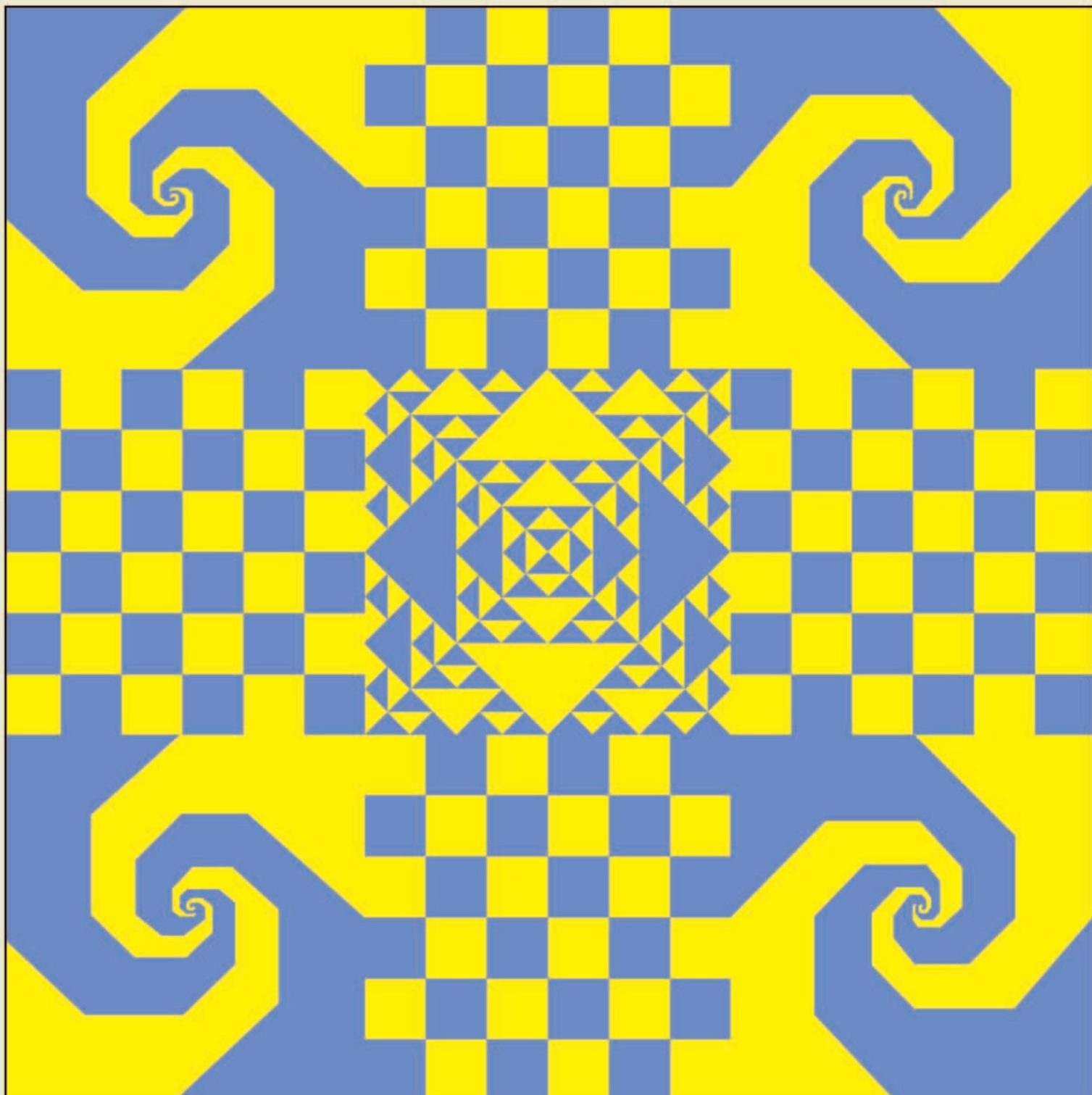


МАРТ/АПРЕЛЬ

ISSN 0130-2221  
2009 · №2

# КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ





## РИЖСКИЕ БАШНИ

В Риге есть двенадцать старых башен. Основание каждой составляют три правильных шестиугольника, из которых любые два имеют общую сторону; на этих шестиугольниках стоят прямые шестиугольные призмы разной высоты (рис. 1; цифрами обозначено количество этажей в каждой призме).

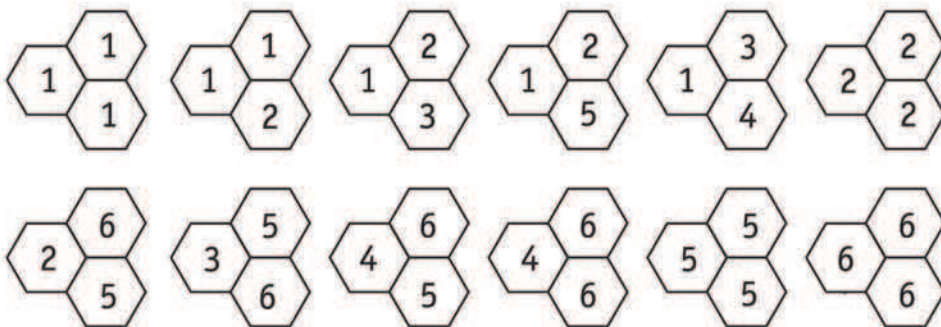


рис. 1

На рисунке 2 – изображение одной из башен (высота составляющих призм равна 1, 3 и 4 этажа).

