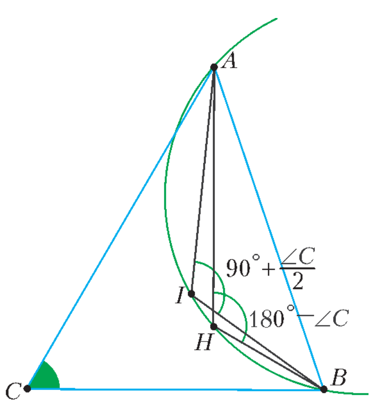

Рис. 12

Упражнение 5. Докажите, что $\angle AIB = 90° + \frac{\angle C}{2}$.

Задача 13. *Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AC и BC в точках K_2 и K_1 соответственно. Биссектриса угла B пересекает K_1K_2 в точке K. Найдите угол AKB.*

Решение. Из рисунка 13 получается

$$\angle KK_1B = 180° - \angle KK_1C = 180° - \left(90° - \frac{\angle C}{2}\right) = 90° + \frac{\angle C}{2},$$

$$\angle BKK_1 = 180° - \frac{\angle B}{2} - \left(90° + \frac{\angle C}{2}\right) = 90° - \frac{\angle B + \angle C}{2} =$$

$$= 90° - \frac{180° - \angle A}{2} = \frac{\angle A}{2}.$$

Значит, $\angle K_2KB = 180° - \frac{\angle A}{2}$, следовательно, $\angle K_2KB + \angle K_2AI = 180°$, т.е. четыре точки I, K, K_2 и A лежат на одной окружности. В этой окружности угол IK_2A – прямой

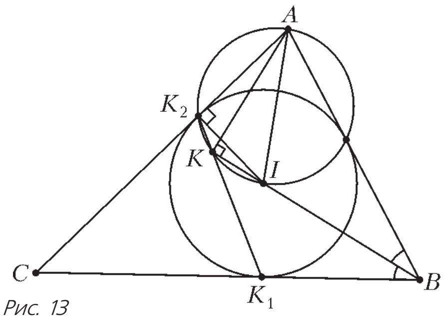

Рис. 13

(угол между касательной и радиусом, проведенным в точку касания), следовательно, угол AKI – тоже прямой.

Задача 14. *Имеется изображение (параллельная проекция на некоторую плоскость) треугольника и центра описанной около него окружности. Постройте изображение ортоцентра этого треугольника.*

Решение. Пусть на некоторой плоскости в пространстве изображен треугольник ABC и его центр описанной окружности O (рис.14). Соединив точку O с серединой M_1 стороны BC, мы получим изображение отрезка OM_1, про который известно, что $AH = 2OM_1$, где H – ортоцентр треугольника ABC. Так как при проектировании сохраняются параллельность и отношение отрезков, то для построения изображения точки H достаточно через точку A провести прямую, параллельную OM_1, и на этой прямой отложить отрезок AH, вдвое больший OM_1.

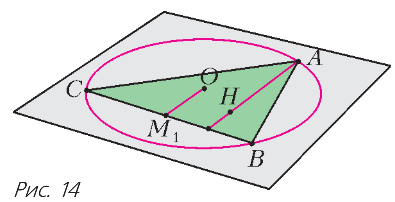

Рис. 14

Задача 15. *Центр первой сферы радиуса R расположен на поверхности второй сферы. Известно, что эти сферы пересекаются. Найдите площадь части второй сферы, расположенной внутри первой.*

Решение. Площадь сферического сегмента высоты h вычисляется по формуле $S = 2\pi R_0 h$, где R_0 – радиус сферы. Пусть центр первой сферы находится в точке A поверхности второй сферы и пусть AB – диаметр второй сферы, C – некоторая точка на линии пересечения сфер (рис.15). Треугольник ABC – прямоугольный, так как $AB = 2R_0$ – диаметр. Тогда высота h искомого сферического сегмента в этом треугольнике является проекцией катета $AC = R$ на гипотенузу. Пользуясь известным соотношением в прямоугольном треугольнике, получаем $R^2 = 2R_0 h$. Откуда площадь сферического сегмента равна $S = \pi R^2$. Удивительно, что ответ не зависит от радиуса второй сферы!

