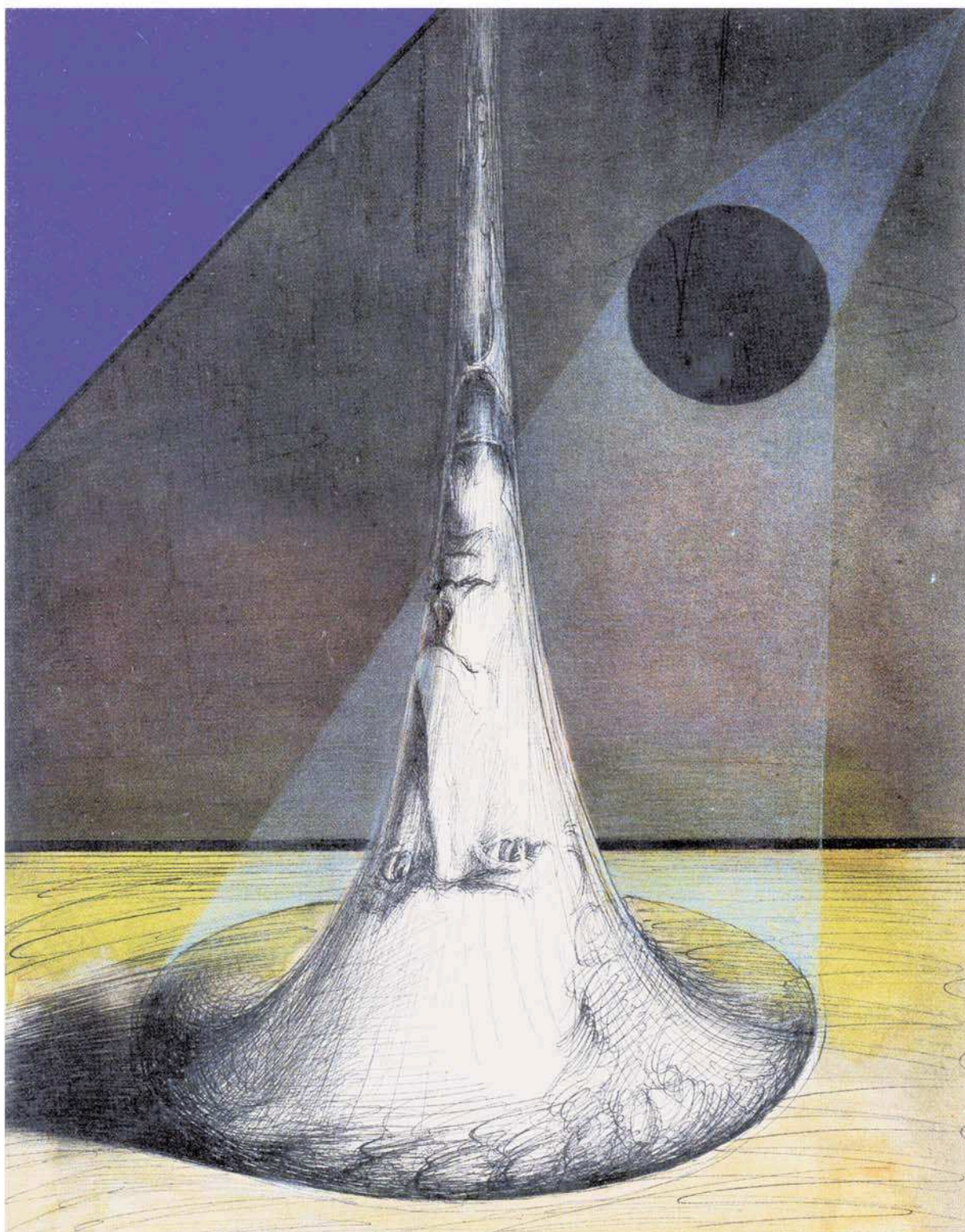


МАРТ/АПРЕЛЬ

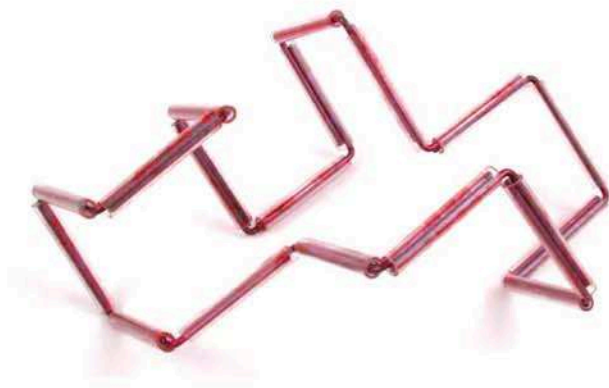
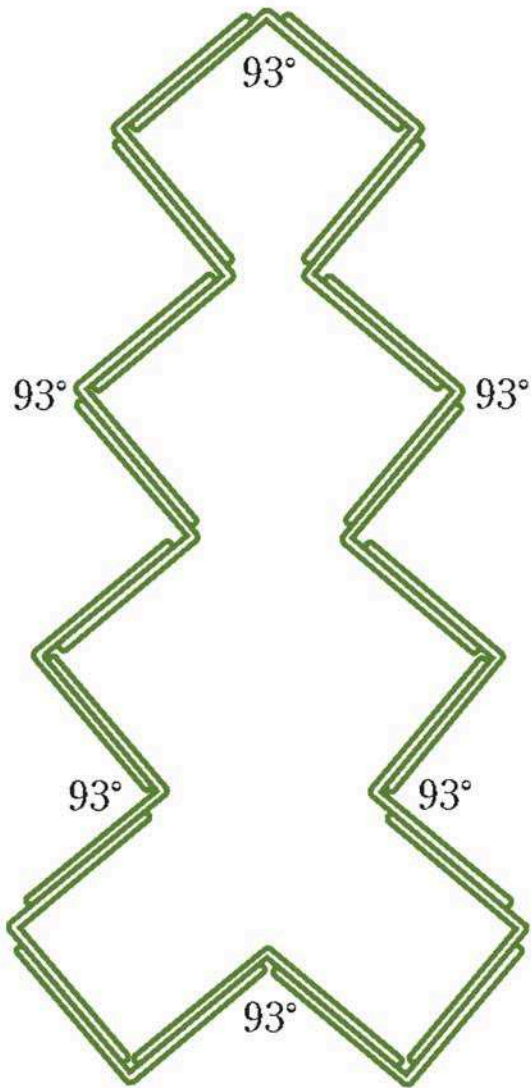
ISSN 0130-2221  
2010 · №2

# КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



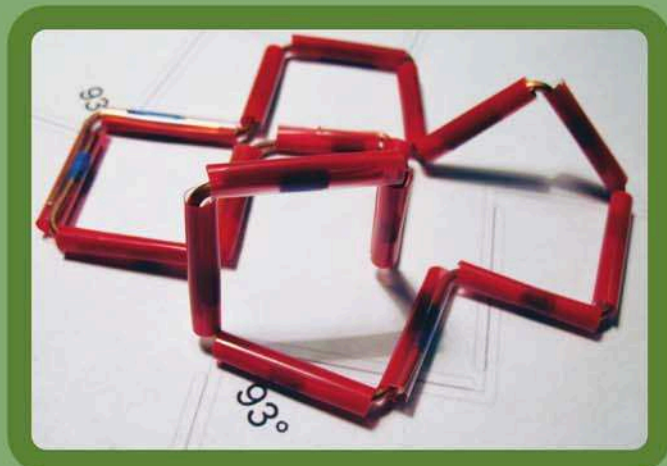
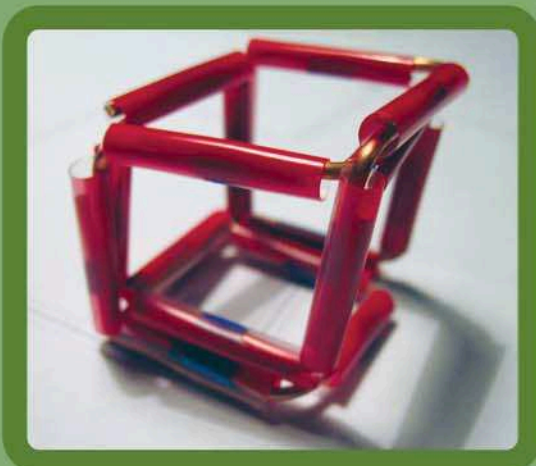




## «РАЗВЕРТКА» КУБА

Автор этой «развертки» – Х.Л.Нельсон (США). Головоломка была представлена на чемпионате мира среди изобретателей головоломок в 2009 году. Она состоит из 18 одинаковых кусочков проволоки. Шесть из них согнуты в середине под углом чуть больше 90 градусов, а остальные – под прямым углом. При помощи пластиковых трубочек кусочки соединяют так, чтобы получилась замкнутая плоская ломаная, изображенная на рисунке. Ваша задача – сложить из этой ломаной каркас куба. Желаем успеха!

Е.Епифанов



# Квант<sup>журнал</sup>©

МАРТ  
АПРЕЛЬ 2010 №2

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



Учредители — Российская академия наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна), ИФТТ РАН  
Издатель — ООО НПП ОО «Бюро Квантум»

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**С.С.Кротов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов, А.Н.Виленин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин, Н.П.Долбиллин (заместитель главного редактора), В.Н.Дубровский, А.А.Егоров, А.В.Жуков, А.Р.Зильберман, В.В.Кведер (заместитель председателя редколлегии), П.А.Кожевников, В.В.Козлов (заместитель председателя редколлегии), С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, В.М.Уроев, А.И.Черноуцан (заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков, В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков, Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**И.К.Кикоин**

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

**А.Н.Колмогоров**

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский, А.И.Маркушевич, М.Д.Миллионщиков, Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Товарный знак «Журнал «Квант» является собственностью ООО НПП ОО «Бюро Квантум»  
© 2010, РАН,  
Фонд Осипьяна, журнал «Квант»

- 2 Многогранный Делоне (окончание). *Н.Долбиллин*  
10 Что может электростатика. *К.Богданов*  
14 Геометрия звездного неба. *В.Протасов*

## НАНОТЕХНОЛОГИИ

- 23 Как рассмотреть нанообъект в оптический микроскоп. *А.Ежов*

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 26 Задачи M2169–M2175, Ф2175–Ф2182  
27 Решения задач M2146–M2152, Ф2160–Ф2167

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Цепные дроби вокруг нас

## К М Ш

- 36 Задачи  
37 Мыльные пузыри и хорды. *А.Шень*  
40 Тепловые явления глазами пассажира автобуса. *В.Котов*

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 42 Физики в тумане. *С.Варламов*

## НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

- 44 Синицы и ... физика

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 45 Об одной забытой задаче. *А.Толпыго*

## ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 49 Обтекание вращающихся тел. *С.Бетяев*

## ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 51 Задачи механики в неинерциальных системах отсчета. *В.Шутов*

## ОЛИМПИАДЫ

- 54 Региональный этап XXXVI Всероссийской олимпиады школьников по математике  
55 Региональный этап XLIV Всероссийской олимпиады школьников по физике  
58 Всероссийская студенческая олимпиада по физике

## ИНФОРМАЦИЯ

- 60 Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор»  
60 Заочная школа МИФИ  
61 Ответы, указания, решения

## НА ОБЛОЖКЕ

- I *Рисунок Ю.А.Ващенко*  
II *Коллекция головоломок*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогулки с физикой*



# Многогранный Делоне

Н.ДОЛБИЛИН

## Метод пустой сферы и триангуляции Делоне

Борис Николаевич Делоне был замечательным популяризатором науки. При этом он придерживался принципа: каждая популярная статья о математике должна содержать доказательство хотя бы одного утверждения. Мы последуем этому принципу и приведем с доказательствами основные идеи очень полезной геометрической теории – теории разбиений Делоне. Эта теория была изложена им в начале 20-х годов в работе «О пустой сфере». В ряде специальных случаев идея такого разбиения уже встречалась, например, в работах Вороного. Заслуга Бориса Николаевича состояла в том, что он с присущей ему ясностью и прозрачностью описал эту простую геометрическую конструкцию для весьма общего класса множеств. Мы сейчас объясним основные идеи этой науки – для простоты лишь на плоскости, хотя эта теория легко переносится на пространство любой размерности.

Рассмотрим на плоскости некоторое множество  $X$  точек. Точки множества  $X$ , чтобы отличать их от других точек плоскости, не принадлежащих  $X$ , будем именовать узлами. Предполагается, что множество  $X$  узлов удовлетворяет следующим двум условиям. Существуют два положительных числа  $r$  и  $R$ , такие что

(1) любой круг радиуса  $r$  содержит внутри себя не более одного узла из  $X$ ;

(2) любой круг радиуса  $R$  содержит внутри себя или на границе не менее одного узла из  $X$ .

Делоне назвал такое множество  $X$   $(r, R)$ -системой. Сейчас это, кстати не очень удачное, название сменилось на множество Делоне (с параметрами  $r$  и  $R$ ).

Понятно, что условия (1) и (2) эквивалентны условиям

(1') расстояние между узлами не менее  $2r$  и

(2') расстояние от любой точки плоскости до ближайшего к ней узла из  $X$  не превосходит  $R$ .

Довольно часто оказывается полезным еще одно эквивалентное определение множества Делоне. Будем рассматривать круги с центрами только в узлах из  $X$ . Тогда условия (1) и (2) можно переформулировать:

(1'') круги радиуса  $r$  с центрами в узлах из  $X$  попарно не перекрываются, т.е. образуют упаковку (рис. 1);

(2'') круги радиуса  $R$  с центрами в узлах из  $X$  покрывают всю плоскость, т.е. образуют покрытие.

Другими словами, любая точка плоскости принадлежит хотя бы одному из этих кругов.

Легко видеть, что в силу условия (2) число всех узлов во множестве Делоне бесконечно.

Заметим, что параметры  $r$  и  $R$  задаются неоднозначно: из условий (1) и (2) очевидно вытекает, что множество  $X$  удовлетворяет тем же условиям (1) и (2) при любых значениях  $r'$  и  $R'$ , если  $0 < r' \leq r$  и  $R' \geq R$ .

Теперь вслед за Борисом Николаевичем приступим к построению некоторого особого разбиения плоскости на многоугольники, однозначно связанного с множеством  $X$ .

Разбиение плоскости – термин несколько новый, хотя смысл этого термина тот же, что и у известного с детства события: разбивания стекла. Целое стекло разбивается на осколки, из которых можно составить целое, при этом отдельные осколки не налегают друг на друга.<sup>1</sup>

Разбиением плоскости на многоугольники называется множество многоугольников  $M_1, M_2$  и т.д., так расположенных на плоскости, что

(а) никакие два многоугольника не налегают друг на друга (условие упаковки), а

(б) многоугольники, взятые вместе, покрывают всю плоскость (условие покрытия).

Паркет на полу, кафельная плитка на стене, мозаика Пенроуза (рис.2) – все это ограниченные фрагменты разбиения (бесконечной) плоскости.

Изложим теперь идею «пустой сферы», принадлежащую Борису Николаевичу Делоне.

**0-й шаг.** Возьмем на плоскости, где расположено множество  $X$ , маленький кружок, скажем радиуса меньше  $r$ , который ни внутри, ни на границе не

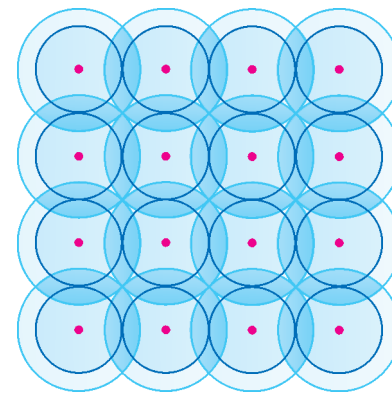


Рис. 1

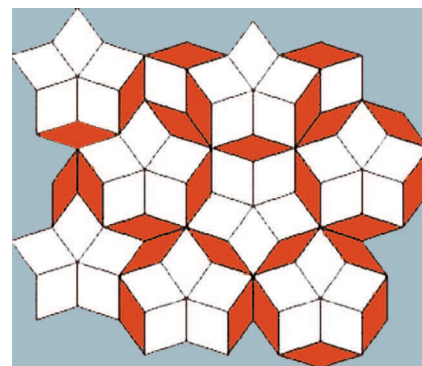


Рис. 2

Окончание. Начало см. в «Кванте» №1.

<sup>1</sup> Эта аналогия, как и любая аналогия вообще, далека от совершенства.



содержит узлов из  $X$ . Такой кружок существует, потому что расстояние между узлами не меньше  $2r$ .

**1-й шаг.** Оставляя центр  $O_1$  круга неподвижным, увеличиваем его радиус, оставляя его пустым от узлов внутри, до тех пор, пока граница раздуваемого круга не наткнется на какой-нибудь узел  $x$  из  $X$ . Такой момент обязательно наступит, так как по условию (2) радиус пустого круга не превышает  $R$  (рис.3).

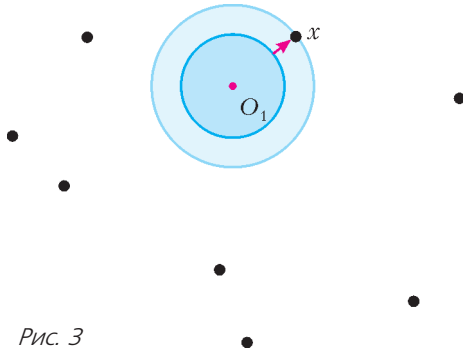


Рис. 3

**2-й шаг.** Теперь, не снимая круг с узла  $x$ , отодвигаем от узла  $x$  по прямой  $xO_1$  центр расширяющегося круга до тех пор, пока он не наткнется еще на один узел  $y$  (рис.4). Такой момент обязательно наступит вследствие опять же условия (2). Обозначим центр этого круга через  $O_2$ .

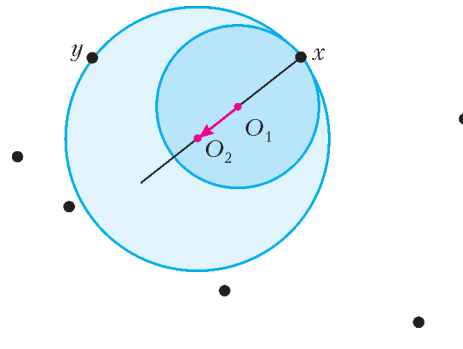


Рис. 4

**3-й шаг.** Не снимая круг с узлов  $x$  и  $y$ , будем удалять его центр от узлов  $x$  и  $y$  по срединному перпендикуляру к отрезку  $xy$ , пока расширяющийся круг не наткнется еще на один узел  $z$  (рис.5).

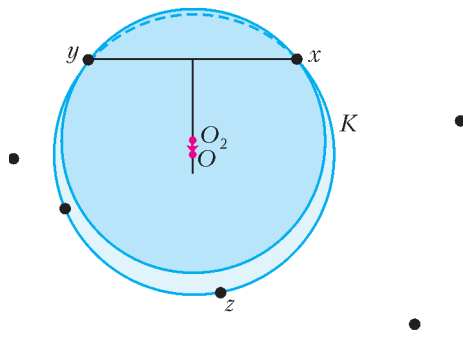


Рис. 5

На этом процесс расширения круга завершен. Обозначим окончательно полученный круг через  $K$ , а его центр – через  $O$ .

Заметим, что после третьего шага на граничной окружности круга расположено некоторое число  $k$  узлов,  $k \geq 3$ . Построим  $k$ -угольник с вершинами в данных  $k$  узлах (рис.6). Ясно, что этот многоугольник

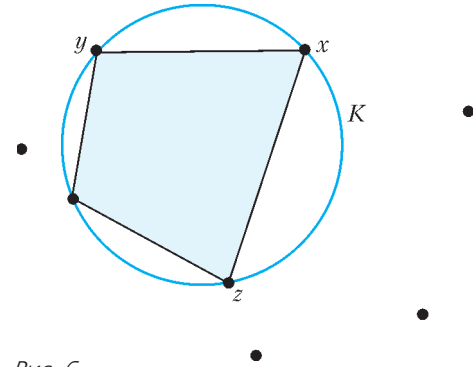


Рис. 6

вписан в круг, который других узлов из  $X$  ни внутри, ни на границе не содержит.<sup>2</sup>

*Многоугольник  $M$  назовем многоугольником Делоне для заданного множества  $X$  узлов, если его вершины – это узлы из  $X$  и он вписан в некоторый круг  $K$ , который ни внутри, ни на границе никаких других узлов, кроме вершин, не содержит.*

Полученный в результате описанной выше «четырёхходовки»  $k$ -угольник является многоугольником Делоне. Таким образом, множество многоугольников Делоне не пусто. Более того, нетрудно видеть, что, применяя «четырёхходовку» к маленьким кружкам, взятым в разных частях плоскости, можно получить бесконечно много многоугольников Делоне. Заметим, что любой узел из  $X$  является вершиной по крайней мере одного из многоугольников Делоне. Такой многоугольник можно построить посредством четырёхходовки, примененной к маленькому кругу, достаточно близко расположенному к данному узлу. Борис Николаевич доказал не очень сложную, но важную теорему:

**Теорема.** *Множество всех многоугольников Делоне для данного множества  $X$  узлов образует разбиение плоскости.*

**Доказательство.** Напомним, что множество узлов  $X$  удовлетворяет условиям (1) и (2). Докажем сначала, что никакие два многоугольника Делоне  $M_1$  и  $M_2$  не перекрываются, т.е. не имеют общих внутренних точек. Возьмем «пустые» круги  $K_1$  и  $K_2$ , описанные вокруг  $M_1$  и  $M_2$  соответственно. Никакой из этих кругов не содержится в другом, так как каждый из них внутри пуст от узлов из  $X$  и каждый из них содержит некоторое число узлов на границе.

Если круги  $K_1$  и  $K_2$  не перекрываются, то многоугольники  $M_1$  и  $M_2$ , в них содержащиеся, тем более не перекрываются. Пусть круги перекрываются по некоторой «линзе» (рис.7), составленной из дуги  $a_1$  первой окружности, входящей внутрь второго круга

<sup>2</sup> Внимательный читатель мог заметить, что уже на первом шаге расширяющийся круг мог наткнуться не на один, а на два, а то и большее количество узлов. Заметим, что в этом случае мы могли бы перейти с 1-го шага сразу к 3-му, а то и вообще могли бы получить окончательный круг  $K$ .

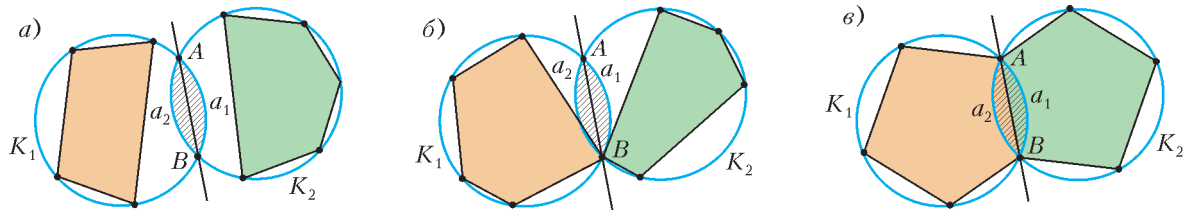


Рис. 7

$K_2$ , и, соответственно, из дуги  $a_2$  второй окружности, лежащей внутри круга  $K_1$ . Так как оба круга свободны от узлов внутри, то вершины многоугольников  $M_1$  и  $M_2$  лежат по разные стороны от хорды  $AB$ . На концах хорды либо нет узлов (см. рис.7,а), либо может быть один (см. рис.7,б) или два узла (см. рис.7,в). В первом случае многоугольники вовсе не пересекаются, во втором имеют общую вершину, а в третьем – общую сторону.

Докажем теперь, что многоугольники Делоне образуют покрытие. Докажем сначала, что к любому многоугольнику Делоне по каждой его стороне прилегает некоторый другой многоугольник Делоне. Возьмем сторону  $xy$  многоугольника  $M$ . «Снимем» круг  $K$  с узла  $z$  и, удаляя его центр от узла  $z$ , будем «протаскивать» его через узлы  $x$  и  $y$  (рис.8). Подчеркнем, что в процессе перемещения круг остается внутри пустым от узлов, а на его границе находятся лишь два узла  $x$  и  $y$ . Обязательно наступит такой момент (из-за условия (2)), когда круг  $K'$  с центром, перемещающимся по срединному перпендикуляру к хорде  $xy$ , наткнется на узел  $z'$ . Этот новый узел вместе, может быть, с другими узлами, оказавшимися на границе круга  $K'$ , лежит по другую сторону от хорды  $xy$  (в силу того, что другая дуга круга  $K'$  лежит внутри пустого круга  $K$ ). Узлы, лежащие на границе круга  $K'$  с центром  $O'$ , образуют многоугольник Делоне  $M'$ , который имеет с  $M$  общую сторону  $xy$ .

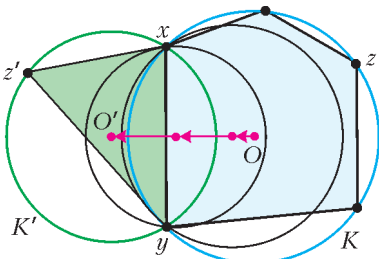


Рис. 8

Здесь может показаться очевидным, что если попарно не перекрывающиеся многоугольники прилегают друг к другу по каждой своей стороне, то они покрывают плоскость. На самом деле это не всегда так. Однако это верно, когда многоугольники расположены на плоскости так, что любой круг на плоскости пересекается лишь с конечным числом этих многоугольников. Множество многоугольников Делоне, построенных для множества  $X$ , именно таково (докажите это самостоятельно, опираясь на оба условия (1) и (2) множества  $X$  Делоне и на то, что многоугольник Делоне вписан в круг радиуса, не превосходящего  $R$ ).

Предположим, что некоторая точка  $P$  плоскости остается непокрытой ни одним многоугольником Делоне. Заметим, что, по вышесказанному, точка  $P$  не является узлом. Возьмем внутри какого-нибудь много-

угольника Делоне  $M_1$  точку  $Q$  и проведем отрезок  $PQ$ . При необходимости сдвинем немного точку  $Q$  так, чтобы она оставалась внутри  $M_1$ , но  $PQ$  не содержал ни одного узла из  $X$ . Это можно сделать, так как расстояние между узлами не меньше  $2r$ . Заметим также, что многоугольников Делоне, которые пересекаются с  $PQ$ , конечное число.

Двигаясь по отрезку  $PQ$  от точки  $Q$  к  $P$ , мы выходим из  $M_1$  через внутреннюю точку некоторой его стороны в прилегающий многоугольник Делоне  $M_2$ . Из многоугольника  $M_2$  переходим через внутреннюю точку некоторой его стороны в прилегающий  $M_3$  и т.д. В силу конечности числа многоугольников, пересекающихся с  $PQ$ , перед тем, как попасть в непокрытую точку  $P$ , мы должны были бы выйти из некоторого многоугольника через внутреннюю точку его стороны в непокрытую часть. Но это невозможно из-за доказанного выше прилегания к каждому многоугольнику Делоне по каждой его стороне другого многоугольника.

Итак, многоугольники Делоне не только не перекрывают друг друга, но и покрывают всю плоскость, т.е. образуют разбиение. Такие разбиения Борис Николаевич назвал  $L$ -разбиениями. Значение  $L$ -разбиений состоит прежде всего в том, что они тесно связаны с другим важным классом разбиений, задаваемых тем же множеством  $X$  узлов – разбиениями Вороного.<sup>3</sup>

### Разбиения Вороного

Итак, пусть дано множество узлов  $X$ , которое удовлетворяет условиям (1) и (2). Для узла  $x$  определим его «область влияния»  $V_x$ , которая, по определению, состоит из тех точек  $P$  плоскости, которые отстоят от узла  $x$  не далее, чем от других узлов:

$$V_x := \{P \mid |Px| \leq |Px'| \text{ для всех } x' \in X, x' \neq x\}. \quad (3)$$

Область  $V_x$  называется областью Вороного узла  $x$  относительно множества  $X$ . Очевидно, что область Вороного можно получить так. Соединим узел  $x$  с остальными узлами отрезками, к каждому отрезку  $xx'$  проведем срединный перпендикуляр и выделим ту из двух разделяемых им полуплоскостей, которая содержит узел  $x$  (рис.9). Ясно, что выделенная полуплоскость – это геометрическое место точек  $P$  с условием

<sup>3</sup> В то время эти разбиения назывались разбиениями Дирихле в честь немецкого математика Дирихле (1806–1859). Йохан Петер Густав Лёвен Дирихле (таково его было полное имя) использовал эти разбиения на плоскости и в пространстве в своих исследованиях по теории квадратичных форм. Позже, когда глубокие работы Георгия Феодосиевича Вороного (1868–1908) по теории таких разбиений нашли признание на Западе, их стали называть в честь Вороного.



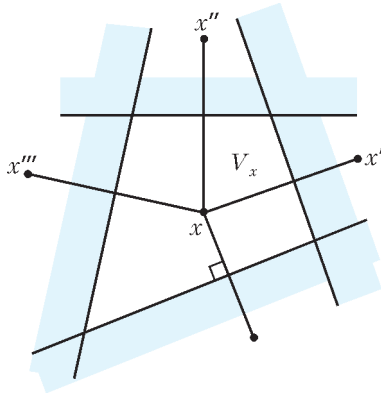


Рис. 9

$|Px| \leq |Px'|$ . Пересечение всех выделенных полуплоскостей, или, другими словами, множество всех точек, которые одновременно принадлежат всем выделенным полуплоскостям, – это геометрическое место точек, удовлетворяющих условию (3), т.е. это – область Вороного для узла  $x$ .

Сразу скажем, что в силу условия (2) для построения области Вороного для узла  $x$  вовсе не нужно брать все узлы  $x' \in X$  (их, кстати, бесконечно много), а только те, что отстоят от  $x$  не далее чем на  $2R$  (их, в силу условия (1), конечное число). Действительно, по условию (2) расстояние от узла  $x$  до наиболее удаленной точки  $P$  в  $V_x$  не превышает  $R$ .

Срединные перпендикуляры, проведенные к отрезкам  $xx'$ , где  $|xx'| \leq 2R$ , вырезают выпуклый многоугольник, который и есть область Вороного  $V_x$ . Никакие другие срединные перпендикуляры не пересекаются с  $V_x$  вовсе.

Действительно, для любой точки  $P$  на границе  $V_x$  найдется узел  $x'$ , такой что  $|xP| = |x'P| \leq R$ . По неравенству треугольника,  $|xx'| \leq |xP| + |Px'| \leq 2R$ . Поэтому срединные перпендикуляры к отрезкам  $xx'$ , если  $|xx'| > 2R$ , не задевают область Вороного вовсе.

Итак, для каждого узла  $x$  его область Вороного  $V_x$  есть выпуклый многоугольник. Заметим, что для точек  $P$  внутри области Вороного выполняются лишь строгие неравенства:  $|xP| < |x'P|$  для всех  $x' \in X$ ,  $x' \neq x$ . В то же время на границе некоторые неравенства обращаются в равенства.

**Теорема.** Множество всех областей Вороного  $V_x$ ,  $x \in X$ , образует разбиение плоскости.

Эта теорема почти очевидная, и читатель без труда сам может проверить, что множество областей Вороного покрывает всю плоскость и эти области попарно не имеют общих внутренних точек.

Разбиение Вороного как разбиение плоскости или пространства на «области влияния», играет огромную роль в практических задачах. Важность разбиения Делоне состоит в том, что оно дуально разбиению Вороного.

Дуальность этих разбиений означает следующую связь между ними. Любая вершина  $v$  в разбиении Вороного принадлежит нескольким областям Вороного, скажем,  $V_{x_1}, V_{x_2}, \dots, V_{x_k}$  и т.д. и, в силу определения области Вороного, вершина  $v$  равноудалена от их центров-узлов  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , и других более близких к этой вершине узлов нет. Это означает, что узлы  $x_1, x_2, \dots, x_k$  составляют вершины некоторого многоугольника Делоне.

Возьмем теперь ребро в разбиении Вороного, соединяющее две смежные вершины  $v_1$  и  $v_2$ . Оно разделяет

две области Вороного, пусть это будут  $V_{x_1}$  и  $V_{x_2}$ . Каждой из вершин, как мы видели, соответствуют многоугольники Делоне  $D_1$  и  $D_2$ . Каждый из этих многоугольников имеет в качестве вершин узлы  $x_1$  и  $x_2$ .

Поэтому отрезок  $x_1x_2$  будет ребром в разбиении Делоне, соответствующим ребру  $v_1v_2$  в разбиении Вороного. Более того, ребро  $v_1v_2$  лежит на срединном перпендикуляре к отрезку  $x_1x_2$ .

И, наконец, область Вороного  $V_x$  соответствует очевидным образом вершине разбиения Делоне – узлу  $x$ .

Подведем итог. Между множествами вершин, ребер и многоугольников в разбиении Вороного и множествами (взятыми в обратном порядке) многоугольников, ребер и вершин в разбиении Делоне существуют взаимно однозначные соответствия, как говорят, с сохранением инцидентностей. Например, если вершина  $v$  принадлежит ребру  $e$  в одном разбиении, то соответствующий вершине  $v$  многоугольник  $M'$  в другом разбиении содержит в качестве стороны ребро  $e'$ , соответствующее ребру  $e$ . Причем соответствующие друг другу ребра  $e$  и  $e'$  должны быть перпендикулярны друг другу, но, заметим, не обязаны пересекать друг друга.

В заключение отметим, что разбиения Делоне и Вороного обладают многими замечательными свойствами и оба имеют очень широкое применение.

### История названия «разбиение Делоне»

Ниже – любопытная история о том, почему эти разбиения, которые Борис Николаевич, а вслед за ним и его студенты, называли  $L$ -разбиениями, теперь получили (к сожалению, после его смерти) название «разбиения Делоне».

Однажды в конце 1950-х годов Борису Николаевичу попала в руки статья одного из крупнейших геометров XX века, канадского математика Гарольда Кокстера. В этой статье Кокстер ввел и использовал  $L$ -разбиения без упоминания соответствующей работы Делоне. Борис Николаевич написал Кокстеру пись-



Б.Делоне (второй справа) и Г.Кокстер (четвертый справа). Крайний справа – С.С.Рышков. Международный конгресс математиков, Москва, МГУ, август 1966 года

мо, в котором, по словам самого Делоне, он сообщил о том, что эти разбиения им были изучены еще в 1920-е годы. В 1924 году Делоне попросил академика В.А.Стеклова<sup>4</sup>, который направлялся на международный конгресс математиков в Торонто, доложить его, Делоне, работу. Позднее, в 1928 году, эта работа была опубликована в трудах конгресса. При этом в письме Борис Николаевич не преминул упомянуть, что конгресс проходил в родном городе Кокстера, в Торонто. Ответ Кокстера был очень корректен. Он нашел в материалах математического конгресса 1924 года упоминание о работе Делоне. Кокстер в письме просил Делоне извинить его, тем более что в 1924 году он, Кокстер, был столь юн, что еще, опять же со слов Бориса Николаевича, «ходил под стол в коротких штанишках». Тогда же Кокстер написал в Кембридж профессору К.А.Роджерсу, который заканчивал свою ставшую своего рода математическим бестселлером книгу «Укладки и покрытия». Роджерс вставил в книгу упоминание о разбиении Делоне. Скорее всего, термин – разбиение Делоне (в вычислительной геометрии – триангуляции Делоне) – впервые появился именно в этой книге. В 1980-е годы он стал распространенным на Западе, откуда в конце прошлого века пришел в Россию.

В 1990-е мне довелось встречаться с профессором Кокстером и выступать у него на семинаре в Торонтском университете. Я попросил мэтра рассказать об этой истории. Кокстер в целом подтвердил историю, рассказанную Борисом Николаевичем, за исключением «ходьбы под стол в коротких штанишках». В 1924 году Кокстеру (1907–2003) было уже 17 лет. А фраза о «ходьбе под стол» была характерным для Бориса Николаевича проявлением экспрессии и юмора – качеств, которыми Делоне обладал сполна.

<sup>4</sup> Владимир Андреевич Стеклов (1864–1926) – знаменитый российский математик, академик. В 1920-е годы организовал Физико-математический институт Академии наук и был первым его директором. Позднее, в 1934 году, этот институт разделился на два академических института: Математический институт им.В.А.Стеклова и Физический институт им. П.Н.Лебедева.

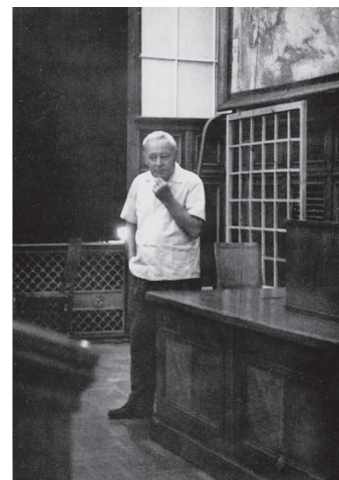
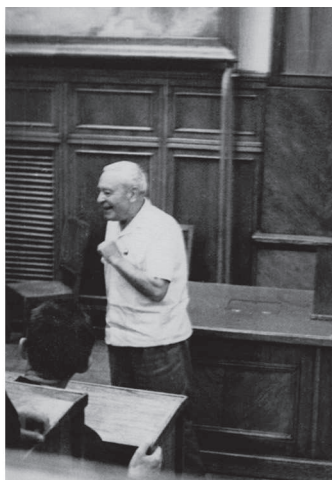
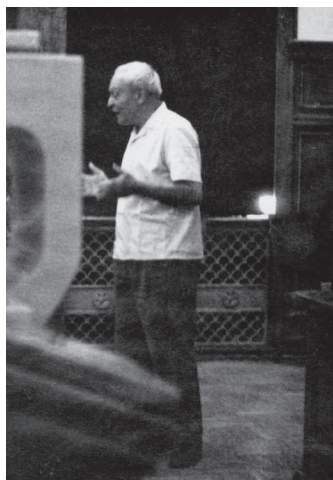
### Ленинградский период (1922–1934)

Работа о разбиениях пространства обозначила сдвиг исследований в сторону геометрии. Он был постепенным и естественным. Определенную роль здесь сыграло соприкосновение при исследовании неопределенных уравнений с работами Вороного. Но основная причина геометризации исследований Бориса Николаевича заключалась в нем самом, в его исключительно образном, художественном восприятии мира.

Характерно, что Борис Николаевич не жалел сил и времени на то, чтобы довести понимание уже законченного математического результата до уровня, на котором результат оформлялся бы в геометрический образ. «Что это означает попросту?» – любимый вопрос, который он задавал и себе и коллегам всякий раз, когда обсуждалась очередная работа.

Признание научных заслуг не заставило себя долго ждать: в 1929 году Б.Н.Делоне выбирают в члены-корреспонденты Академии наук. К этому моменту он уже 7 лет профессорствует в Ленинградском университете. Его предельно ясные и продуманные лекции вызывают большой интерес у студентов. Популярность его была столь велика, что на первых лекциях его специальных (факультативных) курсов собиралось несколько сотен студентов, желавших увидеть легендарного лектора.

Надо сказать, что Делоне никогда не упускал возможности рассказать студентам о трудной нерешенной проблеме. Борис Николаевич руководствовался известным принципом, принадлежащим, кажется, Плутарху: «Ученик – не сосуд, который нужно наполнить, а факел, который нужно зажечь». А зажечь может тот, кто сам горит. Высокий научный авторитет, преданное и вместе с тем эстетическое отношение к науке, личное обаяние – все это притягивало к нему молодых людей. Неудивительно, что у него было много учеников, среди которых несколько выдающихся математиков: академики Александр Данилович Александров (1912–1999) и Игорь Ростиславович Шафаревич (1923 г.р.), член-корреспондент Академии наук Дмитрий Константинович Фаддеев (1907–1989).



Б.Н.Делоне читает лекцию





А.Д.Александров

Весной 1934 года в Ленинграде Борис Николаевич организовал первую школьную олимпиаду по математике, с которой начались математические олимпиады в нашей стране. Участники первой ленинградской олимпиады еще долго потом вспоминали, какое ошеломляющее впечатление произвели на них встречи с Б.Н.Делоне (см., например, «Квант» №9 за 1984 г., с.52).



Б.Н.Делоне и И.Р.Шафаревич (конец 1940-х годов)

### Московский период (1934–1980)

В 1934 году в Ленинграде был образован Математический институт им.В.А.Стеклова, в котором Борис Николаевич работал с момента основания. До 1960 года он заведовал отделом алгебры, а затем до конца жизни отделом геометрии. Вскоре после создания Математического института (точнее большая его часть) переводится вместе с другими ведущими научными учреждениями Академии наук в Москву. С 1935 года Делоне работает профессором в Московском университете, в течение многих лет руководит кафедрой геометрии, теперь это – кафедра высшей геометрии и топологии на мехмате. В МГУ он создает весьма оригинальный курс аналитической геометрии, выделявшийся исключительным богатством геометрических идей. В этом нетрудно убедиться, открыв двухтомник по аналитической геометрии, написанный им в соавторстве с Д.Е.Райковым. Студенты, имевшие счастье слушать его лекции, вряд ли подозревали, что за их великолепием скрывалась тщательнейшая подготовка. На подготовку двухчасовой лекции у него уходило два полных дня, в дальнейшем – день. Он отшлифовывал каждую идею, каждый рисунок. И, как следствие, во

время лекции на доске легко и быстро появлялись четкие додекаэдры и икосаэдры, элегантные параболоиды и гиперболоиды, симпатичные «аффинные коты», которых он ввел в свой курс аналитической геометрии для иллюстрации того, что происходит с фигурой при аффинном преобразовании.

У студентов мехмата МГУ одно время была в моде серия весьма остроумных анекдотов о своих профессорах на тему: «Кто (из профессоров) в чем варит суп?» По студенческой версии, не лишенной иронии, Борис Николаевич варил суп в  $n$ -мерной решетке<sup>5</sup>: суп, правда, вытекал, зато оставалась геометрическая наглядность.

Борис Николаевич был начисто лишен какого-либо резонерства, занудства. Приведу эпизод, о котором мне рассказал Н.Я.Виленкин, учившийся у Делоне. Однажды Борис Николаевич появился на лекции с одним-то злым выражением лица и начал строить неприятные гримасы и даже рычать. Студенты, привыкшие видеть Делоне всегда слегка хитро улыбающимся, были ошеломлены: что случилось с Борисом Николаевичем? Это продолжалось секунд десять-пятнадцать, а затем гримаса исчезла, все увидели знакомую улыбку и услышали объяснение случившемуся: «По дороге к вам встретил вашего куратора. Она мне очень жаловалась на вас, пропускаете занятия, многие не сдали коллоквиумы и т.д., и очень просила вас поугать...»

Относительно научной работы в московский период назову лишь некоторые основные направления, в которых Борис Николаевич упорно работал и получил важные результаты. Это – прежде всего геометрия положительных квадратичных форм и ее приложения к теории так называемых решетчатых покрытий и упаковок пространства. Были получены принципиально новые результаты в теории правильных и кристаллографических разбиений многомерного пространства, а также в геометрии чисел. Ряд результатов 1960–70 годов был получен совместно с коллегами и учениками.

Б.Н.Делоне был выдающимся популяризатором математики и вообще науки. Его популярные лекции, рассчитанные на широкую аудиторию, собирали сотни слушателей. У него были заранее заготовленные «экспромты» – приемы, при помощи которых он делал лекцию живой, увлекательной и незабываемой. Например, в 1940-е годы он несколько раз читал лекцию на тему «Теорема Н.Е.Жуковского о поддерживающей силе крыла самолета». Свою лекцию в знаменитой Большой аудитории Политехнического музея в Москве перед несколькими сотнями собравшихся Борис Николаевич начинал так.

Б.Н.: «Вы, наверное, знаете знаменитого математика академика Павла Сергеевича Александрова<sup>6</sup>?»

Отдельные голоса: «Да, конечно».

<sup>5</sup> Решетка здесь означает множество точек с целыми координатами.

<sup>6</sup> П.С.Александров (1896–1982) – выдающийся математик, один из создателей отечественной топологической школы, академик, профессор мех-мата МГУ.



Б.Н.: «А знаете ли вы, что знаменитый математик академик Александров никогда не летает самолетом?»

Легкий гул, аудитория недоумевает.

Б.Н.: «А знает ли вы, почему академик Александров боится летать самолетами?»

Гул нарастает.

Б.Н. (с хитрой улыбкой) завершает: «Академик Александров никогда не летает самолетами, потому что не знает теоремы Жуковского. А я вот знаю и летаю много. Сегодня я познакомлю вас с этой теоремой, и вы никогда не будете бояться полетов».

К этому моменту аудитория «разогрета» и готова слушать рассказ о такой важной теореме.



Вершина Белуха и пик Делоне

### Не только наука

Среди многочисленных нематематических увлечений Бориса Николаевича особое место занимал альпинизм. Это, бесспорно, самое сильное увлечение прошло через всю жизнь. Зародилось оно, как уже говорилось, в детские годы во время летних выездов семьи в Швейцарию. В альпинизме его особенно влекла красота далеко открывающихся панорам, геометрически выразительных силуэтов хребтов и пиков. И, конечно, азарт победить высоту во что бы то ни стало. Занимался альпинизмом он вполне профессионально. В Альпах он еще в 1910 году поднялся на вторую по высоте после Монблана, но технически несложную вершину Монте-Роза.

Затем был Кавказ с многочисленными сложными восхождениями, в том числе и первовосхождениями. Но особенно Борис Николаевич любил Алтай. В 1926 году бывал и на горе, теперь носящей его имя. Пик Делоне находится на плече, ведущем на высшую вершину Алтая – Белуху. Путешествуя по Алтаю вместе И.Е.Таммом<sup>7</sup>, они открыли изумительное по красоте место: озеро Шавло, в чистой воде которого отражались две покрытые снегами великолепные вершины. Одну из них Делоне назвал *Красавицей*, другую Тамм назвал *Сказкой*. По мнению Делоне, красота этого места превосходит все знаменитые места в Альпах. В наше время маршрут к Красавице и Сказке – один из самых привлекательных на Алтае.

В 30-е – 40-е годы прошлого века Борис Николаевич активно занимался организацией массового альпинизма в нашей стране. Летом 1931 года он организовал на Кавказе первый в стране альпинистский лагерь для

рабочих ленинградского путиловского завода и проводил в нем занятия по технике альпинизма, вместе с инструкторами анализировал восхождения. В 1934 году ему было присвоено звание мастера альпинизма. В это время альпинизм становился массовым видом спорта, и стало необходимым создать систему класси-



Нижнее Шавлинское озеро и белоснежные вершины Сказка и Красавица

<sup>7</sup> Игорь Евгеньевич Тамм (1895–1971) – выдающийся физик-теоретик, лауреат Нобелевской премии (1958).