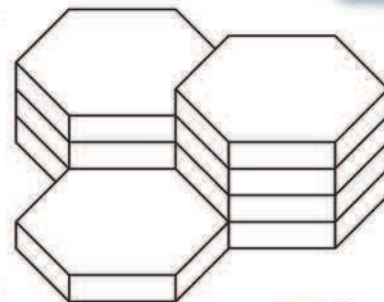


рис. 2

В одном из архитектурных проектов предлагается из этих башен составить современный музей в 7 этажей так, чтобы в основании получился один из узоров, изображенных на рисунке 3. Затененный центральный шестиугольник изображает шахту лифта. Ясно, что шесть башен придется перевернуть, чтобы их плоские основания составили плоскую крышу музея. В предположении, что все практические сложности преодолимы, возникает естественный вопрос – подходят ли друг к другу формы этих башен. Другими словами, есть ли математическое решение у этой задачи?

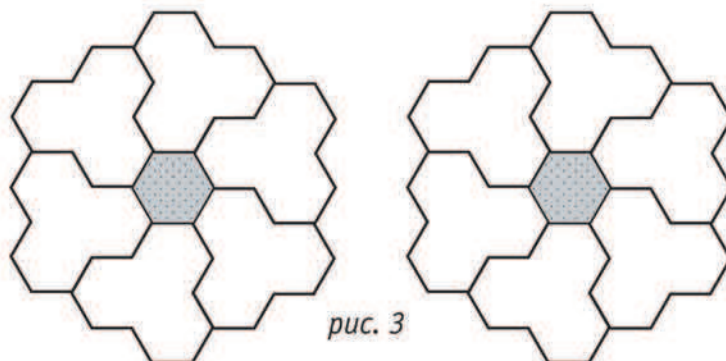


рис. 3

(Подробнее – на странице 28 внутри журнала)

журнал©  
**Квант** МАРТ 2009 №2  
АПРЕЛЬ 2009

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

**Квант**

Учредители — Российская академия наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна), ИФТТ РАН

главный редактор

**С.С.Кротов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов, А.Н.Виленин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин, Н.П.Долбиллин (заместитель главного редактора), В.Н.Дубровский, А.А.Егоров, А.В.Жуков, А.Р.Зильберман, В.В.Кведер (заместитель председателя редколлегии), П.А.Кожевников, В.В.Козлов (заместитель председателя редколлегии), С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, В.М.Уроев, А.И.Черноуцан (заместитель главного редактора)**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков, В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков, Л.Д.Фаддеев**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
1970 ГОДА

главный редактор

**И.К.Кикоин**

первый заместитель  
главного редактора

**А.Н.Колмогоров**

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский, А.И. Маркушевич, М.Д.Миллиончиков, Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

Бюро  **Квантум**

© 2009, РАН,  
Фонд Осипьяна, «Квант»

- 2 Электрические узоры. *А.Снарский, К.Слипченко, А.Пальти*  
6 Задача Эрдеша – Секереша о выпуклых многоугольниках.  
*В.Кошелев, А.Райгородский*  
14 Этот таинственный слышимый мир. *Е.Соколов*

НОВОСТИ НАУКИ

- 19 Устроители столкновений

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 21 Задачи М2124–М2130, Ф2130–Ф2137  
22 Решения задач М2101–М2110, Ф2118–Ф2122

К М Ш

- 29 Задачи  
30 Что мы видим в зеркале? *А.Толпыго*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Замощения плоскости

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 34 Вневыписанная окружность. *А.Блинков, Ю.Блинков*

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 38 Прыгучий шарик. *В.Майер*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 40 Разрезания на треугольники. *А.Спивак*  
41 Неравенства и ... параллельный перенос. *М.Горелов*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 46 «Подводные камни» силы Архимеда. *М.Ромашка*  
50 ЕГЭ-2009 по физике. *М.Демидова, А.Черноуцан*

ОЛИМПИАДЫ

- 54 Региональный этап XXXV Всероссийской олимпиады школьников по математике  
55 Региональный этап XLIII Всероссийской олимпиады школьников по физике  
59 Ответы, указания, решения

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «Электрические узоры»*  
II *Коллекция головоломок*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогулки с физикой*

**TENEX**

В издании журнала «Квант» финансовое участие принимает  
ОАО «ТЕХСНАБЭКСПОРТ»





# Электрические узоры

А.СНАРСКИЙ, К.СЛИПЧЕНКО, А.ПАЛЬТИ

*Взвод! Спиной друг к другу в шахматном порядке по диагонали становись.*

ЧЕЛОВЕКА ИЗДАВНА ПРИВЛЕКАЛИ РАЗНООБРАЗНЫЕ узоры и орнаменты, которые отражают красоту и определенный порядок в природе. Восхищенный формой снежинок, И.Кеплер посвятил им целую книгу. Изучение узоров привело к понятию симметрии – одному из важных понятий математики. Подробное исследование симметрии различных систем дало начало теории групп в математике, кристаллографии в физике.

