

ИЮЛЬ/АВГУСТ

ISSN 0130-2221  
2010 · №4

# КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ







## СВЕТОФОР



В этой простой на вид головоломке нужно отцепить палочку с продетой сквозь нее петлей от дощечки с тремя отверстиями. Но сделать это не так легко, как кажется: палочка длинная, а петля короткая. Смастерить головоломку можно в домашних условиях, важно лишь сохранять пропорции деталей, как на рисунках. Так, дырки должны быть достаточно большими, чтобы сквозь них одновременно проходили палочка и петля.

Рассказывают, что автор головоломки Ламберт Брайт узнал о ней от простого американского фермера, который любил ставить своих знакомых в тупик, давая им эту задачку. Брайт немного изменил форму деревянных деталей, так что конструкция стала похожа на светофор. Под этим названием он и представил ее на 20-м съезде любителей головоломок в 2000 году.

*Е.Епифанов*



журнал©  
**Квант** ИЮЛЬ 2010 №4  
АВГУСТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



Учредитель —  
Российская академия наук  
Издатель —  
ООО НПП ОО «Бюро Квантум»

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**В.В.Козлов**

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

**С.С.Кротов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**А.А.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,  
А.Н.Виленкин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин,  
Н.П.Долбиллин (заместитель главного  
редактора), В.Н.Дубровский,  
А.А.Егоров, А.В.Жуков,  
А.Р.Зильберман, П.А.Кожевников,  
С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,  
В.В.Произволов, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский,  
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров,  
В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,  
А.И.Черноуцан (заместитель главного  
редактора)**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,  
В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,  
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков,  
Л.Д.Фаддеев**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**И.К.Кикоин**

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

**А.Н.Колмогоров**

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,  
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,  
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,  
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,  
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,  
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,  
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант,  
Я.Е.Шнайдер**

Товарный знак «Журнал «Квант»  
является собственностью  
ООО НПП ОО «Бюро Квантум»  
© 2010, РАН,  
журнал «Квант»

- 4 Два занятия школьного кружка при МГУ. *В.Арнольд*  
11 Метеорологические наблюдения: распределенные в пространстве и во времени (продолжение). *В.Гордин*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 19 Задачи М2184–М2190, Ф2190–Ф2197  
20 Решения задач М2161–М2168, Ф2177–Ф2181

К М Ш

- 27 Задачи  
28 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»  
28 Веревка из паутины. *Д.Багров*  
30 Победители конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8»  
2009/10 учебного года

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 31 Замечательные точки треугольника и тригонометрия.  
*Г.Филипповский*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Квадрирование квадрата

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 36 О плавании одномерных объектов. *М.Давлетшин, В.Соловьев,  
Ф.Стрельников, Е.Юносов*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 39 Долгий путь короля. *Н.Белухов*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 42 Задачи на уравнение моментов сил. *А.Черноуцан*

ОЛИМПИАДЫ

- 47 XXXI Турнир городов  
48 LXXIII Московская математическая олимпиада  
51 Избранные задачи Московской физической олимпиады

- 55 Ответы, указания, решения

Памяти В.И.Арнольда (2)

НА ОБЛОЖКЕ

- I Рисунок *П.И.Чернуского*  
II Коллекция головоломок  
III Шахматная страничка  
IV Прогулки с физикой

## ПАМЯТИ ВЛАДИМИРА ИГОРЕВИЧА АРНОЛЬДА

Невозможно осознать, что никогда больше не доведется увидеть Владимира Игоревича Арнольда, невозможно смиряться с мыслью, что эта трагедия действительно произошла.

Утрата огромна и невозполнима. Наука потеряла ученого широчайшего диапазона. Мир утратил личность необычайной яркости и одаренности. Страна лишилась человека, которым по праву могла гордиться. Ученики и друзья осиротели, оставшись без учителя и верного товарища.

Вся жизнь Владимира Игоревича была восхождением. Детство его было счастливым. Оно прошло в окружении выдающихся личностей. Он родился в Одессе, где в Новороссийском университете у выдающегося математика С.О.Шатуновского учился его отец, ставший замечательным математиком и педагогом – первым доктором педагогических наук в СССР. Четыре поколения его родных были связаны с математикой. Среди близких родственников по отцу было также множество людей, служивших в Черноморском флоте (двоюродными братьями отца были пять адмиралов). Мама В.И.Арнольда была по профессии искусствоведом. Она была племянницей одного из выдающихся физиков нашей страны – Леонида Исааковича Мандельштама, основоположника знаменитой школы, среди учеников которого были И.Е.Тамм, М.А.Леонтович, А.А.Андронов и другие. Общение с ними оказало очень большое влияние на мальчика.

В Москве Арнольды жили в одном из арбатских переулков, в самом центре Москвы, которую мальчик знал, как никто. С самых ранних лет Арнольд стал проявлять необычайную любознательность, распространяющуюся на самые разнообразные области знания. Например, когда ему было семь лет, вооружившись компасом и взяв себе в помощники младшего брата, Арнольд провел «топографическую съемку» Садового кольца, измерив расстояние шагами, обнаружив при этом многие несоответствия с тем, что изображалось на картах Москвы.

Он стал учиться в знаменитой пятьдесят девятой школе, из которой вышло множество выдающихся людей. Владимир Игоревич с большой любовью вспоминал своих учителей, особенно учителя математики Ивана Васильевича Морозкина. Одну из задач, предложенных ему учителем, двенадцатилетний мальчик обдумывал весь день, «и решение, – писал он спустя многие годы, – снизошло на меня, как откровение. Испытанный мною тогда (1949) восторг был в точности тем же, который я испытывал при решении гораздо более серьезных проблем».

Большое влияние на юношу оказало и его участие в домашнем кружке А.А.Ляпунова, носившем название «ДНО» – добровольное научное общество. Там обсуждались самые глубокие проблемы науки. Первые научные выступления мальчика с докладами на этом кружке запомнились глубиной и совершенством изложения трудных научных проблем.

В школьные годы Дима – так звали Арнольда родные и друзья – стал принимать участие в московском математическом кружке и московских математических олимпиадах. Об этом он как-то написал, что там «обычно получал вторую премию (как в свое время Максвелл или Кельвин)».

В 1954 году Арнольд становится студентом механико-математического факультета Московского университета. Это была пора расцвета механико-математического факуль-



**Владимир Игоревич Арнольд**  
(12.06.1937 – 03.06.2010)

тета. «Плеяда великих математиков, собранных на одном факультете, представляла собой явление совершенно исключительное, и мне не приходилось встречать ничего подобного более нигде», – писал впоследствии Владимир Игоревич. При этом им были названы имена А.Н.Колмогорова, И.М.Гельфанда, И.Г.Петровского, Л.С.Понтрягина, П.С.Новикова, А.А.Маркова, А.О.Гельфонда, Л.А.Люстерника, А.Я.Хинчина и П.С.Александрова.

На первом курсе Арнольд принял участие в кружках А.Г.Витушкина и Е.Б.Дынкина, а когда он учился на втором курсе, А.Н.Колмогоров объявил семинар для младшекурсников. На первом заседании, рассказывая о планах семинара, Андрей Николаевич говорил о различных задачах номографии, в которых процессы, задаваемые сложными функциями, приближенно представлялись более простыми. Говоря о дальних перспективах, Колмогоров сказал, что можно помечтать и о том, чтобы найти подходы к решению 13-й проблемы Гильберта. В 1900 году на Парижском математическом конгрессе Давид Гильберт, один из крупнейших математиков всех времен, поставил перед математическим миром задачи, исследование которых представляло, по мнению Гильберта, значение для будущего математической науки. 13-я из них касалась вопроса о том, существуют ли непрерывные функции многих переменных и не сводимы ли они к функциям от двух переменных. Гильберт определенно полагал, что не сводимы.

Вскоре после объявления своего семинара Колмогоров уехал за границу, и семинар некоторое время продолжался без него. В это время Арнольд решил одну из задач, предложенных Колмогоровым, что привело к его первой публикации.

А далее произошло непредвиденное: Андрей Николаевич неожиданно для самого себя с неслыханной энергией стал атаковать 13-ю проблему Гильберта и сделал решительный прорыв в ее опровержении. Он доказал, что непрерывные функции многих переменных можно свести к функциям трех переменных. Последний шаг в решении проблемы Гильберта он предоставил своим последователям. Этим



последователем оказался третьекурсник Арнольд. И в апреле 1957 года на стол Колмогорова легла ученическая тетрадка в клетку, на которой было написано, что это – курсовая работа студента третьего курса В.Арнольда. В этой курсовой работе была решена тринадцатая проблема Гильберта. Это была первая работа Арнольда, сделавшая его имя известным всему математическому миру. А затем началась череда открытий, само перечисление которых заняло бы несколько страниц.

В своей дипломной работе Арнольд далеко развил один колмогоровский метод в теории динамических систем. Дальнейшее развитие этот метод получил в работах выдающегося математика Юргена Мозера. Теория, построенная этими тремя математиками, получила название «КАМ-теории» – теории Колмогорова–Арнольда–Мозера. Она нашла многочисленные приложения к математике, механике, космологии и физике.

Арнольдом были преобразованы целые математические области.

Например – «теория особенностей». В философии с давних времен высказывалась идея о том, что «при переходе количества в качество» эволюционные процессы нередко совершают скачки. На этом во многом строилась «теория революций». Процессы со скачками стали интенсивно изучаться в первой трети двадцатого века. Один из основоположников нового направления – французский математик Рене Том – предложил для него название «теория катастроф». В работах Арнольда эта теория получила выдающееся развитие. Всегда избегающий неоправданной рекламы, В.И.Арнольд называет это направление «теорией особенностей».

Арнольд далеко продвинул особый раздел современной геометрии, так называемую симплектическую геометрию, и заложил новое направление в топологии, получившее фундаментальное развитие, – симплектическую топологию.

Значителен вклад Арнольда в алгебраическую геометрию. Им были установлены связи шестнадцатой проблемы Гильберта об овалах вещественных алгебраических кривых с четырехмерной топологией, связь алгебраической геометрии и теории кос. Владимир Игоревич был выдающимся геометром, он занимался алгеброй и теорией чисел, комбинаторикой, логикой и основаниями математики, словом, его творчество охватило почти все разделы современной математики.

Велики его достижения в естествознании – в гидродинамике, космологии, теории потенциала. Он имел плодотворные контакты с крупнейшими физиками своего времени – Н.Н.Боголюбовым, В.Л.Гинзбургом, Я.Б.Зельдовичем. С увлечением и убежденностью В.И.Арнольд развивал и пропагандировал идеи Пуанкаре о том, что математика – это часть естествознания.

Арнольд служил своей профессии и просвещению на всех возможных поприщах. Он основал выдающуюся математическую научную школу, написал множество замечательных учебников (его учебник по классической механике сравнивают с величайшим произведением научной литературы – «Математическими началами натуральной философии» Ньютона), монографий и обзорных статей, посвященных проблемам математики. Начиная с руководства знаменитым школьным математическим кружком в пятидесятые годы (о том, что происходило на возглавлявшейся им секции этого кружка, можно прочитать в статье Арнольда, публикуемой в этом номере журнала), В.И.Арнольд очень много внимания уделял непосредственной работе со школьниками. В 1963 году он участвует в работе первой летней математической школы, а последние десять лет ежегодно проводил на

юношеских школах в Дубне. Прочитанный Владимиром Игоревичем курс для первых выпускников ФМШ (ныне СУНЦ им. А.Н.Колмогорова), стал педагогическим шедевром. По инициативе В.И.Арнольда были созданы Московский центр непрерывного математического образования и Независимый Московский университет. Влияние В.И.Арнольда на весь математический мир было огромно.

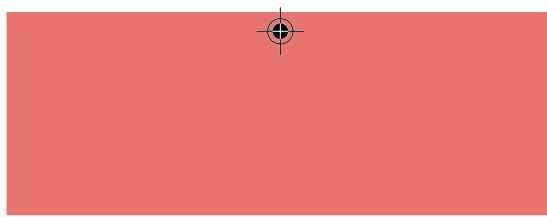
В.И.Арнольд был удостоен множества званий, докторских степеней и наград. Среди премий – премия Московского математического общества (1958 г., которой Владимир Игоревич особенно гордился), Ленинская премия (1965, вместе с А.Н.Колмогоровым), Крафоордская премия Шведской академии наук (1982), Харвиивская премия Техниона (1994), премия Вольфа (2001), премия Жунь Жуньшоу (2005) (ее называют Нобелевской премией Востока), Государственная премия Российской Федерации (2008).

Общая одаренность его личности проявлялась в самых разнообразных его реакциях и увлечениях. Он был необычайно ярким экскурсоводом по Парижу. Он совершал длительные (где-то около ста километров) велосипедные прогулки по Подмосковию и по окрестностям Парижа. При этом он и здесь вел топографические съемки, фиксируя места, где находились поляны с грибами, шавелем или земляникой или кустарники с малиной. И когда наступало время, он отправлялся километров за сорок от дома в избранные некогда места с рюкзаком, который заполнялся «дарами леса». Зимой Арнольд совершал лыжные прогулки, порой до ста километров. Он также любил дальние плавания, ходил в походы, в том числе в горы. Он необыкновенно много читал и массу из прочитанного помнил в деталях, что делало его необычайно интересным собеседником, а среди его собеседников были крупнейшие ученые нашего времени. По ходу дела им совершались и гуманитарные открытия (вызвало всеобщий восторг его открытие связи эпитафии к пушкинскому «Евгению Онегину» с текстом из «Опасных связей» Ш. де Лакло). Арнольд оставил множество замечательных автобиографических заметок, которые, думается, составляют лишь малую долю того, что могло бы быть им сказано. Им написаны прекрасные воспоминания о Колмогорове, Зельдовиче, Боголюбове.

Замечательную, на все времена характеристику дал Арнольду его учитель – Андрей Николаевич Колмогоров в приветствии своему ученику к его пятидесятилетию. В ту пору, когда Арнольд не имел крупных академических званий, Колмогоров выразил «свое убеждение в том, что происходит чествование первого советского математика, не только по силе полученных результатов, но и по темпераменту личности, по способности воспринимать новое и смелости в преодолении препятствий». Послание учителя ученику удивительным образом характеризует обоих: и Владимира Игоревича, личность и творчество которого получили столь восторженную и пронизательную оценку, и самого Андрея Николаевича, стоявшего на пороге смерти, но сохранившего запас душевной щедрости и способности восхищаться. Это послание не воспринимается как прощание. Это благословение!

Владимир Игоревич Арнольд начал свой путь в бессмертие. Все связанное с ним – необыкновенная одаренность личности, творчество, служение человечеству – делает его образ незабываемым для всех, кому посчастливилось соприкоснуться с ним на своем жизненном пути.

*В.Тихомиров*



Статья В.И.Арнольда, которую мы предлагаем вашему вниманию, впервые была опубликована во втором и третьем выпусках возобновленной серии «Математическое просвещение» (первый выпуск этой серии вышел в 1956 году, второй и третий – в 1957 и 1958 годах). В конце краткой аннотации к статье (посвященной истории школьного математического кружка при МГУ) автор пишет: «Ниже приводится изложение двух занятий кружка (секция для десятиклассников) на темы «Вариация кривой» и «Гармонические функции». Занятия проводил автор настоящей заметки». Представляется разумным кое-что пояснить.

Судя по всему, Арнольд проводил свои занятия в 1955/56 учебном году. В ту пору еженедельно по вечерам собирались секции школьного математического кружка, работавшие под руководством студентов и аспирантов мехмата. Всего тогда было 13 секций. У каждой секции был старший руководитель. Дима Арнольд (так все звали тогда Владимира Игоревича) был студентом второго курса. Он был младшим среди старших руководителей секций.

В середине пятидесятых годов появились секции очень широкого профиля, где обсуждались самые разнообразные темы, нередко очень далекие от школьной математики. Такова была и секция Арнольда.

По поводу возникновения первого сюжета статьи – о вариации кривых – надо назвать два имени – Александра Семеновича Кронрода и Анатолия Георгиевича Витушкина.

А.С.Кронрод оставил большой след в математике, в становлении того, что ныне называется Computer Science и в математическом просвещении. Он стал последним учеником Н. Н. Лузина – одного из величайших научных наставников всех времен,

создателя московской математической школы. Лузин дал импульс для творческих поисков Кронрода, которые привели его к осмыслению понятия *вариации функции двух переменных*.

В 1949 году Кронрод объявил семинар для младшекурсников. Стиль семинара был необычным – это был по сути дела научно-исследовательский семинар, посвященный разработке тематики, где руководитель семинара занимал ведущее положение в мире. Одним из участников семинара стал первокурсник А. Витушкин, ставший выдающимся математиком, академиком Российской Академии наук. Витушкин глубоко продвинул теорию Кронрода, определив понятия вариаций множеств. В 1954 году он объявил семинар для младшекурсников, в котором принял участие Дима Арнольд. На следующий год тема «Вариация кривых», находящаяся на самом острие науки того времени, была прекрасно обработана Арнольдом для школьников.

Во второй части статьи перед нами блистает фейерверк красивейших математических сюжетов, где сменяют друг друга тригонометрия, геометрия, интегральное исчисление, комплексный анализ, и все это в итоге приводит к геометрическому определению гармонической функции. С этим фундаментальным понятием анализа студенты мехмата МГУ знакомятся на третьем и четвертом курсах. Но оказывается, что за определение гармонической функции можно взять такое ее свойство: среднее значение этой функции по любой окружности равно значению этой функции в центре окружности. И далее следуют замечательные комментарии, где доказываются фундаментальные свойства гармонических функций и даются им глубокие физические интерпретации.

Статья второкурсника Арнольда написана рукой зрелого мастера, воодушевленного красотой математики.

# Два занятия школьного кружка при МГУ

В.АРНОЛЬД

## I. Вариация кривой

Пусть на плоскости дан отрезок  $AB$  длины 1. Если этот отрезок освещать параллельными лучами, то длина тени, отбрасываемой на различные прямые, будет колебаться от 0 до 1. Точнее, длина проекции отрезка на прямые, лежащие в той же плоскости, будет для разных прямых разная, однако во всех случаях она заключена между 0 и 1.

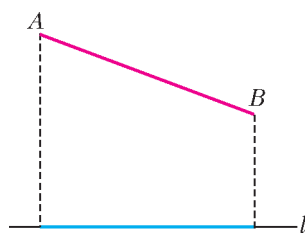


Рис. 1

Длина проекции  $AB$  на прямую  $l$  называется *вариацией отрезка  $AB$  в направлении  $l$*  (рис. 1): мы будем ее обозначать  $V_l(AB)$  или просто  $V_l$ , если ясно, от какого отрезка берется вариация.

Интуитивно ясно, что существует среднее значение

«тени» по всем направлениям и что оно больше 0 и меньше 1. Точно это означает, что если разделить угол в  $360^\circ$  на  $n$  равных частей и взять среднее арифметическое

$$V_n = \frac{V_{l_1} + V_{l_2} + \dots + V_{l_n}}{n}$$

вариаций отрезка  $AB$  в направлениях  $l_1, l_2, \dots, l_n$  (рис. 2), то существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = K,$$

причем  $K$  заключено между 0 и 1.

Это число  $K$  называется *средней вариацией* или просто

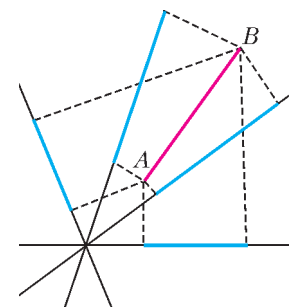


Рис. 2

вариацией единичного отрезка  $AB$ .

Найти предел  $K$  не очень трудно<sup>1</sup>; он равен  $\frac{2}{\pi} \approx 0,637$ .

Мы, однако, сейчас не будем его находить, а вычислим  $K$  позже – косвенным путем (задача 7); однако фактом существования предела мы будем пользоваться с самого начала.

**Задача 1.** Чему равна вариация отрезка длины  $a$ ?

**Решение.** Так как, очевидно, по любому направлению такой отрезок имеет вариацию в  $a$  раз большую, чем параллельный ему отрезок единичной длины, то и среднее арифметическое вариаций по  $n$  направлениям здесь будет в  $a$  раз больше, чем для единичного отрезка, а предел этой величины, т.е. средняя вариация отрезка длины  $a$ , равен  $Ka$ .

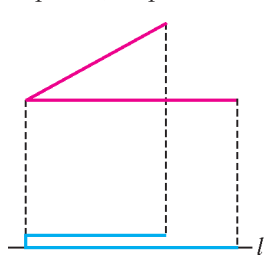


Рис. 3

Вариация ломаной по какому-нибудь направлению определяется как сумма длин проекций ее звеньев на это направление (рис.3).

**Задача 2.** Определите вариацию квадрата со стороной 1 в направлениях его сторон и диагоналей.

**Решение.** Очевидно, вариация квадрата в направлении каждой стороны равна 2, а в направлении каждой диагонали равна  $2\sqrt{2}$ .

Средняя вариация ломаной по всем направлениям или просто вариация ломаной по всем направлениям определяется, как и выше, с помощью предельного перехода:  $V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n$ , где  $V_n$  – среднее арифметическое вариаций ломаной по  $n$  направлениям сторон правильного  $n$ -угольника.

**Задача 3.** Определите вариацию ломаной длины  $a$ .

**Решение.** Очевидно, вариация ломаной по каждому направлению есть сумма вариаций ее звеньев по этим же направлениям. А так как среднее значение суммы равно сумме средних значений<sup>2</sup>, то вариация ломаной есть сумма вариаций ее звеньев. Так как, в силу задачи 1, вариация каждого звена равна произведению длины этого звена на  $K$ , то вариация ломаной есть  $Ka$ .

Перенесение определения вариации на кривые требует уточнения понятия кривой. В общем случае это сделать трудно. Но пусть кривая выпуклая или состоит из нескольких выпуклых кусков. Тогда при проектировании кривой на любое, но определенное, направление можно разбить ее на конечное число кусков, каждый из которых пересекается только один раз<sup>3</sup> любой проек-

<sup>1</sup>См., например, в книге А.М.Яглома и И.М.Яглома «Элементарные задачи в неэлементарном изложении» (М.: Гостехиздат, 1954) задачу 1476.

<sup>2</sup>Точный смысл этой фразы такой: среднее арифметическое вариаций ломаной по  $n$  направлениям равно сумме средних арифметических вариаций ее звеньев по этим же направлениям. Поэтому и предел при  $n \rightarrow \infty$  средних арифметических вариаций ломаной по разным направлениям равен сумме пределов средних арифметических вариаций отдельных звеньев.

<sup>3</sup>Здесь не исключаются случаи, когда подобный кусок представляет собой прямолинейный отрезок и, следовательно, при проектировании в одном из направлений полностью попадает на проектирующую прямую.

тирующей прямой. Тогда вариацией кривой по выбранному направлению назовем сумму длин проекций ее кусков на это направление (рис.4). Можно показать, что существует среднее значение этой величины по всем направлениям. Его мы и назовем средней вариацией или просто вариацией кривой линии.

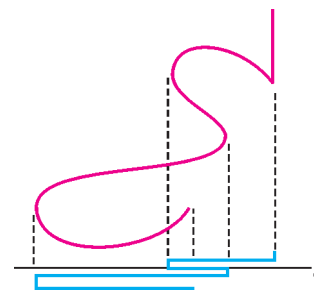


Рис. 4

Очевидно, если кривая – ломаная, то мы приходим к прежнему определению.

**Задача 4.** Найдите вариацию окружности диаметра  $D$ .

**Решение.** Сначала выберем какое-нибудь направление. Диаметр этого направления делит окружность на два куса – на две дуги, каждая из которых пересекается с любой перпендикулярной к выбранному направлению прямой не более, чем в одной точке. Отсюда вытекает, что вариация окружности относительно выбранного направления равна  $2D$ . Очевидно, что такова же и вариация и по любому другому направлению, а значит, и средняя вариация окружности равна  $2D$ .

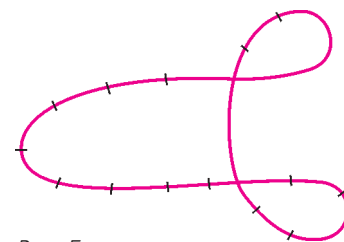


Рис. 5

Выберем теперь на кривой несколько точек и соединим их последовательно, но подряд (рис.5). Получим ломаную. Можно показать, что для достаточно хороших (например, для всех выпуклых) кривых существует предел длин этих ломаных, при условии, что при изменении ломаной длина ее наибольшего звена стремится к нулю. Этот предел называется *длиной кривой*.

Можно показать также, что для кривых, которые могут быть разбиты на конечное число выпуклых кусков, существует предел вариаций этих ломаных, когда длина наибольшего звена стремится к 0.

**Задача 5.** Найдите предел, к которому стремится вариация ломаной, вписанной в «достаточно хорошую» кривую длины  $a$ , когда ломаная изменяется так, что длина наибольшего ее звена стремится к нулю.

**Решение.** Так как для каждой ломаной длины  $a_n$  вариация равна  $Ka_n$ , а для «достаточно хороших» кривых  $a_n \rightarrow a$ , то предел вариаций ломаных равен  $Ka$ .

**Задача 6.** Докажите, что вариация («достаточно хорошей») кривой длины  $a$  равна  $Ka$ .

**Решение.** Достаточно заметить, что в такую кривую можно вписать ломаную со сколь угодно малыми звеньями, вариация которой по каждому из  $n$  данных направлений совпадает с вариацией кривой. Поэтому, раз существует предел, отыскиваемый в задаче 5, то он равен вариации кривой.

**Задача 7.** Найдите численное значение  $K$ , т.е. вариацию отрезка длины 1.

**Решение.** Так как, с одной стороны, окружность диаметра  $D$  имеет длину  $\pi$  и, значит, вариацию  $K\pi D$  (задачи 5 и 6), а с другой стороны (задача 4), вариация этой окружности равна  $2D$ , то  $K = \frac{2}{\pi}$ .

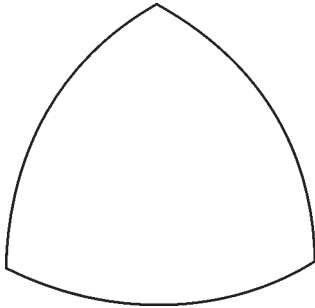


Рис. 6

Шириной кривой по данному направлению называется наименьшее расстояние между двумя прямыми этого направления, между которыми лежит кривая.

Кривая имеет постоянную ширину, если ее ширина по всем направлениям одинакова. Примером кривой постоянной ширины может служить окружность или так называемый треугольник Рело, составленный из трех равных дуг окружностей (рис.6).<sup>4</sup> С помощью вариаций получается весьма изящное доказательство следующей теоремы Барбье:

**Задача 8.** Докажите, что все кривые постоянной ширины  $h$  имеют одну и ту же длину  $\pi h$ .

**Решение.** Это следует из того, что вариация каждой такой кривой по любому направлению равна  $2h$ , из результатов задач 6 и 7.

Вот еще одна задача, которая на первый взгляд представляется довольно сложной:

**Задача 9.** В круге  $C$  радиуса 1 заключена какая-то кривая  $L$  длины 22. Докажите, что найдется прямая, пересекающая  $L$  не менее чем в 8 точках.

**Решение.** Вариация  $L$  равна  $\frac{2}{\pi} \cdot 22 > 14$  (задача 6 и 7); с другой стороны, длина проекции  $L$  на любое направление не превосходит 2 ( $L$  заключена внутри  $C$ ). Отсюда вытекает, что для некоторых направлений определенные участки проекции  $L$  будут покрываться проекциями отдельных дуг  $L$  более чем 7-кратно (т.е. не менее чем 8-кратно), что и доказывает наше утверждение.

Переходим к изложению занятия, посвященного теме «Гармонические функции».

## II. Гармонические функции

Две первые задачи из приведенных ниже не имеют отношения к основной теме. Для полноты освещения занятия кружка мы приводим их; близкая к ним по методу решения третья задача являлась подготовительной к четвертой, с которой, по существу, и началась тема.

**Задача 1.** Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения

$$a \sin \varphi + b \cos \varphi$$

<sup>4</sup> Много сведений о кривых постоянной ширины можно найти в книге И.М.Яглома и В.Г.Болтянского «Выпуклые фигуры» (М.: Гостехиздат, 1951).

( $a$  и  $b$  положительны).

**Решение.** Проведем два взаимно-перпендикулярных луча  $OM$  и  $ON$  и построим прямоугольный треугольник  $OAB$  с катетами  $OA = a$  и  $AB = b$ , расположив их, как на рисунке 1 (прямые углы  $MON$  и  $OAB$  ориентированы против часовой стрелки). Обозначим угол  $AON$  через  $\varphi$ , тогда, проектируя ломаную  $OAB$  на  $OM$  (проекции направленные!), получаем<sup>5</sup>:

$$(OB') = \text{пр. } OB = \text{пр. } OA + \text{пр. } AB = a \sin \varphi + b \cos \varphi.$$

Если вращать треугольник  $OAB$  вокруг вершины  $O$ , то угол  $\varphi$  изменяется; наибольшее и наименьшее значения проекции  $(OB')$  достигаются, когда отрезок  $OB$  коллинеарен  $OM$ , т.е. когда  $\text{tg } \varphi = \frac{a}{b}$ ; они равны  $\sqrt{a^2 + b^2}$  и  $-\sqrt{a^2 + b^2}$ .

**Задача 2.** Докажите, что если

$$a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2 + \dots + a_m \cos \varphi_m = 0 \quad (1)$$

и

$$a_1 \cos(\varphi_1 + 1) + a_2 \cos(\varphi_2 + 1) + \dots + a_m \cos(\varphi_m + 1) = 0 \quad (2)$$

(все коэффициенты  $a_i$  положительны), то и при любом  $\alpha$

$$a_1 \cos(\varphi + \alpha) + a_2 \cos(\varphi_2 + \alpha) + \dots + a_m \cos(\varphi_m + \alpha) = 0. \quad (3)$$

**Решение.** Выберем в плоскости луч  $OM$  и построим ломаную линию  $OA_1A_2 \dots A_m$  (рис. 2;  $m = 3$ ), где  $OA_1 = a_1, A_1A_2 = a_2, \dots, A_{m-1}A_m = a_m$ , причем векторы  $OA_1, A_1A_2, \dots, A_{m-1}A_m$  образуют с лучом  $OM$  соот-

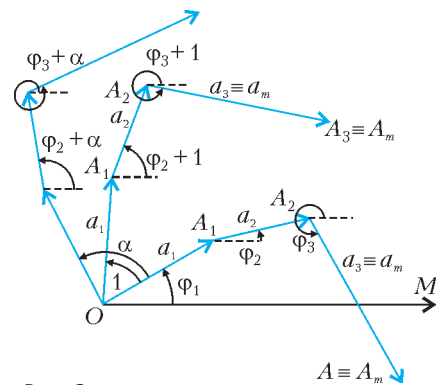


Рис. 2

ветственно углы  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ . Легко видеть, что условие (1) означает, что  $OA_m \perp OM$ , а условие (2) – что  $O\tilde{A}_m \perp OM$ , где  $O\tilde{A}_m$  получается из  $OA_m$  вращением против часовой стрелки (при обычном направлении

<sup>5</sup>  $(OB')$  – величина направленной проекции.



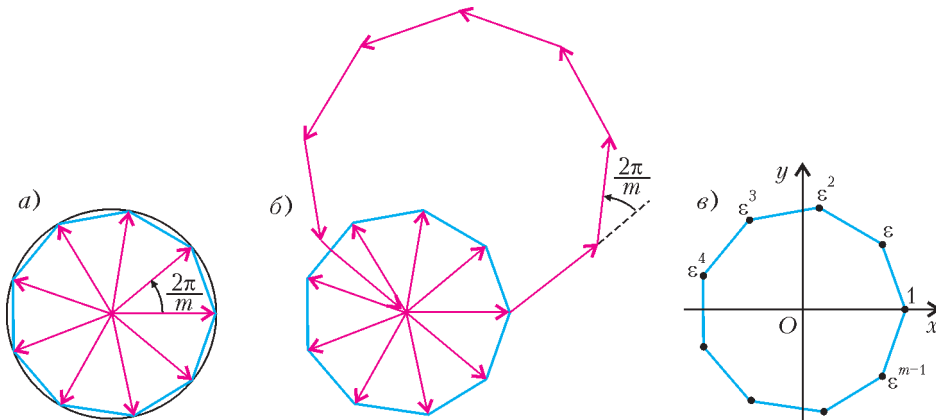


Рис. 3

отсчета углов) на угол 1 (радиан). Оба условия вместе означают поэтому, что  $\overline{OA_m} = 0$ , т.е.  $A_m$  совпадает с  $O$ . Но в таком случае проекция вектора  $\overline{OA_m}$ , повернутого на угол  $\alpha$  (т.е. выражение  $\sum_{i=1}^m a_i \cos(\varphi_i + \alpha)$ ), тоже равна нулю, что и доказывает (3).

**Задача 3.** Вычислите сумму  $m$  векторов с общим началом в центре правильного  $m$ -угольника и с концами в его вершинах (рис. 3, а).

На занятии кружка было предложено три решения.

**Решение 1.** Пусть сумма этих векторов – вектор  $\overline{OA}$ . Повернем многоугольник вокруг точки  $O$  на угол  $\frac{2\pi}{m}$ . Каждый вектор-слагаемое повернется на  $\frac{2\pi}{m}$ ; тогда и сумма  $\overline{OA}$  повернется на тот же угол, приняв положение  $\overline{OA'}$ . Вместе с тем каждый вектор перейдет при таком повороте в следующий, так что сумма не изменится, следовательно,  $\overline{OA'} = \overline{OA}$ . Но эти векторы образуют угол  $\frac{2\pi}{m}$ . Это может быть лишь при условии  $\overline{OA} = 0$ .

**Решение 2.** Складывая векторы по «правилу треугольника» в порядке следования вершин, получим, очевидно,  $m$ -звенную ломаную, все звенья которой равны (они равны радиусу окружности, описанной около многоугольника) и все внешние углы равны (они равны  $\frac{2\pi}{m}$ ; рис. 3, б). Отсюда следует, что ломаная образует правильный  $m$ -угольник; так как он замкнут, то искомая сумма равна нулю.

**Решение 3.** Достаточно доказать это для правильного  $m$ -угольника, расположенного в комплексной плоскости так, что его вершины изображают все корни  $m$ -й степени из  $1 : 1, \epsilon, \epsilon^2, \dots, \epsilon^{m-1}$  (рис. 3, в). Такой правильный  $m$ -угольник мы в дальнейшем будем называть основным  $m$ -угольником. Центр основного  $m$ -угольника изображает число 0, а одна из вершин – число 1.

Как известно, вершины основного  $m$ -угольника изображают все решения уравнения  $z^m - 1 = 0$ . По теореме Виета, сумма этих решений равна нулю, ибо ко-

эффициент при  $z^{m-1}$  в этом уравнении равен нулю. Но комплексные числа складываются по правилу сложения изображающих их векторов. Следовательно, сумма векторов, о которых говорится в условии задачи, равна нулю.

**Задача 4.** Вычислите предел  $K$

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{n}$$

– среднее значение функции  $y = \sin x$  на отрезке  $0 \leq x \leq \pi$ .

**Решение.** Рассмотрим снова правильный  $m$ -угольник, о котором говорилось в предыдущей задаче; на этот раз будем считать радиус описанной окружности равным 1, а число его сторон четным:  $m = 2n$  (рис. 4;  $m = 8$ ). Сложим теперь только «правую половину» векторов:

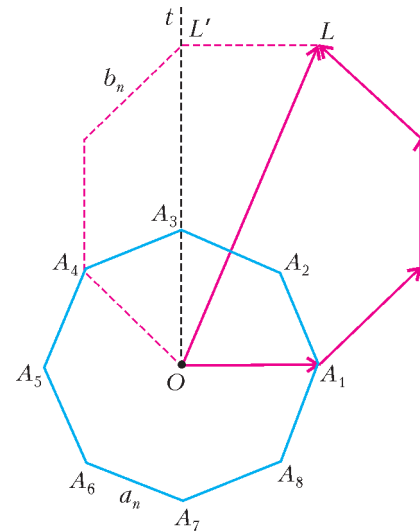


Рис. 4

$\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \dots + \overline{OA_n} = \overline{OL}$ . Замыкающая  $OL$  рассматриваемой суммы будет совпадать с диаметром  $D_n$  окружности, описанной около нового  $m$ -угольника. Легко видеть, что если вектор  $\overline{OA_1}$  направить горизонтально, то эта замыкающая при большом  $m$  близка к ее проекции  $OL'$  на вертикальную прямую  $Ot$ . А так как проекции единичных векторов  $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_n}$  на эту вертикаль равны как раз

$$\sin 0 = 0, \quad \sin \frac{2\pi}{m} = \sin \frac{\pi}{n}, \quad \sin \frac{4\pi}{m} = \sin \frac{2\pi}{n}, \quad \dots, \quad \sin \frac{(n-1)\pi}{n},$$

то среднее значение  $K$  равно пределу, к которому стремится частное  $\frac{D_n}{n}$ . Но из подобия  $m$ -угольников, изображенных на рисунке 4, ясно, что  $\frac{b_n}{a_n} = \frac{D_n}{2}$  (ра-

диус  $OA_1 = 1$ ), где  $a_n = 2 \sin \frac{\pi}{n}$ , а  $b_n = 1$ . Следова-

тельно,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|OL|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n \cdot 2 \sin \frac{\pi}{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{\pi} : \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} = \frac{2}{\pi} : 1 = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

**Замечания.**

1. Таким образом, этот предел оказался равным тому значению  $K$ , которое мы раньше назвали *средней вариацией* единичного отрезка. Это не случайно; решение всего цикла задач о вариациях кривых может рассматриваться как косвенное вычисление указанного в этой задаче предела.

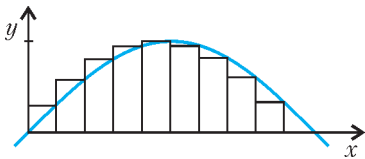


Рис. 5

2. Полученный результат имеет следующий геометрический смысл: предел, к которому стремится площадь ступенчатой фигуры, изображенной на рисунке 5, между полувольтной синусоиды и осью абсцисс, равен 2.

**Задача 5.** Докажите, что среднее значение произвольного многочлена с комплексными коэффициентами

$$P_k(z) = z^k + a_1 z^{k-1} + \dots + a_k \quad (*)$$

в  $n$  вершинах правильного  $n$ -угольника на комплексной плоскости, при  $n > k$ , равно значению многочлена в центре этого многоугольника.

**Решение** производится в три этапа.

1°. Пусть сначала  $P_k(z) = z^k$  и правильный  $n$ -угольник является основным (см. решение 3 задачи 3). Тогда сумма  $k$ -х степеней комплексных чисел, изображаемых вершинами  $n$ -угольника, равна нулю при любом  $k < n$ .

В самом деле, при замене каждого числа  $z$  на  $z \left( \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right) = z \cdot \epsilon$  многоугольник переходит в себя (он поворачивается на  $\frac{2\pi}{n}$ ), а каждое значение  $z^k$  умножается на  $\epsilon^k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \neq 1$ . Значит, сумма значений  $z^k$  в вершинах  $n$ -угольника не меняется и в то же время умножается на  $\epsilon^k$ . Следовательно, она может равняться только нулю.

Это же рассуждение непосредственно переносится и на случай  $P_k(z) = az^k$ .

2°. Так как среднее значение  $P_l(z) = az^l$  ( $1 \leq l \leq n$ ) в вершинах основного  $n$ -угольника равно нулю, то и среднее значение суммы  $z^k + a_1 z^{k-1} + \dots + a_{k-1} z$  равно нулю. Следовательно, среднее значение многочлена  $P_k(z)$  в его вершинах равно  $a_k$ , т.е.  $P_k(0)$ .

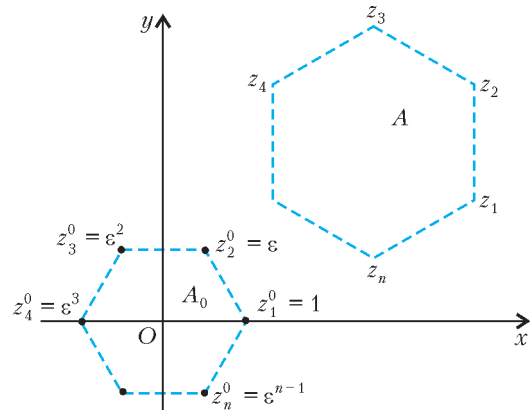


Рис. 6

3°. Обозначим теперь комплексные числа – вершины основного  $n$ -угольника  $A_0$  через  $z_1^0 = 1$ ,  $z_2^0 = \epsilon$ ,  $z_3^0 = \epsilon^2$ , ...,  $z_n^0 = \epsilon^{n-1}$  (рис.6) и рассмотрим произвольно расположенный одноименный правильный многоугольник  $A$  с вершинами  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . Очевидно, правильный многоугольник  $A$  можно получить из  $A_0$  поворотом, гомотетическим расширением (или сжатием) и параллельным переносом. Другими словами, найдутся два таких комплексных числа  $\alpha$  и  $\beta$ , что

$$z_i = \alpha z_i^0 + \beta \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Здесь модуль  $\alpha$  равен отношению сторон многоугольников  $A$  и  $A_0$ , аргумент – углу поворота, а  $\beta$  – комплексное число, изображаемое центром многоугольника  $A$ .

Теперь заметим, что среднее значение многочлена (\*) в вершинах  $z_1, z_2, \dots, z_n$  равно

$$\frac{\sum_{i=1}^n P_k(z_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n P_k(\alpha z_i^0 + \beta)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n Q_k(z_i^0)}{n},$$

где

$$Q_k(z) = P_k(\alpha z + \beta) = (\alpha z + \beta)^k + a_1 (\alpha z + \beta)^{k-1} + \dots + a_{k-1} (\alpha z + \beta) + a_k$$

есть многочлен  $k$ -й степени относительно  $z$  (той же, что и  $P_k(z)$ ), принимающий в точках  $z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0$  соответственно значения  $P_k(z_1), P_k(z_2), \dots, P_k(z_n)$ . Поэтому среднее значение  $P_k(z)$  в точках  $z_1, z_2, \dots, z_n$  равно среднему значению  $Q_k(z)$  в точках  $z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0$ , т.е. (см. этап 2°) равно

$$Q_k(0) = \beta^k + \alpha_1 \beta^{k-1} + \dots + a_{n-1} \beta + a_n.$$

Но  $Q_k(0)$  совпадает с значением многочлена  $P_k(z)$  в центре многоугольника  $A$ , что и завершает доказательство.

Пусть  $f(z)$  – некоторая функция комплексного переменного  $z$ . Рассмотрим последовательность правильных  $n$ -угольников ( $n = 3, 4, 5, \dots$ ), вписанных в определенную окружность комплексной плоскости, и последовательность средних арифметических  $f(z)$  в вершинах этих многоугольников. Если при  $n \rightarrow \infty$  эти



средние арифметические стремятся к определенному пределу, не зависящему от выбора вписанных в окружность многоугольников, то этот предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_1) + f(z_2) + \dots + f(z_n)}{n}$$

называется *средним значением функции  $f(z)$  по окружности*.

Из задачи 5 следует, что *среднее значение произвольного многочлена по любой окружности равно значению этого многочлена в центре окружности*.

Можно говорить не только о среднем значении функции в смысле среднего арифметического, но и о *среднем геометрическом* функции  $f(z)$  по некоторой окружности. Под этим понимается действительное неотрицательное число

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f(z_1)| |f(z_2)| \dots |f(z_n)|}$$

(значение корня арифметическое!), где  $z_i$  – также вершины правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность.

Рассмотрим задачу, связанную с понятием среднего геометрического функции по окружности.

**Задача 6.** Докажите теорему: если многочлен  $P_k(z)$  степени  $k$  не имеет корней внутри или на окружности, то его среднее геометрическое на этой окружности равно модулю его значения в центре окружности.

**Решение** проведем снова в три этапа.

1°. Пусть сначала окружность есть окружность  $|z| = 1$ , правильные  $n$ -угольники – основные, а многочлен  $P_1(z) = z + a$ . (Очевидно,  $|a| > 1$ , так как иначе корень  $P_1(z)$  лежал бы внутри окружности.)

Рассмотрим произведение

$$(z_1 + a)(z_2 + a) \dots (z_n + a).$$

Это комплексное число есть значение многочлена

$$F_n(z) = (z - (-z_1))(z - (-z_2)) \dots (z - (-z_n))$$

в точке  $z = a$ . «Старший коэффициент» многочлена  $F_n(z)$  при  $z^n$  равен единице, а корни его равны  $-z_1, -z_2, \dots, -z_n$ ; поэтому  $F_n(z) \equiv z^n - (-1)^n$ . Следовательно,

$$F_n(a) = a^n - (-1)^n \text{ и } |a^n| - 1 \leq |F_n(a)| \leq |a^n| + 1.$$

Но так как  $|a| > 1$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a^n| + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a^n| - 1} = |a|,$$

откуда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{F_n(a)} = |a|$ , что и доказывает теорему в этом частном случае.

2°. Так как, очевидно, *среднее геометрическое произведения равно произведению средних геометрических*, то доказываемая теорема справедлива и для любого многочлена  $P_n(z)$ , все корни которого по модулю больше 1, так как такой многочлен есть произведение сомножителей вида  $(z + a_i)$ , где  $-a_i$  – корни  $P_n(z)$ .

3°. Наконец, пусть данная окружность  $S$  – произвольная, имеющая центр в точке, изображающей комплексное число  $\beta$ , а радиус  $a$ ; ее уравнение  $|z - \beta| = a$ . Рассмотрим преобразование комплексной плоскости

$$w = \alpha z + \beta.$$

Оно переводит единичную окружность  $|z| = 1$  и круг  $|z| \leq 1$  соответственно в окружность  $S$  и в ограничиваемый ею круг.

Подставим в данный многочлен  $P_n(z)$  вместо  $z$  выражение  $\alpha z + \beta$ . Получим:

$$P_n(\alpha z + \beta) = Q_n(z);$$

при этом значения многочлена  $Q_n(z)$  в вершинах основного  $n$ -угольника равны значениям  $P_n(z)$  в вершинах  $n$ -угольника, вписанного в  $S$  (ср. с решением задачи 5). Все корни  $Q(z)$  лежат вне круга  $|z| \leq 1$  (все корни  $P(z)$  лежат вне круга, ограниченного  $S$ ); среднее геометрическое  $P_n(z)$  по окружности  $S$  равно среднему геометрическому  $Q_n(z)$  по окружности  $|z| = 1$ . Но это последнее среднее вычислено в п. 2°; оно равно  $|Q_n(0)| = |P_n(\beta)|$ , что и требовалось.

**Задача 7.** На плоскости имеются две фиксированные точки  $A$  и  $B$  (рис.7). Рассмотрим функцию  $\theta = f(M)$  точки  $M$  этой плоскости, равную углу  $\theta$  (наименьшему, отсчитываемому против часовой

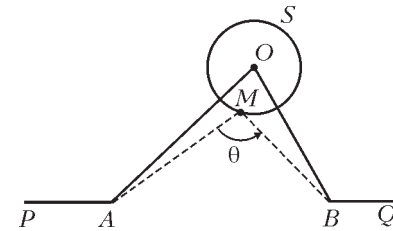


Рис. 7

стрелки), на который поворачивается луч  $MA$  до совмещения с  $MB$ . Докажите, что среднее значение функции  $f(M)$  по любой окружности  $S$ , не пересекающей лучей  $AP$  и  $BQ$ , равно значению  $f(M)$  в центре  $O$  окружности.<sup>6</sup>

**Решение.** Пусть  $M_1 M_2 \dots M_n$  – правильный  $n$ -угольник, вписанный в окружность  $S$ . Обозначим углы  $AM_i B$  через  $\theta_i$ , а угол  $AOB$  через  $\theta_0$ . Нужно доказать, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n}{n} - \theta_0 &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\theta_1 - \theta_0) + (\theta_2 - \theta_0) + \dots + (\theta_n - \theta_0)}{n} = 0. \end{aligned}$$

Но, очевидно, для любой точки  $M$  на окружности  $S$

$$\theta - \theta_0 = \angle OBM - \angle OAM;$$

<sup>6</sup> Приведенное ниже решение задачи 7 заимствовано из заметки В.А.Успенского «Геометрический вывод основных свойств гармонических функций» («Успехи математических наук», 1949, вып. 2 (30)), в которой эта задача кладется в основу теории гармонических функций.