фикации спортивных достижений. Делоне разработал принципы классификации горных восхождений (пять ступеней) и в соответствии с ними расклассифицировал более 200 маршрутов на вершины Кавказа, Средней Азии и Алтая. В 1938 году написал первый путеводитель для альпинистов «Вершины Западного Кавказа» (часть Кавказского хребта, расположенная к западу от Эльбруса). В нем описаны несколько десятков основных вершин этого района и пути восхождений на них. Описание сопровождалось рисунком каждой вершины вместе с кроками восхождения на нее. В книге на вклейке была помещена панорама всего западно-кавказского хребта, которую сделал Борис Николаевич, перемещаясь с вершины на вершину на параллельном хребте.

С возрастом на смену альпинистским восхождениям пришли туристские походы. Не прогулки на 5–10 километров, а именно настоящие 30–40-километровые походы, иногда очень трудные, проходившие неизменно по самым красивым местам Подмосковья. Борис Николаевич был физически исключительно закаленным человеком. И все равно было не по себе наблюдать в конце зимы быстро идущего с рюкзаком обнаженного по пояс пожилого человека. Падающий снег таял и, стекая по седой голове, застывал в виде крупных сосулек.

Борис Николаевич очень любил природу и восторгался ее красотой всегда молча, словно стараясь впитать в себя все и вся. Его восхищение невольно передавалось спутникам. Общение с природой походило на таинство, и ему было неприятно, хотя он и не подавал виду, когда это таинство нечаянно нарушалось чьими-то разговорами. Зато у костра или в электричке его спутники становились слушателями многочисленных историй, одна другой интересней. Рассказчиком Б.Н.Делоне был замечательным... «Вы, конечно, не знаете, что моя сестра святая (пауза, лукавый взгляд рассказчика, недоумение слушателей). Да-да, совершенно серьезно, святая...»

...Дальше начинался интереснейший рассказ о двоюродной сестре и подруге детства Елизавете Пиленко (в замужестве Кузьмина-Караваева), поэтессе (ее стихи высоко ценил Александр Блок). После революции 1917 года она эмигрировала во Францию, стала монахиней (мать Мария – таково было монашеское имя, так же назывался у нас художественный фильм, посвященный ей). Во время оккупации Франции фашистами мать Мария вступила в ряды Сопротивления, была арестована и погибла в немецком концлагере. После войны была официально канонизирована католической церковью.

### «Вечер жизни»

В приветственном адресе по случаю 80-летия Германская академия естествоиспытателей «Леопольдина» пожелала члену этой академии Б.Н.Делоне «спокойного вечера жизни». «Вечер жизни» продолжался десять лет. В эти годы он вместе со своими учениками получил важные результаты по теории оптимальных покрытий пространства шарами, по локальной теории так назы-

ваемых правильных структур, являющихся своего рода математическими моделями кристаллов.

Борис Николаевич был главой и опорой большой семьи. Он очень любил своих внуков, которые обожали своего деда. Борис Николаевич заботился о них, но особенно он беспокоился за судьбу старшего внука – Вадика. Вадим Делоне (см. <http://vadim-delaunay.org>), талантливый поэт, красавец, обладал нежным сердцем и отзывчивой душой. В 18 лет стал диссидентом, правозащитником. В 19 лет был осужден за организацию политической демонстрации в Москве. Через год после освобождения, 25-го августа 1968 года, вышел в составе знаменитой «семерки» на Красную площадь в знак протеста против введения советских войск в Чехословакию. За лозунг «За вашу и нашу свободу», который он держал в течение нескольких секунд, Вадим получил 3 года «несвободы». Борис Николаевич делал все, чтобы облегчить судьбу внука. Собирал подписи известных людей в защиту Вадима, с этими письмами посещал «высочайшие» кабинеты на Лубянке. Уже после суда ездил к нему, как только получал разрешение, на свидание в лагерь на севере Тюменской области.

Другим объектом особой заботы была жена, которая долго болела и нуждалась в уходе. После отъезда Вадима за границу и смерти жены он, уже 86-летний, «бросился во все тяжкие»: работа, лекции, поездки, два похода в неделю по 20–40 км каждый. В один из наиболее активных дней его постиг удар: инсульт, почти полная потеря речи, памяти, ограниченная подвижность. Принимая во внимание возраст, врачи были предельно скупы в оценке перспектив. Однако Борис Николаевич начинает бороться за полноценную жизнь и одерживает последнюю, но, может быть, самую важную победу в жизни (не без помощи своих близких, учеников и коллег). У него восстанавливаются утерянные функции, и он возвращается к настоящей жизни. Разумеется, длинные походы сменились прогулками «всего» на какие-то 10–15 километров, и не по глухим лесам, а по местам с «индустриальным пейзажем», и не дважды, а только раз в неделю. Конечно, работоспособность не была столь высокой, но это была полноценная яркая жизнь.

Однако «вечер жизни» подошел к своей естественной границе. Никогда не забуду, как однажды серым мартовским днем (это было месяца за четыре до конца) Борис Николаевич достал из книжного шкафа книгу и прочитал одно замечательное место у Пуанкаре.

Дыхание от волнения прерывалось, голос дрожал: «... жизнь есть лишь беглый эпизод между двумя вечностями смерти и... в этом эпизоде прошедшая и будущая длительность сознательной мысли – не более чем мгновение. Мысль – только вспышка света посреди долгой ночи. Но эта вспышка – все».



# Что может электростатика

К. БОГДАНОВ

*...Все предсказания электростатики следуют из двух ее законов. Но одно дело высказать эти вещи математически, и совсем другое - применять их с легкостью и с нужной долей остроумия.*

Ричард Фейнман

**Э**ЛЕКТРОСТАТИКА ИЗУЧАЕТ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ неподвижных зарядов. Ключевые эксперименты электростатики были проведены в XVII – XVIII веках. С открытием электромагнитных явлений и той революции в технологиях, которые они произвели, интерес к электростатике на некоторое время был утерян. Однако современные научные исследования показывают огромное значение электростатики для понимания многих процессов живой и неживой природы.

## Электростатика и жизнь

В 1953 году американские ученые С.Миллер и Г.Юри показали, что одни из «кирпичиков жизни» – аминокислоты – могут быть получены путем пропуска электрического разряда через газ, близкий по составу первобытной атмосфере Земли, состоящей из метана, аммиака, водорода и паров воды. В течение последующих 50 лет другие исследователи повторили эти опыты и получили те же результаты. При пропускании коротких импульсов тока через бактерии в их оболочке (мембране) появляются поры, через которые внутрь могут проходить фрагменты ДНК других бактерий, запуская один из механизмов эволюции. Таким образом, энергия, необходимая для зарождения жизни на Земле и ее эволюции, действительно могла быть электростатической энергией разрядов молний (рис. 1).



Рис. 1. Разряд молнии

## Как электростатика вызывает молнии

В каждый момент времени в разных точках Земли сверкает около 2000 молний, в каждую секунду примерно 50 молний ударяют в Землю, каждый квадратный километр поверхности Земли поражается молнией в среднем шесть раз в году. Еще в XVIII веке Бенджамин Франклин доказал, что молнии, бьющие из грозовых облаков, это электрические разряды, переносящие на Землю *отрицательный* заряд. При этом каждый из разрядов снабжает Землю несколькими десятками кулонов электричества, а амплитуда тока при ударе молнии составляет от 20 до 100 килоампер. Скоростная фотосъемка показала, что разряд молнии длится лишь десятки доли секунды и что каждая молния состоит из нескольких более коротких.

С помощью измерительных приборов, установленных на атмосферных зондах, в начале XX века было измерено электрическое поле Земли, напряженность которого у поверхности оказалась равной приблизительно 100 В/м, что соответствует суммарному заряду планеты около 400000 Кл. Переносчиком зарядов в атмосфере Земли служат ионы, концентрация которых увеличивается с высотой и достигает максимума на высоте 50 км, где под действием космического излучения образовался электропроводящий слой – ионосфера. Поэтому можно сказать, что электрическое поле Земли – это поле сферического конденсатора с приложенным напряжением около 400 кВ. Под действием этого напряжения из верхних слоев в нижние все время течет ток силой 2–4 кА, плотность которого составляет  $(1-2) \cdot 10^{-12} \text{ А/м}^2$ , и выделяется энергия до 1,5 ГВт. И если бы не было молний, это электрическое поле исчезло бы! Получается, что в хорошую погоду электрический конденсатор Земли разряжается, а при грозе – заряжается.

Грозовое облако – это огромное количество пара, часть которого сконденсировалось в виде мельчайших капелек или льдинок. Верх грозового облака может находиться на высоте 6–7 км, а низ – нависать над землей на высоте 0,5–1 км. Выше 3–4 км облака состоят из льдинок разных размеров, так как температура там всегда ниже нуля. Эти льдинки находятся в постоянном движении, вызванном восходящими потоками теплого воздуха, поднимающегося снизу от нагретой поверхности земли. Мелкие льдинки легче, чем крупные, и они увлекаются восходящими потоками воздуха и по дороге все время сталкиваются с крупными. При каждом таком столкновении происходит электризация, при которой крупные льдинки заряжаются отрицательно, а мелкие – положительно. Со временем положительно заряженные мелкие льдинки собирают-



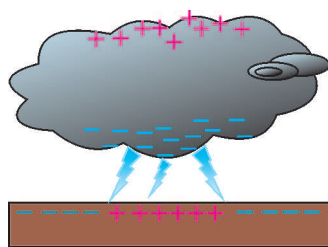


Рис. 2. Схематическое изображение разделения электрических зарядов в грозовом облаке и появления положительных зарядов на земле под облаком (вследствие электростатической индукции) перед разрядом молнии

грозовой тучи перетекает на Землю.

Характерно, что перед грозой напряженность электрического поля Земли может достигать 100 кВ/м, т.е. в 1000 раз превышать ее значение в хорошую погоду. В результате во столько же раз увеличивается положи-

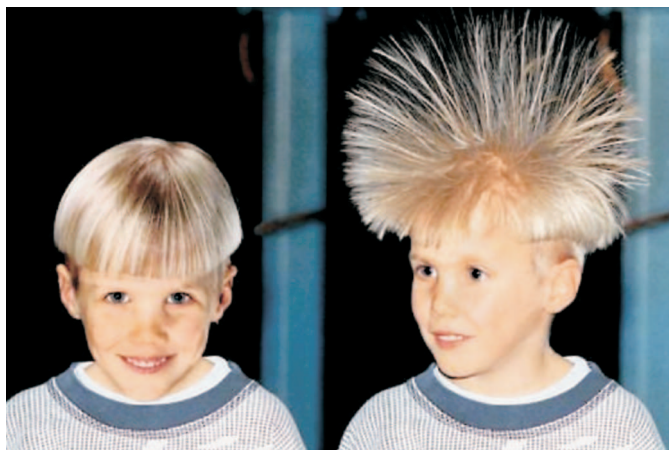


Рис. 3. Как встают волосы в сильном электрическом поле

тельный заряд каждого волоска на голове человека, стоящего под грозовой тучей, и они, отталкиваясь друг от друга, встают дыбом (рис.3).

### Фульгурит – след молнии на земле

При разряде молнии выделяется энергия порядка  $10^9 - 10^{10}$  Дж. Большая часть этой энергии тратится на гром, нагрев воздуха, световую вспышку и излучение других электромагнитных волн, и только маленькая часть выделяется в том месте, где молния входит в землю. Но и этой «маленькой» части вполне достаточно, чтобы вызвать пожар, убить человека или разрушить здание. Молния может разогревать канал, по которому она движется, до  $30000\text{ }^\circ\text{C}$ ,



Рис. 4. Фульгуриты, найденные автором статьи в районе Крылатское (Москва); для масштаба на том же фото показана пятирублевая монета

ся преимущественно в верхней части облака, а отрицательно заряженные крупные – внизу (рис.2). Другими словами, верхушка облака заряжается положительно, а низ – отрицательно. При этом на земле непосредственно под грозовым облаком наводятся положительные заряды. Теперь все готово для разряда молнии, при котором происходит пробой воздуха и отрицательный заряд с нижней части

что гораздо выше температуры плавления песка ( $1600 - 2000\text{ }^\circ\text{C}$ ). Поэтому молнии, попадая в песок, плавят его, а раскаленный воздух и водяные пары, расширяясь, формируют из расплавленного песка трубку, которая через некоторое время застывает. Так рождаются фульгуриты (громовые стрелы, чертовы пальцы) – полые цилиндры, сделанные из оплавленного песка (рис. 4). Самые длинные из раскопанных фульгуритов уходили под землю на глубину более пяти метров.

### Как электростатика защищает от молний

К счастью, большинство разрядов молнии происходят между облаками и поэтому не угрожают здоровью людей. Однако считается, что каждый год молнии убивают более тысячи людей по всему миру. По крайней мере, в США, где ведется такая статистика, ежегодно от удара молнии страдают около тысячи человек и более ста из них погибают. Ученые давно пытались защитить людей от этой «кары божьей». Например, изобретатель первого электрического конденсатора (лейденской банки) Питер ван Мушенбрук в статье об электричестве, написанной для знаменитой французской «Энциклопедии», защищал традиционные способы предотвращения молнии – колокольный звон и стрельба из пушек, которые, как он считал, оказываются довольно эффективными.

В 1750 году Франклин изобрел громоотвод (молниеотвод). Пытаясь защитить здание Капитолия столицы штата Мэриленд от удара молнии, он прикрепил к зданию толстый железный стержень, возвышающийся над куполом на несколько метров и соединенный с землей. Ученый отказался патентовать свое изобретение, желая, чтобы оно как можно скорее начало служить людям. Механизм действия громоотвода легко объяснить, если вспомнить, что напряженность электрического поля вблизи поверхности заряженного проводника увеличивается с ростом кривизны этой поверхности. Поэтому под грозовым облаком вблизи острия громоотвода напряженность поля будет так высока, что вызовет ионизацию окружающего воздуха и коронный разряд в нем. В результате вероятность попадания молнии в громоотвод значительно возрастет. Так знание электростатики не только позволило объяснить происхождение молний, но и найти способ защититься от них.

Весть о громоотводе Франклина быстро разнеслась по Европе, и его выбрали во все академии, включая и Российскую. Однако в некоторых странах набожное население встретило это изобретение с возмущением. Сама мысль, что человек так легко и просто может укротить главное оружие божьего гнева, казалась кощунственной. Поэтому в разных местах люди из благочестивых соображений ломали громоотводы.

Любопытный случай произошел в 1780 году в одном небольшом городке на севере Франции, где горожане потребовали снести железную мачту громоотвода и дело дошло до судебного разбирательства. Молодой адвокат, защищавший громоотвод от нападок мракобесов, построил защиту на том, что и разум человека, и его способность покорять силы природы имеют бже-

ственное происхождение. Все, что помогает спасти жизнь, во благо – доказывал молодой адвокат. Он выиграл процесс и снискал большую известность. Адвоката звали... Максимилиан Робеспьер.

Ну, а сейчас портрет изобретателя громоотвода – самая желанная репродукция в мире, ведь она украшает известную всем столларовую купюру.

### Электростатика, возвращающая жизнь

Энергия разряда конденсатора не только привела к возникновению жизни на Земле, но и может вернуть жизнь людям, у которых клетки сердца перестали синхронно сокращаться. Асинхронное (хаотичное) сокращение клеток сердца называют фибрилляцией. Фибрилляцию сердца можно прекратить, если пропустить через все его клетки короткий импульс тока. Для этого к грудной клетке пациента прикладывают два электрода, через которые пропускают импульс длительностью около десяти миллисекунд и амплитудой до нескольких десятков ампер. При этом энергия разряда через грудную клетку может достигать 400 Дж (что равно потенциальной энергии пудовой гири, поднятой на высоту 2,5 м). Устройство, обеспечивающее электрический разряд, прекращающий фибрилляцию сердца, называют дефибриллятором. Простейший дефибриллятор представляет собой колебательный контур, состоящий из конденсатора емкостью 20 мкФ и катушки индуктивностью 0,4 Гн. Зарядив конденсатор до напряжения 1–6 кВ и разрядив его через катушку и пациента, сопротивление которого составляет около 50 Ом, можно получить импульс тока, необходимый для возвращения пациента к жизни.

### Электростатика, дающая свет

Люминесцентная лампа может служить удобным индикатором напряженности электрического поля. Чтобы убедиться в этом, находясь в темном помеще-



Рис. 5. Свечение люминесцентных ламп, воткнутых в землю под высоковольтными линиями электропередач

нии, потрем лампу полотенцем или шарфом – в результате внешняя поверхность лампового стекла зарядится положительно, а ткань – отрицательно. Как только это произойдет, мы увидим всполохи света, возникающие в тех местах лампы, к которым мы прикасаемся заряженной тканью. Измерения показали, что напряженность электрического поля внутри работающей люминесцентной лампы составляет около 10 В/м. При такой напряженности свободные электроны обладают необходимой энергией для ионизации атомов ртути внутри люминесцентной лампы.

Электрическое поле под высоковольтными линиями электропередач – ЛЭП – может достигать очень высоких значений. Поэтому если в темное время суток люминесцентную лампу воткнуть в землю под ЛЭП, то она загорится, и довольно ярко (рис.5). Так с помощью энергии электростатического поля можно освещать пространство под ЛЭП.

### Как электростатика предупреждает о пожаре и делает дым чище

В большинстве случаев при выборе типа детектора пожарной сигнализации предпочтение отдается дымовому датчику, так как пожар обычно сопровождается выделением большого количества дыма и именно этот тип детектора способен предупредить людей в здании об опасности. Дымовые датчики используют ионизацию или фотоэлектрический принцип для обнаружения дыма в воздухе.

В ионизационных детекторах дыма имеется источник  $\alpha$ -излучения (как правило, америций-241), ионизирующий воздух между металлическими пластинами-электродами, электрическое сопротивление между которыми постоянно измеряется с помощью специальной схемы. Образующиеся в результате  $\alpha$ -излучения ионы обеспечивают проводимость между электродами, а оказывающиеся там микрочастицы дыма связываются с ионами, нейтрализуют их заряд и увеличивают таким образом сопротивление между электродами, на что реагирует электрическая схема, подавая сигнал тревоги. Датчики, устроенные на этом принципе, демонстрируют весьма впечатляющую чувствительность, реагируя еще до того, как самый первый признак дыма обнаруживается живым существом. Следует отметить, что используемый в датчике источник радиации никакой опасности для человека не представляет, так как альфа-лучи не могут пройти даже через лист бумаги и полностью поглощаются слоем воздуха толщиной в несколько сантиметров.

Способность частичек пыли к электризации широко используется в промышленных электростатических пылеуловителях. Газ, содержащий, например, частицы сажи, поднимаясь вверх, проходит через отрицательно заряженную металлическую сетку, в результате чего эти частицы приобретают отрицательный заряд. Продолжая подниматься вверх, частицы оказываются в электрическом поле положительно заряженных пластин, к которым они притягиваются, после чего частицы падают в специальные емкости, откуда их периодически удаляют.



### Биоэлектростатика

Одной из причин астмы являются продукты жизнедеятельности пылевых клещей (рис.6) – насекомых



Рис. 6. Пылевой клещ, продукты жизнедеятельности которого вызывают астму

размером около 0,5 мм, живущих в нашем доме. Исследования показали, что приступы астмы вызываются одним из белков, который выделяют эти насекомые. Структура этого белка напоминает подкову, оба конца которой

заряжены положительно. Электростатические силы отталкивания между концами такого подковообразного белка делают его структуру стабильной. Однако свойства белка можно изменить, если нейтрализовать его положительные заряды. Это удастся сделать, увеличив концентрацию отрицательных ионов в воздухе с помощью любого ионизатора, например люстры Чижевского (рис. 7). Одновременно с этим уменьшается и частота приступов астмы.



Рис. 7. Один из типов люстры Чижевского

Электростатика помогает не только обезвреживать белки, выделяемые насекомыми, но и ловить их самих. Уже говорилось о том, что волосы «встают дыбом», если их зарядить. Можно себе представить, что испытывают насекомые, когда оказываются элек-



Рис. 8. Электростатическая ловушка для тараканов

трически заряженными. Тончайшие волоски на их лапках расходятся в разные стороны, и насекомые теряют способность передвигаться. На таком принципе основана ловушка для тараканов, показанная на рисунке 8. Тараканов привлекает сладкая пудра, предварительно электростатически заряженная. Пудрой (на рисунке она белая) покрывают наклонную поверхность, находящуюся вокруг ловушки. Оказавшись на пудре, насекомые становятся заряженными и скатываются в ловушку.

### Что такое антистатика?

Одежда, ковры, покрывала и т.п. предметы заряжаются после контакта с другими предметами, а иногда и просто со струями воздуха. В быту и на производстве заряды, возникающие таким образом, часто называют статическим электричеством.

При нормальных атмосферных условиях натуральные волокна (из хлопка, шерсти, шелка и вискозы) хорошо впитывают влагу (гидрофильны) и поэтому слегка проводят электричество. Когда такие волокна касаются других материалов или трутся о них, на их поверхностях появляются избыточные электрические заряды, но на очень короткое время, поскольку заряды сразу же стекают обратно по влажным волокнам ткани, содержащим различные ионы.

В отличие от натуральных, синтетические волокна (полиэфирные, акриловые, полипропиленовые) плохо впитывают влагу (гидрофобны), и на их поверхностях имеется меньшее количество подвижных ионов. При контакте синтетических материалов друг с другом они заряжаются противоположными зарядами, но так как эти заряды стекают очень медленно, материалы прилипают друг к другу, создавая неудобства и неприятные ощущения. Кстати, волосы по структуре очень близки к синтетическим волокнам и тоже гидрофобны, поэтому при контакте, например, с расческой они заряжаются электричеством и начинают отталкиваться друг от друга.

Чтобы избавиться от статического электричества, поверхность одежды или другого предмета можно смазать веществом, которое удерживает влагу и этим увеличивает концентрацию подвижных ионов на поверхности. После такой обработки возникший электрический заряд быстро исчезнет с поверхности предмета или распределится по ней. Гидрофильность поверхности можно увеличить, смазав ее поверхностно-активными веществами, молекулы которых похожи на мыльные молекулы – одна часть очень длинной молекулы заряжена, а другая нет. Вещества, препятствующие появлению статического электричества, называют антистатиками. Антистатиком является, например, и обычная угольная пыль или сажа, поэтому, чтобы избавиться от статического электричества, в состав пропитки ковровых покрытий и обивочных материалов включают так называемую ламповую сажу. Для этих же целей в такие материалы добавляют до 3% натуральных волокон, а иногда и тонкие металлические нити.



# Геометрия звездного неба

**В.ПРОТАСОВ**

**Н**ЕБО НАД ГОЛОВОЙ – САМЫЙ ДРЕВНИЙ УЧЕБНИК геометрии. Первые понятия, такие как точка и круг, – оттуда. Скорее даже не учебник, а задачник. В котором отсутствует страничка с ответами. Два круга одинакового размера – Солнце и Луна – движутся по небу, каждый со своей скоростью. Остальные объекты – светящиеся точки – движутся все вместе, словно они прикреплены к сфере, вращающейся со скоростью 1 оборот в 24 часа. Правда, среди них есть исключения – 5 точек движутся как им вздумается. Для них подобрали особое слово – «планета», по-гречески – «бродяга». Сколько человечество существует, оно пытается разгадать законы этого вечного движения. Первый прорыв произошел в III веке до н.э., когда греческие ученые, взяв на вооружение молодую науку – геометрию, смогли получить первые результаты об устройстве Вселенной. Об этом и пойдет речь.

Чтобы иметь некоторое представление о сложности задачи, рассмотрим такой пример. Представим себе светящийся шар диаметром 10 см, неподвижно висящий в пространстве. Назовем его  $S$ . Вокруг него на расстоянии чуть больше 10 метров обращается маленький шарик  $Z$  диаметром 1 миллиметр, а вокруг  $Z$  на расстоянии 6 см обращается совсем крохотный шарик

$L$ , его диаметр – четверть миллиметра. На поверхности среднего шарика  $Z$  живут микроскопические существа. Они обладают неким разумом, но покинуть пределы своего шарика не могут. Все, что они могут, – смотреть на два других шара –  $S$  и  $L$ . Спрашивается, могут ли они узнать диаметры этих шаров и измерить расстояния до них? Сколько ни думай, дело, казалось бы, безнадежное. Мы нарисовали сильно уменьшенную модель Солнечной системы ( $S$  – Солнце,  $Z$  – Земля,  $L$  – Луна).

Вот такая задача стояла перед древними астрономами. И они ее решили! Более 22 веков назад, не пользуясь ничем, кроме самой элементарной геометрии – на уровне 8 класса (свойства прямой и окружности, подобные треугольники и теорема Пифагора). И, конечно, наблюдая за Луной и за Солнцем.

Над решением трудились несколько ученых. Мы выделим двух. Это математик Эратосфен, измеривший радиус земного шара, и астроном Аристарх, вычисливший размеры Луны, Солнца и расстояния до них. Как они это сделали?

## Как измерили земной шар

То, что Земля не плоская, люди знали давно. Древние мореплаватели наблюдали, как постепенно меняется картина звездного неба: становятся видны новые созвездия, а другие, напротив, заходят за горизонт. Уплывающие вдаль корабли «уходят под воду», последними скрываются из вида верхушки их мачт. Кто первый высказал идею о шарообразности Земли, неизвестно. Скорее всего – пифагорейцы, считавшие шар совершеннейшей из фигур. Полтора века спустя Аристотель приводит несколько доказательств того, что Земля – шар. Главное из них: во время лунного затмения на поверхности Луны отчетливо видна тень от Земли, и эта тень круглая! С тех пор постоянно предпринимались попытки измерить радиус земного шара. Два простых способа изложены в упражнениях 1 и 2. Измерения, правда, получались неточными. Аристотель, например, ошибся более чем в полтора раза. Считается, что первым, кому удалось сделать это с высокой точностью, был греческий математик Эратосфен Киренский (276–194 до н. э.). Его имя теперь всем известно благодаря *решетке Эра-*



*Е.Н.Конева, М.В.Перепухов. Через тернии к звездам*





*тосфена* – способу находить простые числа (рис.1). Если вычеркнуть из натурального ряда единицу, затем вычеркивать все четные числа, кроме первого (самого числа 2), затем все числа, кратные трем, кроме первого

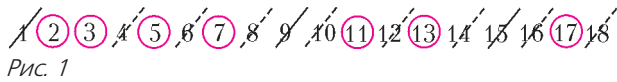


Рис. 1

из них (числа 3), и т.д., то в результате останутся одни простые числа. Среди современников Эратосфен был знаменит как крупнейший ученый-энциклопедист, занимавшийся не только математикой, но и географией, картографией и астрономией. Он долгое время возглавлял Александрийскую библиотеку – центр мировой науки того времени. Работая над составлением первого атласа Земли (речь, конечно, шла об известной к тому времени ее части), он задумал провести точное измерение земного шара. Идея была такова. В Александрии все знали, что на юге, в городе Сиена (современный Асуан), один день в году, в полдень, Солнце достигает зенита. Исчезает тень от вертикального шеста, на несколько минут освещается дно колодца. Происходит это в день летнего солнцестояния, 22 июня – день наивысшего положения Солнца на небе. Эратосфен направляет своих помощников<sup>1</sup> в Сиену, и те устанавливают, что ровно в полдень (по солнечным часам) Солнце находится точно в зените. Одновременно (как написано в первоисточнике: «в тот же час»), т.е. в полдень по солнечным часам, Эратосфен измеряет длину тени от вертикального шеста в Александрии. Получился треугольник *ABC* (*AC* – шест, *AB* – тень, рис.2). Итак, солнечный луч в Сиене (*N*) перпендикулярен поверхности Земли, а значит, проходит через ее

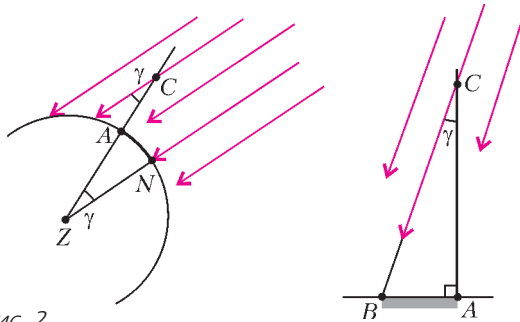


Рис. 2

центр – точку *Z*. Параллельный ему луч в Александрии (*A*) составляет угол  $\gamma = \angle ACB$  с вертикалью. Пользуясь равенством накрест лежащих углов при параллельных, заключаем, что  $\angle AZN = \gamma$ . Если обозначить через *l* длину окружности, а через *x* длину ее дуги *AN*, то получаем пропорцию  $\frac{l}{360^\circ} = \frac{x}{\gamma}$ . Угол  $\gamma$  в треугольнике *ABC* Эратосфен измерил, получилось  $7,2^\circ$ . Величина *x* – не что иное, как длина пути от Александрии до Сиены, примерно 800 км. Ее Эратосфен аккуратно вычисляет, исходя из среднего времени движения верблюжьих караванов, регулярно ходивших между двумя городами, а также используя данные *бематис-*

<sup>1</sup> В некоторых источниках сообщается легенда о том, что одним из них был друг Эратосфена – великий Архимед.

*тов* – людей специальной профессии, измерявших расстояния шагами. Теперь осталось решить пропорцию  $\frac{l}{360^\circ} = \frac{800}{7,2^\circ}$ , получив длину окружности (т.е. длину земного меридиана)  $l = 40000$  км. Тогда радиус Земли *R* равен  $l/(2\pi)$ , это примерно 6400 км. То, что длина земного меридиана выражается столь круглым числом в 40000 км, не удивительно, если вспомнить, что единица длины в 1 метр и была введена (во Франции в конце XVIII века) как одна сорокамиллионная часть окружности Земли (по определению!). Эратосфен, конечно, использовал другую единицу измерения – *стадий* (около 200 м). Стадиев было несколько: египетский, греческий, вавилонский, и каким из них пользовался Эратосфен – неизвестно. Поэтому трудно судить наверняка о точности его измерения. Кроме того, неизбежная ошибка возникала в силу географического положения двух городов. Эратосфен рассуждал так: если города находятся на одном меридиане (т.е. Александрия расположена в точности к северу от Сиены), то полдень в них наступает одновременно. Поэтому, сделав измерения во время наивысшего положения Солнца в каждом городе, мы должны получить правильный результат. Но на самом деле Александрия и Сиена – далеко не на одном меридиане. Сейчас в этом легко убедиться, взглянув на карту, но у Эратосфена такой возможности не было, он как раз и работал над составлением первых карт. Поэтому его метод (абсолютно верный!) привел к ошибке в определении радиуса Земли. Тем не менее, многие исследователи уверены, что точность измерения Эратосфена была высока и что он ошибся менее чем на 2%. Улучшить этот результат человечество смогло только через 2 тысячи лет, в середине XIX века. Над этим трудилась группа ученых во Франции и экспедиция В.Я.Струве в России. Даже в эпоху великих географических открытий, в XVI веке, люди не смогли достичь результата Эратосфена и пользовались неверным значением длины земной окружности в 37000 км. Ни Колумб, ни Магеллан не знали, каковы истинные размеры Земли и какие расстояния им придется преодолеть. Они-то считали, что длина экватора на 3 тысячи км меньше, чем на самом деле. Знали бы – может, и не поплыли бы.

В чем причина столь высокой точности метода Эратосфена (конечно, если он пользовался нужным *стадием*)? До него измерения были *локальными*, на расстояниях, обозримых человеческим глазом, т.е. не более 100 км. Таковы, например, способы в упражнениях 1 и 2. При этом неизбежны ошибки из-за рельефа местности, атмосферных явлений и т.д. Чтобы добиться большей точности, нужно проводить измерения *глобально*, на расстояниях, сравнимых с радиусом Земли. Расстояние в 800 км между Александрией и Сиеной оказалось вполне достаточным.

**Упражнения**

1. Как вычислить радиус Земли по следующим данным: с горы высотой 500 м просматриваются окрестности на расстоянии 80 км?
2. Как вычислить радиус Земли по следующим данным:



корабль высотой 20 м, отплыв от берега на 16 км, полностью исчезает из вида?

3. Два друга – один в Москве, другой – в Туле, берут по метровому шесту и ставят их вертикально. В момент, в течение дня, когда тень от шеста достигает наименьшей длины, каждый из них измеряет длину тени. В Москве получилось  $a$  см, а в Туле –  $b$  см. Выразите радиус Земли через  $a$  и  $b$ . Города расположены на одном меридиане на расстоянии 185 км.

Как видно из упражнения 3, опыт Эратосфена можно проделать и в наших широтах, где Солнце никогда не бывает в зените. Правда, для этого нужны две точки обязательно на одном меридиане. Если же повторить опыт Эратосфена для Александрии и Сиены, и при этом сделать измерения в этих городах одновременно (сейчас для этого есть технические возможности), то мы получим верный ответ, при этом будет не важно, на каком меридиане находится Сиена (почему?).

### Как измерили Луну и Солнце. Три шага Аристарха

Греческий остров Самос в Эгейском море – теперь глухая провинция. Сорок километров в длину, восемь – в ширину. На этом крохотном острове в разное время родились три величайших гения – математик Пифагор, философ Эпикур и астроном Аристарх.



Памятник Аристарху Самосскому в Салониках

Про жизнь Аристарха Самосского известно мало. Даты жизни приблизительны: родился около 310 до н.э., умер около 230 до н.э. Как он выглядел, мы не знаем, ни одного изображения не сохранилось (современный памятник Аристарху в греческом городе Салоники – лишь фантазия скульптора). Много лет провел в Александрии, где работал в библиотеке и в обсерватории. Главное его достижение – книга «О величинах и расстояниях Солнца и Луны», – по единодушному мнению историков, является настоящим научным подвигом. В ней он вычисляет радиус Солнца, радиус Луны и расстояния от Земли до Луны и до Солнца. Сделал он это в одиночку, пользуясь очень простой геометрией и всем известными результатами наблюдений за Солнцем и Луной. На этом Аристарх не останавливается, он делает несколько важнейших выводов о строении Вселенной, которые намного опередили свое время. Не случайно его назвали впоследствии «Коперником античности».

Вычисление Аристарха можно условно разбить на три шага. Каждый шаг сводится к простой геометрической задаче. Первые два шага совсем элементарны, третий – чуть посложнее. В геометрических построениях мы будем обозначать через  $Z$ ,  $S$  и  $L$  центры Земли, Солнца и Луны соответственно, а через  $R$ ,  $R_s$  и  $R_l$  –

их радиусы. Все небесные тела будем считать шарами, а их орбиты – окружностями, как и считал сам Аристарх (хотя, как мы теперь знаем, это не совсем так). Мы начинаем с первого шага, и для этого немного понаблюдаем за Луной.

### Шаг 1. Во сколько раз Солнце дальше, чем Луна?

Как известно, Луна светит отраженным солнечным светом. Если взять шар и посветить на него со стороны большим прожектором, то в любом положении освещенной окажется ровно половина поверхности шара. Граница освещенной полусферы – окружность, лежащая в плоскости, перпендикулярной лучам света. Таким образом, Солнце всегда освещает ровно половину поверхности Луны. Видимая нам форма Луны зависит от того, как расположена эта освещенная половина. При новолунии, когда Луна вовсе не видна на небе, Солнце освещает ее обратную сторону. Затем освещенная полусфера постепенно поворачивается в сторону Земли. Мы начинаем видеть тонкий серп, затем – месяц («растущая Луна»), далее – полукруг (эта фаза Луны называется «квадратурой»). Затем день ото дня (вернее, ночь от ночи) полукруг дорастает до полной Луны. Потом начинается обратный процесс: освещенная полусфера от нас отворачивается. Луна «старее», постепенно превращаясь в месяц, повернутый к нам левой стороной, подобно букве «С», и, наконец, в ночь новолуния исчезает. Период от одного новолуния до другого длится примерно четыре недели. За это время Луна совершает полный оборот вокруг Земли. От новолуния до половины Луны проходит четверть периода, отсюда и название «квадратура».

Замечательная догадка Аристарха состояла в том, что при квадратуре солнечные лучи, освещающие половину Луны, перпендикулярны прямой, соединяющей Луну с Землей. Таким образом, в треугольнике  $ZLS$  угол при

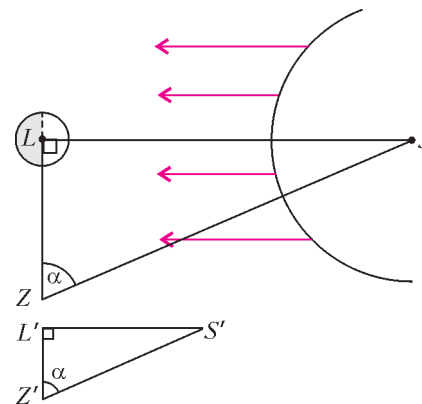


Рис. 3

вершине  $L$  – прямой (рис.3). Если теперь измерить угол  $LZS$ , обозначим его через  $\alpha$ , то получим, что  $\frac{ZL}{ZS} = \cos \alpha$ . Для простоты мы считаем, что наблюдатель находится в центре Земли. Это несильно повлияет на результат, поскольку расстояния от Земли до Луны и до Солнца значительно превосходят радиус Земли.

Итак, измерив угол  $\alpha$  между лучами  $ZL$  и  $ZS$  во время квадратуры, Аристарх вычисляет отношение расстояний до Луны и до Солнца. Как одновременно заставить Солнце и Луну на небосводе? Это можно сделать ранним утром. Сложность возникает по другому, неожиданному, поводу. Во времена Аристарха не

было косинусов. Первые понятия тригонометрии появятся позже, в работах Аполлония и Архимеда. Но Аристарх знал, что такое подобные треугольники, и этого было достаточно. Начертив маленький прямоугольный треугольник  $Z'L'S'$  с тем же острым углом  $\alpha = \angle L'Z'S'$  и измерив его стороны, находим, что  $\frac{ZL}{ZS} = \frac{Z'L'}{Z'S'}$ , и это отношение примерно равно  $\frac{1}{400}$ . Получается, что Солнце в 400 раз дальше от Земли, чем Луна. Эту константу – отношение расстояний от Земли до Солнца и от Земли до Луны – мы будем обозначать буквой  $\kappa$ . Итак, мы нашли, что  $\kappa = 400$ .

### Шаг 2. Во сколько раз Солнце больше Луны?

Для того чтобы найти отношение радиусов Солнца и Луны, Аристарх привлекает солнечные затмения (рис.4). Они происходят, когда Луна загораживает Солнце. При частичном, или, как говорят астрономы, *частном*, затмении Луна лишь проходит по диску Солнца, не закрывая его полностью. Порой такое

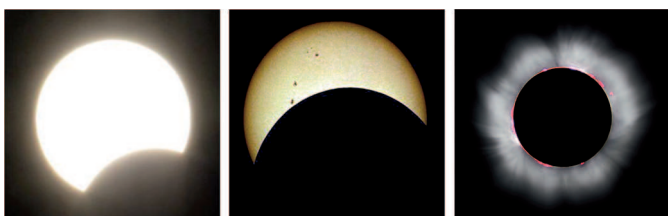


Рис. 4

затмение даже нельзя разглядеть невооруженным глазом, Солнце светит как в обычный день. Лишь сквозь сильное затемнение, например, закопченное стекло, видно, как часть солнечного диска закрыта черным кругом. Гораздо реже происходит полное затмение, когда Луна на несколько минут полностью закрывает солнечный диск. В это время становится темно, на небе появляются звезды. Затмения наводили ужас на древних людей, считались предвестниками трагедий. Солнечное затмение наблюдается по-разному в разных частях Земли. Во время полного затмения на поверхности Земли возникает тень от Луны – круг, диаметр которого не превосходит 270 км. Лишь в тех районах земного шара, по которым проходит эта тень, можно наблюдать полное затмение. Поэтому в одном и том же месте полное затмение происходит крайне редко – в среднем раз в 200–300 лет. Аристарху повезло – он смог наблюдать полное солнечное затмение собственными глазами. На безоблачном небе Солнце постепенно начало тускнеть и уменьшаться в размерах, установились сумерки. На несколько мгновений Солнце исчезло. Потом проглянул первый луч света, солнечный диск стал расти, и вскоре Солнце засветило в полную силу. Почему затмение длится столь короткое время? Аристарх отвечает: причина в том, что Луна имеет те же видимые размеры на небе, что и Солнце. Что это значит? Проведем плоскость через центры Земли, Солнца и Луны. Получившееся сечение изображено на рисунке 5,а. Угол между касательными, проведенными из точки  $Z$  к окружности Луны, называется *угловым размером Луны*, или ее *угловым диаметром*. Так же

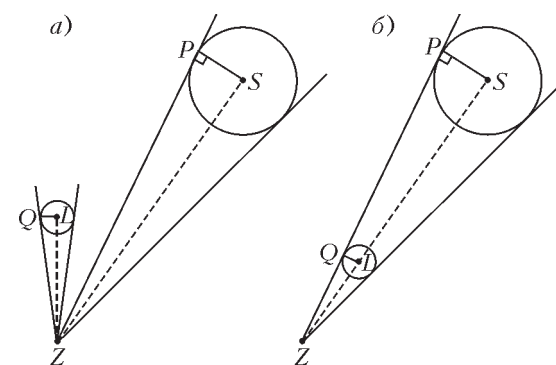


Рис. 5

определяется угловой размер Солнца. Если угловые диаметры Солнца и Луны совпадают, то они имеют одинаковые видимые размеры на небе, а при затмении Луна действительно полностью загораживает Солнце (рис.5,б), но лишь на мгновение, когда совпадут лучи  $ZL$  и  $ZS$ . На фотографии полного солнечного затмения (см. рис.4) ясно видно равенство размеров.

Вывод Аристарха оказался поразительно точен! В реальности средние угловые диаметры Солнца и Луны отличаются всего на 1,5%. Мы вынуждены говорить о средних диаметрах, поскольку они меняются в течение года, так как планеты движутся не по окружностям, а по эллипсам.

Соединив центр Земли  $Z$  с центрами Солнца  $S$  и Луны  $L$ , а также с точками касания  $P$  и  $Q$ , получим два прямоугольных треугольника  $ZSP$  и  $ZLQ$  (см. рис. 5,а). Они подобны, поскольку у них есть пара равных острых углов  $\frac{\beta}{2}$ . Следовательно,  $\frac{R_s}{R_l} = \frac{SP}{LQ} = \frac{ZS}{ZL}$ . Таким образом, *отношение радиусов Солнца и Луны равно отношению расстояний от их центров до центра Земли*. Итак,  $\frac{R_s}{R_l} = \kappa = 400$ . Несмотря на то, что их видимые размеры равны, Солнце оказалось больше Луны в 400 раз!

Равенство угловых размеров Луны и Солнца – счастливое совпадение. Оно не вытекает из законов механики. У многих планет Солнечной системы есть спутники: у Марса их два, у Юпитера – четыре (и еще несколько десятков мелких), и все они имеют разные угловые размеры, не совпадающие с солнечным.

Теперь мы приступаем к решающему и самому сложному шагу.

### Шаг 3. Вычисление размеров Солнца и Луны и расстояний до них

Итак, нам известно отношение размеров Солнца и Луны и отношение их расстояний до Земли. Эта информация *относительна*: она восстанавливает картину окружающего мира лишь с точностью до подобия. Можно удалить Луну и Солнце от Земли в 10 раз, увеличив во столько же раз их размеры, и видимая с Земли картина останется такой же. Чтобы найти реальные размеры небесных тел, надо соотнести их с каким-то известным размером. Но из всех астрономических

величин Аристарху пока известен только радиус<sup>2</sup> земного шара  $R = 6400$  км. Поможет ли это? Хотя в каком-то из видимых явлений, происходящих на небе, появляется радиус Земли? Не случайно говорят «небо и земля», имея в виду две несовместные вещи. И все же такое явление есть. Это – лунное затмение. С его помощью, применив довольно хитроумное геометрическое построение, Аристарх вычисляет отношение радиуса Солнца к радиусу Земли, и цепь замыкается: теперь мы одновременно находим радиус Луны, радиус Солнца, а заодно и расстояния от Луны и от Солнца до Земли.

При лунном затмении Луна уходит в тень Земли. Спрятавшись за Землю, Луна лишается солнечного света, и, таким образом, перестает светить. Она не исчезает из вида полностью, поскольку небольшая часть солнечного света рассеивается земной атмосферой и доходит до Луны в обход Земли. Луна темнеет, приобретая красноватый оттенок (через атмосферу лучше всего проходят красные и оранжевые лучи). На лунном диске при этом отчетливо видна тень от Земли (рис.6). Круглая форма тени еще раз подтверждает шарообразность Земли.



Рис. 6

Аристарха же интересовал размер этой тени. Для того, чтобы определить радиус круга земной тени (мы сделаем это по фотографии на рисунке 6), достаточно решить простое упражнение.

**Упражнение 4.** На плоскости дана дуга окружности. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок, равный ее радиусу.

Выполнив построение, находим, что радиус земной тени примерно в  $t = 2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$  раза больше радиуса Луны. Обратимся теперь к рисунку 7. Серым цветом закрашена область земной тени, в которую попадает Луна при затмении. Предположим, что центры окружностей  $S$ ,  $Z$  и  $L$  лежат на одной прямой. Проведем диаметр Луны  $M_1M_2$ , перпендикулярный прямой  $LS$ . Продолжение этого диаметра пересекает общие касательные окружностей Солнца и Земли в точках  $D_1$  и  $D_2$ .

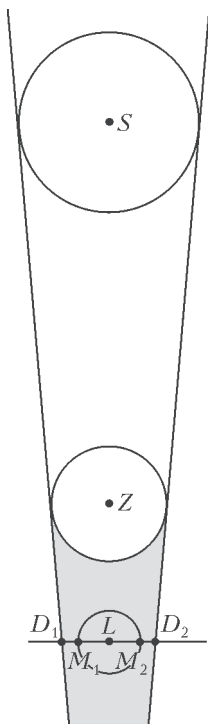


Рис. 7

Тогда отрезок  $D_1D_2$  приближенно равен диаметру тени Земли. Мы пришли к следующей задаче.

**Задача 1.** Даны три окружности с центрами  $S$ ,  $Z$  и  $L$ , лежащими на одной прямой. Отрезок  $D_1D_2$ , проходящий через  $L$ , перпендикулярен прямой  $SL$ , а его концы лежат на общих внешних касательных к первой и второй окружностям. Известно, что отношение отрезка  $D_1D_2$  к диаметру третьей окружности равно  $t$ , а отношение диаметров первой и третьей окружности равно  $\frac{ZS}{ZL} = \kappa$ . Найдите отношение диаметров первой и второй окружностей.