А что если каждому элементу симметричного геометрического узора или структуры приписать определенное физическое свойство, например сопротивление? Рассмотрим один из простейших вариантов – двухцветные узоры на плоскости. Хорошо проводящий участок, будем называть его хорошо проводящей фазой, с удельным сопротивлением  $\rho_1$  будем закрашивать синим цветом, а плохопроводящую фазу с удельным сопротивлением  $\rho_2$  – желтым цветом. Таким образом, под фазой будем понимать совокупность участков одного цвета, или одного и того же удельного сопротивления. Можно задаться вопросом: каково сопротивление такого узора? К примеру, каково сопротивление шахматной доски из синих и желтых клеток?

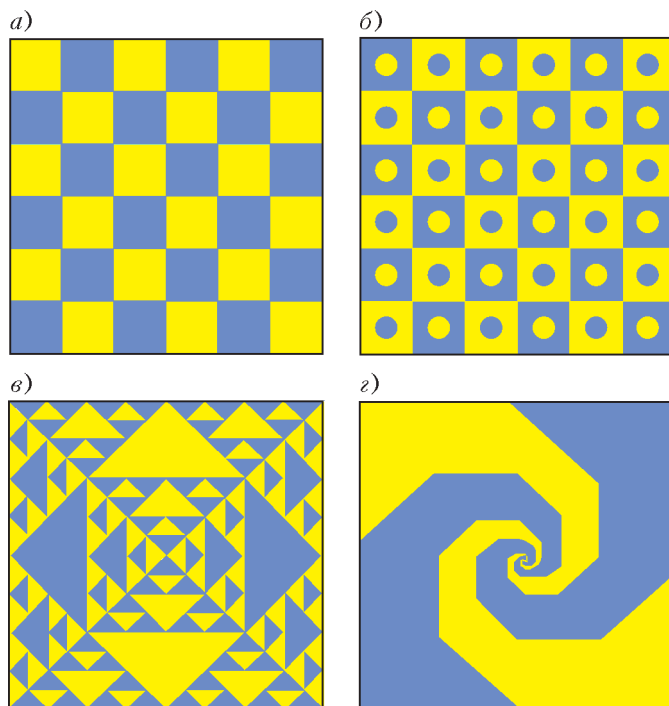


Рис. 1

Мы рассмотрим геометрические узоры, обладающие вполне определенной симметрией. А именно – при повороте узора на угол  $\pi/2$  и замене синей фазы желтой (т.е. взаимной замены сопротивлений разного типа) должна сохраняться его геометрическая структура и должно оставаться неизменным его сопротивление. Ниже мы расскажем о способе, который позволяет удивительно просто определить сопротивление как угодно сложной структуры, обладающей именно такой симметрией.

Когда речь идет только о геометрии, то все ясно. Например, нужной нам симметрией обладают узоры, изображенные на рисунке 1. Но как только речь заходит об электрических свойствах, возникает проблема контакта. Ток должен где-то как-то входить и где-то как-то выходить. Где и как – определяют контакты. Мы будем рассматривать два типа контактов: идеальные проводящие контакты, сопротивление которых равно нулю, – будем закрашивать их черным цветом и непроводящие контакты с бесконечным сопротивлением (т.е. просто изоляторы) – будем закрашивать их белым цветом.

Опишем преобразования, которые в конечном счете оставляют полное сопротивление среды с определенным образом расположенными сопротивлениями тем же самым. Обратимся к рисунку 2. Первое преобразование – переход от позиции 1 к позиции 2 – состоит во взаимной замене желтого и синего (удельных сопротивлений  $\rho_1$  на  $\rho_2$  и наоборот), а также черного и белого. Последнее означает, что это преобразование меняет местами не только желтую и синюю фазы, но одновременно и контакты. Следовательно, если говорить об электрической задаче, то при этом преобразовании меняются и направления токов. Например, если раньше токи в целом текли слева направо, то теперь новое положение контактов заставляет токи в целом течь снизу вверх. Среду, получаемую таким преобразованием, будем называть дуальной. Повернем теперь,

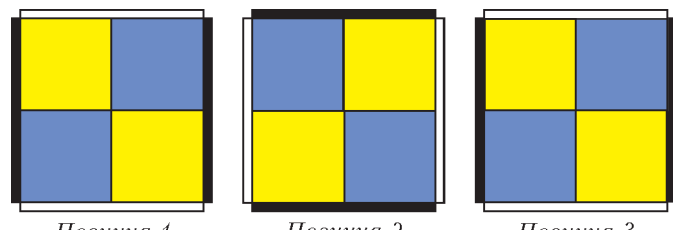


Рис. 2

ничего не меняя, дуальную среду на угол  $\pi/2$  – перейдем от позиции 2 к позиции 3 – и сравним между собой первую и последнюю позиции. Будем рассматривать такие узоры (расположения проводящих фаз), для которых начальная и конечная позиции тождественны. Заметим, что узоры могут не совпадать, а являться зеркальными отображениями друг друга. Ничего страшного в этом нет, поскольку сопротивление зеркально отображенного образца точно такое же.