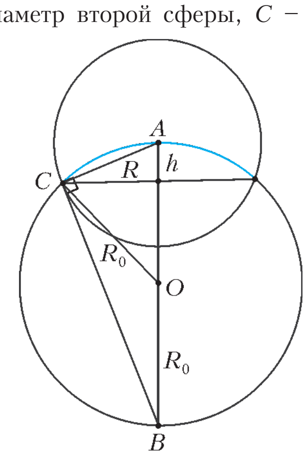

Рис. 15

Задача 16. *а) Даны две концентрические окружности. Найдите площадь образованного ими кольца, если хорда большей окружности, касающаяся меньшей, равна a.*

б) Окружности оснований цилиндра, высота которого равна h, расположены на поверхности сферы. Найдите объем части шара, ограниченной сферой и боковой поверхностью цилиндра.

Решение. а) Площадь кольца подсчитывается по формуле $S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi\left(R^2 - r^2\right)$. При этом разность квадратов

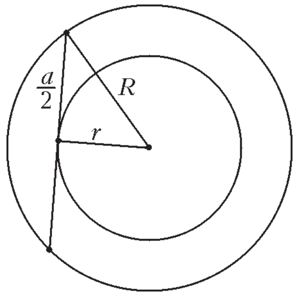

Рис. 16

радиусов окружностей может быть найдена из прямоугольного треугольника (рис. 16): $R^2 - r^2 = a^2/4$, следовательно, $S = \frac{\pi a^2}{4}$.

Безусловно, приятно, что площадь кольца не зависит от радиусов кругов, однако стереометрический аналог этой задачи потрясает окончательно!

б) Разумеется, в стереометрической задаче можно было бы тоже написать теорему Пифагора (один или несколько раз), составить систему из нескольких уравнений с несколькими неизвестными, решить ее. В результате многое сократится и не войдет в окончательный красивый ответ $V = \frac{\pi h^3}{6}$, вид которого должен навести на мысль, что существует и простое решение.

Замечание. Самое простое, можно даже сказать вероломное, «решение» таково. Так как ответ не зависит ни от радиуса шара, ни от радиуса цилиндра, а зависит только от его высоты, то объем искомого тела не изменится, если мы стянем цилиндр в отрезок, уменьшая его радиус до нуля. При этом диаметр шара станет равным h, и этот шар будет иметь тот же объем, что и искомое тело. Ответ: $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{\pi h^3}{6}$.

Упражнение 6. Найдите как можно больше ошибок в этом «решении».

Разумеется, существует не очень сложное и вместе с тем изящное решение. Для поиска требуемого объема воспользуемся **принципом Кавальери:**

Если два тела можно так расположить в пространстве, что любая плоскость, параллельная заданной плоскости, пересекает эти тела по фигурам, имеющим одинаковые площади, то эти тела имеют одинаковые объемы.

Будем пересекать сферу и цилиндр плоскостями, параллельными плоскостям оснований цилиндра (рис.17,*а*). Тогда

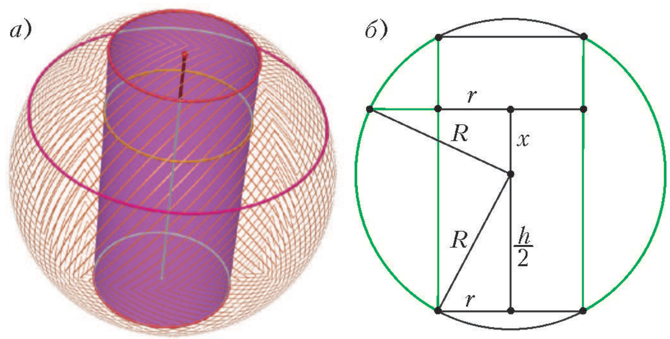

Рис. 17

сечением искомого тела каждой из таких плоскостей является кольцо (или точка). Для поиска его площади найдем его внешний радиус (внутренний радиус равен r – радиусу цилиндра). Рассмотрим плоскость осевого сечения цилиндра (рис.17,*б*). Пусть след секущей плоскости на рассматриваемой плоскости расположен на расстоянии x от центра сферы $\left(x \in \left[-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}\right]\right)$. Тогда внешний радиус кольца сечения равен $\sqrt{R^2 - x^2}$. Площадь кольца равна

$$S = \pi\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 - \pi r^2 = \pi\left(R^2 - x^2 - r^2\right).$$

Заметим теперь, что именно такую площадь будет иметь сечение шара радиуса $\sqrt{R^2 - r^2} = \frac{h}{2}$ плоскостью, проходящей на расстоянии x от центра этого шара. По принципу Кавальери, объем искомого тела равен объему этого шара, т.е. $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{\pi h^3}{6}$.