таким образом, требуется доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\angle OBM_1 + \angle OBM_2 + \dots + \angle OBM_n}{n} - \frac{\angle OAM_1 + \angle OAM_2 + \dots + \angle OAM_n}{n} \right) = 0, (*)$$

т.е. что среднее значение угла  $OBM$  на окружности  $S$  равно среднему значению угла  $OAM$  на этой окружности. Предположим теперь, что  $n = 2m$  чётно и  $2m$ -угольник  $M_1M_2 \dots M_{2m}$  имеет прямую  $OA$  осью симметрии, проходящей через середины сторон  $M_1M_{2m}$  и  $M_mM_{m+1}$ . В этом случае, очевидно,

$$\begin{aligned} \angle OAM_1 + \angle OAM_{2m} &= 2\pi, \\ \angle OAM_2 + \angle OAM_{2m-1} &= 2\pi, \\ &\dots \\ \angle OAM_n + \angle OAM_{m-1} &= 2\pi \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{\sum_{i=1}^{2m} \angle OAM_i}{2m} = \pi$$

независимо от значения  $n$ .

Отсюда вытекает, что *если среднее значение функции  $\angle OAM$  существует* (а это мы будем предполагать, не задерживаясь на доказательстве), то оно равно  $\pi$ . Точно так же равно  $\pi$  и среднее значение по окружности функции  $\angle OBM$ , что и доказывает (\*) и требуемую теорему.

*Функции, среднее значение которых на каждой окружности равно значению в центре окружности, называются гармоническими.*

Из задачи 5 вытекает, что действительная часть и коэффициент при мнимой части любого многочлена от комплексного переменного (точки комплексной плоскости) являются гармоническими функциями; задача 6 связана с гармоничностью логарифма модуля многочлена (в области, где многочлен не имеет корней), задача 7 дает геометрический пример гармонической функции.

Гармонические функции играют выдающуюся роль в математике, физике и технике. Для примера упомянем здесь о задаче нахождения распределения температур в произвольной плоской однородной пластинке. Ясно, что если распределение температур – установившееся, т.е. самопроизвольного перераспределения температур не происходит, то оно дается гармонической функцией, ибо если бы среднее значение температуры на малой окружности было, например, больше температуры в центре  $O$ , то точка  $O$  нагревалась бы.

Очевидно, что *заданная в некоторой области гармоническая функция может принимать наибольшее и наименьшее значения лишь на границе этой области*, ибо если бы наибольшее значение достиглось во внутренней точке  $O$ , то среднее значение по окружности с центром в  $O$  не могло бы совпадать со значением

в  $O$ . Это предложение называется *принципом максимума* и играет большую роль в теории гармонических функций. Из него следует, что значения гармонической функции в области полностью определяются ее значениями на границе этой области: так, например, распределение температур на пластинке определяется температурами на крае пластинки. Действительно, если бы существовали две разные гармонические функции, то их разность (которая, очевидно, тоже будет гармонической функцией) была бы равна нулю на границе области и отлична от нуля где-то внутри нее; но это противоречит тому, что гармоническая функция принимает наибольшее и наименьшее значения на границе.

Функции, заданные в отдельных точках плоскости, например в центрах квадратов бумаги «в клетку», называются *функциями на сетке*. *Гармонической функцией на сетке* называется такая, у которой значение в каждой точке равно среднему арифметическому ее значений в соседних точках. Как и для гармонических функций на плоскости, здесь можно показать, что наибольшее и наименьшее значения гармонической на сетке функция принимает на границе сетки и что значения гармонической функции на сетке однозначно определяются ее значениями в граничных узлах сетки.

При математическом приближенном решении задач, связанных с гармоническими функциями, их часто заменяют гармоническими на сетке функциями. Таким образом, например, можно вычислить температуру в точке однородной плоской пластинки, если известна температура на краю. Для этого пластинка делится на мелкие квадратики, где температура предполагается неизменной, и выписывается условие гармоничности на сетке, состоящей из центров квадратиков: среднее арифметическое температур соседей данного квадратика равно его собственной температуре; решение задачи удобно проводить методом последовательных приближений.

Легкая задача 8 касается одного важного свойства гармонических функций на сетке.

**Задача 8.** *В каждой клетке бесконечного листа клетчатой бумаги написано натуральное число, равное среднему арифметическому чисел, стоящих в четырех соседних клетках. Докажите, что во всех клетках написано одно и то же число.*

**Решение.** Четыре соседа-числа в такой таблице, как указано в условии, не могут быть все больше его и не могут быть все меньше его. Вместе с тем среди любого количества натуральных чисел всегда есть наименьшее  $n$ . Все четыре его соседа равны  $n$ , так как они не меньше  $n$ , и если хотя бы одно было больше, то среднее арифметическое тоже было бы больше  $n$ , тогда как по условию оно равно  $n$ .

Точно так же соседи этих соседей равны  $n$  и т.д. Так мы убеждаемся, что все числа в клетках равны  $n$ .





# Метеорологические наблюдения: распределенные в пространстве и во времени (продолжение)

**В.ГОРДИН**

## **Всякое действие рождает ошибки. Проблема контроля**

*Попробуем географию! Лондон – столица Парижа,  
а Париж – столица Рима, а Рим...  
Нет, все не так, все неправильно!*

Л.Кэрролл. Алиса в Стране Чудес

Информация, полученная в результате измерений, передается в метеорологические центры. При передаче информации на непосредственные ошибки измерений могут накладываться иные ошибки. Поскольку передаваемых телеграмм тысячи, набираются сотни ошибок. Например, порядок, в котором передаются индекс<sup>18</sup> (номер) станции и результаты измерений, нестандартен. Человек такую ошибку исправит легко, но если в алгоритме обработки и контроля информации не предусмотреть, как такая ошибка может быть обнаружена, то, очевидно, дальнейшие действия компьютера будут следующие. Программа прогноза будет считать, что в точке с индексом, получившимся из чисел, описывающих температуру, наблюдается температура, получившаяся из чисел, описывающих индекс. Работа программы далее будет напоминать работу системы шестеренок, в которую щедрой рукой высыпали горсть шурупов. Чтобы этого не произошло, метеоинформация, приходящая по каналам связи, проходит первичную обработку и контроль.

В результате этой первичной обработки числа, описывающие координаты станции, срок наблюдения, температуру, ветер и влажность на различных высотах, будут стоять в «макете» строго на своих местах. Место отсутствующей информации (например, если зонд не долетел до положенной высоты) заполняется (кодируется) в макете специальным символом. Про-

<sup>18</sup> Координаты станции определяются уже в метеорологическом центре по ее индексу. Иногда приборы переносят на новое место, а в справочник координат и высот забывают внести исправление. С помощью уравнения гидростатики нетрудно оценить, к какой систематической ошибке в давлении приведет подъем синоптической станции, скажем, на 20 м.

грамма контроля должна обнаружить<sup>19</sup> грубые ошибки и, если возможно, исправить их, а если нет, то отбросить. Для обнаружения, например, полученные данные можно сравнить с их климатическими характеристиками (средними значениями в этой точке за данный месяц). Если зимой из Арктики сообщат о температуре +30 °С, то человек, знающий географию, этому не поверит. Нужно, чтобы и компьютер «не поверил». Такой вид контроля называется климатическим. Для его применения необходимо иметь в памяти машины не только поля первого приближения, в данном случае – поля климатических величин (рис.7,а и 8,а), но и поля допустимых (с точки зрения машинного контроля) отклонений метеорологических величин от этих средних. Можно сравнить проверяемое значение метеорологической величины с аналогичными на соседних станциях. Такой вид контроля называется горизонтальным. Можно сравнить значение с аналогичными за предыдущий срок наблюдений – такой контроль называется временным.

Разрабатывая процедуру прогноза, рассчитывают, что полученные результаты будут больше соответствовать действительности, чем климатические поля (иначе, зачем бы огород, т.е. прогноз, городить?). Следовательно, в качестве первого приближения для программ контроля целесообразно использовать не климатические, а прогностические поля. В этом случае можно уменьшить ширину «окна», т.е. значения отклонений, которые считаются максимально допустимыми. Таким образом, при использовании вместо климата хорошего прогноза первое приближение в алгоритме контроля улучшается. При этом уменьшается вероятность возникновения ошибок двух родов: пропуск содержащейся в телеграмме ошибки и бра-

<sup>19</sup> В таком случае хорошо бы из метеоцентра, где производится контроль, «переспросить» отправителя, т.е. автоматически попросить его уточнить подозрительное число. Пока такой системы обратной связи нет.

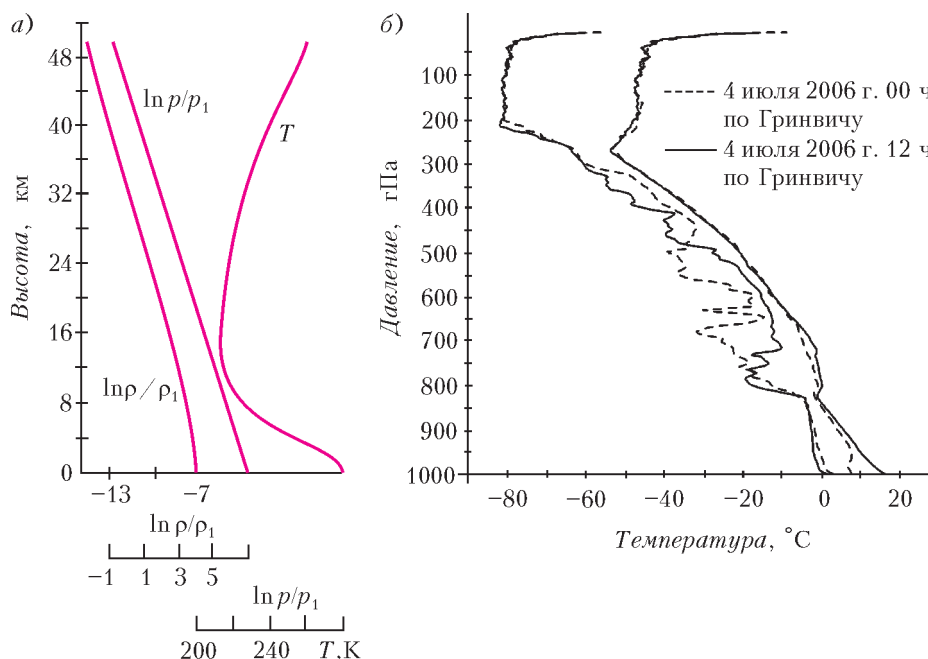


Рис.7. Можно сравнить проверяемую величину, соответствующую какой-то высоте измерения радиозонда, с аналогичными величинами на соседних высотах, которые также приводятся в аэрологической телеграмме. Такой вид контроля называется вертикальным. Чтобы им пользоваться, необходимо знать максимально возможную скорость изменения контролируемого поля по вертикали. На рисунке а) приведены средние профили температуры, плотности, давления. Здесь  $\rho_1 = 1 \text{ г/см}^3$ ,  $p_1 = 1 \text{ гПа}$ . На рисунке б) представлены профили температуры (справа) и температуры точки росы (слева), содержащиеся в двух аэрологических телеграммах. Проанализировав совместно эти два рисунка, можно грубо оценить допустимые (нужно, чтобы контроль их пропускал) отклонения температуры от климатических значений

ковка верного значения, которое существенно отличается от климатического поля (возможно, конкретные значения существенно отличаются от среднего<sup>20</sup>).

Существующие алгоритмы контроля постоянно совершенствуются, хотя и сейчас они неплохо устраняют наиболее распространенные ошибки. Наилучшие результаты дает комплексный контроль, который состоит из нескольких видов контроля, перечисленных выше. При этом ширина различных «окон» должна быть взаимно согласована. Самый сложный блок такого алгоритма – блок принятия решения: при наличии таких-то подозрений окончательно считать число верным или ошибочным. Качество контроля характеризуется двумя числами – ошибками обоих родов. Субъективный анализ результатов работы алгоритма контроля позволяет понять, в каких ситуациях (например, при контроле данных из каких географических районов) алгоритм работает неудовлетворительно (пропускает какие-то ошибки или отбрасывает верные данные) и как можно улучшить сам алгоритм.

Впрочем, ошибки бывают и экзотические. Одна станция, расположенная в Закавказье, постоянно передавала данные, сильно отличающиеся от данных соседних станций. Синоптики к этому привыкли и при

<sup>20</sup> Важный вопрос: как количественно описать вариабельность (отличие от среднего значения) того или иного метеоэлемента в какой-то области в какой-то месяц? Мы обсудим его.

анализе поступающей информации данные этой станции не учитывали. Автоматический контроль также часто браковал эту информацию. Однако «расследование» показало, что это ... японская станция. Когда-то при набивке координат на перфокарты в долготу этой станции пропустили единичку, и долгота уменьшилась ровно на  $100^{\circ}$ , а широта не изменилась. В результате состояние атмосферы над Хоккайдо приписывалось Кавказу.

Другой пример. Норвегия (одна из стран – членов ВМО) в восьмидесятых годах установила в Арктике полсотни буев, автоматически передававших информацию. Четыре бую оказались с дефектом – они передавали очень низкое давление на уровне моря: 950 гПа (среднее значение давления на уровне моря равно 1013 гПа). При сравнении с прогнозом контроль эти данные браковал. Все было в порядке. Но когда в этот район пришел сильный циклон (область низкого давления) и «честный» прогноз дал значение давления 975 гПа, то данные этих буев попали в «окно» допустимых отклонений от прогноза.

Кроме того, они оказались идеально согласованными между собой (так как были одинаковыми) и потому прошли горизонтальный и временной контроль. Прежде чем была выявлена причина и установлен специальный алгоритм «защиты от данных» этих буев, было дано несколько прогнозов весьма низкого (особенно для Арктики) качества.

### Статистика или геометрия: коэффициент корреляции – это косинус

*Вдруг серый волк ударился о сырую землю и стал конем золотогривым.*

Русская народная сказка «Иван-царевич и серый волк»

Предположим, имеется два набора чисел одинаковой длины  $\{p_j\}_{j=1}^N$  и  $\{q_j\}_{j=1}^N$  и мы хотим понять, можно ли по одному ряду предсказать другой.<sup>21</sup> Например, по высоте столбика термометра за нашим окном мы предсказываем температуру: а) около термометра; б) в том месте, куда мы планируем отправиться. Понятно, что в случае а) зависимость линейная (для этого-то термометр и совершенствовали несколько веков):  $q_j = \alpha p_j + \beta$ , где  $j$  – номер момента времени, а константы  $\alpha$  и  $\beta$  характеризуют данный термометр и температурную шкалу. В случае б) результат зависит от подробностей. Если собираетесь в

<sup>21</sup> Здесь буква  $p$  не имеет отношения к давлению, это просто обозначение некоторого числа.





булочную за углом – ситуация почти такая же, что и в случае а). А если на другой континент – нечего тогда и в окно смотреть.

Важная характеристика числового ряда – его средняя величина  $Sp = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N p_j$ . Но если у нас рядом висят два термометра – один со шкалой Цельсия, а другой со шкалой Реомюра или Фаренгейта, то показания у них разные и среднее значение этих показаний у каждого термометра свое. Как же убедиться, что они показывают одну и ту же температуру?

Прежде всего вычтем средние величины, т. е. перейдем к центрированным числовым рядам:  $\tilde{p}_j = p_j - Sp$ ,  $\tilde{q}_j = q_j - Sq$ . У каждого из этих числовых рядов среднее значение нулевое. Предположим, что первый центрированный ряд состоит из чисел 1 и -1 в равных количествах, а второй получается из первого умножением на число  $\alpha \neq 0$ . Тогда стоит считать, что это один и тот же набор измерений, только описанный в разных шкалах (масштабах). Однако это нужно проверить. Пусть сначала  $N = 3$ , т.е. произведено лишь по три измерения. Тогда каждый из двух наборов содержит по 3 числа и каждый набор можно интерпретировать как вектор в трехмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Теперь надо узнать, являются ли эти векторы пропорциональными, а если нет, то насколько велика мера этой непропорциональности. Такой мерой является угол между векторами, точнее косинус угла. Когда он равен 1, векторы пропорциональны, а когда 0 – ортогональны. Если же косинус равен -1, векторы пропорциональны, но со знаком «минус». Это означает, что когда на одном термометре температура выше средней, на другом она ниже и наоборот. О таких температурных шкалах упоминалось в первой части статьи.

Чтобы вычислить косинус угла между векторами в  $\mathbb{R}^3$ , существует замечательный способ – нужно вычислить скалярное произведение векторов и поделить на произведение их норм:

$$\cos \vartheta = \frac{(\tilde{p}, \tilde{q})}{|\tilde{p}| |\tilde{q}|} = \frac{\left( \sum_{j=1}^3 \tilde{p}_j \tilde{q}_j \right)}{\left( \sum_{j=1}^3 \tilde{p}_j^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{j=1}^3 \tilde{q}_j^2 \right)^{1/2}}.$$

Если векторы  $\tilde{p}$  и  $\tilde{q}$  пропорциональны и коэффициент пропорциональности положителен, то (проверьте)  $\cos \vartheta = 1$ , а если коэффициент отрицателен, то  $\cos \vartheta = -1$ . Эту формулу для косинуса легко обобщить на случай произвольного  $N$  – нужно лишь поменять верхний предел у всех сумм. Неравенство Коши – Бунаковского для числовых рядов гласит:

$$|(\tilde{p}, \tilde{q})| \leq |\tilde{p}| |\tilde{q}| \Leftrightarrow \left| \sum_{j=1}^N \tilde{p}_j \tilde{q}_j \right|^2 \leq \sum_{j=1}^N \tilde{p}_j^2 \sum_{j=1}^N \tilde{q}_j^2.$$

Значит, модуль величины, которую мы назвали косинусом, не превосходит 1. По этой величине можно восстановить и угол между двумя векторами – самый обычный угол, хотя векторы и  $N$ -мерные.

Число  $r = \cos \vartheta$  имеет еще одно название: *коэффициент корреляции* между числовыми рядами  $\{p_j\}_{j=1}^N$  и

$\{q_j\}_{j=1}^N$ . Этот термин используют, когда говорят о случайных величинах, вероятностях и т.п. Он характеризует похожесть колебаний этих числовых рядов. Пример случайной величины дает обыкновенный кубик с числами на гранях от единицы до шести. Каждая грань, если кубик не испорчен, выпадает с одинаковой вероятностью, равной 1/6. Если кубик подбросить много раз, то среднее значение случайной величины (выпавшего числа) будет близко к 3,5. Пусть  $p_j$  – число на грани кубика при  $j$ -м подбрасывании, а  $q_j = 3,5$  при всех  $j$ . У этих величин одинаковые средние, а коэффициент корреляции равен (проверьте) нулю.

**Статистические связи и предсказания**

*Иван Николаевич смутился, но ненадолго, потому что вдруг сообразил, что профессор непременно должен оказаться в доме №13 и обязательно в квартире 47.*

М.А.Булгаков. Мастер и Маргарита

Будем считать, что в каждой точке поля  $\vec{x}$  отклонение поля  $\zeta(\vec{x})$  от климата есть случайная величина, принимающая числовые значения. В теории вероятностей среднее всех значений называют математическим ожиданием и обозначают символом  $M\zeta(\vec{x})$ . Если же нужно подчеркнуть, что оценка выполнена по конечному ряду, то используют символ  $S\zeta(\vec{x})$ .

Если ряды  $\{p_j\}_{j=1}^N$  и  $\{q_j\}_{j=1}^N$  составлены, скажем, из значений давления и температуры в какой-то точке  $\vec{x}$  в моменты  $t_j$ , то коэффициент корреляции  $r$  характеризует статистическую связь между ними. Например, если бы оказалось, что  $r > 0$ , то это означало бы, что чем выше давление, тем, как правило, выше температура. Чем ближе был бы коэффициент  $r$  к 1, тем реже нарушалось бы это статистическое правило. В реальности же коэффициент корреляции между температурой и давлением в одной и той же точке и в один и тот же момент времени близок к нулю. А насколько длинным должен быть ряд, т.е. каким следует выбирать  $N$ ? Ответ на этот простой вопрос весьма сложен, а неправильный ответ может привести к принципиальным ошибкам.

Допустим, температура и давление измеряются ежесекундно в течение минуты, т.е.  $N = 60$ . Вполне возможно, что обе величины растут или одна из них убывает. Поскольку минута – сравнительно небольшой (в метеорологическом смысле) отрезок времени, давление и температура хорошо описываются линейными функциями времени. Тогда коэффициент корреляции этих рядов близок (проверьте) к 1 (или к -1, если одна величина растет, а другая убывает). Если сделать опрометчивый вывод, что такая связь будет продолжаться и далее, на больших временных интервалах, то результат получится совершенно неверный. Известно, например, что днем бывает, как правило, теплее, чем ночью, а зимой – холоднее, чем летом. Но колебаний давления с большой амплитудой, аналогичных колебаниям температуры, ни с суточным, ни с годовым периодом в природе не существует. Нельзя было по

ряду на коротком отрезке (1 минута) делать выводы о столь сильной корреляции температуры и давления.

Оставив вопрос о методах определения достаточности длины ряда без ответа, предположим, что наши ряды достаточны и что они хорошо представляют

бесконечные последовательности  $\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$  и  $\{q_j\}_{j=1}^{\infty}$ . Будем считать, что существуют пределы при  $N \rightarrow +\infty$

$$\text{сумм } \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N p_j, \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N q_j, \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \tilde{p}_j \tilde{q}_j, \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \tilde{p}_j^2, \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \tilde{q}_j^2$$

и что суммы  $S$  «недалеки» от этих пределов. Две

последние суммы (точнее, их пределы при  $N \rightarrow +\infty$ ) называются дисперсиями величин  $p$  и  $q$  соответственно. Корни из дисперсий называют среднеквадратичными отклонениями – СКО – и обозначают  $\sigma_p$  или  $\sigma_q$ . Они характеризуют вариабельность соответствующих рядов вокруг среднего значения.

### Интерполяция, климат, корреляции

*Иногда приходится полагаться на случай; ни в чем нельзя быть вполне уверенным в морском сражении.*

Г.Нельсон

Вооруженные понятиями среднего, дисперсии и корреляции, вернемся к земной атмосфере. Полученные в результате измерений большие массивы метеорологической информации (рис.8) уже позволяют, до определенной степени, оценивать климат планеты. А еще можно оценить, как убывает с расстоянием между двумя точками связь (корреляция) между значениями температуры в этих точках. Эта скорость убывания также характеризует нашу атмосферу.

Кроме того, знание статистических характеристик позволяет подстроить численные алгоритмы, оптимальные для поля именно с такими характеристиками, и минимизировать среднюю ошибку алгоритмов. Объясним эти идеи подробнее.

Рассмотрим поле (функцию пространственных переменных, время зафиксировано) отклонений измеренных значений, например температуры, от средних климатических значений. Если нанести эти отклонения в точках станций на географическую карту, то станет видно, что полученное поле отклонений зависит от горизонтальных координат сравнительно плавно: имеются зоны положительных отклонений и зоны отрицательных отклонений с характерными размерами  $10^3$  км. Другими словами, если на окружающей точку станциях отклонения от климатических значений в какой-то момент времени положительные, то с большой вероятностью в этой точке и в этот момент (а также и в близкие моменты времени) отклонение от климатического значения также будет положительным. И величину этого отклонения можно оценить, например вычислив коэффициент корреляции между отклонениями в какой-то паре точек. Если эти две точки близки, то коэффициент корреляции близок к единице, однако по мере удаления точек друг от друга коэффициент будет убывать и даже может стать отрицательным.

Если известны коэффициенты корреляции между отклонениями в двух (или нескольких) точках, то можно оценить отклонение еще в одной точке, после чего можно будет вычислить и само значение температуры в данной точке.

Рассмотрим в качестве случайной величины отклонение в данной точке  $\bar{x}$  метеорологического поля от климата. Ее математическое ожидание будет равно нулю, так как климат это и есть математическое ожидание метеорологического поля. Строго следуя такому определению климата, нужно положить  $N = \infty$ , провести измерения метеорологического поля от начала мира до конца света, а затем взять среднее по всему этому ряду. Это, конечно же, нереально. Поэтому приходится использовать ряд наблюдений покороче. Кстати, это может дать более полезный результат. Действительно, для того чтобы оценить вероятность той или иной погоды на завтра или через неделю, хорошо бы иметь информацию, скажем, за последние сто лет – узнать, что за это время бывало часто, а что редко. А если миллион лет назад на месте пустыни было болото или ледник, то вот эти древние факты несущественны. Еще раз подчеркнем: несущественны для задачи прогноза (или для оценок погоды) на день или неделю.

Если же нас интересует, какой была средняя за каждый век температура воздуха по Европе и росла она или убывала, когда века сменяли друг друга, то столетнего архива для этого уже явно недостаточно. Информацию об изменениях такого временного масштаба, по-видимому, будет полезнее искать не в небесах (запуская радиозонды), а под землей (исследуя останки животных и растений, льды, геологические породы и т.п.). Среднее за сто лет зависит от того, когда эти сто лет начинаются. За миллион лет это средне-вековое значение температуры может сильно измениться.

Назовем климатическим полем, или просто климатом<sup>22</sup>, метеорологическое поле, осредненное на некотором временном интервале  $\Delta t$ . Климатическое поле  $\zeta(\bar{x})$  (давление, компоненты ветра и т.п.) есть функция пространственных переменных, зависящая от ин-

<sup>22</sup> Слово «климат» произошло от греческого «наклон». Понятие введено Гиппархом из Никей (190–120 до н.э.). Земля была им разделена условно на пять широтных зон, на которые солнечные лучи падают под разным наклоном. Там, где наклон силен, солнце слабо нагревает воздух. Греция и Малая Азия лежат во втором (т. е. умеренном) северном климате, каковой наиболее благоприятен для жизни человека. На самом деле основной нагрев воздуха производит свет, не идущий непосредственно от Солнца, а сначала поглощенный и затем излученный поверхностью планеты (в современных прогнозах учитывают альбедо поверхности, определяющее, какая часть светового потока будет поглощена поверхностью суши или воды, а какая будет отражена сразу в атмосферу). В XIX веке А.Гумбольдт (1769–1859) предложил при анализе причин различия климата в разных частях планеты кроме широты местности учитывать также близость океанов и т. п. географические факторы, влияющие на климат в современном его понимании.

<sup>23</sup> Поскольку на расстояниях порядка радиуса Земли корреляция близка к нулю, кривизна Земли в данной статистической модели несущественна – Землю можно считать плоской!



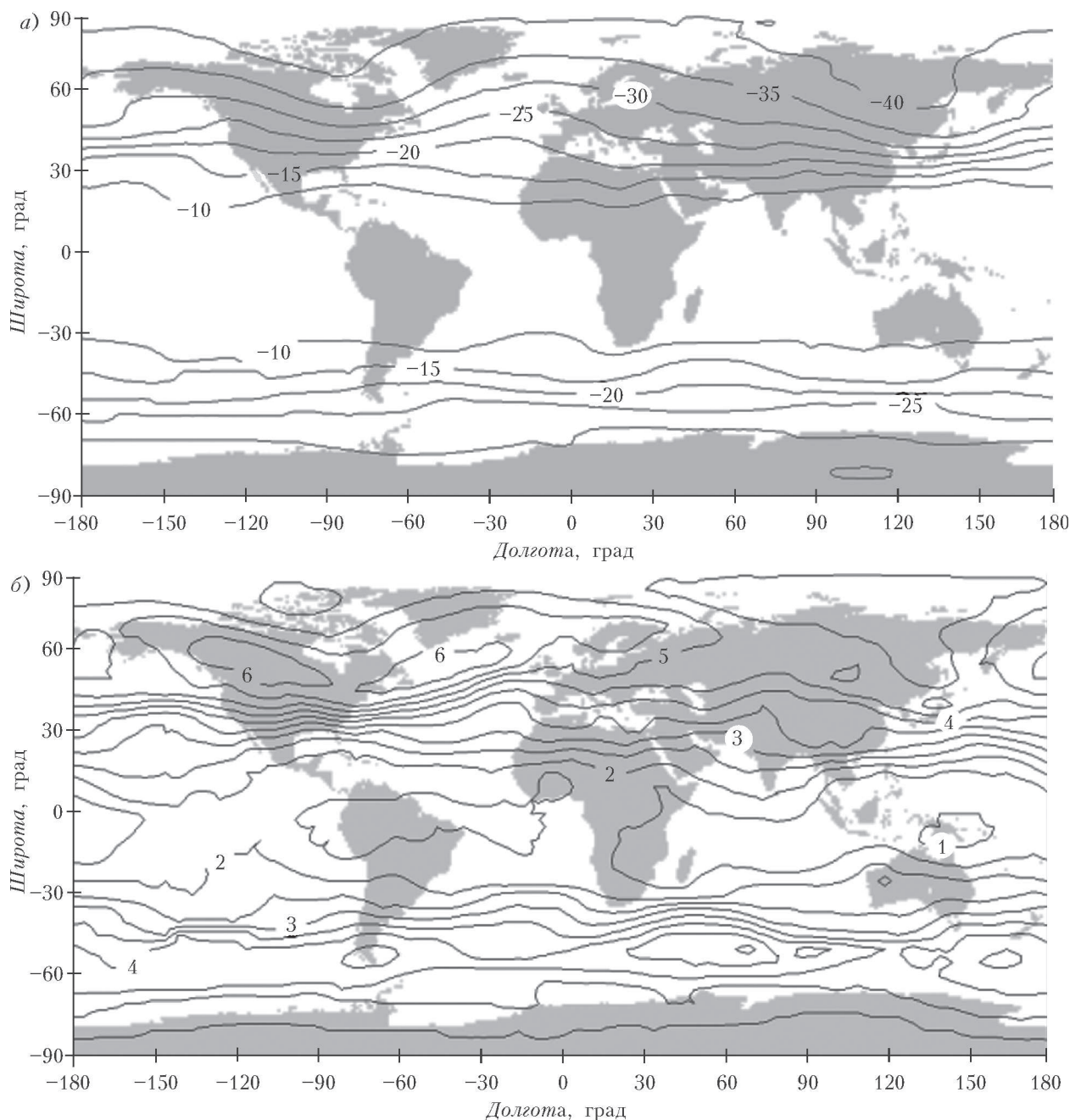


Рис.8. Климатические поля: а) средне-январские температуры (в °С) на барическом уровне 500 гПа; б) SKO январской температуры. Поля имеют выраженный зональный характер: зависимость от долготы существенно меньше, чем от широты. Разумеется, SKO, отвечающая какому-то определенному месяцу, меньше, чем для года в целом. Разбиение на месяцы перед осреднением не полностью отвечает существу дела – например, приход муссона и соответствующая перестройка циркуляции происходят в разные года в разные даты

тервала осреднения  $\Delta t$ . Климатическое поле зависит и от времени начала интервала (климат можно связывать с началом, серединой или концом интервала осреднения). Итак, климат похож на математическое ожидание и может заменять его во многих практических вычислениях, но в строгом смысле им не является.

Помимо средних значений поля полезно статистически оценивать и более сложные его характеристики, например дисперсию (или SKO; см. рис.8,б)

$$D\zeta(\bar{x}) = \sigma_{\zeta}^2(\bar{x}) = M(\zeta(\bar{x}) - M\zeta(\bar{x}))^2$$

или корреляционную функцию

$$K(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{M(\zeta(\bar{x}_1) - M\zeta(\bar{x}_1))(\zeta(\bar{x}_2) - M\zeta(\bar{x}_2))}{\sigma_{\zeta}(\bar{x}_1)\sigma_{\zeta}(\bar{x}_2)},$$

которая характеризует синхронность колебаний  $\zeta(\bar{x})$  в двух заданных точках  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ . Но ведь в каждой точке не поставить термометр, так что для всех пар точек такую функцию не вычислить. Ограничимся меньшим.

Предположим, что корреляционная функция  $K$  шести переменных  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  (каждый вектор имеет по три координаты) на самом деле зависит только от трех

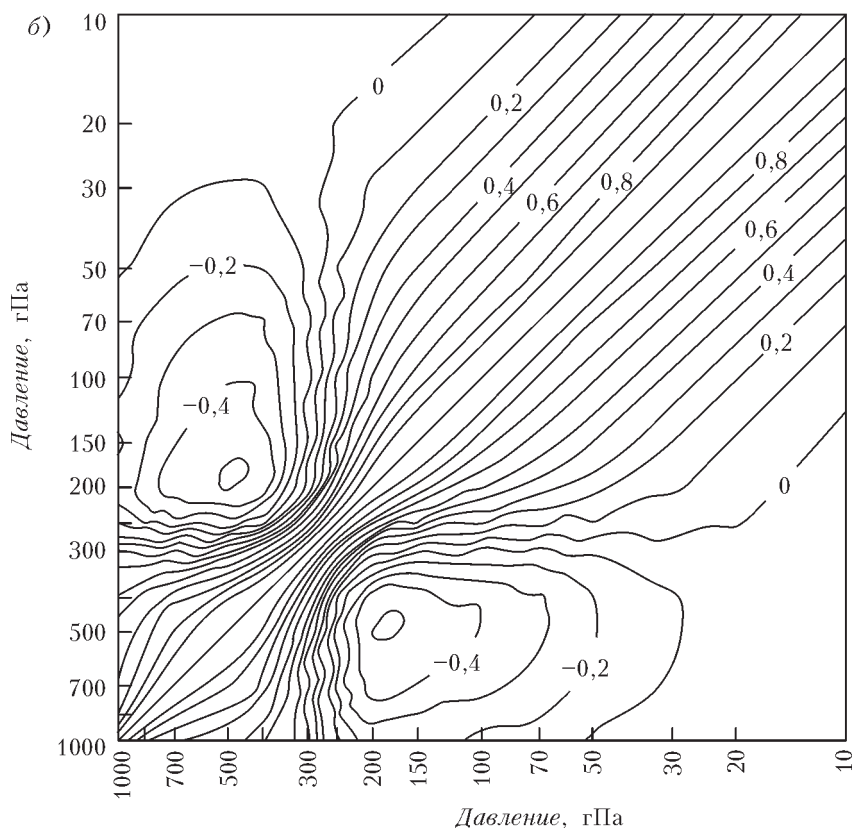
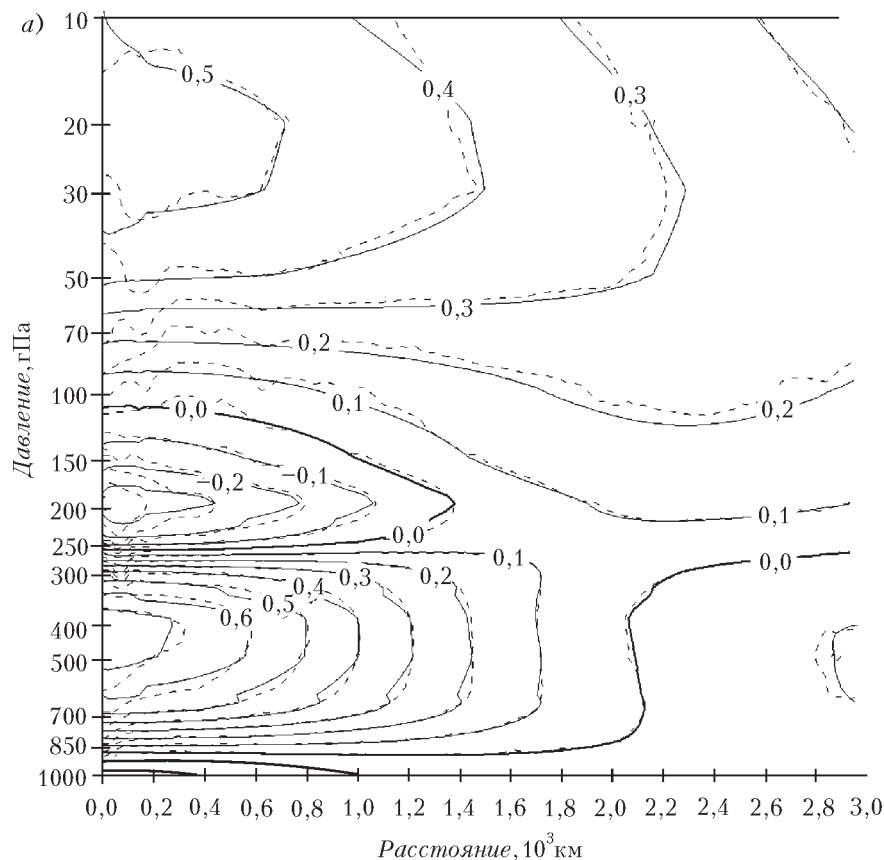


Рис.9. Изолинии корреляционной функции температуры: а) на одном и том же барическом уровне  $p$  (в гПа), разделенных расстоянием  $r$  (в тыс. км); б) на разных барических уровнях при нулевом расстоянии по горизонтали. Использована статистика умеренных широт северного полушария для января

неотрицательных координат: вертикальных координат, точнее давлений, и расстояния между точками по горизонтали:

$$K = K(p_1, p_2, r), \text{ где}$$

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

На рисунке 9,а приведены изолинии корреляционной функции температуры при  $p_1 = p_2$ , когда  $K$  зависит только от одного давления и от расстояния<sup>23</sup>. На рисунке 9,б изображены изолинии для случая, когда  $r = 0$ , а давления различны. В первом случае нет изолинии  $K = 1$ , поскольку измерения, которыми мы располагаем, производятся с ошибками. Поэтому функция  $K = K(p, r)$  разрывна при  $r = 0$ . Глядя на рисунок 9, мы можем сделать вывод, что наименьшие статистические связи (корреляции) наблюдаются в районе тропопавзы (т.е. в диапазоне 300–100 гПа), которая отделяет тропосферу от стратосферы. Но тропопавза не бесконечно тонкая поверхность, а зона. Она меняет свою высоту со временем, и ее положение зависит от горизонтальных координат. Движение – преобразование, которое не меняет расстояний. Движение полупространства это всегда сдвиг этого полупространства по горизонтали и поворот вокруг вертикальной оси. В обоих случаях  $r$  в формуле для  $K$  не меняется. Если корреляционная функция какого-то случайного поля  $\zeta(\vec{x})$  инвариантна (т.е. не меняется) при сдвигах, то поле  $\zeta$  называется однородным, а если она инвариантна при поворотах, то – изотропным.

Реальные метеорологические поля (если рассматривать их как реализации случайных полей) в точности не являются однородными и изотропными по горизонтали, однако такая модель часто оказывается вполне пригодной для практического применения. А вот изменения полей по вертикальной координате в интересных для метеорологии масштабах существенно иные, чем по горизонтали. Отличия от изотропии, если они определены достаточно надежно, могут дать существенную информацию. Рассмотрим, например, кросс-корреляционные функции (рис.10), полученные по рисунку 6 (см. предыдущий номер журнала) осредненным:

$$K(x, y) = \frac{\sum_{j,k} f_0(j, k) f_1(j + x, k + y)}{\sum_{j,k} 1}.$$

Здесь в качестве функций  $f_0, f_1$  исполь-



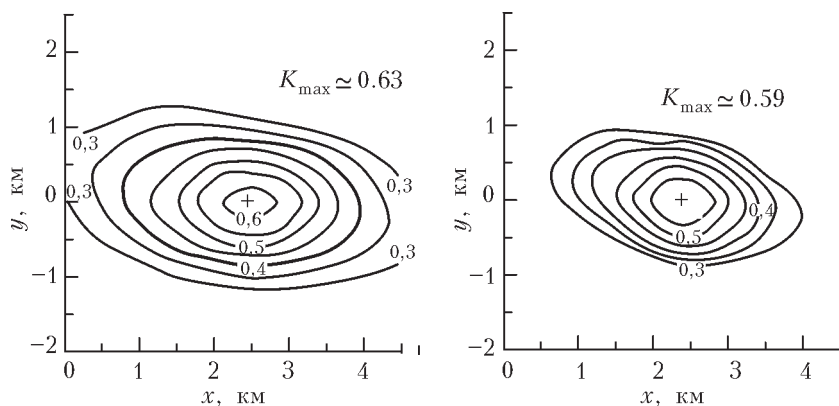


Рис.10. Кросс-корреляционные функции для компонент ветра ( $u$  – слева,  $v$  – справа) со сдвигом по времени примерно в 3,5 мин. Максимальная корреляция здесь достигается отнюдь не в начале координат (см. знак «плюс»). Она, как видно из обоих рисунков, смещена по потоку основного ветра, причем на расстояние, которое частицы воздуха как раз и проходят за 3,5 мин. Разумеется, на больших пространственно-временных масштабах основной поток ветра доминирует над флуктуациями не так сильно. Впрочем, в тропиках подобные явления (переноса максимума корреляций основным потоком) наблюдаются и на больших масштабах

зуются компоненты  $u$  или  $v$  отклонения скорости ветра на поверхности от среднего потока в два момента времени. Суммирование тут производится по всем точкам сетки  $(j, k)$  таким, что и она, и точка  $(j + x, k + y)$  лежат в указанном сеточном квадрате. Из рисунка 10 следует, что  $K(0,0) \approx 0,3$  для  $u$  и  $K(0,0) \approx 0$  для  $v$ , т.е. ветер слабо коррелирует с тем ветром, который дул всего 3,5 мин назад. Корреляция существенно больше, если учесть основной поток. Действительно,  $\max_{x,y} K(x,y) \approx K(0, 3,5 \text{ км}) \approx 0,6$  для обеих компонент.

Как уже неоднократно упоминалось, в нашем распоряжении имеется информация, поступающая из сети метеорологических станций, которые расположены крайне неравномерно. Для дальнейшего использования этой информации в численном прогнозе нужно переинтерполировать ее в регулярную сетку так называемых узлов. Здесь неважно, что эта сетка станет регулярной, важно то, что это уже будут совсем другие точки.

Будем интерполировать не само метеорологическое поле, а его отклонение от вычисленного заранее детерминированного климатического (или прогностического) поля. Статистическая гипотеза, которой мы будем пользоваться, состоит в том, что это нормированное отклонение (т.е. деленное на корень из дисперсии)

$$\xi(\bar{x}) = \frac{\zeta(\bar{x}) - M\zeta(\bar{x})}{\sigma_\zeta(\bar{x})}$$

есть центрированное, однородное и изотропное случайное поле. Следовательно, нам нужно заранее знать поля  $M\zeta(\bar{x})$  и  $\sigma_\zeta(\bar{x})$ , а также корреляционную функцию для нормированного случайного поля  $\xi$ .

### Оптимальная интерполяция

В этом безумии есть своя система.

У.Шекспир. Гамлет, принц датский

Важный блок алгоритма прогноза погоды составляет формирование начальных полей на регулярной (часто широтно-долготной) сетке. Но измерения имеются в других точках – там, где расположены станции, или над которыми пролетел спутник. Если нас интересуют не климатические задачи, а прогностические, то имеет смысл рассматривать отклонение не от среднего, климатического, поля, а от поля прогноза, который был сделан, скажем, сутки назад:

$$\xi(\bar{x}) = \frac{\zeta(\bar{x}) - \zeta_{\text{прогн}}(\bar{x})}{\sigma_{\text{прогн}}(\bar{x})},$$

где знаменатель – это СКО прогноза от фактических наблюдений. Для современных прогностических моделей дисперсия этого отклонения в несколько раз меньше, чем дисперсия отклонений от климата.

Будем считать, что корреляционные функции уже известны. Пусть  $\bar{x}_0$  – точка, в которой нужно определить отклонение  $\xi_0$  нормированного метеорологического поля от климата, а  $\{\bar{x}_j\}_{j=1}^N$  – множество точек, окружающее точку  $\bar{x}_0$ , в которых это отклонение  $\xi_j = \xi(\bar{x}_j)$  уже известно, поскольку в этих точках расположены метеорологические станции. Величину  $\xi_0$  будем оценивать по формуле  $\xi_0 \approx \sum_{j=1}^N a_j \xi_j$ , подбирая коэффициенты  $a_j$  оптимальным образом: чтобы средний квадрат ошибки  $M \left( \xi_0 - \sum_{j=1}^N a_j \xi_j \right)^2$  был минимальным.

Используя определение корреляционной функции и дифференцируя по всем  $a_j$ , получим систему линейных алгебраических уравнений

$$B \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix}, \quad B = \|b_{jm}\|,$$

$$b_{jm} = K(\bar{x}_j, \bar{x}_m), \quad z_j = K(\bar{x}_j, \bar{x}_0).$$

Можно доказать, что симметричная матрица  $B$  неотрицательно определена. С помощью некоторых ухищрений (см. [1], [5], [6]; изолинии такой «подправленной» корреляционной функции  $K$  на рисунке 9 изображены пунктиром) можно обеспечить и положительную определенность, т.е. ее собственные числа вещественны и неотрицательны. Для решения таких систем существуют очень эффективные компьютерные алгоритмы.

Если предположить, что случайное поле  $\xi = \xi(\bar{x})$  однородно и изотропно, то измерений для оценки функции одной переменной  $k(|\bar{x}_j - \bar{x}_m|)$  понадобится

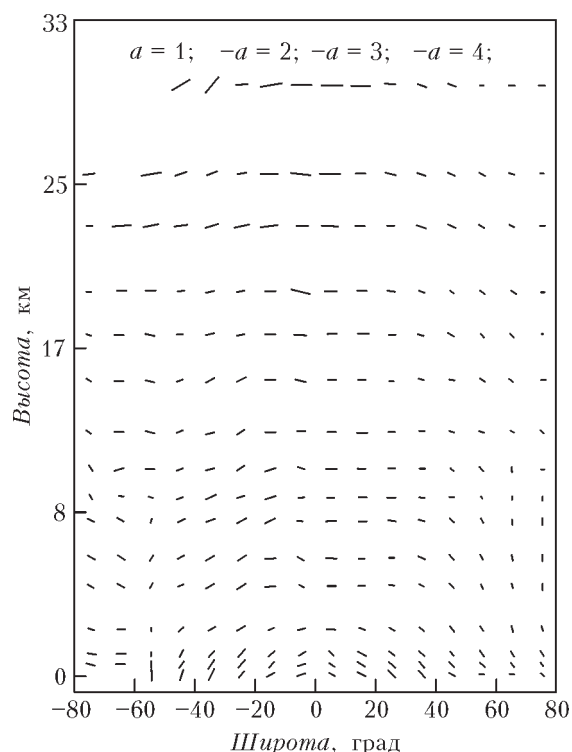


Рис.11. Анизотропия поля январских температур. Ориентация отрезка показывает направление наибольшей корреляции поля температуры в зависимости от широты и высоты (осреднение по долготе). Горизонтальное расположение отрезка означает, что корреляция сильнее вдоль параллели, вертикальное – вдоль меридиана. Чем длиннее отрезок, тем больше у корреляционной функции анизотропия  $a$ . Как видно, максимум  $a$  лежит в тропической стратосфере

ся во много раз меньше, чем для определения функции  $K$ , зависящей от двух векторных аргументов. Изотропность можно предполагать только по горизонтальным переменным. Простая статистическая гипотеза об однородности и изотропности по горизонтали использовалась в метеорологии около полувека. Однако накопление архивов метеоизмерений, рост вычислительных возможностей и разработка новых вычислительных алгоритмов привели к ее пересмотру. Оказалось, что и по горизонтальным переменным анизотропия, например температур, существенно проявляется в тропической зоне (рис.11). Алгоритм статистической интерполяции, учитывающий анизотропию интерполируемого поля, несколько сложнее изотропной версии.