Для того чтобы подсчитать сопротивление неоднородной среды, необходимо решить систему уравнений, которые выражают закон сохранения заряда и потенциальность электрического поля в стационарном случае. Эти уравнения, определяющие плотность тока и напряженность электрического поля в каждой точке среды, являются дифференциальными уравнениями в частных производных, и их изучение выходит за рамки не только школьной программы, но и первого курса университетов. Однако есть возможность, не теряя общности и строгости, воспользоваться существенно более простой математикой.

Сделаем то, что называют дискретизацией задачи. Вместо непрерывной среды рассмотрим сетку. И если раньше каждой точке отвечало определенное удельное сопротивление  $\rho_1$  или  $\rho_2$ , то теперь определенное сопротивление  $r_1$  или  $r_2$  будем приписывать связям сетки. (Именно так и поступают, когда решают дифференциальные уравнения на компьютере.) Те законы, которые раньше записывались в виде дифференциальных уравнений, примут вид системы линейных алгебраических уравнений, которые хорошо известны школьникам как уравнения Кирхгофа. Первое из них –

$$\sum I_i = 0 \quad (1)$$

– есть следствие закона сохранения заряда, а второе –

$$\sum U_i = \sum \mathcal{E}_i, \text{ где } U_i = I_i r_i, \quad (2)$$

записанное для замкнутого контура, содержащего источник ЭДС, – является следствием закона Ома. Поскольку в нашем случае источники ЭДС внутри сетки отсутствуют, то  $\sum \mathcal{E}_i = 0$ .

Подберем теперь такое расположение сопротивлений  $r_1$  и  $r_2$  в сетке, что поворот ее на угол  $\pi/2$  и взаимная замена  $r_1$  на  $r_2$  ничего не меняет. Рассмотрим то, что мы в шутку будем называть электрическим квадратом, – квадратную сетку из сопротивлений  $r_1$  и  $r_2$  с контактами, изображенную на рисунке 3,а. Здесь проводящие связи и контакты, как и в непрерывном случае, показаны черным цветом, а связи

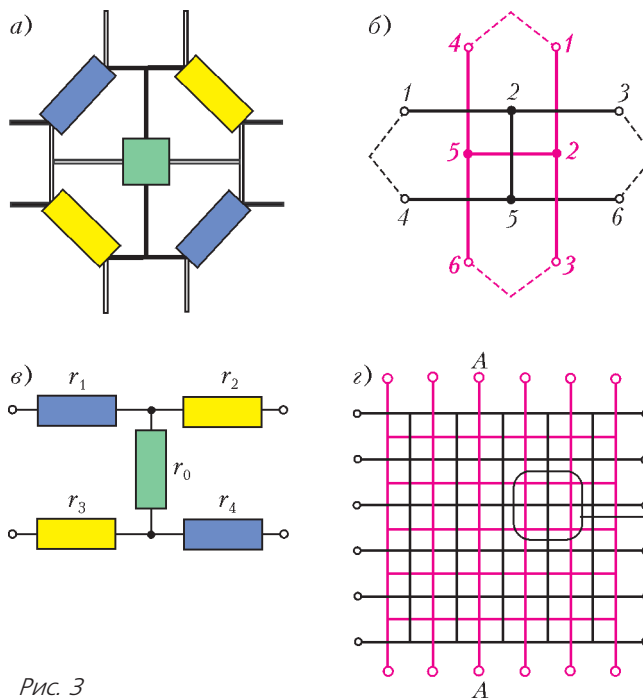


Рис. 3

и контакты другого типа – белым. Те же преобразования, которые в непрерывном случае переводили изначальную среду в дуальную с тем же сопротивлением (см. рис.2, позиция 2), точно так же переводят наш простейший электрический квадрат в дуальный с тем же самым сопротивлением. На рисунке 3,б показаны одновременно изначальная сетка и дуальная к ней (нарисована красным цветом). Чтобы не загромождать рисунок, сами сопротивления (желтые и синие) на нем не приведены. Однако из рисунка видно соответствие сопротивлений изначальной и дуальной сеток. Например, желтому сопротивлению 1–2 в изначальной сетке соответствует синее сопротивление 1–2 в дуальной сетке. Расположение сопротивлений в изначальной сетке должно быть таким, чтобы при повороте красной сетки на угол  $\pi/2$  (аналог перехода от позиции 2 к позиции 3 на рисунке 2) она совпадала с изначальной. Для простейшего электрического квадрата такое расположение сопротивлений показано на рисунке 3,в.