Итак, если в деревянном шаре сделать цилиндрический пропил с осью, проходящей через центр шара, то объем полученного тела не зависит ни от радиуса исходного шара, ни от радиуса пропила, а зависит только от его длины! Именно поэтому размер золотого кольца в ювелирном магазине может быть увеличен *без* добавления драгоценного металла. Объем кольца зависит только от «длины пропила» в нем, но не от размера кольца!

Задача 17. *Одному пирату было известно, что в местности, где зарыт клад, растут только три дерева: дуб, сосна и береза. Кроме того, пирату было известно, как найти этот клад. Прежде всего надо стать под березой лицом к прямой линии, соединяющей дуб и сосну. (На рисунке 18 все деревья обозначены первыми буквами их названий.) При этом дуб должен оказаться справа, а сосна слева. Потом нужно пойти к дубу, считая шаги, а дойдя до дуба, повернуть под прямым углом направо и пройти столько же шагов, сколько уже пройдено от березы до дуба. В этом месте нужно вбить в землю колышек (точка K_1 на рисунке). Потом нужно вернуться к березе и пойти от нее к сосне, снова считая шаги. Дойдя до сосны, нужно повернуть под прямым углом налево и пройти столько же шагов, сколько было пройдено от березы до сосны. В этом месте нужно вбить в землю второй колышек (точка K_2 на рисунке). Клад зарыт посередине между колышками (точка K на рисунке).*

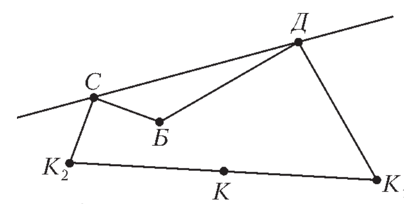

Рис. 18

Пират был уверен, что без труда найдет клад по столь подробной инструкции. Но когда он приехал в эту местность, то обнаружил там только дуб и сосну. Береза бесследно исчезла. Однако пират все же нашел клад. Как ему это удалось?

Решение. Понятно, что пират не стал бы долго думать и рассуждал бы примерно так: «Если бы береза была здесь, то клад был бы здесь, а если бы береза была тут, то клад был бы там». И вдруг! О чудо! Он бы заметил, что местоположение клада не зависит от местоположения березы! Ясно, что он тут же взял бы в руки лопату и занялся кладом, отложив доказательство до лучших времен.

Оставим в этом захватывающем месте нашего удачливого кладоискателя и заинтересуемся именно доказательством описанного факта. Это можно сделать по-разному. В упражнении 13 читателю предлагается найти геометрические доказательство, однако сейчас нас будет интересовать кинематический метод, подробно обсуждавшийся в статье «Кинематика в планиметрии» В.Рыжика и Б.Сотниченко в «Кванте» №5 за 2002 год.

Пусть береза $Б$ начала двигаться (ой!) и $\mathbf{v}$ – вектор ее мгновенной скорости. Так как отрезок $ДK_1$ получается из отрезка $ДБ$ поворотом на 90°, то точка K_1 тоже будет двигаться, причем вектор ее скорости $\mathbf{v}_1$ будет получаться из вектора $\mathbf{v}$ поворотом на 90°. Аналогично, вектор $\mathbf{v}_2$ скорости точки K_2 получается из вектора $\mathbf{v}$ поворотом на -90°. Значит, $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2$. Следовательно, точка K как середина отрезка K_1K_2 имеет скорость $\frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$, т.е. эта точка неподвижна. Итак, при произвольном движении точки $Б$ точка K остается неподвижной. Значит, положение клада не зависит от положения березы!

Упражнения

7. На плоскости изображена дуга AB окружности и указан ее центр. Только с помощью циркуля разделите дугу AB пополам.

8. В задаче о веревке, обтягивающей земной шар по экватору, «оттянем» веревку в одном месте как можно дальше. Может ли в образовавшийся зазор пройти слон?

9. Центр сферы α лежит на поверхности сферы β. Отношение части поверхности сферы β, лежащей внутри сферы α, ко всей поверхности сферы α равно $1/5$. Найдите отношение радиусов сфер α и β.

10. Определите полную поверхность призмы, описанной около сферы, если площадь ее основания равна S.

11. На главной диагонали AC_1 и на диагонали BA_1 боковой грани ABB_1A_1 единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположены два отрезка MN и PQ длины $1/2$. Найдите объем тетраэдра $MNPQ$.

12. Найдите объем общей части n одинаковых бесконечных цилиндров радиусом r, оси которых расположены в одной плоскости, проходят через одну точку, причем угол между двумя соседними равен π/n.

13. Найдите геометрическое доказательство задачи о пирате.

14. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно середин его сторон, лежат на описанной окружности. Сравните этот результат с упражнением 4.