### Заключение

*Пошли хлеб свой по водам, ибо спустя много дней ты найдешь его.*

Экклезиаст

Большие объемы метеорологической информации требуют адекватных вычислительных алгоритмов усвоения. Качество продукции определяется качеством собственно алгоритмов и точностью, ассортиментом и объемом измерений, а также мощностью компьютеров. В результате улучшается и численный прогноз погоды, и наше представление о климате планеты. В свою

очередь, знание полей средних и корреляционных функций метеорологических полей позволяет отлаживать численные климатические модели, довольно популярные в последние десятилетия. Пока корреляционные функции, генерируемые этими моделями, не окажутся близки к истинным корреляционным функциям, оцененным по архивам наблюдений, верить таким моделям не стоит.

В этой статье не было возможности объяснить, как именно используются данные ежедневных наблюдений<sup>24</sup> для прогноза погоды: какие эволюционные дифференциальные уравнения гидродинамического типа решаются, какие физические процессы они описывают, какие вычислительные алгоритмы используются. Для этого нужна отдельная книга и хорошая математическая подготовка читателя.

Первый численный прогноз погоды произвел шотландец Л.Ричардсон около века назад. Штат вычислителей был вооружен логарифмическими линейками. Вычислительная работа по прогнозу погоды на 6 часов для Европы продолжалась несколько лет и привела к чудовищно ошибочному прогнозу. Еще четверть века потребовала «работа над ошибками Ричардсона», в которой принимали участие и математики (Р.Курант, К.Фридрихс, Г.Леви), и «математики с метеорологическим уклоном» (Г.Россби, И.А.Кибель). Когда в Лос-Аламосе после изготовления атомной бомбы появилось немного свободного времени у ученых (и у их компьютеров), они занялись задачей прогноза погоды. Последние шестьдесят лет качество прогнозов неуклонно росло. Человечество начало пользоваться плодами своих многовековых вложений в метеорологию.

Но это уже другая история...

### Литература

1. О.А.Алдухов, В.А.Гордин. *Трехмерные корреляционные функции основных аэрологических величин*. – «Известия РАН», серия «Физика атмосферы и океана», 2001, 37(1).
2. О.А.Алдухов, В.А.Гордин. *Оценки анизотропии корреляционной структуры полей метеорологических величин по наблюдениям глобальной аэрологической сети*. – «Известия РАН», серия «Физика атмосферы и океана», 2005, 41(3).
3. А.И.Бедрицкий, Е.П.Борисенков, А.С.Коровченко, В.М.Пасецкий. *Очерки по истории Гидрометеорологической службы в России*, т.1. – С-П.: Гидрометеоиздат, 1997.
4. В.А.Гордин. «Кулоновский» алгоритм выбора влияющих станций. – «Метеорология и гидрология», 2003, №12.
5. В.А.Гордин *Как это посчитать? Обработка метеорологической информации на компьютере*. – М.: МЦНМО, 2005.
6. В.А.Гордин. *Математика, компьютер, прогноз погоды и другие сценарии математической физики*. – М.: Физматлит, 2010.
7. А.Х.Хргиан. *Очерки развития метеорологии*. – Л.: Гидрометеоиздат, 1959.

<sup>24</sup> Нужны не только собственно метеорологические наблюдения, но также наблюдения за альбедо поверхности, за океаном и реками, за свойствами листьев и корней растений, которые, как и почва, испаряют и поглощают влагу. Иначе не получится более точных прогнозов. «Чем дальше в лес, тем больше дров...»



# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 ноября 2010 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4-2010» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «M2184» или «Ф2190». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам [math@kvant.info](mailto:math@kvant.info) и [phys@kvant.info](mailto:phys@kvant.info) соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи M2184–M2186, M2188–M2190 предлагались на XXXI Турнире городов.

Задача Ф2195 предлагалась на заключительном этапе XLIV Всероссийской олимпиады школьников по физике.

## Задачи M2184–M2190, Ф2190–Ф2197

**M2184.** Про функцию  $f(x)$  известно следующее: любая прямая на координатной плоскости имеет с графиком  $y = f(x)$  столько же общих точек, сколько с параболой  $y = x^2$ . Докажите, что функция  $f(x)$  тождественно равна  $x^2$ .

*А. Шаповалов*

**M2185.** Дано натуральное число  $n \geq 5$ . Про пирамиду  $SA_1A_2 \dots A_n$  известно, что ее основание  $A_1A_2 \dots A_n$  – правильный  $n$ -угольник, а все боковые грани – равнобедренные треугольники (не обязательно с вершиной  $S$ ). Обязательно ли эта пирамида правильная?

*Г. Гальперин*

**M2186.** Барон Мюнхгаузен попросил задумать непостоянный многочлен  $P(x)$  с целыми неотрицательными коэффициентами и сообщить ему только значения  $P(2)$  и  $P(P(2))$ . Барон утверждает, что он только по этим данным всегда может восстановить задуманный многочлен. Не ошибается ли барон?

*С. Маркелов*

**M2187.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ , пересекающиеся в точке  $H$ . Прямые  $A_1C_1$  и  $AC$  пересекаются в точке  $D$ . Докажите, что прямая  $DH$  перпендикулярна медиане, проведенной из вершины  $B$ .

*С. Ильясов (ученик 8 класса, Алматы)*

**M2188.** На плоскости лежит игла. Разрешается поворачивать иглу на  $45^\circ$  вокруг любого из ее концов. Можно ли, сделав несколько таких поворотов, добиться того,

чтобы игла вернулась на исходное место, но при этом ее концы поменялись местами?

*А. Грибалко*

**M2189.** Тридцать три богатыря едут верхом по кольцевой дороге против часовой стрелки. Могут ли они ехать неограниченно долго с различными постоянными скоростями, если на дороге есть только одна точка, в которой богатыри имеют возможность обгонять друг друга?

*А. Клячко, Е. Френкель*

**M2190.** Дано натуральное число. Разрешается расставить между цифрами числа плюсы произвольным образом и вычислить сумму (например, из числа 123456789 можно получить  $12345 + 6 + 789 = 13140$ ). С полученным числом снова разрешается выполнить подобную операцию, и так далее. Докажите, что из любого числа можно получить однозначное, выполнив не более 10 таких операций.

*А. Толтыго*

**Ф2190.** Камень брошен с начальной скоростью  $v_0 = 40$  м/с под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту. Найдите максимальную угловую скорость вращения вектора скорости камня в процессе свободного полета.

*А. Камнев*

**Ф2191.** На гладком горизонтальном столе находится легкий стержень, к концам которого привязаны короткие, нерастяжимые куски легкой нити (рис.1). К свободным

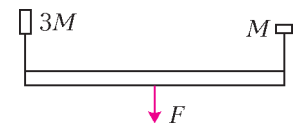


Рис. 1

концам кусков нити прикреплены грузы массами  $M$  и  $3M$ , лежащие на столе. К середине стержня приложена сила  $F$ , параллельная кускам нити и перпендикулярная стержню. Найдите ускорение середины стержня.

*А.Повторов*

**Ф2192.** Имеются 16 одинаковых батареек с ЭДС  $\mathcal{E} = 1$  В и внутренним сопротивлением  $r = 1$  Ом каждая. Сопротивление нагрузки  $R = 1$  Ом. Как нужно соединить батарейки, чтобы получить максимальный ток нагрузки? Найдите этот ток.

*А.Зильберман*

**Ф2193.** В сосуде под поршнем находится 1 моль газа. Его температура увеличивается на 1 градус в минуту, а объем за 3 минуты изменился от 30 литров до 31 литра. Давление же газа за это время практически не менялось. Найдите это давление.

*А.Газов*

**Ф2194.** Два протона летят навстречу друг другу вдоль одной прямой. В некоторый момент скорости протонов равны  $v$  и  $2v$ , а расстояние между ними равно  $d$ . Найдите максимальное ускорение одного из протонов за время их движения.

*Д.Протонов*

**Ф2195.** Униполярный индуктор представляет собой быстро вращающийся постоянный магнит в форме

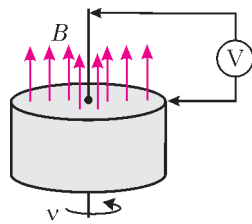


Рис. 2

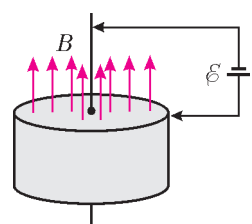


Рис. 3

диска. Диск выполнен из магнитного сплава, способного создавать сильное магнитное поле, и покрыт тонким проводящим слоем никеля. При вращении диска между осью вращения и боковой поверхностью возникает разность потенциалов, которую можно измерить с помощью неподвижного вольтметра (рис.2). Если же к оси вращения и боковой поверхности подсоединить батарейку, то магнит начнет быстро вращаться, превратившись в электродвигатель. Точно так же, если быстро вращать вал обычного электромотора, он превращается в генератор, и наоборот, если на электрический генератор подать напряжение, он превращается в электромотор.

На рисунке 3 показана схема такого реально работающего униполярного электродвигателя, ротором которого является сильный постоянный магнит в форме диска радиусом  $r_0 = 2$  см, насаженного на ось. При подключении с помощью скользящих контактов батарейки с ЭДС  $\mathcal{E} = 1,5$  В диск начинает быстро вращаться.

1) Что покажет неподвижный вольтметр на рисунке 2 при частоте вращения диска  $\nu = 3000$  об/мин? Какова полярность этой разности потенциалов? Вращение происходит против часовой стрелки, если смотреть сверху.

2) Пренебрегая трением, оцените предельную частоту вращения (об/мин) намагниченного диска (ротора униполярного двигателя на рисунке 3). Укажите направление вращения ротора (если смотреть сверху) при заданной полярности батарейки и заданном направлении вектора  $\vec{B}$ .

*Примечание.* Считайте, что в проводящем никелевом слое вектор индукции  $\vec{B}$  магнитного поля перпендикулярен поверхности диска, постоянен и равен  $B = 1$  Тл. Также для упрощения считайте, что ток в проводящем слое течет вдоль радиуса между осью и контактом.

*А.Гуденко*

**Ф2196.** Катушка индуктивностью  $L = 10$  Гн соединена последовательно с конденсатором емкостью  $C = 0,1$  мкФ, и цепь подключают к батарейке. Через какое время напряжение на конденсаторе установится с точностью не хуже 1%? Элементы цепи считать идеальными, сопротивление соединяющих проводов  $R = 1$  Ом.

*З.Катушкин*

**Ф2197.** На плоскую стену перпендикулярно падает плоская световая волна с длиной волны  $\lambda$ . Перед стеной параллельно ей ставят непрозрачный экран с круглым отверстием. Во сколько раз освещенность в центре светового пятна на стене может быть больше, чем освещенность без экрана? Расстояние между экраном и стеной  $h$ .

*З.Рафаилов*

### Решения задач М2161–М2168, Ф2177–Ф2181<sup>1</sup>

**М2161.** 100 пиратов сыграли в карты на золотой песок, а потом каждый посчитал, сколько он в сумме выиграл либо проиграл. У каждого проигравшего хватает золота, чтобы расплатиться. За одну операцию пират может либо раздать всем поровну золота, либо получить с каждого поровну золота. Докажите, что можно за несколько таких операций добиться того, чтобы каждый получил (в сумме) свой выигрыш либо выплатил проигрыш. (Разумеется, общая сумма выигрышей равна сумме проигрышей.)

Обозначим через  $Z$  сумму выигрышей (она же сумма проигрышей). Пусть сначала у каждого пирата весь его песок лежит в *правом* кармане. Попросим каждого проигравшего пирата выдать всем (включая себя самого) по  $1/100$  от своего проигрыша. Полученный при этом песок каждый кладет в свой *левый* карман. В результате у каждого пирата в *левом* кармане окажется по  $Z/100$  золотого песка, а *правый* карман каждого проигравшего «облегчится» на его проигрыш. Далее каждому выигравшему все пираты (включая его самого) выдают из своих *левых* карманов по  $1/100$  его выигрыша. В результате все *левые* карманы снова опустеют, а к песку в *правом* кармане каждого выигравшего добавится его выигрыш.

*Л. Медников, А.Шаповалов*

<sup>1</sup> Решения задач Ф2175, Ф2176 и Ф2182 будут опубликованы позже.

**M2162.** Семизначный код, состоящий из семи различных цифр, назовем хорошим. Паролем сейфа является хороший код. Известно, что сейф откроется, если введен хороший код и на каком-нибудь месте цифра кода совпала с соответствующей цифрой пароля. За какое наименьшее количество попыток можно с гарантией открыть сейф?

**Ответ:** за 6 попыток.

Приведем пример, в котором сейф с гарантией открывается за 6 попыток:

1234560,  
2345610,  
3456120,  
4561230,  
5612340,  
6123450.

Среди первых 6 цифр пароля есть цифра от 1 до 6. Поскольку мы каждую цифру от 1 до 6 по разу набрали на каждом из первых 6 мест, значит, в одном из случаев она совпадет с соответствующей цифрой пароля.

Теперь докажем, что пяти попыток недостаточно. Пусть сделано пять попыток. Обозначим через  $M_1$  множество цифр, которые не набирались в качестве первой цифры в этих попытках. Аналогично определим множества  $M_2, M_3, \dots, M_7$ . Так как всего было 5 попыток, то  $|M_i| \geq 10 - 5 = 5$  (здесь через  $|X|$  обозначаем количество элементов в множестве  $X$ ). Так как каждая из цифр 0, 1, ..., 9 набиралась не более одного раза в каждой попытке, то она содержится не менее чем в двух из семи множеств  $M_i$ . Покажем, что найдется пароль  $a_1 a_2 \dots a_7$ , где  $a_i$  — цифра из  $M_i$ ; это и будет означать, что в случае такого пароля сейф не откроется.

*1 случай.* Пусть в двух из множеств  $M_i$  не менее семи цифр, скажем  $|M_6| \geq 7$  и  $|M_7| \geq 7$ . Тогда можно выбрать в  $M_1$  любую цифру  $a_1$ , в  $M_2$  — цифру  $a_2$ , отличную от  $a_1$ , и т.д., в  $M_7$  — цифру  $a_7$ , отличную от  $a_1, a_2, \dots, a_6$ .

*2 случай.* Пусть хотя бы в шести из множеств  $M_i$  не более 6 цифр. Тогда найдется цифра  $x$ , которая не принадлежит двум из этих подмножеств, скажем  $x$  не принадлежит  $M_4$  и  $M_5$ . Также выберем еще одну цифру  $y \neq x$ , не принадлежащую  $M_5$ . Цифра  $y$  принадлежит хотя бы одному подмножеству  $M_i$ ,  $i \neq 4$ , скажем  $y \in M_6$ . Цифра  $x$  принадлежит хотя бы одному подмножеству  $M_i$ ,  $i \neq 6$ , скажем  $x \in M_7$ . Положим  $a_6 = y$ ,  $a_7 = x$ . Вычеркнув цифры  $x$  и  $y$  из подмножеств  $M_1, \dots, M_5$ , мы приходим к подмножествам  $M'_1, \dots, M'_5$ , для которых  $|M'_1| \geq 3$ ,  $|M'_2| \geq 3$ ,  $|M'_3| \geq 3$ ,  $|M'_4| \geq 4$ ,  $|M'_5| \geq 5$  ( $M'_5 = M_5$ ). Далее рассуждаем аналогично случаю 1: можно выбрать в  $M'_1$  любую цифру  $a_1$ , в  $M'_2$  — цифру  $a_2$ , отличную от  $a_1$ , и т.д., в  $M'_5$  — цифру  $a_5$ , отличную от  $a_1, a_2, a_3, a_4$ .

*Замечание.* В предыдущих рассуждениях можно избежать перебора случаев, если заметить, что соответствие  $i \rightarrow M_i$  удовлетворяет лемме Холла, применение которой и обеспечивает существование пароля  $a_1 a_2 \dots a_7$ , где  $a_i$  — цифра из  $M_i$ . Можно рассмотреть общую задачу про  $n$ -значный код в алфавите из  $m \neq n$  символов (в нашем случае  $n = 7$ ,  $m = 10$ ) и доказать, что

минимальное число попыток при  $n \leq m/2$  будет равно  $m + 1 - n$ , а при  $n > m/2$  оно равно  $\lceil m/2 \rceil + 1$ .

Д. Баранов, П. Кожевников

**M2163.** Найдите все такие натуральные числа  $a$  и  $b$ , что:

а)  $(a + b^2)(b + a^2)$  является точной степенью двойки;

б)  $(a + b^3)(b + a^3)$  является точной степенью тройки.

а) **Ответ:**  $a = 1, b = 1$ .

По условию каждая из скобок  $(b^2 + a)$  и  $(a^2 + b)$  должна являться натуральной степенью двойки.

Пусть  $a = 2^k m$ ,  $b = 2^l n$ , где  $m$  и  $n$  нечетные, а  $k$  и  $l$  — целые неотрицательные, для определенности пусть  $k \geq l$ . Тогда

$$a^2 + b = 2^{2k} m^2 + 2^l n = 2^l (2^{2k-l} m^2 + n).$$

Последняя скобка больше 1 и четна только при  $2k - l = 0$ , т.е. при  $k = l = 0$ . Это означает, что  $a$  и  $b$  нечетны.

Пусть тогда  $a + 1 = 2^k m$ ,  $b + 1 = 2^l n$ , где  $m$  и  $n$  нечетные,  $k$  и  $l$  — натуральные числа, для определенности снова пусть  $k \geq l$ . Тогда

$$a^2 + b = (2^k m - 1)^2 + 2^l n - 1 = 2^{2k} m^2 - 2^{k+1} m + 2^l n = 2^l A,$$

где  $A = 2^{k-l+1} m(2^{k-1} m - 1) + n$  нечетно, а следовательно, равно 1. Отсюда  $n = m = k = 1$ . Но тогда и  $l = 1$ , что дает единственный возможный ответ  $a = b = 1$ .

б) **Ответ:**  $a = 1, b = 2$  или  $a = 2, b = 1$ .

Схема решения будет в целом повторять рассуждения из пункта а). По условию каждая из скобок  $(b^3 + a)$  и  $(a^3 + b)$  должна являться натуральной степенью тройки.

Положим  $a = 3^k m$ ,  $b = 3^l n$ , где  $m$  и  $n$  не делятся на 3, а  $k$  и  $l$  — целые неотрицательные числа, для определенности пусть  $k \geq l$ . Тогда

$$a^3 + b = 3^{3k} m^3 + 3^l n = 3^l (3^{3k-l} m^3 + n).$$

Последняя скобка больше 1 и может делиться на 3 только при  $3k - l = 0$ , т.е. при  $k = l = 0$ . Это означает, что  $a$  и  $b$  не делятся на 3.

Пусть  $a \equiv 1 \pmod{3}$ , тогда  $a^3 \equiv 1 \pmod{3}$ , поэтому  $b^3 \equiv -1 \pmod{3}$ .

Если  $a = 1$ , то  $b = 3^l - 1$  для некоторого натурального  $l$ , отсюда

$$b^3 + a = 3^{3l} - 3^{2l+1} + 3^{l+1} = 3^{l+1} A,$$

где  $A = 3^l (3^{l-1} - 1) + 1$ .

При  $l > 1$  число  $A$  больше 1 и не делится на 3, поэтому возможно только  $l = 1$ , что приводит к паре  $a = 1, b = 2$ , которая удовлетворяет условию.

Если  $a > 1$ , то положим  $a - 1 = 3^k m$ ,  $b + 1 = 3^l n$ , где  $k, l, m$  и  $n$  — натуральные числа, причем  $m$  и  $n$  не делятся



на 3. Если  $k \geq l$ , то

$$a^3 + b = (3^k m + 1)^3 + (3^l n - 1) = 3^{3k} m^3 + 3^{2k+1} m^2 + 3^{k+1} m + 3^l n = 3^l A,$$

где  $A$  больше 1 и не делится на 3, что невозможно. Если же  $k \leq l$ , то  $b^3 + a = (3^l n - 1)^3 + (3^k m + 1) = 3^k B$ , где  $B = 3^{2l-k+1} n^2 (3^{l-1} n - 1) + 3^{l-k+1} n + m$ . Как видим,  $B$  больше 1 и не делится на 3, что невозможно.

Если же  $a \equiv -1 \pmod{3}$ , то  $a^3 \equiv -1 \pmod{3}$ , поэтому  $b \equiv 1 \pmod{3}$ , и заменой  $a \leftrightarrow b$  приходим к разобранному случаю  $a \equiv 1 \pmod{3}$ ,  $b \equiv -1 \pmod{3}$ .

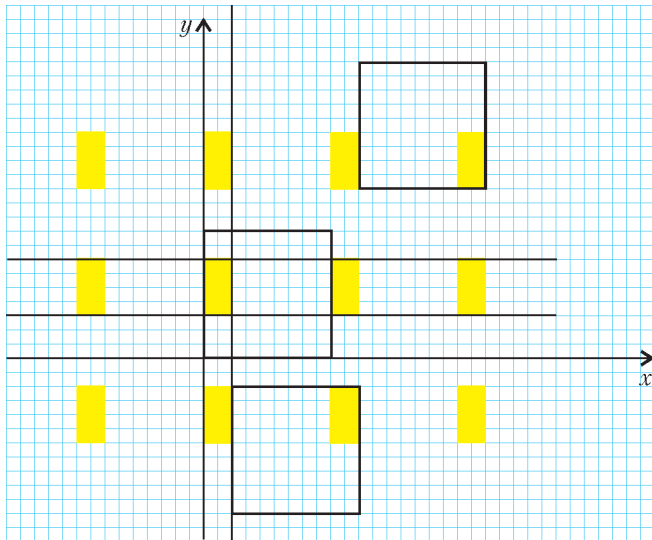
В.Произволов, П.Кожевников

**M2164.** а) На клетчатую плоскость положили 2009 одинаковых квадратов  $n \times n$  клеток. Затем отметили все клетки, которые покрыты нечетным числом квадратов. Докажите, что отмеченных клеток не меньше чем  $n^2$ .

б) На прямоугольный лист бумаги положили 2009 одинаковых единичных квадратов, стороны которых параллельны краям листа. Затем закрасили все области, которые покрыты нечетным числом квадратов. Докажите, что площадь закрашенной части листа не меньше 1.

Приведем решение задачи б) (пункт а) сводится к б), если изменить масштаб, т.е. квадрат  $n \times n$  считать единичным).

Введем систему координат с осями, параллельными краям листа (см. рисунок). Обозначим через  $K$  единичный квадрат, заданный неравенствами  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ .



Пусть  $k$ -й данный квадрат задается неравенствами

$$x_k \leq x \leq x_k + 1, \quad y_k \leq y \leq y_k + 1$$

( $k = 1, 2, \dots, 2009$ ).

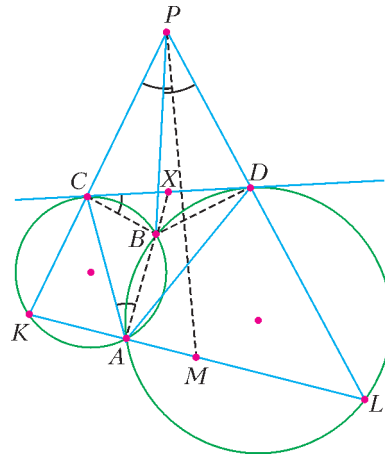
Положим  $\alpha_k = \{x_k\}$  и  $\beta_k = \{y_k\}$  (дробные части чисел  $x_k$  и  $y_k$ ). Квадрат  $K$  разбивается прямыми  $x = \alpha_k$ ,  $y = \beta_k$  на прямоугольники. Рассмотрим один из таких

прямоугольников  $\Pi = \Pi_{(0,0)}$  и все его сдвиги  $\Pi_{(k,l)}$  на векторы с целыми координатами  $(k, l)$ . Каждый из данных 2009 квадратов покрывает ровно один из прямоугольников  $\Pi_{(k,l)}$  (а с остальными не имеет общих внутренних точек), поэтому хотя бы один из прямоугольников  $\Pi_{(k,l)}$  покрыт нечетным числом квадратов, т.е. закрашен. Повторяя рассуждения для каждого из прямоугольников, на которые разбит квадрат  $K$ , получаем, что площадь закрашенной части листа не меньше площади квадрата  $K$ .

П.Кожевников

**M2165.** К двум окружностям  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , пересекающимся в точках  $A$  и  $B$ , проведена их общая касательная  $CD$  ( $C$  и  $D$  – точки касания соответственно, точка  $B$  ближе к прямой  $CD$ , чем  $A$ ). Прямая, проходящая через  $A$ , вторично пересекает  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно ( $A$  лежит между  $K$  и  $L$ ). Прямые  $KC$  и  $LD$  пересекаются в точке  $P$ . Докажите, что прямая  $PB$  симметрична медиане треугольника  $KPL$ , проведенной из вершины  $P$ , относительно биссектрисы угла  $KPL$ .

Пусть прямая  $AB$  пересекает отрезок  $CD$  в точке  $X$  (см. рисунок). Тогда  $XC^2 = XB \cdot XA = XD^2$ , т.е.  $XC = XD$ , и значит, прямая  $AB$  содержит медиану треугольника



$ACD$ . Заметим, что  $\angle ACD = \angle AKC$  как угол между касательной и хордой. Аналогично,  $\angle CDA = \angle DLA$ . Значит, треугольник  $ACD$  подобен треугольнику  $PKL$ . В частности, если  $PM$  – медиана треугольника  $PKL$ , то  $\angle KPM = \angle CAX$ . Так как  $\angle PCB = 180^\circ - \angle KCB = \angle KAB = 180^\circ - \angle LAB = \angle LDB = 180^\circ - \angle PDB$ , то четырехугольник  $BCPD$  вписанный. Имеем  $\angle LPB = \angle DPB = \angle DCB = \angle CAB = \angle KPM$ , и значит, прямая  $PB$  – симедиана (прямая, симметричная медиане треугольника  $KPL$  относительно биссектрисы угла  $KPL$ ).

В.Омельяненко

**M2166.** Обозначим через  $[k]!$  произведение  $1 \cdot 11 \cdot 111 \cdot \dots \cdot \underbrace{11\dots 11}_k$  – всего  $k$  сомножителей. Докажите, что число  $[n + m]!$  делится на произведение  $[n]! \cdot [m]!$ .

Обозначим число из  $k$  единиц через  $1_k$ , тогда  $[m]! = 1_m [m-1]!$ ,  $1_{m+n} = 10^m 1_n + 1_m$ . Обозначим

$$C[m, n] = \frac{[n+m]!}{[m]![n]!}.$$

Положим  $[0]! = 1$ , тогда  $C[0, n]$  и  $C[m, 0]$  определены и равны 1.

Докажем индукцией по  $m+n$ , что число  $C[m, n]$  – целое. База и случай  $m=0$  или  $n=0$  очевидны.

Пусть  $m, n \geq 1$  и для меньших значений  $m+n$  все доказано. Тогда число

$$\begin{aligned} C[m, n] &= \frac{1_{m+n} [n+m-1]!}{[m]![n]!} = \frac{(1_n 10^m + 1_m) [n+m-1]!}{[m]![n]!} = \\ &= 10^m \frac{1_n [n+m-1]!}{[m]! 1_n [n-1]!} + \frac{1_m [n+m-1]!}{1_m [m-1]! [n]!} = \\ &= 10^m C[m, n-1] + C[m-1, n] \end{aligned}$$

– тоже целое.

*Л.Медников, А.Шаповалов*

**M2167\***. Оля и Максим оплатили путешествие по архипелагу из 2009 островов, где некоторые острова связаны двусторонними маршрутами катера. Они путешествуют, играя. Сначала Оля выбирает остров, на который они прилетают. Затем они путешествуют вместе на катерах, по очереди выбирая остров, на котором еще не были (первый раз выбирает Максим). Кто не сможет выбрать остров, проиграл. Докажите, что при любой схеме маршрутов Оля может выиграть, как бы ни играл Максим.

Отметим на схеме маршрутов катеров максимально возможное число  $k$  маршрутов без общих концов; пусть это маршруты  $A_1 - B_1, A_2 - B_2, \dots, A_k - B_k$  (здесь все  $2k$  островов  $A_i$  и  $B_i$  попарно различны). Обозначим через  $C_1, C_2, \dots, C_l$  все острова, отличные от  $A_i$  и  $B_i$  ( $l = 2009 - 2k$  нечетно, поэтому имеется хотя бы один остров  $C_j$ ).

Пусть первым ходом Оля выбирает для прилета остров  $C_1$ . Далее, если Максим ходит на  $A_i$  (или  $B_i$ ), Оля отвечает ходом на парный остров  $B_i$  (соответственно,  $A_i$ ).

Предположим, что в какой-то момент Максим сделал ход на остров  $C_j$ . Для определенности считаем, что до этого момента путь Оли и Максима по островам имел вид  $C_1 - A_1 - B_1 - A_2 - B_2 - \dots - A_t - B_t - C_j$ . Но тогда в противоречие с максимальной  $k$  мы можем выбрать  $k+1$  маршрутов без общих концов:  $C_1 - A_1, B_1 - A_2, \dots, B_{t-1} - A_t, B_t - C_j, A_{t+1} - B_{t+1}, \dots, A_k - B_k$ . Полученное противоречие показывает, что ход Максима на остров  $C_j$  невозможен. Значит, играя по указанной стратегии, Оля выигрывает, так как у нее всегда найдется ответный ход на ход Максима.

*А. Шаповалов*

**M2168\***. Дан четырехугольник  $ABCD$ , вписанный в окружность  $\omega$ . Пусть  $R_1$  – радиус окружности, касающейся отрезков  $AB, AD$  и окружности  $\omega$ ,  $R_2$  –

радиус окружности, касающейся отрезков  $CB, CD$  и окружности  $\omega$ . Проводятся всевозможные дуги окружности  $BD$ , разбивающие четырехугольник на два криволинейных треугольника. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в эти криволинейные треугольники, не зависит от выбора дуги  $BD$  тогда и только тогда, когда  $R_1 = R_2$ .

Обозначим через  $r_1$  и  $r_2$  радиусы окружностей, вписанных в криволинейные треугольники  $ABD$  и  $CBD$  соответственно. Докажем более общий факт: величина  $\frac{r_1}{R_1} + \frac{r_2}{R_2}$  равна 1 (независимо от выбора дуги  $BD$ ).

Из этого факта сразу следует утверждение задачи. Действительно, если  $R_1 = R_2$ , то сумма  $r_1 + r_2$  постоянна. Если же  $R_1 \neq R_2$ , то величина

$$r_1 + r_2 = R_1 \left( \frac{r_1}{R_1} + \frac{r_2}{R_2} \right) + r_2 \left( 1 - \frac{R_1}{R_2} \right)$$

является непостоянной линейной функцией от  $r_2$  (а  $r_2$ , как легко видеть из условия, может принимать различные значения).

**Лемма.** Пусть даны окружности  $c_1$  и  $c_2$ , пересекающиеся в точках  $M$  и  $N$ . На одной из дуг окружности  $c_1$  выбирается точка  $X$ . Окружность  $s_1$  касается отрезков  $XM, XN$  и окружности  $c_1$ , а окружность  $s_2$  касается отрезков  $XM, XN$  и фиксированной дуги  $MN$  окружности  $c_2$  (рис.1). Тогда отношение радиусов  $\frac{R_1}{R_2}$  окружностей  $s_1$  и  $s_2$  не зависит от выбора точки  $X$ .

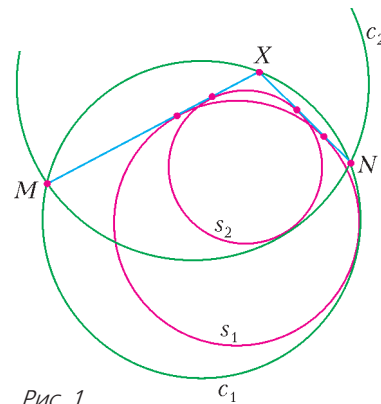


Рис. 1

**Доказательство леммы.** Пусть прямая  $XN$  пересекает вторично окружность  $c_2$  в точке  $Y$ . Пусть окружность  $s_1$  касается отрезков  $XM$  и  $XN$  в точках  $M_1$  и  $N_1$ , а окружность  $s_2$  – в точках  $M_2$  и  $N_2$ . Как известно (см., например, основную теорему в статье В.Протасова «Касающиеся окружности: от Тебо до Фейербаха» в «Кванте» № 4 за 2008 г.), прямая  $M_1N_1$  проходит через центр  $I$  вписанной окружности треугольника  $XMN$ , а прямая  $M_2N_2$  – через центр  $J$  вписанной либо одной из внеписанных окружностей треугольника  $YMN$ . Далее будем рассматривать первый случай (рис.2); второй разбирается аналогично. Пусть в треугольнике  $XMN$  точка  $I'$  – центр внеписанной окружности, касающейся стороны  $XM$ . Тогда точки  $I, J, I'$

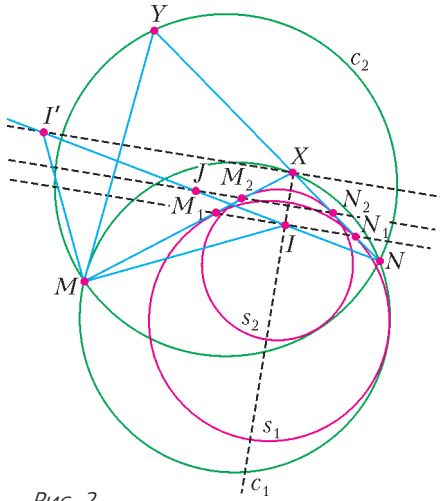


Рис. 2

лежат на одной прямой – биссектрисе угла  $XNM$ , прямые  $XI'$ ,  $M_1I$  и  $M_2J$  параллельны (они перпендикулярны биссектрисе угла  $MXN$ ). Заметим, что при изменении точки  $X$  величины углов  $MIN$ ,  $MJN$ ,  $MI'N$  не меняются

$$\left( \angle MIN = 90^\circ + \frac{\angle MXN}{2}, \quad \angle MJN = 90^\circ + \frac{\angle MYN}{2}, \right.$$

$$\left. \angle MI'N = 90^\circ + \frac{\angle MXN}{2} \right).$$

Поэтому (прямоугольные) треугольники  $MI'I'$  для любых положений точки  $X$  подобны, а точка  $J$  делит отрезок  $II'$  в фиксированном отношении.

Далее, из гомотетии с центром  $X$  вытекает, что отношение радиусов  $\frac{\rho_1}{\rho_2}$  равно  $\frac{XM_1}{XM_2} = \frac{I'I}{I'J}$ , т.е. не зависит от положения точки  $X$ .

Лемма доказана.

Из леммы вытекает, что в условии задачи сумма  $\frac{r_1}{R_1} + \frac{r_2}{R_2}$  не изменится, если точки  $A$  и  $C$  перемещать по соответствующим дугам окружности  $\omega$ . Таким образом, можем считать, что точки  $A$  и  $C$  являются серединами дуг  $BD$  (рис.3). В таком случае из симметрии относительно диаметра  $AC$  следует, что окружности, вписанные в криволинейные треугольники  $ABD$  и

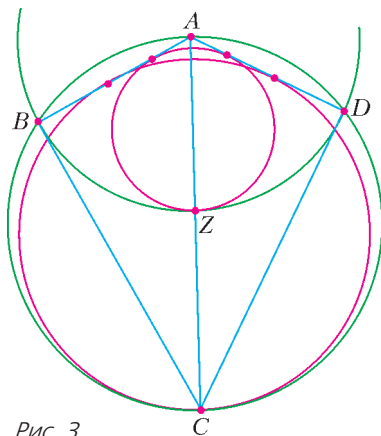


Рис. 3

$CBD$ , касаются в точке  $Z$ . Из гомотетии с центром  $A$  следует, что  $\frac{r_1}{R_1} = \frac{AZ}{AC}$ . Аналогично,  $\frac{r_2}{R_2} = \frac{CZ}{AC}$ . Таким образом,

$$\frac{r_1}{R_1} + \frac{r_2}{R_2} = \frac{AZ}{AC} + \frac{CZ}{AC} = \frac{AZ + CZ}{AC} = 1.$$

Из леммы несложно вывести следующее ее обобщение. Если рассмотреть еще окружность (или прямую)  $s_3$ , проходящую через точки  $M$  и  $N$ , и окружность  $s_2$ , касающуюся отрезков  $XM$ ,  $XN$  и фиксированной дуги

окружности  $s_3$ , то отношение радиусов  $\frac{\rho_2}{\rho_3}$  окружностей  $s_2$  и  $s_3$  не будет зависеть от выбора точки  $X$ .

На самом деле утверждение леммы эквивалентно теореме о сегменте (см. статью В.Протасова «Вокруг теоремы Фейербаха» в «Кванте» № 9 за 1992 г.).

**Замечание.** Из леммы легко вытекает **теорема Фейербаха**.

Пусть  $H$  – ортоцентр треугольника  $ABC$ ;  $\Omega$  и  $\omega$  – описанная и вписанная окружности;  $\Omega'$  – дуга окружности  $BCH$ , симметричная дуге  $BAC$  окружности  $\Omega$  относительно  $BC$ ;  $\omega'$  – окружность, вписанная в угол  $BAC$  и касающаяся  $\Omega'$  внутренним образом.

По теореме «о луночках»  $\frac{R(\omega')}{R(\omega)} = 2$ . Действительно,

при фиксации окружностей  $\Omega$  и  $\Omega'$  это отношение не зависит от положения точки  $A$  на дуге  $BAC$ , а для частного случая  $AB = AC$  из симметрии и гомотетии с центром  $A$  (здесь  $M$  – середина  $BC$ ,  $A'$  симметрична  $A$  относительно  $BC$ ):

$$\frac{R(\omega')}{R(\omega)} = \frac{AA'}{AM} = 2.$$

Значит, при гомотетии с центром  $A$  и коэффициентом  $\frac{1}{2}$  окружности  $\omega'$  и  $\Omega'$  переходят соответственно в  $\omega$  и окружность девяти точек треугольника  $ABC$ .

*Н.Белухов, И.Богданов, П.Кожевников*

**Ф2177.** На корпусе фена, предназначенного для быстрой сушки волос, есть надпись: 1200 Вт. Диаметр отверстия, из которого выходит воздух с температурой  $80^\circ\text{C}$ , равен 4 см. Температура воздуха в комнате  $20^\circ\text{C}$ , давление воздуха  $10^5$  Па. С какой средней скоростью относительно корпуса фена движется выходящий наружу горячий воздух?

В установившемся режиме работы кинетическая энергия деталей фена и внутренняя энергия его частей не меняются. Энергия, полученная феном из электрической сети, преобразуется в тепло и кинетическую энергию упорядоченного движения воздуха. Процесс нагрева воздуха (двухатомного газа) происходит при постоянном давлении. Молярная теплоемкость воздуха в таком процессе равна  $7R/2$ . Кинетическая энергия упорядоченного движения, приобретенная воздухом за определенное время, пропорциональна кубу скорости,



а количество теплоты, нужное для нагрева воздуха в изобарном процессе, пропорционально первой степени скорости. Анализ показывает, что при заданных условиях кинетическая энергия упорядоченного движения воздуха во много раз меньше полученного количества теплоты, поэтому точное уравнение третьей степени для нахождения скорости горячего воздуха:

$$v \left( \frac{v^2}{2} + \frac{7R(T_1 - T_2)}{2M} \right) = \frac{PRT_1}{\rho M \pi D^2 / 4}$$

можно заменить на приближенное уравнение:

$$v \frac{7R(T_1 - T_2)}{2M} = \frac{PRT_1}{\rho M \pi D^2 / 4}$$

Отсюда находим

$$v = \frac{8PT_1}{7\rho\pi D^2 (T_1 - T_2)} \approx 16 \text{ м/с.}$$

С.Варламов

**Ф2178.** Твердое вещество  $\text{CO}_2$  похоже на плотно слепленный снежок – белый непрочный кусок скомканного снега – и называется «сухой лед», который при атмосферном давлении имеет температуру  $-65^\circ\text{C}$ . Некоторое количество этого вещества взвесили и положили в нерастянутую резиновую оболочку воздушного шарика, имеющую массу 3 г. Оболочку загерметизировали, завязав узлом резиновую входную трубку шарика, дождалась, пока весь сухой лед испарился и нагрелся до комнатной температуры, а затем надувшийся шарик взвесили на тех же весах – получился результат 69 г. Что показывали весы при взвешивании твердого вещества?

Объем конденсированного вещества очень мал в сравнении с его объемом в газообразном состоянии, поэтому объемом снежка мы пренебрежем. Резиновые стенки шарика создают внутри шарика дополнительное давление, которое во много раз (примерно в 50 раз) меньше атмосферного давления, поэтому отличие давления внутри шарика от атмосферного давления мы учитывать не будем. При таких предположениях условие равновесия шарика с газом на весах таково:

$$Mg + mg \frac{M_{\text{возд}}}{M_{\text{газа}}} = (m + m_0)g.$$

Отсюда находим ответ сначала в грубом приближении:

$$m = \frac{M_{\text{газа}} (M - m_0)}{M_{\text{газа}} - M_{\text{возд}}} \approx 193,6 \text{ г.}$$

Если учесть дополнительное давление, создаваемое резиновой оболочкой, например считая, что оно составляет 2% от атмосферного, то получится другой результат:

$$m = \frac{1,02M_{\text{газа}} (M - m_0)}{1,02M_{\text{газа}} - M_{\text{возд}}} \approx 186,5 \text{ г.}$$

С.Варламов

**Ф2179.** Нагреватель идеальной тепловой машины имеет начальную температуру  $2T$ , его теплоемкость  $C$ , температура холодильника в начальный момент  $T$ , его теплоемкость вдвое больше. Теплообмена с

окружающей средой нет, машина имеет маленькую мощность даже при начальной разности температур. Найдите температуры тел через очень большое время. Какую работу может совершить машина за это очень большое время?

Обычно, когда рассматривают принципы работы тепловой машины, считают, что температуры нагревателя и холодильника в процессе отдачи или получения тепла не изменяются. Это означает, что теплоемкости нагревателя и холодильника являются бесконечно большими. Если же теплоемкости этих тел конечны, необходимо учитывать, что их температуры в процессе работы машины будут изменяться. Очевидно, что в конце концов температуры нагревателя и холодильника сравняются. Действительно, в процессе работы машины рабочее тело берет некоторое количество теплоты у нагревателя, часть его превращает в работу, оставшуюся часть передает холодильнику. Другими словами, происходит теплообмен между горячим нагревателем и холодным холодильником с одновременным «уходом» части энергии из этой системы в виде механической работы. Учтем этот «уход» в уравнениях теплового баланса.

Пусть в какой-то момент времени температуры нагревателя и холодильника равны  $T_1$  и  $T_2$  соответственно. По условию на этих телах работает идеальная тепловая машина. А поскольку в идеальной тепловой машине, работающей по циклу Карно, передачи тепла от нагревателя к рабочему телу и от рабочего тела к холодильнику должны осуществляться при фиксированных температурах, необходимо проводить много циклов Карно с бесконечно малыми передачами тепла так, чтобы в каждом цикле температуры нагревателя и холодильника можно было считать неизменными.

Итак, возьмем количество теплоты  $\delta Q_1$  у нагревателя.

Поскольку КПД цикла Карно равен  $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ , работа двигателя составит

$$\delta A = \eta \delta Q_1 = \delta Q_1 - \frac{T_2}{T_1} \delta Q_1,$$

а более холодному телу будет передано количество теплоты

$$\delta Q_2 = \delta Q_1 - \delta A = \frac{T_2}{T_1} \delta Q_1.$$

Найдем теперь, как изменятся температуры тел после осуществления рассмотренного процесса. Так как нагреватель отдает количество теплоты  $\delta Q_1$ , его температура уменьшится на величину

$$\Delta T_1 = -\frac{\delta Q_1}{C}.$$

Аналогично, температура холодильника возрастет на величину

$$\Delta T_2 = \frac{\delta Q_2}{2C} = \frac{\delta Q_1}{2C} \frac{T_2}{T_1}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = -2 \frac{T_1}{T_2}, \text{ или } \frac{\Delta T_1}{T_1} = -2 \frac{\Delta T_2}{T_2}.$$

Это означает, что в рассмотренном процессе не меняется произведение температуры нагревателя на квадрат температуры холодильника. Причем этот результат будет иметь место и для начальных ( $2T$  и  $T$ ) и для конечных ( $T_x$ ) температур нагревателя и холодильника:

$$2T(T)^2 = T_x(T_x)^2, \text{ откуда } T_x = \sqrt[3]{2}T = 1,26T.$$

Таким образом, в результате работы рассмотренной тепловой машины в течение длительного времени температуры нагревателя и холодильника сравняются и станут равными  $T_x = 1,26T$ .

Если бы энергия не уходила из системы, т.е. если бы тепловая машина не совершала механическую работу, то в результате теплообмена между нагревателем и холодильником их температуры также сравнялись бы, но установившаяся температура  $T_y$  была бы другой. Ее можно найти из «обычного» уравнения теплового баланса – количество теплоты, отданное нагревателем, равно количеству теплоты, полученному холодильником:

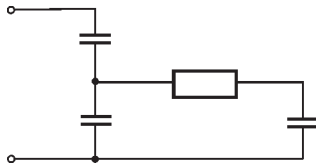
$$C(2T - T_y) = 2C(T_y - T), \text{ откуда } T_y = \frac{4}{3}T = 1,3T.$$

Энергия, связанная с разностью установившихся температур  $T_y - T_x$ , и есть полная механическая работа, совершенная двигателем до того момента, как температуры нагревателя и холодильника сравняются и двигатель больше не сможет совершать работу. Поскольку суммарная теплоемкость тел равна  $3C$ , то эта работа равна

$$A = 3C(T_y - T_x) = 3C \cdot 0,07T = 0,21CT.$$

С.Муравьев

**Ф2180.** Конденсаторы в схеме (см. рисунок) одинаковые, емкость каждого  $100 \text{ мкФ}$ , сопротивление резистора  $100 \text{ Ом}$ . Батарейку напряжением  $12 \text{ В}$  с малым внутренним сопротивлением подключают к этой схеме. Какое количество теплоты выделится за большое время в резисторе? Какое полное количество теплоты выделится при подключении батарейки?



Сразу после подключения батарейки происходит такой быстрый процесс – «ближние» конденсаторы заряжаются большими токами, а ток через резистор, он же заряжает оставшийся конденсатор, ограничен и за малый интервал времени не выделяет заметного количества теплоты в резисторе. (Тепло выделяется в сопротивлении проводов и внутреннем, хотя и малом, сопротивлении батарейки.)

Проведем расчет выделившегося количества теплоты в два этапа. Сначала посчитаем тепло в резисторе. После быстрого процесса заряда последовательно соединенных конденсаторов (третий конденсатор пока не заряжен) разность потенциалов на резисторе составит  $U_0/2$ , где  $U_0$  – напряжение батарейки. Эта разность потенциалов по мере перезарядки конденсаторов спадает до

нуля, через резистор при этом протекает полный заряд  $CU_0/3$ , и количество теплоты в резисторе определяется средней разностью потенциалов между его выводами и протекшим зарядом:

$$Q_R = \frac{1}{2} \frac{U_0}{2} \frac{CU_0}{3} = \frac{CU_0^2}{12} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

Полное количество теплоты в системе посчитать совсем просто. После установления зарядов полная емкость системы равна  $C_{\text{общ}} = 2C/3$  (два конденсатора соединены параллельно и к ним еще один конденсатор подключен последовательно). Энергия этой системы равна  $C_{\text{общ}}U_0^2/2$ . Батарейка совершает работу  $C_{\text{общ}}U_0^2$ . Полное выделившееся количество теплоты определим из баланса энергий:

$$Q_{\text{общ}} = C_{\text{общ}}U_0^2 - \frac{C_{\text{общ}}U_0^2}{2} = \frac{CU_0^2}{3} = 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

А.Повторов

**Ф2181.** В однородном электрическом поле напряженностью  $E_0$  удерживают диполь, состоящий из легкого жесткого стержня длиной  $d$ , на концах которого укреплены одинаковые маленькие шарики массой  $m$  каждый с зарядами  $q$  и  $-q$ . Найдите максимальную угловую скорость стержня после отпущения диполя. Сила тяжести отсутствует.