Обратим внимание на то, что на рисунках 3,а и 3,в присутствует особое сопротивление, которое переходит само в себя и которое мы закрасили зеленым цветом. В непрерывной среде тоже обязательно есть как минимум одна такая точка. Например, для узора на рисунке 2 это центральная точка – она и не желтая, и не синяя. При замене желтого цвета на синий она своего цвета не меняет. В сетке с конечным числом связей таким сопротивлением пренебречь нельзя, и нам придется найти, как это сопротивление выражается через  $r_1$  и  $r_2$ .

Итак, каждой связи в исходной черной сетке соответствует связь в красной и, согласно описанной выше симметрии, сопротивлению одной связи соответствует вполне определенное сопротивление другой связи. Возникает вопрос: нельзя ли установить соответствие

между токами и падениями напряжения на данной связи в черной сетке и токами и падениями напряжения на дуальной связи красной сетки? Другими словами, существует ли преобразование, которое взаимно переводит токи и напряжения в указанных сетках? Такие преобразования возможны в двумерном случае. Они были найдены российским физиком А.М.Дыхне и американским физиком Дж.Келлером. Вот эти преобразования (мы, конечно, приводим их сеточный вариант):

$$u_{\alpha\beta} = \Lambda \tilde{i}_{\gamma\delta}, \quad i_{\alpha\beta} = \frac{1}{\Lambda} \tilde{u}_{\gamma\delta}, \quad (3)$$

где  $\Lambda$  – некоторая константа, которая будет определена позднее, а буквы с тильдой соответствуют дуальной среде.

Как видно из приведенных преобразований (3), например, току в горизонтальной связи исходной (черной) сетки, соответствует падение напряжения на вертикальной связи дуальной (красной) сетки. Для однозначности преобразований необходимо задать направление полного тока в черной и красной сетках. Будем считать, что в черной сетке полный ток заходит в левый контакт, а в красной – в нижний контакт. Естественно в этом случае в качестве положительного направления тока для каждой горизонтальной связи черной сетки выбрать направление слева направо, а для вертикальной связи выберем направление сверху вниз. Пользуясь теми же соображениями, выберем за положительное направление тока в вертикальной связи дуальной сетки направление снизу вверх, а в горизонтальной – слева направо. Такое взаимное соответствие направлений тока в сетках означает, что для нахождения положительного направления тока в дуальной связи нужно просто повернуть ток в изначальной связи на угол  $\pi/2$  против часовой стрелки. Падение напряжения будем полагать, как обычно, происходящим вдоль тока.

Неожиданным является тот факт, что если преобразовать уравнения (1) с помощью формул (3) (т.е. заменить токи в изначальной сетке на напряжения в дуальной), то получится система уравнений (2) в дуальной сетке. Это можно показать строго, но мы ограничимся только примером.

Рассмотрим выделенный участок на рисунке 3,г. Первый закон Кирхгофа (1) для черного узла, согласно выбранным положительным направлениям токов, можно записать так:

$$i_{\alpha\beta} + i_{\lambda\beta} - i_{\beta\tau} - i_{\beta\eta} = 0.$$

Заменяем токи в соответствии с преобразованиями (3):

$$i_{\alpha\beta} = \frac{1}{\Lambda} u_{\delta\gamma}, \quad i_{\lambda\beta} = \frac{1}{\Lambda} u_{\gamma\nu}, \quad i_{\beta\tau} = \frac{1}{\Lambda} u_{\mu\nu}, \quad i_{\beta\eta} = \frac{1}{\Lambda} u_{\delta\mu}$$

и получим

$$u_{\delta\gamma} + u_{\gamma\nu} - u_{\mu\nu} - u_{\delta\mu} = 0.$$

Слева стоит не что иное как сумма напряжений по замкнутому красному контуру  $\delta\mu\nu\gamma$ , взятая с учетом выбранного правила знаков. Эта сумма, как следует

из второго закона Кирхгофа, равна нулю. Для участка цепи, связывающего между собой контакты, в правую часть последнего равенства войдет внешняя разность потенциалов. Мало того, можно показать, что полное количество независимых уравнений Кирхгофа для обеих сеток одинаково.

Интересно посмотреть, во что превращается под действием преобразований (3) закон Ома. Рассмотрим какую-нибудь одну связь. Из равенства

$$u_{\alpha\beta} = r_{\alpha\beta} i_{\alpha\beta}$$

получаем

$$\tilde{u}_{\gamma\delta} = \frac{\Lambda^2}{r_{\alpha\beta}} \tilde{i}_{\gamma\delta}.$$

С другой стороны, последнее выражение есть не что иное как закон Ома для связи  $\gamma\delta$  дуальной сетки:

$$\tilde{u}_{\gamma\delta} = \tilde{r}_{\gamma\delta} \tilde{i}_{\gamma\delta}.$$

Сравнивая между собой последние два равенства, обнаруживаем, что преобразование (3) приводит к тому, что сопротивления изначальной и дуальной сред связаны друг с другом через пока еще не определенную нами константу  $\Lambda$ :

$$\tilde{r}_{\gamma\delta} = \frac{\Lambda^2}{r_{\alpha\beta}}.$$

Вспомним теперь о нашей симметрии, согласно которой если  $r_{\alpha\beta} = r_1$ , то  $\tilde{r}_{\gamma\delta}$  должно равняться  $r_2$  и наоборот – если  $r_{\alpha\beta} = r_2$ , то  $\tilde{r}_{\gamma\delta}$  должно равняться  $r_1$ . Легко сообразить, что если константу  $\Lambda$  выбрать равной  $\sqrt{r_1 r_2}$ , то требование симметрии будет выполнено.