Если решить эту задачу, то будет найдено отношение радиусов Солнца и Земли. Значит, будет найден радиус Солнца, а с ним и Луны. Но решить ее не удастся. Можете попробовать – в задаче не хватает одного данного. Например, угла между общими внешними касательными к первым двум окружностям. Но даже если этот угол был бы известен, решение будет использовать тригонометрию, которую Аристарх не знал (мы формулируем соответствующую задачу в упражнении 6). Он находит более простой выход. Проведем диаметр  $A_1A_2$  первой окружности и диаметр  $B_1B_2$  второй, оба – параллельные отрезку  $D_1D_2$ . Пусть  $C_1$  и  $C_2$  – точки пересечения отрезка  $D_1D_2$  с прямыми  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  соответственно (рис.8). Тогда в качестве диаметра земной тени возьмем отрезок  $C_1C_2$  вместо отрезка  $D_1D_2$ . Стоп, стоп! Что значит, «возьмем один отрезок вместо другого»? Они же не равны! Отрезок  $C_1C_2$  лежит внутри отрезка  $D_1D_2$ , значит,  $C_1C_2 < D_1D_2$ . Да, отрезки разные, но они почти равны. Дело в том, что расстояние от Земли до Солнца во много раз больше диаметра Солнца (примерно в 215 раз). Поэтому расстояние  $ZS$  между центрами первой и второй окружности значительно превосходит их диаметры. Значит, угол между общими внешними касательными к этим окружностям близок к нулю (в реальности он примерно  $0,5^\circ$ ), т.е. касательные «почти параллельны». Если бы они были в точности параллельны, то точки  $A_1$  и  $B_1$  совпадали бы с точками касания, следовательно, точка  $C_1$  совпала бы с  $D_1$ , а  $C_2$  с  $D_2$ , и значит,  $C_1C_2 = D_1D_2$ . Таким образом, отрезки  $C_1C_2$  и  $D_1D_2$  почти равны. Интуиция и здесь не подвела Аристарха: на самом деле отличие между длинами отрезков составляет менее сотой доли процента! Это – ничто по сравнению с возможными погрешностями измерений. Убрав теперь лишние линии, включая окружности и их общие касательные, приходим к такой задаче.

**Задача 1'.** На боковых сторонах  $A_1C_1$  и  $A_2C_2$

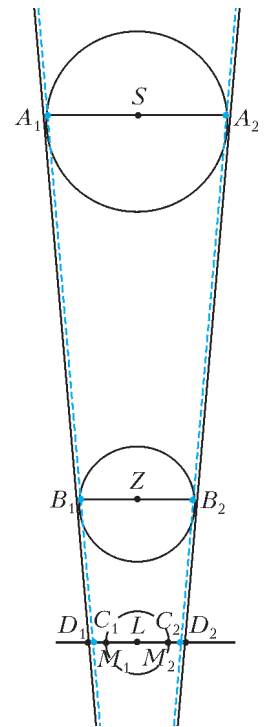


Рис. 8

<sup>2</sup> Неизвестно, знал ли Аристарх об измерении Эратосфена или пользовался другим значением радиуса Земли. Это не так важно, поскольку он брал радиус Земли в качестве единицы длины.



трапеции  $A_1A_2C_2C_1$  взяты точки  $B_1$  и  $B_2$  так, что отрезок  $B_1B_2$  параллелен основаниям. Пусть  $S$ ,  $Z$  и  $L$  – середины отрезков  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  и  $C_1C_2$  соответственно. На основании  $C_1C_2$  лежит отрезок  $M_1M_2$  с серединой  $L$ . Известно, что  $\frac{A_1A_2}{M_1M_2} = \frac{ZS}{ZL} = \kappa$  и  $\frac{C_1C_2}{M_1M_2} = t$ . Найдите  $\frac{A_1A_2}{B_1B_2}$ .

**Решение.** Так как  $\frac{A_1A_2}{M_1M_2} = \frac{ZS}{ZL}$ , то  $\frac{A_2S}{M_1L} = \frac{ZS}{ZL}$ , а значит, треугольники  $A_2SZ$  и  $M_1LZ$  подобны с коэффициентом  $\frac{SZ}{LZ} = \kappa$ . Следовательно,  $\angle A_2SZ = \angle M_1LZ$ , и поэтому точка  $Z$  лежит на отрезке  $M_1A_2$ . Аналогично,  $Z$  лежит на отрезке  $M_2A_1$  (рис.9). Так как  $C_1C_2 = t \cdot M_1M_2$  и  $M_1M_2 = \frac{1}{\kappa} A_1A_2$ , то  $C_1C_2 = \frac{t}{\kappa} A_1A_2$ .

Далее, треугольники  $A_2C_2M_1$  и  $A_2B_2Z$  подобны. Их коэффициент подобия равен

$$\frac{M_1A_2}{ZA_2} = 1 + \frac{ZM_1}{ZA_2} = 1 + \frac{ZL}{ZS} = 1 + \frac{1}{\kappa} = \frac{\kappa + 1}{\kappa}.$$

Следовательно,

$$C_2M_1 = \frac{\kappa + 1}{\kappa} B_2Z = \frac{\kappa + 1}{2\kappa} B_1B_2.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} C_2M_1 &= C_2L + LM_1 = \frac{1}{2} C_1C_2 + \frac{1}{\kappa} SA_2 = \\ &= \frac{t}{2\kappa} A_1A_2 + \frac{1}{2\kappa} A_1A_2. \end{aligned}$$

Значит,  $\frac{\kappa + 1}{2\kappa} B_1B_2 = \frac{t + 1}{2\kappa} A_1A_2$ . Из этого равенства сразу получаем, что  $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{\kappa + 1}{t + 1}$ .

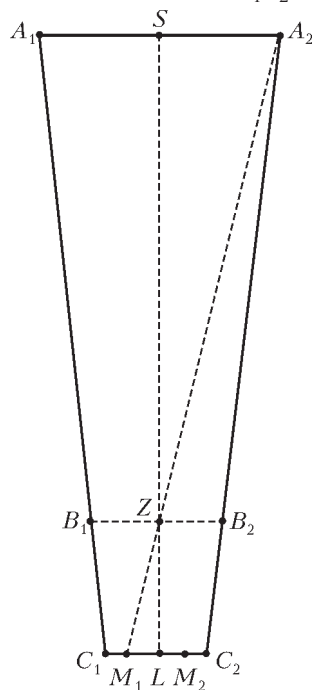


Рис. 9

Итак, отношение диаметров Солнца и Земли равно  $\frac{\kappa + 1}{t + 1}$ , а Луны и Земли равно  $\frac{\kappa + 1}{\kappa(t + 1)}$ . Подставляя известные нам величины  $\kappa = 400$  и  $t = \frac{8}{3}$ , получаем, что Луна примерно в 3,66 раза меньше Земли, а Солнце в 109 раз больше Земли. Так как радиус Земли  $R$  нам известен, находим радиус Луны  $R_l = R/3,66$  и радиус Солнца  $R_s = 109R$ .

Теперь расстояния от Земли до Луны и до Солнца вычисляются в один шаг, это может быть сделано с помощью углового диаметра. Угловой диаметр  $\beta$  Сол-

нца и Луны составляет примерно полградуса (если быть совсем точным,  $0,53^\circ$ ). Как древние астрономы его измеряли, об этом речь впереди. Опустив касательную  $ZQ$  на окружность Луны, получаем прямоугольный треугольник  $ZLQ$  с острым углом  $\beta/2$  (рис.10).

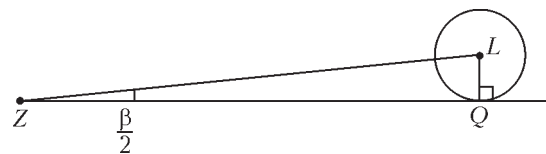


Рис. 10

Из него находим  $ZL = \frac{1}{\sin(\beta/2)} R_l$ , что примерно равно  $215R_l$ , или  $62R$ . Аналогично, расстояние до Солнца равно  $215R_s = 23455R$ .

Всё. Размеры Солнца и Луны и расстояния до них найдены.

**Упражнения**

- Докажите, что прямые  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$  и две общие внешние касательные к первой и второй окружностям (см. рис.8) пересекаются в одной точке.
- Решите задачу 1, если дополнительно известен угол между касательными между первой и второй окружностью.
- Солнечное затмение может наблюдаться в одних частях земного шара и не наблюдаться других. А лунное затмение?
- Докажите, что солнечное затмение может наблюдаться только во время новолуния, а лунное затмение – только во время полнолуния.
- Что происходит на Луне, когда на Земле происходит лунное затмение?

**О пользе ошибок**

На самом деле все было несколько сложнее. Геометрия только формировалась, и многие привычные для нас еще с восьмого класса школы вещи были в то время совсем не очевидны. Аристарху потребовалось написать целую книгу, чтобы изложить то, что мы изложили на трех страницах. И с экспериментальными измерениями тоже все было непросто. Во-первых, Аристарх ошибся с измерением диаметра земной тени во время лунного затмения, получив отношение  $t = 2$  вместо  $t = 2\frac{2}{3}$ . Кроме того, он, вроде бы, исходил из неверного значения угла  $\beta$  – углового диаметра Солнца, считая его равным  $2^\circ$ . Но эта версия спорная: Архимед в своем трактате «Псаммит» пишет, что, напротив, Аристарх пользовался почти правильным значением в  $0,5^\circ$ . Однако самая ужасная ошибка произошла на первом шаге, при вычислении параметра  $\kappa$  – отношения расстояний от Земли до Солнца и до Луны. Вместо  $\kappa = 400$  у Аристарха получилось  $\kappa = 19$ . Как можно было ошибиться более чем в 20 раз? Обратимся еще раз к шагу 1, рисунок 3. Для того чтобы найти отношение  $\kappa = ZS/ZL$ , Аристарх измерил угол  $\alpha = \angle SZL$ , и тогда  $\kappa = \frac{1}{\cos \alpha}$ . Например, если угол  $\alpha$  был бы равен  $60^\circ$ , то мы получили бы  $\kappa = 2$ , и Солнце было бы вдвое дальше от Земли, чем Луна. Но результат измерения оказался неожиданным: угол  $\alpha$  полу-

чался почти прямым. Это означало, что катет  $ZS$  во много раз превосходит  $ZL$ . У Аристарха получилось  $\alpha = 87^\circ$ , и тогда  $\cos \alpha = \frac{1}{19}$  (напомним, что все вычисления у нас – приближенные). Истинное значение угла  $\alpha = \left(89\frac{6}{7}\right)^\circ$ , и  $\cos \alpha = \frac{1}{400}$ . Так погрешность измерения менее чем в  $3^\circ$  привела к ошибке в 20 раз! Завершив вычисления, Аристарх приходит к выводу, что радиус Солнца равен 6,5 радиусов Земли (вместо 109).

Ошибки были неизбежны, учитывая несовершенные измерительные приборы того времени. Важнее то, что метод оказался правильным. Вскоре (по историческим меркам, т.е. примерно через 100 лет) выдающийся астроном античности Гиппарх (190 – ок. 120 до н.э.) устранил все неточности и, следуя методу Аристарха, вычислит правильные размеры Солнца и Луны. Возможно, ошибка Аристарха оказалась в конце концов даже полезной. До него господствовало мнение, что Солнце и Луна либо вовсе имеют одинаковые размеры (как и кажется земному наблюдателю), либо отличаются несильно. Даже отличие в 19 раз удивило современников. Поэтому не исключено, что, найдя Аристарх правильное отношение  $\kappa = 400$ , в это никто бы не поверил, а может быть, и сам ученый отказался бы от своего метода, сочтя результат несуразным. Известный принцип гласит, что геометрия – это искусство хорошо рассуждать на плохо выполненных чертежах. Перефразируя, можно сказать, что наука в целом – это искусство делать верные выводы из неточных, или даже ошибочных, наблюдений. И Аристарх такой вывод сделал. За 17 веков до Коперника он понял, что в центре мира находится не Земля, а Солнце. Так впервые появилась гелиоцентрическая модель и понятие Солнечной системы.

### Что в центре?

Господствовавшее в Древнем Мире представление об устройстве Вселенной, знакомое нам по урокам истории, заключалось в том, что в центре мира – неподвижная Земля, вокруг нее по круговым орбитам вращаются 7 планет, включая Луну и Солнце (которое тоже считалось планетой). Завершается все небесной сферой с прикрепленными к ней звездами. Сфера вращается вокруг Земли, делая полный оборот за 24 часа. Со временем в эту модель многократно вносились исправления. Так, стали считать, что небесная сфера неподвижна, а Земля вращается вокруг своей оси. Затем стали исправлять траектории движения планет: круги заменили циклоидами, т.е. линиями, которые описывают точки окружности при ее движении по другой окружности (об этих замечательных линиях можно прочитать в книгах Г.Н.Бермана «Циклоида», А.И.Маркушевича «Замечательные кривые», а также в «Кванте»: статья С.Ворова «Тайны циклоиды» №8, 1975, и статья С.Г.Гиндикина «Звездный век циклоиды», №6, 1985). Циклоиды лучше согласовывались с результатами наблюдений, в частности, объясняли «попятные» движения планет. Это – *геоцент-*

*рическая* система мира, в центре которой – Земля («гея»). Во II веке она приняла окончательный вид в книге «Альмагест» Клавдия Птолемея (87–165), выдающегося греческого астронома, однофамильца египетских царей. Со временем некоторые циклоиды усложнялись, добавлялись все новые промежуточные окружности. Но в целом система Птолемея господствовала около полутора тысячелетий, до XVI века, до открытий Коперника и Кеплера. Поначалу геоцентрической модели придерживался и Аристарх. Однако, вычислив, что радиус Солнца в 6,5 раз больше радиуса Земли, он задал простой вопрос: почему такое большое Солнце должно вращаться вокруг такой маленькой Земли? Ведь если радиус Солнца больше в 6,5 раз, то его объем больше почти в 275 раз! Значит, в центре мира должно находиться Солнце. Вокруг него вращаются 6 планет, включая Землю.<sup>3</sup> А седьмая планета, Луна, вращается вокруг Земли. Так появилась *гелиоцентрическая* система мира («гелиос» – Солнце). Уже сам Аристарх отмечал, что такая модель лучше объясняет видимое движение планет по круговым орбитам, лучше согласуется с результатами наблюдений. Но ее не приняли ни ученые, ни официальные власти. Аристарх был обвинен в безбожии и подвергся преследованиям. Из всех астрономов античности только Селевк стал сторонником новой модели. Больше ее не принял никто, по крайней мере, у историков нет твердых сведений на этот счет. Даже Архимед и Гиппарх, почитавшие Аристарха и развившие многие его идеи, не решились поставить Солнце в центр мира. Почему?

### Почему мир не принял гелиоцентрической системы?

Как же получилось, что в течении 17 веков ученые не принимали простой и логичной системы мира, предложенной Аристархом? И это несмотря на то, что официально признанная геоцентрическая система Птолемея часто давала сбои, не согласуясь с результатами наблюдений за планетами и за звездами. Приходилось добавлять все новые окружности (так называемые *вложенные циклы*) для «правильного» описания движения планет. Самого Птолемея трудности не пугали, он писал: «К чему удивляться сложному движению небесных тел, если их сущность нам неизвестна?» Однако уже к XIII веку этих окружностей накопилось 75! Модель стала столь громоздкой, что начали раздаваться осторожные возражения: неужели мир в самом деле устроен так сложно? Широко известен случай с Альфонсом X (1226–1284), королем Кастилии и Леона, государства, занимавшего часть современной Испании. Он, покровитель наук и искусств, собравший при своем дворе пятьдесят лучших астрономов мира, на одной из научных бесед

<sup>3</sup> Именно шесть, а не девять, поскольку Уран, Нептун и Плутон были открыты гораздо позже. Совсем недавно, 13 сентября 2006 года, по решению Международного астрономического союза (IAU) Плутон лишился статуса планеты. Так что планет в Солнечной системе теперь восемь.



обмолвился, что «если бы при сотворении мира Господь оказал мне честь и спросил моего совета, многое было бы устроено проще». Подобная дерзость не прощалась даже королям: Альфонс был низложен и отправлен в монастырь.<sup>4</sup> Но сомнения остались. Часть из них можно было бы разрешить, поставив Солнце в центр Вселенной и приняв систему Аристарха. Его труды были хорошо известны. Однако еще много веков никто из ученых не решался на такой шаг. Причины были не только в страхе перед властями и официальной церковью, которая считала теорию Птолемея единственно верной. И не только в инертности человеческого мышления: не так-то просто признать, что наша Земля – не центр мира, а лишь рядовая планета. Все-таки для настоящего ученого ни страх, ни стереотипы – не препятствия на пути к истине. Гелиоцентрическая система отвергалась по вполне научным, можно даже сказать, геометрическим причинам. Если допустить, что Земля вращается вокруг Солнца, то ее траектория – окружность с радиусом, равным расстоянию от Земли до Солнца. Как мы знаем, это расстояние равно 23455 радиусов Земли, т.е. более 150 миллионов километров. Значит, Земля в течение полугода перемещается на 300 миллионов километров. Гигантская величина! Но картина звездного неба для земного наблюдателя при этом остается такой же. Земля то приближается, то удаляется от звезд на 300 миллионов километров, но ни видимые расстояния между звездами (например, форма созвездий), ни их яркость не меняются. Это означает, что расстояния до звезд должны быть еще в несколько тысяч раз больше, т.е. небесная сфера должна иметь совершенно невообразимые размеры! Это, между прочим, осознавал и сам Аристарх, который писал в своей книге: «Объем сферы неподвижных звезд во столько раз больше объема сферы с радиусом Земля–Солнце, во сколько раз объем последней больше объема земного шара», т.е. по Аристарху выходило, что расстояние до звезд равно  $(23455)^2 R$ , это более 3,5 триллионов километров. В реальности расстояние от Солнца до ближайшей звезды еще примерно в 11 раз больше. (В модели, которую мы представили в самом начале, когда расстояние от Земли до Солнца равно 10 м, расстояние до ближайшей звезды равно ... 2700 километров!) Вместо компактного и уютного мира, в центре которого находится Земля и который помещается внутри относительно небольшой небесной сферы, Аристарх нарисовал бездну. И эта бездна испугала всех.

### Венера, Меркурий и невозможность геоцентрической системы

Между тем невозможность геоцентрической системы мира, с круговыми движениями всех планет вокруг Земли, может быть установлена с помощью простой геометрической задачи.

<sup>4</sup> Истинной причиной опалы короля Альфонса была, видимо, обычная борьба за власть, но его ироничное замечание об устройстве мира послужило веским поводом для его недругов.

**Задача 2.** На плоскости даны две окружности с общим центром  $O$ , по ним равномерно движутся две точки: точка  $M$  по одной окружности и точка  $V$  по другой. Докажите, что либо они двигаются в одном направлении с одинаковой угловой скоростью, либо в некоторый момент времени угол  $\angle MOV$  тупой.

**Решение.** Если точки движутся в одном направлении с разными скоростями, то через некоторое время лучи  $OM$  и  $OV$  окажутся сонаправленными. Далее угол  $\angle MOV$  начинает монотонно возрастать до следующего совпадения, т.е. до  $360^\circ$ . Следовательно, в некоторый момент он равен  $180^\circ$ . Случай, когда точки движутся в разных направлениях, рассматривается так же.

**Теорема.** Ситуация, при которой все планеты Солнечной системы равномерно вращаются вокруг Земли по круговым орбитам, невозможна.

**Доказательство.** Пусть  $O$  – центр Земли,  $M$  – центр Меркурия, а  $V$  – центр Венеры. Согласно многолетним наблюдениям, у Меркурия и Венеры разные периоды обращения, а угол  $\angle MOV$  никогда не превосходит  $76^\circ$ . В силу результата задачи 2 теорема доказана.

Конечно, древние греки неоднократно встречались с подобными парадоксами. Именно поэтому, чтобы спасти геоцентрическую модель мира, они заставили планеты двигаться не по окружностям, а по циклоидам.

Доказательство теоремы не совсем честно, поскольку Меркурий и Венера вращаются не в одной плоскости, как в задаче 2, а в разных. Хотя плоскости их орбит почти совпадают: угол между ними – всего несколько градусов. В упражнении 10 мы предлагаем вам устранить этот недостаток и решить аналог задачи 2 для точек, вращающихся в разных плоскостях. Другое возражение: может быть, угол  $MOV$  бывает тупым, но мы этого не видим, поскольку на Земле в это время день? Принимаем и это. В упражнении 11 нужно доказать, что для *трех* вращающихся радиусов всегда настанет момент времени, когда они будут образовывать друг с другом тупые углы. Если на концах радиусов – Меркурий, Венера и Солнце, то в этот момент времени Меркурий и Венера будут видны на небе, а Солнце – нет, т.е. на земле будет ночь. Но должны предупредить: упражнения 10 и 11 значительно сложнее задачи 2. Наконец, в упражнении 12 мы предлагаем вам, ни много ни мало, вычислить расстояние от Венеры до Солнца и от Меркурия до Солнца (они, конечно, вращаются вокруг Солнца, а не вокруг Земли). Убедитесь сами, насколько это просто, после того, как мы узнали метод Аристарха.

### Упражнения

**10.** В пространстве даны две окружности с общим центром  $O$ , по ним равномерно с разными угловыми скоростями движутся две точки: точка  $M$  по одной окружности и точка  $V$  по другой. Докажите, что в некоторый момент угол  $MOV$  тупой.

**11.** На плоскости даны три окружности с общим центром  $O$ , по ним равномерно с разными угловыми скоростями движутся три точки. Докажите, что в некоторый момент все три угла между лучами с вершиной  $O$ , направленными в данные точки, тупые.

**12.** Известно, что максимальное угловое расстояние между Венерой и Солнцем, т.е. максимальный угол между лучами, направленными с Земли к центрам Венеры и Солнца, равно

$48^\circ$ . Найдите радиус орбиты Венеры. То же – для Меркурия, если известно, что максимальное угловое расстояние между Меркурием и Солнцем равно  $28^\circ$ .

### Последний штрих: измерение угловых размеров Солнца и Луны

Следуя шаг за шагом рассуждениям Аристарха, мы упустили лишь один аспект: как измерялся угловой диаметр Солнца? Сам Аристарх этого не делал, пользуясь измерениями других астрономов (по-видимому, не совсем верными). Напомним, что радиусы Солнца и Луны он смог вычислить, не привлекая их угловые диаметры. Посмотрите еще раз на шаги 1, 2 и 3: нигде значение углового диаметра не используется! Он нужен только для вычисления расстояний до Солнца и до Луны. Попытка определить угловой размер «на глазок» успеха не приносит. Если попросить несколько человек оценить угловой диаметр Луны, большинство назовут угол от 3 до 5 градусов, что в разы больше истинного значения. Сказывается обман зрения: ярко-белая Луна на фоне темного неба кажется массивной. Первым, кто провел математически строгое измерение углового диаметра Солнца и Луны, был Архимед (287 – 212 до н.э.) Он изложил свой метод в книге «Псаммит» («Исчисление песчинок»). Сложность задачи он осознавал: «Получить точное значение этого угла – дело нелегкое, потому что ни глаз, ни руки, ни приборы, при помощи которых производится отсчет, не обеспечивают достаточной точности». Поэтому Архимед не берется вычислить точное значение углового диаметра Солнца, он лишь оценивает его сверху и снизу. Он помещает круглый цилиндр на конце длинной линейки, напротив глаза наблюдателя. Линейка направляется на Солнце, и цилиндр придвигается к глазу до тех пор, пока он не заслонит собой Солнце полностью. Затем наблюдатель уходит, а на конце линейки отмечается отрезок  $MN$ , равный размеру человеческого зрачка (рис.11). Тогда угол  $\alpha_1$  между прямыми  $MP$  и  $NQ$  меньше углового диаметра

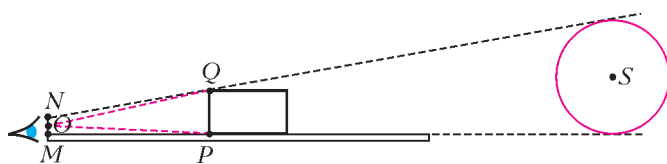


Рис. 11

Солнца, а угол  $\alpha_2 = \angle POQ$  – больше. Мы обозначили через  $PQ$  диаметр основания цилиндра, а через  $O$  – середину отрезка  $MN$ . Итак,  $\alpha_1 < \beta < \alpha_2$  (докажите это в упражнении 13). Так Архимед находит, что угловой диаметр Солнца заключен в пределах от  $0,45^\circ$  до  $0,55^\circ$ .

Неясным остается, почему Архимед измеряет Солнце, а не Луну. Он был хорошо знаком с книгой Аристарха и знал, что угловые диаметры Солнца и Луны одинаковы. Луну же измерять гораздо удобнее: она не слепит глаза и границы ее видны отчетливее.

Некоторые древние астрономы измеряли угловой диаметр Солнца, исходя из продолжительности сол-

нечного или лунного затмения. (Попробуйте восстановить этот способ в упражнении 14.) А можно сделать то же, не дожидаясь затмений, а просто наблюдая закат Солнца. Выберем для этого день весеннего равноденствия 22 марта, когда Солнце восходит точно на востоке, а заходит точно на западе. Это означает, что точки восхода  $E$  и заката  $W$  диаметрально противоположны. Для земного наблюдателя Солнце движется по окружности с диаметром  $EW$ . Плоскость этой окружности составляет с плоскостью горизонта угол  $90^\circ - \gamma$ , где  $\gamma$  – географическая широта точки  $M$ , в которой находится наблюдатель (например, для Москвы  $\gamma = 55,5^\circ$ , для Александрии  $\gamma = 31^\circ$ ). Доказательство приведено на рисунке 12. Прямая  $ZP$  – ось вращения Земли, перпендикулярная плоскости экватора. Широта точки  $M$  – угол между отрезком  $ZP$  и плоскостью экватора. Проведем через центр Солнца  $S$  плоскость  $\alpha$ , перпендикулярную оси  $ZP$ . Плоскость горизонта касается земного шара в точке  $M$ . Для наблюдателя, находящегося в точке  $M$ , Солнце в течение дня движется по окружности в плоскости  $\alpha$  с центром  $P$  и радиусом  $PS$ . Угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью горизонта равен углу  $MZP$ , который равен  $90^\circ - \gamma$ , поскольку плоскость  $\alpha$  перпендикулярна  $ZP$ , а плоскость горизонта перпендикулярна  $ZM$ . Итак, в день равноденствия Солнце заходит за горизонт под углом  $90^\circ - \gamma$ . Следовательно, во время заката оно проходит дугу окружности, равную  $\beta/\cos \gamma$ , где  $\beta$  – угловой диаметр Солнца (рис.13). С другой стороны, за 24 часа оно проходит по этой окружности полный оборот, т.е.  $360^\circ$ .

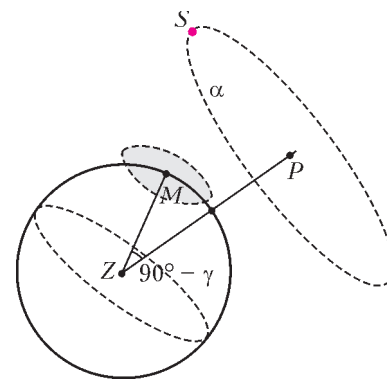


Рис. 12

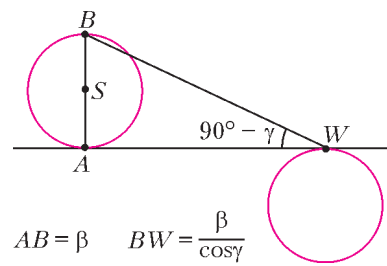


Рис. 13

Получаем пропорцию  $\frac{\beta/\cos \gamma}{360} = \frac{T}{24}$ , где  $T$  – продолжительность заката (единица измерения – час). Зная  $\gamma$  и измерив время  $T$ , находим  $\beta = 0,53^\circ$ .

#### Упражнения

**13.** Докажите, что угол  $\alpha_1$  между прямыми  $MP$  и  $NQ$  (см. рис.11.) меньше углового диаметра Солнца, а угол  $\alpha_2 = \angle POQ$  – больше.

**14.** Предложите способ измерения угловых размеров Луны во время лунного затмения.

С автором статьи можно связаться по адресу: v-protassov@yandex.ru



# Как рассмотреть нанообъект в оптический микроскоп

А.ЕЖОВ

КАК ИЗВЕСТНО, ОСНОВНУЮ ДОЛЮ ИНФОРМАЦИИ об окружающем мире человек получает с помощью зрения. Глаз человека – сложный и совершенный прибор. Этот созданный природой прибор работает со светом – электромагнитным излучением, диапазон длин волн которого находится между 400 и 760 нанометрами. Цвет, который при этом воспринимает человек, изменяется от фиолетового до красного.

Электромагнитные волны, соответствующие видимому свету, взаимодействуют с электронными оболочками атомов и молекул глаза. Результат этого взаимодействия зависит от того, в каком состоянии находятся электроны этих оболочек. Свет может поглощаться, отражаться или рассеиваться. Что именно произошло со светом, может многое рассказать об атомах и молекулах, с которыми он взаимодействовал. Диапазон размеров атомов и молекул – от 0,1 до десятков нанометров. Это во много раз меньше, чем длина волны света. Тем не менее, объекты именно таких размеров – назовем их нанообъектами – очень важно увидеть. Что же надо для этого сделать? Обсудим сначала, что может рассмотреть человеческий глаз.

Обычно, когда говорят о разрешающей способности того или иного оптического прибора, оперируют двумя понятиями. Одно из них – угловое разрешение, а второе – линейное разрешение. Эти понятия взаимосвязаны. К примеру, для человеческого глаза угловое разрешение составляет приблизительно 1 угловую минуту. При этом глаз может различить два точечных объекта, удаленных от него на 25–30 см, только тогда, когда расстояние между этими объектами больше чем 0,075 мм. Это вполне сравнимо с разрешением обычного компьютерного сканера. В самом деле, разрешение 600 точек на дюйм означает, что сканер может различить точки, расположенные на расстоянии 0,042 мм друг от друга.

Для того чтобы можно было различать объекты, расположенные на еще меньших расстояниях друг от друга, был придуман оптический микроскоп – прибор, увеличивающий разрешающую способность глаза. Выглядят эти приборы по-разному (что видно из рисунка 1), но принцип действия у них один тот же. Оптический микроскоп позволил отодвинуть предел разрешения до долей микрона. Уже 100 лет назад оптическая микроскопия сделала возможным изучать объекты микронных размеров. Однако тогда же стало



Рис.1. Оптические микроскопы. Слева – микроскоп фирмы Carl Zeiss 1906 года, справа – современный исследовательский микроскоп той же фирмы с двумя видеокамерами на основе ПЗС-матриц сверху

ясно, что простым увеличением количества линз и улучшением их качества добиться дальнейшего увеличения разрешающей способности невозможно. Разрешение оптического микроскопа оказалось ограничено свойствами самого света, а именно его волновой природой.

Еще в конце позапрошлого века было установлено, что разрешение оптического микроскопа составляет

$$d = \frac{\lambda}{2n \sin u}$$

. В этой формуле  $\lambda$  – длина волны света, а  $n \sin u$  – числовая апертура объектива микроскопа, которая характеризует как микроскоп, так и то вещество, которое находится между объектом изучения и самой близкой к нему линзой микроскопа. И действительно, в выражении для числовой апертуры входят показатель преломления  $n$  среды, находящейся между объектом и объективом, и угол  $u$  между оптической осью объектива и самыми крайними лучами, которые выходят из объекта и могут попасть в этот объектив. Показатель преломления вакуума равен единице. У воздуха этот показатель очень близок к единице, у воды он составляет 1,33303, а у специальных жидкостей, используемых в микроскопии для получения максимального разрешения,  $n$  доходит до 1,78. Каким бы ни был угол  $u$ , величина  $\sin u$  не может быть больше единицы. Таким образом, разрешение оптического микроскопа не превышает долей длины волны света.

Обычно считается, что разрешение составляет половину длины волны.

Интенсивность, разрешение и увеличение объекта – разные вещи. Можно сделать так, что расстояние между центрами изображений объектов, которые расположены в 10 нм друг от друга, будет 1 мм. Это будет соответствовать увеличению в 100000 раз. Тем не менее, различить, один это объект или два, не получится. Дело в том, что изображения объектов, размеры которых очень малы по сравнению с длиной волны света, будут иметь одинаковую форму и размеры, не зависящие от формы самих объектов. Такие объекты называют точечными – их размерами можно пренебречь. Если такой точечный объект светится, то оптический микроскоп изобразит его в виде светлого кружка, окруженного светлыми и темными кольцами. Будем далее, для простоты, рассматривать именно источники света. Типичное изображение точечного источника света, полученное с помощью оптического микроскопа, показано на рисунке 2. Интенсивность светлых колец

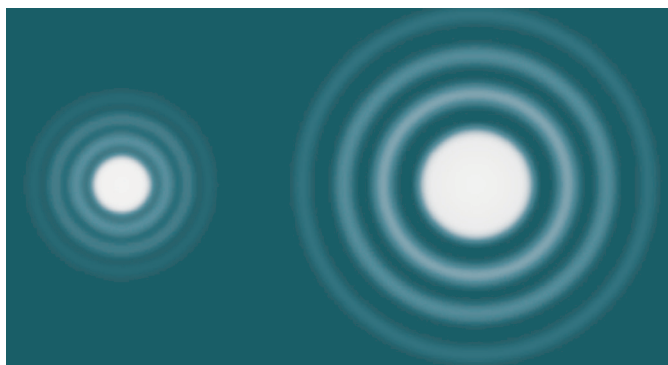


Рис.2. Изображения одного и того же точечного источника, полученные с помощью объективов с различными числовыми апертурами – для левого изображения она в два раза больше того, чем для правого. Интенсивность центрального максимума составляет приблизительно 85% суммарной интенсивности от всех частей изображения

намного меньше, чем у кружочка, и убывает по мере удаления от центра изображения. Чаще всего видно только первое светлое кольцо. Диаметр первого темно-

го кольца равен  $d = \frac{\lambda}{n \sin u}$ . Функция, которая описывает такое распределение интенсивности, называется функцией рассеяния точки. Эта функция не зависит от того, каково увеличение. Изображение нескольких точечных объектов будет представлять собой именно круги и кольца, как это видно из рисунка 3. Полученное изображение можно увеличивать, однако если изображения двух соседних точечных объектов сливаются, то они будут сливаться и дальше. Такое увеличение часто называют бесполезным – большие изображения просто будут более размытыми. Пример бесполезного увеличения показан на рисунке 4. Формула  $d = \frac{\lambda}{2n \sin u}$  часто называется дифракционным пределом, и она настолько знаменита, что именно ее высекли на памятнике автору этой формулы – немецкому физику-оптику Эрнсту Аббе.



Рис.3. Изображения группы точечных источников. Источники 1 и 2 расположены на расстоянии, значительно большем  $d = \lambda / (n \sin u)$ , источники 3 и 4 – на расстоянии  $d/2$ , а источники 5 и 6 – на расстоянии, значительно меньшем  $d/2$



Рис.4. Изображения двух точечных источников, полученные объективами, имеющими одинаковые числовые апертуры, но дающими различные увеличения. Расстояние между точечными источниками равно  $\lambda / (2n \sin u)$

Конечно, со временем оптические микроскопы стали снабжать разнообразными устройствами, позволяющими запоминать изображения. Человеческий глаз дополнили сначала пленочные фото- и кинокамеры, а потом – камеры, в основе которых лежат цифровые устройства, преобразующие попадающий на них свет в электрические сигналы. Самыми распространенными из таких устройств являются ПЗС-матрицы (ПЗС расшифровывается как прибор с зарядовой связью). Количество пикселей в цифровых камерах продолжает расти, однако само по себе это не может улучшить разрешение оптических микроскопов.

Еще двадцать пять лет назад казалось, что дифракционный предел непреодолим и что, для того чтобы изучать объекты, размеры которых во много раз меньше, чем длина волны света, необходимо отказаться от света как такового. Именно таким путем пошли создатели электронных и рентгеновских микроскопов. Несмотря на многочисленные преимущества таких микроскопов, задача использования именно света для рассматривания нанообъектов оставалась. Причин для этого было много: удобство и простота работы с объектами, небольшое время, которое требуется для получения изображения, известные способы окрашивания образцов и многое другое. Наконец, после долгих лет напряженной работы стало возможным рассматривать нанообъекты с помощью оптического микроскопа. Наибольший прогресс в этом направлении достигнут в области люминесцентной микроскопии. Конечно, дифракционный предел никто не отменял, но его удалось обойти. В настоящее время существуют различные



оптические микроскопы, позволяющие рассматривать объекты, размеры которых намного меньше длины волны того самого света, который создает изображения этих объектов. Все эти приборы объединяет один общий принцип. Попробуем пояснить, какой именно.

Из того, что уже говорилось о дифракционном пределе разрешения, ясно, что увидеть точечный источник не так уж сложно. Если этот источник обладает достаточной интенсивностью, его изображение будет отчетливо видно. Форма и размер этого изображения, как уже говорилось, будут определяться свойствами оптической системы. При этом, зная свойства оптической системы и будучи уверенными в том, что объект точечный, можно определить, где именно находится объект. Точность определения координат такого объекта достаточно высока. Иллюстрацией этого может служить рисунок 5. Координаты точечного объекта

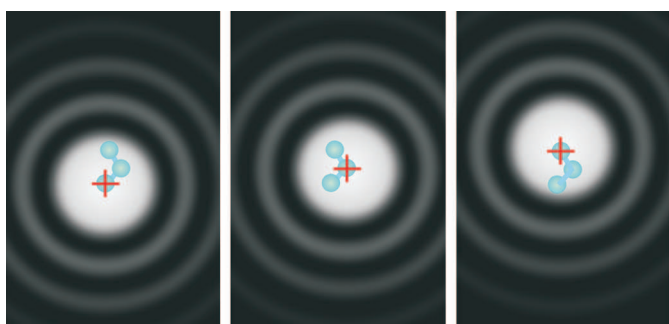


Рис.5. Последовательное определение положения точечного источника с точностью, значительно превышающей  $\lambda/(2n\sin u)$ . Красным крестом отмечено текущее положение источника, а голубым цветом обозначена траектория движения источника, построенная по трем его положениям. Размер голубого кружка соответствует точности определения положения источника

можно определить тем точнее, чем интенсивнее он светится. Еще в 80-х годах прошлого века с помощью оптического микроскопа умели определять положение отдельных светящихся молекул с точностью в 10–20 нанометров. Необходимым условием столь точного определения координат точечного источника является его одиночество. Ближайший к нему другой точечный источник должен находиться настолько далеко, чтобы исследователь точно знал, что обрабатываемое изображение соответствует одному источнику. Понятно, что это расстояние  $l$  должно удовлетворять условию  $l \geq \frac{\lambda}{2n \sin u}$ . В этом случае анализ изображения может дать очень точные данные о положении самого источника.

Большинство объектов, размеры которых намного меньше разрешающей способности оптического микроскопа, можно представить как набор точечных источников. Источники света в таком наборе находятся друг от друга на расстояниях, намного меньших величины  $\frac{\lambda}{2n \sin u}$ . Если эти источники будут светить одновременно, то сказать что-либо о том, где именно они расположены, будет невозможно. Тем не менее, если

суметь заставить эти источники светить по очереди, то положение каждого них можно определить с высокой точностью. Если эта точность превышает расстояние между источниками, то, обладая знанием о положении каждого из них, можно узнать о том, каково их взаимное расположение. А это означает, что получена информация о форме и размерах объекта, который представлен как набор точечных источников. Другими словами, в таком случае можно рассмотреть в оптический микроскоп объект, размеры которого меньше, чем дифракционный предел!

Таким образом, ключевым моментом является получение информации о различных частях нанобъекта независимо друг от друга. Существуют три основные группы методов, позволяющие сделать это.

Первая группа методов целенаправленно заставляет светить ту или иную часть исследуемого объекта. Самый известный из этих методов – сканирующая оптическая микроскопия ближнего поля. Рассмотрим ее подробнее.

Если внимательно изучить те условия, которые подразумеваются, когда речь идет о дифракционном пределе, обнаружится, что расстояния от объектов до линз значительно больше длины волны света. На расстояниях, сравнимых и меньших этой длины волны, картина получается другой. Вблизи любого объекта, попавшего в электромагнитное поле световой волны, существует переменное электромагнитное поле, частота изменения которого такая же, как частота изменения поля в световой волне. В отличие от световой волны, это поле быстро затухает по мере удаления от нанобъекта. Расстояние, на котором происходит уменьшение интенсивности, например, в  $e$  раз, сравнимо с размерами объекта. Таким образом, электромагнитное поле оптической частоты оказывается сконцентрированным в объеме пространства, размер которого намного меньше, чем длина волны света. Любой нанобъект, попавший в эту область, будет так или иначе взаимодействовать со сконцентрированным полем. Если тот объект, с помощью которого осуществляется это концентрирование поля, последовательно перемещать по какой-либо траектории вдоль изучаемого нанобъекта и регистрировать свет, излучаемый этой системой, то можно построить изображение по отдельным точкам, лежащим на этой траектории. Конечно, в каждой точке изображение будет выглядеть так, как показано на рисунке 2, но разрешение при этом будет определяться тем, насколько удалось сконцентрировать поле. А это, в свою очередь, определяется размерами того объекта, с помощью которого это поле концентрируется.

Самым распространенным способом такой концентрации поля является изготовление очень маленького отверстия в металлическом экране. Обычно это отверстие находится на конце заостренного и покрытого тонкой пленкой металла световода (световод часто называется оптическим волокном и широко используется для передачи данных на большие расстояния). Сейчас удастся изготавливать отверстия с диаметрами от 30 до 100 нм. Таким же по величине получается и

(Продолжение см. на с. 35)

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июля 2010 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №2-2010» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «M2169» или «Ф2175». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам [math@kvant.info](mailto:math@kvant.info) и [phys@kvant.info](mailto:phys@kvant.info) соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи M2171 и M2172 предлагались на региональном этапе XXXVI Всероссийской олимпиады школьников по математике.

## Задачи M2169–M2175, Ф2175–Ф2182

**M2169.** Каждая сторона остроугольного треугольника  $ABC$  меньше соответствующей стороны треугольника  $A'B'C'$ . Докажите, что  $R < R'$ , где  $R$  и  $R'$  – радиусы окружностей, описанных около треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$  соответственно.

*П. Кожевников*

**M2170.** Окружность пересекает график функции  $y = x^3 - 2009x$  в шести точках. Найдите сумму абсцисс этих точек.

*И. Богданов*

**M2171.** Можно ли разбить при каком-то натуральном  $k$  все натуральные числа от 1 до  $k$  на две группы и выписать числа в каждой группе в некотором порядке так, чтобы получились два одинаковых числа?

*Н. Агаханов*

**M2172.** В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$ , пересекающиеся в точке  $I$ . Серединный перпендикуляр к отрезку  $AD$  пересекает прямые  $BE$  и  $CF$  в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $I$ ,  $M$  и  $N$  лежат на одной окружности.

*Д. Прокопенко*

**M2173.** Пусть  $p > 3$  – простое число,  $a$  и  $b$  – целые числа такие, что  $a^2 + ab + b^2$  делится на  $p$ . Докажите, что  $(a + b)^p - a^p - b^p$  делится: а) на  $p^2$ ; б\*) на  $p^3$ .

*Б. Лурье*

**M2174.** а) Существуют ли четыре равных многоугольника таких, что любые два из них не имеют общих внутренних точек, но граничат по отрезку?

б) Тот же вопрос для четырех равных *выпуклых* многоугольников.

*С. Маркелов*

**M2175.** Пусть  $S$  – множество из  $n$  действительных чисел, лежащих в отрезке  $[0; 1]$  ( $n \geq 1$ ). Для некоторого  $k$  ( $0 < k < n$ )  $k$ -элементное подмножество  $A$  множества  $S$  называется *хорошим*, если разность между средним арифметическим  $k$  чисел, лежащих в  $A$ , и средним арифметическим  $n - k$  чисел из  $S$ , не лежащих в  $A$ , не превосходит  $\frac{n}{2k(n-k)}$ . Докажите, что среди всех  $k$ -элементных подмножеств множества  $S$  доля хороших подмножеств составляет не менее  $\frac{2}{n}$ .

*А. Бадзян*

**Ф2175.** Шайба скользит по горизонтальной поверхности, сила трения о которую пропорциональна квадрату скорости шайбы. Начальная скорость шайбы упала вдвое через время  $T$  после начала движения. За какое время скорость упадет еще втрое?

*А. Зильберман*

**Ф2176.** Конструкция в виде буквы Г (рис.1) сделана из проволоки *постоянного сечения*, угол прямой, длина короткого куска в 4 раза меньше, чем длинного. Нити, на которых висит конструкция, вертикальны и одинаковы

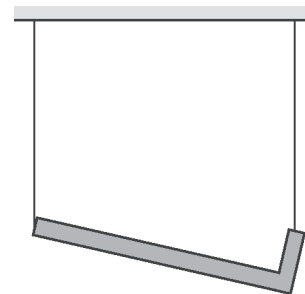


Рис. 1



по длине. Найдите отношение сил натяжения этих нитей.

*З.Рафаилов*

**Ф2177.** На корпусе фена, предназначенного для быстрой сушки волос, есть надпись: 1200 Вт. Диаметр отверстия, из которого выходит воздух с температурой 80 °С, равен 4 см. Температура воздуха в комнате 20 °С, давление воздуха  $10^5$  Па. С какой средней скоростью относительно корпуса фена движется выходящий наружу горячий воздух?

*С.Варламов*

**Ф2178.** Твердое вещество  $\text{CO}_2$  похоже на плотно слепленный снежок – белый непрочный кусок скотканного снега – и называется «сухой лед», который при атмосферном давлении имеет температуру  $-65$  °С. Некоторое количество этого вещества взвесили и положили в нерастянутую резиновую оболочку воздушного шарика, имеющую массу 3 г. Оболочку загерметизировали, завязав узлом резиновую входную трубку шарика, дождалась, пока весь сухой лед испарился и нагрелся до комнатной температуры, а затем надутый шарик взвесили на тех же весах – получился результат 69 г. Что показывали весы при взвешивании твердого вещества?

*С.Варламов*

**Ф2179.** Нагреватель идеальной тепловой машины имеет начальную температуру  $2T$ , его теплоемкость  $C$ , температура холодильника в начальный момент  $T$ , его теплоемкость вдвое больше. Теплообмена с окружающей средой нет, машина имеет маленькую мощность даже при начальной разности температур. Найдите температуры тел через очень большое время. Какую работу может совершить машина за это очень большое время?