Это простая задача. Угловая скорость вращения определяется начальным положением диполя, и максимальная угловая скорость получится в том случае, когда работа сил поля максимальна. При этом к моменту достижения максимальной угловой скорости диполь из начального положения поворачивается на  $180^\circ$ , каждый из зарядов смещается на  $d$  и электрическое поле совершает работу

$$2 \cdot qE_0 \cdot d = 2qE_0d.$$

Из закона сохранения энергии

$$2 \frac{m(\omega d/2)^2}{2} = 2qE_0d$$

находим максимальную угловую скорость стержня:

$$\omega = 2\sqrt{\frac{2qE_0}{md}}.$$

А.Простов

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»

kvant.info

Московский центр непрерывного математического образования

kvant.mccme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»

math.child.ru

Костромской центр дополнительного образования «Эврика»

сеemat.ru



# Задачи

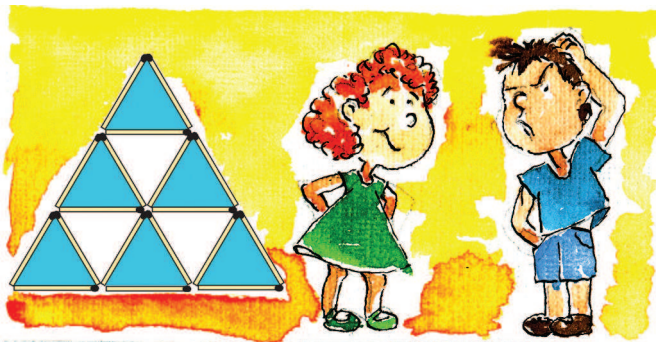
1. Барон Мюнхгаузен утверждает, что найдутся три натуральных числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , обладающие таким свойством: ни  $a$ , ни  $b$  не делятся на  $c$ , но  $ab$  делится на  $c^2$ . Не ошибается ли барон?

*Фольклор*

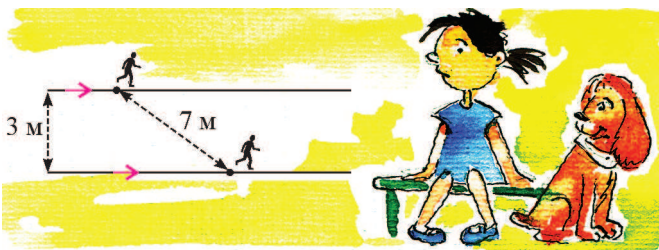


2. Восемнадцать спичек лежат на плоскости, образуя девять не перекрывающихся равносторонних треугольников. Можно ли переложить спички так, чтобы получилось десять не перекрывающихся равносторонних треугольников (не обязательно одинаковых)?

*Н.Авилов*



3. В парке на расстоянии трех метров друг от друга проходят две параллельные прямые дорожки. Петя и Вася одновременно побежали, каждый по своей дорожке, в одну и ту же сторону. Сначала расстояние между ребятами было три метра, а через минуту стало семь метров. Какое расстояние будет между Петей и



Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

Васей еще через минуту? (Каждый из ребят бежит с постоянной скоростью.)

*С.Дориченко*

4. Однажды в мебельном магазине между клиентом (К) и продавцами (П1), (П2) произошел следующий диалог:

(К) Сколько стоит этот диван?

(П1) 60000 рублей.

(К) Почему так дорого?

(П2) Не удивляйтесь, этот продавец все числа завышает в 3 раза!

(К) Ага, значит диван стоит гораздо дешевле!

(П1) Это сказал мой напарник? Так ведь он все числа занижает в 12 раз!

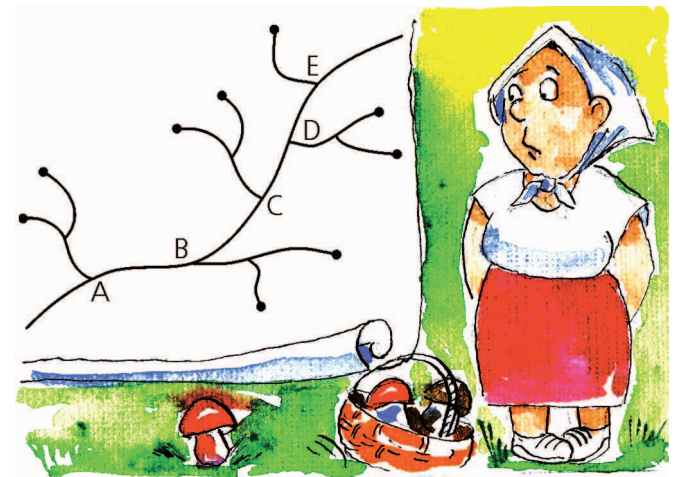


Сколько же на самом деле стоит диван, если продавцы, когда называют числа, изменяют их каждый в свое число раз, а в остальном говорят правду?

*И.Иванов*

5. На плане изображено шоссе, от которого отходят несколько дорог к селам. Где на шоссе нужно расположить автобусную остановку, чтобы суммарное расстояние от нее до всех сел (по дорогам и шоссе) было наименьшим?

*А.Анджанс*



Иллюстрации Д.Гришуковой



# Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

*Мы начинаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» или по электронному адресу: math@kvant.info (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.*

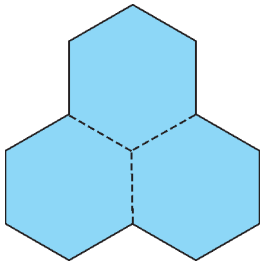
*Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.*

1. Найдутся ли 10 разных натуральных чисел, ни одно из которых не является квадратом целого числа, со свойством:

а) произведение любых двух из этих чисел является квадратом целого числа;

б) произведение любых трех из этих чисел является квадратом целого числа?

*С.Дориченко*



2. Фигура «соты» представляет собой объединение трех равных правильных шестиугольников. Разрежьте эту фигуру на три одинаковые части и сложите из них один правильный шестиугольник.

*Н.Авилов*

3. Маляр-хамелеон ходит по клетчатой доске как обычная шахматная ладья. Попав в очередную клетку, он либо перекрашивается в ее цвет, либо перекрашивает клетку в свой цвет. Белого маляра-хамелеона кладут на черную доску размером  $8 \times 8$  клеток. Сможет ли он раскрасить ее в шахматном порядке?

*Фольклор*

4. В прямоугольном треугольнике вписанная окружность касается одной из средних линий. Докажите, что длины сторон этого треугольника относятся друг к другу как 3:4:5.

*Р.Гордин*

5. В числе, являющемся натуральной степенью двойки, переставили цифры. Может ли полученное число оказаться большей натуральной степенью двойки?

*Фольклор*

## Веревка из паутины

**Д. БАГРОВ**

КАЖДЫЙ МОЖЕТ ЛЕГКО СМАХНУТЬ ПАУТИНУ, висящую между ветками дерева или под потолком в дальнем углу комнаты. Но мало кто знает, что если бы паутина имела диаметр 1 мм, то она могла бы выдержать груз массой приблизительно 200 кг. Стальная проволока того же диаметра выдерживает существенно меньше: 30–100 кг, в зависимости от типа стали. Почему же паутина обладает такими исключительными свойствами?

Некоторые пауки прядут до семи типов нитей, каждая из которых имеет собственное назначение. Нити могут использоваться не только для ловли добычи, но и для строительства коконов и парашютирования (взлетая на ветру, пауки могут уходить от внезапной угрозы, а молодые пауки таким способом расселяются на новые территории). Каждый из типов паутины производится специальными железами.

Паутина, используемая для ловли добычи, состоит из нескольких типов нитей (рис.1): каркасной, радиальной,

ловчей и вспомогательной. Наибольший интерес ученых вызывает каркасная нить: она имеет одновременно высокую прочность и высокую эластичность – именно это сочетание свойств является уникальным. Предельное напряжение на разрыв каркасной нити паука *Araneus diadematus* составляет 1,1–2,7 ГПа. Для сравнения: предел



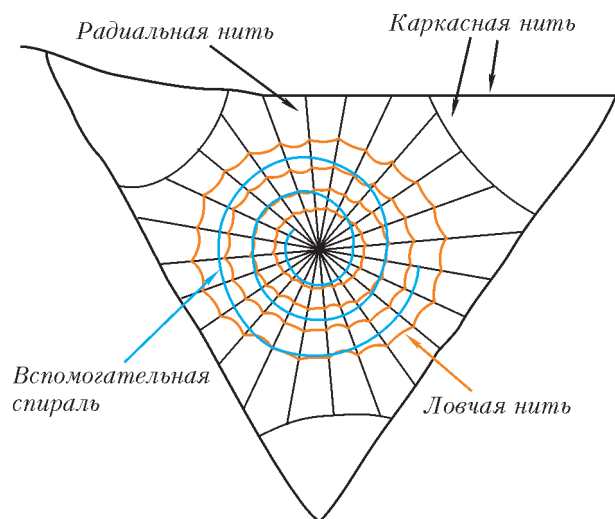


Рис.1. Различные нити в составе паутины: каркасная нить самая прочная, она держит всю паутину в целом; радиальная нить тонкая и не липкая, она поддерживает липкую ловчую нить; вспомогательная спираль помогает расположить ловчую нить

прочности стали 0,4–1,5 ГПа, человеческого волоса ~ 0,25 ГПа. В то же время каркасная нить способна растягиваться на 30–35%, а большинство металлов выдерживают деформацию не более 10–20%.

Представим себе летящее насекомое, которое ударяется в натянутую паутину. При этом нить паутины должна растягиваться так, чтобы кинетическая энергия летящего насекомого превратилась в тепло. Если бы паутину запасала полученную энергию в виде энергии упругой деформации, то насекомое отскочило бы от паутины, как от батута. Важное свойство паутины состоит в том, что она выделяет очень большое количество теплоты при быстром растяжении и последующем сокращении: энергия, выделяемая в единице объема, составляет более 150 МДж/м<sup>3</sup> (сталь выделяет ~ 6 МДж/м<sup>3</sup>). Это позволяет паутине эффективно рассеивать энергию удара и не слишком сильно растягиваться, когда в нее попадает жертва. Паутину или полимеры, обладающие аналогичными свойствами, могли бы стать идеальными материалами для легких бронезилетов.

В народной медицине есть такой рецепт: на рану или ссадину, чтобы остановить кровь, можно приложить паутину, аккуратно очистив ее от застрявших в ней насекомых и мелких веточек. Оказывается, паутину обладает кровоостанавливающим действием и ускоряет заживление поврежденной кожи. Хирурги и трансплантологи могли бы использовать ее в качестве материала для наложения швов, укрепления имплантантов и даже как заготовки для искусственных органов. С помощью паутины можно существенно улучшить механические свойства множества материалов, которые в настоящее время применяются в медицине.

Итак, паутину – необычный и очень перспективный материал. Какие же молекулярные механизмы отвечают за ее исключительные свойства?

Мы привыкли к тому, что молекулы – чрезвычайно маленькие объекты. Однако это не всегда так: вокруг нас широко распространены полимеры, которые имеют длинные молекулы, состоящие из одинаковых или похожих друг на друга звеньев. Все знают, что генетическая информация живого организма записана в длинных молекулах ДНК. Все держали в руках полиэтиленовые пакеты, состоящие из длинных переплетенных молекул полиэтилена. Молекулы полимеров могут достигать огромных размеров.

Например, масса одной молекулы ДНК человека порядка  $1,9 \cdot 10^{12}$  а.е.м. (однако это приблизительно в сто миллиардов раз больше, чем масса молекулы воды), длина каждой молекулы составляет несколько сантиметров, а общая длина всех молекул ДНК человека достигает  $10^{11}$  км.

Важнейшим классом природных полимеров являются белки, они состоят из звеньев, которые называются аминокислотами. Разные белки выполняют в живых организмах чрезвычайно разные функции: управляют химическими реакциями, используются в качестве строительного материала, для защиты и т.д.

Каркасная нить паутины состоит из двух белков, которые получили названия спидроинов 1 и 2 (от английского spider – паук). Спидроины – это длинные молекулы с массой от 120000 до 720000 а.е.м. У разных пауков аминокислотные последовательности спидроинов могут отличаться друг от друга, но все спидроины имеют общие черты. Если мысленно вытянуть длинную молекулу спидроина в прямую линию и посмотреть на последовательность аминокислот, то окажется, что она состоит из повторяющихся участков, похожих друг на друга (рис.2). В молекуле чередуются два типа участков: относительно гидрофильные (те, которым энергетически выгодно контактировать с молекулами воды) и относительно гидрофобные (те, которые избегают контакта с водой). На концах каждой молекулы присутствуют два неповторяющихся гидрофильных участка, а гидрофобные участки состоят из множества повторов аминокислоты, называемой аланином.

Длинная молекула (например, белок, ДНК, синтетический полимер) может быть представлена как скомканная запутанная веревка. Растянуть ее не составляет труда, потому что петли внутри молекулы могут расправляться, требуя сравнительно небольшого усилия. Некоторые полимеры (например, резина) могут растягиваться на 500% своей начальной длины. Так что способность паутины (материала, состоящего из длинных молекул) деформироваться больше, чем металлы, не вызывает удивления.

Откуда же берется прочность паутины?

Чтобы понять это, важно проследить за процессом формирования нити. Внутри железы паука спидроины накапливаются в виде концентрированного раствора. Когда происходит формирование нити, этот раствор выходит из железы по узкому каналу, это способствует вытягиванию молекул и ориентации их вдоль направления вытяжки, а соответствующие химические изменения вызывают слипание молекул. Фрагменты молекул, состоящие из аланинов, соединяются вместе и образуют упорядоченную структуру, похожую на

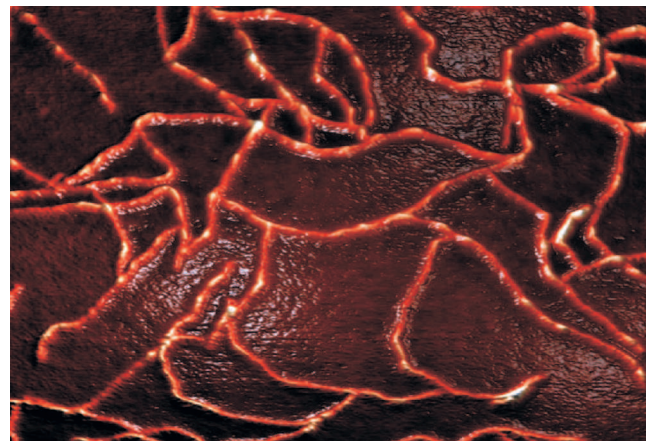


Рис.2. Молекула спидроина и модель ее укладки в волокне

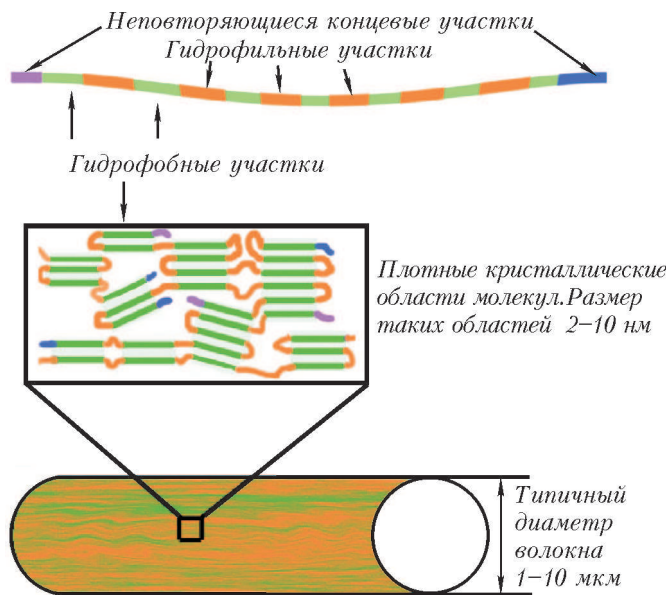


Рис.3. Рекombинантный белок паутины, способный образовывать особые структуры – тончайшие нити диаметром 3-5 нм

кристалл (рис.3). Внутри такой структуры фрагменты уложены параллельно друг другу и сцеплены между собой водородными связями. Именно эти участки, сцепленные между собой, и обеспечивают прочность волокна. Типичный размер таких плотно упакованных участков молекул составляет несколько нанометров. Расположенные вокруг них гидрофильные участки оказываются неупорядоченно свернутыми, похожими на скомканные веревки, они могут расправляться и этим обеспечивать растяжение паутины.

Многие композиционные материалы, например армированные пластмассы, устроены по тому же принципу, что и каркасная нить: в относительно мягком и подвижном матрице, который дает возможность деформации, находятся малые по размерам твердые области, которые делают материал прочным. Хотя материаловеды давно работают с подобными системами, созданные человеком композиты только начинают приближаться к паутине по своим свойствам.

Любопытно, что, когда паутина намокает, она сильно сокращается (это явление получило название суперконтрак-

ции). Это происходит потому, что молекулы воды проникают в волокно и делают неупорядоченные гидрофильные участки более подвижными. Если паутина растянулась и провисла от попадания насекомых, то во влажный или дождливый день она сокращается и при этом восстанавливает свою форму.

Отметим также интересную особенность формирования нити. Паук вытягивает паутину под действием собственного веса, но полученная паутина (диаметр нити приблизительно 1–10 мкм) обычно позволяет выдержать массу, в шесть раз большую массы самого паука. Если же увеличить вес паука, вращая его в центрифуге, он начинает выделять более толстую и более прочную, но менее жесткую паутину.

Когда заходит речь о применении паутины, возникает вопрос о том, как ее получать в промышленных количествах. В мире существуют установки для «доения» пауков, которые вытягивают нити и наматывают их на специальные катушки. Однако такой способ неэффективен: чтобы накопить 500 г паутины, необходимо 27 тысяч средних пауков. И тут на помощь исследователям приходит биоинженерия. Современные технологии позволяют внедрить гены, кодирующие белки паутины, в различные живые организмы, например в бактерии или дрожжи. Эти генетически модифицированные организмы становятся источниками искусственной паутины. Белки, полученные методами геной инженерии, называются рекомбинантными. Отметим, что обычно рекомбинантные спidroины гораздо меньше природных, но структура молекулы (чередование гидрофильных и гидрофобных участков) остается неизменной.

Есть уверенность, что искусственная паутина по своим свойствам не будет уступать природной и найдет свое практическое применение как прочный и экологически чистый материал. В России исследованиями свойств паутины совместно занимаются несколько научных групп из различных институтов. Получение рекомбинантной паутины осуществляют в Государственном научно-исследовательском институте генетики и селекции промышленных микроорганизмов, физические и химические свойства белков исследуют на кафедре биоинженерии биологического факультета МГУ им.М.В.Ломоносова, изделия из белков паутины формируют в Институте биоорганической химии РАН, их медицинскими применениями занимаются в Институте трансплантологии и искусственных органов.

## Победители конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8» 2009/10 учебного года

### Лучших результатов в конкурсе добились школьник

Дэниэл Линг, Беэр-Шева (Израиль)

### и кружки:

лица 14, Тамбов, руководитель А.В.Бурмистрова,  
«Сигнум», Москва, руководитель С.А.Иванов.

### Жюри конкурса отмечает также хорошие работы школьников:

Никиты Александрова, Набережные Челны, гимназия  
26,

Бакина Михаила, Челябинск, гимназия 93

### и кружков:

лица 130, Новосибирск, руководитель Л.Н.Чусовитина,  
Центра дополнительного математического образова-  
ния, Курган, руководители Е.Г.Пушкарева, О.И.Южа-  
ков,  
«Эврика», Харьков, руководители Е.Л.Аринкина,  
А.Л.Бернштейн.

**Победители конкурса награждаются DVD-диска-  
ми – электронным архивом журнала «Квант» с  
1970 по 2008 год.**



# Замечательные ТОЧКИ треугольника и тригонометрия

Г. ФИЛИППОВСКИЙ

Пусть  $I$  и  $O$  – соответственно центры вписанной и описанной окружностей треугольника  $ABC$ . Мы поведем наш разговор о том, как эффективно (а порой и эффектно) могут «работать» эти точки при решении тригонометрических упражнений.

**Задача 1.** Докажите справедливость следующих формул синуса двойного и половинного углов (где  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ):

$$a) \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2};$$

$$б) 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha.$$

**Решение.** Около прямоугольного треугольника  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) опишем окружность. Очевидно, ее центр  $O$  – середина гипотенузы  $AB$  (рис.1). Пусть радиус окружности равен  $R$ , тогда  $AB = 2R$ .

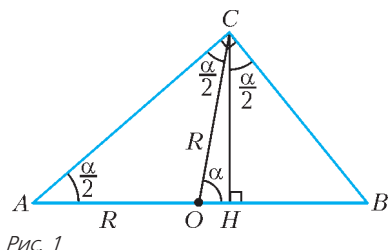


Рис. 1

Пусть  $\angle COB = \alpha$ , тогда  $\angle CAO = \angle ACO = \frac{\alpha}{2}$ . Проведем высоту  $CH$  к гипотенузе. Из треугольников  $ACH$  и  $ABC$  имеем

$$CH = AC \sin \frac{\alpha}{2} = 2R \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

С другой стороны, из треугольника  $OCH$  находим

$$CH = OC \sin \alpha = R \sin \alpha.$$

Приравняв выражения для  $CH$ , получаем

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Тем самым доказано утверждение а) задачи.

Для доказательства пункта б) заметим, что

$$HB = OB \pm OH = R - R \cos \alpha = R(1 - \cos \alpha)$$

(знак + или – в первом равенстве из этой цепочки выбирается в зависимости от того, тупой угол  $\alpha$  или острый).

Теперь из треугольника  $CBH$  находим

$$HB = CB \sin \frac{\alpha}{2} = AB \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2R \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Приравняв выражения для  $HB$ , получаем утверждение пункта б).

**Задача 2.** Докажите справедливость формулы для углов  $A, B, C$  треугольника  $ABC$ :

$$\sin 2\angle A + \sin 2\angle B + \sin 2\angle C = 4 \sin \angle A \sin \angle B \sin \angle C.$$

**Решение.** Пусть  $O$  – центр описанной окружности  $\triangle ABC$ . Тогда  $AO = BO = CO = R$  и  $\angle BOC = 2\angle A$ ,  $\angle AOC = 2\angle B$ ,  $\angle AOB = 2\angle C$  (рис.2).

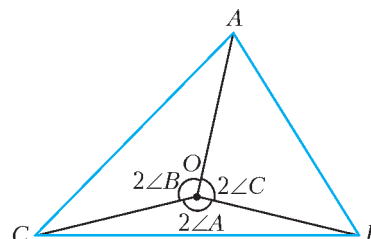


Рис. 2

Поскольку площадь  $S$  треугольника  $ABC$  складывается из площадей треугольников  $BOC$ ,  $AOC$  и  $AOB$ , то

$$S = \frac{1}{2} R^2 (\sin 2\angle A + \sin 2\angle B + \sin 2\angle C).$$

С другой стороны,

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \angle C = \frac{1}{2} \cdot 2R \sin \angle A \cdot 2R \sin \angle B \cdot \sin \angle C = 2R^2 \sin \angle A \sin \angle B \sin \angle C.$$

Приравняв правые части последних двух равенств, получим требуемое:

$$\sin 2\angle A + \sin 2\angle B + \sin 2\angle C = 4 \sin \angle A \sin \angle B \sin \angle C.$$

**Следствие.** Заменяв углы  $2\angle A, 2\angle B, 2\angle C$  на углы  $180^\circ - \angle A, 180^\circ - \angle B, 180^\circ - \angle C$  (что корректно, поскольку и та и другая суммы равны по  $360^\circ$ ), получим еще одну важную формулу для углов треугольника  $ABC$ :

$$\sin \angle A + \sin \angle B + \sin \angle C = 4 \cos \frac{\angle A}{2} \cos \frac{\angle B}{2} \cos \frac{\angle C}{2}.$$

**Задача 3.** Докажите справедливость неравенства в треугольнике  $ABC$ :

$$\sin \frac{\angle B}{2} + \sin \frac{\angle C}{2} > \cos \frac{\angle A}{2}.$$

**Решение.** Пусть  $I$  – инцентр (центр вписанной окружности)  $\triangle ABC$  (рис.3).

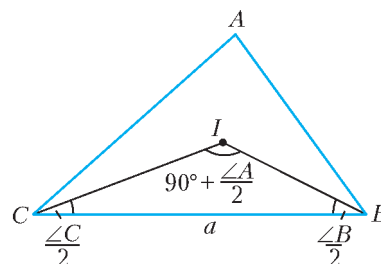


Рис. 3

(Продолжение см. на с. 34)

# Квадрирование квадрата

Квадрирование квадрата – это разбиение квадрата на меньшие квадраты. Самое простое и всем известное квадрирование – это разбиение на  $n^2$  равных квадратов. Примером может служить шахматная доска, разбитая на 64 равных квадрата.

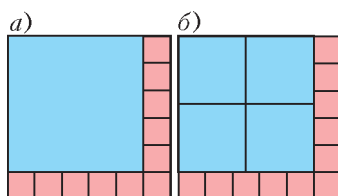


Рис. 1

А можно ли разбить квадрат, например, на 2010 квадратов, среди которых не обязательно все равные? Оказывается, если в разбиении квадрата на  $n^2$  равных квадратов объединить  $(n-1)^2$  квадратов в один квадрат, то получим разбиение на  $n^2 - (n-1)^2 + 1 = 2n$  квадратов (рис. 1, а). Это значит, что таким приемом можно выполнить квадрирование на любое четное (больше 2) число квадратов.

Если в таком разбиении один из квадратов разделить на 4 квадрата, то число квадратов разбиения увеличивается на 3 и становится нечетным (рис. 1, б). Можно доказать, что квадрат нельзя разбить на 5 квадратов. Таким образом, квадрирование можно выполнить на любое большее 5 число квадратов.

Если при этом наложить еще одно условие: среди квадратов разбиения нет равных, то квадрирование становится чрезвычайно трудным. Более того, некоторые видные математики начала прошлого века были склонны считать, что такое квадрирование вообще невозможно.

Однако немецкий геометр Р.Шпраг удивил математическое сообщество, найдя разбиение квадрата на 55 неповторяющихся квадратов.

Вскоре студенты-математики Кембриджского университета в Англии установили неожиданную связь между квадрированием квадрата и составлением электрических цепей. Дело в том, что каждому набору из  $n$  квадратов, необходимых для составления одного квадрата, соответствует электрическая сеть из  $n$  проводников, в которых распределение токов подчиняется правилам Кирхгофа. На их основе составляется система уравнений, решая которую, можно вычислить силы токов в каждом проводнике. Именно эти числа являются сторонами квадратов разбиения. Остается, имея конкретный набор квадратов, сложить из них один большой квадрат.

Именно таким способом англичане А.Стоун и У.Татт нашли разбиение квадрата на 28 попарно неравных квадратов. Подключившиеся к ним Р.Брукс и С.Смит разбили квадрат на 26 попарно неравных квадратов. Позже Т.Уиллкокс смог уменьшить число квадратов разбиения до 24.

Следующего совершенного квадрирования пришлось

ждать более 30 лет. Заключительный аккорд в этой задаче сделал голландский математик А.Дуйвествийн, который нашел разбиение квадрата на 21 квадрат, которые попарно не равны (рис. 2). Применяя для

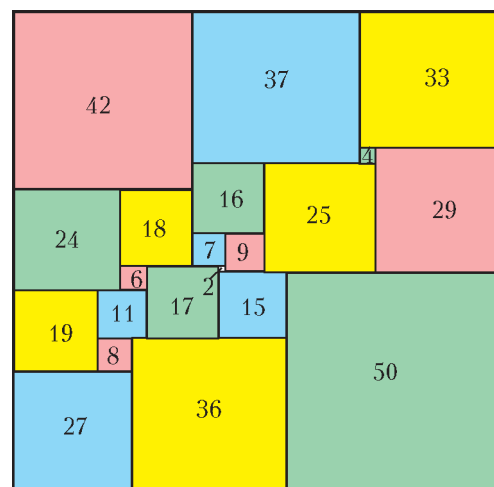


Рис. 2

перебора возможных вариантов компьютер, он доказал, что разбиения менее чем на 21 квадрат не существует и найденное им квадрирование квадрата – единственное.

Известный советский математик А.Н.Колмогоров, еще будучи студентом, придумал разбиение единичного квадрата, в котором каждый квадрат имеет с диагональю квадрата хотя бы одну общую точку. На первом шаге квадрат четвертуется, два квадрата закрашиваются. Два других на втором этапе вновь четвертуются, и в каждом из них два квадрата закрашиваются. И так далее. На рисунке 3 приведено квадрирование, в котором выполнено 4 шага.

Замечательно в этом квадрировании то, что суммы периметров квадратов, которые появляются на каждом шаге, равны одному и тому же числу 4.

Организаторы LVI Московской математической олимпиады, используя это квадрирование, сформулировали участникам олимпиады задачу, условие которой можно найти в конце статьи.

На рисунке 4 приведено любопытное квадрирование квадрата со стороной 14. В этом разбиении длины сторон квадратов разбиения и их количество подчиняются следующей закономерности: 1 квадрат  $6 \times 6$ , 2 квадрата  $5 \times 5$ , 3 квадрата  $4 \times 4$ , 4 квадрата  $3 \times 3$ , 5 квадратов  $2 \times 2$ , 6 квадратов  $1 \times 1$ .

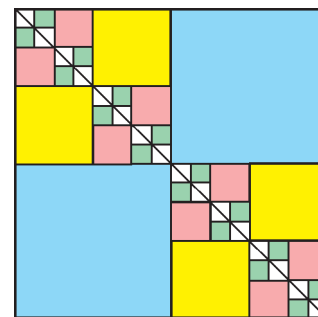


Рис. 3

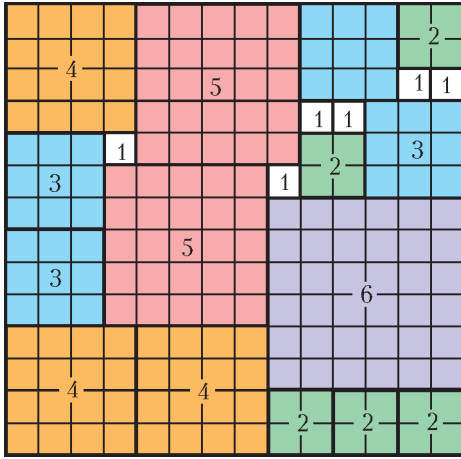


Рис. 4

Как можно искать подобные разбиения? Прежде всего, должно выполняться равенство  $n^2 = \frac{k(k+1)^2(k+2)}{12}$ , где  $n$  – сторона разбиваемого квадрата,  $k$  – сторона наибольшего квадрата разбиения (равенство означает, что площадь разбиваемого квадрата равна сумме площадей всех квадратов разбиения). Поиск пар  $n$  и  $k$ , удовлетворяющих этому равенству, приводит к решению уравнения Пелля, которое имеет бесконечно много целочисленных решений.

Приведенное выше квадрирование получено при  $n = 14$  и  $k = 6$ . Кроме тривиального решения  $n = 1$  и  $k = 1$ , назовем еще одно решение  $n = 2716$  и  $k = 96$ , которое означает, что, возможно, существует разбиение квадрата со стороной 2716 на такие квадраты: 1 квадрат  $96 \times 96$ , 2 квадрата  $95 \times 95$ , ..., 95 квадратов  $2 \times 2$ , 96 квадратов  $1 \times 1$ . Но такого квадрирования еще никто не нашел.

Рассмотрим еще одно квадрирование. Единичный квадрат делится на 9 равных квадратов, из которых 5 квадратов со стороной  $\frac{1}{3}$  образуют «уголок» и фиксируются, оставшиеся 4 квадрата объединяются в один квадрат. На следующем шаге этот объединенный квад-

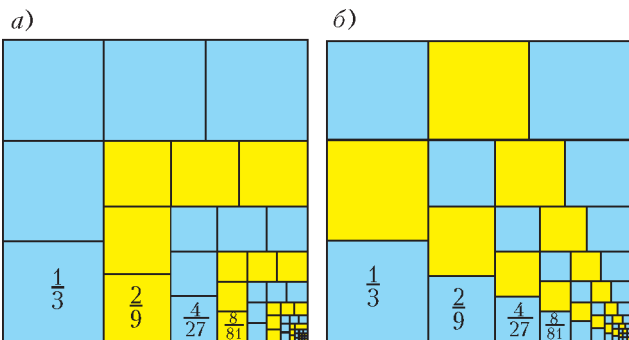


Рис. 5

рат опять делится на 9 равных квадратов, из которых 5 квадратов со стороной  $\frac{2}{9}$  образуют «уголок» и фиксируются, оставшиеся 4 квадрата объединяются в

один квадрат, и такое разбиение продолжается до бесконечности. На рисунке 5,а показан результат такого квадрирования. Площади квадратов, прилегающих к нижней стороне единичного квадрата, образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию  $b_1 = \frac{1}{9}$ ,  $q = \frac{4}{9}$ .

Если теперь в каждом «уголке» квадраты перекрасить в шахматном порядке, то квадраты окажутся разбитыми на пять групп одноцветных квадратов. Все пять групп состоят из соответственно равных квадратов, поэтому сумма площадей квадратов одной группы равна пятой части площади квадрата. Рисунок 5,б является геометрической интерпретацией суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии  $\frac{1}{9} + \frac{4}{81} + \frac{16}{729} + \dots = \frac{1}{5}$ .

Рассмотренное квадрирование можно обобщить, разбивая квадраты на каждом шаге на  $n^2$  равных квадратов.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Единичный квадрат разбит на конечное число квадратов (размеры которых могут отличаться). Может ли сумма периметров квадратиков, пересекающихся с главной диагональю, быть больше 1993? (LVI Московская математическая олимпиада)

2. Квадрат с нечетной стороной  $2n - 1$  можно представить в виде объединения вложенных квадратных рамок шириной 1. Рассмотрим его квадрирование следующим образом: квадраты первой внешней рамки оставим без изменения; каждый квадрат второй рамки разобьем на 4 квадрата, каждый квадрат третьей рамки разобьем на 9 квадратов и т.д., центральный квадрат разобьем на  $n^2$  квадратов (рис.6). На сколько квадратов оказался разбит данный квадрат?

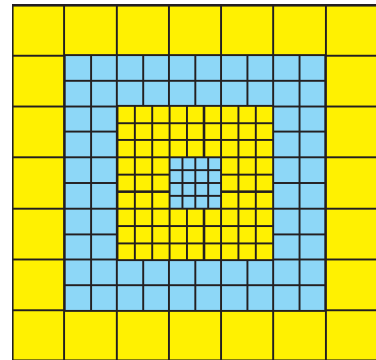


Рис. 6

3. Можно ли разрезать квадрат на квадратики трех разных размеров так, чтобы маленьких, средних и больших было поровну? (Вариант задачи LXXI Московской математической олимпиады)

### Литература

1. Яглом И.М. *Как разрезать квадрат?* – М.: Наука, 1968.
2. Гарднер М. *Математические головоломки и развлечения.* – М.: Мир, 1999.
3. Журнал «Квант», 1979, №11.
4. Страшкевич С. и др. *Польские математические олимпиады.* – М.: Мир, 1978.
5. Федоров Р.М. и др. *Московские математические олимпиады 1993–2005 г.* – М.: МЦНМО, 2006.

Материал подготовил Н.Авилов



(Начало см. на с. 31)

Известно, что  $\angle BIC = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$ .

**Упражнение 1.** Докажите это.

Пусть также  $R_1$  – радиус описанной около  $\triangle BIC$  окружности. Тогда, согласно теореме синусов для  $\triangle BIC$ , имеем

$$CI = 2R_1 \sin \frac{\angle B}{2}, \quad BI = 2R_1 \sin \frac{\angle C}{2},$$

$$BC = 2R_1 \sin \left( 90^\circ + \frac{\angle A}{2} \right).$$

Поскольку  $CI + BI > BC$  (неравенство треугольника для  $\triangle BIC$ ), то после сокращения на  $2R_1$  получим

$$\sin \frac{\angle B}{2} + \sin \frac{\angle C}{2} > \cos \frac{\angle A}{2}.$$

**Задача 4.** Докажите, что для углов треугольника  $ABC$  выполняется равенство

$$\operatorname{ctg} \frac{\angle A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\angle B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\angle C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\angle A}{2} \operatorname{ctg} \frac{\angle B}{2} \operatorname{ctg} \frac{\angle C}{2}.$$

**Решение.** Пусть  $I$  – инцентр в треугольнике  $ABC$ . Проведем  $AI$  (она совпадает с биссектрисой угла  $A$ ), а также  $IT \perp AB$ , где  $IT = r$  – радиус вписанной в  $\triangle ABC$  окружности (рис.4).

Известно, что отрезок  $AT = p - a$  ( $p$  – полупериметр  $\triangle ABC$ ,  $a = BC$ ).

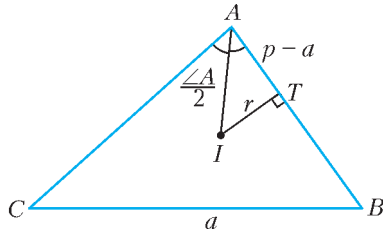


Рис. 4

**Упражнение 2.** Докажите это.

Тогда  $\operatorname{ctg} \frac{\angle A}{2} = \frac{p-a}{r}$ . Аналогично,  $\operatorname{ctg} \frac{\angle B}{2} = \frac{p-b}{r}$ ,  $\operatorname{ctg} \frac{\angle C}{2} = \frac{p-c}{r}$ . Имеем

$$\operatorname{ctg} \frac{\angle A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\angle B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\angle C}{2} =$$

$$= \frac{p-a+p-b+p-c}{r} = \frac{3p-(a+b+c)}{r} = \frac{p}{r}.$$

В то же время,

$$\operatorname{ctg} \frac{\angle A}{2} \operatorname{ctg} \frac{\angle B}{2} \operatorname{ctg} \frac{\angle C}{2} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{r^3} =$$

$$= \frac{S^2}{pr^3} = \frac{p^2 r^2}{pr^3} = \frac{p}{r}$$

(мы воспользовались формулой Герона).

Следовательно,

$$\operatorname{ctg} \frac{\angle A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\angle B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\angle C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\angle A}{2} \operatorname{ctg} \frac{\angle B}{2} \operatorname{ctg} \frac{\angle C}{2}.$$

**Следствие.** Заменяя углы  $\frac{\angle A}{2}$ ,  $\frac{\angle B}{2}$ ,  $\frac{\angle C}{2}$  на углы  $90^\circ - \angle A$ ,  $90^\circ - \angle B$ ,  $90^\circ - \angle C$  (каждая из сумм углов равна  $90^\circ$ ), получим

$$\operatorname{tg} \angle A + \operatorname{tg} \angle B + \operatorname{tg} \angle C = \operatorname{tg} \angle A \operatorname{tg} \angle B \operatorname{tg} \angle C.$$

**Задача 5.** Докажите справедливость такого неравенства для произвольного треугольника  $ABC$ :

$$\sin \frac{\angle A}{2} \leq \frac{a}{b+c}.$$

**Решение.** Пусть в  $\triangle ABC$  проведена биссектриса  $AL$ ,  $I$  – инцентр и  $IK = IT = r$  (рис.5).

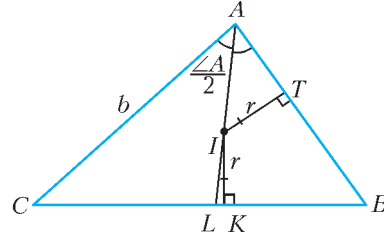


Рис. 5

Доказать данное неравенство – все равно, что доказать

неравенство  $\frac{1}{\sin \frac{\angle A}{2}} \geq \frac{b+c}{a}$ . Из  $\triangle AIT$

$$\sin \frac{\angle A}{2} = \frac{r}{AI}, \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sin \frac{\angle A}{2}} = \frac{AI}{r}.$$

Известно, что биссектриса угла  $A$  делится инцентром в таком отношении:  $\frac{AI}{IL} = \frac{b+c}{a}$ .

**Упражнение 3.** Докажите это.

Очевидно,  $\frac{AI}{r} \geq \frac{AI}{IL}$  ( $IK = r$  – катет,  $IL$  – гипотенуза в  $\triangle ILK$ ). Значит,  $\frac{1}{\sin \frac{\angle A}{2}} = \frac{AI}{r} \geq \frac{AI}{IL} = \frac{b+c}{a}$ . Откуда  $\sin \frac{\angle A}{2} \leq \frac{a}{b+c}$ .

**Задача 6.** Докажите, что для углов  $A, B, C$  треугольника  $ABC$  выполняется следующее неравенство:

$$\cos \angle A + \cos \angle B + \cos \angle C > 1.$$

**Решение.** Пусть  $O$  – центр описанной окружности остроугольного  $\triangle ABC$ . Проведем  $OM_1, OM_2, OM_3$  – серединные перпендикуляры к сторонам  $BC, AC$  и  $AB$  соответственно (рис.6).

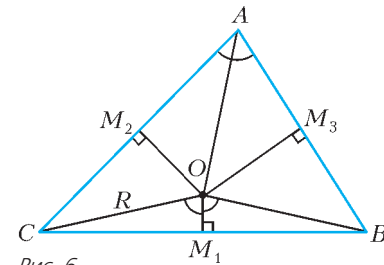


Рис. 6

Из  $\triangle OM_1C$   $\cos \angle A = \cos \angle COM_1 = \frac{OM_1}{R}$ . Аналогично,  $\cos \angle B = \frac{OM_2}{R}$  и  $\cos \angle C = \frac{OM_3}{R}$ . Тогда  $\cos \angle A + \cos \angle B + \cos \angle C = \frac{OM_1 + OM_2 + OM_3}{R}$ . Однако  $OM_1 + OM_2 + OM_3 = R + r$  (согласно формуле Карно для остроугольного треугольника).

**Упражнения**

4. Докажите формулу Карно для остроугольного треугольника.

5. Для тупоугольного треугольника формула Карно имеет другой вид. Подумайте, какой, и докажите соответствующую формулу.

Следовательно,

$$\cos \angle A + \cos \angle B + \cos \angle C = \frac{R+r}{R} = 1 + \frac{r}{R} > 1.$$

*Замечание.* Покажите, что и в случае тупоугольного треугольника  $ABC$  неравенство  $\cos \angle A + \cos \angle B + \cos \angle C > 1$  остается верным.

**Задача 7.** Докажите, что в произвольном треугольнике  $ABC$

$$\cos \angle A + \cos \angle B + \cos \angle C \leq \frac{3}{2}.$$

**Решение.** Пусть  $I$  – инцентр в  $\triangle ABC$ , а  $IK = IN = IT = r$  (рис.7).

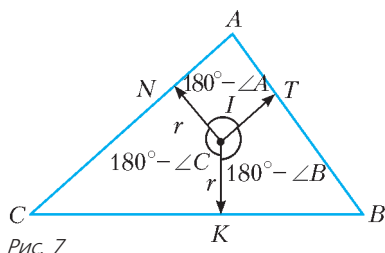


Рис. 7

Рассмотрим очевидное векторное неравенство:  $(\overline{IK} + \overline{IN} + \overline{IT})^2 \geq 0$ . Имеем:

$$3r^2 + 2r^2(\cos(180^\circ - \angle A) + \cos(180^\circ - \angle B) + \cos(180^\circ - \angle C)) \geq 0,$$

или

$$3r^2 \geq 2r^2(\cos \angle A + \cos \angle B + \cos \angle C),$$

откуда

$$\cos \angle A + \cos \angle B + \cos \angle C \leq \frac{3}{2}.$$

**Задача 8.** Докажите справедливость неравенства  $\cos 2\angle A + \cos 2\angle B + \cos 2\angle C \geq -\frac{3}{2}$ , где  $\angle A, \angle B, \angle C$  – углы треугольника  $ABC$ .

**Решение.** Пусть  $O$  – центр описанной около  $\triangle ABC$  окружности (рис.8).

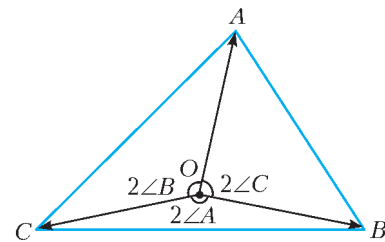


Рис. 8

Запишем очевидное неравенство для векторов  $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ :  $(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})^2 \geq 0$ . Следовательно,

$$3R^2 + 2R^2(\cos 2\angle A + \cos 2\angle B + \cos 2\angle C) \geq 0,$$

откуда

$$\cos 2\angle A + \cos 2\angle B + \cos 2\angle C \geq -\frac{3}{2}.$$

**Следствие.** Поскольку  $\cos 2\angle A = 1 - 2\sin^2 \angle A$ ,  $\cos 2\angle B = 1 - 2\sin^2 \angle B$ ,  $\cos 2\angle C = 1 - 2\sin^2 \angle C$ , сразу же получаем еще одно важное неравенство:

$$\sin^2 \angle A + \sin^2 \angle B + \sin^2 \angle C \leq \frac{9}{4}.$$

**Задача 9.** Найдите  $\sin 18^\circ$ .

**Решение.** Рассмотрим равнобедренный  $\triangle ABC$  с углом  $108^\circ$  при вершине  $A$  ( $AB = AC$ ) (рис.9). Он замечателен тем,

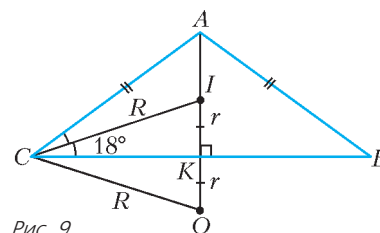


Рис. 9

что в этом треугольнике точки  $I$  и  $O$  симметричны друг другу относительно стороны  $BC$ .

**Упражнение 6.** Докажите это.

Тогда  $IK = KO = r$ , а  $CI = CO = R$ . Из  $\triangle IKC$   $\sin 18^\circ = \frac{r}{R}$ . Очевидно,  $OI = 2r$ . Но по формуле Эйлера

$OI^2 = R^2 - 2Rr$ . Таким образом,  $4r^2 = R^2 - 2Rr$ . Делим обе части последнего равенства на  $R^2$  и получаем

$$4\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 2\frac{r}{R} - 1 = 0, \text{ или } 4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0, \text{ откуда}$$

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ (второй корень отрицательный)}. \text{ Отметим,}$$

что в этой задаче нам помогли обе точки:  $O$  и  $I$ .

В заключение предлагаем для самостоятельного решения еще несколько тригонометрических упражнений, в которых могут быть успешно применены центры вписанной и описанной окружностей треугольника.

**Задачи**

10. Докажите, что в треугольнике  $ABC$  площади  $S$  со сторонами  $a, b, c$  и углами  $A, B, C$  выполняется равенство  $a^2 \operatorname{ctg} \angle A + b^2 \operatorname{ctg} \angle B + c^2 \operatorname{ctg} \angle C = 4S$ .