Вернемся к нашей исходной задаче – вычислить сопротивление всего узора. Для этого запишем законы Ома в черной и красной сетках:

$$U = RI, \quad \tilde{U} = \tilde{R}\tilde{I},$$

где  $U$  и  $\tilde{U}$  – те внешние разности потенциалов, о которых шла речь выше, а  $I$  и  $\tilde{I}$  – полные токи, протекающие через сетки. Конечно, в силу выбранной симметрии, у нас  $R = \tilde{R}$ . Запишем преобразования (3) для полного тока, проходящего через изначальную сетку, и для полного падения напряжения:

$$I = \frac{1}{\Lambda} \tilde{U}, \quad U = \Lambda \tilde{I}.$$

Здесь ток  $I$  есть сумма токов, проходящих по связям через сечение  $AA$ , а преобразования переводят токи в сумму падений напряжения вдоль сечения  $AA$  на дуальной (красной) сетке. В итоге получим

$$\tilde{R} = \frac{\Lambda^2}{R}.$$

Поскольку  $\Lambda$  уже известно ( $\Lambda = \sqrt{r_1 r_2}$ ) и  $R = \tilde{R}$ , отсюда сразу же следует выражение для сопротивле-

ния всего узора:

$$R = \sqrt{r_1 r_2} . \quad (4)$$

Рассмотрим теперь неоднородный образец, удельные сопротивления которого  $\rho_1$  и  $\rho_2$  образуют симметричный узор такой, что отдельные его большие части одинаковы (как, например, узоры на рисунках 1,а и 1,б; узоры на рисунках 1,в и 1,г не подходят).

В этом случае говорят, что образец однороден в среднем. Для такого образца, как и для однородного, можно ввести характеристику, которая называется эффективным удельным сопротивлением, и записать

$$R = \rho_{\text{эфф}} \frac{L}{S}, \quad S = Ld,$$

где  $d$  – толщина, а  $L$  – длина стороны квадратного образца. В терминах удельных сопротивлений, как легко видеть, формула (4) принимает такой вид (формула Дыхне):

$$\rho_{\text{эфф}} = \sqrt{\rho_1 \rho_2} .$$

Если бы фазы располагались слоями и ток тек поперек этих слоев, то удельное сопротивление такой среды выражалась бы как хорошо известное среднее арифметическое:  $\rho_{\text{эфф}} = (\rho_1 + \rho_2)/2$ . При течении тока в такой «полосатой» среде вдоль слоев удельное сопротивление имело бы вид  $\rho_{\text{эфф}} = 2\rho_1\rho_2/(\rho_1 + \rho_2)$ , т.е. вид среднего гармонического. А для сопротивления например, шахматной доски, как мы теперь знаем, годится среднее геометрическое:  $\rho_{\text{эфф}} = \sqrt{\rho_1\rho_2}$ .

Читатель, который еще внимательно следит за нашим изложением, вправе возмутиться и напомнить нам о том дуальном сопротивлении, которое переходит само в себя. Например, это сопротивления  $r_{25}^{\text{и}}$  и  $r_{25}^{\text{д}}$  на рисунке 3,б, где индексы «и» и «д» относятся к исходной и дуальной сеткам. Зная формулу (4), легко разобраться с этим вопросом. Обозначим переходящее само в себя сопротивление через  $r_0$  и подсчитаем сопротивление простейшего электрического квадрата (см. рис.3,в):

$$R = \frac{r_1 r_0 + r_2 r_0 + 2r_1 r_2}{2r_0 + r_1 + r_2} .$$

Приравнивая правую часть этого выражения к правой части формулы (4), получим

$$r_0 = \sqrt{r_1 r_2} .$$

Как и должно быть, при замене  $r_1$  на  $r_2$  сопротивление  $r_0$  остается тем же самым. Такой же результат для  $r_0$  можно получить при использовании и более сложных электрических квадратов.

До сих пор мы рассматривали самые простые контакты – такие, что, если среда однородна, плотность тока в каждой ее точке по величине одна и та же и направлена одинаково. Можно обсуждать и другие

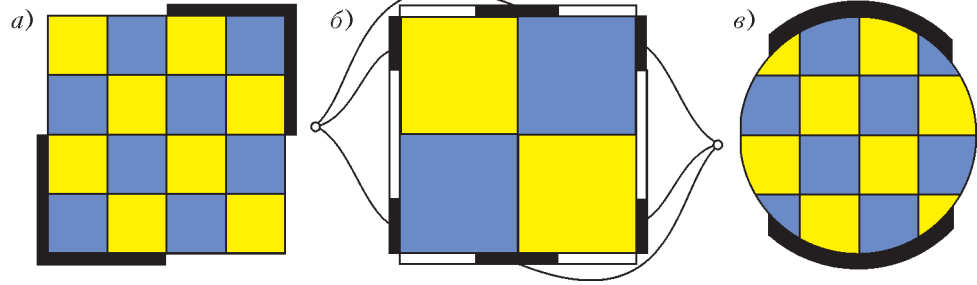


Рис. 4

контакты, которые приведут к неоднородному распределению плотности тока, главное – чтобы эти контакты удовлетворяли той же симметрии (рис.4,а, б). Мало того, сам образец не обязательно должен быть квадратным (рис.4,в).