*С.Муравьев*

**Ф2180.** Конденсаторы в схеме (рис.2) одинаковые, емкость каждого 100 мкФ, сопротивление резистора 100 Ом. Батарейку напряжением 12 В с малым внутренним сопротивлением подключают к этой схеме. Какое количество теплоты выделится за большое время в резисторе? Какое полное количество теплоты выделится при подключении батарейки?

Рис. 2

делится при подключении батарейки?

*А.Повторов*

**Ф2181.** В однородном электрическом поле напряженностью  $E_0$  удерживают диполь, состоящий из легкого жесткого стержня длиной  $d$ , на концах которого укреплены одинаковые маленькие шарики массой  $m$  каждый с зарядами  $q$  и  $-q$ . Найдите максимальную угловую скорость стержня после отпущения диполя. Сила тяжести отсутствует.

*А.Простов*

**Ф2182.** К последовательно соединенным катушке индуктивностью 1 Гн и конденсатору емкостью 1 мкФ подключают источник (рис.3), содержащий батарейку

напряжением 1 В и идеальный диод. Через секунду после этого источник отключили от контура и подключили вновь, поменяв полярность (поменяли местами выводы А и Б), еще через секунду снова поменяли полярность – и так 100 раз. Найдите напряжение конденсатора через секунду после последнего переключения. Элементы цепи считать идеальными.

*У.Былов*



Рис. 3

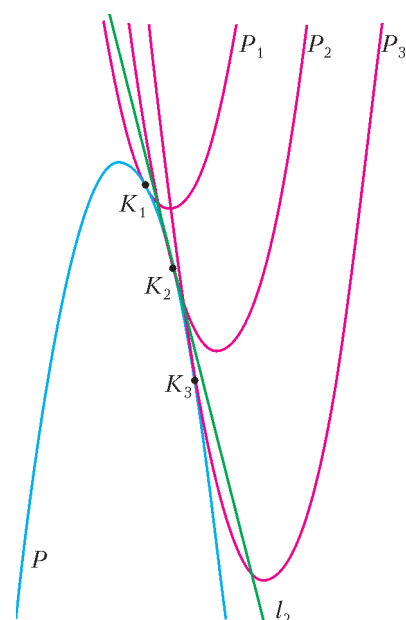
**Решения задач М2146–М2152<sup>1</sup>, Ф2160–Ф2167**

**М2146.** На координатной плоскости нарисовали 2008 графиков квадратных трехчленов. Может ли оказаться, что для каждого из них существует прямая, имеющая общие точки с любым графиком, кроме него?

**Ответ:** может.

Приведем пример даже бесконечного множества парабол  $P_1, P_2, P_3, \dots$ , удовлетворяющих условию. Рассмотрим параболу  $P$ , заданную уравнением  $y = -x^2$ , и пусть парабола  $P_n$  симметрична параболе  $P$  относительно точки  $K_n$  с координатами  $(n, -n^2)$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Каждая из парабол  $P_n$  имеет общую касательную  $l_n$  с параболой  $P$  (см. рисунок). Парабола  $P_n$  лежит выше прямой  $l_n$  и имеет с ней единственную общую точку  $K_n$ . Парабола  $P$  лежит ниже прямой  $l_n$ , в частности, все точки касания  $K_i$ ,  $i \neq n$ , лежат строго ниже прямой  $l_n$ . Сдвинув немного вниз прямую  $l_n$ , получим такую прямую  $l'_n$ , что все точки  $K_i$ ,  $i \neq n$ , по-прежнему лежат строго ниже нее, а точка  $K_n$  – строго выше нее. Тогда прямая  $l'_n$  не пересекает только одну параболу  $P_n$  из множества  $P_1, P_2, P_3, \dots$



*П.Кожевников*

**М2147.** В каждой клетке бесконечной клетчатой плоскости записано действительное число так, что все бесконечные в обе стороны горизонтальные и вертикальные последовательности чисел периодические. Докажите, что найдется бесконечно много горизонтальных последовательностей с различными наименьшими периодами тогда и только тогда, когда найдется бесконечно много вертикальных последовательностей с различными наименьшими периодами.

Допустим, что бесконечно много горизонтальных последовательностей с различными наименьшими перио-

<sup>1</sup>Решение задачи М2153 будет опубликовано позже.

дами не найдется. Это означает, что существует такое конечное множество натуральных чисел  $\{T_1, T_2, \dots, T_k\}$ , что для всякой горизонтальной последовательности ее наименьший период совпадает с одним из  $T_i$ . Тогда  $T = T_1 T_2 \dots T_k$  является периодом любой горизонтальной последовательности. Значит, клетчатая плоскость распадается на одинаковые вертикальные полосы шириной в  $T$  столбцов, т.е. существует не более  $T$  вертикальных последовательностей с различными наименьшими периодами (так как различных вертикальных последовательностей не более  $T$ ).

Решение завершим, поменяв в предыдущих рассуждениях ролями вертикальные и горизонтальные последовательности.

*Замечание.* Читателям предлагается убедиться (это не очевидно!), что существуют расстановки действительных чисел, для которых все горизонтальные и вертикальные последовательности периодические, но найдется бесконечно много горизонтальных (и вертикальных) последовательностей с различными наименьшими периодами.

Е.Знак

**M2148.** По кругу выписаны числа  $1, 2, 3, \dots, 100$  в некотором порядке. Петя вычислил 100 сумм всех троек соседних чисел и написал на доске наименьшую из этих сумм. Какое наибольшее число могло быть написано на доске?

**Ответ:** 150.

Рассмотрим более общую задачу, заменив 100 на число  $n$  вида  $6r + 4$ , и покажем, что ответом будет число  $\frac{3n}{2}$ .

Выделим число  $n$ , а оставшиеся  $n - 1 = 6r + 3$  числа разобьем на  $2r + 1 = \frac{n-1}{3}$  троек соседних чисел.

Сумма чисел в этих трех тройках равна  $1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{3n}{2} \cdot \frac{n-1}{3}$ , поэтому хотя бы в одной из рассматриваемых троек сумма чисел не больше  $\frac{3n}{2}$ .

Опишем пример, в котором в любой тройке сумма чисел будет не меньше чем  $\frac{3n}{2}$ . Разобьем числа  $1, 2, \dots, n - 1 = 6r + 3$  на тройки чисел  $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), \dots, (a_{2r+1}, b_{2r+1}, c_{2r+1})$  с равной суммой следующим образом. (Заметим, что такое разбиение использовалось, например, при решении задачи M2068.) Пусть  $b_1, b_2, \dots, b_{r+1}$  — это числа  $1, 2, \dots, r + 1$  в порядке возрастания,  $b_{r+2}, \dots, b_{2r+1}$  — это числа  $r + 2, r + 3, \dots, 2r + 1$  в порядке убывания;  $a_1, a_2, \dots, a_{r+1}$  — это числа  $3r + 2, 3r + 3, \dots, 4r + 2$  в порядке возрастания,  $a_{r+2}, \dots, a_{2r+1}$  — это четные числа  $4r + 4, 4r + 6, \dots, 6r + 2$  в порядке возрастания;  $c_1, c_2, \dots, c_{r+1}$  — это нечетные числа  $4r + 3, 4r + 5, \dots, 6r + 3$  в порядке убывания,  $c_{r+2}, \dots, c_{2r+1}$  — это числа  $2r + 2, 2r + 3, \dots, 3r + 1$  в порядке убывания.

Отметим, что тройки сформированы таким образом, что последовательность  $a_1, a_2, \dots, a_{2r+1}$  возрастает, а

последовательность  $c_1, c_2, \dots, c_{2r+1}$  убывает. Расставим числа на окружности в порядке  $n, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \dots, a_{2r+1}, b_{2r+1}, c_{2r+1}$ . (Например, при  $n = 22$  получается расстановка, изображенная на рисунке, и ответом в задаче будет число 33.) Оценим суммы троек последовательных чисел.

В каждой тройке вида  $(a_i, b_i, c_i)$  сумма чисел равна в точности  $\frac{3n}{2}$ . В тройке вида  $(b_i, c_i, a_{i+1})$  (считаем также  $n = a_{2r+2}$ ) сумма больше, чем в тройке  $(a_i, b_i, c_i)$  из-за возрастания последовательности  $\{a_i\}$ . Аналогично, в тройке вида  $(c_{i-1}, a_i, b_i)$  (считаем также  $n = c_0$ ) сумма больше, чем в тройке  $(a_i, b_i, c_i)$  из-за убывания последовательности  $\{c_i\}$ . Остается тройка  $(c_{2r+1}, n, a_1)$ , сумма чисел которой равна  $(2r + 2) + n + (3r + 2) > n + (3r + 2) = \frac{3n}{2}$ .

*Замечание.* Нетрудно посчитать, что среднее значение суммы трех последовательных чисел на окружности равно  $\frac{3(n+1)}{2}$ . При  $n = 6r + 4$  это дает оценку на 1 больше истинного ответа.

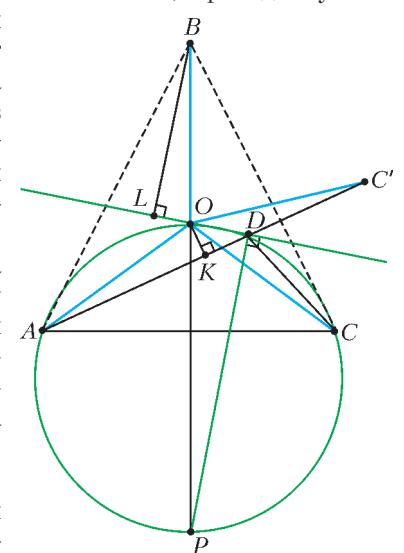
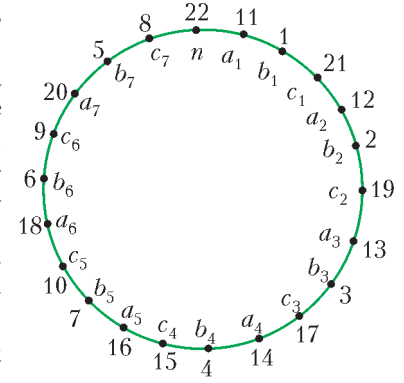
Интересно, какие результаты можно получить, если в исходной формулировке варьировать набор расставляемых чисел, менять тройки соседних чисел на четверки, пятерки, и т.д.

П.Кожевников

**M2149.** В треугольнике  $ABC$  стороны  $AB$  и  $BC$  равны. Точка  $D$  внутри треугольника такова, что  $\angle ADC = 2\angle ABC$ . Докажите, что удвоенное расстояние от точки  $B$  до внешней биссектрисы угла  $ADC$ , равно  $AD + DC$ .

Пусть описанная окружность треугольника  $ADC$  пересекает высоту треугольника  $ABC$ , проведенную из точки  $B$ , в точках  $O$  и  $P$ , причем  $O$  лежит внутри треугольника  $ABC$  (см. рисунок). Из симметрии  $O$  и  $P$  — середины дуг  $AC$  (и  $OP$  — диаметр), поэтому  $\angle ADP = \angle CDP$ , т.е.  $DP$  — биссектриса угла  $ADC$ . Поскольку угол  $PDO$  опирается на диаметр, то он прямой, значит,  $DO$  — внешняя биссектриса угла  $ADC$ .

Заметим, что  $\angle AOC = \angle ADC = 2\angle ABC$  и  $AO = OC$ , поэтому точ-





ка  $O$  является центром описанной окружности треугольника  $ABC$ .

Пусть для определенности  $AD \geq CD$ . Пусть  $K$  – проекция точки  $O$  на  $AD$ ,  $L$  – проекция точки  $B$  на  $OD$ ,  $C'$  – точка, симметричная точке  $C$  относительно  $OD$ . Так как  $OD$  – внешняя биссектриса, то  $C'$  лежит на продолжении отрезка  $AD$  за точку  $D$ .

Из симметрии  $AC' = AD + DC' = AD + CD$  и  $OC' = OC$ . Но поскольку  $OA = OC$ , треугольник  $OAC'$  – равнобедренный, значит,  $AK = \frac{AC'}{2} = \frac{AD + CD}{2}$ . (Это рассуждение практически совпадает с решением задачи М1000 «Задачника «Кванта».) Теперь для завершения решения достаточно установить равенство отрезков  $BL$  и  $AK$ .

Имеем  $\angle AOK = 90^\circ - \angle OAD = 90^\circ - \angle OPD = \angle POD = \angle BOL$ . Получаем, что прямоугольные треугольники  $AOK$  и  $BOL$  равны по гипотенузе ( $AO = OB$ , так как  $O$  – центр описанной окружности треугольника  $ABC$ ) и острому углу. Следовательно,  $BL = AK$ , что и требовалось.

П. Кожевников

**М2150.** В стране Леонардии все дороги – с односторонним движением. Каждая дорога соединяет два города и не проходит через другие города. Департамент статистики вычислил для каждого города суммарное число жителей в городах, откуда в него ведут дороги, и суммарное число жителей в городах, куда ведут дороги из него. Докажите, что хотя бы для одного города первое число оказалось не меньше второго.

Пусть  $n(A)$  – число жителей города  $A$ , а  $f(A)$  – суммарное население городов, дороги из которых входят в  $A$ , минус суммарное население городов, в которые выходят дороги из  $A$ . Если утверждение задачи неверно, то  $f(A) < 0$  для каждого города  $A$ . Тогда сумма  $S$  чисел  $n(A)f(A)$  по всем городам страны отрицательна. С другой стороны, рассмотрим любую дорогу из города  $X$  в город  $Y$ . В число  $n(Y)f(Y)$  эта дорога вносит «вклад»  $+n(Y)n(X)$ , а в число  $n(X)f(X)$  – «вклад»  $-n(X)n(Y)$ . Сумма  $S$  получается в результате сложения «вкладов» всех дорог, поэтому  $S = 0$ . Противоречие.

*Замечание.* Отметим, что в решении мы использовали лишь тот факт, что величина «количество жителей города» положительна. Чтобы оно было целым, не требуется.

Н. Гравин

**М2151.** Числовой треугольник

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & 1 \\
 & & & & & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\
 & & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 \\
 1 & 4 & 10 & 16 & 19 & 16 & 10 & 4 & 1 \\
 & & & & & & & & \dots
 \end{array}$$

составлен по следующему правилу. В первой строке одно число, равное 1. В  $k$ -й строке ( $k = 2, 3, \dots$ )

записывается  $2k - 1$  чисел, каждое из которых равно сумме трех чисел: числа, стоящего над ним и двух его соседей в предыдущей строке (если некоторых из таких трех чисел нет, то они считаются равными 0). Докажите, что в среднем столбце не встретится чисел, дающих остаток 2 при делении на 3.

Пусть  $a_n^0, a_n^1, a_n^2, \dots, a_n^{2n}$  –  $(n + 1)$ -я строка треугольника, при этом  $a_n^i$  – число из среднего столбца. Положим также  $a_n^i = 0$ , если  $i < 0$  или  $i > 2n$ . Тогда из условия задачи  $a_{n+1}^i = a_n^i + a_n^{i-1} + a_n^{i-2}$ .

Докажем индукцией по  $n$ , что  $a_n^i$  равно коэффициенту при  $x^i$  (после приведения подобных слагаемых) в многочлене  $(x^2 + x + 1)^n$ . Это верно для  $n = 0$ . Предположив, что это верно для чисел из  $k$ -й строки, имеем

$$\begin{aligned}
 (x^2 + x + 1)^{k+1} &= (x^2 + x + 1)^k (x^2 + x + 1) = \\
 &= (a_k^{2k} x^{2k} + a_k^{2k-1} x^{2k-1} + \dots + a_k^1 x + a_k^0) (x^2 + x + 1) = \\
 &= a_k^{2k} x^{2k+2} + (a_k^{2k} + a_k^{2k-1}) x^{2k+1} + \\
 &+ (a_k^{2k} + a_k^{2k-1} + a_k^{2k-2}) x^{2k} + \\
 &+ (a_k^{2k-1} + a_k^{2k-2} + a_k^{2k-3}) x^{2k-1} + \dots + (a_k^1 + a_k^0) x + a_k^0 = \\
 &= a_{k+1}^{2k+2} x^{2k+2} + a_{k+1}^{2k+1} x^{2k+1} + \dots + a_{k+1}^1 x + a_{k+1}^0,
 \end{aligned}$$

т.е. утверждение верно и для чисел из  $(k + 1)$ -й строки.

Итак, число  $a_n^n$  равно коэффициенту при  $x^n$  в многочлене  $(x^2 + x + 1)^n$ . Но у многочленов  $(x^2 + x + 1)^n$  и  $(x^2 + x + 1 - 3x)^n = (x - 1)^{2n}$  соответствующие коэффициенты дают равные остатки при делении на 3. Так как  $(x - 1)^{2n} = x^{2n} - C_{2n}^1 x^{2n-1} + \dots + (-1)^n C_{2n}^n x^n + \dots + 1$  (где  $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$ ), то  $a_n^n \equiv (-1)^n C_{2n}^n \pmod{3}$ .

Для завершения решения остается доказать утверждение: число  $K_n = (-1)^n C_{2n}^n$  не дает остаток 2 при делении на 3. Воспользуемся индукцией по  $n$ . При  $n = 1$  утверждение верно. Докажем утверждение для числа  $K_n$ , предположив, что оно верно для всех  $K_i$ , где  $i < n$ .

Предположим вначале, что  $n$  не делится на 3. Имеем  $K_n = -K_{n-1} \cdot \frac{(2n-1)(2n)}{n^2}$ , или  $nK_n = -2(2n-1)K_{n-1} \equiv (2n-1)K_{n-1} \pmod{3}$ . Если  $n \equiv 1 \pmod{3}$ , то  $K_n \equiv K_{n-1} \pmod{3}$ ; если же  $n \equiv -1 \pmod{3}$ , то  $-K_n \equiv -3K_{n-1} \equiv 0 \pmod{3}$ , т.е.  $K_n \equiv 0 \pmod{3}$ .

Пусть теперь  $n$  делится на 3,  $n = 3m$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 K_n &= (-1)^{3m} C_{6m}^{3m} = \\
 &= (-1)^m \frac{(3m+1)(3m+2)(3m+3)\dots(6m-2)(6m-1)(6m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (3m-2)(3m-1)(3m)}.
 \end{aligned}$$

(\*)

Положим  $A = (3m + 1)(3m + 2)(3m + 4)(3m + 5) \dots$

... (6m - 2)(6m - 1) (произведение чисел, не делящихся на 3, из отрезка [3m + 1; 6m]), B = 1 · 2 · 4 · 5 · ... · (3m - 2)(3m - 1) (произведение чисел, не делящихся на 3, из отрезка [1; 3m]); ясно, что A = B + 3C для некоторого натурального C. Сократив в дроби (\*) каждый третий сомножитель на 3, получаем

$$K_n = \frac{A}{B} \cdot (-1)^m \frac{(m+1)(m+2)\dots(2m)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m} = \frac{A}{B} \cdot (-1)^m C_{2m}^m = \frac{A}{B} K_m,$$

$$BK_n = AK_m = (B + 3C)K_m,$$

и, следовательно,

$$BK_n - BK_m = B(K_n - K_m) \equiv 0 \pmod{3}.$$

Так как B не делится на 3, то (K<sub>n</sub> - K<sub>m</sub>) ≡ 0 (mod 3), или K<sub>n</sub> ≡ K<sub>m</sub> (mod 3). Нужно утверждение доказано по индукции.

И. Богданов

**M2152\***. Пара (p, q) различных простых чисел называется особой, если существует a, представимое в виде a = x<sup>p</sup> + y<sup>p</sup> = z<sup>q</sup> + t<sup>q</sup> для некоторых натуральных x, y, z, t, но не представимое в виде u<sup>pq</sup> + v<sup>pq</sup>, где u и v - натуральные числа. Докажите, что любое простое число p входит в бесконечное число особых пар.

Пусть p = 2, q = 2t + 1. Имеем 2 · 5 = 1 + 3<sup>2</sup>, поэтому для a = 2 · 5<sup>q</sup> имеем

$$a = (5^t)^2 + (3 \cdot 5^t)^2 = 5^q + 5^q.$$

Если предположить, что указанное a представимо в виде u<sup>2q</sup> + v<sup>2q</sup>, то u и v нечетные, одновременно не равные 1, значит, a = 2 · 5<sup>q</sup> ≥ 3<sup>2q</sup> + 1 > 9<sup>q</sup> и 2 > (9/5)<sup>q</sup> > 9<sup>2</sup>/5<sup>2</sup> - противоречие. Таким образом, для любого простого нечетного q пара (2, q) - особая.

Применим сходные рассуждения и в случае, когда p > 2 и q > 2. Положим 2A = 1 + 3<sup>p</sup> (нетрудно видеть, что 2A ≡ 4 (mod 8), значит, A делится на 2, но не делится на 4). Числа 1 · q, 2 · q, 3 · q, ..., (p - 1) · q дают различные ненулевые остатки при делении на p (действительно, если xq и yq дают равные остатки при делении на p, то xq - yq = (x - y)q делится на p, и значит, x - y делится на p). Поэтому можно взять α ∈ {1, 2, ..., p - 1} такое, что αq дает остаток 1 при делении на p, т.е. αq = 1 + βp для некоторого натурального β. Положим a = 2B<sup>q</sup>, где B = A<sup>α</sup>. Тогда

$$a = (A^\beta)^p + (3A^\beta)^p = B^q + B^q.$$

Теперь для решения задачи достаточно доказать, что для каждого α ∈ {1, 2, ..., p - 1} число 2B<sup>q</sup> не представляется в виде u<sup>pq</sup> + v<sup>pq</sup> при достаточно больших q.

Предположим, что равенство 2B<sup>q</sup> = (u<sup>p</sup>)<sup>q</sup> + (v<sup>p</sup>)<sup>q</sup> верно, и u ≥ v. В разложение числа u<sup>p</sup> на простые множители двойка входит в степени 0 или в степени, не меньшей p, а в разложение числа B = A<sup>α</sup> - в степени α ∈ {1, 2, ..., p - 1}, поэтому u<sup>p</sup> ≠ B. Получаем u<sup>p</sup> > B,

и значит, 2 > (u<sup>p</sup>/B)<sup>q</sup> ≥ (B+1/B)<sup>q</sup>, откуда q < log<sub>B+1/B</sub> 2.

Итак, при q > log<sub>B+1/B</sub> 2 число 2B<sup>q</sup> = 2A<sup>αq</sup> не представляется в виде u<sup>pq</sup> + v<sup>pq</sup>.

*Замечание.* Окончание рассуждения фактически состояло в доказательстве утверждения: уравнение

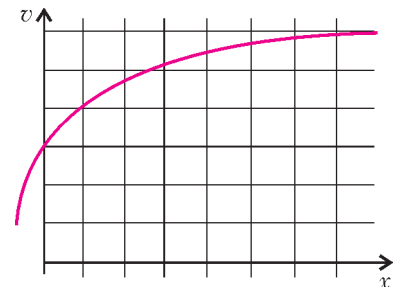
$$2B^z = x^2 + y^2,$$

где B - натуральное, имеет конечное число решений в натуральных x, y, z с различными x и y. Известно (см. по этому поводу решение задачи M2025), что ни при каком натуральном B никакая тройка (x, y, 3) решением этого уравнения не является. Значит, любая пара (p, 3), где p > 3, - особая (это нетрудно доказать и непосредственно).

Выше мы видели, что и любая пара (p, 2), где p > 2, - особая. На самом деле, особой является и любая пара различных простых p и q, где p > q ≥ 5, однако элементарное доказательство этого факта автору неизвестно. Неэлементарное основано на следующем факте: при любом фиксированном целом q > 3 на кривой x<sup>q</sup> + y<sup>q</sup> = 2 лежит конечное число рациональных точек. Представление о доказательстве этого факта можно получить из книги Н. Васильева и др. «Заочные математические олимпиады» (М.: Наука, 1987, с. 36). Этот факт означает, что множество M = {(x, y, z)} троек взаимно простых чисел таких, что x<sup>q</sup> + y<sup>q</sup> = 2z<sup>q</sup>, при q > 3 конечно. Рассмотрим число Q = 8t + 3, кратное произведению всех нечетных делителей таких чисел z; положим 2A<sub>1</sub> = 1 + Q<sup>p</sup>. Предположим, что 2B<sub>1</sub><sup>q</sup> = u<sup>pq</sup> + v<sup>pq</sup>, где B<sub>1</sub> = A<sub>1</sub><sup>α</sup>. Тогда u<sup>p</sup> = kx, v<sup>p</sup> = ky, B<sub>1</sub> = kz, где (x, y, z) ∈ M. Из построения Q ясно, что z = 2<sup>m</sup>, где m ≥ 0. Отсюда нетрудно вывести (см. решение задачи M 2108), что x = y, а значит, u = v. Рассуждая, как в решении задачи, можно привести последнее равенство к противоречию.

В. Сендеров

**Ф2160.** На графике (см. рисунок) приведена зависимость скорости точки, которая движется по оси координат X, в зависимости от ее координаты. Найдите ускорение точки в начале координатной оси и время прохождения первых пяти метров. Одна клетка по горизонтальной оси - это 1 м, по вертикальной оси - это 1 м/с.



Решение будет приближенным - график довольно «мелкий», построения получаются не слишком точными. По графику скорость точки в начальный момент равна v<sub>0</sub> = 3 м/с, а скорость возрастания нарисованной кривой в районе начальной точки графика составляет примерно Δv/Δx = 1,5 м/с на 1 м (для получения этого значения

удобно построить касательную к графику). За малый интервал времени  $\Delta t$  точка проедет  $v_0 \Delta t$  (за очень малый интервал времени скорость изменится незначительно, и для нахождения смещения можно считать ее постоянной). При этом скорость изменится на  $(\Delta v / \Delta x) v_0 \Delta t$ . Ускорение найдем, разделив эту величину на  $\Delta t$ . Получим

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta x} v_0 = 4,5 \text{ м/с}^2.$$

З.Точкин

**Ф2161.** Статуэтка школьника имеет массу 20 г, голова статуэтки сделана из серебра (плотность  $12 \text{ г/см}^3$ ), остальное – из дерева (плотность  $0,8 \text{ г/см}^3$ ). Известно, что фигурка не содержит полостей и не тонет в воде. Один грамм дерева стоит 1 рубль, один грамм серебра стоит 100 рублей. Сколько может стоить эта фигурка?

Справка: данная статуэтка художественной ценности не имеет, ее стоимость равна стоимости материалов.

Чем меньше серебра в статуэтке, тем она дешевле. Если серебра там совсем мало, то она стоит чуть больше 20 рублей – это минимальная величина. Но серебра не может быть и очень много – по условию статуэтка не тонет в воде. Максимальная цена получится при максимальном количестве серебра – в этом случае средняя плотность статуэтки равна плотности воды и объем статуэтки составляет  $20 \text{ см}^3$ . Обозначим массу серебра через  $m$ , тогда масса дерева  $(20 - m)$  и полный объем статуэтки равен

$$\frac{m}{12} + \frac{20 - m}{0,8} = 20.$$

Отсюда  $m = 4,3 \text{ г}$ , и цена статуэтки 445,7 рублей.

Итак, стоимость статуэтки находится в пределах от 20 до 445,7 рублей.

А.Несложнов

**Ф2162.** В горизонтально расположенном цилиндрическом сосуде находится порция гелия, отделенная от окружающей среды массивным поршнем, который может двигаться без трения. Наружное давление очень быстро повышают в 3 раза. Во сколько раз уменьшится объем газа к тому моменту, когда поршень окончательно перестанет двигаться?

Будем считать сосуд теплоизолированным, а теплоемкости стенок сосуда и поршня – пренебрежимо малыми. Если начальное давление газа было  $p$ , то, когда поршень окончательно остановится, давление газа будет  $3p$ . Для начального момента уравнение состояния идеального газа дает

$$pV_1 = \nu RT_1,$$

для конечного –

$$3pV_2 = \nu RT_2.$$

Если теплообмена не было, то внутренняя энергия газа увеличилась за счет работы внешних сил, которая равна  $p_{\text{внеш}}(V_1 - V_2)$ . Тогда получаем

$$3p(V_1 - V_2) = \frac{3}{2}(\nu RT_2 - \nu RT_1) = \frac{3}{2}(3pV_2 - pV_1).$$

Отсюда находим искомое уменьшение объема:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{3}.$$

А.Повторов

**Ф2163.** В глубинах космоса, вдали от других тел и полей неподвижно висит непроводящее тонкое кольцо радиусом  $R$  и массой  $M$ , равномерно заряженное по длине зарядом  $Q$ . Заряженное таким же зарядом маленькое тело массой  $m$  движется вдоль оси кольца, причем на большом расстоянии от кольца скорость тела направлена к кольцу и равна  $v_0$ . Найдите максимальную скорость кольца.

Если скорость налетающего тела  $v_0$  достаточна, чтобы пролететь сквозь кольцо, то максимальная скорость кольца получится в тот момент, когда тело находится в плоскости кольца (в его центре). Запишем уравнения сохранения импульса и энергии для системы тело-кольцо в этом случае:

$$mv_0 = mv + Mu, \quad \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} + \frac{kQ^2}{R}.$$

Исключая из этих уравнений величину  $v$  скорости тела, получим квадратное уравнение относительно скорости  $u$  кольца. Учитывая, что эта скорость должна быть меньше скорости тела, получим

$$u = \frac{mv_0}{M + m} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2kQ^2(M + m)^2}{RMm^2v_0^2}} \right).$$

Если тело не сможет пролететь через кольцо, то максимальная скорость кольца получится после того, как тело «отразится» от кольца и улетит назад очень далеко. В этом случае энергия взаимодействия зарядов окажется малой, и мы получим известную формулу для скорости кольца после абсолютно упругого удара:

$$u = \frac{2mv_0}{M + m}.$$

Условие для пролета тела через кольцо следующее: минимальная скорость тела  $v_1$  на бесконечности получится при равенстве скоростей тела и кольца при положении тела в центре кольца и составит

$$v_1 = \sqrt{\frac{2kQ^2(M + m)}{RMm}}.$$

А.Зильберман

**Ф2164.** В однородное магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$  влетает со скоростью  $\vec{v}$  частица массой  $m$  и зарядом  $q$ . Магнитное поле локализовано внутри области радиусом  $R_0$ , скорость  $\vec{v}$  направлена перпендикулярно линиям магнитной индукции, прицельный параметр удара  $p$  (рис. 1). Найдите угол рассеяния  $\theta$ , т.е. угол, на который частица отклоняется

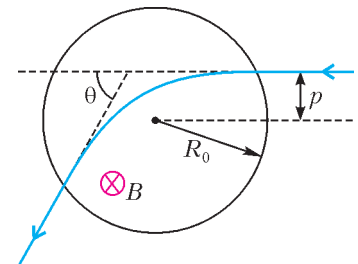


Рис. 1

(Продолжение см. на с. 34)



# Цепные дроби вокруг нас

- Всякое рациональное число  $p/q$  можно представить в виде конечной *цепной дроби*

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}$$

Числа, входящие в цепную дробь, называются *неполными частными*, из них  $a_1, \dots, a_n$  – натуральные,  $a_0$  – целое. Иррациональные числа разлагаются в бесконечные цепные дроби.

- Обрывая цепную дробь, можно получать очень хорошие рациональные приближения к данному числу, которые называются *подходящими дробями* (нумерация подходящих дробей, как и неполных частных, начинается с нуля). Для числа

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, \dots]$$

с древних времен известны приближения

$$\frac{22}{7} = [3; 7] \text{ и } \frac{355}{113} = [3; 7, 15, 1].$$

При этом

$$\left| \pi - \frac{22}{7} \right| < 2 \cdot 10^{-2}, \quad \left| \pi - \frac{355}{113} \right| < 3 \cdot 10^{-7}.$$

- *Квадратичные иррациональности* (иррациональные корни квадратных уравнений с целыми коэффициентами), и только они, раскладываются в *периодические* цепные дроби. Например (черта отмечает период),

$$\sqrt{5} = [2; 4, 4, 4, \dots] = [2; \overline{4}],$$

$$\sqrt{13} = [3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}].$$

- Если, разорвав прямоугольный лист бумаги пополам, мы хотим получить два новых листа с тем же отношением сторон, то стороны исходного листа должны относиться друг к другу как  $\sqrt{2} : 1$ . Именно таким свойством обладают форматы бумаги серии А ( $A_0, A_1, \dots$ ). Размеры стандартного листа бумаги А4 –  $210 \times 297$  мм. Их отношение

$$\frac{297}{210} = \frac{99}{70} = [1; 2, 2, 2, 2, 2]$$

есть пятая подходящая дробь к числу  $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$ . Разница между ними на глаз не заметна:

$$\left| \sqrt{2} - \frac{297}{210} \right| < 10^{-4}.$$

Произведение сторон листа (в метрах) мало отличается от  $1/16$ :

$$\left| 0,297 \cdot 0,210 - \frac{1}{16} \right| < 2 \cdot 10^{-4}.$$

Это связано с тем, что лист А4 составляет  $1/2^4 = 1/16$  от ватманского листа А0, площадь которого равна  $1 \text{ м}^2$ .

- Отношение напряжений в трехфазных электрических сетях

$$\frac{380}{220} = \frac{19}{11} = [1; 1, 2, 1, 2],$$

$$\frac{220}{127} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 3, 2]$$

– это хорошие приближения к числу

$$\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, \dots] = [1; \overline{1, 2}].$$

- Подходящие дроби к длине солнечного года, измененного в солнечных сутках, –

$$365,24219 \dots = [365; 4, 7, 1, 3, 5, \dots]$$

– позволяют строить календарные стили.

Первая подходящая дробь  $365 \frac{1}{4}$  соответствует *юлианскому стилю*, в котором каждый четвертый год – високосный. В средние века от него отказались, поскольку он дает заметную ошибку: 11 минут 14 секунд в год.

Третья подходящая дробь  $[365; 4, 7, 1] = 365 \frac{8}{33}$  лежала в основе *персидского календаря*, который в 1079 году предложил математик, астроном и поэт Омар Хайям. Такой календарь за год ошибается на 19 секунд. В нем все годы разбиты на 33-летние циклы, внутри цикла семь раз високосным считается каждый четвертый год, а на восьмой раз – пятый.

Календарь, основанный на следующем (четвертом) приближении  $[365; 4, 7, 1, 3] = 365 \frac{31}{128}$ , предлагался астрономом Иоганном Генрихом Медлером в 1864 году. Он не был принят, хотя за год давал бы ошибку всего в одну секунду.

Мы живем по *григорианскому стилю*, использующему приближение  $365 \frac{97}{400}$ . Этот календарь ошибается примерно на 27 секунд в год.

- Голландский ученый Христиан Гюйгенс в 1862 году построил один из первых механических планетариев. Теорию цепных дробей он применил при проектировании зубчатых колес, что обеспечило высокую точность во взаимном движении моделей планет.

- В ботанике известно явление *филлотаксиса* – спиралевидного расположения листьев, колючек, чешуек, семян, ... Если посчитать количество спиралей, закручивающихся в одну и в другую стороны, то, как правило, получатся два соседних числа *Фибоначчи*, т.е. числа из последовательности

$$\{F_n\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots\},$$

в которой

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

Так, на сосновой шишке есть 3 спирали, закручивающиеся в одну сторону, и 5 – в другую. На еловой – 5 и 8 спиралью соответственно, на кедровой – 8 и 13. Отношения соседних чисел Фибоначчи раскладываются в очень простые цепные дроби, например,

$$\frac{5}{3} = [1; 1, 1, 1], \quad \frac{8}{5} = [1; 1, 1, 1, 1].$$

Это подходящие дроби к числу, называемому *золотым сечением*:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = [1].$$

Расположение листьев по таким спиральям позволяет растениям получать наибольшее количество солнечных лучей.

• На рисунках 1 и 2 изображен «чертеж» сосновой шишки.

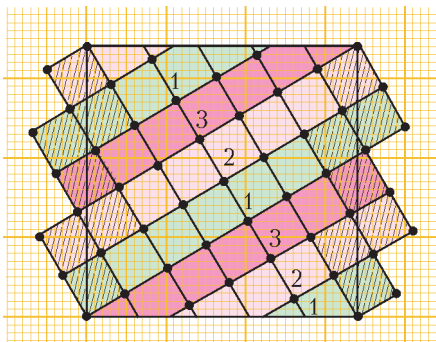


Рис. 1

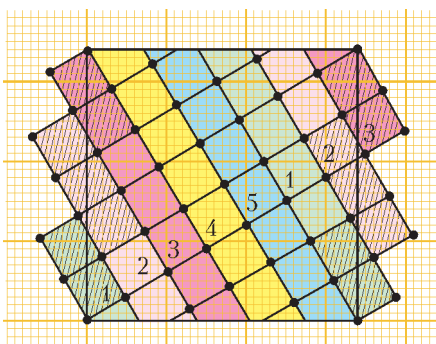


Рис. 2

Представьте, что эти квадраты вырезаны из бумаги и склеены в цилиндры (левая сторона склеена с правой, а заштрихованные квадраты одного цвета наклеены друг на друга). Тогда повернутые квадраты будут располагаться на цилиндре так же, как располагаются чешуйки на сосновой шишке. На рисунке 1 видно 3 спирали, закрученные в одну сторону, а на рисунке 2 – 5 спиралей, закрученных в другую. Попробуйте нарисовать «чертеж» еловой шишки с 5 и 8 спиральями. Воспользуйтесь для этого миллиметровой бумагой, вам понадобится квадрат  $89 \times 89$ .

• Со времен Баха в музыке используется *равномерно темперированная шкала*, содержащая 12 полутонов в каждой октаве. Если струна длины  $l$  (при заданном натяжении) издает звук «до» первой октавы, соответствующий частоте  $f$ , равной 512 колебаниям в секунду, то струна длиной  $\frac{2}{3}l$  (на струнных инструментах эта длина получается нажатием пальца в соответствующем месте) издает звук, имеющий частоту  $\frac{3}{2}f$  (натуральная квинта), а струна длиной  $\frac{1}{2}l$  издает звук, имеющий частоту  $2f$  (октава). Наше ухо при сравнении двух звуков улавливает не отношение их частот, а логарифм этого отношения. Естественней всего брать двоичный логарифм, чтобы интервал в одну октаву измерялся как единица:

$$\log_2 \frac{2f}{f} = 1.$$

Почему же возникло деление октавы именно на 12 интервалов? Чтобы октава и натуральная квинта по возможности более точно укладывались в одну и ту же *равномерную* темперацию (деление октавы на равные по слуху интервалы), октаву нужно поделить на столько частей, чтобы число  $\log_2 \frac{3}{2}$  хорошо приближалось дробью с выбранным знаменателем. Подходящими дробями к числу

$$\log_2 \frac{3}{2} = [0; 1, 1, 2, 2, 3, 1, \dots]$$

будут дроби

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \dots$$

Приближения 1 и  $1/2$  слишком грубые. Приближение  $3/5$  соответствует *пентатонике*, существовавшей у народов Востока, а приближение  $7/12$  – самое удачное. Погрешность

$$\left| \log_2 \frac{3}{2} - \frac{7}{12} \right| < 2 \cdot 10^{-3}$$

на слух неразличима.

#### Что читать в «Кванте» о цепных дробях

1. А. Бендукидзе. *Золотое сечение*. – №8 за 1973 г.
2. Н. Бескин. *Бесконечные цепные дроби*. – №8 за 1970 г.
3. Н. Бескин. *Цепные дроби*. – №1 за 1970 г.
4. А. Бялко. *Физика музыкальной гармонии*. – №5 за 1987 г.
5. Ю. Нестеренко, Е. Никишин. *Очерк о цепных дробях*. – №5–6 за 1983 г.
6. А. Прохоров. *Золотая спираль*. – №9 за 1984 г.
7. Ж. Раббот. *Знаете ли вы, что  $\frac{220}{127} \approx \sqrt{3}$ ?* – №11 за 1978 г.
8. Д. Фукс, М. Фукс. *О наилучших приближениях*. – №6 за 1971 г.

Материал подготовил А. Устинов

(Начало см. на с. 26)

от первоначального направления после прохождения магнитного поля.

В однородном магнитном поле на движущуюся заряженную частицу действует сила Лоренца  $\vec{F}_L$ . Эта сила постоянна по модулю:  $F_L = qvB$ , всегда направлена перпендикулярно скорости движения частицы и сообщает частице центростремительное ускорение  $\frac{v^2}{R}$ . Закон движения частицы по окружности можно записать в виде

$$\frac{v^2}{R} = \frac{qvB}{m},$$

что позволяет найти радиус искомой окружности:

$$R = \frac{mv}{qB}.$$

Итак, при входе в магнитное поле частица начинает двигаться по окружности радиусом  $R$ . Требуется найти угол  $\theta$  по заданным величинам  $R$ ,  $R_0$ ,  $p$ . Видим (рис.2), что частица движется по дуге окружности, центр  $A$  которой находится на прямой, проходящей через точку  $M$  и перпендикулярной первоначальному направлению движения частицы.

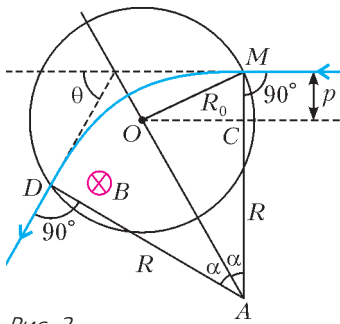


Рис. 2

При этом траектория движения частицы симметрична относительно прямой  $AO$ , проходящей через центры обеих окружностей. Более точно – по линии  $AO$  проходит плоскость симметрии, т.е. правая (от  $AO$ ) половина нашего чертежа является зеркальным отражением левой. Отсюда следует, что угол  $OAM$  равен углу  $OAD$  – на рисунке эти углы обозначены  $\alpha$ . Искомый угол  $\theta$  и угол  $DAM = 2\alpha$  равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Таким образом,  $\theta = 2\alpha$ .

Найдем угол  $\alpha$ . Сначала из прямоугольного треугольника  $CMO$  находим величину отрезка  $OC$ :

$$OC = \sqrt{R_0^2 - p^2},$$

затем из прямоугольного треугольника  $ACO$  находим угол  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OC}{AC} = \frac{\sqrt{R_0^2 - p^2}}{R - p}, \text{ или } \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{R_0^2 - p^2}}{R - p}.$$

Окончательно получаем

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{R_0^2 - p^2}}{R - p}, \text{ где } R = \frac{mv}{qB}.$$

Заметим, что в физике задачи, рассматривающие столкновение движущегося тела (частицы) с мишенью и изменение направления движения тела после столкновения встречаются довольно часто. Самый известный пример – формула Резерфорда, связывающая угол

рассеяния с параметром удара при кулоновском взаимодействии движущейся заряженной частицы с неподвижным заряженным ядром атома. В нашей задаче такой мишенью, с которой сталкивается заряженная частица, является локализованное магнитное поле. Подобные задачи имеются в астрофизике, когда рассматривается диффузия заряженных частиц в магнитных неоднородностях космической среды.

Ю.Носов

**Ф2165.** Вольтметр и миллиамперметр соединили последовательно и подключили к батарее. При этом показания приборов были 1,3 В и 0,5 мА. Теперь соединили последовательно два таких же вольтметра и тот же миллиамперметр и подключили к той же батарее – один из вольтметров показал 0,7 В. Что показывают при этом остальные два прибора? А что покажут приборы, если количество вольтметров увеличить до трех? Напряжение батарейки постоянно.

Понятно, что второй вольтметр покажет тоже 0,7 В, а показания миллиамперметра уменьшатся в  $1,3/0,7$  раз (во столько раз уменьшился ток через вольтметр) и составят  $0,5 \text{ мА} / (13/7) = 7/26 \text{ мА} \approx 0,27 \text{ мА}$ .

Ток в цепи при подключении второго вольтметра уменьшился в  $13/7$  раз, во столько же раз увеличилось полное сопротивление цепи – отсюда сразу видно, что сопротивление вольтметра в 6 раз больше сопротивления миллиамперметра. При добавлении третьего вольтметра полное сопротивление цепи по сравнению с начальным увеличится в  $19/7$  раз, тогда показания миллиамперметра будут  $7/38 \text{ мА} \approx 0,18 \text{ мА}$ , а показания каждого вольтметра составят примерно 0,48 В.

А.Простов

**Ф2166.** DVD-диск вращается очень быстро. Оцените скорость движения точки поверхности диска мимо считывающего устройства, если за 100 секунд считывается 100 миллионов бит информации. Дорожки, на которых записана информация, расположены очень близко друг к другу – расстояние между соседними дорожками составляет примерно 1/1000 миллиметра.

Тут получится довольно грубая оценка. Будем считать, что 1 бит на диске передает область размера  $1/1000$  мм на  $1/1000$  мм (как расстояние между соседними дорожками). Тогда длина дорожки на 100 миллионов бит составит 100 метров, и скорость считывания будет 10 м/с.

Р.Цифров

**Ф2167.** В фокус маленькой собирающей линзы помещают мощный точечный источник света, при этом на линзу действует очень маленькая сила  $F$ . Какой станет эта сила, если источник отодвинуть вдвое дальше? А втрое дальше? Диаметр линзы в 10 раз меньше ее фокусного расстояния.

Световое давление очень мало, поэтому упомянутый в задаче эффект совершенно незначителен. Тем не менее, модель расчета предложена. Попробуем посчитать.



Пусть источник испускает во все стороны фотоны, будем считать их энергии одинаковыми, тогда импульсы их также равны по величине. Фотоны падают на линзу из ее фокуса под различными углами, проекция импульса одного фотона на направление главной оптической оси равна  $p \cos \varphi$ . Дальше пучок фотонов движется параллельно главной оптической оси линзы – сила направлена в сторону источника. Эта сила определяется числом фотонов и разностью импульсов падающих фотонов и «прошедших сквозь линзу», т.е. получится множитель  $(1 - \cos \varphi_1) - 1$ , где нужно взять «средний угол». Его можно положить для этого случая равным  $0,5 \arctg(0,25d/F)$ . Если мы увеличим расстояние до источника до  $2F$ , расстояние до изображения в этом случае тоже будет равно  $2F$  – результирующая сила обратится в ноль. Немного сложнее ответить на второй вопрос задачи. В

этом случае источник находится на расстоянии  $3F$ , а изображение – на расстоянии  $1,5F$ . Число падающих на линзу фотонов примерно в 9 раз меньше, чем в первом случае (при заданном диаметре линзы  $d = 0,1F$  углы получаются довольно малыми), прошедшие лучи идут под большими углами, чем падающие, – сила получится направленной от источника. Разность множителей  $(1 - \cos \varphi_2) - (1 - \cos \varphi_3)$ , где углы нужно брать с учетом изменившихся расстояний от источника до линзы и от линзы до изображения, получится примерно в 3 раза меньше, чем в первом случае. Таким образом, полная сила изменит направление и уменьшится приблизительно в 30 раз. (Более точный расчет для таких случаев смысла не имеет, хотя вместо «среднего косинуса» можно было честно учесть возможные углы падения и взять несложный интеграл – ответ изменился бы незначительно.)