11. Докажите справедливость формулы

$$\operatorname{tg} \frac{\angle A}{2} \operatorname{tg} \frac{\angle B}{2} + \operatorname{tg} \frac{\angle B}{2} \operatorname{tg} \frac{\angle C}{2} + \operatorname{tg} \frac{\angle A}{2} \operatorname{tg} \frac{\angle C}{2} = 1$$

и, как следствие, формулы  $\operatorname{ctg} \angle A \operatorname{ctg} \angle B + \operatorname{ctg} \angle B \operatorname{ctg} \angle C + \operatorname{ctg} \angle A \operatorname{ctg} \angle C = 1$ .

12. Верно ли, что в тупоугольном треугольнике  $ABC$  выполняется неравенство  $\operatorname{tg} \angle A + \operatorname{tg} \angle B + \operatorname{tg} \angle C < 0$ ?

13. Докажите, что если в треугольнике  $ABC$  выполняется равенство  $\operatorname{ctg} \frac{\angle A}{2} = \frac{b+c}{a}$ , то этот треугольник прямоугольный.

14. Докажите, что  $\sin \frac{\angle A}{2} \sin \frac{\angle B}{2} \sin \frac{\angle C}{2} = \frac{r}{4R}$  и, как следствие

$$1) \sin \frac{\angle A}{2} \sin \frac{\angle B}{2} \sin \frac{\angle C}{2} \leq \frac{1}{8}; \quad 2) \cos \angle A \cos \angle B \cos \angle C \leq \frac{1}{8}.$$

15. Докажите, что  $\operatorname{tg} \frac{\angle A}{2} + \operatorname{tg} \frac{\angle B}{2} + \operatorname{tg} \frac{\angle C}{2} \geq \sqrt{3}$  и, как следствие,  $\operatorname{ctg} \angle A + \operatorname{ctg} \angle B + \operatorname{ctg} \angle C \geq \sqrt{3}$ .

*Указание.* Воспользуйтесь знаменитым неравенством  $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+xz)$  для произвольных  $x, y, z$  и результатом задачи 11.

# О плавании одномерных объектов

**М. ДАВЛЕТШИН, В. СОЛОВЬЕВ,  
Ф. СТРЕЛЬНИКОВ, Е. ЮНОСОВ**

ПРАКТИЧЕСКИ КАЖДОМУ ДОВОДИЛОСЬ ВИДЕТЬ, КАК плавает на поверхности воды сухое бревно – оно находится в горизонтальном положении и устойчиво сохраняет это положение. А может ли бревно плавать в вертикальном или наклонном положении? Чтобы ответить на эти вопросы, мы провели исследование плавания одномерных объектов.

## Немного теории

Будем называть одномерным объектом тело, длина которого много больше его ширины и толщины. Рассмотрим цилиндрическую палочку длиной  $L$  и диаметром  $d$ . Если  $d \ll L$ , то палочку можно считать одномерным объектом. Введем некоторые обозначения, которые будут полезны в дальнейшем. Пусть  $\rho$  – средняя плотность палочки,  $\rho_{\text{ж}}$  – плотность жидкости,  $\Delta\rho = (\rho_{\text{ж}} - \rho)$  – разность плотностей жидкости и палочки. Разумеется,  $\rho_{\text{ж}} > \rho$ . Пусть далее  $Q$  – объем палочки,  $V$  – объем надводной (не погруженной в жидкость) части палочки,  $k = V/Q$  – отношение этих объемов.

Если тело плавает на поверхности жидкости, то вполне условие равновесия

$$mg = F_A,$$

где  $mg = \rho Qg$  – сила тяжести палочки,  $F_A = \rho_{\text{ж}}(Q - V)g$  – сила Архимеда, или выталкивающая сила. Используя введенные ранее обозначения, можно переписать это равенство в виде

$$\rho = \rho_{\text{ж}}(1 - k), \text{ или } \rho_{\text{ж}}k = \Delta\rho.$$

В дальнейшем будем рассматривать ситуацию, при которой средняя плотность палочки близка к плотности жидкости, тогда  $V \ll Q$  и  $k \ll 1$ .

Допустим, что палочка оказалась в наклонном положении, как это показано на рисунке 1. На нее действуют сила тяжести и сила Архимеда (рис.2), которые по условию равновесия равны между собой. Если палочка однородная, то точка приложения силы тяжести палочки находится в ее геометрическом центре, а точка приложения силы Архимеда несколько смещена от геометрического центра палочки в сторону утопленного конца.

Представим силу Архимеда в виде двух сил  $\vec{F}$  и  $\vec{f}$  (рис.3). Здесь  $\vec{F}$  – это выталкивающая сила, действующая

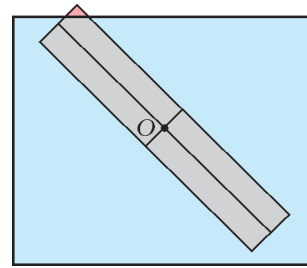


Рис. 1

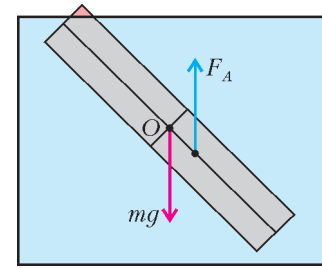


Рис. 2

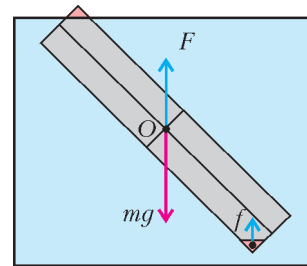


Рис. 3

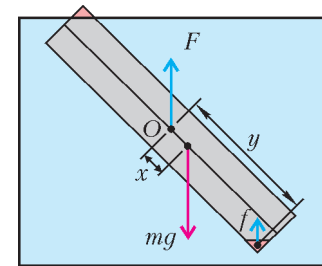


Рис. 4

жена к центру палочки  $O$ . Сила  $\vec{f}$  – это выталкивающая сила, действующая на погруженную часть палочки, расположенную относительно центра палочки симметрично надводной части палочки. Приложена сила  $\vec{f}$  к центру тяжести подводной части палочки в объеме  $V$  и равна

$$f = \rho_{\text{ж}}Vg = \rho_{\text{ж}}kQg = \Delta\rho Qg.$$

Видно, что относительно оси, проходящей через центр палочки  $O$ , силы  $m\vec{g}$  и  $\vec{F}$  имеют нулевой вращающий момент, а момент силы  $\vec{f}$  отличен от нуля. В результате палочка будет вращаться вокруг оси  $O$  (в данном случае против часовой стрелки) и одновременно подниматься вверх до тех пор, пока не займет горизонтальное положение. Вот почему однородная длинная палочка плавает в горизонтальном положении, и это положение равновесия устойчиво.

А что будет, если в силу неоднородности центр тяжести палочки смещен, например, в правую сторону? Тогда в наклонном положении (рис. 4) относительно центра палочки  $O$  помимо вращающего против часовой стрелки момента силы  $\vec{f}$  возникает еще вращающий по часовой стрелке момент силы тяжести  $m\vec{g}$ . Теперь все зависит от того, какой из этих моментов больше.

Пусть для определенности  $\alpha$  – угол наклона палочки (угол между осью палочки и горизонтальной плоскостью),  $x$  – смещение центра тяжести палочки от ее геометрического центра,  $y$  – расстояние от центра палочки до точки приложения силы  $\vec{f}$ . Тогда относительно точки  $O$  момент силы, вращающий палочку по часовой стрелке, равен  $mgx \cos \alpha$ , а момент силы, вращающий палочку против часовой стрелки, равен  $fy \cos \alpha$ . Значит, условие равновесия палочки в этом положении имеет вид

$$mgx \cos \alpha = fy \cos \alpha, \text{ или } \rho x = \Delta\rho y.$$

В случае если это равенство нарушено, то:

Максим Давлетшин, Владислав Соловьев, Федор Стрельников – ученики Московского лицея 1586, а Евгений Николаевич Юносов – их учитель физики.



при  $\rho x < \Delta \rho y$  палочка будет вращаться против часовой стрелки, стремясь к горизонтальному положению;

при  $\rho x > \Delta \rho y$  палочка будет вращаться по часовой стрелке, стремясь к вертикальному положению.

Если средняя плотность палочки близка к плотности жидкости, т.е.  $k \ll 1$ , то можно достаточно четко разграничить три возможных случая плавания палочки.

1) Будем называть *горизонтальным* плаванием такое положение палочки, при котором ни один из торцов палочки не погружен в жидкость полностью (рис. 5). Если угол между осью палочки и горизонтальной плоскостью равен

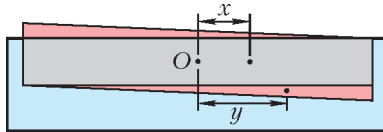


Рис. 5

нулю, то точка приложения силы  $\vec{f}$  находится прямо под геометрическим центром палочки. По мере увеличения угла наклона палочки эта точка будет смещаться вправо, и в предельном случае можно считать, что  $y = L/4$ , поскольку центр тяжести конуса (или пирамиды) находится на расстоянии одной четверти высоты от основания конуса (или пирамиды). Тогда условие горизонтального плавания будет таким:

$$\rho x < \frac{\Delta \rho L}{4},$$

при этом угол между осью палочки и горизонтальной плоскостью (в радианах) заведомо много меньше отношения  $d/L$ .

2) Будем называть *вертикальным* плаванием такое положение палочки, при котором верхний торец палочки находится полностью над поверхностью жидкости, т.е. не погружен в жидкость (рис.6). В таком случае можно считать, что  $y = L/2$ , и условием вертикального плавания палочки является неравенство

$$\rho x > \frac{\Delta \rho L}{2},$$

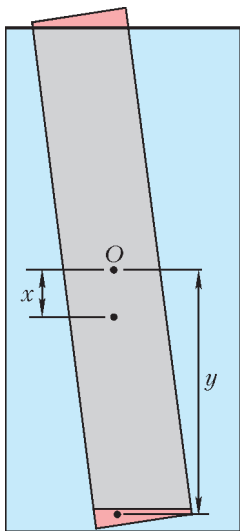


Рис. 6

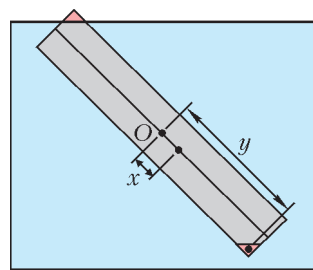


Рис. 7

при этом угол между осью палочки и вертикалью по порядку величины будет мал и примерно равен  $k^{1/3}$ .

3) Все иные виды плавания, отличающиеся от горизонтального и вертикального, будем называть *наклонными* (рис.7). Условие такого вида плавания будет иметь вид

$$\frac{\Delta \rho L}{4} \leq \rho x \leq \frac{\Delta \rho L}{2}.$$

### Экспериментальная часть

В качестве одномерного объекта нами была выбрана длинная и тонкая деревянная палочка – зубочистка. В дальнейшем будем именовать ее просто палочкой. Ее длина 60 мм, а максимальная толщина в серединной части 2 мм. Палочка была пропитана подсолнечным маслом – для этого она некоторое время (10 мин) находилась в горячем масле. Это было сделано для того, чтобы в процессе экспериментов палочка не меняла своей плавучести из-за пропитки водой. Этого же можно добиться, покрасив палочку водостойкой краской.

Чтобы увеличить среднюю плотность палочки, максимально приблизив ее к плотности воды, на палочку наматывалась медная проволока – была выбрана проволока диаметром  $d_M = 0,3$  мм. Это была самая трудоемкая и кропотливая часть работы, но в результате мы добились того, что при некоторой длине намотанной проволоки палочка тонет, а при укорочении длины проволоки всего на  $l_M = 0,3$  мм палочка уже всплывает. Этот факт дает возможность оценить объем непогруженной части палочки:

$$V < \frac{V_M \rho_M}{\rho} = \frac{\pi d_M^2 l_M \rho_M}{4\rho},$$

где  $\rho_M$  – плотность меди.

Количественные оценки показывают, что при тщательном подборе длины утяжеляющей проволоки отличия средней плотности плавающей палочки от плотности воды составляет сотые доли процента. В самом деле, объем палочки  $Q = \pi d^2 L / 4 = 0,2 \text{ см}^3$ , объем непогруженной части палочки  $V < V_M \rho_M / \rho = 0,04 \text{ мм}^3 = 0,4 \cdot 10^{-4} \text{ см}^3$ . Тогда

$$k = \frac{V}{Q} < 2 \cdot 10^{-4} = 0,02\%.$$

Значит, для вертикального плавания центр тяжести палочки должен быть смещен к одному из концов палочки на величину  $x > 6 \cdot 10^{-3}$  мм, а при значениях  $x < 3 \cdot 10^{-3}$  мм плавание палочки будет уже горизонтальным. Заметим, что получить нужное значение  $x$  не так уж трудно, поскольку это достигается смещением одного-двух витков намотанной на палочку проволоки на величину порядка 1 мм в ту или иную сторону.

Перепишем условие наклонного плавания палочки в более удобном для дальнейших рассуждений виде:

$$\Delta \rho \leq \frac{4\rho x}{L} \leq 2\Delta \rho.$$

Пусть палочка плавает в жидкости с плотностью  $\rho_1$  в вертикальном положении. Тогда выполнено условие  $4\rho x / L > 2\Delta \rho_1$ . Если же в другой жидкости с плотностью  $\rho_2$  эта же палочка плавает в горизонтальном положении, то выполнено условие  $\Delta \rho_2 > 4\rho x / L$ . Совместив эти два неравенства, получим

$$\Delta \rho_2 > 2\Delta \rho_1.$$

Это замечательное неравенство позволяет выдвинуть гипотезу о существовании эффекта переворачивания палочки, т.е. перехода от вертикального плавания к горизонтальному при увеличении плотности жидкости.

В самом деле, наши количественные оценки показывают, что средняя плотность палочки меньше плотности воды всего на 0,02%. Сместив центр тяжести палочки к одному из концов, можно добиться ее вертикального плавания.

Затем стоит только увеличить плотность воды чуть больше чем на 0,02 %, как палочка перевернется в горизонтальное положение. Вспомним, что плотность морской воды равна  $1,03 \text{ г/см}^3$ , что на 3% больше плотности пресной воды. Значит, достичь увеличения плотности воды всего на несколько сотых долей процента не представляется трудной задачей – воду нужно просто подсолить! Этот эффект уверенно наблюдается, и вы легко можете его повторить.

Теперь опишем собственно эксперимент. В качестве сосуда используем поллитровую стеклянную банку, а в качестве жидкости – водопроводную воду. Палочку мы уже изготовили, ее средняя плотность максимально близка к плотности пресной воды. Центр тяжести палочки смещен к одному из концов так, чтобы ее положение равновесия в пресной воде было вертикальным. Теперь аккуратно вдоль стенки сосуда высыпая в воду столовую ложку мелкой поваренной соли. Примерно через минуту со дна сосуда начинает медленно подниматься белое облако. Через пол-

минуты оно достигает поверхности воды и через несколько секунд бесследно рассеивается. Еще через 1–3 минуты палочка начинает поворачиваться из своего вертикального положения и спустя 10–20 секунд занимает горизонтальное положение.

*Внимание!* Возможен артефакт (от лат. artefactum – искусственно сделанное). Дело в том, что причиной переворачивания палочки может оказаться белое облако – в нем содержится множество пузырьков воздуха, которые, прилипнув к палочке и таким образом облегчив ее, приведут к эффекту переворачивания. Этот побочный эффект уверенно наблюдается, если в воду насыпать сразу много соли. Убедиться в этом очень легко. Достаточно сбить прилипшие к палочке пузырьки, пополоскав ее в той же воде, – и она вновь будет плавать вертикально. Но через некоторое время, когда вследствие диффузии плотность верхних слоев воды достигнет критического значения, палочка обязательно перевернется.

## НАША ОБЛОЖКА

### Влажные пятна от воды

(Начало см. на 4-й странице обложки)

Чтобы ответить на поставленный вопрос, проведем простой опыт. Положим сухую бумажную салфетку на книгу, а потом смочим часть салфетки чистой водой (рис.1). Мы увидим, что влажная салфетка станет полупрозрачной и сквозь нее можно будет прочесть ранее невидимый текст на обложке книги и рассмотреть узор ткани, на которой лежит книга.

Объяснить увиденное можно, например, следующим образом. Вода проникает внутрь салфетки и пропитывает ее с помощью капиллярных сил. При этом волокна, из которых состоит салфетка, удлиняются (как это происходит, напри-



Рис. 1



Рис. 2

мер, в волосяном гигрометре) и отодвигаются друг от друга. В результате салфетка становится почти прозрачной. В этом можно убедиться, если посмотреть, как наша салфетка пропускает свет (рис.2). На фотографии видно, что пятна от воды на салфетке более светлые, чем сухие ее части. Это значит, что пятна от воды лучше пропускают свет, чем отражают. Вот почему в отраженном свете пятна воды будут казаться более темными. Такие же темные пятна могут оставлять и другие бесцветные прозрачные жидкости, например глицерин.

Возможно также, что причиной просветления является образование своеобразных световодов, по которым свет активно проходит сквозь салфетку. Не исключены и другие причины.

Интересно, а что по этому поводу думаете вы?

К.Богданов

# Долгий путь короля

**Н. БЕЛУХОВ (БОЛГАРИЯ)**

*Посвящается Евгению Гику*

В «КВАНТЕ» №3 ЗА 2000 ГОД БЫЛА НАПЕЧАТАНА НЕБОЛЬШАЯ заметка И.Акулича «Прогулки короля». В ней автор поставил несколько интересных открытых вопросов, в том числе и такой:

*Какова наибольшая возможная длина замкнутого пути короля, обошедшего шахматную доску  $8 \times 8$ ?*

Более точно, пусть король обошел шахматную доску, побывав на каждой клетке по разу, и последним ходом вернулся в исходную клетку. Если соединить отрезками центры полей, которые он последовательно проходил, получится замкнутая ломаная (скорее всего, самопересекающаяся). Какова наибольшая возможная длина этой ломаной?

Ясно, что ломаная состоит из отрезков двух типов – коротких (длины 1) и длинных (длины  $\sqrt{2}$ ). Поэтому достаточно найти минимальное возможное количество коротких ходов короля.

Этим мы и займемся. Фактически мы решим задачу в общем случае – для досок  $2n \times 2n$  (задача для досок с нечетной длиной стороны решается, как мы скоро увидим, совсем просто).

Рассмотрим шахматную доску  $2n \times 2n$  и построим вспомогательную доску, которая называется доской Уэлча. Для этого уберем на исходной доске все клетки одного цвета, а каждую клетку другого цвета заменим на квадрат с длиной стороны в  $\sqrt{2}$  раз больше, который повернут на  $45^\circ$  вокруг центра клетки (рис.1).

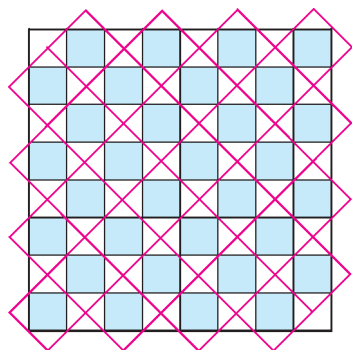


Рис. 1

Пока король делает длинные, т.е. диагональные, ходы, он остается на клетках одного цвета. Более того, такие ходы короля соответствуют движению «хромой» ладьи по доске Уэлча (хромая ладья ходит как обычная, но за ход сдвигается только на соседние клетки).

Если считать, что есть две доски Уэлча – по одной для белых и черных клеток исходной доски, то каждый короткий ход короля можно понимать как прыжок ладьи с

«белой» доски Уэлча на «черную» или наоборот. Поэтому любой маршрут короля представляется как путь хромой ладьи по двум доскам Уэлча, прыгающей с одной доски на другую, когда король делает короткий ход. Число прыжков равно числу коротких ходов короля. Поскольку наша цель – наименьшее количество таких ходов, будем искать маршрут хромой ладьи по одной доске Уэлча, который состоит из наименьшего числа непрерывных участков.

Покрасим доску Уэлча в шахматном порядке, как показано на рисунке 2. На любом участке пути нашей ладьи белые

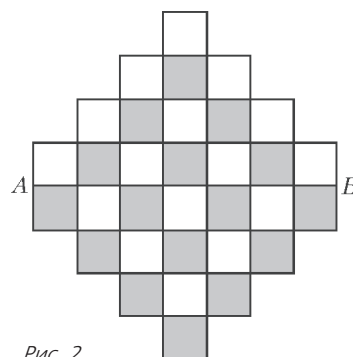


Рис. 2

и черные клетки чередуются, поэтому разница между количествами одних и других на любом участке не превосходит 1.

Если исходная шахматная доска имеет размеры  $(2n + 1) \times (2n + 1)$ , то на одной из раскрашенных досок Уэлча клеток одного цвета будет больше, чем другого, причем не меньше чем на  $2n + 1$ . Это означает, что потребуется не меньше  $2n + 1$  непрерывных кусков пути, чтобы посетить все клетки одной доски. Следовательно, будет не меньше  $4n + 2$  прыжков с одной доски на другую (по два прыжка на каждый кусок пути).

Итак, если у шахматной доски нечетный размер, то король, обойдя доску по замкнутому пути, сделает не меньше  $4n + 2$  коротких ходов. Это достаточно большое число, и построить соответствующий пример пути не очень сложно.

**Упражнение.** Сделайте это.

Если же шахматная доска четного размера, то каждая из досок Уэлча содержит поровну белых и черных клеток. Но их расположение даст нам ключ к решению. Пусть при движении по доске Уэлча ладья оставляет след – линию, соединяющую центры клеток, которые ладья последовательно посещает. Когда ладья прыгает (на другую доску), линия прерывается, зато потом начнется новая. Если ладья посетила все клетки, то несколько таких линий «покрывают» всю доску.

Мысленно разрежем доску, изображенную на рисунке 2, на две одинаковые части по отрезку  $AB$ . Этот отрезок делит некоторые линии на части. Заметим, что нижняя половина доски содержит на  $n$  черных клеток больше, чем белых. Это означает, что есть не меньше  $n$  линий или их частей, которые начинаются и заканчиваются в черной клетке. Аналогично, рассматривая верхнюю половину, получим, что есть не меньше  $n$  линий или их частей, которые начинаются и заканчиваются в белой клетке. Всего получается не меньше  $2n$  линий или их частей. Но склеивание частей линий по отрезку  $AB$  уменьшит их количество не больше чем на  $n$  (ведь есть только  $n$  возможных мест склейки).



Значит, на каждой доске Уэлча было нарисовано не меньше  $n$  линий. Получается, что король должен совершить не меньше  $2n$  горизонтальных или вертикальных ходов. Отметим, что для частного случая обычной шахматной доски  $8 \times 8$  И.Акулич получил такую же оценку гораздо проще.

Теперь приступим к построению примеров, в которых король делает ровно  $2n$  коротких ходов.

На рисунках 3 и 4 показаны примеры самых длинных возможных маршрутов на доске  $8 \times 8$ . Таким образом, исходная задача решена.

Маршрут рисунка 3 несложно перенести на случай произвольного  $n$ , что дает решение в общем случае. Тем не менее,

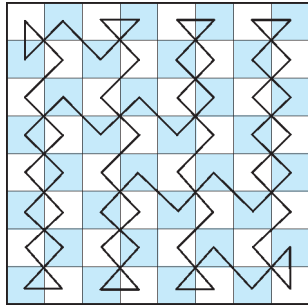


Рис. 3

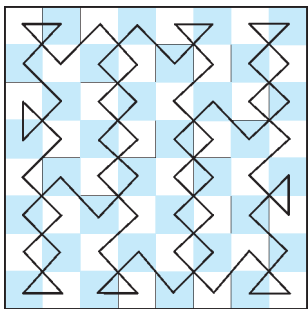


Рис. 4

мы сейчас опишем конструкцию, которая позволила получить эти примеры. Оказывается, что она помогает построить еще много максимальных маршрутов, и автор подозревает, что с ее помощью можно описать вообще все такие маршруты (это пока строго доказано лишь для  $n \leq 4$ ).

Для наглядности разберем случай доски  $8 \times 8$  (т.е. случай  $n = 4$ ), все рассуждения легко переносятся и на общий случай. Сначала подготовим шахматную доску: отметим центры всех клеток и нарисуем синие, красные и зеленые отрезки, как показано на рисунке 5.

Из центра каждой клетки выходит ровно три отрезка – по одному отрезку каждого цвета.

Красные и зеленые отрезки образуют четыре «кольца»: первое кольцо состоит из одинарных сплошных отрезков, второе – из двойных сплошных, третье – из одинарных пунктирных, и четвертое – из двойных пунктирных отрезков.

Зафиксируем любое четырехбуквенное слово – код, каждая буква которого – либо «к», либо «з». Если первая буква кода – «к», то в первом кольце оставим только красные отрезки, а зеленые сотрем. Если же первая буква – «з», то наоборот, оставим в первом кольце только зеленые отрезки, а красные сотрем. Аналогично, глядя на вторую букву кода, во втором кольце сотрем отрезки либо красного, либо зеленого цвета. Так же поступим и с третьим, и с четвертым кольцом. В результате, в соответствии с выбранным кодом, на рисунке 5 мы сотрем половину отрезков в каждом кольце. Например, если выбрать код «кзкк», то после стирания мы увидим ситуацию, изображенную на рисунке 6.

Рассмотрим набор отрезков, оставшийся после стирания. В каждом кольце кроме диагональных отрезков останутся либо ровно два горизонтальных, либо ровно два вертикальных отрезка, т.е. всего останется ровно 8 горизонтальных и вертикальных отрезков (как и должно быть в самом длинном замкнутом пути короля).

Видим, что из центра каждой клетки теперь выходит ровно два отрезка, один из которых синий, а другой – либо

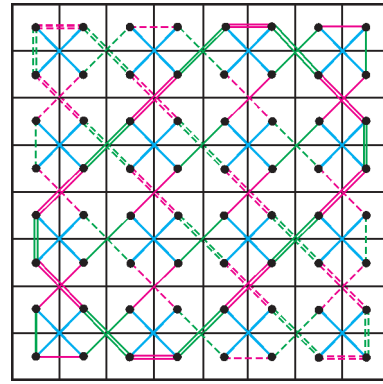


Рис. 5

красный, либо зеленый. Значит, объединение отрезков является либо замкнутым циклом, либо объединением нескольких циклов.

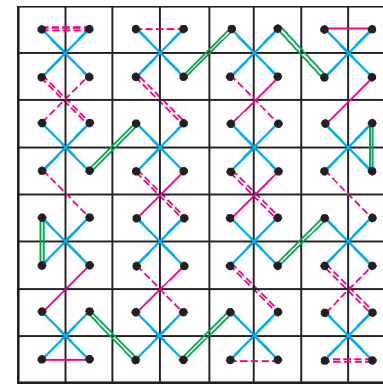


Рис. 6

В первом случае мы и получаем нужный пример обхода короля.

Теперь попробуем разобраться, какое условие на код надо наложить, чтобы объединение отрезков образовало один цикл (а не распалось на несколько циклов). Заметим, что при движении по отрезкам их цвета чередуются следующим образом:  $снснснснсн\dots$ , где  $с$  – синий, а  $н$  – либо  $к$  (красный), либо  $з$  (зеленый). Можно считать, что мы выполняем «двойные ходы» вида «К» (по синему, а затем по красному отрезкам) или вида «З» (по синему, а затем по зеленому отрезкам).

Занумеруем клетки парами  $(i, j)$ , где  $i$  – номер столбца (считая слева направо), а  $j$  – номер строки (считая снизу вверх). Начнем двигаться, например, с клетки  $(1, 2)$ , выйдя из нее по синему отрезку. В какой-то момент после  $k$  «двойных ходов» мы снова впервые возвратимся в клетку  $(1, 2)$ .

Заметим, что выполнение ходов вида «З» не изменяет номер строки, в которой находится король. А при выполнении ходов вида «К», как нетрудно видеть, номер строки изменяется следующим образом:  $2-1-3-5-7-8-6-4-2-1\dots$  (далее по циклу). Это означает, что для возвращения во вторую строку требуется сделать количество ходов вида «К», кратное 8. Аналогично рассуждая, покажем, что для возвращения в первый столбец требуется сделать количество ходов вида «З», кратное 8. В частности,  $k$  делится на 8,  $k = 8m$ .

Далее, вернемся к рассмотрению четырех колец красных и зеленых отрезков. Вначале мы находимся в клетке  $(1, 2)$ ,

принадлежащей первому кольцу. При выполнении двойного хода мы проходим синий отрезок, отрезок первого кольца и оказываемся на первом кольце, при выполнении еще одного двойного хода – проходим синий отрезок, отрезок второго кольца и оказываемся на втором кольце. Далее, нетрудно отследить изменение номера кольца после очередного двойного хода: 1–1–2–3–4–4–3–2–1–1–2–3–4–4–3–2–1–... и т.д.

Например, для кода «кзкк» последовательность двойных ходов будет иметь вид *КЗКК ККЗК КЗКК ККЗК ...*, (поскольку на первом кольце остались отрезки только красного цвета, на втором – зеленого и т.д.). Итак, для возвращения в начальную клетку (1,2) мы должны сделать *m* восьмерок двойных ходов *КЗКК ККЗК*. Но мы доказывали, что количество ходов вида «З» (и «К») должно делиться на 8. Имеем  $2m:8$ , т.е.  $m \geq 4$ , и, значит, до возвращения в клетку (1,2) прошло  $k = 8m \geq 32$  двойных ходов. Следовательно, начиная с клетки (1,2), мы обошли все 64 клетки доски и вернулись обратно.

Другая ситуация будет с кодом «кзкк»: здесь подходит  $m = 2$ , и, значит, мы возвратимся в начальную клетку после 16 двойных ходов, т.е. обойдем лишь половину клеток доски.

Из описанных соображений читатель легко усмотрит красивый критерий: объединение отрезков представляет собой один цикл тогда и только тогда, когда количество букв «к» (или «з») в кодовом слове нечетно.

Все описанные шаги можно повторить и для доски  $2n \times 2n$ . Точно так же рассматриваем множество синих, красных и зеленых отрезков. Они образуют *n* колец. По *n*-буквенному коду из букв «к» и «з» делаем стирания в кольцах. Условие возвращения в начальную клетку таково: количество двойных ходов «К» и «З» должно быть кратно  $2n$ .

А критерий того, что объединение отрезков представляет собой один цикл, будет звучать так: количество букв «к» (или «з») в коде взаимно просто с *n*.

«Пример», полученный И.Акуличем в его статье, соответствует коду «зкзк», но так как наибольший общий делитель чисел 2 и 4 отличен от 1, то маршрут распадается на два циклических маршрута.

Теперь решим еще одну интересную задачу, в которой нам снова помогут идеи, изложенные в начале этой статьи:

*Какое наибольшее число поворотов может сделать хромая ладья при замкнутом маршруте по всем полям доски  $2n \times 2n$ ?*

Этот вопрос поставлен в замечательной книге Е. Гика «Необычные шахматы» для доски  $8 \times 8$ . В качестве ответа там приведен лишь пример с 56 поворотами (рис.7), но не доказано, что это наибольшее число.

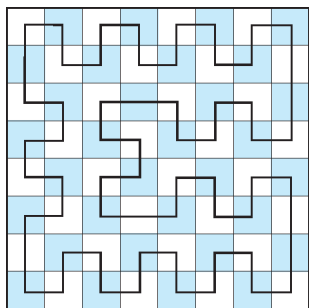


Рис. 7

Чтобы это доказать, мы посчитаем «прямые» ходы (т.е. ходы, при которых ладья выходит из клетки в том же направлении, в котором она в эту клетку попала) и найдем их минимальное количество.

Пусть есть маршрут хромой ладьи по шахматной доске.

Будем рисовать путь на доске Уэлча (расположим ее для удобства так, как показано на рисунке 2), соединяя клетки ровно в том порядке, в каком ладья обходит соответствующую

им клетки на обычной доске. Если ладья повернула, то на доске Уэлча предыдущую и следующую клетки соединим горизонтальным или вертикальным отрезком, а если ладья прошла по клетке, не меняя направления, то на доске Уэлча предыдущую и следующую клетки нужно соединить диагональным отрезком. В итоге на каждой из досок Уэлча получится замкнутый маршрут, представляющий собой несколько непрерывных линий из вертикальных и горизонтальных отрезков, соединенных диагональными отрезками. Общее количество диагональных отрезков на двух досках Уэлча как раз равно числу прямых ходов ладьи на обычной шахматной доске.

Но как мы уже выяснили, чтобы покрыть каждую доску Уэлча, нужно не меньше *n* непрерывных линий, по которым может пройти ладья. Следовательно, на каждой доске Уэлча будет не меньше *n* диагональных отрезков (чтобы соединить эти линии в замкнутый маршрут), всего на двух досках – не меньше  $2n$ , и такое же число прямых ходов будет в маршруте ладьи.

Это рассуждение справедливо для любого четного *n*. Если же *n* нечетно, то оно немного неточное. Дело в том, что диагональный отрезок соединяет одноцветные клетки доски Уэлча. Вспомним, что на доске Уэлча после проведения отрезка *AB*, разделяющего ее пополам, мы нашли не менее *n* линий или их частей с белыми концами и не менее *n* линий или их частей с черными концами. Всего тем самым будет  $2n$  белых и  $2n$  черных концов (если линия состоит всего из одной точки, мы все равно будем считать, что у нее два конца). Склейки могут происходить в *n* местах, причем склеиваются всегда разноцветные концы. Значит, на доске Уэлча у получившихся после склейки линий будет всего как минимум *n* белых концов и как минимум *n* черных концов. Диагональные отрезки разбивают концы одного цвета на пары, и, поскольку *n* нечетно, на доске Уэлча найдется как минимум  $n + 1$  концов каждого цвета. Поэтому диагональных отрезков на одной доске Уэлча будет не меньше чем  $\frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} = n + 1$ , а на двух досках – не меньше чем  $2n + 2$ . Значит, потребуется не меньше  $2n + 2$  прямых ходов ладьи на обычной доске.

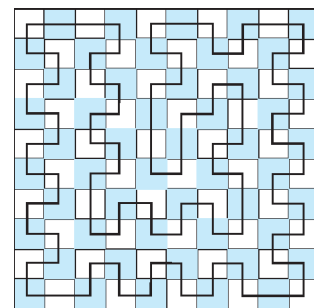


Рис. 8

На рисунке 8 изображен маршрут ладьи на доске  $10 \times 10$  (т.е. для  $n = 5$ ) с 12 поворотами. Его легко перенести на доску большего размера.

В заключение предлагаем такую задачу:

*Пусть *A* – число замкнутых обходов хромой ладьей доски  $2n \times 2n$ , содержащих наибольшее число поворотов, *B* – число замкнутых обходов «хромой» ладьей доски  $4n \times 4n$ , содержащих наименьшее число поворотов. Докажите, что  $B \geq 2A$ .*

*Указание:* разбейте доску  $4n \times 4n$  на квадраты  $2 \times 2$ .

Автору неизвестно, не обращается ли неравенство этой задачи всегда в точное равенство. Вся надежда на читателей.

# Задачи на уравнение моментов сил

А. ЧЕРНОУЦАН

**МОМЕНТ СИЛЫ (ВРАЩАТЕЛЬНЫЙ МОМЕНТ СИЛЫ)** относительно оси вращения, равный по величине произведению модуля этой силы  $F$  на плечо  $d$  (рис. 1), характеризует вращательное действие силы по отношению к этой оси.

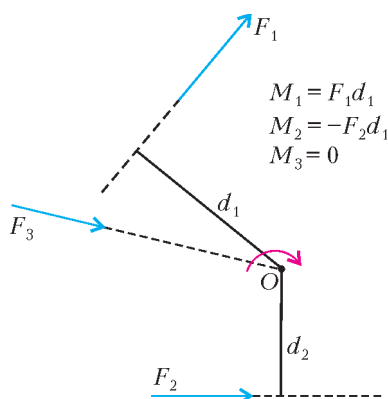


Рис. 1

$$\begin{aligned} M_1 &= F_1 d_1 \\ M_2 &= -F_2 d_2 \\ M_3 &= 0 \end{aligned}$$

Плечом называется расстояние от линии действия силы до оси вращения. Отметим, что плечо силы не меняется при перемещении силы вдоль линии ее действия (точка приложения силы не имеет значения при вычислении момента силы – важна только линия ее действия!). Момент силы измеряется в Н·м (не в Дж!).

Моменту силы приписывается знак: если данная сила (в отсутствие других сил) стремится повернуть тело в положительном направлении (например, по часовой стрелке), то момент силы считается положительным, в противном случае – отрицательным. (Положительное направление вращения можно выбирать свое в каждой задаче.) Итак, момент силы равен

$$M = \pm Fd.$$

Обычно ось вращения перпендикулярна плоскости рисунка и на рисунке изображается точкой. Поэтому часто говорят о моментах сил относительно точки. Поскольку в школьном курсе физики (в отличие от вузовского) момент силы относительно точки пространства не вводится, то недоразумений не возникает. Момент силы относительно точки  $O$  – это момент этой силы относительно оси вращения, проходящей через точку  $O$  перпендикулярно плоскости рисунка. Напротив, все силы обычно лежат в плоскости рисунка, т.е. они перпендикулярны оси вращения. Момент силы, параллельной оси вращения, относительно этой оси равен нулю. Поэтому если у силы есть составляющая, параллельная оси вращения, то ее (эту составляющую) при вычислении момента надо отбросить.

Общие условия равновесия тела или системы тел (составного тела) заключаются в следующем.

1. Условие отсутствия поступательного движения:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = 0 \quad (1)$$

(сумма внешних сил равна нулю). Это уравнение означает, что центр масс тела (системы тел) покоится или движется

равномерно и прямолинейно, но не обеспечивает отсутствие вращения.

2. Условие отсутствия вращения (уравнение моментов):

$$M_1 + M_2 + \dots = 0 \quad (2)$$

(сумма моментов внешних сил относительно произвольной оси равна нулю). Это уравнение означает, что вращение относительно данной оси отсутствует или происходит равномерно – с постоянной угловой скоростью. Обычно рассматривается неподвижное тело, тогда ось вращения можно выбирать произвольно (нет вращения вокруг любой оси). Удачным выбором оси можно исключить ненужные силы: если линия действия силы проходит через ось, то плечо этой силы равно нулю и она не входит в уравнение моментов.

Теперь перейдем к решению конкретных задач. В нескольких первых задачах все силы параллельны друг другу, что упрощает нахождение моментов.

**Задача 1.** Труба массой 3 кг лежит на земле. Какую силу надо приложить, чтобы приподнять трубу за один конец?

**Решение.** В момент начала подъема труба по всей длине отрывается от поверхности и опирается в землю другим концом (рис. 2). Мы можем записать второй закон Ньютона (уравнение (1)) в проекции на вертикальную ось, но оно содержит два неизвестных: искомую силу  $F$  и силу реакции опоры  $N$ , и нам все равно придется записать уравнение моментов относительно какой-нибудь оси. Однако мы можем обойтись одним уравнением, если выберем ось вращения ( $O$ ) на левом конце трубы и исключим силу  $N$ :

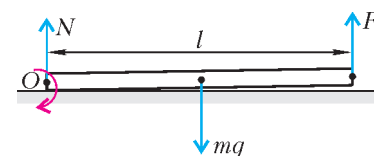


Рис. 2

$$mg \frac{l}{2} - Fl = 0.$$

Отсюда получаем

$$F = \frac{mg}{2} = 15 \text{ Н.}$$

**Задача 2.** Два человека несут металлическую трубу, положив ее себе на плечи. Первый человек поддерживает трубу на расстоянии  $l = 1$  м от одного из ее концов, второй держит противоположный конец трубы. Во сколько раз нагрузка, приходящаяся на первого человека, больше, чем на второго, если длина трубы  $L = 2,5$  м?

**Решение.** В данном примере нам надо установить соотношение между силами реакции опоры  $N_1$  и  $N_2$ , поэтому

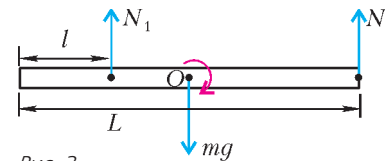


Рис. 3

удобно исключить силу тяжести трубы, выбирая ось ( $O$ ), проходящую через ее центр тяжести (рис. 3). Уравнение моментов относительно этой оси имеет вид

$$N_1 \left( \frac{L}{2} - l \right) - N_2 \frac{L}{2} = 0,$$

откуда находим

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{L}{L - 2l} = 5.$$

**Задача 3.** При взвешивании на неравноплечных рычажных весах вес тела на одной чашке получился  $P_1 = 36$  Н, на другой  $P_2 = 49$  Н. Определите истинный вес тела. Весом коромысла весов пренебречь.



**Решение.** Запишем уравнение моментов относительно точки опоры (правило рычага) для первого взвешивания:

$$P_1 l_1 = P l_2$$

и для второго взвешивания:

$$P l_1 = P_2 l_2,$$

где  $P$  – истинный вес груза,  $P_1, P_2$  – веса разновесов при первом и втором взвешиваниях. Поделив уравнения друг на друга, получим

$$\frac{P_1}{P} = \frac{P}{P_2},$$

откуда

$$P = \sqrt{P_1 P_2} = 42 \text{ Н.}$$

**Задача 4.** На одной чашке равноплечных рычажных весов находится груз весом  $P_1 = 1,2 \text{ Н}$ , на другой – весом  $P_2 = 1,1 \text{ Н}$ . На каком расстоянии от центра коромысла весов надо подвесить гирьку весом  $P_3 = 0,4 \text{ Н}$ , чтобы весы были в равновесии? Длина коромысла  $l = 0,2 \text{ м}$ .

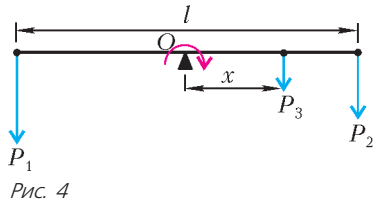


Рис. 4

**Решение.** В этом случае в уравнение моментов относительно оси, проходящей через середину коромысла весов (рис.4), войдут не две, а

три силы:

$$P_2 \frac{l}{2} - P_1 \frac{l}{2} + P_3 x = 0$$

(сила тяжести коромысла и сила реакции опоры не входят в уравнение моментов, так как они проходят через ось вращения). Получаем

$$x = l \frac{P_1 - P_2}{2P_3} = 25 \text{ мм.}$$

В следующей задаче, хотя все силы и параллельны, вычисление их плеч уже не столь тривиально.

**Задача 5.** Стержень массой  $m_1 = 300 \text{ г}$  согнули под прямым углом в точке, которая делит его в отношении 1:2, и подвесили на нити, привязанной к точке сгиба. Грузик какой массы  $m_2$  надо прикрепить к концу короткой стороны угла, чтобы концы стержня находились на одном уровне?

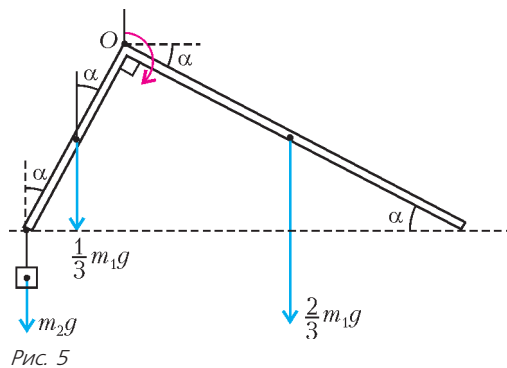


Рис. 5

**Решение.** Запишем уравнение моментов относительно точки подвеса, исключив тем самым силу натяжения нити (рис.5):

$$\frac{2}{3} m_1 g \left( \frac{l}{3} \cos \alpha \right) - \frac{1}{3} m_1 g \left( \frac{l}{6} \sin \alpha \right) - m_2 g \left( \frac{l}{3} \sin \alpha \right) = 0,$$

где  $l$  – длина стержня. Отсюда находим

$$m_2 = m_1 \left( \frac{2}{3} \operatorname{ctg} \alpha - \frac{1}{6} \right) = \frac{7}{6} m_1 = 350 \text{ г}$$

(из рисунка видно, что  $\operatorname{ctg} \alpha = 2$ ).

В последующих задачах силы не параллельны друг другу. Хотя вычисление моментов требует теперь больше усилий, открываются и новые возможности. Так, направление некоторых сил можно находить построением.

**Задача 6.** Рабочий удерживает за один конец доски массой  $m = 16 \text{ кг}$  так, что она опирается другим концом о землю и образует угол  $\alpha = 60^\circ$  с горизонтом. С какой силой  $F$  удерживает рабочий доску, если эта сила перпендикулярна доске?

**Решение.** Запишем уравнение моментов относительно оси, проходящей через точку опоры доски (рис.6). Тем самым мы исключаем из уравнения силу реакции  $\vec{F}_p$ , действующую на доску в точке опоры. Плечо искомой силы равно длине доски  $l$ , а плечо силы тяжести равно  $(l/2) \cos \alpha$ . Получаем

$$mg \frac{l}{2} \cos \alpha - Fl = 0, \text{ т.е.}$$

$$F = \frac{mg}{2} \cos \alpha = 40 \text{ Н.}$$

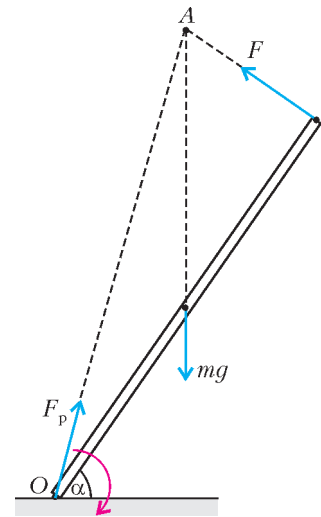


Рис. 6

Покажем теперь, как простым построением найти направление силы  $\vec{F}_p$ , не вычисляя ее. (Вычислить  $F_p$  можно из второго закона Ньютона.) Построим линии действия сил  $\vec{F}$  и  $m\vec{g}$  и найдем точку  $A$  их пересечения. Относительно этой точки моменты сил  $\vec{F}$  и  $m\vec{g}$  равны нулю, а уравнение моментов утверждает, что сумма моментов всех трех сил также равна нулю. Следовательно, момент силы  $\vec{F}_p$  относительно этой точки равен нулю, т.е. линия действия этой силы проходит через точку  $A$ . Такое рассуждение применимо всегда для трех непараллельных сил.

В следующей задаче уравнение моментов необходимо использовать уже на стадии изготовления рисунка.

**Задача 7.** К гладкой вертикальной стене на нити длиной  $l = 8 \text{ см}$  подвешен шар радиусом  $R = 5 \text{ см}$  и массой  $m = 6 \text{ кг}$ . Определите силу давления шара на стену.

**Решение.** При изготовлении рисунка к задаче (задачи статики невозможно решать без правильного и ясного рисунка) возникает вопрос: как правильно направить нить? Интуитивно многие школьники чувствуют, что в отсутствие трения шар займет единственное устойчивое положение, при котором продолжение нити проходит через центр шара, но обосновать этого не могут. А объяснение опирается на правило моментов. Действительно (рис.7),

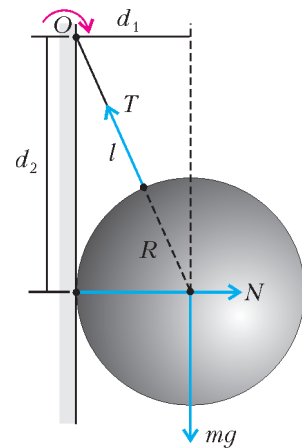


Рис. 7

относительно центра шара моменты силы реакции опоры  $\vec{N}$  и силы тяжести  $m\vec{g}$  равны нулю, следовательно, момент силы натяжения  $\vec{T}$  также должен быть равен нулю.