Рассмотренные выше задачи имеют отношение к серьезной и глубокой науке. Английские исследователи С.Бродбент и Дж.Хаммерсли в 1957 году сформулировали основные идеи, которые положили начало активно развивающейся сейчас теории протекания, или теории перколяции.<sup>1</sup>

Суть основной задачи теории протекания легко пояснить на примере очень большой (в пределе – бесконечной) проводящей квадратной сетки. Перережем некоторое количество случайно выбранных связей сетки, т.е. часть конечных сопротивлений, которыми обладала каждая связь, заменим на бесконечные сопротивления. Минимальная концентрация неразрывных связей, при которых ток может протечь через всю сетку, называется порогом протекания. Так вот, рассмотренные нами среды, которые являются однородными в среднем, и есть среды на пороге протекания.

Позже выяснилось, что существует глубокая аналогия между теорией протекания и теорией фазовых переходов, и на ее основе была построена удивительно красивая теория критического поведения физических свойств различных систем вблизи порога протекания. Иными словами, с точки зрения физика, перколяция – это геометрический фазовый переход.

<sup>1</sup> Подробно об этой теории можно прочитать, например, в книге А.Л.Эфроса «Физика и геометрия беспорядка» (выпуск 19 Библиотечки «Квант»), а также в статье того же автора «Что такое теория протекания» в журнале «Квант» («Квант» №2 за 1982 г.).





# Задача Эрдеша – Секереша о выпуклых многоугольниках

**В. КОШЕЛЕВ, А. РАЙГОРОДСКИЙ**

## Напутствие

Задача, о которой мы хотим поговорить в этой статье, по праву считается одной из жемчужин комбинаторной геометрии. Исключительная простота ее постановки делает рассказ о ней доступным школьнику, а нетривиальность ее решения и многочисленные ее связи с другими областями математики сразу же выводят заинтересованного слушателя на передний край современной комбинаторики. Задача эта возникла в 1934 году, и, хотя умение быстро считать не является, вопреки расхожему мнению, отличительной особенностью математика, каждый из нас моментально сообразит, что в этом году исполняется ровно 75 лет со дня ее рождения. Не правда ли, круглая дата? Что ж, давайте ее отметим.

## Первые шаги

### Постановка задачи

Рассмотрим какое-нибудь конечное множество точек  $\mathcal{X}$  на плоскости и зададимся, например, таким вопросом: верно ли, что в множестве  $\mathcal{X}$  всегда найдутся три точки, являющиеся вершинами треугольника? На первый взгляд, вопрос кажется просто нелепым. Ясно же, что если в  $\mathcal{X}$  одна или две точки, то и говорить не о чем; если же  $|\mathcal{X}| \geq 3$  (мощность  $\mathcal{X}$  не меньше тройки), то вроде как любые три элемента в множестве служат вершинами треугольника. Так-то оно так, да не совсем: а что если какие-то три точки из множества  $\mathcal{X}$  лежат на одной прямой? Тогда вряд ли уместно говорить о треугольнике с вершинами в них. И уж вовсе никуда не годится ситуация, в которой все точки нашего множества оказываются «нанизанными» на одну прямую. Короче, ответ на вопрос неожиданно отрицательный. Однако если мы с самого начала допустим, что в множестве  $\mathcal{X}$  *никакие три точки не лежат на одной прямой*, то сработает естественная логика и при условии  $|\mathcal{X}| \geq 3$  мы сможем гарантировать наличие треугольников в  $\mathcal{X}$ .

Хорошо, с треугольниками разобрались. А как тогда обстоят дела с выпуклыми<sup>1</sup> четырехугольниками, вы-

<sup>1</sup> Множество называется выпуклым, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и весь отрезок, их соединяющий.

пуклыми пятиугольниками и т.д.? Хочется, по идее, получить ответ в той же форме, что и в случае треугольников, а именно: для каждого  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , желательно отыскать такую «пограничную» величину  $g(n) \in \mathbb{N}$ , чтобы в каждом множестве  $\mathcal{X}$ , не содержащем троек точек на одной прямой и имеющем не менее  $g(n)$  элементов, нашлись  $n$  вершин выпуклого  $n$ -угольника и чтобы для  $g(n) - 1$  описанное свойство не выполнялось. Вот  $g(3) = 3$ , а чему равны  $g(4)$ ,  $g(5)$  и пр.? Вообще, существуют ли (вернее, конечны ли) эти величины? Ведь вполне может статься, что, скажем, для любого  $m$  найдется множество  $\mathcal{X}$  размера  $m$ , в котором нет вершин выпуклых десятиугольников. Кто знает?