А.Линзов

## Как рассмотреть нанообъект в оптический микроскоп

(Начало см. на с.23)

разрешение. Приборы, работающие по этому принципу, и называются сканирующими оптическими микроскопами ближнего поля. Они появились 25 лет тому назад.

Суть второй группы методов сводится к следующему. Вместо того чтобы заставлять соседние нанообъекты светить по очереди, можно использовать объекты, которые светятся разными цветами. В этом случае с помощью светофильтров, пропускающих свет того или иного цвета, можно определять положение каждого из объектов, а потом – составлять единую картину. Это очень похоже на то, что изображено на

рисунке 5, только цвета для трех изображений будут различными.

Последняя группа методов, позволяющих преодолеть дифракционный предел и рассмотреть нанообъекты, использует свойства самих светящихся объектов. Существуют такие источники, которые можно «включать» и «выключать» с помощью специально подобранного света. Такие переключения происходят статистически. Иначе говоря, если имеется много переключаемых нанообъектов, то, подобрав длину волны света и его интенсивность, можно заставить «выключиться» только часть из этих объектов. Остальные объекты будут продолжать светить, и можно получить от них изображение. После этого надо «включить» все источники и снова «выключить» часть из них. Набор оставшихся «включенными» источников будет отличаться от набора, который остался «включенным» в

первый раз. Повторяя такую процедуру много раз, можно получить большой набор изображений, отличающихся друг от друга. Анализируя такой набор, можно установить местоположение большой доли всех источников с очень высокой точностью, значительно превышающей дифракционный предел. Пример сверхразрешения, полученного таким способом, приведен на рисунке 6.

В настоящее время оптическая микроскопия со сверхразрешением быстро развивается. Можно со всей уверенностью предполагать, что в грядущие годы эта область будет привлекать все большее число исследователей, и хочется верить, что среди них будут и читатели этой статьи.

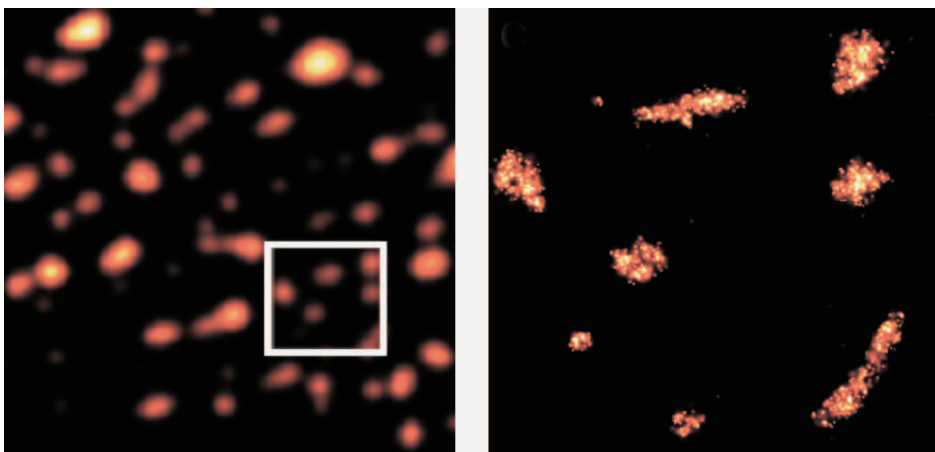
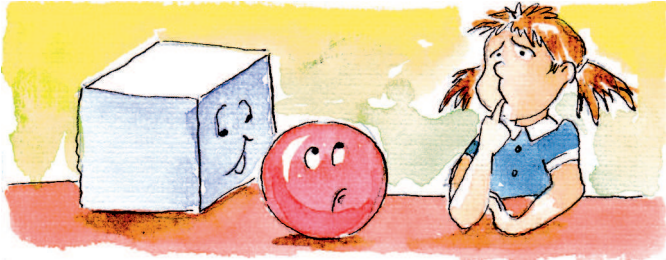


Рис.6. Сравнение изображения, полученного с помощью обычного микроскопа (слева) и одним из методов оптического сверхразрешения (справа). Сторона правого изображения соответствует 2,5 мкм. Это приблизительно в 10–12 раз больше, чем величина  $\lambda/(2n \sin u)$  для используемого объектива и длины волны света. Область, которая со сверхразрешением изображена на правом рисунке, на левом рисунке выделена квадратом

# Задачи

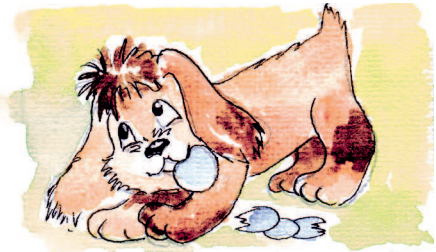
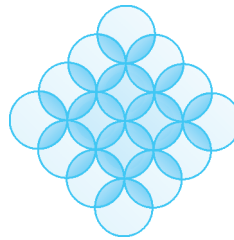
1. Число КУБ является кубом. Докажите, что число ШАР кубом не является. (Как обычно, разные заглавные буквы обозначают разные цифры.)

*А.Хачатурян*

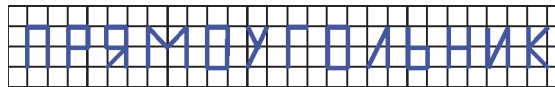


2. Круги радиуса 1 (и значит, площади  $\pi$ ) наложены друг на друга так, что их границы образуют кружевную салфетку (см. рисунок). Найдите площадь фигуры, являющейся объединением этих кругов.

*Н.Авилов*



3. Саша взял ручку с тонким пером и красиво, как его учили, по клеточкам написал слово (рис.1).



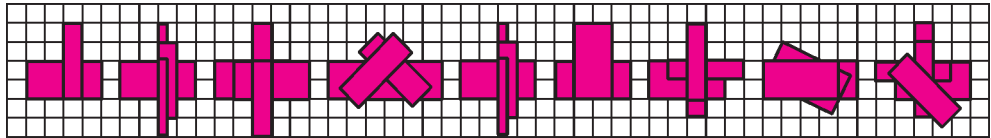
*Рис. 1*

Артем взял толстый фломастер и тоже красиво написал другое слово (рис.2).



*Рис. 2*

А Маша взяла широкое-широкое плакатное перо и написала третье слово (рис.3).



*Рис. 3*

Какое слово написала Маша?

*Е.Соколов*

4. Низкую температуру, нужную для хранения продуктов, люди издавна умели получать без холодильников. Для этого они зимой закладывали в подвалы лед, а летом размолотый лед смешивали с солью. При перемешивании льда с солью температура смеси может опуститься до  $-21^\circ\text{C}$  (проверьте это на опыте), как в современных морозильных камерах.

А зачем дворники зимой посыпают дорожки солью? Они что, хотят температуру на улице понизить?

*Е.Соколов*



5. У мудрого ламы было два ленивых ученика. Как-то лама решил их проучить и предложил сыграть в старинную игру. Они сели за круглый стол, на который было высыпано 999 спичек. Ученику, который сел по левую руку от ламы, разрешается за ход брать либо 1, либо 3, либо 5 спичек. Ученик, который сидит по правую руку от ламы, берет за ход либо 2, либо 4, либо 6 спичек. Лама, в силу своей мудрости, всегда берет ровно 1 спичку. Первый ход делает лама, затем ходы делаются по очереди по часовой стрелке. Тот, кто не может сделать ход, пропускает его. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку. Кто выиграет?

*Фольклор*



*Иллюстрации Д.Гришуковой*

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.



# Мыльные пузыри и хорды

**А. ШЕНЬ**

## Формулировка задачи

Три окружности попарно пересекаются (рис.1). Для каждой пары пересекающихся окружностей провели их общую хорду. Докажите, что три такие хорды проходят через одну точку.

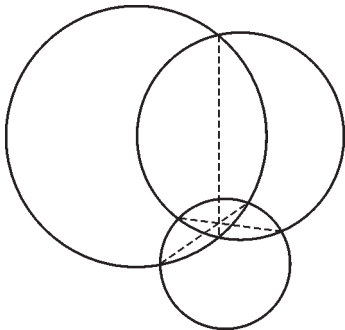


Рис. 1

Эту задачу вполне можно решить, оставаясь в рамках планиметрии (и мы приведем такое решение). Но у нее есть красивое (хотя и не вполне строгое) решение, использующее выход в пространство. Начнем издалека.

## Полусфера на плоскости

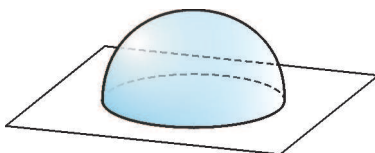


Рис. 2

Разрежем сферу плоскостью, проходящей через ее центр («по экватору»). Получатся две полусферы. Положим одну из них («северное полушарие») на плоскость (рис.2).

Как знают физики, именно такой вид (полусфера) имеет мыльный пузырь на поверхности воды (рис.3).

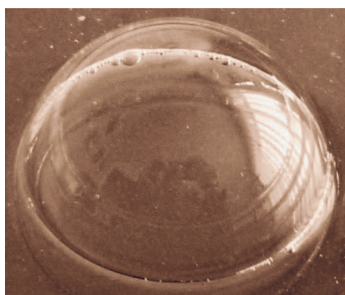


Рис. 3

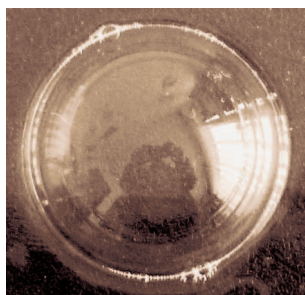


Рис. 4

Если посмотреть на него сверху, то будет видна просто окружность (рис.4).

## Две полусферы

Теперь положим на горизонтальную плоскость две полусферы так, чтобы они пересекались (рис.5). Две сферы пересекаются по окружности. Эта окружность лежит в вертикальной плоскости. (В самом деле, она перпендикулярна прямой, соединяющей центры сфер, а в нашем случае центры сфер лежат на плоскости.)

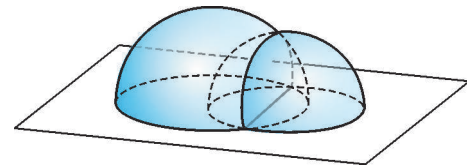


Рис. 5

И снова это хорошо видно на мыльных пузырях (рис.6).

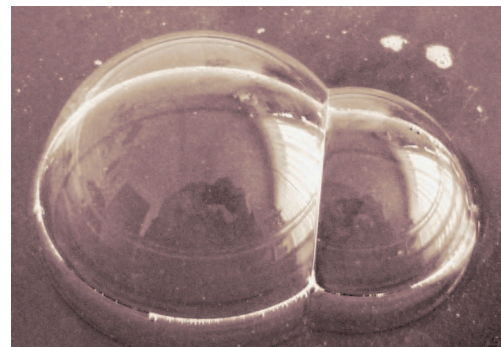


Рис. 6

Посмотрим на них сверху (рис.7): тогда от каждой полусферы мы увидим окружность (точнее, ее часть,

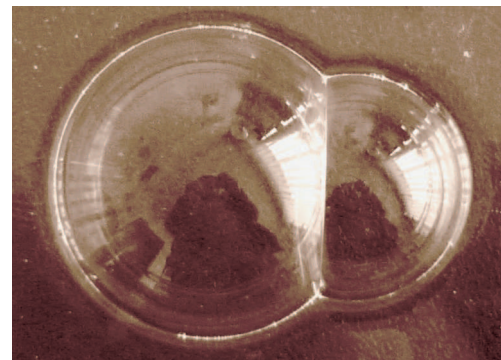


Рис. 7

лежащую вне другой). Окружность, по которой пересекаются полусферы, превратится в прямую (ведь она лежит в вертикальной плоскости).

Возвращаясь к геометрии, мы видим две окружности и общую хорду (рис.8).

## Решение задачи

Наверное, вы уже поняли, к чему идет дело и как решить нашу задачу

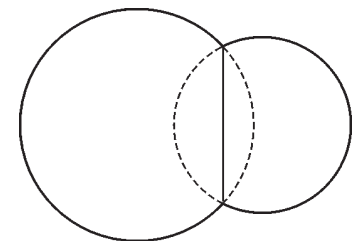


Рис. 8



с помощью выхода в пространство. Будем считать плоскость горизонтальной, а окружности на ней – изображениями сфер. Тогда линии пересечения сфер (три окружности в вертикальных плоскостях) будут изображены отрезками (общими хордами). Точка пересечения всех трех сфер попадет на эти три отрезка – значит, они проходят через общую точку, что и требовалось доказать.

В качестве иллюстрации к этому решению можно привести три примыкающих друг к другу мыльных пузыря (рис.9).

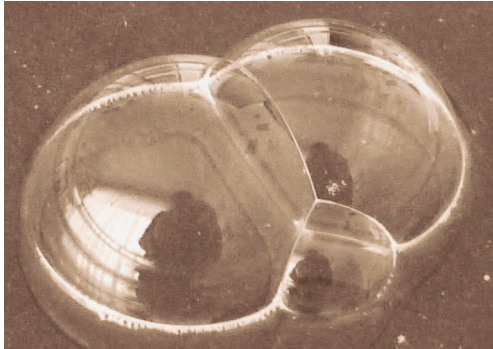


Рис. 9

Вид сверху представляет собой три окружности и три общие хорды, пересекающиеся в одной точке (рис.10). Точнее говоря, тут видны лишь части этих окружностей и хорд, находящиеся вне других пузырей (внутри

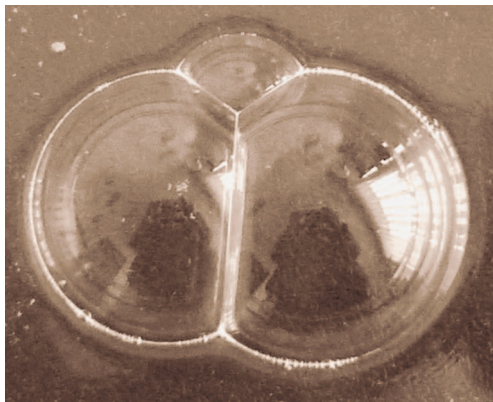


Рис. 10

пузыри устроены иначе)

### Полусфера как график

Это решение можно переделать в двумерное, если рассматривать полусферу как график функции двух переменных. Объясним, что это значит.

Представьте себе, что вы живете внутри полусферы и ее купол для вас служит потолком. Высота этого потолка в разных точках круглой комнаты разная. Самая большая высота – в центре комнаты (она равна радиусу полусферы). К краю комнаты она уменьшается до нуля (потолок становится стеной).

Как найти высоту потолка над некоторой точкой  $M$ ? Оказывается, что можно обойтись без лазерного дальномера или лестницы. Достаточно провести через точ-

ку  $M$  прямую на полу (рис.11), измерить расстояния  $a$  и  $b$  до стены в обоих направлениях и найти высоту по формуле  $h = \sqrt{ab}$  (она равна, как говорят, среднему геометрическому расстояний  $a$  и  $b$ ).

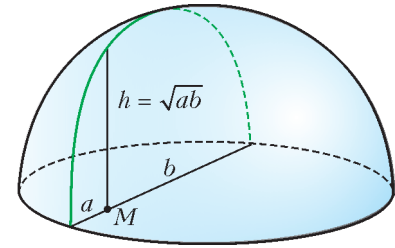


Рис. 11

В самом деле, в вертикальном сечении, проходящем через отрезки  $a$  и  $b$ , мы получаем прямоугольный треугольник, опирающийся на диаметр окружности сечения (рис.12). В нем высота  $h$  равна среднему геометрическому отрезков  $a$  и  $b$ , на которые она делит гипотенузу, поскольку прямоугольные треугольники  $AMH$  и  $HMB$  подобны:

$$a : h = h : b .$$

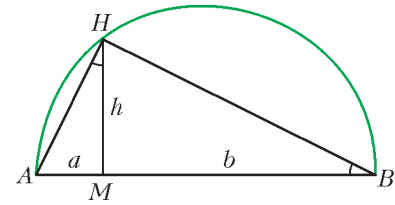


Рис. 12

### Степень точки

Заметим, что прямую на полу можно проводить по-разному, и отрезки  $a$  и  $b$  будут разными, но высота должна быть одинаковой, так что произведение  $ab$  не зависит от выбора прямой. Раньше эта теорема входила в школьный курс геометрии (теорема об отрезках пересекающихся хорд). Ее можно доказать безо всяких сфер, из подобия треугольников  $AMA'$  и  $B'MB$  (рис.13):

$$a : a' = b' : b .$$

Произведение отрезков хорды называют *степенью* точки относительно окружности; так, степень точки  $M$  равна произведению  $ab$  (а также произведению  $a'b'$ ). Таким образом, высота полусферы над точкой равна квадратному корню из степени этой точки.

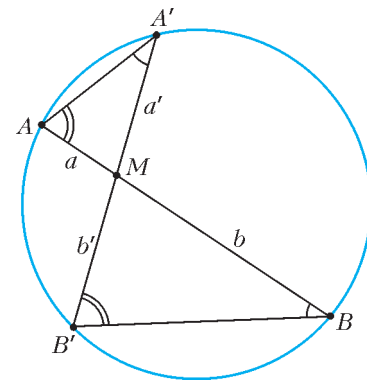


Рис. 13

Вернемся к двум полусферам, опирающимся на две окружности. Представим себе, что мы стоим под линией пересечения этих полусфер (т.е. на общей хорде окружностей). Тогда обе полусферы находятся на одной высоте. Следовательно, *если точка лежит на общей хорде двух окружностей, то ее степени относительно обеих окружностей одинаковы.*

Это, впрочем, ясно безо всяких сфер: если точка лежит на хорде, то ее степень (относительно любой из окружностей) равна произведению отрезков хорды (рис.14). А если точка лежит сбоку от хорды, то один из отрезков будет общим, а другие отрезки будут разными, так что степени тоже будут разными (рис.15).

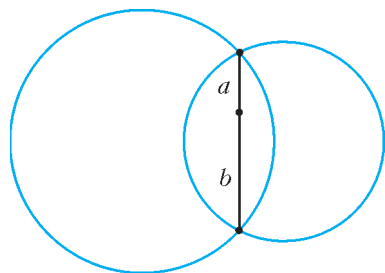


Рис. 14

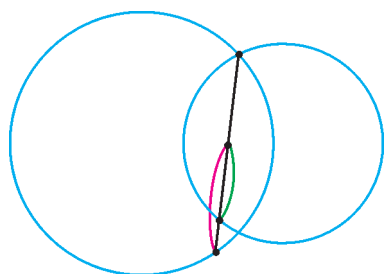


Рис. 15

**Планиметрическое решение**

Вернемся к исходной задаче и рассмотрим три пересекающихся окружности (1, 2 и 3 на рисунке 16). Проведем две общие хорды: одну – для окружностей 1 и 3 и вторую – для окружностей 2 и 3. Точки на первой хорде имеют, как мы видели, одинаковую степень относительно окружностей 1 и 3, а точки на второй хорде имеют одинаковую степень относительно окруж-

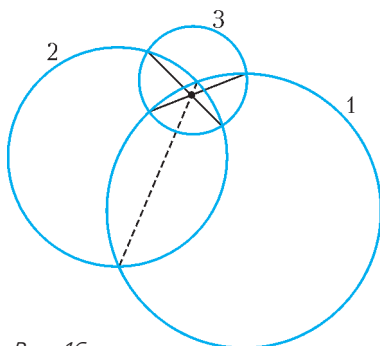


Рис. 16

ностей 2 и 3. Значит, общая точка этих двух хорд имеет одинаковую степень относительно всех трех окружностей. Поэтому она также лежит на общей хорде окружностей 1 и 2. Что и требовалось доказать.

Это решение можно пересказать так, чтобы оно стало совсем «школьным» и не использовало понятие степени (рис. 17). Проведем две общие хорды  $AB$  (окружности 2 и 3) и  $CD$  (окружности 1 и 3). Пусть  $O$  – их точка пересечения. Проведем прямую через точку  $O$  и одну из двух точек пересечения окружностей 1 и 2 (скажем, верхнюю на рисунке) – точку  $E$ .

Если утверждение задачи неверно, то эта прямая пересечет окружности 2 и 1 в различных точках. Назовем их  $F$  и  $F'$ . Теперь заметим, что

$$EO \cdot OF = AO \cdot OB$$

по теореме об отрезках двух секущих (в окружности 2).

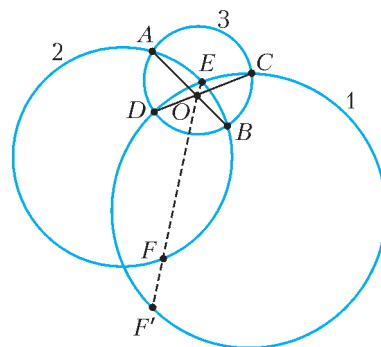


Рис. 17

По той же теореме, но уже для окружности 3, равенство можно продолжить:

$$AO \cdot OB = CO \cdot OD,$$

и дальше (окружность 1)

$$CO \cdot OD = EO \cdot OF'.$$

Сравнивая начало и конец этой цепочки равенств, получаем

$$EO \cdot OF = EO \cdot OF',$$

т.е.  $F$  и  $F'$  – одна и та же точка, что и требовалось доказать.

**Вопросы и задачи**

1. Обратите внимание, как расположена пленка, разделяющая мыльные пузыри. В какую сторону она изогнута? В каком из пузырей давление больше? (На наших фотографиях эта пленка видна плохо, так что стоит посмотреть настоящие пузыри.)

2. Чему равна степень точки, находящейся на расстоянии  $d$  от центра окружности радиуса  $r$ , относительно этой окружности?

3. Мы определили степень для точек внутри окружности. Дайте геометрическое определение для точек вне окружности, чтобы формула задачи 2 оставалась верной.

4. Рассмотрим две окружности (пересекающиеся или нет). Найдите геометрическое место точек, которые имеют одинаковую степень (в смысле предыдущей задачи) относительно этих двух окружностей.

Ответ: это прямая; она называется *радикальной осью* пары окружностей.

5. Найдите радикальную ось для пары касающихся окружностей.

6. Имеются три попарно касающиеся окружности. Через каждую из точек касания проведена общая касательная к соответствующей паре. Докажите, что три эти прямые проходят через одну точку.

7. Во всех наших рассуждениях мы неявно предполагали, что окружности не только попарно пересекаются, но и все три перекрываются (есть точка, лежащая внутри всех трех). Если такой точки нет, наши рассуждения уже не проходят. Покажите, что, тем не менее, и в этом случае три общие хорды (точнее, их продолжения) пересекаются.

# Тепловые явления глазами пассажира автобуса

В. КОТОВ

**П**ОЛЬЗУЯСЬ ОБЩЕСТВЕННЫМ ТРАНСПОРТОМ, МЫ замечаем множество происходящих вокруг нас физических явлений, в том числе и тепловых.

**Поручни салона.** Почему металлические поручни в салоне автобуса покрывают эмалью, хотя никелированные выглядят также красиво? Ответ прост. Дело здесь не в красоте, а в теплопроводности материала, к которому прикасаются руки пассажиров. Зимой поручни, покрытые эмалью, из-за малой теплопроводности последней отводят мало тепла и не создают неприятных ощущений, в то время как холодные металлические поручни обжигают руки людей холодом, отнимая у них большое количество тепла из-за хорошей теплопроводности. Но зато в жаркое время у пассажиров часто потеют ладони рук, которыми они держатся за поручни, покрытые эмалью. Теперь поручни отводят лишь малую часть выделяемого руками тепла, на что перегревшийся организм реагирует выделением пота.

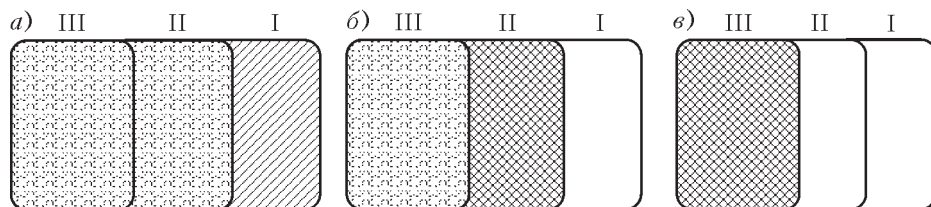
Все предметы, с которыми соприкасается тело пассажира, должны обеспечивать определенный отток тепла, не допуская переохладения зимой и перегревания летом. Поэтому становится понятной целесообразность деревянных или покрытых кожей сидений в электропоездах, подушек сидений из резины или искусственной кожи в автомобилях (дополнительно смягчают неприятные толчки на ухабах), эмалированных металлических сидений в трамваях. Все это должно создавать комфортные условия для пассажиров как зимой, так и летом.

**Дождь на стекле.** Что происходит на оконных стеклах автобуса во время дождя? Вертикально падающие капли дождя оставляют на наружной поверхности стекла наклонные водяные полоски. Причем наклон следа тем больше, чем быстрее едет автобус. А как ведут себя капли, оседающие на стекле изнутри, т.е. капли, попадающие через открытые форточки или сконденсировавшиеся на холодном стекле из влажного воздуха салона? Одни из них остаются неподвижными, а другие ползут по стеклу, оставляя за собой водяную дорожку. Ее наклон зависит (если не учитывать воздействия струи воздуха) уже не от скорости, а от ускорения автобуса. Перемещаться начинают те капли, чья сила тяжести превосходит силу сцепления со стеклом. А след за ползущей каплей остается

из-за того, что сила взаимного притяжения между молекулами воды и стекла больше, чем между молекулами воды (смачивание).

**Испарение и конденсация воды на оконном стекле после дождя.** Данное наблюдение проходило после дождя в салоне электропоезда. Внешняя температура была около 18 °С, стекло электропоезда снаружи было равномерно покрыто каплями дождя разного размера. Окна были закрыты, поэтому влажность воздуха внутри была высокой.

В процессе наблюдения различных фазовых превращений воды оказалось возможным выделить на стекле три характерные вертикальные зоны (см. рисунок). При обдувании, связанном с движением поезда, сначала испаряются капли на передней части внешней стороны стекла (зона I, рис. а), так как скорость испарения зависит от конвекции. Затем (рис. б) прилегающая к ней зона II стекла запотеваешь изнутри, при этом следующая за ней зона III изнутри остается чистой. Видимо, в зоне II происходит интенсивное испарение наружных капель, из-за потери энергии стекло охлаждается ниже точки росы, вследствие чего на нем изнутри конденсируется вода. Наиболее интенсивно испаряются наружные капли, расположенные впереди по ходу движения (в зоне II), и это препятствует испарению следующих по ходу движения капель (в зоне III) из-за повышения влажности обдуваемого их потока воздуха. После испарения наружных капель в зоне II она очищается и от внутреннего конденсата, так как интенсивная потеря энергии прекращается и температура стекла повышается. Затем начинается испарение наружных капель в зоне III, и она запотеваешь изнутри (рис. в). Наконец, зона III оказывается покрытой отдельными внутренними туманными пятнами вокруг оставшихся наружных капель. Такой процесс наблюдается до полного очищения стекла.



Наблюдаемая картина физических превращений воды на оконном стекле электропоезда. Здесь □ — чистое стекло, ■ — капли дождя на внешней стороне стекла, ▨ — испаряющиеся капли на внешней стороне стекла, ▩ — область запотевания на внутренней стороне стекла





*Ледяные узоры на стекле*

**Лед на стеклах.** Зимой окна автобуса часто бывают покрыты инеем или разрисованы изнутри морозными узорами. Их вид зависит от температуры и влажности воздуха в салоне. При малой влажности и постепенном охлаждении от 0 до  $-6^{\circ}\text{C}$  на поверхности стекла отлагается однородный слой непрозрачного рыхлого льда. В этом случае все стекло имеет температуру ниже точки росы, и влага из воздуха одновременно конденсируется по всей поверхности стекла, покрывая его слой за слоем и образуя аморфное непрозрачное состояние льда.

Если же охлаждение стекла происходит при большой влажности воздуха, а в процессе охлаждения проходит точка росы, то конденсирующаяся на стекле вода закристаллизовывается в виде морозных узоров, похожих на еловые лапы или ветки диковинных растений, отбирая при этом тепло от близлежащих участков стекла. Такие узоры называют дендритами. При дальнейшем охлаждении стекол между дендритами, а затем и на самих дендритах происходит отложение тонкого слоя инея. Иногда температура и влажность таковы, что протертое стекло замерзает прямо на глазах, покрываясь ледяными кристаллами.

Как-то после оттепели резко похолодало, и узоры из более крупных дендритов покрыли нижнюю часть оконных стекол, вверху же кристаллы были заметно мельче. Почему? Объяснить нетрудно. Кристаллы образуются из сконденсировавшейся на стекле воды, а она, вследствие действия силы тяжести, течет и скапливается внизу.

Зимой холодный воздух может проникать в салон автобуса через щели рам и открытые форточки. С ним приходит в соприкосновение теплый и влажный воздух салона, который при этом охлаждается, теряя излишнюю влагу. Почему же в местах проникновения наружного воздуха стекла не запотевают и не замерзают? В данном случае внутри салона происходят два процесса: не только теплый воздух охлаждается, но и холодный воздух, попадая в салон, нагревается и поглощает воду, так как его влагоемкость увеличивается. Это легко подтвердить экспериментально.



Если вы носите очки, то знаете (впрочем, это все знают), что зимой при входе с улицы в теплое помещение они запотевают. Но мало кто обращал внимание на следующее: стоит, не протирая очков, снова выйти на холод, как влага с них полностью испарится. Прodelайте такой опыт с куском стекла, который лучше держать не в руке, а за какую-нибудь оправу.

Приведу еще ряд наблюдений.

Один раз я подышал на протертый в замороженном окне участок, и он быстро покрылся пушистым инеем, причем с более длинными иголками, чем на остальном стекле. В другой раз при наружной температуре  $-25^{\circ}\text{C}$  на протертом участке за 5–7 минут вырос более толстый слой инея, чем на непротертом стекле, причем дышать на стекло в этот раз не пришлось. По-видимому, процесс наращивания слоя инея на стекле зависит от сочетания определенных условий: температуры и влажности в салоне и за окном. Появлялись на стекле, вырастая на глазах, и ледяные кристаллы в виде ледяных волокон (трихитов) или ледяных узоров в виде еловых лап (дендритов). Интересно, что во время роста они были окружены небольшим свободным от инея пространством стекла. Как и предполагалось ранее, выделяющаяся энергия кристаллизующейся воды влияет на условия в окружающем дендрит пространстве, препятствуя возникновению других кристаллов вблизи и вокруг растущих. Согласно измерениям ученых, осаждение льда на поверхность сопровождается колебаниями температуры вблизи нее величиной до  $+5^{\circ}\text{C}$ , что оказывает на существование в этой области ощутимого выделения тепла и передачи его путем конвекции.

Сказанное подтверждается следующим наблюдением за стоящим в депо электропоездом. Оконные стекла поезда были двойные, наружная температура воздуха была около  $-12^{\circ}\text{C}$ . На внешней поверхности внешних стекол имелись крупинки льда – от замерзших редких капель воды. Внутреннее же стекло со стороны салона было покрыто слоем белого инея с округлыми пятнами чистого стекла, центры которых совпадали с расположением замерзших капель снаружи.

# Физики в тумане

С.ВАРЛАМОВ

НАЧНЕМ С ТАКОЙ ЗАДАЧИ:

Капельки воды в тумане имеют диаметр  $10^{-5}$  м. Какова водность воздуха, если днем в тумане в десяти шагах (7 м) узнать человека уже невозможно? Водностью называется количество жидкой воды (в граммах) в  $1 \text{ м}^3$  воздуха.

Не вполне определенное условие «узнать невозможно» следует перевести на физико-математический язык. Чтобы «узнать» человека, нужно «прочитать надписи» на его лице, т.е. распознать структуру темных и светлых участков, которая у каждого человека индивидуальна.

Основными параметрами, определяющими возможность узнавания, являются острота зрения и контраст изображения на сетчатке глаза. Начнем с остроты зрения. В воздухе при отсутствии тумана человек может по четкой фотографии определенного размера узнать, кто на ней изображен, только в некотором диапазоне расстояний. Чем дальше от глаз находится фотография, тем меньше размеры ее изображения на сетчатке глаза и тем меньше светочувствительных клеток – колбочек – принимают участие в «узнавании».

Измерения, проведенные с большим количеством участников, показывают, что для большинства людей с нормальным зрением вполне доступно с расстояния 10 м распознать как отдельные одинаковые темные пятна диаметром  $a = 1$  мм с зазором между ними, равным их диаметру. Причем пятна эти располагаются на хорошо освещенной белой поверхности. Получается, что угловое разрешение глаза при нормальном зрении составляет около 1 угловой минуты. При увеличении расстояния в 2 (а тем более в 3) раза большинство людей уже не могут отличить два таких пятнышка от сплошной черточки с длиной, равной трем диаметрам пятнышек, и с такой же площадью черной поверхности. Связано это с тем, что колбочки сетчатки человеческого глаза (рис.1) имеют поперечные размеры порядка  $b = (0,001-0,004)$  мм, максимальная «длина глаза» составляет  $l \approx 25$  мм, а радиус кривизны роговицы – прозрачной передней стороны склеры (оболочки глаза) – равен  $r \approx 8$  мм. Этими тремя величинами и определяется предельное угловое разрешение – острота зрения. Если расстояние от глаза до пятнышек с размерами  $a$  обозначить через  $V$ , то предельное расстояние, на котором

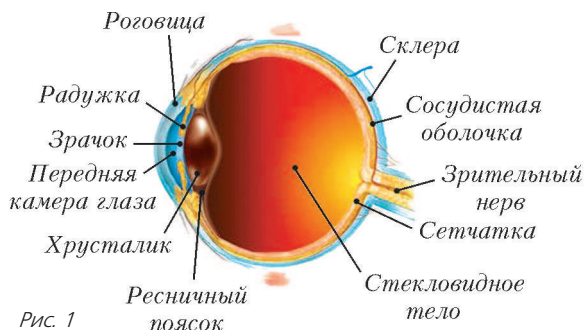
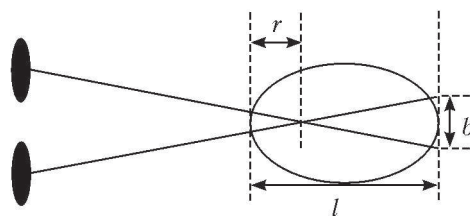


Рис. 1



еще можно различать эти пятнышки как разные, найдется из очевидного геометрического соотношения:

$$B \leq \frac{a(l-r)}{b} \approx (4-16) \text{ м}.$$

При этом изображение на сетчатке глаза, создаваемое каждым пятнышком (с диаметром 1 мм), может «накрыть» одну колбочку. Чтобы глаз мог видеть два темных пятнышка раздельными, нужно, чтобы они попадали на разные колбочки и между ними была бы как минимум одна освещенная колбочка. Если же расстояние  $B$  увеличить в 3 раза, то изображения расположенных рядом пятнышек «лягут» на одну колбочку или не попадут ни на одну колбочку – в обоих случаях различить пятнышки не удастся.

Световые пятнышки (темные или светлые) на сетчатке глаза теоретически могут иметь минимальный размер около 0,004 мм, что связано с волновой природой света. Действительно, при диаметре зрачка  $D = 6$  мм и длине волны  $\lambda = 0,5$  мкм (в воздухе) на расстоянии  $l = 25$  мм в среде с коэффициентом преломления  $n = 1,33$  диаметр пятна (по размеру первого минимума дифракционной картины) составит

$$d = 2 \cdot 1,22 \frac{\lambda l}{Dn} \approx 4 \text{ мкм}.$$

Всего колбочек на сетчатке одного глаза около 7–8 миллионов, а область наиболее резкого зрения ограничивается телесным углом с максимальным раствором порядка  $7^\circ$ . На сетчатке этому углу соответствует так называемая центральная ямка, в которой сосредоточено около 10% всех колбочек (примерно  $800 \times 800$ ), остальные колбочки распределены по поверхности сетчатки в тех местах, где глаз видит «боковым зрением». С увеличением угла отклонения лучей от направления прямого зрения до  $10^\circ$  острота зрения падает примерно в 5 раз, а при больших углах она уменьшается еще больше. И это легко понять – на периферии сетчатки в принципе невозможно получить точечное изображение светящейся точки, поэтому здесь нет необходимости иметь большую концентрацию светочувствительных клеток.

Все сказанное справедливо не только для глаза, но и для собирающей линзы в воздухе, с которой легко проводить проверочные эксперименты. Кстати, и для глаза и для простой стеклянной линзы со сферическими поверхностями параллельные лучи света, составляющие немаленькие углы с осью симметрии оптической системы, вовсе не собираются в фокальной плоскости, перпендикулярной главной оптической оси. Наилучшая концентрация таких лучей получается на кривой внутренней поверхности глаза – на сетчатке, форма которой выбиралась природой в течение миллионов лет эволюции зрячих живых существ.

При удалении от глаз наблюдателя фотографии, по которой нужно узнать человека, размер изображения на сетчатке глаза уменьшается, и, когда информации для распознавания

становится недостаточно, узнать, кто изображен на фото, становится невозможно. Насколько велико требуемое количество информации? Конкретнее: сколько пятнышек должно быть в изображении и как должны отличаться яркости этих пятнышек? С помощью компьютера можно

провести простой эксперимент, в котором цифровые фотографии одних и тех же геометрических размеров формируются разными количествами светлых и темных пятен, т.е. их «размер в пикселях» (или в колбочках) постепенно увеличивается (рис.2). Начиная с некоторого количества пятен,

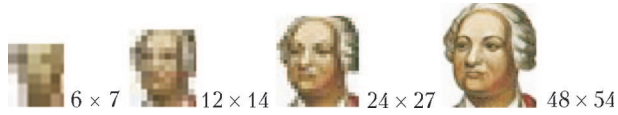


Рис. 2

можно, при небольшой доле фантазии, «узнать» изображенного человека (знакомого нам по портретам).

На светлом фоне тумана вся фигура человека и его лицо естественно выглядят темными. Максимальная относительная яркость пятен на лице определяется коэффициентом отражения света и составляет около 0,5. Есть и более темные участки изображения лица на сетчатке глаза – вплоть до контрастности 1,0, которая определяется как отношение разности максимальной и минимальной яркостей пятен к максимальной яркости. Можно выражать эту величину в процентах, тогда максимальная контрастность будет 100%.

Диапазон от 0,5 до 0,1 по степени яркости (или от 0 до 80% по контрастности) можно разбить на несколько частей. Причем для надежного распознавания деталей нужно, чтобы на границах пятен яркость скачком изменялась на заметную величину. Если изменение яркости составляет 20%, то достаточно всего четырех уровней для «заполнения» всего диапазона ( $80/20 = 4 = 2$  бита). В результате минимальное количество информации (в битах), необходимое для распознавания лица человека, равно примерно  $30 \times 30 \times 2 = 1,8 \times 10^3$ . Тогда при отсутствии тумана и при нормальном освещении человека с характерным размером головы 20 см можно узнать по лицу с расстояния, равного  $0,3 \text{ м} \times (20 \text{ см}/4 \text{ см}) \times (800/30) = 40 \text{ м}$ . Здесь 0,3 м – это расстояние наилучшего зрения, множитель  $(20 \text{ см}/4 \text{ см})$  обеспечивает «размещение» изображения лица человека на центральной ямке, а множитель  $(800/30)$  «доводит» размер изображения в колбочках до величины  $30 \times 30$ . В условии задачи указанное расстояние – 10 шагов или 7 м – гораздо меньше, чем 40 м, т.е. не это обстоятельство (уменьшение размеров изображения на сетчатке глаза) мешает узнать человека в тумане.

При наличии между глазом наблюдателя и рассматриваемым объектом «подсвеченного» тумана контрастность изоб-

ражения на сетчатке глаза убывает по мере удаления от объекта наблюдения, постепенно уменьшаясь до нуля. Это обусловлено двумя процессами, идущими одновременно. Во-первых, по мере удаления от источника свет постепенно рассеивается, но это не самое главное. А главное то, что (во-вторых) по мере увеличения толщины слоя тумана между источником света и глазом растет так называемая подсветка. Доля света, идущего напрямую в глаза наблюдателя от источника света (фотографии), падает, а доля света от других источников, рассеянного каплями тумана и тоже попадающего в глаза, растет. На серии фотографий (рис.3), приведенных для иллюстрации этого явления (подсветки), отчетливо видно, что яркость окружения не меняется, светлые пятна постепенно светлеют, пока и те и другие не сравниваются по яркости с окружением. Переход от первой пары фотографий (слева) ко второй и так далее (вправо) соответствует увеличению «плотности» тумана в определенное число раз. Постепенно фотографии становятся настолько светлыми, что по лицам уже узнать кого-либо затруднительно, а вот подписи к рисункам все еще продолжают читаться. Это говорит о том, что для распознавания образов, в частности лиц людей, важны резкие темные линии. Такие линии характеризуют форму глаз, бровей, рта, носа. Вот по этим линиям мы и узнаем тех, кто изображен на рисунке или на фотографии.

Вернемся к нашей задаче. Когда говорят об узнавании на расстоянии, то обычно предполагают, что для этой операции достаточно «одного взгляда». Поэтому мы облегчим задачу, указав в качестве минимальной контрастности величину 20%.

Капельки тумана диаметром 10 мкм значительно больше, чем длины всех видимых глазами световых волн, поэтому можно считать, что рассеивание света не зависит от длины волны, т.е. свет всех цветов рассеивается такими шариками одинаково и практически не поглощается. Поскольку на капельки, находящиеся между двумя людьми, свет падает со всех сторон, каждая капелька является шаровым источником света с определенной яркостью или силой света. Белая стена тумана – это сплошная стена из таких шариков, так как в каком бы направлении мы ни смотрели, луч зрения на некотором расстоянии обязательно «упрется» в какой-нибудь из шариков. Если на пути к объекту наблюдения 80% площади картинка будет покрыта шариками, то в этом случае контрастность видимой картинка не превысит 20 %.

Таким образом, можно будет найти связь между размерами капелек-шариков  $D_k$ , их концентрацией в воздухе  $n_k$  и расстоянием  $L$ , на котором человека в тумане узнать невозможно.

Рассмотрим слой тумана площадью  $S$  с малой толщиной  $x$ . В объеме  $Sx$  находится  $n_k Sx$  капелек. Они закрывают собой  $(\pi D_k^2 n_k \times x/4)$ -ю долю площади, т.е. незакрытой остается только  $(1 - \pi D_k^2 n_k \times x/4)$ -я доля площади. Если таких слоев много, то по мере увеличения количества слоев доля незакрытой площади становится все меньше и меньше. При общей толщине слоя

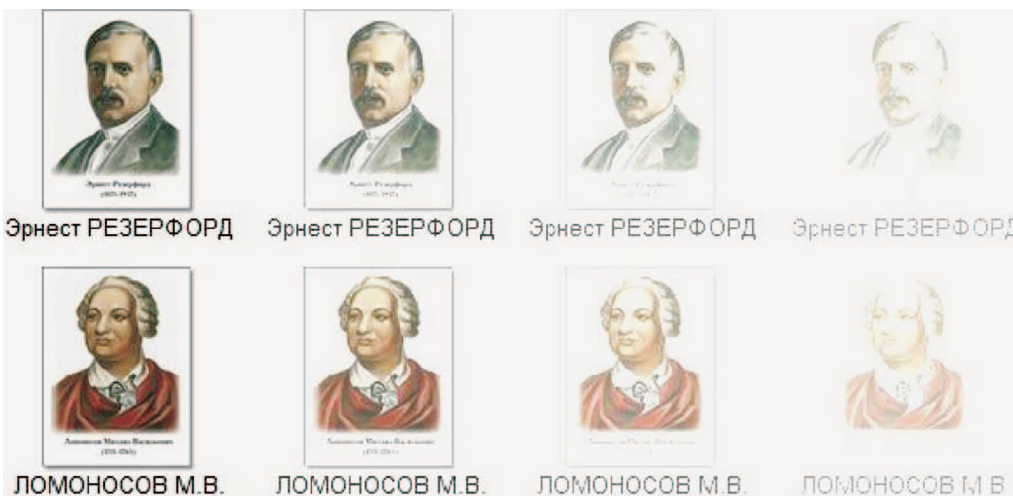


Рис. 3



тумана  $L$  доля площади, оставшейся незакрытой, равна

$$\left(1 - \frac{\pi D_k^2 n_k x}{4}\right)^{\frac{L}{x}} = \left(1 - \frac{\pi D_k^2 n_k x}{4}\right)^{\frac{4\pi D_k^2 n_k L}{4\pi D_k^2 n_k x}} = \\ = (1+y)^y \left(\frac{1}{1+y}\right)^{\frac{1}{1+y}} = e^{-\frac{\pi D_k^2 n_k L}{4}} = 0,2.$$

В этой цепочке формул малая величина  $\left(-\frac{\pi D_k^2 n_k x}{4}\right)$  обозначена символом  $y$ . А про выражение  $(1+y)^{\frac{1}{1+y}}$  известно, что при  $y \rightarrow 0$  оно имеет замечательный предел – число  $e$ . Отсюда можно найти концентрацию капель:  $n_k \approx 3 \cdot 10^9 \text{ м}^{-3}$  и искомую водность воздуха:  $\frac{\rho \pi D_k^3 n_k}{6} \approx 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3$ .

*Лирическое отступление.* Чтобы «разборчивость» наблюдаемой картинке или пейзажа стала хуже, совсем не обязательно наличие тумана. Как-то летним днем при совершенно прозрачном воздухе я рассматривал сосны на противоположном берегу пролива между островом и «большой землей» (это было летом на острове Ольхон, что на Байкале). В те промежутки времени, когда воздух над проливом шириной

в несколько километров закрывали от солнца облака, были видны мельчайшие подробности. Когда же небо над проливом очищалось от облаков, картинка берега с соснами становилась ярче, но «разборчивость» зрения резко падала именно из-за подсветки. Воздух над проливом рассеивал солнечный свет, и мелкие детали, например веточки сосен, уже не различались отчетливо.

Насколько сильно рассеивается воздухом солнечный свет, мне довелось убедиться также, наблюдая с земли за полетом самолета, который в чистом небе оставлял за собой белый след. Область воздуха, оказавшегося в тени туманного следа от самолета, летевшего по прямой линии, представляла собой «толстую стену», и я тоже находился в этой тени. Так вот, смотря на голубое небо перед самолетом и его следом, я видел темную полосу, идущую от самолета до самой земли. Ширина полосы совпадала с шириной белого следа. А справа и слева от этой темной полосы небо было прежним – голубым-голубым. В области тени, созданной самолетным следом, пропала подсветка, а толщина этого слоя воздуха с отсутствующей подсветкой составляла для моего места наблюдения несколько километров. Я ехал на машине, и через некоторое время дорога увела меня из области тени. Темная полоса на голубом небе стала светлеть и постепенно совсем пропала...

## НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

### Синицы и... физика

УЖЕ КОТОРЫЙ ГОД ОСЕНЬЮ ПРИЛЕТАЮТ В РЯЗАНЬ СИНИЦЫ и садятся на деревья и кусты рядом с нашим домом. А самые смелые прыгают на подоконники за оконными стеклами – просят еду. Синицы охотно склевывают семечки подсолнечника, которые заботливые жители ежедневно насыпают на подоконники и в подвешенные к деревьям пластмассовые коробочки.

Однако птичкам надо же что-то и пить. Обычно проблем с этим нет – весной, летом и осенью есть лужи, а зимой синицы клюют снег. Но прошлый декабрь выдался в Рязани рекордно бесснежным. Поэтому некоторые жители стали выносить птицам воду в таких же коробочках, что и семечки. Синицы проявили к ней интерес – активно утоляли жажду.

Как-то вынесенная мною коробочка с водой осталась на ночь, и вода в ней промерзла до дна. Принеся в дом бесполезный для птиц лед, я замерил время, за которое он полностью растаял, – оказалось практически точно за 5 часов.

А теперь давайте оценим время таяния льда теоретически. Удельную теплоемкость льда и его удельную теплоту плавления находим по таблицам:  $c = 2100 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ ,  $\lambda = 334000 \text{ Дж/кг}$ . Взглянем на термометры за окном:  $t_0 = -11^\circ \text{C}$  ( $T_0 = 262 \text{ К}$ ) и в кухне:  $t = 22^\circ \text{C}$  ( $T = 295 \text{ К}$ ). Определить массу льда (испарением воды в процессе таяния льда пренебрегаем) помог мерный сосуд:  $m = 0,2 \text{ кг}$ . Коробочка представляет собой усеченный конус. Обмерив ее линейкой, нетрудно было вычислить площадь полной поверхности:  $S = 0,022 \text{ м}^2$ . Количество теплоты, необходимое для таяния льда, равно

$$Q = -cmt_0 + \lambda m.$$

Теперь надо оценить эту величину, поскольку точный расчет крайне затруднителен (если вообще возможен) и уж наверняка не нужен.

Лед в сосуде получает тепло из окружающей среды за счет теплопроводности и излучения, ибо конвекция явно незначительна. Учесть теплопроводность для границы воздух–лед было трудно, так как соответствующий табличный коэффициент не удалось найти в справочниках. Но ведь еще есть граница воздух–пластмасса... Считая оба вида теплопередачи – теплопроводность и излучение – примерно равновеликими, примем, что, в соответствии с законом Стефана–Больцмана,

$$Q \sim \sigma S \tau (T^4 - T_0^4),$$

где  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Дж/(м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{К}^4)$  – постоянная Стефана–Больцмана, а  $\tau$  – искомое время таяния льда. Иными словами, полагаем, что лед поглощает тепло как абсолютно черное тело. Конечно, на самом деле он поглощает меньше, но разницу между «чернотой» и «серостью» отнесем на счет теплопроводности. Оценочные расчеты всегда физически смелы и математически просты. Иначе зачем они тогда?

Итак, получаем

$$\sigma S \tau (T^4 - T_0^4) \sim m(-ct_0 + \lambda),$$

откуда находим

$$\tau \sim \frac{m(-ct_0 + \lambda)}{\sigma S (T^4 - T_0^4)} \sim 20000 \text{ с} = 5,56 \text{ ч}.$$

Весьма хорошая точность оценочного расчета по сравнению с экспериментом говорит о принципиальной верности выбранной физической модели.

*В. Дроздов*

# Об одной забытой задаче

А. ТОЛПЫГО

*А бывает еще и так иногда: бьешься ты над какой-нибудь задачкой, а она не выходит, и тогда ты придумываешь какой-нибудь новый, очень хитрый способ, чтобы ее решить. И представь себе, опять у тебя не выходит! Вот от этого, казалось бы, совершенно бесполезного труда нередко получается неожиданная польза...*

С.Бобров. Волшебный двурог

Для начала сформулируем две задачи.

**Задача А.** Докажите, что из любых  $n$  целых чисел можно выбрать несколько, сумма которых делится на  $n$ .

**Задача В.** Докажите, что из любых  $(2n - 1)$  целых чисел можно выбрать  $n$  чисел, сумма которых делится на  $n$ .

Задача А широко известна и решается с помощью принципа Дирихле («если  $(n + 1)$  кроликов требуется рассадить по  $n$  клеткам, то хотя бы в одной клетке будет не менее двух кроликов»). А именно, надо рассмотреть числа  $S_0 = 0$ ,  $S_1 = a_1$ ,  $S_2 = a_1 + a_2$ ,  $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ , ...,  $S_n = a_1 + \dots + a_n$ . Роль «клеток», по которым нужно рассадить этих «кроликов», играют остатки от деления числа на  $n$ . По принципу Дирихле, какие-то два из «кроликов» попадают в одну «клетку», т.е. дают одинаковый остаток от деления на  $n$ . Поэтому их разность делится на  $n$ , а это и есть то, что требуется.

Напротив, задача В (когда-то она была опубликована в журнале «Квант» за 1970 год под номером М45) сейчас незаслуженно забыта. А между тем тут имеется не только замечательный математический факт, но и ряд красивых идей вокруг ее решения. Правда, как будет видно дальше, некоторые из них ведут к доказательству, другие нет. Тем не менее, полезны и те, и другие: если некоторые из них недостаточны для решения этой задачи – пригодятся в другой раз.

Ниже будет обсуждаться именно задача В. Но предварительно рассмотрим еще пару задач аналогичного типа.

## 1. Еще две задачи

**Задача С.** Даны  $N - 1$  натуральных чисел  $a_1, \dots, a_{N-1}$ . Все они больше нуля и меньше  $N$ . Известно, что если выбрано любое  $k$ ,  $0 < k < N$ , и любые  $k$  чисел из этого набора, то их сумма не делится на  $N$ . Докажите, что все числа в наборе равны между собой.

**Задача D.** Дано 100 чисел, каждое из которых больше 0 и меньше 94. Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел, сумма которых при делении на 101 дает остаток 95.

**Решение задачи С.** Предположим, что  $a_1 \neq a_2$ . Рассмотрим суммы  $S_0 = a_1$ ,  $S_1 = a_2$ ,  $S_2 = a_1 + a_2$ ,  $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ , ...

...,  $S_{N-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1}$ . (Первые две суммы равны первым двум членам, остальные – суммы от первого до соответствующего).

По предположению, ни одна из этих сумм не дает остаток 0 при делении на  $N$ . Следовательно, две из них дают одинаковый остаток, причем это не первая и вторая. Но тогда разность двух соответствующих сумм делится на  $N$ , а это противоречит условию.

**Решение задачи D.** Сразу признаемся, что мы ограничимся числом 101, отчасти чтобы облегчить формулировку, а отчасти – чтобы немного «замутить воду» и слегка прикрыть идею. На самом же деле факт верен в достаточно общей ситуации. А именно, заменим число 101 на любое простое  $p$ , а число 95 – на любое число между нулем и  $p$  и докажем, что из  $(p - 1)$  чисел, дающих ненулевой остаток от деления на  $p$ , можно составить сумму, которая дает любой наперед заданный ненулевой остаток при делении на  $p$ .

Упорядочим данные числа произвольным образом. Выберем любое  $k$ ,  $0 \leq k \leq (p - 1)$ , и возьмем первые  $k$  наших чисел. Составим из них всевозможные суммы (одно число или ни одного – тоже сумма; сумма пустого множества чисел предполагается равной 0) и запишем все различные получившиеся остатки от деления этих сумм на  $p$ . В частности, на первом шаге (если  $k = 0$ ) есть единственная сумма, и она равна 0.

При произвольном  $k$  получились некоторые числа  $M_1, \dots, M_n$ . Если среди них уже есть все возможные остатки, то доказывать нечего. Пусть это не так. Добавим к уже выбранным  $(k + 1)$ -е число (пусть оно равно  $r$ ) и опять выпишем все суммы и все остатки. В результате получатся, во-первых, числа  $M_1, \dots, M_n$  (ведь последнее число можно и не брать), а во-вторых, остатки от деления чисел  $M_1 + r, \dots, M_n + r$  на  $p$ .

Теперь мы утверждаем, что во второй группе есть хотя бы одно число, не встречающееся в первой. В самом деле, допустим противное. Тогда получается, что если остаток  $N$  совпадает с одним из  $M_i$ , то и остаток  $N + r$  также совпадает с каким-то другим числом из множества  $\{M_i\}$ . Но тогда также и остаток  $N + 2r = (N + r) + r$  также совпадает с каким-то другим числом из множества  $\{M_i\}$ , то же верно для  $N + 3r = (N + 2r) + r$ , и так далее. Отсюда легко следует, что среди  $\{M_i\}$  уже встречаются все возможные остатки от деления на  $p$ , а мы предположили, что это не так.

Таким образом, до тех пор, пока выписаны не все остатки, число различных чисел увеличивается на каждом шаге. Поскольку число шагов равно  $p$ , то не позднее чем на последнем шаге число разных остатков будет не меньше чем  $p$ , что и требуется.

Поскольку нулевая сумма возникла на первом шаге (там, где чисел не было вовсе), то нет гарантии, что можно получить сумму с остатком 0. И действительно, если взять все числа равными между собой, то остаток 0 не получается (и это, согласно задаче С, единственный случай, когда этот остаток не получается). Все остальные суммы получаются так или иначе.

## 2. Задача В. Составные числа

Вернемся теперь к задаче В. Для удобства обозначим ее утверждение как  $BC(n)$  («выбор суммы»); таким образом, запись  $BC(21)$  есть сокращение утверждения «верно, что из любых 41 целых чисел можно выбрать 21, сумма которых делится на 21».

Заметим, прежде всего, что оценку нельзя улучшить. В самом деле, если взять только  $2p - 2$  числа, то легко строится контрпример: достаточно взять  $p - 1$  нулей и  $p - 1$  единиц. Можно также нули и единицы заменить другими числами (если  $n$  простое – любыми двумя различными, случай составного  $n$  мы предоставляем разобрать читателям).

Для краткости ниже мы будем называть «набором» совокупность данных нам  $(2p - 1)$  чисел, а «группой» – его подмножество из нескольких чисел, сумма которых делится на  $p$ . Требуется доказать, что существует группа из  $p$  элементов.

Полное решение задачи (иначе говоря, утверждение  $BC(n)$  для любого  $n$ ) мы приведем в конце статьи, начнем же с доказательства несложного утверждения: *если  $BC(p)$  и  $BC(q)$ , то  $BC(pq)$* .

**Доказательство.** Пусть  $n = pq$ , и дано  $2n - 1$  чисел  $\{a_k\}$ ; согласно  $BC(p)$ , из них можно выбрать группу из  $p$  чисел, сумма которых делится на  $p$ . Отложим эту группу в сторону и рассмотрим оставшиеся числа. Поскольку остались неиспользованными более чем  $(2p - 1)$  чисел, из них можно выбрать еще одну группу, сумма которых также делится на  $p$ . Действуя так и дальше, мы получим много групп по  $p$  чисел, сумма каждой из которых делится на  $p$ ; легко убедиться, что можно получить  $(2q - 1)$  групп. Пусть  $S_1 = p \cdot r_1$ ,  $S_2 = p \cdot r_2$ , ...,  $S_{2q-1} = p \cdot r_{2q-1}$  – их суммы. Поскольку  $\{r_k\}$  – целые числа, из них, согласно  $BC(q)$ , можно выбрать  $q$  чисел, сумма которых делится на  $q$ . Тогда и сумма соответствующих  $\{S_k\}$  делится на  $pq$ , причем в этой сумме ровно столько чисел  $\{a_k\}$ , сколько требуется.

Существенно заметить, что в этом доказательстве неважно, будут ли числа  $p$  и  $q$  взаимно просты или нет. Поэтому достаточно доказать  $BC(n)$  для случая, когда  $n = p -$  простое число. Только этим случаем мы и будем заниматься в дальнейшем.

Докажем теперь утверждение  $BC(p)$  для некоторых значений  $p$ . Заметим, что хотя мы будем излагать доказательство для конкретного числа, однако факты будут верны для разных чисел. Поэтому читателю рекомендуется всякий раз прикидывать: проходит ли данное рассуждение только для данного  $p$  или его можно обобщить.

### 3. Доказательство для $p = 7$

#### 3.1. Повышение кратности нуля.

Если среди данных чисел встречаются все 7 возможных остатков, то доказывать нечего, так как  $0 + 1 + 2 + \dots + 6$  делится на 7. Поэтому можно считать, что среди наших 13 чисел встречается не более 6 разных остатков. Но тогда какой-то из них встречается не менее трех раз.

Количество раз, которое тот или иной остаток встречается в нашем наборе, мы назовем его *кратностью*. Будем считать, что кратность три (или более) имеет остаток 0. (В п. 3.3 мы покажем, как общий случай свести к этому).

Если кратность нуля не меньше 7, то доказывать опять-таки нечего. В противном случае есть не менее 7 ненулевых остатков, и, согласно задаче **A**, из них можно выбрать несколько (скажем,  $k$ ), сумма которых делится на 7.

Правда, нет оснований думать, что  $k = 7$ . Пусть  $k < 7$ ; рассмотрим два случая.

а) Если  $k > 3$ , то мы можем взять эти числа и добавить к ним несколько нулей (от одного до трех); получится группа из 7 чисел, и утверждение доказано.

б) Пусть теперь  $k \leq 3$ . Здесь надо поступить по-другому. Заменяем данный набор новым. В нем  $k$  чисел, сумма которых

равна нулю, все заменены нулями, как в таблице:

Исходный набор	0 0 0 2 2 3 1 ...
Измененный набор	0 0 0 0 0 0 1 ...

(Поскольку  $2 + 2 + 3$  делится на 7, мы заменили эти числа нулями, а остальные оставили без изменения.)

Допустим, что для нового набора утверждение задачи проверено: в нем есть группа из 7 чисел, сумма которых делится на 7. Тогда то же верно и для старого набора. В самом деле, пусть в этой группе есть несколько нулей (скажем,  $r$  нулей,  $r \geq 0$ ). Если  $r \leq 3$ , то мы берем те же числа из старого набора (ведь там есть три нуля); если же  $r > 3$ , то мы можем взять вместо трех нулей три числа старого набора, замененных нулями (сумма от этого не изменится), а прочие числа – те же, что в новом наборе.

Итак, мы свели дело к новому набору, где нулей больше, чем было (назовем это так: «прием повышения кратности нуля»). Дальше уже понятно: либо у нас уже набралось 7 нулей, либо можно повторить то же рассуждение. Мы либо получим нужный набор сразу, либо опять увеличим число нулей, и так далее. Впрочем, для семи ясно, что дальше второго шага двигаться не придется.

Можно ли применить такое же рассуждение для произвольного  $p$ ? Ответ понятен: можно, но только в том случае, если нулей достаточно много: не менее чем  $(p - 1)/2$ .

Для больших  $p$  мы, конечно, на это рассчитывать не можем, так что придется искать другие пути. Тем не менее, «прием повышения кратности» нам пригодится и дальше; только там одного его недостаточно. Пока же закончим доказательство для случая  $p = 7$ .

#### 3.2. Индукция?

Очевидно, приведенное в п. 3.1 рассуждение естественнее было бы строить методом индукции. Что же принять за ее параметр? Удобнее всего считать  $n$  (параметр индукции) равным  $(p + 1 - k)$ , где  $k$  – кратность нуля (или того остатка, который встречается чаще всего): «если  $n \leq 1$ , то один из остатков встречается не менее  $p$  раз, и утверждение очевидно; поэтому если удалось доказать, что наивысшую кратность можно увеличить (как мы делали в п. 3.1), то все доказано».

Тем не менее применять индукцию нам неудобно, и вот почему. Для произвольного  $p$  индукция, к сожалению, не проходит: если бы удалось доказать, что наивысшую кратность можно увеличить, все было бы в порядке, но доказать этого мы не можем. А в случае  $p = 7$  применение индукции вполне корректно, но... было бы «стрельбой из пушек по воробьям»: какая же индукция, если все заканчивается максимум за два шага?

#### 3.3. Сведение общего случая к частному: транзитивность.

Наше рассуждение из п. 3.1. предполагало, что наивысшую кратность имеет остаток 0. Пусть теперь чаще всего встречается, например, остаток 2. Тогда вычтем 2 из всех 13-ти данных чисел; теперь чаще всего встречается 0. При этом смысл нашей задачи не изменился: если какая-то группа из 7 чисел имела сумму, делящуюся на 7, то после вычитания двоек из суммы вычтено 14, т.е. она по-прежнему делится на 7.

Таким образом, предположение, что наивысшую кратность имеет именно такой-то остаток (нам было удобно считать, что это – остаток 0), никак не нарушает общности рассуждения: вычитая из всех данных чисел одно и то же, мы



всегда можем свести дело к этому случаю. Все остатки у нас равноправны; это свойство называют *транзитивностью*. (Более точно, говорят, что на множестве остатков по модулю  $p$  транзитивно действует группа сдвигов; объяснять точный смысл этого выражения мы здесь не будем, для нас вполне достаточно интуитивного и в данном случае вполне точного представления о том, что такое вычитание «ничего не меняет» в смысле задачи.)

#### 4. Арифметические прогрессии

##### 4.1. Сокращение количества разных чисел.

Из рассуждений п. 3 видно, что, во-первых, всегда можно считать, что набор имеет не менее трех нулей, и во-вторых – что было бы целесообразно повысить в наборе кратность нуля, если это возможно.

Когда это возможно?

Допустим, что среди остатков от деления чисел набора на  $p$  встречаются числа  $k$  и  $(p - k)$ . Тогда можно эти два числа заменить нулями; получается новый набор, который «лучше» прежнего в том смысле, что в нем на два нуля больше; при этом, если для нового набора существует группа из  $p$  чисел, то она существует и в старом наборе (как выше: если в группе два нуля или больше, то надо использовать «новые» нули, если же нулей не более одного, то хватит и старых нулей).

Если после этого есть еще одна пара чисел  $k$  и  $p - k$  (при том же  $k$ , что и раньше, или каком-то другом – неважно), ее также можно заменить нулями. Так можно действовать до тех пор, пока не окажется, что в наборе осталось не более  $(p + 1)/2$  разных чисел, а именно: число 0 и не более чем по одному из каждой пары чисел  $(l, p - l)$ .

##### 4.2. Прогрессии.

Заметим, что тройку чисел  $p - k, 0, k$  можно рассматривать как арифметическую прогрессию: нас ведь интересуют только остатки от деления на  $p$ , так что число  $p - k$  можно заменить на число  $(-k)$ .

Таким образом, мы вправе считать, что в наборе нет ни одной арифметической прогрессии из трех членов, средним членом которой является ноль.

Можно утверждать и больше: достаточно рассматривать только случай, когда среди данных остатков нет ни одной арифметической прогрессии из трех членов (и, тем более, нет более длинных).

В самом деле, если в наборе присутствуют числа  $a, a + b$  и  $a + 2b$ , то можно первое и последнее заменить на  $a + b$ .

Если в новом наборе удалось найти группу, сумма которой делится на  $p$ , то такая группа есть и в старом наборе. Достаточно, как и выше, рассмотреть два случая: когда в этой группе не более одного числа  $a + b$  и когда таких чисел два или более.

Итак, мы вправе ограничиться случаем, когда среди остатков набора нет ни одной арифметической прогрессии из трех (или более) членов.

Это достаточно сильное ограничение, и можно попытаться, исходя из него, доказать, что разных чисел среди остатков может быть не  $(p + 1)/2$  (как было показано в п. 4.1), а существенно меньше. Но мы пойдем несколько иным путем.

#### 5. Доказательство для $p = 17$

##### 5.1. Второе по счету число и вторая транзитивность.

Итак, мы предполагаем, что в наборе не слишком много разных чисел. Отсюда легко заметить, что кратность нуля не может быть меньше 4.

Хотелось бы свести общий случай к такому, когда кратность нуля еще больше: не менее 6, не менее 10... К сожалению, это не получается. Зато можно оценить кратность второго по счету числа, притом это можно сделать сразу для произвольного  $p$ .

Как выше, мы считаем, что чаще всего встречается ноль. Допустим, что второе по кратности число встречается не более 3 раз. Тогда все остальные числа встречаются не более чем  $3 \cdot \frac{p-1}{2}$  раз, откуда следует, что кратность нуля не меньше чем  $(2p - 1) - 3 \cdot \frac{p-1}{2} = \frac{p+1}{2}$ .

Но рассуждение из п. 3.1 показывает, что если кратность нуля так высока, то ее всегда можно еще повысить (применяя индукцию по методу, намеченному в п. 3.2). В конце концов она дойдет до  $p$ , а тогда задача будет решена.

Таким образом, достаточно рассматривать случай, когда вторая по величине кратность не меньше 4, как и первая (это, впрочем, не обязательно означает, что они равны; утверждается только, что обе они не меньше 4).

Если выше мы убедились в том, что первым по кратности всегда можно считать 0, то теперь мы будем утверждать, что второй по кратности остаток тоже можно выбрать по нашему желанию. При этом мы можем, как выше, считать, что вторым по кратности является, к примеру, остаток 1.

На каком основании? Дело в том, что в множестве остатков по простому модулю  $p$  можно не только складывать и умножать, но также вычитать и делить. Поскольку мы сейчас будем заниматься только случаем  $p = 17$ , ограничимся тем, что приведем примеры. Если чаще всего встречается остаток 2, умножим все числа набора на 9; при этом смысл нашей задачи не меняется (группа с суммой, делящейся на 17, остается группой), а число 2 превращается в  $18 \equiv 1 \pmod{17}$ . Если чаще всего встречается 5 – надо умножить на 7 ( $35 \equiv 1 \pmod{17}$ ), и тому подобное.

В скобках заметим, что «третьей транзитивности» здесь, к сожалению, нет: нельзя утверждать, что третье по счету число можно считать, скажем, двойкой. Это неверно.

##### 5.2. Повышение кратности.

Перейдем к доказательству для  $p = 17$ . В этом случае в нашем наборе 33 числа, и, по доказанному, мы вправе считать, что в нем не менее 4 нулей и не менее 4 единиц. Теперь, если в наборе имеются числа 13, 14, 15 или 16, то опять можно провести «увеличение кратности нуля»: например, если имеется число 13, то можно заменить числа 13, 1, 1, 1 на пять нулей, повысив кратность сразу на 5.

На первый взгляд кажется, что это ничего особенного не дает: ведь мы и так знаем, что числа набора дают не все, а только, от силы, половину разных остатков. Однако благодаря тому, что единица также имеет высокую кратность, мы можем также исключить из набора числа 2, 3, 4, 5. В самом деле, вычтем из всех чисел набора единицу; теперь у нас по-прежнему есть не менее 4 нулей (бывшие единицы) и не менее 4 чисел  $(-1)$ . Соответственно, складывая, например,  $3 + (-1) + (-1) + (-1)$ , мы получаем ноль и тем самым увеличиваем число нулей сразу на 4.

Но нет ли здесь ошибки? Ведь «новые» нули – это «бывшие» единицы, которых могло быть меньше, чем нулей; не может ли случиться, что даже после увеличения число нулей все-таки стало меньше? Может. Поэтому здесь надо немного модифицировать этот прием и увеличивать не кратность нуля, а суммарную кратность нуля и единицы (говоря

точнее – суммарную кратность тех двух чисел, которые встречаются чаще всего).

Этот прием также можно истолковать как применение индукции; только теперь индукция ведется не по параметру  $n = (p + 1 - k)$ , а по другому параметру  $n' = (p + 1 - k - l)$  ( $k$  – наивысшая кратность,  $l$  – вторая по счету). Так, в предложенном примере мы вначале имели  $k$  нулей и  $l$  единиц, а также число 4; после проведения операции имеем  $(k - 3)$  минус единицы и  $(l + 4)$  нулей. Соответственно, параметр  $n'$  уменьшился на 1.

Сделав такие операции несколько раз, мы исключим все числа 2, 3, 4, 5, 13, 14, 15, 16. Учитывая при этом, что не могут встречаться также числа  $k$  и  $(17 - k)$  одновременно, мы видим, что осталось, самое большее, шесть разных остатков, а именно:

0, 1, (6 или 11), (7 или 10), (8 или 9), 12.

### 5.3. Завершение доказательства.

Дальше уже просто. Если из 33 чисел встречается не более шести разных, то наивысшая кратность (по-прежнему считаем, что это кратность нуля) не меньше 6. Более того, если кратность единицы не выше 5, то кратность нуля не меньше  $(33 - 5 \cdot 5) = 8$ , и далее рассуждаем, как в п. 3.1.

Если же кратность единицы также 6 (или больше), то рассуждая, как в п. 5.2, мы видим, что исключены не только числа 2, 3, 4, 5, но также 6 и 7 – и, аналогично, числа с 11 до 16. Значит, возможны только 4 разных остатка:

0, 1, (8 или 9) и 10.

Но тогда кратность нуля не меньше 9, а это сразу завершает доказательство.

## 6. Оценки для больших $p$

Приведенный выше метод нетрудно применить для чисел 19 и (с некоторыми трудностями) 23. Но продвинуться дальше затруднительно. Поэтому постараемся решить несколько иную задачу: как доказать существование нужной группы из  $p$  чисел, если согласиться с тем, что в наборе не  $(2p - 1)$  чисел, а несколько больше?

**Утверждение.** Если  $p$  достаточно велико, то из любых  $p^2/8$  чисел можно выбрать группу  $p$  чисел, сумма которых делится на  $p$ .

**Набросок доказательства.** Как выше, мы считаем, что наивысшую кратность имеет 0, а вторую по счету – единица.

Допустим, что кратность единицы не превосходит  $p/5$ . Тогда и остальные кратности не больше чем  $p/5$ , а так как, по предыдущим рассуждениям, среди наших чисел не более чем  $p/2$  различных, то кратность нуля не меньше чем  $\frac{p^2}{8} - \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p}{5} > \frac{p^2}{40} > p$ , чего более чем достаточно для наших целей. Итак, кратность единицы больше  $p/5$ . Кратность нуля тем более больше чем  $p/5$ , и, рассуждая, как в п. 5.2, мы видим, что среди различных чисел набора нет ни чисел от 1 до  $p/5$ , ни чисел от  $4p/5$  до  $p - 1$ , а из оставшихся – не более половины (как в п. 4.1). Но тогда количество разных чисел не более  $3p/10$ .

Теперь повторяем то же рассуждение, но в усиленном варианте. Если кратность единицы не превосходит  $p/4$ , то та же оценка, что и выше, показывает, что кратность нуля больше  $p$ . Следовательно, кратность единицы и кратность нуля больше  $p/4$ , откуда следует, что исключаются уже все числа от 1 до  $p/4$  и от  $3p/4$  до  $p$ .

Но тогда разных чисел не более чем  $p/4$ . Отсюда кратность нуля не меньше  $p/2$ , и, как было нами замечено еще в п. 3.1, отсюда следует, что утверждение задачи верно.

*Замечание 1.* Приведенное выше рассуждение не вполне точно, так как все оценки давались с небольшой ошибкой: ошибкой в 2–3 единицы. (Например, вначале было сказано, что разных чисел не более чем  $p/2$ , тогда как в действительности – не более чем  $(p + 1)/2$ .) Постарайтесь сами исправить все эти неточности. Выясните, насколько большим должно быть  $p$ , чтобы эти неточности действительно были поправимы.

*Замечание 2.* Попробуйте заменить в приведенном рассуждении число  $p^2/8$  на меньшее, например на  $p^2/10$  или  $p^2/12$ . Как далеко вам удастся продвинуться?

## 7. Решение в общем случае

А теперь, наконец, дадим решение задачи **В** для произвольного  $p$ .

Расставим числа нашего набора в произвольном порядке:  $a_1, a_2, \dots, a_{2p-1}$ , но с таким расчетом, чтобы разность  $a_{p+k} - a_k$  не делилась на  $p$  ни при каком  $k$ . (Очевидно, это всегда можно сделать, если только какой-нибудь остаток не встречается  $p$  или более раз; этот случай мы, разумеется, можем не рассматривать.) Согласно решению задачи **Д**, из этих разностей можно выбрать несколько, дающих любой наперед заданный остаток при делении на  $p$ .

Теперь рассмотрим число  $S = a_1 + a_2 + \dots + a_p$ . Пусть  $r$  – его остаток при делении на  $p$ . Скомбинируем из чисел  $\{a_{p+k} - a_k\}$  сумму, дающую при делении на  $p$  остаток  $(p - r)$ . Тогда, прибавив эту сумму к  $S$ , мы получим снова сумму  $p$  чисел нашего набора (только некоторые из чисел  $a_k$  заменены на  $a_{p+k}$ ), и эта сумма делится на  $p$ .

Тем самым, задача решена для произвольного простого  $p$ , а в силу п. 2 – также и для любого  $n$ .

И это все? – спросит читатель. – Зачем же было столько трудиться, если задача имеет такое короткое и изящное решение?

Ответ был дан в начале статьи. Действительно, в этом решении использованы, по сути, только задачи **А** и **Д**, все остальное можно и не читать... если интересоваться только решением задачи **В**. Если же учиться решать задачи, то все приведенные выше идеи весьма полезны.

В особенности хотелось бы обратить внимание на два доказанных нами факта, которые имеют очень широкие приложения: на *первую и вторую транзитивности*. Запомните их!

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»

kvant.info

Московский центр непрерывного математического образования

kvant.mccme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»

math.child.ru

Костромской центр дополнительного образования «Эврика»

сеemat.ru

# Обтекание вращающихся тел

С. БЕТЯЕВ

**К**ОЛЕСО, ТУРБИНА, МИКСЕР, ЛОПАСТЬ ВИНТА – ВСЕ ЭТИ вращающиеся в воздухе или в жидкости тела окружают нас на каждом шагу. Хотя сложные гидродинамические явления, сопутствующие вращению тел, до конца еще не разгаданы, их моделирование легко осуществить в домашних условиях.

**Опыты Магнуса.** Первые опыты по исследованию обтекания воздухом вращающегося цилиндра поставил немецкий физик и химик, профессор Берлинского университета Генрих Густав Магнус. В 1853 году он впервые описал эффект возникновения поперечной силы, действующей на вращающееся и одновременно движущееся поступательно тело. Этот эффект вошел в историю науки как эффект Магнуса.

В те далекие времена стволы артиллерийских орудий не имели нарежки, придающей снаряду устойчивое вращение, поэтому полет пушечного ядра был неустойчивым, даже в безветренную погоду его траектория сильно отклонялась от расчетной. Прусские артиллеристы обратились к Магнусу с просьбой объяснить это явление. Ученый сразу же догадался, что причиной такого поведения ядер служило их вращение, приобретаемое при вылете из ствола вследствие случайных причин. Для подтверждения своей догадки он поставил следующий опыт.

Цилиндр *A*, свободно вращающийся вокруг вертикальной оси, располагался на одном конце стержня, а на другом его конце находился противовес *B* (рис. 1, *a*). Стержень вместе с цилиндром и противовесом мог вращаться в горизонтальной плоскости вокруг оси *OC*. Перед цилиндром располагалась труба *D*, по которой вентилятор гнал воздух. Стержень и цилиндр устанавливались так, чтобы они оставались в покое под действием набегающего потока, когда цилиндр не вращается. Если цилиндр привести во вращение, то стержень начнет отклоняться в направлении вращения цилиндра. Вид установки сверху приведен на рисунке 1, *б*, направление вращения цилиндра показано сплошной линией, а направление вращения стержня относительно оси *OC* – штриховой линией. Вращающийся в воздушном потоке цилиндр вел себя таким образом, как будто на него действовала некая

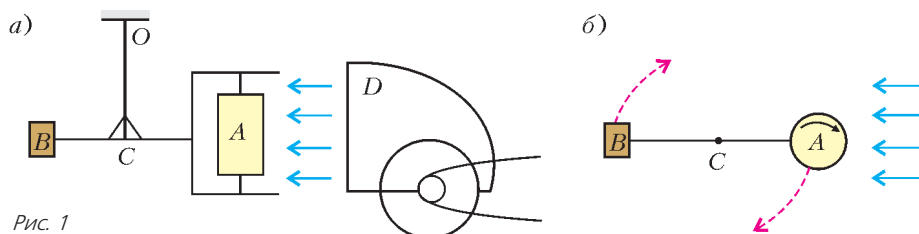


Рис. 1

неведомая сила. Она же и отклоняла пушечные ядра от расчетной траектории движения. Только спустя полвека (после теоретических исследований Н.Е. Жуковского) стало ясно, что эта загадочная сила имеет такое же происхождение, как и подъемная сила птичьего крыла или крыла самолета.

Эффект Магнуса более полно проявляется в опытах с продолговатыми телами типа цилиндра, чем с круглыми телами типа пушечных ядер. Его можно наглядно продемонстрировать с помощью легкой картонной катушки с намотанной полотняной лентой, свободный конец которой прикреплен к палочке (рис. 2). Если эту палочку дернуть вбок в горизонтальном направлении, то катушка приобретет горизонтальную составляющую скорости. Вместе с тем, разматывающаяся лента придаст катушке вращение. Возникшая при этом подъемная сила заставит цилиндр описать в воздухе замысловатую петлю.

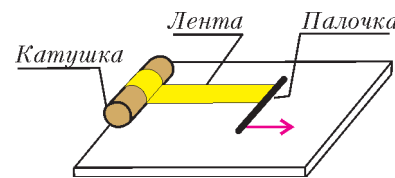


Рис. 2

Можно упростить опыт, приведя легкий цилиндр в быстрое вращение руками, а затем отпустив его в свободное падение. Траекторией движения цилиндра будет не вертикальная прямая, а пологая кривая. Кроме силы тяжести  $m\vec{g}$  и подъемной силы  $\vec{Y}$ , перпендикулярной направлению движения, на цилиндр будет действовать еще сила сопротивления  $\vec{X}$ , направленная против движения (рис. 3). Равнодействующая этих трех сил и отклоняет траекторию цилиндра от вертикали. При некотором навыке аналогичный опыт удастся провести и с продолговатой прямоугольной пластиной, вырезанной, например, из картона.

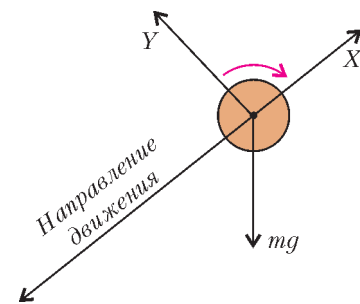


Рис. 3

Качественное объяснение природы загадочной силы *Y* дал еще И. Ньютон в 1671 году: «Я часто видел, как теннисный мяч при ударе ракеткой описывает кривую. Когда такой удар вызывает и поступательное и вращательное движение, части мяча с той стороны, где движения совпадают, должны давить на прилегающий воздух сильнее и возбуждать пропорционально большее сопротивление и противодействие воздуха». Кстати, в настоящее время установлено, что сила, действующая на рифленый мяч, почти в два раза превосходит силу, действующую при тех же условиях на гладкий мяч. (Такой удивительный эффект связан с тем, что рифленый мяч передает окружающему его воздуху гораздо больший момент количества движения, чем гладкий мяч.)

**Самовращение.** Прodelайте такой опыт. Деревянный цилиндр закрепите так, чтобы он мог свободно вращаться вокруг своей оси при несимметричном обтекании его струей воды, как это показано на рисунке 4. В какую сторону будет вращаться цилиндр? Здравый смысл, т.е. наш жизненный опыт, подсказывает, что



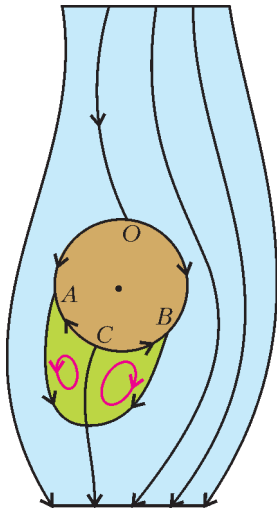


Рис. 4

цилиндр будет вращаться в ту сторону, в какую его раскручивает толстая часть струи. Однако цилиндр не всегда вращается в естественно ожидаемом направлении. При некоторых специально подобранных значениях параметров он вращается в противоположном направлении.

Наиболее правдоподобная гипотеза объясняет аномальное вращение цилиндра образованием за ним двух замкнутых зон возвратного течения, показанных на рисунке 4 зеленым цветом. Момент, вращающий цилиндр, создается касательными силами трения со стороны воды, приложенными к поверхности цилиндра. Силы трения, действующие на участках  $OA$  ( $O$  – передняя точка торможения потока) и  $BC$ , стремятся повернуть цилиндр против часовой стрелки, а силы трения, действующие на участках  $OB$  и  $AC$ , разворачивают его в противоположную сторону. Аномальному вращению цилиндра способствует тот факт, что участок  $BC$  оказывается протяженным, чем участок  $AC$ .

Такое самовращение цилиндра происходит относительно оси, перпендикулярной направлению скорости его поступательного движения. Другой случай – вращение тела вокруг продольной оси. Самовращение крыльев мельницы, винта вертолета в режиме авторотации, падающего семени клена не удивительно – на их лопасти действуют силы, каждая из которых вносит положительный вклад в создание вращательного момента. Интересно самовращение симметричного тела, когда имеет место парадокс неединственности: наряду с самовращательным движением виртуально существует и невращательное движение.

Самовращение прямоугольного крыла, установленного под углом атаки  $\alpha$ , впервые обнаружил в 1906 году замечательный русский ученый, основоположник современной аэродинамики Николай Егорович Жуковский. Крыло-пластинка (рис.5) укреплялась в центре тяжести на оси, совпадающей с направлением скорости течения, таким образом, чтобы при вращении крыла вокруг этой оси угол атаки не изменялся. На левое полукрыло и на правое полукрыло действовали подъемные силы  $\bar{Y}_1$  и  $\bar{Y}_2$ . Если крыло не вращалось, то силы были равными. За счет вращения одно полукрыло приобретало дополнительно положительный угол атаки  $\Delta\alpha$ , а другое – отрицательный. Вращающий момент создавался, если подъемная сила убывала с ростом угла атаки. Такая зависимость наблюдалась при достаточно больших значениях  $\alpha$ . В авиации самовращение проявляется в виде штопора – неуправляемого снижения интенсивно вращающегося самолета.

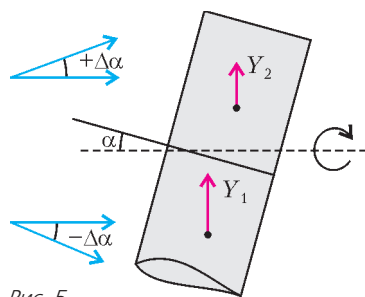


Рис. 5

Гироскопический эффект. Хотя возраст бумеранга – метательного орудия в виде серповидной доски – равен

трем тысячам лет, механизм его полета был установлен лишь в семидесятых годах двадцатого столетия. На бумеранг, как и на всякое быстро вращающееся, подобно гироскопу, тело, кроме гидродинамических сил действуют еще и гироскопические силы – его ось прецессирует вокруг вертикальной оси.

Аналогично, невращающийся снаряд под воздействием силы тяжести и силы сопротивления воздуха, направленной практически противоположно скорости движения центра тяжести снаряда и приложенной несколько выше его, опрокидывается, и дальность стрельбы значительно уменьшается из-за возрастания силы сопротивления (рис.6,а). Чтобы

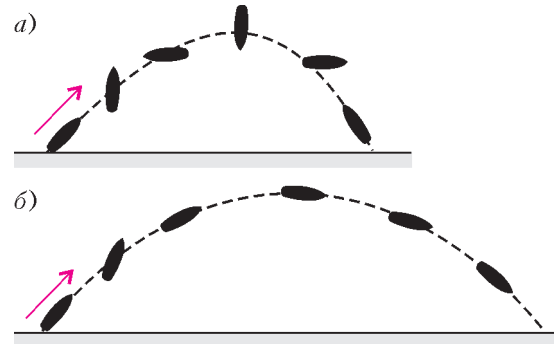


Рис. 6

снаряд стал устойчивым в полете и попадал в цель, причем головной частью (рис.6,б), он предварительно закручивается в стволе орудия, где для этого нарезана резьба. Такой принудительно вращающийся снаряд, подобно бумерангу, прецессирует вокруг прямой, направленной по скорости его движения, т.е. вокруг касательной к траектории центра тяжести. Силы тяжести снаряда  $m\bar{g}$  и сопротивления воздуха  $\bar{X}$ , действующие на снаряд, скорость его поступательного движения  $\bar{u}$  и конус прецессии (зеленый цвет) показаны на рисунке 7.

Кстати, Земля тоже является гигантским гироскопом, совершающим прецессию. Однако проявление прецессии здесь ослаблено – внутри Земли находится жидкая среда. Представление о таком движении можно получить с помощью простого опыта: залейте внутрь детского предварительно загерметизированного волчка некоторое количество воды и запустите его. Если вращающуюся игрушку на мгновение притормозить пальцем, то продолжающая вращение жидкость вновь раскрутит ее. Тот факт, что тело, заполненное жидкостью, противится вращению, мы каждый раз ощущаем, когда, вращая на столе яйцо, пытаемся определить, сырое оно или вареное. Вареное яйцо вращается «стоя», сырое – нет.

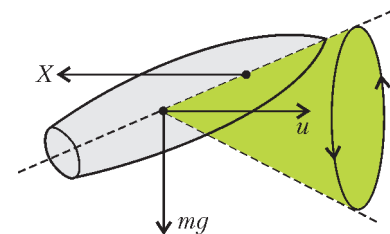


Рис. 7

Гироскопические силы действуют и на игрушку, называемую летающей тарелкой. Она способна пролететь расстояние вплоть до несколько сотен метров и возвращаться обратно.

# Задачи механики в неинерциальных системах отсчета

В. ШУТОВ

**В**РЯДЕ СЛУЧАЕВ ОКАЗЫВАЕТСЯ УДОБНЫМ РАССМАТРИВАТЬ движение тела в *неинерциальной* системе отсчета (НСО). Как надо действовать в этом случае?

Особенно просто и наглядно выглядит ответ для поступательного движения системы отсчета. Рассмотрим НСО, движущуюся поступательно с ускорением  $\vec{a}_{\text{со}}$ . Тогда, по формуле сложения ускорений,

$$\vec{a}_{\text{н}} = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{со}},$$

где  $\vec{a}_{\text{н}}$  – ускорение тела в инерциальной системе отсчета (ИСО),  $\vec{a}_{\text{отн}}$  – ускорение тела в НСО. Второй закон Ньютона  $\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}_{\text{н}}$  в НСО можно записать в виде

$$\sum_i \vec{F}_i + (-m\vec{a}_{\text{со}}) = m\vec{a}_{\text{отн}}.$$

Получаем, что в НСО второй закон Ньютона выглядит так же, как и в инерциальной системе отсчета, если к реальным силам добавить фиктивную силу, которую называют силой инерции и которая равна

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}_{\text{со}}.$$

Сила инерции, как и сила тяжести, пропорциональна массе тела. Если тело находится в поле тяжести с ускорением свободного падения  $\vec{g}$ , то можно объединить эти две силы:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{\text{ин}} = m(\vec{g} - \vec{a}_{\text{со}}) = m\vec{g}_{\text{эф}},$$

введя эффективное ускорение свободного падения

$$\vec{g}_{\text{эф}} = \vec{g} - \vec{a}_{\text{со}}.$$

Например, если тело находится в лифте, ускорение которого  $\vec{a}$  направлено вверх, то  $g_{\text{эф}} = g + a$ , а если  $\vec{a}$  направлено вниз, то  $g_{\text{эф}} = g - a$ .

**Задача 1.** Гладкий клин с углом наклона  $\alpha$  и высотой  $h$  движется горизонтально с ускорением  $a$  (рис.1). За какое время маленький брусок, помещенный на вершину клина, соскользнет к его основанию?

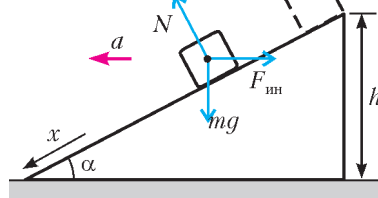


Рис. 1

**Решение.** Перейдем в систему отсчета, связанную с клином. Тогда на брусок, кроме сил тяжести  $m\vec{g}$  и реакции опоры  $\vec{N}$ , будет действовать еще сила инерции  $\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}$ . В проекции на ось  $x$  получаем

$$mg \sin \alpha - ma \cos \alpha = ma_{\text{отн}},$$

или

$$a_{\text{отн}} = g \sin \alpha - a \cos \alpha.$$

Тело будет соскальзывать вниз только при  $a < g \tan \alpha$  (при  $a = g \tan \alpha$  вектор  $\vec{g}_{\text{эф}}$  перпендикулярен плоскости клина). Время соскальзывания найдем из уравнения

$$\frac{h}{\sin \alpha} = \frac{a_{\text{отн}} t^2}{2},$$

откуда

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a_{\text{отн}} \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2h}{(g \sin \alpha - a \cos \alpha) \sin \alpha}}.$$

**Задача 2.** В сосуде с водой плавает тело. Как изменится глубина погружения тела в воду, если сосуд начнет двигаться вниз с ускорением  $a$ ?

**Решение.** В первом случае уравнение равновесия для тела имеет вид

$$F_{A1} = mg, \text{ или } \rho_{\text{в}} V_{\text{п1}} g = mg,$$

где  $V_{\text{п}}$  – объем тела, погруженного в воду. Во втором случае относительно неинерциальной системы отсчета, связанной с сосудом, тело тоже будет находиться в покое, но ускорение свободного падения нужно заменить на  $\vec{g}_{\text{эф}} = \vec{g} - \vec{a}$ . Очевидно, что направление  $\vec{g}_{\text{эф}}$  такое же, как у вектора  $\vec{g}$

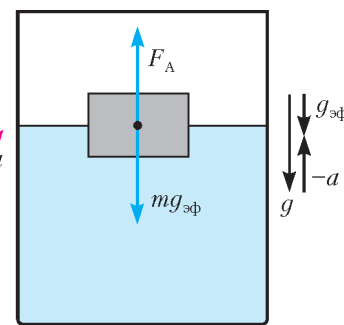


Рис. 2

(рис.2). Условие равновесия теперь будет выглядеть так:

$$F_{A2} = mg_{\text{эф}}, \text{ или } \rho_{\text{в}} V_{\text{п2}} g_{\text{эф}} = mg_{\text{эф}}.$$

Сравнивая два условия равновесия, видим, что объем погруженной в воду части тела не изменится:  $V_{\text{п1}} = V_{\text{п2}}$ , значит, глубина погружения останется прежней.