Используя полученный рисунок, можно решить задачу без привлечения уравнения моментов – достаточно записать второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси и исключить силу  $T$ . Однако проще записать правило моментов относительно точки крепления нити к стене – тогда сила натяжения вообще не войдет в уравнение:

$$mgd_1 - Nd_2 = 0, \text{ где } d_1 = R, \quad d_2 = \sqrt{(l+R)^2 - R^2}.$$

Отсюда находим силу реакции стены, а значит, и силу давления шара на стену:

$$F_d = N = 25 \text{ Н.}$$

**Задача 8.** В гладкий высокий цилиндрический стакан с внутренним радиусом  $R = 6$  см помещают палочку длиной  $l = 13$  см и массой  $m = 250$  г. С какой силой действует на

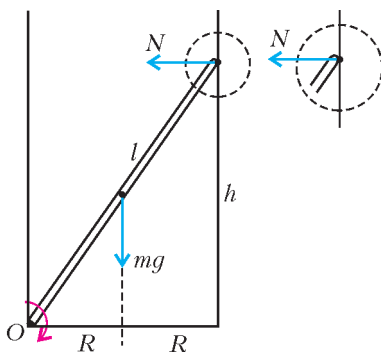


Рис. 8

стенку стакана верхний конец палочки?

**Решение.** В этой задаче важно правильно направить силу нормальной реакции стенки сосуда. Тут действует общее правило: силу взаимодействия двух соприкасающихся поверхностей (силу давления, нормальной реакции) направляют перпендикулярно поверхности, имеющей в месте касания явно выраженный плоский участок (рис.8).

Записав уравнение моментов относительно нижнего конца палочки:

$$mgR - Nh = 0, \text{ где } h = \sqrt{l^2 - (2R)^2} = 5 \text{ см,}$$

получаем

$$N = \frac{mgR}{h} = 3 \text{ Н.}$$

**Задание.** Найдите построением направление силы, действующей на нижний конец палочки.

**Задача 9.** Шар массой  $m = 3$  кг находится на наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол  $\alpha = 60^\circ$ . Равновесие шара достигается за счет трения о плоскость и натяжения нити, прикрепленной одним концом к верхней части шара, а другим – к вершине наклонной плоскости. Найдите силу натяжения нити, если нить горизонтальна.

**Решение.** В этой задаче, выбирая различные точки для уравнения моментов, можно мгновенно получать различные соотношения между силами (рис.9). Например, записав уравнение моментов относительно центра шара, получим:

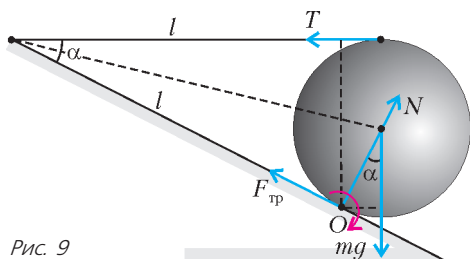


Рис. 9

$T = F_{\text{тр}}$ , а относительно точки крепления нити с плоскостью:  $N = mg$ . Однако для решения нашей задачи надо записать уравнение моментов относительно точки  $O$  касания шара с плоскостью, исключая  $N$  и  $F_{\text{тр}}$ :

$$mgR \sin \alpha - Tl \sin \alpha = 0,$$

где длину нити можно выразить через радиус:

$$l = R \text{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

В результате находим

$$T = mgtg \frac{\alpha}{2} \approx 17 \text{ Н.}$$

**Задача 10.** Лестница длиной  $l = 4$  м приставлена к гладкой стене под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту. Коэффициент трения между лестницей и полом  $\mu = 0,25$ . На какое расстояние вдоль лестницы может подняться человек, прежде чем лестница начнет скользить? Массой лестницы пренебречь.

**Решение.** Условие начала проскальзывания нижнего конца лестницы имеет вид

$$F_{\text{тр}} = \mu N.$$

Искомое расстояние  $x$  может войти только в уравнение моментов. Так как это уравнение является наиболее сложным в задаче, выберем ось так, чтобы сил было меньше и геометрия была попроще – в точке  $O$  (рис.10):

$$N_1 \cdot l \sin \alpha - mg \cdot x \cos \alpha = 0.$$

Чтобы исключить все силы, придется записать еще два уравнения – проекции второго закона Ньютона на горизонтальную и вертикальную оси координат:

$$N_1 - F_{\text{тр}} = 0, \quad N - mg = 0.$$

Окончательно получаем

$$x = \mu l \text{tg} \alpha \approx 1,7 \text{ м.}$$

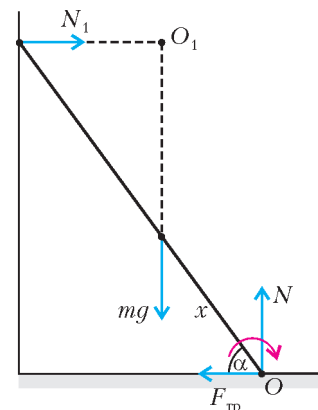


Рис. 10

**Замечание.** Отметим, что при специальном выборе оси вместо последних трех уравнений можно было бы обойтись одним уравнением моментов. Если записать его относительно оси  $O_1$ , то силы  $N_1$  и  $mg$  будут исключены:

$$F_{\text{тр}} \cdot l \sin \alpha - N \cdot x \cos \alpha = 0.$$

Подставляя сюда  $F_{\text{тр}} = \mu N$ , приходим к тому же самому ответу для  $x$ .

**Задача 11.** Наклонная плоскость составляет с горизонтом угол  $\alpha$ , тангенс которого равен 0,6. На ней стоит цилиндр радиусом  $R = 3$  см. При какой максимальной высоте цилиндра он не опрокидывается? Цилиндр сделан из однородного материала.

**Решение.** Задачу можно решить очень быстро, если сразу рассмотреть цилиндр, который близок к опрокидыванию. Это означает, что основание цилиндра уже перестало давить на плоскость и он опирается только на одну нижнюю точку (рис.11,а). Поскольку к этой точке приложены как сила трения, так и сила нормальной реакции, то линия действия силы тяжести также проходит через эту точку. Из рисунка видно, что между высотой и диаметром цилиндра выполня-

ется соотношение

$$\frac{2R}{h} = \operatorname{tg} \alpha,$$

откуда находим

$$h = \frac{2R}{\operatorname{tg} \alpha} = 10 \text{ см.}$$

Если сила трения всегда действует вдоль поверхности соприкосновения, то с силой нормальной реакции не все так ясно. В задачах динамики силу  $\vec{N}$  обычно прикладывают к центру основания. Как же она вдруг «перескочила» на край цилиндра? Чтобы разобраться, будем постепенно увеличивать угол наклона плоскости, от нулевого до такого, при

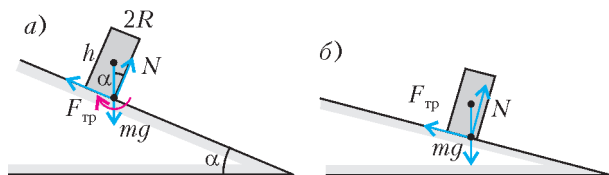


Рис. 11

котором цилиндр опрокидывается. В промежуточном состоянии (рис. 11, б) цилиндр опирается о наклонную плоскость всей плоскостью основания, но равнодействующая сил нормальной реакции приложена не к центру основания, а к точке пересечения основания и линии действия силы тяжести. Действительно, относительно этой точки моменты сил тяжести и трения равны нулю, следовательно, должен быть равен нулю и момент силы нормальной реакции. Дело в том, что нижняя часть основания давит на плоскость сильнее, чем верхняя, и равнодействующая смещается вниз. Так что переход точки приложения силы  $\vec{N}$  от центра к крайней точке происходит не скачком, а постепенно.

**Задача 12.** Нижние концы лестницы-стремянки соединены веревкой. Найдите силу ее натяжения в тот момент, когда человек массой  $m = 80$  кг поднялся по стремянке до середины ее высоты. Массой лестницы и трением о пол пренебречь. Каждая сторона лестницы составляет с полом угол  $\alpha = 45^\circ$ .

**Решение.** Особенность этой задачи состоит в том, что для определения неизвестной силы приходится записывать уравнение моментов не для всей системы, а для одной из ее частей. Действительно, для всей системы лестница + человек сила натяжения веревки является внутренней силой и не входит в уравнения (1) и (2). Она становится внешней силой, только если рассмотреть отдельно либо правую, либо левую половину лестницы. Выберем левую половину (рис. 12), так как на нее действует меньше сил (нет силы тяжести). Запишем уравнение моментов относительно точки

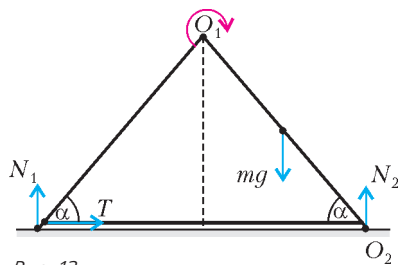


Рис. 12

$O_1$ , исключив тем самым силу взаимодействия между половинками лестницы в верхнем шарнире:

$$N_1 \frac{l}{2} - T \frac{l}{2} \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

где  $l$  – длина веревки,  $T$  – искомая сила натяжения веревки. Чтобы найти  $N_1$ , надо записать уравнение моментов уже для

всей системы относительно точки  $O_2$  (чтобы исключить силу  $N_2$ ):

$$N_1 l - mg \frac{l}{4} = 0.$$

Окончательно для силы натяжения веревки получаем

$$T = \frac{mg}{4} \operatorname{ctg} \alpha = 200 \text{ Н.}$$

**Задача 13.** В кузове грузовика стоит цилиндр, радиус основания которого  $R = 10$  см, а высота  $h = 50$  см. С каким максимальным ускорением может тормозить грузовик, чтобы цилиндр не опрокинулся?

**Решение.** В системе отсчета, связанной с грузовиком, цилиндр покоится, и поставленная задача становится задачей статики. Однако переходя в систему отсчета, которая движется поступательно с ускорением  $\vec{a}$ , мы должны к силе тяжести  $\Delta m \vec{g}$ , действующей на каждый элемент массы, добавить силу инерции  $-\Delta m \vec{a}$  (см., например, статью В.Шутова в «Кванте» №2 за 2010 г.). Равнодействующая сил инерции, как и сил тяжести, приложена к центру тяжести. В тот момент, когда цилиндр находится на грани опрокидывания, он взаимодействует с опорой в одной точке  $O$  (рис. 13, а). Запишем относительно этой точки уравнение моментов:

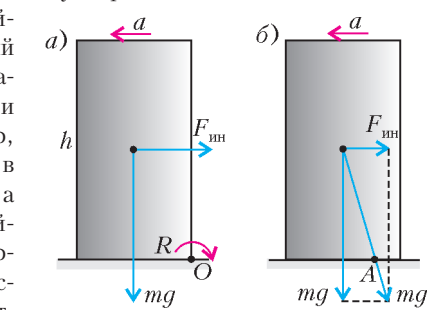


Рис. 13

$$F_{\text{ин}} \frac{h}{2} - mgR = 0$$

(момент силы реакции равен нулю). Подставляя  $F_{\text{ин}} = ma$ , получаем

$$a = \frac{2gR}{h} = 4 \text{ м/с}^2.$$

**Замечание.** Вместо того чтобы в явном виде вводить силу инерции, можно считать, что вместо силы тяжести  $m\vec{g}$  действует сила тяжести  $m\vec{g}'$ , где  $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}$ . Тогда мы можем применить общее условие того, чтобы поставленное на опору тело не опрокидывалось: линия действия силы тяжести  $m\vec{g}'$  не должна выходить за пределы опоры (рис. 13, б). Действительно, нетрудно установить, что равнодействующая сил нормальной реакции должна быть приложена в точке  $A$  пересечения новой силы тяжести с опорой. (Относительно этой точки равны нулю моменты силы трения и силы тяжести  $m\vec{g}'$ . Значит, должен быть равен нулю и момент силы нормальной реакции.) Когда точка  $A$  окажется на краю опоры, сила реакции будет действовать только в этой точке.

**Задача 14.** Два одинаковых шара радиусом  $r = 10$  см и массой  $m = 600$  г каждый положили в вертикальный открытый с обеих сторон тонкостенный цилиндр радиусом  $R = 15$  см, стоящий на горизонтальной плоскости. Пренебрегая трением, найдите, при какой минимальной массе  $M$  цилиндра шары его не опрокидывают.

**Решение.** Когда цилиндр находится на грани опрокидывания, он взаимодействует с плоскостью только в точке  $O$  (рис. 14). Если начать с уравнения моментов для цилиндра, то придется вычислять силы давления шаров на его стенки, а для этого нужно будет записать еще и уравнение моментов



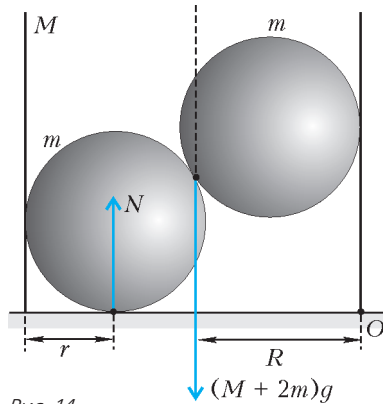


Рис. 14

с цилиндром и между собой являются теперь внутренними, и их учитывать не надо. Получаем уравнение

$$N \cdot (2R - r) - (M + 2m)g \cdot R = 0.$$

Силу реакции плоскости находим из второго закона Ньютона для системы двух шаров (в проекции на вертикальную ось)

$$N - 2mg = 0.$$

Окончательно получаем

$$M = \frac{2m(R - r)}{R} = 400 \text{ г}.$$

**Задача 15.** Два одинаковых конуса равномерно прижаты друг к другу вдоль направляющих так, что их оси параллельны. Один из конусов вращают с постоянной угловой скоростью  $\omega_1$ , а второй приводится во вращение силами трения со стороны первого конуса. Какой будет установившаяся угловая скорость вращения второго конуса?

**Решение.** В этой задаче уравнение моментов применяется не к покоящемуся, а к вращающему телу (второму, т.е. ведомому конусу). При его установившемся вращении, т.е. при вращении с постоянной угловой скоростью, сумма моментов внешних сил относительно оси вращения равна нулю. Для второго конуса внешними силами, создающими момент, являются только силы трения на линии соприкосновения с первым конусом (рис. 15). На левой части этой линии длиной  $R_2/\cos\alpha$  скорость точек первого конуса больше, чем второго, и силы трения направлены от нас, а на правой части

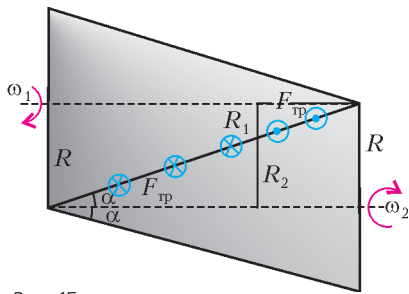


Рис. 15

этой линии длиной  $(R - R_2)/\cos\alpha$  силы трения направлены к нам. В точке радиусом  $R_1 = R - R_2$  скорости точек поверхностей конусов одинаковы:

$$\omega_1 (R - R_2) = \omega_2 R_2.$$

Чтобы найти  $R_2$ , запишем уравнение моментов. Сила трения, действующая на отрезке линии соприкосновения длиной  $l$ , равна  $F_{\text{тр}} = fl$ , где  $f$  — сила трения на единицу длины. Плечо силы трения линейно меняется вдоль линии соприкосновения. Однако, не вдаваясь в подробное доказательство, скажем, что момент силы трения на отрезке, где силы трения во всех точках направлены в одну сторону, равен произведе-

нию силы трения на среднее плечо. Получаем

$$f \frac{R_2}{\cos\alpha} \frac{0 + R_2}{2} = f \frac{R - R_2}{\cos\alpha} \frac{R_2 + R}{2},$$

откуда

$$R_2 = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

Теперь находим искомую угловую скорость:

$$\omega_2 = (\sqrt{2} - 1)\omega_1.$$

### Упражнения

1. Прямая неоднородная балка длиной 1 м и массой 200 кг подвешена за концы на вертикально натянутых тросах. Балка занимает горизонтальное положение. Найдите натяжение правого троса, если центр тяжести балки находится на расстоянии 0,3 м от ее левого конца.

2. Однородный стержень длиной 1 м и массой 12 кг подвешен на расстоянии 20 см от одного из его концов. С какой силой будет давить стержень на руку, если, взявшись за короткий конец, удерживать его в горизонтальном положении?

3. На однородной доске длиной 4 м и массой 30 кг качаются два мальчика, массы которых 30 кг и 40 кг. На каком расстоянии от середины должна находиться точка опоры доски, если мальчики сидят на ее концах?

4. Стержень массой 100 г согнули посередине под углом  $120^\circ$  и подвесили на нити, привязанной к точке сгиба. Грузик какой массы надо прикрепить к концу одной из сторон угла, чтобы другая сторона заняла горизонтальное положение?

5. Лестница массой 30 кг приставлена к гладкой вертикальной стене под углом  $45^\circ$ . Найдите силу давления лестницы на стену. Центр тяжести лестницы находится в ее середине.

6. Однородную палку длиной 1,5 м и массой 2 кг прислонили к краю стола так, что расстояние от верхнего конца палки до точки касания равняется 50 см. Высота стола 0,8 м. Пренебрегая трением между палкой и столом, найдите силу их взаимодействия.

**Указание.** Сила взаимодействия направлена перпендикулярно палке (см. задачу 8 в статье).

7. Однородная доска приставлена к стене. При каком наименьшем угле (в градусах) между доской и горизонтальным полом доска сохранит равновесие, если коэффициент трения между доской и полом 0,4, а между доской и стеной 0,5?

8. Колесо радиусом 0,5 м и массой 10 кг стоит перед ступенькой высотой 0,1 м. Какую наименьшую горизонтальную силу надо приложить к оси колеса, чтобы поднять его на ступеньку?

9. Нижние концы лестницы-стремянки массой 10 кг соединены веревкой. Каждая сторона лестницы составляет с полом угол  $45^\circ$ . Считая пол абсолютно гладким, найдите натяжение веревки.

10. Однородный стержень шарнирно подвешен к потолку вагона. Вагон начинает двигаться с постоянным ускорением  $2 \text{ м/с}^2$ . Найдите угол, который составит стержень с вертикалью в установившемся положении.

## XXXI Турнир городов

## ЗАДАЧИ ВЕСЕННЕГО ТУРА

Базовый вариант

8–9 классы

1 (3)<sup>1</sup>. В шести корзинах лежат груши, сливы и яблоки. Число слив в каждой корзине равно числу яблок в остальных корзинах вместе взятых, а число яблок в каждой корзине равно числу груш в остальных корзинах вместе взятых. Докажите, что общее число фруктов делится на 31.

*М.Мурашкин, А.Шаповалов*

2 (3). Мальш и Карлсон режут квадратный торт. Карлсон выбирает на нем точку (не на границе). После этого Мальш делает прямолинейный разрез от выбранной точки до края (в любом направлении). Затем Карлсон проводит второй прямолинейный разрез от выбранной точки до края, перпендикулярный первому, и отдает меньший из получившихся двух кусков Мальшу. Мальш хочет получить хотя бы четверть торта. Может ли Карлсон ему помешать?

*М.Мурашкин*

3. Нарисован угол, и еще имеется только циркуль.

а) (2) Какое наименьшее число окружностей надо провести, чтобы наверняка определить, является ли данный угол острым?

б) (2) Как определить, равен ли данный угол  $31^\circ$  (разрешается проводить сколько угодно окружностей)?

*Г.Фельдман, Д.Баранов*

4 (5). Среди участников олимпиады каждый знаком не менее чем с тремя другими. Докажите, что можно выбрать группу из четного числа участников (больше двух человек) и посадить их за круглый стол так, чтобы каждый был знаком с обоими соседями.

*Фольклор (предложил А.Шаповалов)*

5 (5). На доске записано 101 число:  $1^2, 2^2, \dots, 101^2$ . За одну операцию разрешается стереть любые два числа, а вместо них записать модуль их разности. Какое наименьшее число может получиться в результате 100 операций?

*М.Малкин*

10–11 классы

1 (3). Из Южной Америки в Россию 2010 кораблей везут бананы, лимоны и ананасы. Число бананов на каждом корабле равно числу лимонов на остальных кораблях вместе взятых, а число лимонов на каждом корабле равно числу ананасов на остальных кораблях вместе взятых. Докажите, что общее число фруктов делится на 31.

*М.Мурашкин, А.Шаповалов*

2 (4). См. задачу M2184 «Задачника «Кванта».

3 (5). Можно ли поверхность правильного октаэдра оклеить несколькими правильными шестиугольниками без наложений и пробелов? (В правильном октаэдре 6 вершин, все

<sup>1</sup> Здесь и далее в скобках после номера задачи указано максимальное количество баллов, присуждающихся за ее решение.

границы – равносторонние треугольники, в каждой вершине сходятся 4 грани.)

*Н.Авилов*

4 (5). См. задачу M2186 «Задачника «Кванта».

5 (6). См. задачу M2188 «Задачника «Кванта».

Сложный вариант

8–9 классы

1 (3). Есть кусок сыра. Разрешается выбрать любое положительное (возможно, нецелое) число  $a \neq 1$  и разрезать этот кусок в отношении  $1 : a$  по весу, затем разрезать в том же отношении любой из имеющихся кусков, и т.д. Можно ли действовать так, что после конечного числа разрезов весь сыр удастся разложить на две кучки равного веса?

*А.Шаповалов*

2 (4). В треугольнике  $ABC$  точка  $M$  – середина стороны  $AC$ , точка  $P$  лежит на стороне  $BC$ . Отрезок  $AP$  пересекает  $BM$  в точке  $O$ . Оказалось, что  $BO = BP$ . Найдите отношение  $OM : PC$ .

*М.Волчкевич*

3. На окружности расставлены 999 чисел, каждое равно 1 или  $-1$ , причем не все числа одинаковые. Возьмем все произведения по 10 подряд стоящих чисел и сложим их.

а) (3) Какая наименьшая сумма может получиться?

б) (3) А какая наибольшая?

*А.Голыго*

4 (6). Сумма цифр натурального числа  $n$  равна 100. Может ли сумма цифр числа  $n^3$  равняться  $100^3$ ?

*А.Канель-Белов*

5. а) (3) Три богатыря едут верхом по кольцевой дороге против часовой стрелки. Могут ли они ехать неограниченно долго с различными постоянными скоростями, если на дороге есть только одна точка, в которой богатыри имеют возможность обгонять друг друга?

б) (5) А если богатырей десять?

*А.Клячко, Е.Френкель*

6 (8). На плоскости дана незамкнутая несамопересекающаяся ломаная, в которой 31 звено (соседние звенья не лежат на одной прямой). Через каждое звено провели прямую, содержащую это звено. Получили 31 прямую, некоторые из них, возможно, совпали. Какое наименьшее число различных прямых могло получиться?

*А.Голыго*

7 (11). На некоторых клетках доски  $10 \times 10$  сидит по блохе. Раз в минуту блохи одновременно прыгают, причем каждая – в соседнюю клетку (по стороне). Блоха прыгает строго в одном из четырех направлений, параллельных сторонам доски, сохраняет направление, пока это возможно, иначе меняет его на противоположное. Пес Барбос наблюдал за блохами в течение часа и ни разу не видел, чтобы две из них сидели на одной клетке. Какое наибольшее количество блох могло прыгать по доске?

*М.Мурашкин*

## 10 – 11 классы

1 (3). Можно ли все прямые на плоскости разбить на пары перпендикулярных прямых так, чтобы каждая прямая входила ровно в одну пару?

*А. Шаповалов*

2. а) (2) Есть кусок сыра. Разрешается выбрать иррациональное  $a > 0$  и разрезать этот кусок в отношении  $1 : a$  по весу, затем разрезать в том же отношении любой из имеющихся кусков, и т.д. Можно ли действовать так, что после конечного числа разрезов весь сыр удастся разложить на две кучки равного веса?

б) (2) Тот же вопрос, но выбирается положительное рациональное  $a \neq 1$ .

*А. Шаповалов*

3 (6). Можно ли, применяя к числу 1 функции  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$ ,  $\operatorname{ctg}$ ,  $\operatorname{arcsin}$ ,  $\operatorname{arccos}$ ,  $\operatorname{arctg}$ ,  $\operatorname{arcctg}$  в некотором порядке, получить число 2010? (Каждую функцию можно использовать сколько угодно раз.)

*С. Маркелов*

4 (6). На съезд собрались 5000 кинолюбителей, каждый видел хотя бы один фильм. Их делят на секции двух типов: либо обсуждают фильм, который все члены секции видели, либо каждый рассказывает о виденном фильме, который больше никто в секции не видел. Докажите, что всех можно разбить ровно на 100 секций. (Секции из одного человека разрешаются: он пишет отзыв о виденном фильме.)

*И. Митрофанов*

5 (7). См. задачу M2189 «Задачника «Кванта».

6 (8). Четырехугольник  $ABCD$  описан около окружности с центром  $I$ . Точки  $M$  и  $N$  – середины сторон  $AB$  и  $CD$ . Известно, что  $IM/AB = IN/CD$ . Докажите, что  $ABCD$  – трапеция или параллелограмм.

*Н. Белухов, А. Заславский*

7 (9). См. задачу M2190 «Задачника «Кванта».

## Устный тур для 11 класса

1. См. задачу M2185 «Задачника «Кванта».

2. В кинотеатре два зала с одинаковым числом мест. В каждом зале несколько рядов (места в любом ряду нумеру-

ются подряд, начиная с единицы). Группа школьников побывала на утреннем сеансе в первом зале, а на дневном сеансе – во втором, оба раза заняв все места. Известно, что в первом зале есть ряд из 10 мест, а во втором – нет. Докажите, что найдутся два школьника, которые на одном из сеансов сидели в одном ряду, а на другом – имели одинаковый номер места.

*А. Буфетов*

3. На плоскости дана окружность  $\omega_1$  радиуса 1. На одной из ее хорд как на диаметре построена окружность  $\omega_2$ . На одной из хорд  $\omega_2$  как на диаметре построена окружность  $\omega_3$ , и т.д. Найдите наибольшее возможное расстояние между двумя точками, одна из которых принадлежит  $\omega_1$ , а другая принадлежит  $\omega_{1000000}$ .

*М. Мурашкин*

4. Ладья прошла по шахматной доске  $8 \times 8$ , не проходя дважды через одну и ту же клетку и не перепрыгивая через клетки. При этом все повороты направо делались в черных клетках, а налево – в белых. Какое наибольшее число клеток могло быть пройдено?

*А. Шаповалов*

5. Саша и Люда играют в игру. Саша должен построить описанный 13-угольник с одной заданной стороной, а Люда хочет ему помешать. Сначала Саша называет номер стороны – число  $k$  от 1 до 13. Затем Люда задает длину этой стороны – действительное положительное число  $s$ . Саша выигрывает, если опишет теперь вокруг единичного круга 13-угольник, где длина  $k$ -й по величине стороны равна  $s$ . Может ли Люда ему помешать? (Сторона  $k$ -я по величине, если найдутся  $k-1$  сторон не короче нее и при этом остальные  $13-k$  сторон не длиннее нее.)

*А. Шаповалов*

6. Обозначим через  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$  произведение всевозможных попарных разностей  $a_i - a_j$ , где  $1 \leq i < j \leq n$ . Докажите, что для любых натуральных  $a_1, a_2, \dots, a_n$  число  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$  делится на  $[1, 2, \dots, n]$ .

*М. Берштейн*

*Публикацию подготовили  
С. Дориченко, Л. Медников, А. Шаповалов*

# LXXIII Московская математическая олимпиада

## ЗАДАЧИ

### 6 класс

1. На батоне колбасы нарисованы тонкие поперечные кольца. Если разрезать по красным кольцам, получится 5 кусков, если по желтым – 7 кусков, а если по зеленым – 11 кусков. Сколько кусков колбасы получится, если разрезать по кольцам всех трех цветов?

*А. Шаповалов*

2. В Лесогории живут только эльфы и гномы. Гномы лгут, говоря про свое золото, а в остальных случаях говорят правду. Эльфы лгут, говоря про гномов, а в остальных случаях говорят правду. Однажды два лесогорца сказали:

А: Все мое золото я украл у Дракона.

Б: Ты лжешь.

Определите, эльфом или гномом является каждый из них.

*И. Раскина*



3. Поросенок Наф-Наф придумал, как сложить параллелепипед из одинаковых кубиков и оклеить его тремя квадратами без щелей и наложений. Сделайте это и вы.

*А.Шаповалов*

4. В обменном пункте совершаются операции двух типов:  
1) дай 2 евро – получи 3 доллара и конфету в подарок;  
2) дай 5 долларов – получи 3 евро и конфету в подарок.

Когда богатенький Буратино пришел в обменник, у него были только доллары. Когда ушел – долларов стало меньше, евро так и не появились, зато он получил 50 конфет. В сколько долларов обошелся Буратино такой «подарок»?

*И.Раскина*

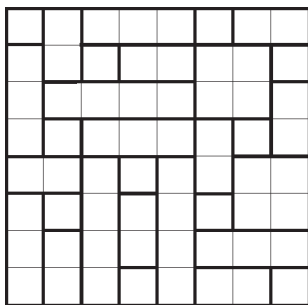


Рис. 1

5. Саша разрезал шахматную доску  $8 \times 8$  по границам клеток на 30 прямоугольников так, чтобы равные прямоугольники не соприкасались даже углами (рис.1). Попробуйте улучшить его достижение, разрезав доску на большее число прямоугольников с соблюдением того же условия.

*А.Шаповалов*

6. На краю круглого вращающегося стола через равные промежутки стояли 30 чашек с чаем. Маргровский Заяц и Соня сели за стол и стали пить чай из каких-то двух чашек (не обязательно соседних). Когда они допили чай, Заяц повернул стол так, что перед каждым опять оказалось по полной чашке. Когда и эти чашки опустели, Заяц снова повернул стол (возможно, на другой угол), и снова перед каждым оказалась полная чашка. И так продолжалось до тех пор, пока весь чай не был выпит. Докажите, что если бы Заяц всегда поворачивал стол так, чтобы его новая чашка стояла через одну от предыдущей, то им бы того удалось выпить весь чай (т.е. тоже каждый раз обе чашки оказывались бы полными).

*И.Раскина*

7 класс

1. У Юры есть калькулятор, который позволяет умножать число на 3, прибавлять к числу 3 или (если число делится на 3 нацело) делить на 3. Как на этом калькуляторе получить из числа 1 число 11?

*Т.Голенищева-Кутузова*

2. На вертикальную ось надели несколько колес со спицами. Вид сверху изображен на рисунке 2,а. После этого колеса повернули. Новый вид сверху изображен на рисунке 2,б. Могло ли колес быть: а) три; б) два?

*Т.Голенищева-Кутузова, В.Клепцын, И.Яценко*

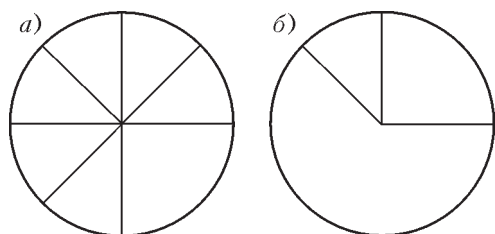


Рис. 2

3. Маленькие детки кушали конфетки. Каждый съел на 7 конфет меньше, чем все остальные вместе, но все же больше одной конфеты. Сколько всего конфет было съедено?

*А.Шаповалов*

4. В конкурсе пения участвовали Петух, Ворона и Кукушка. Каждый член жюри проголосовал за одного из трех исполнителей. Дятел подсчитал, что в жюри было 59 судей, причем за Петуха и Ворону было в сумме подано 15 голосов, за Ворону и Кукушку – 18 голосов, за Кукушку и Петуха – 20 голосов. Дятел считает плохо, но каждое из четырех названных им чисел отличается от правильного не более чем на 13. Сколько судей проголосовали за Ворону?

*И.Раскина*

5. а) Поросенок Наф-Наф придумал, как сложить параллелепипед из одинаковых кубиков и оклеить его тремя квадратами без щелей и наложений. Сделайте это и вы.

б) А может ли Наф-Наф добиться, чтобы при этом каждые два квадрата граничили друг с другом?

*А.Шаповалов*

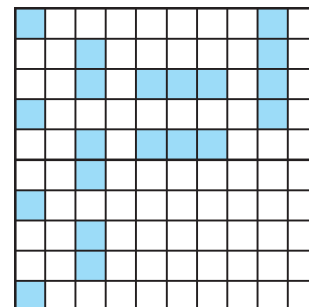


Рис. 3

6. Легко разместить комплект кораблей для игры в «Морской бой» на доске  $10 \times 10$  (рис.3). А на какой наименьшей квадратной доске можно разместить этот комплект? (Напомним, что согласно правилам корабли не должны соприкасаться даже углами.)

*А.Блинков*

8 класс

1. КУБ является кубом. Докажите, что ШАР кубом не является. (КУБ и ШАР – трехзначные числа, разные буквы обозначают различные цифры.)

*А.Хачатурян*

2. На столе в виде треугольника выложены 28 монет одинакового размера (рис.4). Известно, что суммарная масса любой тройки монет, которые попарно касаются друг друга, равна 10 г. Найдите суммарную массу всех 18 монет на границе треугольника.

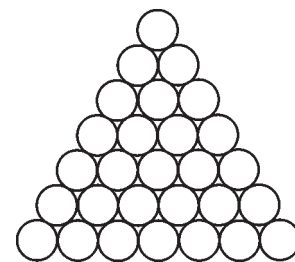


Рис. 4

*А.Шаповалов*

3. В треугольнике  $ABC$  точка  $M$  – середина стороны  $AC$ , точка  $P$  лежит на стороне  $BC$ . Отрезок  $AP$  пересекает  $BM$  в точке  $O$ . Оказалось, что  $BO = BP$ . Найдите отношение  $OM : PC$ .

*М.Волчкевич*

4. См. задачу M2189 «Задачника «Кванта».

5. В треугольнике  $ABC$  точка  $I$  – центр вписанной окружности. Точки  $M$  и  $N$  – середины сторон  $BC$  и  $AC$  соответственно. Известно, что угол  $AIN$  прямой. Докажите, что угол  $BIM$  также прямой.

6. В некоторых клетках квадрата  $20 \times 20$  стоит стрелочка в одном из четырех направлений. На границе квадрата все стрелочки смотрят вдоль границы по часовой стрелке (рис.5). Кроме того, стрелочки в соседних (возможно, по диагонали) клетках не смотрят в противоположных направ-

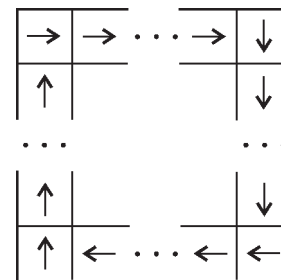


Рис. 5

лениях. Докажите, что найдется клетка, в которой стрелочки нет.

*Т.Голенищева-Кутузова, В.Клепцын, И.Яценко*

*9 класс*

1. Съев на пустой желудок трех поросят и семерых козлят, Серый Волк все еще страдал от голода. Зато в другой раз он съел на пустой желудок 7 поросят и козленка и страдал уже от ожорства. От чего пострадает Волк, если съест на пустой желудок 11 козлят?

*И.Раскина*

2. На стороне  $AB$  прямоугольника  $ABCD$  выбрана точка  $M$ . Через эту точку проведен перпендикуляр к прямой  $CM$ , который пересекает сторону  $AD$  в точке  $E$ . Точка  $P$  – основание перпендикуляра, опущенного из точки  $M$  на прямую  $CE$ . Найдите угол  $APB$ .

*А.Блинков, Ю.Блинков*

3. У каждого жителя города Тьмутаракань есть свои тараканы, не у всех поровну. Два таракана являются *товарищами*, если у них общий хозяин (в частности, каждый таракан сам себе товарищ). Что больше: среднее количество тараканов, которыми владеет житель города, или среднее количество товарищей у таракана?

*А.Канель-Белов*

4. На окружности расставлены 2009 чисел, каждое из которых равно  $+1$  или  $-1$ , причем не все числа одинаковые. Рассмотрим всевозможные десятки подряд стоящих чисел. Найдём произведения чисел в каждом десятке и сложим их. Какая наибольшая сумма может получиться?

*А.Толыго*

5. Дана незамкнутая несамопересекающаяся ломаная из 37 звеньев. Через каждое звено провели прямую. Какое наименьшее число различных прямых могло получиться?

*А.Толыго*

6. См. задачу M2190 «Задачника «Кванта».

*10 класс*

1. Известно, что сумма любых двух из трех квадратных трехчленов  $x^2 + ax + b$ ,  $x^2 + cx + d$ ,  $x^2 + ex + f$  не имеет корней. Может ли сумма всех этих трехчленов иметь корни?

*А.Канель-Белов*

2. Дана трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD = a$  и  $BC = b$ . Точки  $M$  и  $N$  лежат на сторонах  $AB$  и  $CD$  соответственно, причем отрезок  $MN$  параллелен основаниям трапеции. Диагональ  $AC$  пересекает этот отрезок в точке  $O$ . Найдите  $MN$ , если известно, что площади треугольников  $AMO$  и  $CNO$  равны.

*М.Волчкевич*

3. Можно ли, применяя к числу 2 функции  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$ ,  $\operatorname{ctg}$ ,  $\operatorname{arcsin}$ ,  $\operatorname{arccos}$ ,  $\operatorname{arctg}$ ,  $\operatorname{arcctg}$  в любом порядке, получить число 2010?

*С.Маркелов*

4. Сумма цифр числа  $n$  равна 100. Может ли сумма цифр числа  $n^3$  равняться  $100^3$ ?

*А.Канель-Белов*

5. В неравностороннем треугольнике две медианы равны двум высотам. Найдите отношение третьей медианы к третьей высоте.

*А.Заславский*

6. На плоскости отметили  $4n$  точек, после чего соединили

отрезками все пары точек, расстояние между которыми равно 1 см. Оказалось, что среди любых  $n + 1$  точек обязательно есть две, соединенные отрезком. Докажите, что всего проведено не менее  $7n$  отрезков.

*А.Райгородский*

*11 класс*

1. Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$1 : (a + 2010 : (b + 1 : c)),$$

где  $a, b, c$  – попарно различные ненулевые цифры?

*П.Бородин, О.Косухин*

2. В квадратной песочнице, засыпанной ровным слоем песка высотой 1, Маша и Паша делали куличи при помощи цилиндрического ведерка высоты 2. У Маши все куличи удались, а у Паши – рассыпались и превратились в конусы той же высоты. В итоге весь песок ушел на куличи, поставленные на дне песочницы отдельно друг от друга. Чьих куличей оказалось в песочнице больше: Машиных или Пашиных?

*А.Канунников*

3. Докажите, что если числа  $x, y, z$  при некоторых значениях  $p$  и  $q$  являются решениями системы

$$\begin{cases} y = x^n + px + q, \\ z = y^n + py + q, \\ x = z^n + pz + q, \end{cases}$$

то выполнено неравенство  $x^2y + y^2z + z^2x \geq x^2z + y^2x + z^2y$ , где: а)  $n = 2$ ; б)  $n = 2010$ .

*О.Косухин*

4. Функция  $f$  каждому вектору  $\vec{v}$  (с общим началом в точке  $O$ ) пространства ставит в соответствие число  $f(\vec{v})$ , причем для любых векторов  $\vec{u}, \vec{v}$  и любых чисел  $\alpha, \beta$  значение  $f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v})$  не превосходит хотя бы одного из чисел  $f(\vec{u})$  или  $f(\vec{v})$ . Какое наибольшее количество значений может принимать такая функция?

*И.Сергеев*

5. Внутри выпуклого четырехугольника  $ABCD$  взята такая точка  $P$ , что  $\angle PBA = \angle PCD = 90^\circ$ . Точка  $M$  – середина стороны  $AD$ , причем  $BM = CM$ . Докажите, что  $\angle PAB = \angle PDC$ .

*В.Филимонов*

6. Команда из  $n$  школьников участвует в игре: на каждого из них надевают шапку одного из  $k$  заранее известных цветов, а затем по свистку все школьники одновременно выбирают себе по одному шарфу. Команда получает столько очков, у скольких ее участников цвет шапки совпал с цветом шарфа (шарфов и шапок любого цвета имеется достаточное количество; во время игры каждый участник не видит своей шапки, зато видит шапки всех остальных, но не имеет права выдавать до свистка никакую информацию). Какое наибольшее число очков команда, заранее наметив план действий каждого ее члена, может гарантированно получить: а) при  $n = k = 2$ ; б) при произвольных фиксированных  $n$  и  $k$ ?

*М.Лобанов, В.Ушаков*

*Публикацию подготовил С.Дориченко*

# Избранные задачи Московской физической олимпиады

## ПЕРВЫЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

7 класс

1. Почтальон Печкин выехал из райцентра Сметанино в деревню Простоквашино с посылкой для кота Матроскина. Он ехал со скоростью 15 км/ч, а расстояние, которое ему надо было проехать, составляет 15 км. Приехав в Простоквашино, он обнаружил, что по дороге потерял посылку, и сразу же поехал за ней обратно. Когда он нашел посылку, то подобрал ее и снова поехал к коту. Тем временем кот Матроскин, который хотел как можно быстрее получить посылку, сразу после выезда Печкина из Простоквашино побежал за почтальоном со скоростью 5 км/ч и получил посылку через полчаса из рук Печкина, который уже снова ехал в Простоквашино. На каком расстоянии от Сметанино Печкин потерял посылку?

*М. Семенов*

2. На соревнованиях пахарей надо было как можно быстрее обработать трактором с навесными орудиями – боронами шириной 10 м – квадратный участок поля площадью 1 гектар (т.е. 100×100 м). Трактор при этом мог двигаться только вперед со скоростью 2 м/с и совершать повороты с минимальным радиусом 10 м (по центру трактора) на той же скорости. Вне поля достаточно места для любых разворотов, и вся площадь поля должна быть проборонована. Предложите и нарисуйте траекторию движения трактора, при которой время, необходимое для обработки поля, будет как можно меньшим. Рассчитайте, чему равно это время.

*М. Семенов*

3. На легком горизонтальном рычаге с двумя опорами находятся пустые легкие бочки. Расстояние от оси левой бочки до левой опоры  $a = 2$  м, от оси правой бочки до правой опоры  $c = 3$  м, расстояние между опорами  $b = 1$  м. В обе бочки одновременно начинают наливать с небольшой скоростью воду из разных кранов. Как должны соотноситься скорости  $v_1$  и  $v_2$  наполнения бочек, т.е. массы воды, поступающей в единицу времени в каждую бочку, чтобы система оставалась в равновесии?

*Д. Харабадзе*

4. В известном мультфильме про Винни-Пуха есть явное несоответствие: Винни-Пух надувает воздушный шарик обычным воздухом и взлетает на нем. Для того чтобы воздушный шарик поднимался (а тем более поднимал Винни-Пуха), нужно, чтобы он был наполнен легким газом, плотность которого меньше плотности окружающего воздуха. Можно предположить, что Винни-Пух надувает шарик теплым воздухом, плотность которого, как известно, меньше плотности холодного. Рассчитайте, каким должен быть в этом случае минимальный необходимый для подъема объем шарика, если плотность теплого воздуха внутри шарика  $\rho_1 = 1,13$  кг/м<sup>3</sup>, плотность холодного воздуха снаружи  $\rho_2 = 1,29$  кг/м<sup>3</sup>, а масса Винни-Пуха  $m = 5$  кг.

*М. Ромашка*

8 класс

1. На углу стандартного кирпича с размерами 250×125×65 мм находится Муравьишка. Он может ползать по поверхности кирпича в любом направлении со скоростью 20 мм/с. За какое минимальное время он сможет добраться до максимально удаленного от него угла кирпича?

*С. Варламов*

2. Для удержания тяжелого груза используется система из шести блоков и нескольких тросов, прикрепленных к потолку так, как показано на рисунке 1. С какой силой  $F$  надо тянуть вниз за конец троса, свисающего с левого блока, чтобы удерживать груз массой  $M = 500$  кг в равновесии? Участки тросов, лежащие на блоках, вертикальны, массой блоков и тросов, а также трением можно пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

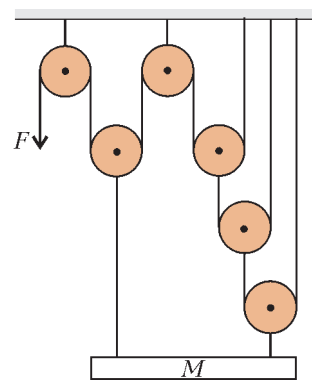


Рис. 1

*Е. Якута*

3. В вертикальный цилиндрический стакан высотой  $H = 10$  см и площадью дна  $S = 100$  см<sup>2</sup> налита вода до уровня  $h = 8$  см. В стакан опустили, не разбрызгивая воду,  $N_1 = 100$  стальных шариков объемом  $V_1 = 1$  см<sup>3</sup> каждый, а затем – еще  $N_2 = 50$  ледяных кубиков объемом  $V_2 = 2,5$  см<sup>3</sup>. Какова оказалась после этого сила  $F$  давления на дно стакана? Плотность воды  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>, стали  $\rho_1 = 7,8$  г/см<sup>3</sup>, льда  $\rho_2 = 0,9$  г/см<sup>3</sup>, ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Трением и атмосферным давлением пренебречь.

*М. Семенов*

4. Король любит за завтраком пить кофе, имеющий температуру ровно 50 °С. Хитрый слуга наливает в чашку 60 г кофе, имеющего температуру 90 °С, ждет, пока он остынет до некоторой температуры, затем добавляет в чашку 20 г воды, имеющей температуру 20 °С, перемешивает содержимое чашки и сразу подает королю. Какую температуру имеет кофе в момент добавления в него воды? Удельные теплоемкости воды и кофе считать одинаковыми.

*М. Ромашка*

9 класс

1. В арке около одной из стен стоит мальчик и бросает мяч из точки  $A$ , находящейся на высоте  $h = 170$  см над землей (рис.2). Начальная скорость мяча  $v_0 = 15$  м/с. Мяч возвращается в точку бросания спустя  $t = 3$  с, описав траекторию, по-

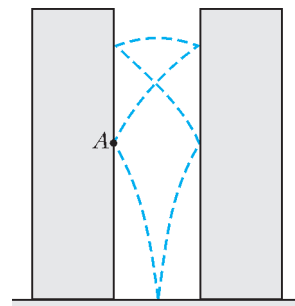


Рис. 2



казанную на рисунке. Чему равно расстояние  $d$  между стенами арки? Все соударения мгновенные и абсолютно упругие, сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

*М.Ромашка*

2. Легкая тонкостенная чаша в виде прямоугольного параллелепипеда с длинами ребер  $a$ ,  $b$  и  $c$  свободно подвешена на горизонтальной оси так, что нижняя грань чаши с размерами  $a \times c$  горизонтальна, а верхняя открыта (т.е. отсутствует). Ось проходит перпендикулярно граням параллелепипеда с размерами  $a \times b$  в плоскости их симметрии на расстоянии  $h < b/2$  от нижней грани (рис.3). Чаша начинает

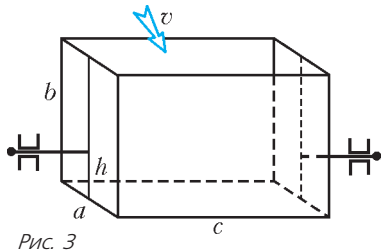


Рис. 3

наполняться водой со скоростью  $v \text{ (м}^3/\text{с)}$ . Через какое время чаша опрокинется, повернувшись вокруг оси? Что с ней будет происходить в дальнейшем, если скорость наполнения не меняется?

*Д.Харабадзе*

3. Современный лабораторный блок питания работает так. Сначала ему задаются значения тока  $I_0$  и напряжения  $U_0$ . После подключения нагрузки блок сам выбирает один из двух режимов: либо поддерживает напряжение на нагрузке равным  $U_0$ , если при этом ток через нагрузку не больше  $I_0$ , либо поддерживает ток через нагрузку равным  $I_0$ , если при этом напряжение на нагрузке не больше  $U_0$ . При каком сопротивлении нагрузки  $R$  в ней будет выделяться наибольшая мощность и чему она равна?