**Задача 3.** Найдите период колебаний математического маятника длиной  $l = 1$  м, находящегося в лифте, движущемся с ускорением  $a = 2 \text{ м/с}^2$ , если: а) ускорение направлено вертикально вверх; б) ускорение направлено вниз; в) ускорение направлено вправо; г) кабина лифта скользит без трения по наклонной плоскости с углом  $\alpha = 30^\circ$ .

**Решение.** Будем решать задачу относительно неинерциальной системы отсчета – кабины лифта.

В случаях а) и б) направление «вертикали» не меняется, т.е.  $\vec{g}_{\text{эф}}$  направлено действительно по вертикали.

а) Модуль эффективного ускорения свободного падения равен  $g_{\text{эф}} = g + a$  (рис.3,а), и период колебаний составляет

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g+a}} \approx 1,8 \text{ с.}$$

б) Модуль эффективного ускорения свободного падения равен  $g_{\text{эф}} = g - a$  (рис.3,б), и период колебаний составляет

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g-a}} \approx 2,2 \text{ с.}$$

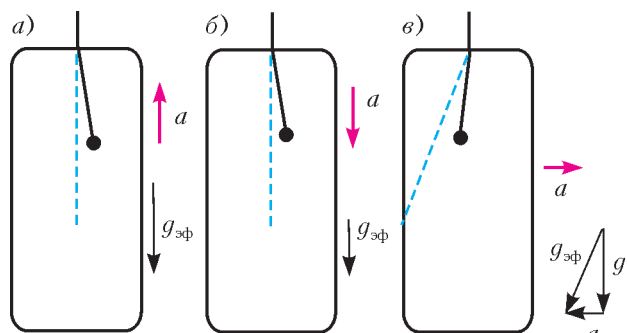


Рис. 3

в) В этом случае «вертикаль» меняет направление (рис.3,в), модуль эффективного ускорения свободного падения

$$g_{\text{эф}} = \sqrt{g^2 + a^2}, \text{ и период колебаний } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}} \approx 2 \text{ с}.$$

г) Ускорение движения лифта по гладкой наклонной плоскости, очевидно, равно  $a = g \sin \alpha$ . Решим задачу относительно ускоренно движущегося лифта. Тогда вектор  $\vec{g}_{\text{эф}}$  оказывается перпендикулярным плоскости (рис.3,з), и

$$g_{\text{эф}} = \sqrt{g^2 - a^2} = \sqrt{g^2 - g^2 \sin^2 \alpha} = g \cos \alpha. \text{ Период колебаний в этом случае равен } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_{\text{эф}}}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \alpha}} \approx 2,1 \text{ с}.$$

**Задача 4.** Через невесомый блок перекинута нить, на концах которой подвешены грузы с массами  $m_1 = 0,7 \text{ кг}$  и  $m_2 = 0,3 \text{ кг}$ . Блок перемещают вниз с ускорением  $a = 3 \text{ м/с}^2$ . Определите силу натяжения нити и ускорения грузов относительно неподвижной системы отсчета.

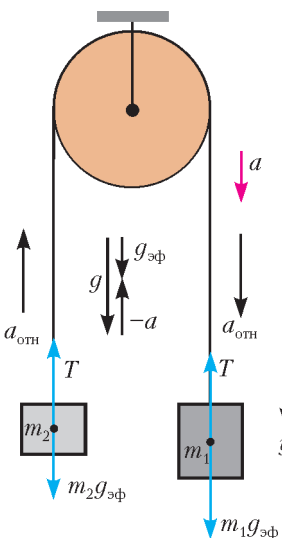


Рис. 4

**Решение.** Перейдем в систему отсчета, связанную с осью блока, в которой блок, очевидно, покоится. Ускорение свободного падения  $\vec{g}$  заменим на  $\vec{g}_{\text{эф}}$ . Направление «вертикали», определяемой вектором  $\vec{g}_{\text{эф}}$ , не меняется, а модуль этого ускорения равен  $g_{\text{эф}} = g - a$  (рис.4). Для каждого груза запишем уравнение движения:

$$m_1 a_{\text{отн}} = m_1 g_{\text{эф}} - T,$$

$$m_2 a_{\text{отн}} = T - m_2 g_{\text{эф}}.$$

Исключая из этих уравнений силу натяжения  $T$ , найдем

$$a_{\text{отн}} = g_{\text{эф}} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = (g - a) \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 2,8 \text{ м/с}^2.$$

Далее, учитывая, что  $\vec{a}_1 = \vec{a} + \vec{a}_{\text{отн}}$  и  $\vec{a}_2 = \vec{a} + \vec{a}_{\text{отн}}$ , и проецируя эти уравнения на направление оси  $y$ , получим

$$a_1 = a + a_{\text{отн}} = 5,8 \text{ м/с}^2, \quad a_2 = a - a_{\text{отн}} = 0,2 \text{ м/с}^2.$$

Силу натяжения нити можно найти из уравнения движения, например, первого груза:

$$T = m_1 (g_{\text{эф}} - a_{\text{отн}}) = m_1 (g - a - a_{\text{отн}}) = 2,94 \text{ Н}.$$

**Задача 5.** Сосуд, имеющий форму куба с ребром  $l$  и наполовину заполненный водой, движется с горизонталь-

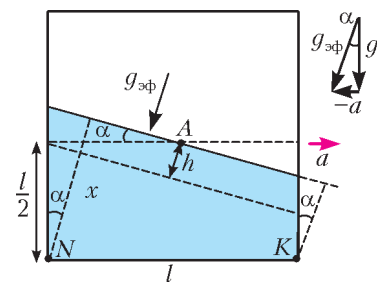
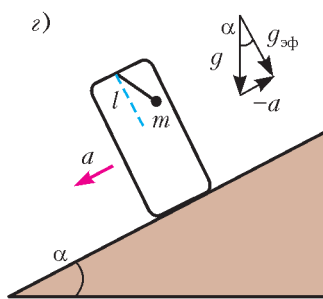


Рис. 5

ным ускорением  $a$ . Определите форму поверхности воды и давление воды на дно сосуда.

**Решение.** В инерциальной системе отсчета, связанной с землей, давление на плоскости, параллельной поверхности воды и отстоящей от нее на  $h$ , равно  $p = \rho_v g h$ . Относительно ускоренно движущегося сосуда направление «вертикали» изменится – это направление  $\vec{g}_{\text{эф}}$ , и поверхность воды будет перпендикулярна этому направлению (рис.5). Давление в жидкости будет одним и тем же на любой плоской поверхности, параллельной поверхности воды, и равным  $\rho_v g_{\text{эф}} h$ , где  $h$  – расстояние между этими плоскостями, а  $g_{\text{эф}} = \sqrt{g^2 + a^2}$ . Понятно, что точка  $A$  не изменит своего положения при движении. Из векторного треугольника для ускорений следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{g} \text{ и } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{g}{\sqrt{g^2 + a^2}}.$$

Для точки  $N$

$$x = \left( \frac{l}{2} + \frac{l}{2} \operatorname{tg} \alpha \right) \cos \alpha = \frac{l}{2} \left( 1 + \frac{a}{g} \right) \cos \alpha,$$

и давление в этой точке равно

$$p_N = \rho_v g_{\text{эф}} x = \rho_v \sqrt{g^2 + a^2} \frac{l}{2} \left( 1 + \frac{a}{g} \right) \frac{g}{\sqrt{g^2 + a^2}} = \rho_v (g + a) \frac{l}{2}.$$

Аналогично, для точки  $K$

$$x = \left( \frac{l}{2} - \frac{l}{2} \operatorname{tg} \alpha \right) \cos \alpha = \frac{l}{2} \left( 1 - \frac{a}{g} \right) \cos \alpha,$$

и давление в этой точке равно

$$p_K = \rho_v g_{\text{эф}} x = \rho_v \sqrt{g^2 + a^2} \frac{l}{2} \left( 1 - \frac{a}{g} \right) \frac{g}{\sqrt{g^2 + a^2}} = \rho_v (g - a) \frac{l}{2}.$$

Так же просто находится давление в любой другой точке жидкости.

**Задача 6.** Тройник из трех вертикальных трубок, открытых в атмосферу, полностью заполнен водой. При горизонтальном равноускоренном движении из него вылилось  $9/32$  всей массы воды. Найдите ускорение тройника.

**Решение.** При равноускоренном движении вправо уровни воды в вертикальных трубках будут такими, как показано на рисунке 6 справа (поверхность жидкости всегда перпендикулярна  $\vec{g}_{\text{эф}}$ ). Пусть масса воды в трубке единичной длины равна  $m_1$ . Тогда масса вылившейся воды

$$m = \frac{9}{32} 4m_1 L = m_1 (x + y).$$

Из подобия треугольников  $ABC$ ,  $DBE$  и треугольника для



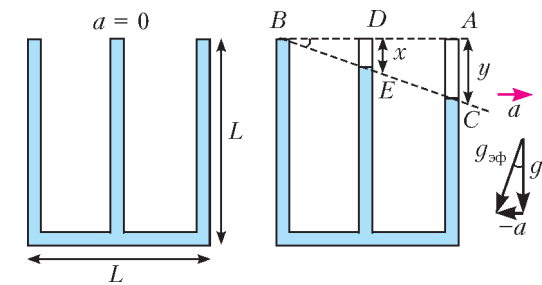


Рис. 6

ускорений следует

$$\frac{y}{L} = \frac{a}{g} \text{ и } \frac{x}{L/2} = \frac{a}{g}, \text{ откуда } y = \frac{aL}{g} \text{ и } x = \frac{aL}{2g}.$$

Подставляя значения  $x$  и  $y$  в выражение для  $m$ , получим

$$\frac{36}{32} m_1 L = m_1 \left( \frac{aL}{2g} + \frac{aL}{g} \right).$$

Отсюда находим

$$a = \frac{3}{4} g.$$

**Задача 7.** Математический маятник, прикрепленный к потолку кабины лифта, совершает колебания с периодом  $T = 1$  с и угловой амплитудой  $\alpha = 0,05$  рад. В момент прохождения маятником положения равновесия трос, удерживающий кабину, обрывается, и она начинает свободно падать. Через какое время после этого маятник ударится о потолок кабины?

**Решение.** В момент обрыва троса переходим в систему отсчета, связанную с лифтом. Поскольку лифт падает с ускорением  $\bar{g}$ , то  $\bar{g}_{эф} = \bar{g} - \bar{g} = 0$ . Это означает, что относительно лифта маятник находится в состоянии невесомости и дальнейшее движение тела будет происходить под действием только силы натяжения нити  $F_n$ , которая изменяться не будет (рис.7). Поскольку сила натяжения нити перпендикулярна скорости, тело будет двигаться по окружности с постоянной скоростью  $v$  и ударится о потолок, когда пройдет по дуге окружности расстояние  $\pi l/2$  за время  $t = \pi l/(2v)$ . Длина маятника  $l$  находится из того, что известен период колебаний:

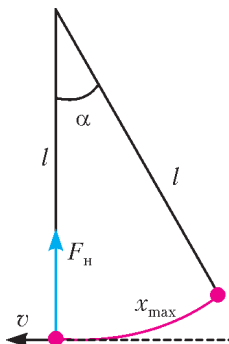


Рис. 7

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \text{ откуда } l = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = 0,25 \text{ м}.$$

Скорость, которая максимальна в момент обрыва троса, можно найти из характеристик колебательного движения:  $v = x_{\max} \omega$ , где  $x_{\max}$  — длина дуги, проходимая от положения максимального отклонения до положения равновесия, а  $\omega = 2\pi/T$ . Поскольку  $x_{\max} = l\alpha$ , а  $\omega = \sqrt{g/l}$ , то

$$v = \sqrt{gl}\alpha^2 = 0,08 \text{ м/с}.$$

Таким образом, время, прошедшее до удара о потолок, равно

$$t = \frac{\pi l}{2v} \approx 5 \text{ с}.$$

**Задача 8.** Алюминиевый шар объемом  $V_0$  и плотностью  $\rho_0$  находится в сосуде с водой. Угол между стенками сосуда и горизонтальным дном  $\alpha$ . Внутренняя поверхность сосуда гладкая. Плотность воды  $\rho$ . Найдите силу давления шара

на дно сосуда в двух случаях: 1) сосуд неподвижен; 2) сосуд движется с постоянным горизонтальным ускорением  $a$ .

**Решение.** В первом случае, когда ускорение равно нулю, боковая стенка сосуда, очевидно, не давит на шарик, иначе он не мог бы находиться в покое. Вертикальные силы, а именно сила тяжести  $m\bar{g}$ , архимедова сила  $\bar{F}_A$  и реакция опоры  $\bar{N}_1$ , уравновешены, поэтому

$$N_1 = mg - F_A = V_0 g (\rho_0 - \rho).$$

По третьему закону Ньютона такая же по величине сила давит на дно.

В случае ускоренного движения сосуда проще перейти в неинерциальную систему отсчета, связанную с ним. В этой системе сосуд покоится, и  $\bar{g}$  необходимо заменить на  $\bar{g}_{эф} = \bar{g} - \bar{a}$  (ускорение  $\bar{g}_{эф}$  определяет новое положение «вертикали»), при этом силы  $m\bar{g}_{эф}$  и  $\bar{F}_A$  ( $F_A = \rho V_0 g_{эф}$ ) направлены противоположно (рис.8).

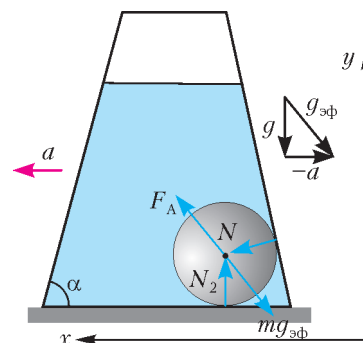


Рис. 8

Векторное уравнение равновесия шара будет иметь вид

$$V_0 \rho (\bar{a} - \bar{g}) + V_0 \rho_0 (\bar{g} - \bar{a}) + \bar{N} + \bar{N}_2 = 0,$$

или

$$V_0 \bar{g} (\rho_0 - \rho) + V_0 \bar{a} (\rho - \rho_0) + \bar{N} + \bar{N}_2 = 0.$$

Проектируя на направления осей  $x$  и  $y$ , получим

$$N \sin \alpha = V_0 a (\rho_0 - \rho) \text{ и } V_0 g (\rho_0 - \rho) + N \cos \alpha = N_2.$$

Исключая  $N$ , найдем

$$N_2 = V_0 g (\rho_0 - \rho) (g + a \operatorname{ctg} \alpha).$$

**Упражнения**

1. Два груза с массами  $m_1 = 2$  кг и  $m_2 = 1$  кг прикреплены к концам нити, перекинутой через блок, причем первоначально тяжелый груз находился на  $h = 1$  м выше легкого. С каким ускорением перемещают вверх ось блока, если грузы оказались на одинаковом уровне через  $t = 0,5$  с?

2. Прямоугольный бак без крышки движется с горизонтальным ускорением. В бак налита вода до уровня  $h$ . Известны также длина бака  $l$  и его высота  $H$ . Каким должно быть ускорение бака, чтобы вода начала выливаться из него?

3. Сосуд с водой (рис.9) движется с горизонтальным ускорением. Трубки, из которых состоит сосуд, тонкие, расстояние между вертикальными трубками  $l = 20$  см, разность уровней воды в этих трубках  $h = 1$  см. С каким ускорением движется сосуд?

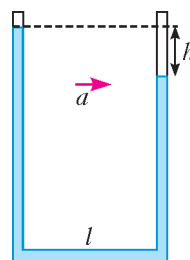


Рис. 9

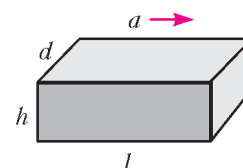


Рис. 10

4. Цистерна (рис.10) полностью заполнена водой и движется с горизонтальным ускорением  $a$ . Определите силу, с которой вода действует на крышку цистерны.

# Региональный этап XXXVI Всероссийской олимпиады школьников по математике

В 2009/10 учебном году региональный этап Всероссийской олимпиады школьников проводился одновременно во всех регионах России по единым заданиям и носил отборочный характер для участия в заключительном этапе Всероссийской олимпиады. В вариант вошли задачи разной тематики (алгебра, теория чисел, геометрия, комбинаторика) и различной трудности. Особенно сложными для участников оказались задачи 4 в 9 классе, задачи 3 и 7 в 10 классе и задача 8 в 11 классе.

## ЗАДАЧИ

9 класс

Первый день

1. Даны квадратные трехчлены  $f_1(x) = x^2 + 2a_1x + b_1$ ,  $f_2(x) = x^2 + 2a_2x + b_2$ ,  $f_3(x) = x^2 + 2a_3x + b_3$ . Известно, что  $a_1a_2a_3 = b_1b_2b_3 > 1$ . Докажите, что хотя бы один из этих трехчленов имеет два корня.

*Н.Агаханов*

2. Семь лыжников с номерами 1, 2, ..., 7 ушли со старта по очереди и прошли дистанцию – каждый со своей постоянной скоростью. Оказалось, что каждый лыжник ровно дважды участвовал в обгонах. (В каждом обгоне участвуют ровно два лыжника – тот, кто обгоняет, и тот, кого обгоняют.) По окончании забега должен быть составлен протокол, состоящий из номеров лыжников в порядке финиширования. Докажите, что в забеге с описанными свойствами может получиться не более двух различных протоколов.

*С.Волчёнков*

3. См. задачу M2171 «Задачника «Кванта».

4. В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $60^\circ$ . Пусть  $BB_1$  и  $CC_1$  – биссектрисы этого треугольника. Докажите, что точка, симметричная вершине  $A$  относительно прямой  $B_1C_1$ , лежит на стороне  $BC$ .

*Д.Прокопенко*

Второй день

5. Незнайка выписал по кругу 11 натуральных чисел. Для каждых двух соседних чисел он посчитал их разность. В результате среди найденных разностей оказалось четыре единицы, четыре двойки и три тройки. Докажите, что Незнайка где-то допустил ошибку.

*Р.Женодаров*

6. Пусть точки  $A, B, C$  лежат на окружности, а прямая  $b$  касается этой окружности в точке  $B$ . Из точки  $P$ , лежащей на прямой  $b$ , опущены перпендикуляры  $PA_1$  и  $PC_1$  на прямые  $AB$  и  $BC$  соответственно (точки  $A_1$  и  $C_1$  лежат на отрезках  $AB$  и  $BC$ ). Докажите, что  $A_1C_1 \perp AC$ .

*Л.Емельянов*

7. В компании из семи человек любые шесть могут сесть за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми. Докажите, что и всю компанию можно посадить за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми.

*С.Волчёнков*

8. Для каждого натурального  $n$  обозначим через  $S_n$  сумму первых  $n$  простых чисел:  $S_1 = 2$ ,  $S_2 = 2 + 3 = 5$ ,  $S_3 = 2 + 3 + 5 = 10$ , ... Могут ли два подряд идущих члена последовательности  $(S_n)$  оказаться квадратами натуральных чисел?

*В.Шарич*

10 класс

Первый день

1. Девять лыжников ушли со старта по очереди и прошли дистанцию – каждый со своей постоянной скоростью. Могло ли оказаться, что каждый лыжник участвовал ровно в четырех обгонах? (В каждом обгоне участвуют ровно два лыжника – тот, кто обгоняет, и тот, кого обгоняют.)

*И.Богданов, С.Волчёнков*

2. См. задачу M2171 «Задачника «Кванта».

3. См. задачу M2172 «Задачника «Кванта».

4. Натуральное число  $b$  назовем *удачным*, если для любого натурального  $a$  такого, что  $a^5$  делится на  $b^2$ , число  $a^2$  делится на  $b$ . Найдите количество удачных натуральных чисел, меньших 2010.

*П.Кожевников*

Второй день

5. Ненулевые числа  $a, b, c$  таковы, что  $ax^2 + bx + c > cx$  при любом  $x$ . Докажите, что  $cx^2 - bx + a > cx - b$  при любом  $x$ .

*М.Мурашкин*

6. Прямые, касающиеся окружности  $\omega$  в точках  $B$  и  $D$ , пересекаются в точке  $P$ . Прямая, проходящая через  $P$ , высекает на окружности хорду  $AC$ . Через произвольную точку отрезка  $AC$  проведена прямая, параллельная  $BD$ . Докажите, что она делит длины ломаных  $ABC$  и  $ADC$  в одинаковых отношениях.

*Л.Емельянов*

7. Существуют ли три попарно различных ненулевых целых числа, сумма которых равна нулю, а сумма тринадцатых степеней которых является квадратом некоторого натурального числа?

*В.Сендеров*

8. Назовем *лестницей высоты  $n$*  фигуру, состоящую из всех клеток квадрата  $n \times n$ , лежащих не выше диагонали. Сколькими различными способами можно разбить лестни-

цу высоты  $n$  на несколько прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, а площади попарно различны?

*Д.Храмцов*

11 класс

Первый день

1. Каждый катет прямоугольного треугольника увеличили на единицу. Могла ли его гипотенуза увеличиться более чем на  $\sqrt{2}$ ?

*С.Волчёнков*

2. В ряду из 2009 гирек масса каждой гирьки составляет целое число граммов и не превышает 1 кг. Массы любых двух соседних гирек отличаются ровно на 1 г, а общая масса всех гирь в граммах является четным числом. Докажите, что гирьки можно разделить на две кучки, суммы масс в которых равны.

*Д.Храмцов*

3. Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность с диаметром  $AC$ . Точки  $K$  и  $M$  – проекции на прямую  $BD$  вершин  $A$  и  $C$  соответственно. Через точку  $K$  проведена прямая, параллельная  $BC$  и пересекающая  $AC$  в точке  $P$ . Докажите, что угол  $KPM$  прямой.

*Т.Емельянова*

4. Назовем тройку натуральных чисел  $(a, b, c)$  *квадратной*, если они образуют возрастающую арифметическую прогрессию (именно в таком порядке), число  $b$  взаимно просто с каждым из чисел  $a$  и  $c$ , а число  $abc$  является точным квадратом. Докажите, что для любой квадратной тройки

найдется другая квадратная тройка, имеющая с ней хотя бы одно общее число.

*В.Сендеров*

Второй день

5. Углы треугольника  $\alpha, \beta, \gamma$  удовлетворяют неравенствам  $\sin \alpha > \cos \beta$ ,  $\sin \beta > \cos \gamma$ ,  $\sin \gamma > \cos \alpha$ . Докажите, что треугольник остроугольный.

*И.Богданов*

6. В основании четырехугольной пирамиды  $SABCD$  лежит параллелограмм  $ABCD$ . Докажите, что для любой точки  $O$  внутри пирамиды сумма объемов тетраэдров  $OSAB$  и  $OSCD$  равна сумме объемов тетраэдров  $OSBC$  и  $OSDA$ .

*Д.Терёшин*

7. Целые числа  $a, b, c$  таковы, что значения квадратных трехчленов  $bx^2 + cx + a$  и  $cx^2 + ax + b$  при  $x = 1234$  совпадают. Может ли первый трехчлен при  $x = 1$  принимать значение 2009?

*П.Козлов*

8. В клетки квадрата  $100 \times 100$  расставили числа 1, 2, ..., 10000, каждое – по одному разу; при этом числа, различающиеся на 1, записаны в соседних по стороне клетках. После этого посчитали расстояния между центрами каждых двух клеток, числа в которых различаются ровно на 5000. Пусть  $S$  – минимальное из этих расстояний. Какое наибольшее значение может принимать  $S$ ?

*И.Богданов*

Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, П.Кожевников, О.Подлипский, Д.Терёшин

# Региональный этап XLIV Всероссийской олимпиады школьников по физике

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

7 класс

**Задача 1. Турист.** Турист перешел через симметричный перевал (рис.1) и пошел далее по равнине. Его средняя скорость на пути через перевал оказалась равной  $v_{\text{ср}} = 2,1$  км/ч. Какое расстояние  $L$  турист прошел по равнине, если для этого ему потребовалось 2 часа? Известно, что при подъеме на перевал его скорость  $v_1$  составляла 0,6 от скорости  $v_0$  движения по равнине, а при спуске с перевала скорость  $v_2$  была больше скорости подъема в 7/3 раза.

Рис. 1

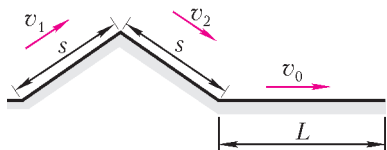


Рис. 2

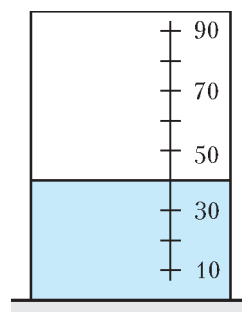


Рис. 2

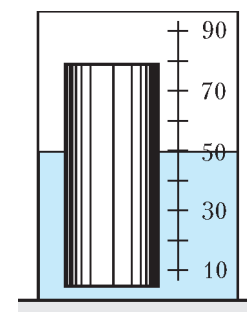


Рис. 3

Видно, что объем воды в сосуде равен 40 мл. Фотография сосуда после погружения цилиндра приведена на рисунке 3. Чему равен объем  $V$  груза?

*В.Орлов*

**Задача 2. Эксперимент с цилиндром.** На рисунке 2 приведена фотография мерного сосуда с вертикальными стенками до погружения в него цилиндрического груза.

**Задача 3. Гонки на моторных лодках.** Две моторные лодки стартовали от причала Дивноморска в сторону Геленджика. Скорость первого катера была  $v_1 = 9$  узлов, а скорость второго  $v_2 = 11$  узлов. В середине пути – в точке  $A$



– первый катер увеличил скорость до 11 узлов. Второй катер в некоторой точке  $B$  уменьшил скорость до 9 узлов, причем на финише выяснилось, что до точки  $B$  он плыл ровно половину всего времени. Какая из точек ближе к Дивноморску:  $A$  или  $B$ ? Чему равно расстояние  $\Delta L$  от точки  $A$  до точки  $B$ ? Известно, что расстояние от места старта до финиша  $L = 3,6$  мили.

*Примечание.* Один узел – это скорость, при которой судно проходит 1 милю за 1 час.

*Фольклор*

**Задача 4. Под микроскопом.** На рисунке 4 приведено изображение кончика иглы, наблюдаемое в микроскоп. Рас-

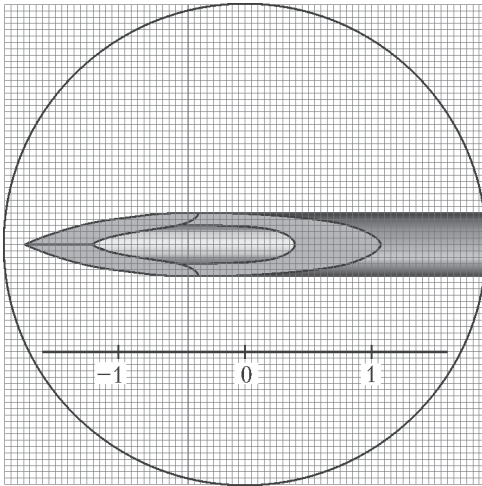


Рис. 4

стояние между делениями 0 и 1 соответствует одному миллиметру. Чему равен внешний диаметр иглы  $d$ ? Найдите также толщину стенок иглы  $h$ .

*И.Ерофеев*

8 класс

**Задача 1. Встреча.** Мальчик стоит на эскалаторе, поднимающемся вверх со скоростью  $v$ . Ровно на половине пути он поравнялся со своей учительницей, стоящей на соседнем эскалаторе, движущемся вниз с той же скоростью. Как мальчику быстрее добраться до учительницы, если он может двигаться относительно эскалатора с постоянной скоростью  $u > 2v$ : сначала побежать вверх, сменить эскалатор и побежать вниз или побежать сначала вниз, сменить эскалатор и побежать навстречу вверх?

*В.Слободянин*

**Задача 2. Последовательный контакт.** В трех одинаковых теплоизолированных сосудах находятся одинаковые количества масла при комнатной температуре. Нагретый металлический цилиндр опустили в первый сосуд. После того, как между цилиндром и маслом установилось тепловое равновесие, цилиндр перенесли во второй сосуд. После того, как и там установилось равновесие, цилиндр перенесли в третий сосуд. На сколько градусов повысилась температура масла в третьем сосуде, если во втором она возросла на  $5^\circ\text{C}$ , а в первом – на  $20^\circ\text{C}$ ?

*Фольклор*

**Задача 3. Груз на линейке.** Если груз массой  $m = 10$  г поставить на расстоянии  $x$  от края линейки, то она примет горизонтальное положение равновесия при размещении под ней упора на расстоянии  $y$  от того же края линейки (рис.5). Зависимость  $y(x)$  при различных размещении груза пред-

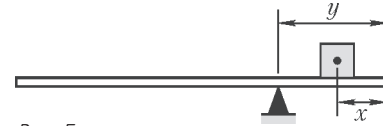


Рис. 5

ставлена в таблице:

$x$ , мм	10	30	50	70	90	100	120
$y$ , мм	120	129	137	146	155	160	160

Построив график зависимости  $y(x)$ , определите массу линейки и ее длину.

*С.Кармазин*

**Задача 4. Вот он какой, силикатный кирпич!** Силикатный кирпич имеет следующие размеры сторон:  $a = 5$  см,  $b = 10$  см и  $c = 20$  см. Два таких кирпича поставили буквой  $T$  сначала на основание  $a \times c$

на стол, а потом на основание  $a \times b$  на дно аквариума, заполненного водой (рис.6). В результате оказалось, что давление кирпичей на обе поверхности одно и то же. Найдите массу  $m$  такого кирпича. Поскольку кирпич шершавый, вода под него подтекает. Плотность воды  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>.

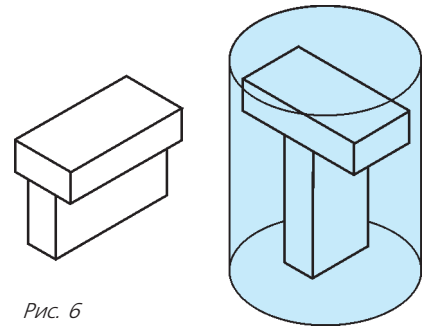


Рис. 6

*Фольклор*

9 класс

**Задача 1. Плот и катер.** От пристани «Дубки» экспериментатор Глюк отправился в путешествие по реке на плоту. Ровно через час он причалил к пристани «Грибки», где обнаружил, что забыл свой рюкзак на пристани «Дубки». К счастью, Глюк увидел на берегу своего друга – теоретика Бага, у которого была моторная лодка. На ней друзья поплыли обратно, забрали рюкзак и вернулись в «Грибки». Сколько времени моторная лодка плыла против течения, если все плавание заняло 32 минуты? Мотор лодки в течение всего плавания работал на полную мощность, а время, которое потребовалось на подбор рюкзака, пренебрежимо мало.

*В.Слободянин*

**Задача 2. Линейная теплоемкость.** Теплоемкость некоторых материалов может зависеть от температуры. Рассмотрим брусок массой  $m_1 = 1$  кг, изготовленный из материала, удельная теплоемкость которого зависит от температуры  $t$  по закону  $c = c_1(1 + \alpha t)$ , где  $c_1 = 1,4 \cdot 10^3$  Дж/(кг·°C),  $\alpha = 0,014$  °C<sup>-1</sup>. Такой брусок, нагретый до температуры  $t_1 = 100$  °C, опускают в калориметр, в котором находится некоторая масса  $m_2$  воды при температуре  $t_2 = 20$  °C. После установления теплового равновесия температура в калориметре оказалась равной  $t_0 = 60$  °C. Пренебрегая теплоемкостью калориметра и тепловыми потерями, определите массу  $m_2$  воды в калориметре. Известно, что удельная теплоемкость воды  $c_2 = 4,2 \cdot 10^3$  Дж/(кг·°C).

*С.Козел*

**Задача 3. Цепь с двумя амперметрами.** В электрической цепи (рис.7) сила тока, проходящего через резистор сопротивлением  $R_3$ , равна 1 мА. Сопротивления резисторов

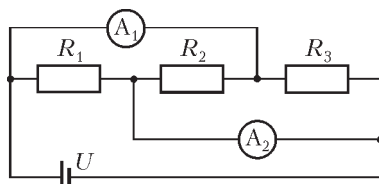


Рис. 7

таковы:  $R_1 = 1$  кОм,  $R_2 = 2$  кОм,  $R_3 = 3$  кОм. Перерисуйте рисунок в свою тетрадь и укажите на нем направления токов, идущих через резисторы. Чему равно напряжение  $U$  батарейки? На сколько миллиампер отличаются показания амперметров  $A_1$  и  $A_2$ ? Амперметры считайте идеальными.

А. Русаков

**Задача 4. На киностудии.** При съемке художественного фильма потребовалось заснять эпизод с падением вагонов поезда с моста в реку. Для этого был построен макет железной дороги, моста и вагонов в масштабе  $1 : 50$ . С какой частотой кадров  $N_1$  необходимо снимать этот эпизод, чтобы при просмотре со стандартной частотой  $N_0 = 24$  кадра/с ситуация выглядела правдоподобно?

М. Гаврилов

**Задача 5. Два зеркала.** Перед системой зеркал  $M_1$  и  $M_2$  расположена буква Б так, как показано на рисунке 8. Постройте на том же рисунке все изображения, даваемые этой системой. Докажите, что других изображений быть не может. Длина каждого из зеркал равна расстоянию между ними.

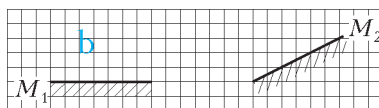


Рис. 8

В. Белонучкин

10 класс

**Задача 1. Абсолютно упругий удар.** Доска массой  $M$  и длиной  $L$  скользит с некоторой скоростью  $v_0$  по гладкой горизонтальной поверхности (рис. 9). На левом краю доски лежит кубик массой  $m$ . Коэффициент трения скольжения между кубиком и доской равен  $\mu$ . Доска испытывает абсолютно упругий удар о вертикальную стенку.

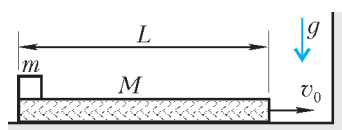


Рис. 9

При какой максимальной скорости доски  $v_0 = v_{\max}$  кубик с нее не упадет? Размерами кубика по сравнению с  $L$  пренебречь. В процессе всего движения кубик не опрокидывается.

Фольклор

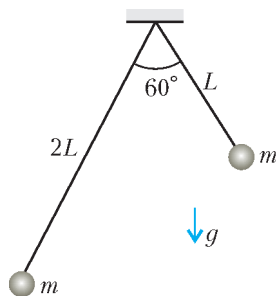


Рис. 10

**Задача 2. Электростатическое взаимодействие.** Определите модуль  $F$  силы электростатического отталкивания двух маленьких заряженных шариков одной и той же массы  $m$  (рис. 10). Один из них висит на нити длиной  $L$ , другой – на нити длиной  $2L$ , угол между нитями  $60^\circ$ .

Фольклор

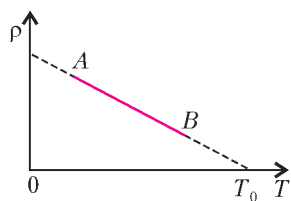


Рис. 11

**Задача 3. Процесс с идеальным газом.** Идеальный газ в количестве  $\nu$  молей участвует в процессе  $AB$ , изображенном на рисунке 11 в координатах  $\rho$  и  $T$ , где  $\rho$  – плотность газа, а  $T$  – его температура. При каких услови-

ях (при какой температуре) давление газа в этом процессе на 25% меньше максимально? Температура  $T_0$  известна.

В. Слободянин

**Задача 4. Сферический резистор.** Из трех проволок, каждая из которых имеет сопротивление  $R = 96$  Ом, сделали три кольца и соединили их так, что длина участка между любыми двумя ближайшими узлами одна и та же (рис. 12). Чему равно сопротивление  $R_{AB}$  конструкции между узлами  $A$  и  $B$ ?

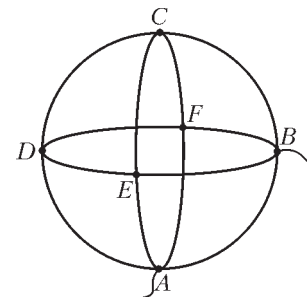


Рис. 12

Фольклор

**Задача 5. Полость в стене.** В толстой бетонной стене была обнаружена внутренняя полость. Для определения ее объема в стене просверлили тонкое отверстие, соединяющее полость с атмосферой. Через это отверстие тонким шлангом полость герметично соединили с поршневым насосом и манометром (рис. 13).

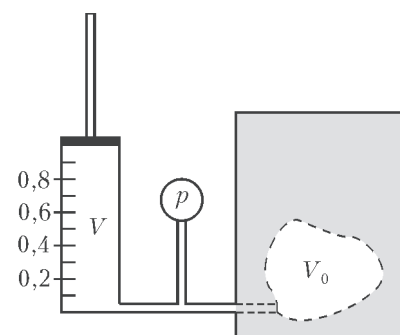


Рис. 13

В начальном состоянии поршень насоса находился в верхнем положении, а давление в системе насос-полость равнялось атмосферному. Затем была исследована зависимость давления  $p$  в системе от объема  $V$  воздуха в насосе. Полученные экспериментальные результаты представлены в таблице:

$V, \text{л}$	1,0	0,8	0,6	0,4	0,2
$p, \text{кПа}$	100	110	130	150	175

Путем графического анализа результатов эксперимента определите объем  $V_0$  внутренней полости. Погрешность измерения давления в данном эксперименте составляла 3%. Погрешностью определения объема под поршнем насоса можно пренебречь. Уменьшение объема насоса производилось квазистатически, т.е. настолько медленно, что температуру воздуха в системе насос-полость на протяжении всего эксперимента можно считать равной температуре окружающей среды.

С. Кармазин

11 класс

**Задача 1. Кубик на горке.** Слева направо по гладкой плоскости скользит тяжелая горка массой  $M$ , на вершине которой покоится легкий груз массой  $m$  (рис. 14). Кинетическая энергия  $K_1$  груза в четыре раза меньше его потенциальной энергии  $\Pi$ . Груз съезжает с горки без трения. Найдите его кинетическую энергию  $K_2$ , когда он окажется на плоскости. Считайте, что  $\Pi = 1$  Дж, а  $M \geq m$ .

В. Слободянин

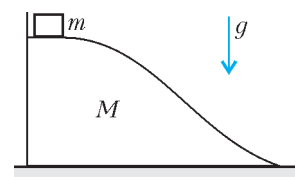


Рис. 14

**Задача 2. Нарушение равновесия.** Некто провел серию экспериментов по исследованию устойчивости системы, изб-



Рис. 15

раженной на рисунке 15. Из бункера, расположенного на высоте  $H$  над выступающим краем однородной доски, лежащей на двух опорах, сразу после открывания заслонки начинает высыпаться песок с массовым расходом  $\mu$  (кг/с). Расстояние между опорами составляет  $2/3$  от длины доски. Система устроена так, что, попадая в легкую чашу, закрепленную на краю доски, песок там и остается. Экспериментатор заметил, что в первом опыте край доски оторвался от опоры  $B$  спустя время  $\tau_1 = 1,00$  с после открывания заслонки. Затем песок из легкой чаши высыпался. После этого экспериментатор вдвое уменьшил массовый расход песка и обнаружил, что доска снова оторвалась от опоры  $B$  спустя время  $\tau_2 = 1,75$  с. Зная, что масса доски  $M = 700$  г, определите высоту  $H$ , с которой падал песок, и массовый расход  $\mu$  песка в первом эксперименте.

*М.Замятнин*

**Задача 3. Цепь с конденсатором.** Электрическая схема состоит из источника постоянного тока с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$ , конденсатора емкостью  $C$  и резистора сопротивлением  $R$  (рис. 16). В начальный момент конденсатор не заряжен. Ключ  $K$  в схеме сначала замыкают, а затем размыкают в тот момент, когда скорость изменения энергии, запасенной в конденсаторе, достигает максимума. Какое ко-

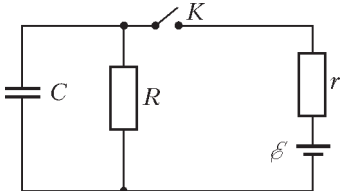


Рис. 16

личество теплоты выделится в схеме после размыкания ключа?

*А.Шеронов*

**Задача 4. Призма на воде.**

Поверхности воды касается равнобедренная стеклянная призма  $ABC$  (рис. 17). Луч света, падающий из воздуха под углом  $\varphi_0$  на грань  $AC$ , после прохождения призмы выходит через грань  $AB$  под тем же углом  $\varphi_0$ .

Чему равен угол преломления  $\varphi_1$ ? Показатель преломления воды  $n_0 = 4/3$ , угол  $C$  при вершине призмы прямой. Величина угла  $\varphi_0$  неизвестна.

*В.Слободянин*

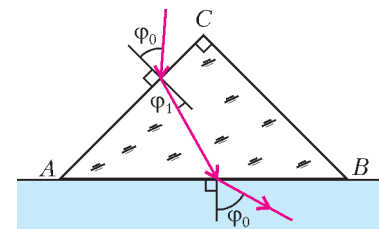


Рис. 17

**Задача 5. Термодинамический лабиринт.**

Над молекул метана ( $\text{CH}_4$ ) совершается процесс, график которого изображен на рисунке 18. Перенесите график процесса в тетрадь и выделите в нем участки, на которых к газу подводится тепло. Какое количество теплоты было подведено к газу в этом процессе? Величины  $p_0$  и  $V_0$  считать известными.

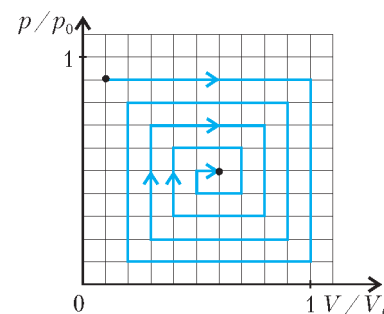


Рис. 18

*Н.Кудряшова*

*Публикацию подготовили С.Козел, В.Слободянин*

# Всероссийская студенческая олимпиада по физике

С 11 по 13 ноября 2009 года в Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э.Баумана состоялся заключительный этап Всероссийской студенческой олимпиады по физике в технических вузах.

По результатам олимпиады, в командном зачете первое место заняла команда Московского физико-технического института (МФТИ, государственный университет), набравшая 157 баллов, второе место заняла команда Санкт-Петербургского государственного политехнического университета (98 баллов), третье место — команда Самарского государственного аэрокосмического университета им. С.П.Королева (82 балла).

В личном зачете первое место завоевал Андрей Котов (МФТИ), второе место завоевал Павел Мостовых (Балтийский государственный технический университет «Военмех» им. Д.Ф.Устинова), третье место — Антон Пахомов (Самарский государственный аэрокосмический университет им. С.П.Королева).

Команда-победитель и призеры олимпиады представлены к Премии Президента Российской Федерации.

## ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Два жука ползут таким образом, что первый все время движется по направлению ко второму, а второй — перпендикулярно соединяющему их радиусу-вектору. Начальное расстояние между жуками  $L$ , а скорость первого вдвое больше скорости второго. Определите перемещения жуков до точки встречи.

2. Доска длиной  $L$  и массой  $m$  лежит наперевес на неподвижном цилиндре радиусом  $R$ , находясь в равновесии. Определите период малых колебаний доски, если проскальзывание между доской и цилиндром отсутствует.

3. На неподвижную шайбу массой  $m$  и радиусом  $R$ , лежащую на гладкой поверхности, налетает со скоростью  $v$  такая же шайба, траектория которой проходит через центр первой и которая вращается относительно собственной оси с угловой скоростью  $\Omega$ . Определите угловую и линейную скорости каждой шайбы после удара, если удар абсолютного неупругий и проскальзывание между шайбами в конце их взаимодействия отсутствует.



4. Два одинаковых небесных тела радиусом  $R$  и массой  $m$  каждое двигаются в свободном пространстве со скоростями  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ . В начальный момент времени радиус-вектор, соединяющий оба тела, равен  $\vec{r}_{12}$ , его модуль равен  $r$ . Определите условие, при котором эти тела столкнутся.

5. Верхний срез вертикально расположенного стеклянного капилляра диаметром  $d$  находится на поверхности воды с коэффициентом преломления  $n$  и коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ . Снизу вверх вдоль оси трубочки направлен лазерный луч радиусом  $r \ll d$ . Капилляр медленно поднимают из воды. Определите максимальный диаметр светового пятна от рассеянного лазерного луча на экране, расположенном горизонтально на высоте  $H$  от поверхности воды.

6. В начальный момент времени в первом сосуде объемом  $V$  с изотермическими стенками с температурой  $T$  находится в равновесии одноатомный газ под давлением  $p$ . Во втором сосуде такого же объема, но с теплоизолированными стенками, давление газа равно нулю. Определите установившуюся температуру во втором сосуде после завершения перетекания газа из первого сосуда во второй через тонкую трубку с легким клапаном.

7. Стержень длиной  $R$  одним концом находится на оси кругового витка с током и перпендикулярен ей. На другом конце стержня расположен магнитный диполь с моментом  $\vec{p}_m$ , перпендикулярным и стержню, и оси кругового витка. Определите силу, действующую на диполь, если известно, что проекция магнитного поля, создаваемого круговым витком, на стержень в точке, где находится диполь, равна  $B$ .

8. Металлическая сфера радиусом  $R$  разделена по диаметральной плоскости, и половинки изолированы друг от друга. Одна полусфера заряжена зарядом  $q$ , при этом потенциал другой равен  $\phi$ . Определите энергию сферы.

9. Непрозрачная пластинка освещена плоской световой волной. Если в пластинке прорезаны  $N$  узких щелей шириной  $a$  и длиной  $L$  с шагом  $d$ , причем  $d \gg a$  и  $Nd \gg L$ , то в полученной дифракционной картине интенсивность третьего главного максимума равна  $I_0$ . Как изменится интенсивность в этой точке, если посередине между имеющимися щелями прорезать дополнительные щели той же длины, но вдвое меньшей ширины?

Публикацию подготовили  
М.Яковлев, В.Голубев, С.Пырлин, И.Иванов

## ПРОГУЛКИ С ФИЗИКОЙ

### Липкая электростатика, или Как отрезать один нанокюлон

(Начало см. на 4-й странице обложки)

... Происходит это из-за того, что клейкая лента и рулон при отрывании друг от друга электризуются, заряжаясь разноименными зарядами. При этом клейкая лента заряжается положительно.

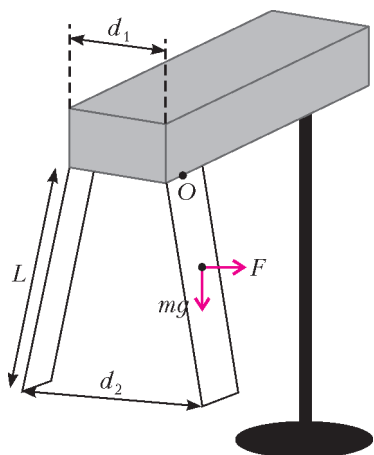
Это можно легко проверить, приклеив отрезок ленты к плафону выключенной настольной лампы. Такая свободно висящая лента будет притягиваться к пластмассовой расческе, которой незадолго до этого мы приводили в порядок прическу. А что расческа заряжается отрицательно, давно и неоднократно проверено с помощью электроскопа.

Проведя простой опыт, можно оценить плотность зарядов, появляющихся на поверхности ленты при сматывании с рулона. В наших опытах была использована обычная клейкая лента шириной 48 мм и толщиной 45 мкм, сделанная из полиэтилена

плотностью  $910 \text{ кг/м}^3$ .

Приклеим к плафону лампы два отрезка клейкой ленты длиной  $L = 30 \text{ см}$  каждый и измерим, на какое расстояние разойдутся два свободно свисающих конца ленты (см. рисунок). В нашем опыте верхние концы ленты отстояли на  $d_1 = 10 \text{ см}$ , а нижние – в среднем на  $d_2 = 18 \text{ см}$ .

Убедиться в том, что отрезки лент отталкиваются именно электроста-



тически, очень легко. Достаточно на несколько секунд поместить между свисающими отрезками ленты зажженную спичку, и они станут параллельными, так как поднимающиеся вверх ионы, заряженные частички пыли и копоти быстро нейтрализуют заряд клейкой ленты.

Простые расчеты дают, что отрезок такой ленты длиной в 30 см имеет массу  $m = 0,57 \text{ г}$ . Очевидно, что при равновесии момент силы тяжести, действующей, например, на правый отрезок ленты, относительно точки  $O$  должен компенсироваться моментом кулоновских сил отталкивания, действующих со стороны левого отрезка. Чтобы упростить решение, будем считать, что результирующая  $\vec{F}$  кулоновских сил приложена там же, где и сила тяжести  $m\vec{g}$ , т.е. в точке пересечения диагоналей отрезка ленты. Тогда условие равенства моментов можно записать следующим образом:

$$mg \left( \frac{d_2 - d_1}{4} \right) = F \sqrt{\frac{L^2}{4} - \left( \frac{d_2 - d_1}{4} \right)^2},$$

или

$$mg \left( \frac{d_2 - d_1}{4} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{((d_2 + d_1)/2)^2} \sqrt{\frac{L^2}{4} - \left( \frac{d_2 - d_1}{4} \right)^2}.$$

Полученное уравнение позволяет оценить заряд  $q$ , имеющийся на каждом из отрезков клейкой ленты, – он оказывается равным приблизительно 40 нКл. Так как площадь ленты составляет  $4,8 \text{ см} \times 30 \text{ см} = 144 \text{ см}^2$ , то плотность зарядов на ленте близка к  $0,3 \text{ нКл/см}^2$ .

Таким образом, чтобы «отрезать» 1 нКл, надо оторвать около  $3 \text{ см}^2$  обычной клейкой ленты.

К.Богданов

## ИНФОРМАЦИЯ

### Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор»

С 1998 года в Московском инженерно-физическом институте – ныне это Национальный исследовательский ядерный университет (НИЯУ) МИФИ – проводится Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор». Организаторами конкурса являются Министерство образования и науки Российской Федерации, Государственная корпорация по атомной энергии «Росатом», НИЯУ МИФИ, Департамент образования города Москвы. Генеральный спонсор конкурса – компания «Интел».

Конкурс «Юниор» организован в целях развития интереса у школьников к естественным наукам и к творческой деятельности в различных областях науки и техники, а также привлечения специалистов высшей школы к работе со школьниками. В научное жюри конкурса входят представители ведущих российских вузов: МИФИ, МГУ им. М.В.Ломоносова, МФТИ.

Конкурс проводится по основным направлениям естественно-научных, технических и медико-биологических знаний в рамках пяти секций: математика, физика, информатика, биология, химия.

На первом этапе (заочный тур) конкурса в ноябре-декабре школьники присылают тезисы своих научных работ в

адрес Оргкомитета конкурса (<http://junior-fair.org>, там же приведены правила оформления тезисов). Затем научное жюри выбирает лучшие из них, и авторы этих работ приглашаются на заключительный, очный тур, который проводится в конце января в НИЯУ МИФИ. Здесь происходит защита представленных на конкурс работ, которая проходит в режиме, максимально приближенном к научной конференции. Доброжелательное, но объективное жюри, куда входят ведущие специалисты высшей школы и исследовательских институтов Российской академии наук, тщательно анализирует доклады участников и выбирает победителей.

Обычно в отборочных турах конкурса принимают участие несколько тысяч школьников, в финальный тур проходят около 200 человек, а победителями становятся 50-60 школьников (суммарно по всем секциям).

Конкурс «Юниор» входит во Всероссийский перечень олимпиад школьников, поэтому победители конкурса получают 100 баллов ЕГЭ по соответствующему предмету. Но это еще не все. Научное жюри выбирает из числа победителей конкурса наиболее достойные работы и рекомендует их авторов к участию в Международном смотре научного и инженерного творчества школьников «Intel ISEF», который ежегодно проводится в США.



## НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

### ЗАОЧНОЕ ДИСТАНЦИОННОЕ ОБУЧЕНИЕ СТОЛИЧНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

в любой точке России, не приезжая в Москву

лицензия А №181516

#### Заочная школа МИФИ

для школьников  
с 6-го по 11-й классы  
**курсы**

- по математике;
- физике;
- русскому языку;
- химии

Независимо от уровня  
Вашей начальной  
подготовки  
Вы приобретёте  
прочные знания  
и подготовитесь  
к успешной сдаче ЕГЭ

#### Дополнительное образование

для старшеклассников и взрослых

##### широкий спектр курсов

- компьютерные;
- бухгалтерские;
- экономические;
- гуманитарные

##### Всего более 40 курсов разной тематики и уровня

(от курсов для начинающих  
до повышающих  
квалификацию специалистов)

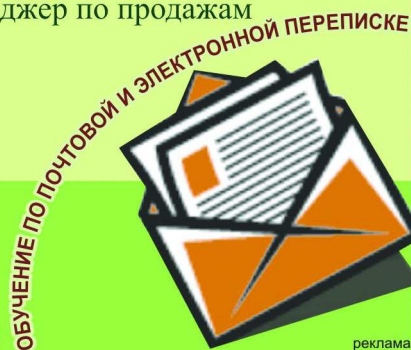
##### профессиональная подготовка

- бухгалтер;
- главный бухгалтер  
малого предприятия;
- программист-администратор;
- дизайнер;
- менеджер;
- менеджер по продажам

### ЗАКАЖИ БЕСПЛАТНЫЙ ПРОСПЕКТ:

115409, Москва, Каширское шоссе, д. 31, Заочная школа МИФИ,  
тел. 8 (495) 323-90-26, 8-800-333-90-26 (звонок бесплатный)  
[www.mifi.ru](http://www.mifi.ru) E-mail: [school@mifi.ru](mailto:school@mifi.ru)

прием проводится круглый год без вступительных экзаменов



реклама

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## КМШ

### ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №1)

1. 0%.

Указание:  $76 + 83 - 100 = 59$ .

2. Заметим, что правильный треугольник можно разделить прямыми, параллельными его сторонам, на любое количество правильных треугольников, равное квадрату натурального числа.

а) Разделим исходный треугольник на 25 треугольников, которые назовем большими. Возьмем пять больших треугольников и каждый из них разделим на четыре маленьких. В итоге получится 20 маленьких треугольников и 20 больших.

б) Разделим исходный треугольник на 49 больших треугольников. Четыре из них разделим на девять маленьких каждый, а еще девять – на четыре средних каждый. В итоге треугольников каждого вида будет 36.

3. Присвоим волшебной палочке, которую нашла Алиса, номер 1. Попросим палочку №1 создать такую же точно волшебную палочку и присвоим ей номер 2. Создать еще одну волшебную палочку с помощью исходной уже нельзя по условию. Однако палочка №2 еще не создавала такую же точно волшебную палочку, и Алиса сможет с помощью палочки №2 создать волшебную палочку №3, с помощью палочки №3 – палочку №4, и так далее, пока наконец не изготовит 10 волшебных палочек. После этого надо попросить каждую из палочек сделать по требуемому башмачку – и задача решена.

4. Изогнем сначала проволоку так, чтобы она приняла вид пятиугольника  $ABCDE$ , в котором вершины  $A, B, C$  и  $D$  – это вершины квадрата, а вершины  $A, D$  и  $E$  – это вершины равностороннего треугольника (рис.1). Загнем теперь звенья  $AE$  и  $DE$  так, чтобы плоскость  $AED$  стала перпендикулярной плоскости  $ABCD$ .

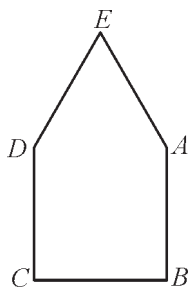


Рис. 1

5. 22 года.

Пусть в году  $x$  дней. Тогда  $6 \cdot 10x = 60x$  выкуренных сигарет сократят жизнь Горыныча на столько, что ему останется прожить всего 10 лет. А  $17 \cdot 5x = 65x$  выкуренных сигарет сократят жизнь Горыныча на столько, что ему останется прожить всего 5 лет. Значит,  $65x - 60x = 5x$  сигарет сокращают жизнь на  $10 - 5 = 5$  лет. Тогда Горыныч, если бросит курить, проживет 10 лет да еще столько, сколько отнимают  $60x$  сигарет, а это еще  $60x : 5x = 12$  лет.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6 – 8»

(см. «Квант» №5 за 2009 г.)

6. 1000.

Всего было отправлено  $2000 \cdot 1000$  приглашений, а всевозможных пар людей на сайте  $2000 \cdot 1999 / 2 = 1999000$ . Приглашений на 1000 больше, чем пар, поэтому найдутся хотя бы 1000 пар, в каждой из которых люди отправили приглашения друг другу. Ровно 1000 пар друзей может получиться так. Расставим всех 2000 человек по кругу, и пусть каждый пригласит 1000 следующих за ним по часовой стрелке. Тогда друзьями окажутся только те, кто расположен строго друг напротив друга.

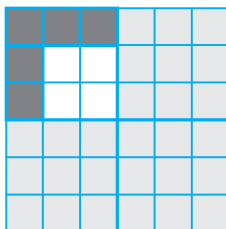


Рис. 2

7. Можно. См. рис. 2.

8. Посмотрим, как располагаются гирьки на чашах весов вначале. Вмес-

те с каждой гирькой массой  $a$  граммов, где  $a < 51$ , рассмотрим еще три гирьки с массами  $a + 100$ ,  $101 - a$  и  $201 - a$  граммов (убедитесь, что все эти четыре гирьки разные). Если гирька  $a$  лежит на левой чаше, то гирьки  $a + 100$  и  $201 - a$  – на правой, а гирька  $101 - a$  – на левой (по условию). При этом сумма масс этих гирек на левой чаше равна 101 г, а на правой – 301 г, т.е. эти четыре гирьки создают на одной из чаш «перевес» в 200 г. Все двести гирек делятся таким образом на 50 групп по четыре гири в каждой. Так как по условию весы в равновесии, то 25 групп дают перевес на левую чашу и столько же групп дают перевес на правую чашу. Заметим, что в каждой группе по две гири с четными и нечетными массами, причем гири с массами одной четности отличаются на 100 г. Кроме того, более тяжелые гири в каждой паре лежат на одной чаше. Поэтому когда убирают все гирьки с четными массами, то перевес, создаваемый каждой группой, становится равным 100 г, причем на ту же чашу, что и раньше, и весы снова оказываются в равновесии.

9. Найдутся.

Поскольку  $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$ , то подойдут, например, числа  $100^{33}$ ,  $2 \cdot 100^{33}$ ,  $3 \cdot 100^{33}$ ,  $4 \cdot 100^{33}$ .

10. Пусть  $E$  – середина  $BC$ , а  $F$  – середина  $CD$  (рис.3). Напомним, что медианы треугольника делятся их точкой пересечения в отношении 2:1 (считая от вершин). Заметим, что любой отрезок с началом в точке  $A$  и концом на отрезке  $EF$  делится

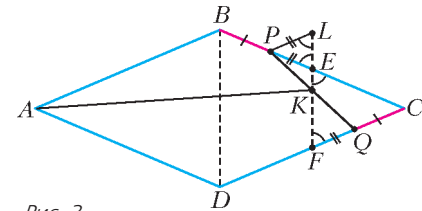


Рис. 3

отрезком  $BD$  также в отношении 2:1, считая от точки  $A$  (докажите это самостоятельно, используя теорему Фалеса). Поэтому задача будет решена, если мы покажем, что точка  $K$  пересечения отрезков  $EF$  и  $PQ$  является серединой  $PQ$ .

Считаем, что точки  $P$  и  $E$  различны (иначе задача очевидна). Пусть  $P$  лежит на отрезке  $BE$  (случай, когда  $P$  лежит на  $CE$ , аналогичен). Точка  $Q$  лежит тогда на  $FC$ , причем  $PE = FQ$  (так как  $BP = CQ$  по условию, а  $BE$  и  $CQ$  равны как половины сторон ромба). На луче  $FE$  за точкой  $E$  отметим точку  $L$ , такую что  $PL = PE = FQ$ . Треугольник  $ELP$  равнобедренный, поэтому  $\angle PLE = \angle PEL = \angle CEF = \angle CFE$ . Значит,  $PL \parallel FQ$ , и эти отрезки равны, откуда следует, что  $PLQF$  – параллелограмм, а  $K$  – точка пересечения его диагоналей. Поэтому  $K$  – середина  $PQ$ , что и требовалось.

## ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

- $a = 2 \text{ м/с}^2$ .
- $a = \frac{2g(H-h)}{l}$ .
- $a = 0,5 \text{ м/с}^2$ .
- $F = \frac{\rho l^2 da}{2}$ .

## РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП XXXVI ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

- Предположим противное; тогда дискриминанты всех трех членов неположительны, т.е.  $a_k^2 \leq b_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ). Левые (а значит, и правые) части этих неравенств неотрицательны, поэтому их можно перемножить, получив  $(a_1 a_2 a_3)^2 \leq b_1 b_2 b_3$ , т.е.  $N^2 \leq N$ , где  $N = a_1 a_2 a_3$ , что противоречит неравенству  $N > 1$ .
- Заметим, что четность места каждого лыжника менялась при любом обгоне; значит, его место на финише – той же чет-



ности, что и на старте. Так как скорости постоянны, каждые два лыжника встречались не более одного раза. Будем обозначать лыжников их стартовыми номерами. Победителя никто не мог обогнать, значит, он сам обогнал двоих. Поэтому он – 3 и обогнал лыжников 1 и 2. Аналогично, финишировавший последним не мог никого обогнать, поэтому его обогнали двое, он – 5, и его обогнали 6 и 7. Далее, лыжник 1 не мог никого обогнать, т.е. он финишировал третьим (и его, кроме 3, обогнал лыжник, финишировавший вторым), а лыжника 7 никто не мог обогнать, и он финишировал пятым (обогнав 5 и лыжника, финишировавшего шестым).

Итак, осталось выяснить, какими финишировали лыжники с четными номерами. Вторым финишировать мог либо 2, либо 4. Если 2 пришел вторым, то он обогнал 1, и с группой лидеров (1, 2, 3) больше обгонов не происходило. Значит, лыжника 4 могли только обгонять, он на финише шестой, а лыжник 6 – четвертый.

Если же вторым пришел 4, то 2 мог придти к финишу только четвертым (значит, 4 обогнал 2 и 1), а шестым пришел 6 (обогнав 5 и уступив 7).

Итого, возможны только два протокола: 3, 2, 1, 6, 7, 4, 5 и 3, 4, 1, 2, 7, 6, 5.

4. Пусть  $I$  – точка пересечения биссектрис

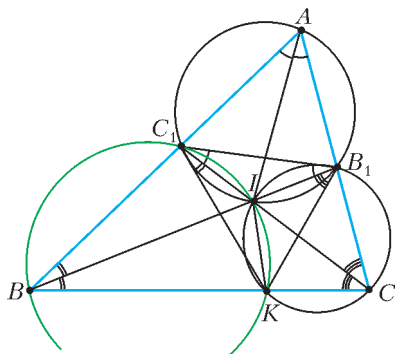


Рис. 4

треугольника  $ABC$  (рис.4). Тогда

$$\begin{aligned} \angle B_1IC_1 &= \angle BIC = 180^\circ - \angle IBC - \angle ICB = \\ &= 180^\circ - (\angle ABC + \angle ACB)/2 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ = 180^\circ - \angle B_1AC_1. \end{aligned}$$

Значит, четырехугольник  $AB_1IC_1$  вписанный. Отсюда

$$\angle AC_1B_1 = \angle AIB_1 = \angle ABI + \angle BAI = (\angle A + \angle B)/2$$

(поскольку  $\angle AIB_1$  – внешний в  $\triangle ABI$ ) и, аналогично,

$$\angle AB_1C_1 = (\angle A + \angle C)/2.$$

Пусть описанная окружность треугольника  $BC_1I$  пересекает прямую  $BC$  в точке  $K$  (легко понять, что эта точка не может попасть на продолжение стороны  $BC$ ). Тогда

$$\begin{aligned} \angle IKC &= 180^\circ - \angle BKI = \angle BC_1I = \\ &= 180^\circ - \angle AC_1I = \angle AB_1I = 180^\circ - \angle IB_1C, \end{aligned}$$

т.е. четырехугольник  $IB_1CK$  также вписан.

Наконец, поскольку четырехугольники  $AB_1IC_1$ ,  $BC_1IK$  и  $CKIB_1$  вписаны, мы имеем

$$\begin{aligned} \angle KC_1B_1 &= \angle KC_1I + \angle IC_1B_1 = \\ &= \angle KBI + \angle IAB_1 = (\angle B + \angle A)/2 = \angle AC_1B_1 \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$\angle KB_1C_1 = \angle KB_1I + \angle IB_1C_1 = (\angle C + \angle A)/2 = \angle AB_1C_1.$$

Значит, треугольники  $AB_1C_1$  и  $KB_1C_1$  равны по стороне  $B_1C_1$  и двум прилежащим к ней углам. Тогда они симметричны относительно  $B_1C_1$ , поэтому точки  $A$  и  $K$  также симметричны. Поскольку точка  $K$  лежит на  $BC$ , решение закончено.

5. Запишем каждую из наших разностей со знаком плюс, если в соответствующей паре чисел большее стоит перед меньшим по часовой стрелке, и со знаком минус в противном случае. У нас получились 11 разностей между числом и следующим за ним по часовой стрелке; значит, сумма всех этих чисел равна нулю, т.е. четному числу. Это невозможно, по-

скольку среди них ровно семь нечетных чисел – четыре числа вида  $\pm 1$  и три числа вида  $\pm 3$ .

6. Поскольку  $\angle PC_1B = \angle PA_1B = 90^\circ$ , четырехугольник  $PA_1C_1B$  вписанный (рис.5). Значит,  $\angle CC_1A_1 = 180^\circ - \angle A_1C_1B = \angle A_1PB = 90^\circ - \angle A_1BP$ . С другой стороны,

$$\angle A_1BP = \angle ACB = \frac{1}{2} \overset{\cup}{AB}.$$

Поэтому  $\angle CC_1A_1 = \angle A_1PB = 90^\circ - \angle ACC_1$ , т.е. прямые  $A_1C_1$  и  $AC$  пересекаются под прямым углом.

7. Заметим, что у каждого в компании не менее трех знакомых.

Действительно, если бы некто  $X$  был знаком менее чем с тремя, то, исключив из компании одного из его знакомых, мы получили бы шестерку людей, в которой у  $X$  не более одного знакомого, т.е.

посадить их за круглый стол невозможно. Более того, если бы у каждого было ровно по три знакомых, то число пар знакомых людей было бы равно  $7 \cdot \frac{3}{2} = \frac{21}{2}$ , что невозможно.

Значит, у какого-то человека  $X$  хотя бы 4 знакомых. Рассадим всех, кроме  $X$ , за круглый стол. Тогда из четырех его знакомых хотя бы двое сидят рядом. Если мы посадим  $X$  между ними, то получим требуемую рассадку.

8. Не могут.

Обозначим  $n$ -е простое число через  $p_n$ . Предположим, что нашлось  $m > 1$ , для которого  $S_{m-1} = k^2$ ,  $S_m = l^2$ , где  $k$  и  $l$  – натуральные числа. Числа  $S_2 = 5$ ,  $S_3 = 10$  квадратами не являются, так что  $m > 4$ . Заметим, что  $p_m = S_m - S_{m-1} = (l - k)(l + k)$ ; ввиду простоты  $p_m$  получаем  $1 = l - k$ ,

$$p_m = l + k = 2l - 1 = 2\sqrt{S_m} - 1. \text{ Таким образом, } S_m = \left(\frac{p_m + 1}{2}\right)^2.$$

Заметим также, что  $p_m$  нечетно (так как  $m \geq 2$ ), и

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + p_m &= (1^2 - 0^2) + (2^2 - 1^2) + \dots \\ &\dots + \left(\left(\frac{p_m + 1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p_m - 1}{2}\right)^2\right) = \left(\frac{p_m + 1}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

С другой стороны, в сумму  $S_m = 2 + p_2 + \dots + p_m$ , кроме двойки, входят лишь нечетные числа и при  $m > 4$  не входят нечетное составное число 9 и число 1, поэтому

$$S_m \leq (1 + 3 + 5 + \dots + p_m) + 2 - 1 - 9 < \left(\frac{p_m + 1}{2}\right)^2.$$

Противоречие.

*Замечание.* В последовательности  $(S_n)$  встречаются квадраты натуральных чисел. Кроме  $S_9 = 100$ , известны еще несколько; минимальный из них  $S_{2474} = 25633969 = 5063^2$ .

10 класс

1. Не могло.

4. 1961. *Указание.* Докажите, что число  $b$  является удачным тогда и только тогда, когда каждое простое число входит в разложение  $b$  на простые множители с одним из следующих показателей: 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8.

5. Так как для всех  $x$  верно неравенство  $P(x) = ax^2 + (b - c)x + c > 0$ , то дискриминант трехчлена  $P(x)$  отрицателен:

$$D = (b - c)^2 - 4ac = b^2 + c^2 - 2bc - 4ac < 0.$$

Кроме того,  $c = P(0) > 0$ . Значит, у трехчлена  $Q(x) = cx^2 - (b + c)x + (a + b)$  положителен старший коэффициент, а его дискриминант

$$D' = (b + c)^2 - 4c(a + b) = b^2 + c^2 + 2bc - 4ac - 4bc = D$$

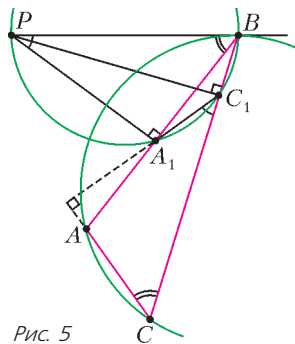


Рис. 5

отрицателен. Это значит, что  $Q(x) > 0$  при всех действительных  $x$ , что и требовалось доказать.

6. Треугольники  $PBA$  и  $PCB$  подобны, так как  $\angle BPC$  – общий, а  $\angle PBA = \angle PCB = \frac{1}{2} \angle A$  (рис.6). Значит,  $\frac{BA}{BC} = \frac{PB}{PC}$ .

Аналогично, из подобия треугольников  $PDA$  и  $PCD$  следует,

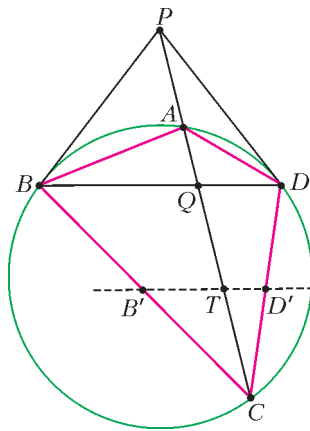


Рис. 6

что  $\frac{DA}{DC} = \frac{PD}{PC}$ . Так как  $PB = PD$ , то  $\frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC}$ , или  $\frac{AB}{AD} = \frac{CB}{CD}$ ; заметим, что тогда и  $\frac{AB+CB}{AD+CD} = \frac{AB}{AD} = \frac{CB}{CD}$ .

Обозначим через  $Q$  точку пересечения отрезков  $AC$  и  $BD$ , а через  $T$  – произвольную точку на отрезке  $AC$ . Пусть для определенности  $T$  лежит на отрезке  $QC$ , а прямая, проходящая через  $T$ , параллельно  $BD$ , пересекает  $CB$  и  $CD$  в точках  $B'$  и  $D'$  соответственно.

Тогда по теореме Фалеса  $\frac{CB'}{CD'} = \frac{CB}{CD} = \frac{AB+CB}{AD+CD}$ , или  $\frac{CB'}{AB+CB} = \frac{CD'}{AD+CD}$ , что и требовалось.

Если же точка  $T$  лежит на отрезке  $AQ$ , то аналогично рассматриваются отрезки, высекаемые на сторонах  $AB$  и  $AD$ .

7. Существуют.

Для натурального числа  $t$  тройка чисел  $3t, -t, -2t$  удовлетворяет всем условиям, кроме, возможно, последнего. А чтобы сумма  $(3t)^{13} + (-t)^{13} + (-2t)^{13} = t^{13}(3^{13} - 1 - 2^{13})$  являлась точным квадратом, достаточно взять, например,  $t = 3^{13} - 1 - 2^{13}$ .

8.  $2^{n-1}$ . Указание. Докажите, что число прямоугольников в любом разбиении равно  $n$ , их площади выражаются числами  $1, 2, \dots, n$  и каждый из них содержит клетку верхнего слоя. Далее примените индукцию по  $n$ .

11 класс

1. Не могла.

2. Ясно, что массы всех гирь, стоящих на нечетных местах, имеют одинаковую четность, а массы всех остальных гирь – другую четность. Так как общая масса четна, то 1005 гирь на нечетных местах имеют четные массы.

Поставим первую гирьку на левую чашку весов (пусть ее масса равна  $2a \leq 1000$  г), остальные 2008 гирь разобьем на 1004 пары стоящих рядом гирек (тогда массы гирек в любой паре отличаются на 1 г). Теперь в некоторых  $(502 - a)$  парах поставим более легкие гири каждой пары на правую чашку весов, а более тяжелые – на левую; в остальных же  $(502 + a)$  парах поставим легкие гири на левую чашку, а тяжелые – на правую. Тогда разность суммарных масс гирь на левой и правой чашках будет равна  $2a + (502 - a) - (502 + a) = 0$ .

3. Обозначим через  $E$  точку пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$  и рассмотрим случай, когда точка  $K$  лежит на отрезке  $BE$  (рис.7). Заметим, что  $\angle PAD = \angle CAD = \angle CBD = \angle PKD$ , т.е. четырехугольник  $AKPD$  вписан. Значит,  $\angle AKD = \angle APD = 90^\circ$ . Тогда из равенства  $\angle CPD = \angle CMD = 90^\circ$  следует вписанность четырехугольника  $CPMD$ , откуда

$$\angle EPM = 180^\circ - \angle CPM = \angle EDC = \angle BAC = \angle BAE.$$

Следовательно,  $PM \parallel AB \perp BC \parallel KP$ , что и требовалось. Случай, когда  $K$  лежит на отрезке  $DE$ , аналогичен.

4. Если  $b = 1$ , то  $a = c = 1$ , и в качестве другой тройки можно

выбрать  $(1, 25, 49)$ . Если же  $b \neq 1$ , то из взаимной простоты разность прогрессии  $d$  не может оказаться нулевой. Тогда без ограничения общности  $d = b - a = c - b > 0$ .

Поскольку  $b$  взаимно просто как с  $a$ , так и с  $c$ , то оно взаимно просто с  $ac$ . Далее, произведение взаимно простых чисел  $a$  и  $b$  является квадратом, по-

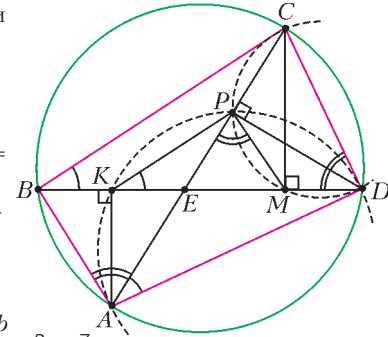


Рис. 7

этому и каждое из них – также квадрат, т.е.  $b = f^2$ ,

$ac = m^2 = (b - d)(b + d) = b^2 - d^2$  для некоторых натуральных  $f$  и  $m$ . При этом  $m \neq d$ , так как в противном случае  $b^2 = m^2 + d^2 = 2m^2$ , что невозможно.

Рассмотрим теперь тройку  $(b - m, b, b + m)$ . Ее члены образуют арифметическую прогрессию, являются натуральными числами (так как  $b^2 - m^2 = d^2 > 0$ ), и их произведение  $(b - m)b(b + m) = f^2(b^2 - m^2) = (df)^2$  является квадратом.

Кроме того,  $\text{НОД}(b, m^2) = \text{НОД}(b, ac) = 1$ , откуда

$$1 = \text{НОД}(b, m) = \text{НОД}(b, b - m) = \text{НОД}(b, b + m).$$

Значит, эта тройка – квадратная, она имеет общий элемент  $b$  с исходной и отлична от нее (ибо  $b - m \neq b - d$ ), что и требовалось.

5. Предположим противное; пусть для определенности  $\gamma \geq 90^\circ$ . Тогда

$\alpha + \beta \leq 90^\circ$ , и углы  $\alpha$  и  $\beta$  острые. Поэтому  $0 < \beta \leq 90^\circ - \alpha < 90^\circ$ , откуда  $\cos \beta \geq \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ , что противоречит условию.

6. Пусть  $X$  – точка пересечения луча  $SO$  с плоскостью  $ABCD$  (рис.8).

Так как точка  $O$  лежит внутри пирамиды, то точка  $X$  лежит внутри ее основания.

При этом  $S_{XAB} + S_{XCD} = S_{XBC} + S_{XDA}$  (одно из возможных доказательств этого факта усматривается из рисунка 9 – каждая из сумм равна половине площади параллелограмма  $ABCD$ ).

Следовательно,

$$V_{XSAB} + V_{XSCD} = V_{XSBC} + V_{XSDA},$$

Рис. 8

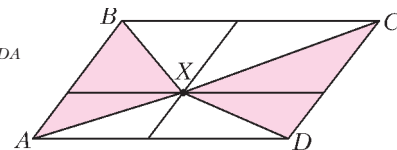


Рис. 9

$$V_{XSAB} + V_{XSCD} = V_{XSBC} + V_{XSDA}, \quad (1)$$

так как высота этих пирамид, опущенная из вершины  $S$ , общая. Аналогично,

$$V_{XOAB} + V_{XOCD} = V_{XOBC} + V_{XODA}. \quad (2)$$

Вычитая из равенства (1) равенство (2), получаем требуемое.

7. Не может.

Рассмотрим многочлен  $P(x) = (b - c)x^2 + (c - a)x + (a - b)$  – его степень не больше 2. По условию,  $P(1234) = 0$ ; кроме того, очевидно,  $P(1) = 0$ . Значит, если его степень равна 2, то по теореме Безу  $P(x) = (b - c)(x - 1)(x - 1234)$ . Если же степень меньше 2, то он может быть только нулевым (поскольку у него есть два корня); тогда  $a = b = c$ , и все равно верно равенство  $P(x) = (b - c)(x - 1)(x - 1234)$ . Приравнявая

свободные члены в равенстве

$P(x) = (b-c)x^2 + (c-a)x + (a-b) = (b-c)(x-1)(x-1234)$ ,  
получаем  $a-b = 1234(b-c)$ , откуда  $a = 1235b - 1234c$ . Тогда  
значение первого трехчлена в точке 1 равно  $a + b + c =$   
 $= 1236b - 1233c = 3(412b - 411c)$ , т.е. делится на 3; значит,  
оно не может равняться 2009.

8.  $50\sqrt{2}$ .

Пронумеруем в квадрате строки (снизу вверх) и столбцы (слева направо) числами от 1 до 100; будем обозначать клетку парой номеров ее строки и столбца. Назовем *расстоянием* между клетками расстояние между их центрами. Клетки назовем *парными*, если числа в них различаются на 5000. Заметим, что расстояние от клетки (50, 50) до любой другой (в частности, до парной ей) не превосходит  $\sqrt{50^2 + 50^2} =$

64	57	56	49	48	47	46	45
63	58	55	50	41	42	43	44
62	59	54	51	40	39	38	37
61	60	53	52	33	34	35	36
4	5	12	13	32	31	30	29
3	6	11	14	25	26	27	28
2	7	10	15	24	23	22	21
1	8	9	16	17	18	19	20

Рис. 10

Этот пример легко обобщить, чтобы расставить нужным образом числа в квадрате  $100 \times 100$ .

### РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП XLIV ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

7 класс

- $L = v_0 t = 2,5 \text{ км/ч} \cdot 2 \text{ ч} = 5 \text{ км}$ .    2.  $V = 20 \text{ мл}$ .
- $\Delta L = L_B - L_A = \frac{L}{2} \left( \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \right) = 0,18 \text{ мили}$ .
- $d = 0,5 \text{ мм}$ ,  $h = 0,1 \text{ мм}$ .

8 класс

- Безразлично, куда бежать вначале: вверх или вниз.
- $\Delta t_3 = 1,25 \text{ }^\circ\text{C}$ .    3.  $M = 12,5 \text{ г}$ ,  $L = 41,5 \text{ мм}$ .
- $m = \frac{\rho_0 abc^2}{c-b} = 2 \text{ кг}$ .

9 класс

- $t = 20 \text{ мин}$ .    2.  $m_2 = m_1 \frac{c_1}{2c_2} \frac{\alpha(t_1^2 - t_0^2) + 2(t_1 - t_0)}{t_0 - t_2} \approx 0,707 \text{ кг}$ .

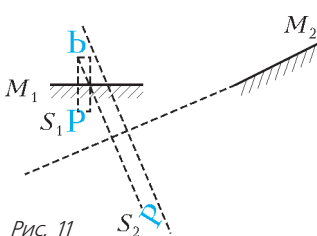


Рис. 11

3. Все три резистора соединены параллельно и подключены к полюсам батарейки;  $U = 3 \text{ В}$ ;  $I_2 - I_1 = 2 \text{ мА}$ .

4.  $N_1 = \sqrt{50} N_0 \approx 70 \text{ кадров/с}$ .

5. В системе есть всего два изображения, полученные в зеркалах  $M_1$  и  $M_2$  (рис.11).

10 класс

- $v_{\max} = \sqrt{\frac{\mu g L}{2} \left( 1 + \frac{m}{M} \right)}$ .    2.  $F = 0,65 \text{ мг}$ .
- При  $T_1 = \frac{1}{4} T_0$  и  $T_2 = \frac{3}{4} T_0$ .    4.  $R_{AB} = \frac{5R}{48} = 10 \text{ Ом}$ .
- $V_0 \approx (0,82 \pm 0,05) \text{ л}$ .

11 класс

- $K_2 = 2,25 \Pi = 2,25 \text{ Дж}$ .
- $H = \frac{g v_1^2}{2} = 5 \text{ м}$ ;  $\mu = \frac{M}{2\tau_2} = 0,2 \text{ кг/с}$ .    3.  $Q = \frac{C\varepsilon^2}{8} \left( \frac{R}{R+r} \right)^2$ .
- $\text{tg } \varphi_1 \approx 0,347$ ,  $\varphi_1 \approx 19,1^\circ$ .
- Тепло подводится на всех верхних горизонтальных и на всех левых вертикальных участках,  $Q = 9,18 p_0 V_0$ .

### ВСЕРОССИЙСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКЕ

- $s_1 = \frac{2L}{\sqrt{5}}$ ,  $s_2 = \frac{L}{\sqrt{5}}$ .    2.  $T = \frac{2\pi L}{\sqrt{12gR}}$ .
- $\omega_1 = \frac{\Omega}{3}$ ,  $\omega_2 = \frac{2\Omega}{3}$ ,  $v_1 = v_2 = \sqrt{\frac{v^2}{4} + \frac{\Omega^2 R^2}{36}}$ .
- $\frac{1}{16} \frac{|\vec{r}_{12} \times (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)|^2}{R^2} < \frac{(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2}{4} + Gm \left( \frac{1}{2R} - \frac{1}{r} \right)$ .
- Если  $\frac{H}{2} \leq h_{\max}$ , то  $D_{\max} = 2r + (n-1) \frac{r\rho g H^2}{4\sigma}$ , если  $\frac{H}{2} > h_{\max}$ , то  $D_{\max} = 2r + 4(n-1)(H - h_{\max}) \frac{r}{d}$ , где  $h_{\max} = \frac{4\sigma}{\rho g d}$  – максимальная высота столба жидкости в капилляре.
- $T_2 = \frac{5}{3} T$ .    7.  $F = \frac{p_m B}{R}$ .    8.  $W = \frac{1}{2} \left( \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 R} - q\varphi \right)$ .    9.  $I = \frac{I_0}{4}$ .

## журнал © Квант

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов,  
С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова,  
А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**Ю.А.Вашенко, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия,  
М.В.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**Е.В.Морозова**

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева**

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ  
по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: 930-56-48

E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info,

phys@kvant.info

Сайт: kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени

«Чеховский полиграфический комбинат»

142300 г.Чехов Московской области,

Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru

Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00

Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59



## МЕМОРИАЛ ТАЛЯ

В ноябре прошлого года в Москве состоялась традиционный Мемориал Михаила Талья. На сей раз это был самый сильный турнир в России за всю историю – 21-й категории. Победил в турнире экс-чемпион мира Владимир Крамник.

Из 15 шахматных королей больше половины – восемь – составляют советские шахматисты (Крамник тоже родился в Советском Союзе). Но лишь одному из них, Михаилу Талю, четвертый год подряд посвящается специальный Мемориал.

### Когда катет длиннее гипотенузы

Михаил Таль (1936 – 1992) был одним из самых популярных гроссмейстеров на планете, всеобщим любимцем. И дело не только в удивительном стиле игры – комбинации «волшебника из Риги» были фантастическими, – но и в его человеческом облике. Вокруг Талья всегда царил атмосфера радушия и доброжелательности, он был неистощим на юмор и шутки. Обаяние его подкупало всех, кто был с ним знаком.

Автору этих строк не раз доводилось общаться с Михаилом Талем, а в 1974 году я взял у него большое интервью (часть его была опубликована в журнале «Квант»). Хотя с тех пор прошло тридцать шесть лет, кажется, наша беседа не устарела. Вот несколько фрагментов из нее.

– Михаил Нехемьевич, правда ли, что в школе вы обладали незаурядными математическими способностями и были непобедимы в олимпиадах и конкурсах?

– Насколько помню, когда настало время идти в школу, я умел перемножать в уме трехзначные числа. Дело кончилось плохо – учителя лишили меня детства, определив сразу в третий класс. Была даже предпринята попытка отправить еще дальше – в четвертый, но эту партию с гороно дирекция школы проиграла.

– Какому предмету вы отдавали предпочтение – алгебре или геометрии?

– Алгебраические задачи я решал почти мгновенно, а вот с геометрией отношения складывались неровно. Самое главное здесь – чертеж, а у меня, как я ни старался, катет всегда оказывался длиннее гипотенузы.

– И чем закончилась ваша математическая карьера?

– Учительница недоумевала, почему я щелкаю задачи как орехи. Она не сомневалась, что я подглядываю в от-

веты, и ставила двойки. В конце концов родителям это надоело, и они перевели меня в другую школу. Перестановка ходов даром не прошла – любовь к математике несколько остыла, и инициативу перехватили шахматы.

– Но вы не сразу перешли в профессионалы...

– После окончания школы, а затем Рижского университета я получил диплом филолога и работал учителем русского языка и литературы. Преподавал с большим удовольствием, но когда из-за моих постоянных отлучек у учеников накопилось несколько месяцев «окон», я, увы, вынужден был написать заявление об уходе.

– Прежде чем это случилось, произошел, кажется, один скандал. Вы стали чемпионом страны, вся Рига ликовала, а класс, в котором вы вели литературу, с утра до вечера разыгрывал комбинации Талья. Школьники даже не стеснялись играть на ваших уроках...

– Дело было так. Войдя однажды в класс, я обнаружил на подоконнике доску с расставленными на ней фигурами. Нетрудно было убедиться, что белые объявляют мат в четыре хода. Но я не пошел на конфликт, а повел свой рассказ о «лишних людях». Однако снова взглянув на доску, понял, что сам являюсь лишним человеком... За это время в партии было сделано еще несколько ходов. Если бы белые довели замысел до логического конца, я бы простил нарушителей дисциплины. Но они не только упустили возможность объявить мат, но и вообще оказались у разбитого корыта. Остававшееся такое поведение учеников безнаказанным было бы непедагогично, и я потребовал у них дневники. Правда, к концу урока немного успокоился и ограничился внушением. «Черные» обрадовались, что все обошлось, а «белые» попросили поставить автограф в дневнике. Единственный раз в жизни я сделал строгую надпись: «Не нашел мат в четыре хода на уроке литературы».

### Десять корифеев

Всех участников Мемориала расположим по убыванию рейтинга до старта:

1. Виши Ананд (Индия) – 2788
2. Левон Аронян (Армения) – 2773
3. Магнус Карлсен (Норвегия) – 2772
4. Владимир Крамник (Россия) – 2772
5. Петер Лeko (Венгрия) – 2762
6. Василий Иванчук (Украина) – 2756
7. Борис Гельфанд (Израиль) – 2756

8. Александр Морозевич (Россия) – 2750

9. Петр Свидлер (Россия) – 2741

10. Руслан Пономарев (Украина) – 2741

А вот как расположились участники в турнирной таблице после завершения турнира:

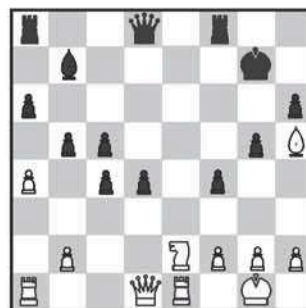
1. Крамник – 6 очков из девяти;
- 2–3. Иванчук и Карлсен – 5,5
- 4–5. Ананд и Аронян – 5
6. Гельфанд – 4,5
7. Пономарев – 4
8. Свидлер – 3,5
- 9–10. Лeko и Морозевич – 3

Приведем одну из самых интересных партий Мемориала.

### Ананд – Лeko

#### Славянская защита

1. d4 d5 2. e4 c6 3. ♖f3 ♗f6 4. ♗e6 5. ♗g5 h6 6. ♗h4 dc 7. e4 g5 8. ♗g3 b5 9. ♗e2. Модный, так называемый антимосковский вариант. 9... ♗b7 10. 0-0 ♗bd7 11. ♗e5 ♗g7 12. ♗:d7 ♗:d7 13. ♗d6 a6 14. a4 e5 15. ♗g4 ed 16. e5 c5 17. ♗e1 ♗:c5! 18. ♗:e5 0-0 19. ♗:g7 ♗:g7 20. ♗e2 f5 21. ♗h5 f4.



22. ♗:d4! Удивительная новинка! Черные отдали фигуру, получив за нее три проходные пешки – это понятно. Но белые возвращают коня пока всего за одну. Ранее встречалось 22. b4 со сложной игрой. 22...cd 23. ♗e6! ♗c8 24. ♗g6+ ♗h7 25. ab ♗f6 26. ♗:f6 ♗:f6 27. ♗c2+! ♗f5 28. ♗:c4 ♗c8 29. ♗d5 ab 30. h3! Тихий и тонкий ход, позволяющий белым надежно спрятать своего короля. Выясняется, что черные совершенно беспомощны. 30... ♗h8 31. ♗:b5 ♗f8 32. ♗a6! ♗g7 33. ♗d6 d3 34. ♗b6 ♗e5 35. ♗g6! d2 36. ♗:d3 ♗:f5 37. ♗d4+ ♗h7 38. ♗:d2 ♗f7 39. f3 h5 40. ♗d5 ♗g6 41. ♗a5! ♗g7 42. h4! ♗b1+ 43. ♗h2 ♗:b2 44. ♗:g5 ♗:g5 45. ♗:g5. Черные сдались.

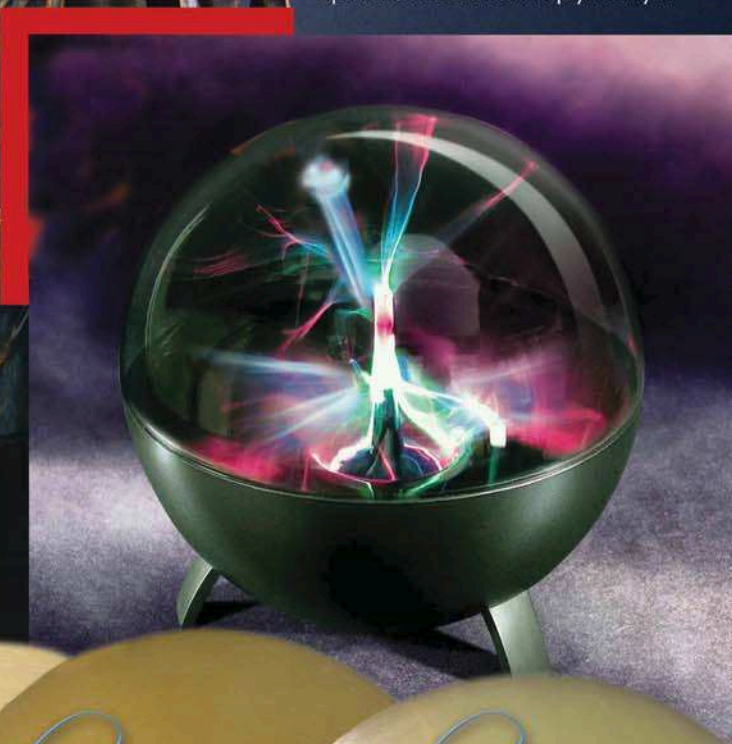
Е.Гук



# Уроки физикой

## Липкая электро- статика

Каждому известна проблема, возникающая при использовании клейкой ленты, – как только мы отпускаем ее конец, он притягивается, а потом и приклеивается к рулону...



Уроки с физикой

(Продолжение – на странице 59 внутри журнала)