*А.Андреанов*

10 класс

1. На гладком горизонтальном столе находится чаша массой  $M$  с полусферической выемкой радиусом  $R$  с гладкими стенками (рис.4). На самый край выемки чаши поместили монету массой  $m$ , размеры которой значительно меньше размеров выемки. В начальный момент монета и чаша друг относительно друга не двигались. Монету и чашу одновременно отпустили. С каким ускорением движется монета, проходя самое нижнее положение?

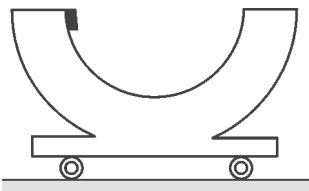


Рис. 4

*С.Варламов*

2. В горизонтальной крышке стола пропилена полуцилиндрическая канавка радиусом  $R = 20 \text{ см}$ , ось канавки совпадает с верхней плоскостью крышки стола. На краю канавки сидит муравей, который хочет перебраться через нее. Школьник решил помочь муравью, сделав мостик из прямых отрезков проволоки. Но все куски проволоки, которые были в распоряжении школьника, имели длину  $L = 38 \text{ см}$ . Тогда школьник сделал мостик из двух проволок, расположив их так, как показано на рисунке 5, причем точку  $A$ , в которой концы проволок воткнуты в дно канавки, он выбрал случайным образом. Муравей может ползти вверх по проволоке с

постоянной скоростью  $v = 0,5 \text{ см/с}$ , а вниз – с постоянной скоростью  $2v = 1 \text{ см/с}$ . Найдите максимальное время и минимальное время, за которое муравей сможет перебраться через канавку по такому мостику.

*А.Якута*

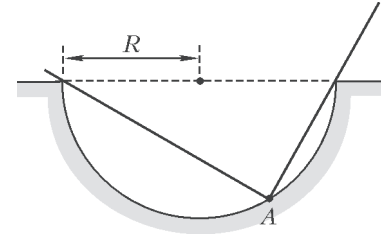


Рис. 5

3. Горизонтальный сосуд с газом разделен на две части подвижным вертикальным поршнем, не проводящим тепло. Вначале давление в сосуде было  $p_0$ , а температура была  $T_0$ . Нагревая газ в левой части сосуда до температуры  $T_0 + \Delta T$ , исследуют зависимость давления в системе  $p$  от параметра  $x = \Delta T/T_0$ . Эта зависимость оказывается линейной:  $p = p_0(1 + \alpha x)$  с параметром  $\alpha = 0,5$ . Найдите отношение  $k = v_1/v_2$  количества газа в левой и правой частях сосуда. Температура в правой части сосуда поддерживается постоянной, трением между поршнем и стенками сосуда можно пренебречь.

*О.Шведов*

4. Имеются три концентрические хорошо проводящие металлические сферы радиусами  $R$ ,  $2R$  и  $3R$ . Пространство между первой и второй сферами заполнено жидкостью с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и удельным сопротивлением  $1/\rho$ , а между второй и третьей – жидкостью с диэлектрической проницаемостью  $1/\epsilon$  и удельным сопротивлением  $\rho$ . Между внутренней и внешней сферами при помощи батарейки поддерживается постоянная разность потенциалов  $U$ . Чему равен заряд  $q_2$  средней сферы? Какова сила тока  $I$ , который течет при этом в цепи?

*Р.Усов*

5. Школьник Вася присоединяет к источнику питания, схема которого изображена на рисунке 6, электрические лампочки. Присоединив к источнику одну электрическую

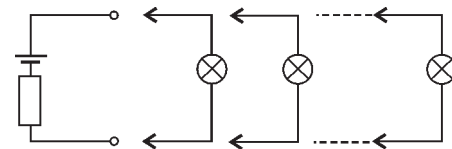


Рис. 6

лампочку, Вася обнаружил, что на ней выделяется мощность  $P$ . Присоединив к источнику четыре такие же лампочки, соединенные параллельно, Вася обнаружил, что на них вместе также выделяется мощность  $P$ . Какая мощность  $P_n$  будет выделяться на лампочках, когда Вася подсоединит к источнику питания  $n$  параллельно соединенных лампочек? Считайте, что сопротивление лампочки не зависит от силы тока.

*О.Шведов*

11 класс

1. Кирпич с размерами  $a \times a \times a\sqrt{11}$  поставили на квадратную грань так, что его длинные ребра оказались вертикальными. На одном из верхних углов кирпича находится Муравьишка, который может ползать по вертикальным граням кирпича со скоростью  $v$ , а по горизонтальной грани – с некоторой другой постоянной скоростью. Вдоль ребер кирпича он ползать не умеет, но может их пересекать. Муравьишка переполз на максимально удаленный от него

угол кирпича. При этом он пересекал одно из ребер кирпича только один раз и строго посередине, а время, которое он затратил на путешествие, оказалось минимально возможным. Чему равно время  $t$  его путешествия? С какой скоростью  $u$  Муравьишка может ползать по горизонтальной грани кирпича?

*А. Якута*

2. На гладкой горизонтальной плоскости лежат  $N$  маленьких одинаково заряженных шариков равной массы. Суммарный заряд шариков  $Q$ , суммарная масса  $M$ . Шарики связаны друг с другом непроводящей легкой нерастяжимой нитью, образуя кольцо (рис.7). Длина нити между двумя соседними шариками  $l$ . Система находится в вертикальном магнитном поле  $B$ , причем суммарный поток магнитной индукции, пронизывающий кольцо, равен  $\Phi_0$ . Изначально все шарики покоятся.

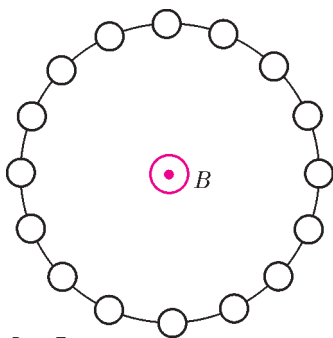


Рис. 7

В некоторый момент магнитное поле выключают. Найдите изменение  $\Delta F$  силы натяжения нити после выключения поля.

*А. Баринов*

3. Взяв старый пленочный фотоаппарат, школьник Вася отправился фотографировать соревнования по легкой атлетике. Сделав достаточное количество фотографий с разными выдержками, Вася обнаружил, что спортсмены, пробегавшие на расстоянии  $a_0 = 10$  м от фотоаппарата перпендикулярно оптической оси объектива, получались на снимках четкими, если затвор фотоаппарата открывался на время, не превосходящее  $\tau = 0,001$  с. При этом неподвижные предметы, расположенные на расстояниях менее  $a_1 = 5$  м от фотоаппарата, получались размытыми. Определите диаметр  $D$  объектива фотоаппарата. Скорости спортсменов считайте равными  $v = 10$  м/с.

*О. Шведов*

## ВТОРОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

8 класс

1. Друзья Вася и Петя, живущие в деревнях Липовка и Демушкино, были в гостях у своего друга Саши, который живет в деревне Малиновка, расположенной точно посередине между деревнями Липовка и Демушкино. Нагостившись у Саши, Вася и Петя одновременно вышли и отправились каждый в свою деревню, чтобы вернуться домой через  $t_0 = 60$  мин. Спустя  $t_0/6 = 10$  мин после выхода своих друзей Саша обнаружил, что каждый из друзей забыл у него дома свои вещи. Саша решил догнать каждого из них по очереди и отдать им вещи. С какой минимальной скоростью  $u$  должен бежать Саша, чтобы успеть догнать каждого из своих друзей до того, как они вернутся в свои деревни? Скорости Васи и Пети одинаковы и равны  $v = 5$  км/ч.

*М. Ромашка*

2. На горизонтальном столе стоит пластиковый стаканчик для чая, имеющий форму усеченного конуса. Масса стаканчика  $m = 20$  г, диаметр его дна  $d = 5$  см. В стаканчик поместили тонкую однородную палочку массой  $M = 10$  г, расположив ее так, как показано на рисунке 8. При этом

палочка оказалась наклоненной под углом  $\alpha = 30^\circ$  к вертикали. При какой длине палочки  $L$  стаканчик не перевернется?

*А. Якута*

3. Через неподвижный блок перекинута легкая нерастяжимая нить, на концах которой висят два стальных цилиндрических бруска (рис.9). Масса левого бруска  $m_1 = 1$  кг. Вначале к нижнему основанию правого бруска был приморожен кусок льда неизвестной массы, а сами бруски удерживались вручную. Затем правый брусок с примороженным к нему куском льда погрузили в воду комнатной температуры, налитую в очень широкий сосуд, после чего бруски отпустили. Сразу после этого оказалось, что система находится в равновесии, когда правый брусок погружен в воду на половину своей высоты. После того, как весь примороженный лед растаял, правый брусок целиком погрузился в воду. При этом система снова оказалась в равновесии. Найдите массу правого бруска  $m_2$ , а также массу примороженного к нему куску льда  $m_{\text{л}}$ . Плотность воды  $\rho_{\text{в}} = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, плотность льда  $\rho_{\text{л}} = 900$  кг/м<sup>3</sup>, плотность стали  $\rho_{\text{с}} = 7800$  кг/м<sup>3</sup>. Изменением уровня воды в сосуде пренебречь.

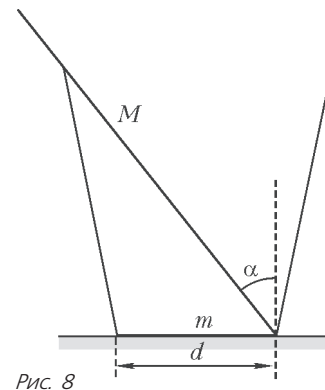


Рис. 8

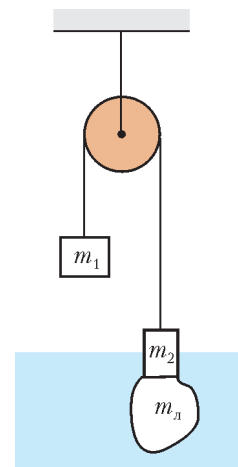


Рис. 9

*Е. Якута*

4. В цилиндрический стакан налита вода до уровня  $h_0 = 10$  см при температуре  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ . В стакан бросают алюминиевый шарик, вынутый из другого сосуда с водой, кипящей при температуре  $t_{\text{к}} = 100^\circ\text{C}$ . При этом уровень воды в стакане повышается на  $x = 1$  см. Какой будет установившаяся температура в стакане? Удельные теплоемкости воды и алюминия  $c_{\text{в}} = 4200$  Дж/(кг·°C) и  $c_{\text{а}} = 9200$  Дж/(кг·°C), плотности воды и алюминия  $\rho_{\text{в}} = 1000$  кг/м<sup>3</sup> и  $\rho_{\text{а}} = 2700$  кг/м<sup>3</sup>.

*О. Шведов*

9 класс

1. Какую силу  $F$  в горизонтальном направлении надо приложить к концу нити в точке  $A$  системы, изображенной на рисунке 10, чтобы груз массой  $m_2$  не отрывался от подставки, а нить, к другому концу которой прикреплен груз массой  $m_1$ , оставалась натянутой? Каким при этом может быть ускорение  $\bar{a}$  груза массой  $m_1$ ? Нить невесома и нерастяжима, блоки невесома, трение отсутствует, ускорение свободного падения равно  $g$ .

*М. Семенов*

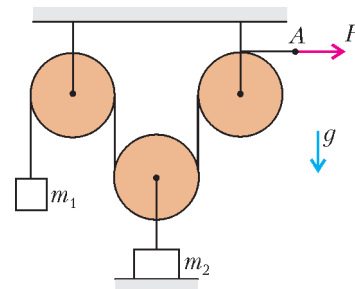


Рис. 10

2. В цилиндре под поршнем находятся вода и водяной пар при температуре  $100^\circ\text{C}$ . Снаружи цилиндра – вакуум, на поршне стоит груз массой  $m = 100$  кг, позволяющий создать внутри цилиндра давление  $p = 10^5$  Па. Какое количество теплоты  $Q$  следует сообщить смеси, чтобы поднять груз на высоту  $h = 1$  м от начального положения? Удельная теплота парообразования воды  $L = 2,26 \cdot 10^6$  Дж/кг, плотность водяного пара  $\rho = 0,58$  кг/м<sup>3</sup>.

*О.Шведов*

3. Вова и Дима решили изготовить прибор для измерения сопротивления резисторов – омметр. Для этого они взяли батарейку с известным постоянным напряжением  $U = 1,5$  В, резистор с известным сопротивлением  $R = 150$  Ом, миллиамперметр с диапазоном от 0 до 20 мА, соединительные провода и две клеммы для подсоединения измеряемого сопротивления. Нарисуйте, какие возможные схемы омметра из этих элементов могут собрать Вова и Дима, и объясните, как в этих схемах показания миллиамперметра можно перевести в величину измеряемого сопротивления  $R_x$ .

*Ю.Старокуров*

10 класс

1. Тонкую гладкую однородную веревку массой  $m$  и длиной  $L$  расстелили на горизонтальной поверхности, обернув на половину оборота вокруг вертикальной цилиндрической колонны радиусом  $R \ll L$ . Первоначально веревку тянули за оба конца, находившиеся на одном и том же расстоянии от колонны, с одинаковой силой  $F$ , затем один из концов отпустили, продолжая действовать с той же силой на другой ее конец. В течение какого промежутка времени  $t$  после этого длина участка веревки, соприкасающегося с колонной, будет оставаться неизменной?

*К.Парфенов*

2. По вогнутому мосту, образующему дугу окружности радиусом  $R$ , движется вагонетка массой  $M$ . К вагонетке привязан трос длиной  $L$ , на конце которого закреплен груз массой  $m$  (рис.11). В момент, когда вагонетка проходила нижнюю точку моста, трос был расположен вертикально, а скорости вагонетки и груза были равны  $v_1$  и  $v_2$  соответственно. Найдите в этот момент силу натяжения троса  $T$  и силу  $F$ , с которой вагонетка давит на рельсы. Трос невесом и нерастяжим, трение не учитывать, размерами вагонетки и груза пренебречь.

Рис. 11

3. Автомобиль «Камаз» проехал из Санкт-Петербурга в Москву за время  $t = 16$  ч, пройдя по дороге 720 км и истратив объем  $V = 200$  л дизельного топлива. Двигательная установка автомобиля состоит из дизельного двигателя внутреннего сгорания, трансмиссии и шасси. Найдите КПД (эффективность) автомобиля и его среднюю механическую мощность на всем пути, считая, что механические потери в трансмиссии и шасси составляют  $\alpha = 5\%$ , а двигатель работает по циклу Дизеля, рабочим телом которого является идеальный трехатомный газ (теплоемкость одного моля такого газа в изохорном процессе  $C_V = 3R$ ). Цикл Дизеля состоит из четырех процессов: адиабатного сжатия рабочего тела, изобарного подвода тепла к рабочему телу, адиабатного расширения рабочего тела и его изохорного охлаждения,

в конце которого осуществляется выпуск продуктов сгорания топлива в атмосферу. Удельная теплота сгорания дизельного топлива  $q = 42$  МДж/кг, а его плотность  $\rho = 0,82$  кг/л. Максимальный объем камеры сгорания 6000 мл, минимальный 375 мл, максимальный объем в изобарном процессе 1500 мл, максимальное давление 40 атм, максимальное давление при изохорном охлаждении 6 атм.

*Ю.Старокуров*

4. Найдите сопротивление между клеммами  $A$  и  $B$  бесконечной цепи, схема которой изображена на рисунке 12. Сопротивление каждого резистора равно  $R$ .

*Д.Харабдзе*

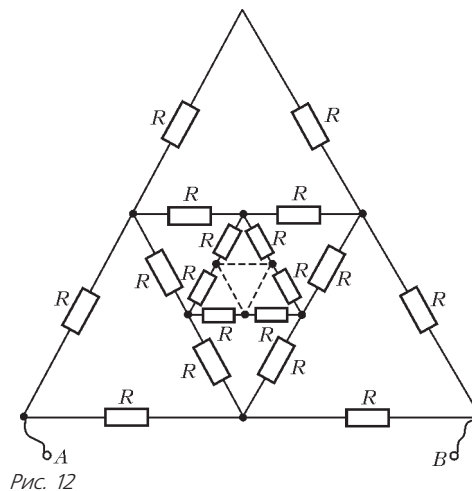


Рис. 12

11 класс

1. На гладкой горизонтальной плоскости покоится гладкая горка высотой  $H$  и массой  $M$ , а на ее вершине лежит небольшая шайба массой  $m$  (рис.13). После легкого толчка шайба скатывается с горки и скользит перпендикулярно массивной вертикальной стенке, движущейся по плоскости в сторону горки. Испытав абсолютно упругое столкновение со стенкой, шайба скользит в обратном направлении, к горке. С какой минимальной скоростью  $u$  должна двигаться стенка, чтобы шайба смогла преодолеть горку?

Рис. 13

*М.Семенов*

2. На  $pV$ -диаграмме (рис.14) представлен цикл  $1-2-3-4$ , который проводится с идеальным одноатомным газом. Участки  $2-3$  и  $4-1$  цикла соответствуют изохорным процессам, на участках  $1-2$  и  $3-4$  цикла давление газа изменяется прямо пропорционально его объему. Давление газа в состояниях 1 и 3 одно и то же. Найдите КПД этого цикла, если отношение максимального объема газа к его минимальному  $n = 1,5$ .

*А.Якута*

3. На длинный (полубесконечный) деревянный брусок намотаны восемь одинаковых длинных проволок, начала которых попарно соединены, как показана

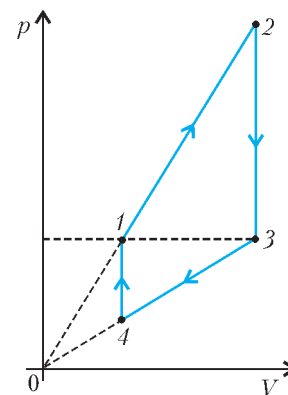


Рис. 14



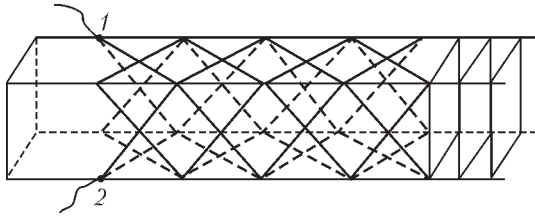


Рис. 15

но на рисунке 15. Найдите сопротивление  $R_{12}$  между точками 1 и 2 этой бесконечной цепи в виде «чулка», надетого на брусок, если сопротивление участка провода, находящегося между двумя соседними пересечениями проволок, равно  $R$ . В каждой точке пересечения проволок имеется электрический контакт.

Ю. Старокуров

4. Тяжелый металлический стержень  $AB$  (рис. 16) подвешен в горизонтальном положении на двух легких вертикальных проводах в лаборатории, где в некотором объеме создано однородное магнитное поле, линии индукции которого вертикальны. Участок  $CD$  стержня все время находится в магнитном поле, а провода-подвески находятся вне поля. В первом опыте на стержень подали напряжение, и в нем очень быстро возник ток силой  $I$ . Максимальный угол, на который

подвески стержня отклонились от вертикали, был при этом  $\alpha = 60^\circ$ . Во втором опыте силу тока через стержень плавно увеличивали от нуля до того же значения  $I$ . На какой угол  $\beta$  отклонились подвески во втором опыте?

М. Ромашка

5. Две собирающие линзы с фокусными расстояниями  $F_1 = 20$  см и  $F_2 = 10$  см расположены на одной прямой так, что их главные оптические оси совпадают. Эта система линз формирует действительное изображение прямоугольника со сторонами  $a_1 = 1$  мм и  $b_1 = 2$  мм, также являющееся прямоугольником. Сторона  $a_1$  прямоугольника лежит на главной оптической оси системы. На каком расстоянии  $L$  друг от друга расположены линзы? Каковы размеры изображения  $a_2$  и  $b_2$ ?

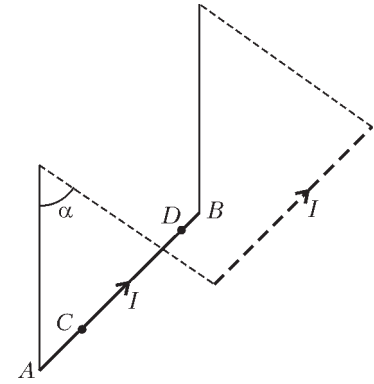


Рис. 16

О. Шведов

Публикацию подготовили М. Семенов, А. Якута

## ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

### КМШ

#### Задачи

(см. «Квант» №3)

- От  $\Gamma$  к  $A$ . Когда теплоход плывет от  $B$  до  $\Gamma$ , он проплывает мимо  $B$ , после чего ему плыть еще час. Значит, дорога от  $B$  до  $V$  занимает 1 час. А в обратную сторону за час можно уплыть дальше – от  $B$  до  $A$ ! Тем самым, от  $B$  до  $V$  мешает плыть течение.
- См. рис. 1.

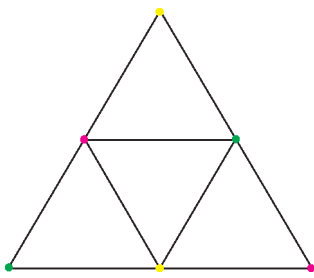


Рис. 1

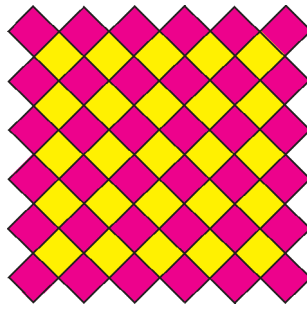


Рис. 2

- Если раскрасить квадратики в два цвета так, как показано на рисунке 2, то решение становится очевидным. Общее число квадратиков в каждом ступенчатом квадрате равно  $n^2 + (n-1)^2$ .
- Барон не ошибается, поскольку

$$1 \cdot \frac{1}{10} \cdot 1 \cdot \frac{1}{11} \cdot \dots \cdot 1 \cdot \frac{1}{98} \cdot 1 \cdot \frac{1}{99} = \frac{11}{10} \cdot \frac{12}{11} \cdot \dots \cdot \frac{99}{98} \cdot \frac{100}{99} = \frac{100}{10} = 10$$

и

$$1 \cdot \frac{1}{100} \cdot 1 \cdot \frac{1}{101} \cdot \dots \cdot 1 \cdot \frac{1}{998} \cdot 1 \cdot \frac{1}{999} = \frac{101}{100} \cdot \frac{102}{101} \cdot \dots \cdot \frac{999}{998} \cdot \frac{1000}{999} = \frac{1000}{100} = 10.$$

5. Шпион может поступить так. Он обходит штаб по кругу, считая комнаты, и на очередной доске (предварительно все с нее стирая) пишет порядковый номер комнаты, в которой стоит эта доска. Так он действует, пока не встретит комнату с доской, на которой написана единица. Это, возможно, еще не исходная комната (в штабе изначально могли быть доски, на которых написана единица). Он дописывает к 1 на этой доске звездочку, возвращается в обратном направлении в комнату, из которой начинал обход, и проверяет, появилась ли рядом с единицей звездочка. Если появилась, то шпион обошел весь штаб и узнал количество комнат в нем. Если нет, надо вернуться к доске с 1 и звездочкой, заменить надпись на очередной номер и продолжить обход.

### Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №1)

- $b^2 - a^2$ . Высота трапеции делит ее большее основание на отрезки  $\frac{y-x}{2}$  и  $\frac{y+x}{2}$  (рис. 3). Дважды применив теорему Пифагора, получим равенство  $a^2 - \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 = b^2 - \left(\frac{y+x}{2}\right)^2$ , из которого после несложных преобразований получается ответ.
- Вопрос в этой задаче был поставлен не вполне корректно. Дело в том, что описанная в условии задачи ситуация невозможна. Если бы шарик двигался так, как сказано в условии, то отражения действительно происходили бы последовательно от сторон  $BC, CD, DA, AB$  и так далее по циклу. Занумеруем звенья траектории шарика подряд числами  $1, 2, \dots, 2011$  (их на одно больше, чем отражений). Заметим, что звенья с нечетными номерами будут параллельны друг другу и звенья с четными номерами будут параллельны друг другу – так как углы, под которыми происходят отражения, чередуются, принимая всего два разных значения (сумма этих двух значений равна  $90$

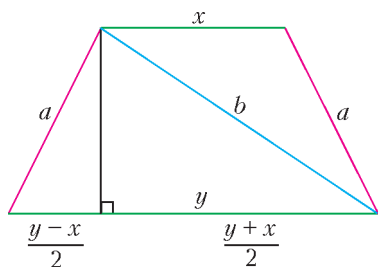


Рис. 3

градусов). Тогда первое и последнее звенья параллельны друг другу. Но оба они проходят через вершину  $A$ , а следовательно, совпадают! Иными словами, шарик вернулся в вершину  $A$  по тому же звену, что и вылетел из нее. Это значит, что в какой-то момент шарик просто стал двигаться назад по уже пройденной траектории, что возможно только если один из ударов о борт был под углом  $90$  градусов. Но это противоречит условию – ведь первый удар был не в вершину, и, значит, первый угол был отличен от  $90$  градусов, а тогда и все углы отличны от  $90$  градусов.

Поэтому правильный ответ в этой задаче – так не бывает! Приносим свои извинения за не вполне корректную формулировку и советуем внимательно проверять полученные результаты. Например, многие очень быстро решают следующую задачу: «Найдите площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой  $10$  и высотой  $6$ , опущенной на гипотенузу». По формуле площади треугольника площадь должна равняться половине произведения основания на высоту, т.е.  $30$ . Но на самом деле такого треугольника не существует – проверьте, что самое большое возможное значение высоты прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу длины  $10$ , равно  $5$ .

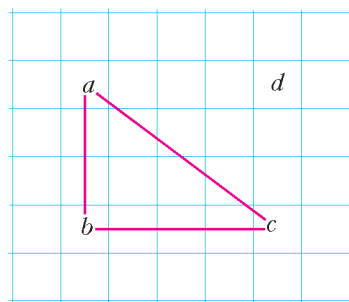


Рис. 4

клетках написаны числа  $a, b, c$  и  $d$  (рис. 4). Тогда верны равенства  $a + b + c = b + c + d = a + b + d = a + c + d = 0$ , откуда получается, что  $a = b = c = d$ . Но тогда  $3a = 0$ . Значит, во всех клетках написаны нули.

**19. Указание.** Проверьте, что тройка  $a, b, c$  из условия – это числа  $101^2, 101 \cdot 103$  и  $103^2$  (в таком порядке).

**20. 12.** Сначала докажем, что если открыто меньше половины кабинетов, то комендант сможет открыть еще хотя бы один кабинет. Пусть комендант открыл  $n \leq 12$  кабинетов. Это означает, что не больше  $12$  кабинетов открыто не своим ключом, т.е. среди оставшихся  $25 - n \geq 13$  ключей не более двенадцати могут подойти только к уже открытым кабинетам. Значит, есть хотя бы один ключ, который откроет один из пока еще закрытых кабинетов.

Приведем пример, когда комендант откроет только  $13$  дверей. Пусть ключ с номером  $n$ , где  $14 \leq n \leq 25$ , открывает (помимо кабинета  $n$ ) еще и кабинет с номером  $26 - n$  (но не наоборот). Тогда комендант может открыть кабинеты с  $1$  по  $12$  этими ключами,  $13$ -й кабинет он откроет ключом №13, а оставшиеся двенадцать кабинетов с  $14$  по  $25$  так и останутся закрыты.

### КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- Используя квадрирование Колмогорова, можно утверждать, что если проделать  $500$  шагов разбиения, то сумма периметров квадратиков, пересекающихся с главной диагональю, равна  $4 \cdot 500 = 2000$ , что больше  $1993$ .
- Если разбиваемый квадрат имеет сторону длины  $2n - 1$ , то

число квадратов в нем можно посчитать по формуле  $\frac{1}{3}n^2(2n^2 + 1)$ .

**3.** Существует разбиение квадрата на три класса равных квадратов, в котором по  $14$  квадратов каждого из трех размеров  $1 \times 1, 2 \times 2$  и  $3 \times 3$ , и всего  $52$  квадрата (рис.5). Вообще, квадрат можно разрезать на любое число классов равных квадратов.

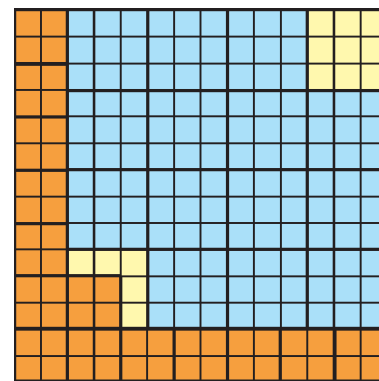


Рис. 5

### ЗАДАЧИ НА УРАВНЕНИЕ МОМЕНТОВ СИЛ

- $T = 600$  Н.
- $F_d = 180$  Н.
- $x = 0,2$  м.
- $m = 25$  г.
- $F_d = 150$  Н.
- $F = 9$  Н.
- $\alpha_{\min} = 45^\circ$ .
- $F_{\min} = 75$  Н.
- $T = 25$  Н.
- $\alpha = \arctg 0,2$ .

### XXXI ТУРНИР ГОРОДОВ

#### ЗАДАЧИ ВЕСЕННЕГО ТУРА

Базовый вариант

#### 8–9 классы

- Сложив равенства для слив и яблок по всем корзинам, получим что общее число слив в  $5$  раз больше общего числа яблок. Аналогично, общее число яблок в  $5$  раз больше общего числа груш, т.е. в  $25$  раз больше общего числа слив. Итого, общее число фруктов в  $31$  раз больше общего числа груш.

- Нет. Малыш проводит разрез через выбранную Карлсоном точку  $K$  и центр  $O$  торта (рис.6), если Карлсон выбрал  $O$  – проводит любой возможный разрез. Прямая  $m$ , проведенная через  $O$  перпендикулярно  $KO$ , вместе с прямой  $KO$  делят торт на  $4$  одинаковых куска. Оба куска, которые может отсечь Карлсон (отрезком, параллельным  $m$ ), не меньше этих четвертинок.

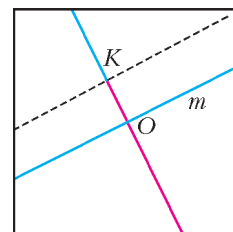


Рис. 6

- а) Одну. Проведем окружность с центром на стороне угла, проходящую через его вершину. Если она пересечет другую сторону угла, угол был острым.  
б) Проведем окружность с центром в вершине  $O$  нашего угла. Пусть она пересекает стороны угла в точках  $A$  и  $B$ . Начиная с точки  $A$ , будем откладывать циркулем на этой окружности дуги, равные дуге  $AB$ . Если, отложив  $360$  таких дуг, мы обойдем окружность ровно  $31$  раз, то  $\angle AOB = 31^\circ$ .
- Построим из участников самый длинный ряд так, чтобы знакомые стояли рядом. Все трое знакомых крайнего (обозначим его  $A$ ) должны быть в ряду (иначе ряд можно удлинить). Обозначим через  $B$  и  $C$  тех знакомых, которые не стоят рядом с  $A$ . Если, между  $A$  и  $B$  ( $A$  и  $C$ ) стоит четное число человек, то они вместе с  $A$  и  $B$  ( $A$  и  $C$ ) образуют искомую группу. Если же оба эти числа нечетны, то и между  $B$  и  $C$  стоит нечетное число человек, и они вместе с  $A, B$  и  $C$  образуют искоемую группу.
1. Из четырех последовательных квадратов (за  $3$  операции) можно получить число  $4$ :

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n+1, \quad (n+3)^2 - (n+2)^2 = 2n+5,$$

$$(2n+5) - (2n+1) = 4.$$

Получим так 24 четверки из чисел  $6^2, 7^2, \dots, 101^2$ , а 20 четверок попарным вычитанием превратим в нули. Из чисел 4, 9, 16, 25 получим  $14 = (25 - 4) - (16 - 9)$ . Осталось заметить, что  $4 - (14 - 4 - 4 - 4) - 1 = 1$ .

10–11 классы

1. Аналогично решению задачи 1 базового варианта для 8–9 классов, общее число бананов в 2009 раз больше числа лимонов, которое в 2009 раз больше числа ананасов. Поэтому общее число фруктов в  $2009^2 + 2009 + 1$  раз больше числа ананасов. Так как  $2009 \equiv -6 \pmod{31}$ , то

$$2009^2 + 2009 + 1 \equiv (-6)^2 - 6 + 1 \equiv 0 \pmod{31}.$$

3. Можно.

*Первое решение.* Подойдут четыре правильных шестиугольника, малая диагональ которых равна ребру октаэдра. В каждом таком шестиугольнике закрасим треугольник, образованный диагоналями шестиугольника, а грани октаэдра раскрасим в шахматном порядке (рис.7).

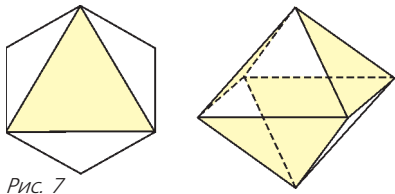


Рис. 7

Наложим шестиугольники закрасенными треугольниками на закрасенные грани и загнем белые треугольные части шестиугольников на соседние грани.

*Второе решение.* Окрасим 8 граней октаэдра в шахматном порядке. Белые грани разрежем на половинки правильных шестиугольников, как показано на рисунке 8 слева, а черные – как показано на рисунке 8 справа. При любой стыковке соседних граней половинки шестиугольников склеиваются в целые шестиугольники.

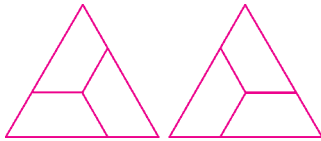


Рис. 8

Сложный вариант

8–9 классы

1. Разрежем оба куска, получившихся при первом разрезании. Получатся 4 куска, чьи веса относятся как  $1 : a : a : a^2$ . Достаточно выбрать такое  $a$ , чтобы  $1 + 2a = a^2$ . Положительный корень этого уравнения  $a = 1 + \sqrt{2}$ .

2. 1 : 2. Проведем среднюю линию  $MN$  треугольника  $ACP$  (параллельную  $AP$ ). По теореме Фалеса  $OM/PN = BO/OP$ , поэтому  $OM = PN = \frac{1}{2}PC$ .

3. а) -997. *Оценка.* Если два соседних произведения равны, то первое число левого равно последнему числу правого, т.е. равны числа через 10 мест. Так как 10 и 999 взаимно просты, то, шагая по 10, мы обойдем все числа. Но среди чисел есть разные, значит, и среди произведений – тоже. Итак, есть хотя бы одно произведение, равное 1.

Вот пример, где ровно одно произведение равно 1, а остальные 998 – по -1: если номер числа оканчивается на 9, ставим -1, иначе ставим 1. Тогда единственное положительное произведение – с 999-го места по 9-е.

б) 995. *Пример.* Две -1 рядом, остальные 1. Тогда отрицательными будут только те произведения, куда одна -1 входит, а другая – нет, т.е. ровно 2.

*Оценка.* Произведение всех произведений равно 10-й степени произведения всех чисел, т.е. равно 1. Значит, среди произведений четное число минус единиц, т.е. не меньше двух.

4. Может.

Рассмотрим число

$$n = \sum_{k=0}^{99} 10^{10^k} = 10 + 10^{10} + \dots + 10^{10^{99}}.$$

Его десятичная запись состоит из ста единиц и большого числа нулей. Возведем это выражение в куб следующим образом: рассмотрим три таких выражения, перемножим их, раскрыв скобки, но не будем приводить подобные. Получим  $100^3$  слагаемых, каждое из которых является степенью числа 10.

Если бы все слагаемые были разными, то при суммировании мы получили бы число, десятичная запись которого состоит из  $100^3$  единиц и некоторого количества нулей, т.е. сумма цифр равнялась бы  $100^3$ . К сожалению, некоторые слагаемые будут одинаковыми. Но если мы докажем, что одинаковых слагаемых каждого типа меньше десяти, то при сложении не будет происходить переносов в следующий разряд и сумма цифр числа будет действительно равна  $100^3$ .

Посмотрим, сколько одинаковых слагаемых одного типа может получиться. Каждое из таких слагаемых получается из произведения трех чисел: первое число с  $10^p$  нулями берется из первой скобки, второе с  $10^q$  нулями – из второй, а третье с  $10^r$  нулями – из третьей. Заметим, что слагаемое с таким же количеством нулей можно получить, только перемножая эти же три числа, взятые в другом порядке (подумайте, почему!). Но всего есть максимум  $3! = 6$  способов выбрать три данных числа из трех скобок, поэтому одинаковых слагаемых каждого типа может быть максимум 6.

Значит, при суммировании слагаемых не будет происходить переносов в следующий разряд, и сумма цифр числа  $n^3$  будет равняться  $100^3$ .

5. Решение аналогично решению задачи M2189 «Задачника «Кванта» и будет опубликовано позже.

6. См. решение задачи 5 для 9 класса LXXIII Московской математической олимпиады в этом номере журнала.

7. 40. *Оценка.* На одной вертикали может быть не более двух блох, прыгающих по вертикали (иначе блохи, находящиеся в клетках одного цвета, встретятся). То же верно для горизонталей. Итого на 20 горизонталях и вертикалях – не более 40 блох.

*Пример.* Ясно, что блохи с клеток разных цветов не смогут встретиться. Поэтому достаточно указать только 20 «белых» блох (расположение «черных» блох можно получить, например, симметрией относительно средней линии).

На рисунке 9,а нарисована одна «вертикальная» блоха В и все запрещенные положения «горизонтальных» блох, (т.е. те,

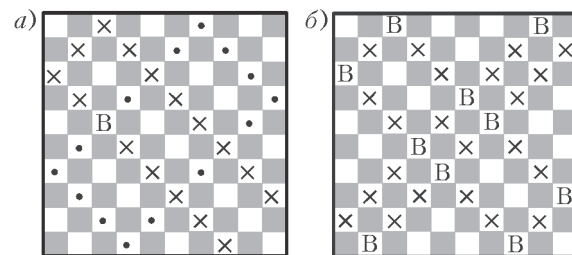


Рис. 9

начиная с которых, «горизонтальная» блоха может оказаться с В на одной клетке). Как видим, запрещенные клетки образуют два прямоугольника, построенных на проходящих через В диагоналях. На рисунке 9,б размещены 10 «вертикальных» блох и все запрещенные ими положения «горизонтальных». Мы видим, что в каждой горизонтали осталась хотя бы одна незапрещенная белая клетка, куда можно посадить «горизонтальную» блоху.



## 10–11 классы

1. Можно. Если прямая не параллельна осям координат, то парная к ней пересекается с ней на оси  $Oy$ . Для прямой, параллельной одной из осей, парная пересекается с ней на биссектрисе первого координатного угла.

2. а) Можно. См. решение задачи 1 сложного варианта для 8–9 классов.

б) Нельзя. Допустим противное: после нескольких разрезов удалось разбить все куски на две равные кучки. Без ограничения общности можно считать, что мы резали на каждом шагу все имеющиеся куски. После  $k$  шагов получились куски, чьи веса относятся как  $1 : a : a^2 : \dots : a^k$ , причем 1 и  $a^k$  соответствует ровно по одному куску. Подставив вместо  $a$  несократимую дробь  $\frac{m}{n}$  и умножив все веса на подходящую константу, получим целые веса  $n^k, mn^{k-1}, \dots, m^k, mn^{k-1}$ . Но  $m$  и  $n$  взаимно просты, поэтому вес одной кучки кратен  $m$ , а другой, где есть кусок веса  $n^k$ , – не кратен. Противоречие.

3. Можно. Пусть

$$f(x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

По индукции проверим, что  $g^n(x) = g(g^{n-1}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$ .

Взяв  $n = 2010^2 - 1$ , получим, что  $g^n(1) = \frac{1}{2010}$ , откуда

$$f(g^n(1)) = 2010.$$

4. Достаточно распределить участников съезда не более чем по 100 секциям: потом число секций можно поднять до 100, деля их на произвольные части.

Если есть популярный фильм, который видели больше 100 человек, выделим их всех в отдельную секцию. Если теперь есть популярный фильм, который видели больше 99 из оставшихся, выделим их в следующую секцию и т.д. У нас закончатся либо люди, либо популярные фильмы. Если закончились люди, то 101 секция образоваться не могла, так как в них вошло бы не менее  $101 + 100 + 99 + \dots + 2 + 1 > 5000$  человек. Пусть закончились популярные фильмы. Тогда уже есть  $100 - k$  секций и среди оставшихся участников каждый фильм видело не более  $k$  человек. Выделим  $k$  комнат для еще  $k$  секций. Берем любой фильм, распределяем видевших его по разным комнатам и поручаем им рассказывать об этом фильме. Так же поступаем с видевшими следующий фильм, и так пока люди не кончатся.

6. Прямые  $AI, BI, CI, DI$  – биссектрисы углов четырехугольника. Поэтому сумма углов  $AIB$  и  $CID$  равна  $180^\circ$ . Если один из этих углов, скажем  $AIB$ , острый, то другой – угол  $CID$  – тупой, и тогда  $IM > \frac{1}{2}AB$  (это становится очевидным после построения окружности с диаметром  $AB$ ), а  $IN < \frac{1}{2}CD$ , что противоречит условию. Значит,  $\angle AIB = \angle CID = 90^\circ$ . Следовательно,  $\angle A = \angle B = 180^\circ$ , т.е.  $BC \parallel AD$ .

## Устный тур для 11 класса

2. Предположим противное – таких школьников нет.

Пусть в одном из залов больше рядов, чем в другом. Тогда школьники, сидящие на первых местах этого зала, не смогут рассестись в разные ряды второго зала – противоречие. Значит, общее число рядов в каждом зале одинаково.

Пусть в одном из залов (скажем, в первом) длина самого короткого ряда больше, чем в другом, и равна  $m$ . Тогда школьники с местами 1, 2, ...,  $m$  из первого зала не смогут рассе-

стись в разные ряды второго зала. В самом деле, школьники с первыми местами из первого зала садятся в разные ряды второго зала, и поскольку всего рядов поровну, одно место каждого кратчайшего ряда второго зала будет кем-то из них занято; школьники со вторыми местами аналогично займут еще по одному месту каждого кратчайшего ряда второго зала и так далее, т.е. мест в кратчайшем ряду второго зала не может оказаться меньше  $m$ .

Если же длины кратчайших рядов равны, то аналогично равны и количества кратчайших рядов.

Рассуждая далее точно так же, получим, что одинаковы длины следующих по величине рядов и их количества и так далее (строгое доказательство можно оформить по индукции). В результате получим, что набор длин рядов и их количество в обоих залах одинаков, что противоречит условию.

3. 1001.

Докажем по индукции, что наибольшее возможное расстояние между центром  $\omega_1$  и точкой, принадлежащей  $\omega_N$ , равно  $\sqrt{N}$ . База для  $N = 1$  очевидна. Покажем, что из верности нашего утверждения для  $N$  следует его верность для  $N + 1$ .

Для начала найдем наибольшее возможное расстояние между центром  $\omega_1$  и точкой, принадлежащей  $\omega_{N+1}$ , при условии, что хорда, на которой построена окружность  $\omega_2$ , стягивает дугу величины  $2\varphi$ . Радиус  $\omega_2$  при этом равен  $\sin \varphi$ . По предположению индукции, наибольшее возможное расстояние между центром  $\omega_2$  и точкой, принадлежащей  $\omega_{N+1}$ , равно  $\sin \varphi \sqrt{N}$ . Расстояние между центрами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  равно  $\cos \varphi$ . Отсюда наибольшее возможное расстояние между центром  $\omega_1$  и точкой, принадлежащей  $\omega_{N+1}$ , равно  $\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{N}$ . Осталось подобрать угол  $\varphi$  таким образом, чтобы значение  $\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{N}$  было максимальным. Заметим, что

$$\begin{aligned} \cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{N} &= \sqrt{N+1} \left( \frac{\cos \varphi}{\sqrt{N+1}} + \frac{\sin \varphi \sqrt{N}}{\sqrt{N+1}} \right) = \\ &= \sqrt{N+1} \cos \left( \varphi - \arccos \frac{1}{\sqrt{N+1}} \right) \leq \sqrt{N+1}, \end{aligned}$$

причем при  $\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{N+1}}$  достигается равенство. Шаг индукции доказан.

Радиус первой окружности равен 1. Поэтому наибольшее возможное расстояние между двумя точками, принадлежащими  $\omega_1$  и  $\omega_N$ , равно  $1 + \sqrt{N}$ . Подставляя  $N = 1000000$ , находим ответ.

4. Все кроме двух.

*Набросок решения.* На рисунке 10 – пример на 62 клетки (стартуем из середины). Докажем теперь, что в любом случае останутся как минимум две не обходенные клетки. Закрасим внутренние границы клеток, которые ладья не пересекала. Будем считать их ребрами графа. Рассмотрим клетки, примыкающие к правому краю доски, и их границы, идущие от края доски. Если ни одна из этих границ не закрасена, то ладья прошла по правому краю и сделала поворот в угловых клетках. Но это были либо два поворота направо, либо два поворота налево, а клетки – разного цвета. Противоречие.

Значит, среди границ правых клеток есть ребро  $R$  с концом на краю доски. Аналогично, такое ребро  $L$  есть среди границ левых крайних клеток. Если ребра  $R$  и  $L$  соединены в графе маршрутом, то маршрут разбивает доску на две части, в каждой есть как минимум 6 клеток (по одной с каждой из крайних вертикали). В одной из этих частей ладья не побывала, значит, она обошла не более 58 клеток. Пусть  $R$  и  $L$  не со-

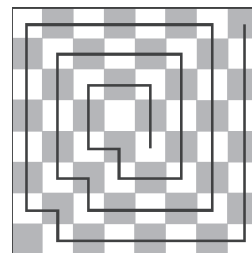


Рис. 10

единены. Пойдем от края по ребру  $R$  и будем идти по графу, не поворачивая назад. Есть три возможности: а) попадем в вершину, где уже были; б) попадем в вершину на краю доски; в) попадем в вершину  $v$  внутри доски, из которой других ребер не выходит. На самом деле случай (в) невозможен: тогда бы мы обошли 4 примыкающие к  $v$  клетки буквой  $\Pi$ , сделав два левых или два правых поворота в двух соседних клетках, а они – разного цвета. В случаях (а) и (б) пройденный маршрут разбивает доску на 2 части ( в случае (а) есть цикл, в случае (б) маршрут замыкается в цикл краем доски). Аналогично находим такой маршрут, стартуя от края по ребру  $L$ . Он добавит еще одну часть. Ладья побывала только в одной из частей, значит, в каждой из оставшихся найдется хотя бы по одной не обходной клетке.

**5.** Люда не может помешать Саше.

*Первое решение.* Сначала Саша называет число  $k = 4$ . Пусть Люда назвала число, большее  $\operatorname{tg} 18^\circ$ . Тогда Саша берет на окружности вершины прямоугольника  $ABCD$  и делит дугу  $AB$  точками на 10 равных частей (это все будут точки касания сторон 13-угольника с окружностью). Тогда 4-я сторона касается в точке  $A$ . Уменьшая дугу  $AB$  почти до  $0^\circ$ , Саша может сделать 4-ю сторону сколь угодно длинной. Наоборот, раздвигая дугу до  $180^\circ$ , Саша делает 4-ю сторону сколь угодно близкой к  $\operatorname{tg} 18^\circ$ .

Пусть Люда назвала число не больше  $\operatorname{tg} 18^\circ$ . Тогда Саша впишет равнобедренный остроугольный треугольник  $ABC$  с основанием  $AB$  и разделит дугу  $AB$  на 11 равных частей. Тогда 4-я сторона касается в доп. точке. Сближая  $A$  и  $B$ , Саша получает все значения меньше  $2\operatorname{tg}(180/11)^\circ$ .

*Набросок второго решения.* Сначала Саша называет число  $k = 4$ . Пусть радиус круга равен 1. Если длина 4-й стороны  $s$  больше 1, то Саша делает так: описывает ромб, у которого касательная больше 1, но чуть-чуть меньше нашей стороны. Два угла этого ромба будут острые, два – тупые. Далее, берет две соседние точки касания, соединенные меньшей дугой (концы тупого угла), и описывает около нее равнозвенную ломаную из 9 звеньев, концы ее на сторонах ромба лежат так, чтобы как раз две его стороны стали равны длине  $s$ . Если длина 4-й стороны  $s$  меньше или равна 1, Саша делает так. Рисует горизонтальную касательную над кругом так, чтобы ее середина была над центром, длина равна  $s$ . После этого вправо продолжает девятизвенной ломаной, у которой одно звено чуть больше половины длины  $s$ , а остальные звенья очень маленькие, затем проводит еще звено – большое и влево от исходной стороны звено – большое, их соединяет нижней горизонтальной касательной. Тогда девять звеньев маленькие, а длина трех звеньев очевидно больше 1.

**6.** Для доказательства того, что  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$  делится на  $[1, 2, \dots, n]$ , нам достаточно доказать, что для любого простого  $p$  и натурального  $k$  среди чисел вида  $a_i - a_j$ , где  $1 \leq i < j \leq n$ , чисел, делящихся на  $p^k$ , не меньше, чем среди чисел вида  $i - j$ . В самом деле, для целого числа  $b = b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n$  степень вхождения  $p$  в  $b$  равна сумме степеней вхождения  $p$  в  $b_i$ , которая в свою очередь равна сумме по всем натуральным  $k$  количества таких  $b_i$ , которые кратны  $p^k$ .

Для каждого  $p^k$  рассмотрим набор  $d_0, d_1, \dots, d_{p^k-1}$ , где  $d_j$  – количество таких  $a_i$ , которые имеют остаток  $j$  при делении на  $p^k$  (т.е.  $d_0 + d_1 + \dots + d_{p^k-1} = n$ ). Тогда количество чисел среди  $a_i - a_j$ , делящихся на  $p^k$ , есть

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (d_0(d_0 - 1) + d_1(d_1 - 1) + \dots + d_{p^k-1}(d_{p^k-1} - 1)) &= \\ &= \frac{1}{2} (d_0^2 + d_1^2 + \dots + d_{p^k-1}^2 - n). \end{aligned}$$

Осталось доказать, что  $d_0^2 + d_1^2 + \dots + d_{p^k-1}^2$  при фиксированной сумме  $d_0 + d_1 + \dots + d_{p^k-1} = n$  принимает наименьшее зна-

чение тогда, когда эти остатки распределены достаточно равномерно (т.е. все  $d_i$  равны или  $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ , или  $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor + 1$ ), например, при  $a_i = i$ . Это нетрудно сделать, скажем, методом «шелвелений».

### LXXIII МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

#### 6 класс

**1.** 21 кусок.

Заметим, что количество частей всегда на 1 больше количества разрезов. Значит, красных колец 4, желтых 6, а зеленых 10. Таким образом, всего разрезов  $4 + 6 + 10 = 20$ , а частей 21.

**2.** Оба гномы.

Предположим, что  $A$  эльф. Тогда он сказал правду, а  $B$  солгал. Но ни гномы, ни эльфы не лгут, говоря про эльфов. Значит,  $A$  гном. Говоря про золото, он солгал. Поэтому  $B$  сказал про  $A$  правду. Это мог сделать только гном.

**3.** Например, он может сложить башню из четырех кубиков, «завернуть» ее в квадрат  $4 \times 4$ , а низ и верх заклеить квадратами  $1 \times 1$ .

**4.** В 10 долларов.

Поскольку Буратино получил 50 конфет, он совершил ровно 50 операций. При этом все полученные евро он вновь обменял на доллары. Поэтому на

каждые 3 операции первого типа приходилось по 2 операции второго типа, т.е. Буратино 30 раз получал по 3 доллара и 20 раз отдавал по 5 долларов. Значит, он потратил  $20 \cdot 5 - 30 \cdot 3 = 10$  долларов.

**5.** На рисунке 11 доска разрезана на 35 прямоугольников.

**6.** Раскрасим чашки через одну в синий и красный цвет. Пусть Мартовский Заяц вначале пил

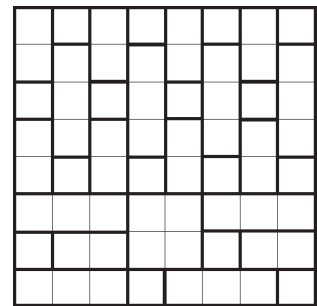


Рис. 11

из красной чашки. Докажем, что вначале Соня пила из синей чашки. В самом деле, если бы она пила из красной, то после любого поворота стола опорожнялись бы две чашки одного цвета. Поскольку и тех, и других по 15, а выпиваются они парами, в конце остались бы две чашки разного цвета, которые никаким поворотом стола нельзя было бы одновременно поместить перед Соней и Мартовским Зайцем. Теперь ясно, почему Заяц мог всегда поворачивать стол, ставя перед собой чашку через одну от только что выпитой, – при этом перед ним по очереди предстали бы все красные, а перед Соней – все синие чашки.

#### 7 класс

**1.** Например,  $(1 \cdot 3 + 3) : 3 + 3 + 3 + 3 = 11$ .

**2.** а) Да; б) нет (так как у каждого колеса не более трех спиц, а всего у колес не менее 7 спиц).

**3.** 21 конфета.

*Указание:* докажите сначала, что все съели поровну конфет.

**4.** 13 судей.

Число голосов, поданных за Петуха и Ворону, не может быть больше  $15 + 13 = 28$ . Аналогично, за Ворону и Кукушку в сумме не может быть подано больше  $18 + 13 = 31$  голоса, а за Кукушку и Петуха – не больше  $20 + 13 = 33$  голосов. Сложив эти три количества поданных голосов, мы получим удвоенное число всех голосов (каждый голос вошел в два из трех слагаемых). Таким образом, общее число членов жюри не больше  $(28 + 31 + 33) / 2 = 46$ . С другой стороны, из первого объяв-

ления Дятла оно не меньше  $59 - 13 = 46$ . Тем самым, членов жюри ровно 46, а все неравенства на самом деле обращаются в равенства. Наконец, число проголосовавших за Ворону можно найти как разность общего числа членов жюри и суммы проголосовавших за Кукушку и Петуха:  $46 - 33 = 13$  голосов.

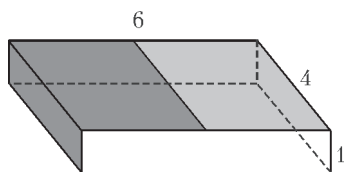


Рис. 12

5. а) См. решение задачи 3 для 6 класса.  
б) На рисунке 12 показано, как можно параллелепипед  $1 \times 4 \times 6$  оклеить двумя квадратами  $4 \times 4$  и одним квадратом  $6 \times 6$ . Большим квадратом оклеены три грани: передняя, нижняя и задняя, а каждым из меньших квадратов – половина верхней грани и одна из двух боковых.

6. На доске  $7 \times 7$ .

Пример расстановки кораблей на доске  $7 \times 7$  изображен на рисунке 13. Остается доказать, что на доске  $6 \times 6$  корабли расставить нельзя.

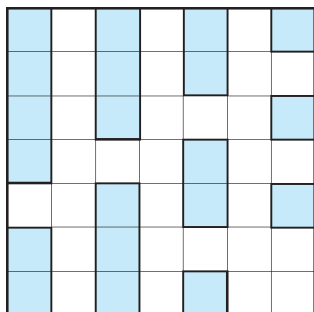


Рис. 13

*Доказательство 1.* Будем считать не клетки, а узлы доски, занимаемые кораб-

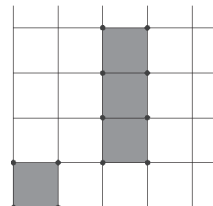


Рис. 14

лями. Корабль  $1 \times 4$  занимает  $2 \cdot 5 = 10$  узлов, корабль  $1 \times 3$  занимает 8 узлов, корабль  $1 \times 2$  – 6 узлов, корабль  $1 \times 1$  – 4 узла (рис.14); причем по правилам расстановки один узел не может принадлежать более чем одному кораблю. Значит, все корабли занимают  $10 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 4 = 60$  узлов, и выставить их все на доску с меньшим числом узлов невозможно. Но всего на доске  $6 \times 6$  имеется лишь  $(6+1)^2 = 49 < 60$  узлов.

*Доказательство 2.* Разрежем доску  $6 \times 6$  на 9 квадратов  $2 \times 2$ . Каждый такой квадрат при расстановке по правилам может содержать клетки только одного корабля. Но всего кораблей 10, поэтому их на такой доске разместить нельзя. (Отметим, что это рассуждение доказывает, что на доску  $6 \times 6$  все 10 кораблей нельзя было бы поставить, даже если все они имели бы размеры  $1 \times 1$ .)

### 8 класс

1. См. решение задачи 1 КМШ в третьем номере журнала за этот год.

2. 60 г.

Все монеты без центральной можно разбить на 9 троек (рис.15), а все внутренние монеты без центральной – на 3 тройки (рис.16). Значит, монеты на границе весят столько же, сколько  $9 - 3 = 6$  троек, т.е. 60 г.

3. 1 : 2.

См. решение задачи 2 сложного варианта для 8–9 классов XXXI Турнира городов в этом номере журнала.

5. Так как средняя линия  $MN$  треугольника  $ABC$  (рис.17) параллельна стороне  $AB$ ,  $\angle BAN + \angle MNA = 180^\circ$ , а значит,  $\frac{1}{2} \angle BAN + \frac{1}{2} \angle MNA = 90^\circ$ . С другой стороны, поскольку угол  $AIN$  прямой,  $\frac{1}{2} \angle BAN + \angle INA = 90^\circ$ . Стало быть,

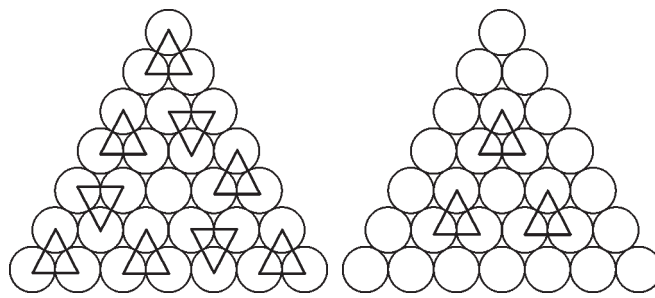


Рис. 15

Рис. 16

$$\angle INA = \frac{1}{2} \angle MNA, \text{ т.е. точка}$$

$I$  лежит на биссектрисе угла  $MNA$ .

Таким образом, из условия  $\angle AIN = 90^\circ$  получаем, что центр  $I$  вписанной окружности треугольника  $ABC$  равноудален от прямых  $AC$ ,  $BC$ ,  $AB$  и  $MN$  (т.е. вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается его средней линии  $MN$ ).

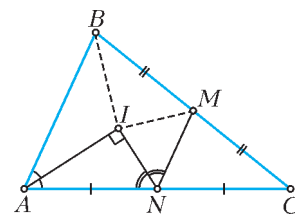


Рис. 17

Обращая переходы в предыдущем абзаце, получаем, что и  $\angle BIM = 90^\circ$ . А именно:

$$\angle IBM + \angle BMI = \frac{1}{2} \angle ABM + \frac{1}{2} \angle BMN = 90^\circ,$$

поэтому

$$\angle BIM = 180^\circ - (\angle IBM + \angle BMI) = 90^\circ.$$

6. Предположим, что клеток без стрелочек нет. Для замкнутого пути по клеткам квадрата определим *индекс* как число оборотов (по часовой стрелке), которые делает на нем стрелочка, т.е. пройдем по этому пути, на каждом шаге прибавляя к числу (равному нулю в начале пути)  $1/4$ , если стрелочка повернулась по часовой стрелке, вычитая  $1/4$ , если против, и не меняя число, если направление стрелки не изменилось<sup>1</sup>; индекс – это число, которое мы получим, сделав полный круг<sup>2</sup>.

Индекс относительно пути вдоль границы квадрата равен 1. Начнем теперь уменьшать наш путь – «откусим» сначала его левый верхний уголок (рис.18 и 19). Заметим, что индекс

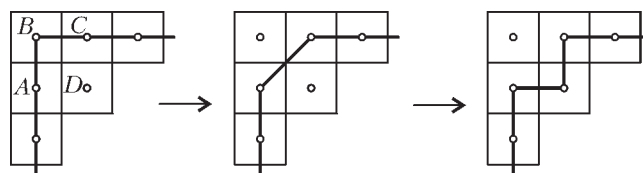


Рис. 18

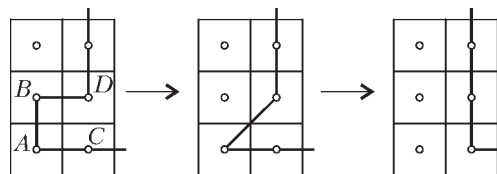


Рис. 19

<sup>1</sup> Здесь мы пользуемся тем, что в соседних клетках стрелочки не смотрят в противоположных направлениях: если бы на каком-то шаге нашего пути стрелка поменяла направление на противоположное, неясно было бы, надо нам прибавлять  $1/2$  или вычитать.

<sup>2</sup> Так как при этом мы возвращаемся в клетку, с которой начинали, вектор делает целое число оборотов, т.е. индекс – целое число.



при такой операции не меняется (так как среди стрелочек, выходящих из точек  $A, B, C$  и  $D$ , нет противоположных). Откусывая так по углу, через некоторое время мы продеформируем наш путь до пути, состоящего из одной клетки – а индекс такого пути равен 0. Противоречие.

**Комментарии.** 1. На самом деле мы доказали и более общий факт. А именно, если в клетках какой-то фигуры расставлены стрелочки так, что индекс относительно границы фигуры не равен 0, то внутри фигуры обязательно есть пустая клетка. Более того, можно показать, что если индекс относительно границы равен  $k$ , то внутри есть хотя бы  $|k|$  пустых клеток. 2. Эта задача представляет собой дискретный аналог следующего известного топологического факта. Пусть на круге задано векторное поле, т.е. в каждой точке круга задан вектор, причем вектор зависит от точки непрерывно. Тогда если на окружности эти векторы направлены по касательной (рис.20), то внутри найдется точка, вектор в которой равен нулю.

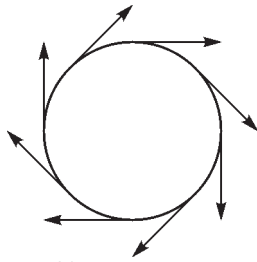


Рис. 20

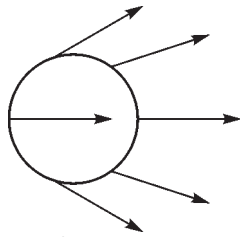


Рис. 21

Доказательство этого факта проходит в духе решения задачи. А именно, определяется индекс векторного поля относительно кривой<sup>3</sup>, проверяется, что для граничной окружности он равен 1, а для маленького контура вокруг точки с ненулевым вектором индекс равен 0 (рис.21). После чего доказывается, что, если нулей у векторного поля нет, при уменьшении контура индекс не меняется.

Таким образом, имеет место теорема: если на границе некоторой области векторное поле имеет ненулевой индекс, то внутри области поле имеет хотя бы одну особую точку – точку, вектор в которой равен нулю.

Более подробно намеченное выше рассуждение изложено в пункте V.3.4 книги Р.Куранта, Г.Роббинса «Что такое математика» (где оно применяется для доказательства замечательной теоремы Брауэра о существовании неподвижной точки непрерывного отображения диска в себя). А полное формальное доказательство можно узнать, прочитав книгу Н.Стинрода, У.Чинна «Первые понятия топологии».

Более того. Определим индекс особой точки векторного поля как индекс относительно маленького пути вокруг этой точки. Тогда аналогичными рассуждениями можно показать, что индекс векторного поля относительно границы области равен сумме индексов особых точек внутри области (ср. с последним утверждением в комментарии 1). Дальнейшим развитием этого сюжета является знаменитая теорема Пуанкаре–Хопфа, связывающая эйлерову характеристику с суммой индексов особых точек.

**9 класс**

1. Волк будет страдать от голода.
2.  $90^\circ$ .

Поскольку  $\angle MAE = \angle MPE = \angle CPM = \angle MBC = 90^\circ$ , четы-

<sup>3</sup> Представляя себе векторное поле как отметки скорости ветра, можно сказать, что это число оборотов, которые сделает вокруг своей оси флюгер, если пронести его вдоль этого пути.

реугольники  $AEPM$  и  $BMPC$  вписанные. Стало быть,

$$\begin{aligned} \angle BPA &= \angle BPM + \angle MPA = \angle BCM + \angle MEA = \\ &= 180^\circ - \angle EMA - \angle CMB = \angle EMC = 90^\circ. \end{aligned}$$

**3.** Среднее количество товарищей у тараканов больше среднего количества тараканов у жителя города.

Пусть в городе проживает  $n$  жителей, и пусть у  $i$ -го жителя  $a_i$  тараканов. Тогда среднее число тараканов у жителя города равно  $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n$ , а среднее число товарищей у таракана равно  $\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ .

Докажем, что

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Избавившись от знаменателей, получим

$$n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2. \quad (*)$$

Правая часть равна

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \dots + 2a_{n-1}a_n.$$

Осталось заметить, что, поскольку  $a_i^2 + a_j^2 \geq 2a_i a_j$  для любых  $i$  и  $j$ , исходное неравенство верно.

Значит, среднее количество товарищей у тараканов больше либо равно среднему количеству тараканов у жителя города. Однако равенство не достигается, потому что в (\*) оно возможно только для  $a_1 = \dots = a_n$ , что противоречит условию.

**Комментарии.** 1. Доказанное неравенство является частным случаем неравенства Коши–Буняковского.

2. Задача объясняет «закон подлости»: мы обычно ездим в автобусах, более переполненных, чем в среднем, и стоим в очередях, более длинных, чем обычно.

**4.** 2005.

См. решение задачи 36) сложного варианта для 8–9 классов XXXI Турнира городов в этом номере журнала.

**5.** 9.

Допустим, прямых 8. Тогда они имеют не более 28 точек пересечения, но ломаная не может иметь вершин не в точках пересечения прямых, кроме начальной и конечной, т.е. не может иметь более 29

звеньев. Пример для девяти прямых изображен на рисунке 22. (На рисунке изображена окружность, на которой отмечено 9 точек – вершины правильного девятиугольника. Каждая из них соединена с двумя другими прямой. По этим прямым и проходит искомая ломаная, на рисунке обозначенная белым цветом.)

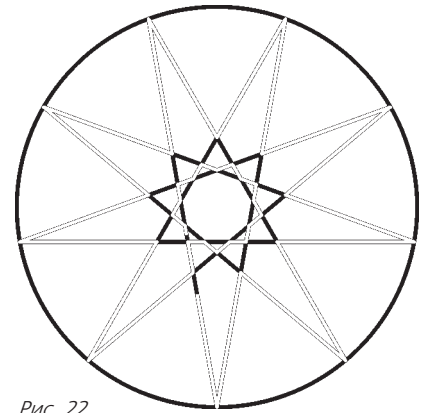


Рис. 22

**10 класс**

1. Нет, не может.
2.  $\sqrt{ab}$ .

**Указание.** Докажите сначала, что прямые  $MC$  и  $AN$  параллельны (рис. 23). Затем воспользуйтесь подобием треугольников  $MCN$  и  $AND$ , а также  $MCB$  и  $ANM$ .

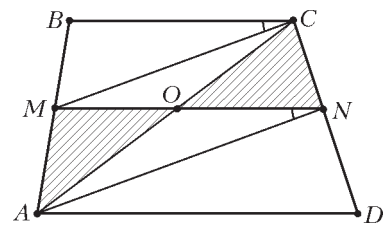


Рис. 23

3. Да, можно:  $2010 = \text{ctg} \overbrace{\arctg \sin \arctg 2}^{2010^2 - 2^2 \text{ раз}}$ .

См. решение задачи 3 сложного варианта для 10–11 классов XXXI Турнира городов в этом номере журнала.

4. См. решение задачи 4 сложного варианта для 8–9 классов XXXI Турнира городов в этом номере журнала.

5.  $7/2$ .

Пусть в треугольнике  $ABC$  выполнено неравенство  $1 = AB < AC < BC$ . Тогда медиана  $AA'$  равна высоте, опущенной из вершины  $B$ , а медиана  $BB'$  – высоте, опущенной из вершины  $C$ . Значит, расстояние от точки  $A'$  до прямой  $AC$  равно половине  $AA'$ , т.е.  $\angle A'AC = 30^\circ$ . Аналогично,  $\angle B'BA = 30^\circ$ . Пусть  $M$  – точка пересечения медиан треугольника. Поскольку  $\angle A'B'M = \angle B'BA = \angle B'AM$  (рис.24), треугольники  $B'A'M$

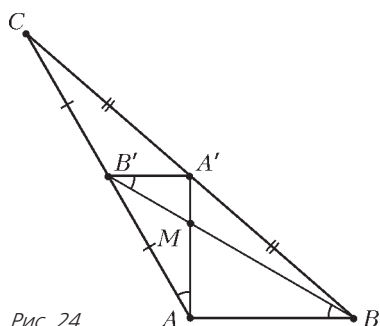


Рис. 24

и  $AA'B'$  подобны, т.е.  $A'B'^2 = A'M \cdot AA' = 3A'M^2$ . Следовательно, угол  $A'MB'$  равен либо  $120^\circ$ , либо  $60^\circ$ .

В первом случае треугольник  $ABC$  равносторонний, что противоречит условию.

Во втором случае имеем  $\angle B'A'A = \angle A'AB = 90^\circ$ ,  $\angle BB'A = 30^\circ$  и  $AB' = AB$ . Таким образом,  $AC = 2AB$  и  $\angle BAC = 120^\circ$ . Теперь по теореме косинусов находим  $BC = \sqrt{7}$ , и значит, медиана из вершины  $C$  равна  $\sqrt{21}/2$ , а высота из вершины  $A$  равна  $\sqrt{3/7}$ .

6. Сначала докажем, что всего проведено не менее  $6n$  отрезков.

Рассмотрим граф, множество  $V$  вершин которого состоит из всех отмеченных точек, а множество  $E$  ребер состоит из всех пар точек, соединенных отрезками. Тогда по условию  $|V| = 4n$ , и для любого  $W \subset V$ ,  $|W| \geq n+1$ , найдутся  $x, y \in W$ , образующие ребро  $(x, y) \in E$ .

Возьмем произвольное множество  $Q_1 \subset V$ , которое не содержит ребер и имеет максимальную мощность среди всех подмножеств множества  $V$ , которые не содержат ребер. Ясно, что  $|Q_1| \leq n$ . Кроме того, ввиду максимальной мощности множества  $Q_1$  каждая вершина из  $V \setminus Q_1$  имеет хотя бы одного соседа в  $Q_1$ . Значит, в  $E$  по крайней мере  $3n$  элементов.

Далее, удалим из  $V$  множество  $Q_1$ . Останется граф  $G_1$  со множеством вершин  $V_1$  и множеством ребер  $E_1$ , причем  $|V_1| \geq 3n$ , и для любого  $W \subset V_1$ ,  $|W| \geq n+1$ , найдутся  $x, y \in W$ , образующие ребро  $(x, y) \in E_1$ . Опять возьмем произвольное множество  $Q_2 \subset V_1$ , которое не содержит ребер и имеет максимальную мощность среди всех подмножеств множества  $V_1$ , не содержащих ребер. Ясно, что  $|Q_2| \leq n$ . Кроме того, ввиду максимальной мощности множества  $Q_2$ , каждая вершина из  $V_1 \setminus Q_2$  имеет хотя бы одного соседа в  $Q_2$ . Значит, в  $E_1$  по крайней мере  $2n$  элементов. Поскольку ребра, найденные на первом шаге поиска, заведомо отличны от ребер, найденных только что, то в  $E$  уже не менее  $5n$  элементов.

Делаем еще один полностью аналогичный шаг и убеждаемся, что  $|E| \geq 6n$ .

Для того чтобы доказать, что ребер по крайней мере  $7n$ , начнем сначала, немного усложнив процедуру: теперь мы учтем,

что граф  $G$  – дистанционный граф на плоскости, т.е. ребрами соединены только пары вершин на расстоянии в 1 см друг от друга. Проведем почти ту же самую процедуру, что была описана выше; отличие будет только на первом шаге. Мы уже знаем, что каждая вершина из  $V \setminus Q_1$  имеет хотя бы одного соседа в  $Q_1$ . Давайте разобьем  $V \setminus Q_1$  на две части –  $W_1$  и  $W_2$ . В  $W_1$  будут те вершины, у каждой из которых ровно один сосед в  $Q_1$ , в  $W_2$  – те вершины, у каждой из которых не менее двух соседей. Если мы докажем, что  $|W_1| \leq 2n$ , то увидим, что на первом шаге вклад в  $|E|$  имеет величину не  $3n$ , как это было раньше, а по крайней мере  $4n$ . Это и даст нам в итоге оценку  $7n$ .

Предположим, что  $|W_1| > 2n$ . Тогда в  $Q_1$  есть вершина  $q$ , смежная с тремя вершинами  $x_1, x_2, x_3$  из  $W_1$ . Если между какими-то  $x_i$  и  $x_j$  нет ребра, то мы можем удалить  $q$  из  $Q_1$  и добавить к этому множеству обе вершины  $x_i$  и  $x_j$ . Получится множество, в котором нет ребер и у которого мощность строго больше  $Q_1$ . Значит, вершины  $x_1, x_2, x_3$  и  $q$  попарно соединены ребрами. Но полный граф на четырех вершинах нельзя реализовать отрезками длины 1 см на плоскости. Противоречие, и задача решена.

### 11 класс

1.  $1/203$  при  $a = 2$ ,  $b = 9$ ,  $c = 1$ .

2. Машинных куличей больше.

Пусть в песочнице в итоге оказалось  $m$  Машинных и  $n$  Пашиных куличей. Обозначим через  $S$  площадь основания ведерка. Так как все кулички имеют одинаковые высоты и одинаковые объемы, то площадь основания каждого конического куличка равна  $3S$  (из формул объемов цилиндра и конуса).

Площадь основания песочницы, с одной стороны, численно равна объему всего песка, т.е. суммарному объему  $2S(m+n)$  всех куличей, а с другой стороны, больше суммарной площади  $S_m + 3Sn$  оснований куличей, поскольку эти основания не пересекаются и, будучи кругами, не могут покрыть весь квадрат в основании песочницы. Итак,  $2S(m+n) > S_m + 3Sn$ , откуда  $m > n$ .

3. б) Преобразуем неравенство, которое нужно доказать, к равносильному:

$$\begin{aligned} x^2y + y^2z + z^2x &\geq xy^2 + yz^2 + zx^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2y - zx^2 + z^2x - xy^2 + y^2x - yz^2 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2(y-z) - x(y+z)(y-z) + yz(y-z) \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x^2 - x(y+z) + yz)(y-z) \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)(y-z)(z-x) \leq 0. \end{aligned}$$

Если среди чисел  $x$ ,  $y$  и  $z$  найдутся хотя бы два равных, то доказываемое неравенство обратится в верное равенство. Пусть теперь все эти числа попарно различны. Без ограничения общности можно считать, что наименьшим из них является  $x$ . Докажем, что тогда  $z < y$ .

Функция  $f(t) = t^{2010} + pt + q$  при всех  $t$  имеет производную  $f'(t) = 2010t^{2009} + p$ , причем  $f'(t) < 0$  при

$t < t_0 = \sqrt[2009]{-p/2010}$  и  $f'(t) > 0$  при  $t > t_0$ . Следовательно,

функция  $f(t)$  убывает при  $t < t_0$  и возрастает при  $t > t_0$ .

Если  $y \leq t_0$ , то  $x < y \leq t_0$  и  $y = f(x) > z = f(y)$ . Если же  $z > y \geq t_0$ , то  $x = f(z) > z = f(y) > t_0$ , что приводит к противоречию. Значит,  $x < z < y$  и  $(x-y)(y-z)(z-x) < 0$ .

*Комментарий.* Приведенное доказательство останется верным и при замене в нем функции  $f$  на любую другую функцию с монотонно неубывающей производной (такие функции называются выпуклыми), а всех строгих неравенств – на нестрогие. Поэтому при каждой такой функции  $f$  неравенство

$$x^2y + y^2z + z^2x \geq xy^2 + yz^2 + zx^2$$

будет верным и для любой тройки чисел  $x, y$  и  $z$ , связанных между собой равенствами  $y = f(x), z = f(y), x = f(z)$ . В частности, доказательство неравенства в пункте а) получается из доказательства пункта б) заменой  $f(t) = t^{2010} + pt + q$  на  $f(t) = t^2 + pt + q, f'(t) = 2010t^{2009} + p$  на  $f'(t) = 2t + p$  и  $t_0 = \sqrt[2009]{-p/2010}$  на  $t_0 = -p/2$ .

4. Во-первых, последовательно докажем, что описанная в условии задачи функция  $f$  принимает:

а) не более двух различных значений на любой прямой (проходящей через точку  $O$ ): действительно, если она на трех векторах одной прямой принимает разные значения, причем на векторе  $\vec{v}$  – наибольшее, а на некотором ненулевом (такой найдется) векторе  $\vec{u}$  – меньшее значение, то для некоторого числа  $\alpha$  получим противоречие

$$\vec{v} = \alpha \vec{u} \Rightarrow f(\vec{v}) = f(\alpha \vec{u} + 0 \cdot \vec{u}) \leq \max\{f(\vec{u}), f(\vec{u})\} = f(\vec{u});$$

б) не более трех различных значений на любой плоскости (проходящей через точку  $O$ ): действительно, если она на четырех векторах одной плоскости принимает разные значения, причем на векторе  $\vec{v}$  – наибольшее, а на некоторых неколлинеарных (такие, в силу предыдущего пункта, найдутся) векторах  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  – меньшие значения, то для некоторых чисел  $\alpha_1, \alpha_2$  получим противоречие

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 \Rightarrow f(\vec{v}) = f(\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2) \leq \max\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2)\};$$

в) не более четырех различных значений на всем пространстве: действительно, если она на пяти векторах принимает разные значения, причем на векторе  $\vec{v}$  – наибольшее, а на некоторых некопланарных (такие, в силу предыдущего пункта, найдутся) векторах  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  – меньшие значения, то для некоторых чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  получим противоречие

$$\begin{aligned} \vec{v} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_3 \vec{u}_3 &\Leftrightarrow f(\vec{v}) = f(\alpha_1 \vec{u}_1 + (\alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_3 \vec{u}_3)) \leq \\ &\leq \max\{f(\vec{u}_1), f(\alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_3 \vec{u}_3)\} \leq \\ &\leq \max\{f(\vec{u}_1), \max\{f(\vec{u}_2), f(\vec{u}_3)\}\} = \max\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), f(\vec{u}_3)\}. \end{aligned}$$

Во-вторых, приведем пример функции  $f$ , удовлетворяющей условию задачи и принимающей ровно четыре различных значения: введя в пространстве декартовы координаты с началом в точке  $O$ , определим

$$\vec{v} = (x, y, z) \Rightarrow f(\vec{v}) = \begin{cases} 0, & x = y = z = 0; \\ 1, & x = y = 0 \neq z; \\ 2, & x = 0 \neq y; \\ 3, & 0 \neq x. \end{cases}$$

5. Проведем  $AK, DL, MN$  и  $PQ$  – перпендикуляры к прямой  $BC$  (рис.25). Так как  $AM = MD$ , то  $KN = NL$ , а так как  $MB = MC$ , то  $BN = NC$ . Следовательно,  $KB = CL$ . Из прямоугольных треугольников  $AKB$  и  $BPC$  получаем

$$\cos \angle KBA = \cos \angle BPC = \frac{KB}{AB} = \frac{QP}{BP}.$$

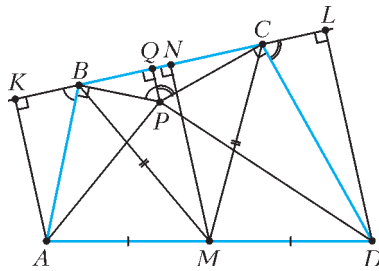


Рис. 25

Аналогично, из прямоугольных треугольников  $CLD$  и  $QPC$  получаем

$$\cos \angle LCD = \cos \angle CPQ = \frac{CL}{CD} = \frac{QP}{CP}.$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{QP}{KB} = \frac{BP}{AB} \quad \text{и} \quad \frac{QP}{CL} = \frac{CP}{CD},$$

т.е.  $\text{tg} \angle BAP = \text{tg} \angle CDP$ .

6. а) 1; б)  $[n/k]$ .

Комментарий. Эта задача появилась в результате коллективного обсуждения «фольклорной» задачи М2000.

### ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ МОСКОВСКОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

Первый теоретический тур

#### 7 класс

1.  $l = 10$  км.
2. См. рис.26, здесь  $R = 10$  м,  $\alpha = \arccos(3/4) \approx 41,4^\circ$ ;  $t_{\min} = 10$  мин 56 с.
3.  $\frac{1}{2} < \frac{v_2}{v_1} < 1$ .
4.  $V_{\min} = \frac{m}{\rho_2 - \rho_1} = 31,25 \text{ м}^3$ .

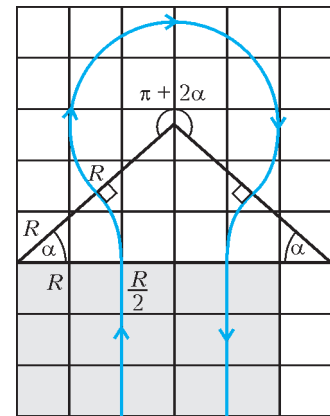


Рис. 26

#### 8 класс

1.  $t_{\min} \approx 15,7$  с.
2.  $F = \frac{Mg}{10} = 500$  Н.
3.  $F = \rho g HS + N_1 V_1 (\rho_1 - \rho) g = 16,8$  Н.
4.  $t = 60$  °С.

#### 9 класс

1.  $d = \frac{t}{4} \sqrt{v_0^2 + 2gh - \frac{g^2 t^2}{4}} \approx 4,4$  м.
2. Чаша опрокинется через время  $T = \frac{2hac}{v}$ , а затем будут происходить колебания: с периодом  $T$  вода будет сначала заливаться чашу, а потом выливаться из нее.
3.  $R = \frac{U_0}{I_0}, P_{\max} = I_0 U_0$ .

#### 10 класс

1. Ускорение равно  $a = \frac{2(M+m)}{M} g$  и направлено вертикально вверх.
2.  $t_{\max} = \frac{R\sqrt{5}}{v} \approx 90$  с,  $t_{\min} = \frac{R(19 + 2\sqrt{39})}{20v} \approx 63$  с.
3.  $k = \frac{\alpha}{1 - \alpha} = 1$ . 4.  $q_2 = 0, I = \frac{12\pi RU}{17\rho}$ .
5.  $P_n = \frac{9Pn}{(n+2)^2}$ .

#### 11 класс

1.  $t = \frac{5a\sqrt{5}}{3v}, u = 3v$ . 2.  $\Delta F = \frac{\Phi_0^2 Q^2 \sin^2(\pi/N)}{\pi^2 M N I^3}$ .
3.  $D = \frac{v\tau}{(a_0/a_1) - 1} = 1$  см.



Второй теоретический тур

## 8 класс

1.  $u = 2v = 10$  км/ч.      2.  $L \leq \frac{d(m+2M)}{M \sin \alpha} = 40$  см.
3.  $m_2 = \frac{m_1}{1 - (\rho_B/\rho_C)} \approx 1,15$  кг,  
 $m_{\text{л}} = \frac{m_1(\rho_B/\rho_C)}{2 \left(1 - \frac{\rho_B}{\rho_C}\right) \left(\frac{\rho_B}{\rho_{\text{л}}} - 1\right)} \approx 0,66$  кг.
4.  $t = \frac{c_a \rho_a x t_{\text{к}} + c_b \rho_b h_0 t_0}{c_a \rho_a x + c_b \rho_b h_0} = 5,6$  °С.

## 9 класс

1.  $0 < F \leq \frac{m_2 g}{2}$ ;  $-g < a \leq g \left(\frac{m_2}{2m_1} - 1\right)$ , где  $a > 0$  соответствует направлению вверх.
2.  $Q = \frac{L \rho m g h}{\rho} \approx 13$  кДж.
3. См. рис.27 и 28.

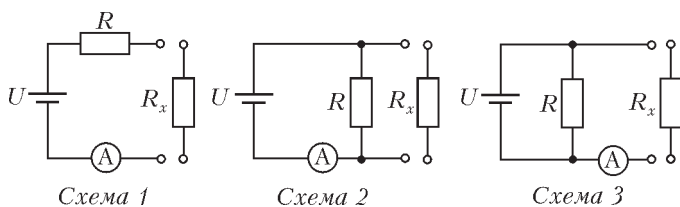


Рис. 27

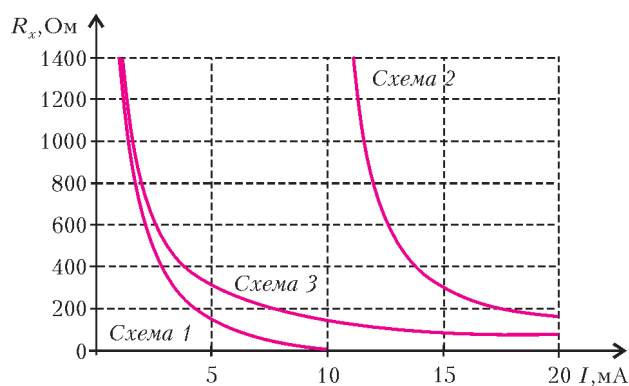


Рис. 28

## 10 класс

1.  $t = \sqrt{\frac{mL}{3F} \left(1 - \frac{\pi R}{L}\right)}$ , при этом «хвост» веревки еще не доедет до колонны.
2.  $T = m \left( g + \frac{v_1^2}{R} + \frac{(v_1 - v_2)^2}{L} \right)$ ,  
 $F = (m + M) \left( g + \frac{v_1^2}{R} \right) + m \frac{(v_1 - v_2)^2}{L}$ .
3.  $\eta = (1 - \alpha) \left( 1 - \frac{3(p_4 - p_1)V_1}{4p_2(V_3 - V_2)} \right) = 0,475 = 47,5\%$ ,  
 $N = \frac{q p V (1 - \alpha)}{t} \left( 1 - \frac{3(p_4 - p_1)V_1}{4p_2(V_3 - V_2)} \right) \approx 56,8$  кВт  $\approx 78$  л.с., где  
 1, 2, 3, 4 – точки цикла Дизеля.

4.  $R_{AB} = \frac{2}{\sqrt{3}} R$ .

## 11 класс

1.  $u = \frac{m}{M} \sqrt{\frac{2gH}{1 + (m/M)}}$ .
2.  $\eta = \frac{n^2 - 1}{4n^2 + 4n + 3} \approx 0,07 = 7\%$ .
3.  $R_{12} = \sqrt{2} R$ .
4.  $\beta = \arctg \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = 30^\circ$ .
5.  $L = F_1 + F_2 = 30$  см;  $a_2 = a_1 \left( \frac{F_2}{F_1} \right)^2 = 0,25$  мм и  
 $b_2 = b_1 \frac{F_2}{F_1} = 1$  мм или  $a_2 = a_1 \left( \frac{F_1}{F_2} \right)^2 = 4$  мм и  
 $b_2 = b_1 \frac{F_1}{F_2} = 4$  мм.

журнал ©  
Квант

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов,  
С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова,  
А.И.Черноуцан

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.В.Сумнина,  
П.И.Чернуцкий

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ  
по печати. Рег. св-во №0110473

## Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: 930-56-48

E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info,

phys@kvant.info

Сайт: kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени  
«Чеховский полиграфический комбинат»

142300 г.Чехов Московской области,

Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru

Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00

Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59

## КОЕ-ЧТО О ЛАДЬЯХ

В «Кванте» №4 за 2009 г. была опубликована следующая интересная задача А.Шаповалова – не столько шахматная, сколько на сообразительность.

*В углах доски стоят четыре ладьи. На каждом ходу ладья перемещается до упора в другую ладью или в край доски. Можно ли собрать все фигуры на четырех центральных полях?*

Поначалу кажется, что задание невыполнимо – ладьи все время будут находиться на краю доски. И все же задача имеет решение. В следующем номере журнала было показано, что фигуры собираются в центре доски за 42 хода (разумеется, за один ход ладья может передвигаться только по вертикали или горизонтали). Я предлагаю эту задачу разным шахматистам (в том числе математикам), и в результате они обнаружили более короткие решения. А рекорд в настоящее время составляет 29 ходов: ♖h8-h2, ♖a8-a2-g2, ♖h2-h8, ♖a1-a8-g8-g3, ♖g2-a2, ♖h8-a8-a3-f3, ♖g3-g8, ♖a2-a8-f8-f4, ♖f3-a3, ♖g8-a8-a4-e4, ♖h1-h8-a8-a4-d4, ♖e4-e8, ♖a3-a8-d8-d5, ♖f4-e4, ♖e8-e5, и ладьи заняли необходимые места – d4, d5, e4, e5. Может быть, кому-нибудь из читателей удастся еще улучшить рекорд?

Данная головоломка – хороший повод, чтобы рассмотреть еще ряд занятых задач, связанных с ладьями. Хорошо известно, что на доске  $8 \times 8$  можно расставить восемь ладей, не угрожающих друг другу (по не больше), причем существует 8! таких расстановок. Соответственно, на доске  $n \times n$  имеется  $n!$  расстановок  $n$  «мирных» ладей. Вот одно из многочисленных обобщений этой задачи.

*Сколькоми способами можно расставить восемь ладей на черных полях доски, чтобы они не угрожали друг другу?*

Перекрасим мысленно все черные поля в два цвета – красный и синий. При этом черные поля нечетных вертикалей сделаем красными, а четных – синими. В результате из восьми «мирных» ладей, стоящих на черных полях, четыре окажутся на красных полях, а остальные четыре – на синих. Красные поля образуют как бы отдельную доску  $4 \times 4$ , поэтому число расстановок ладей на них равно  $4! = 24$ . То же самое можно сказать и о синих полях. Значит, число всех расстановок равно  $24^2$ .

*На доске восемь ладей, не угрожающих друг другу. Докажите, что среди*

*парных расстояний между ними найдутся два одинаковых (расстояние измеряется между центрами полей, на которых расположены ладьи).*

Рассмотрим семь пар ладей, стоящих на соседних вертикалях. Разности координат по вертикали у этих пар равны одному из чисел от 1 до 7, поэтому либо две из них равны (и тогда расстояния в соответствующих парах ладей совпадают), либо среди них содержатся все числа от 1 до 7. В частности, есть две ладьи, отстоящие друг от друга на 2 по вертикали (и на 1 по горизонтали) – пара А. Аналогично, на соседних горизонталях либо найдутся две пары ладей с равным расстоянием, либо есть две ладьи, отстоящие друг от друга на 2 по горизонтали (и на 1 по вертикали) – пара В. Тогда расстояния между ладьями в парах А и В равны  $\sqrt{5}$ , т.е. они одинаковые, хотя сами пары различны.

Опытные читатели, конечно, сообразили, что эта задача – на тему принципа Дирихле: если в  $n$  клетках сидят  $n + 1$  кроликов, то найдется клетка, в которой не меньше двух из них.

Итак, расставить  $n$  мирных ладей на доске  $n \times n$  можно  $n!$  способами. А если допустить одну угрозу?

*Какое наибольшее число ладей можно расставить на доске  $n \times n$ , чтобы каждая из них находилась под ударом не более одной из остальных?*

Докажем, что это число не превышает  $4n/3$ . Пусть расставлено  $k$  ладей, удовлетворяющих условию. На всех занятых ими полях напишем сначала 0, а затем с каждой из  $n$  вертикалей последовательно сделаем следующую операцию. Если на ней стоят две

ладьи, то к каждому из двух соответствующих чисел прибавим 1, а если стоит одна ладья, то прибавим 2. Теперь ту же операцию сделаем последовательно с каждой из  $n$  горизонталей. В результате на  $k$  полях с ладьями будет записано число 3 или 4, и сумма  $s$  всех чисел не меньше  $3k$ . С другой стороны, поскольку на каждой вертикали и горизонтали мы добавили не более двух единиц,  $s$  не больше  $4n$ . Отсюда  $3k \leq s \leq 4n$ , и  $k \leq 4n/3$ . Таким образом, наибольшее число ладей не превосходит  $[4n/3]$ , причем эта оценка достижима. Так, для  $n = 8$  имеем  $[4n/3] = 10$ , соответствующее

расположение десяти ладей показано на рисунке 1,а, причем ладьи распределены на пять пар, и каждая угрожает только ладье своей пары.

Аналогичные рассуждения для обычной доски показывают, что и ферзей, обладающих тем же свойством – каждый под ударом не более одного, –

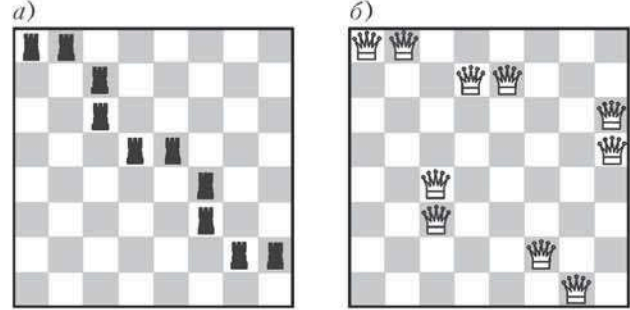


Рис.1

можно расставить не более десяти. Но можно ли ровно десять? Заменить ладей ферзями на рисунке 1,а не удастся, многие попадают под удар. Но есть другой вариант – рисунок 1,б (конечно, он годится и для ладей). Здесь десять ферзей тоже разбиты на пять пар. Для ферзей в общем случае задача не решена.

*Можно ли расставить на доске 16 белых и 16 черных ладей, чтобы на каждой вертикали, горизонтали и двух главных диагоналях ладей разного цвета было поровну? Можно ли так расставить 15 белых и 15 черных ладей?*

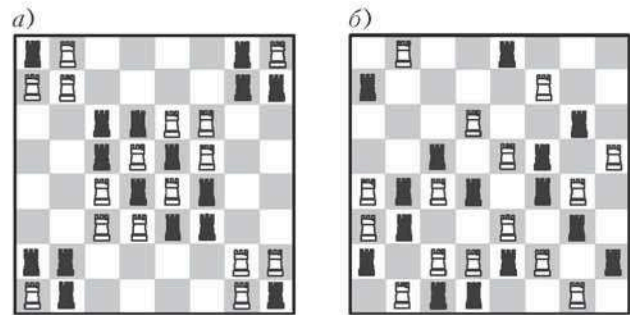


Рис.2

В первом случае необходимая расстановка показана на рисунке 2,а (на каждой вертикали и горизонтали стоят по две белые и черные ладьи, а на главных диагоналях – по четыре). Второй случай сложнее, но ответ тоже положительный (рис.2,б). Здесь на вертикалях и горизонталях доски стоит по одной, две или три белые и черные ладьи, а при этом на всех диагоналях ладей тоже поровну – по одной, две, три или... 0.

Е.Гук



# Уроки с физикой

## Влажные пятна от воды

Мы привыкли к тому, что первые капли дождя оставляют на асфальте и на одежде темные пятна. Эти пятна быстро высыхают, и если вода была чистая, то никаких следов не остается. Почему же чистая вода, пока не высохнет, кажется темной?

(Продолжение – на странице 38 внутри журнала)

# Уроки с физикой