Проблема Эрдеша – Секереша, к изучению которой мы теперь переходим, как раз и состоит в отыскании величин  $g(n)$ . Ниже мы расскажем много интересного о ней, а сейчас сделаем небольшое замечание. Для постановки задачи оказалось очень важно предположить, что множества  $\mathcal{X}$  не содержат троек точек на одной прямой. В действительности, такое свойство очень часто работает в геометрии, и потому для него придуман специальный термин: говорят, что множество  $\mathcal{X}$  с этим свойством *находится в общем положении*. Происхождение термина связано с тем, что в некотором естественном смысле «почти все» множества на плоскости находятся в общем положении, — отсюда и общность. Впрочем, мы не станем здесь давать более подробные комментарии, иначе мы уйдем слишком далеко в сторону от нашего основного маршрута. Главное, что отныне, рассматривая множества точек на плоскости, мы будем подразумевать, что они находятся в общем положении: иные множества нас просто не волнуют.

## Разберемся с четырехугольниками

Очевидно, что  $g(4) > 3$  (на трех точках четырехугольнику взяться неоткуда). Может быть,  $g(4) = 4$ ? Разумеется, нет. Достаточно посмотреть на рисунок 1, чтобы понять это: изображенные на картинке точки находятся в общем положении, и, тем не менее, среди них нет вершин выпуклых четырехугольников. Итак,  $g(4) \geq 5$ .

Покажем, что  $g(4) = 5$ , т.е. убедимся, что в любом



множестве из пяти точек на плоскости есть выпуклые четырехугольники. Тут нам понадобится понятие выпуклой оболочки множества точек. Грубо говоря, *выпуклая оболочка* (конечного) множества  $\mathcal{X}$  – это «наименьший» выпуклый многоугольник, внутри или на границе которого лежат все точки из  $\mathcal{X}$ . На рисунке 2 показаны примеры выпуклых оболочек. Существует и более строгое определение, но нам кажется, что интуитивного понимания

Рис.1. Четыре точки без выпуклых четырехугольников



Рис.2. Выпуклые оболочки

вполне достаточно, а заинтересованный читатель может обратиться, например, к книге [1].

Пусть даны произвольные пять точек на плоскости. Рассмотрим их выпуклую оболочку. Либо внутри нее наших точек нет, либо внутри нее одна точка, либо внутри нее две точки (рис.3). В первых двух случаях

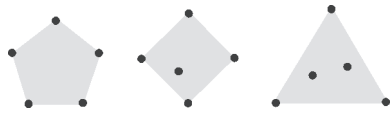


Рис.3. Варианты взаимного расположения пяти точек

все очевидно, а в третьем случае аккуратное рассуждение устроено так: проведем через две внутренние точки

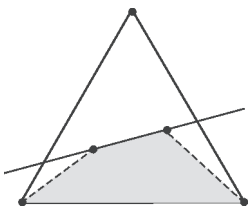


Рис.4. Случай двух внутренних точек

прямую; ввиду общности положения, эта прямая не пройдет ни через одну вершину треугольника (рис.4), но «зацепит» сразу две его стороны; возьмем две внутренние точки и две вершины оставшейся стороны треугольника; их выпуклая оболочка и есть искомым четырехугольник.

**Небольшое лирическое отступление**

Как-то мало мы до сих пор говорили об истории проблемы... А она очень даже романтическая. Наблюдение о том, что  $g(4) = 5$ , сделала Эстер Кляйн. И она, и Дьёрдь Секереш, и Пол Эрдеш были тогда еще очень молодыми людьми, студентами. Именно Кляйн в 1934 году предложила искать выпуклые четырехугольники в множествах точек на плоскости. В 1935 году Эрдеш и Секереш опубликовали статью, которая стала впоследствии классической и в которой доказывались многие результаты относительно величины  $g(n)$  (см. [2]). А в 1936 году Кляйн и Секереш поженились. В связи с этим Эрдеш назвал проблему, о которой мы сейчас говорим, «Happy End Problem». И действительно, прямо как в сказке, Секереш и Кляйн прожили вместе без малого 70 лет и умерли в один день 28 августа 2005 года.

И Кляйн, и Секереш, и Эрдеш – венгры по происхождению. Кляйн и Секереш жили после войны в Австралии. Эрдеш же стал одним из самых продуктивных математиков XX века. Ему принадлежит около полутора тысяч статей по комбинаторике, геометрии, теории чисел и др. Он несколько раз в год объезжал земной шар, путешествуя с конференции на конференцию.

**А что с пятиугольниками?**

Как говорится, чем дальше в лес, тем больше дров. Разумеется, отыскание величины  $g(5)$  – это куда более сложная задача, нежели те, которыми мы до сих пор занимались. Сходу не вполне понятно даже, чего от этой величины ожидать. Тем не менее, есть сразу два примера, которые показывают, что  $g(5) \geq 9$ . Это примеры из восьми точек в общем положении и без выпуклых пятиугольников. Они изображены на рисунке 5. Ниже мы покажем, что на самом деле  $g(5) = 9$ .

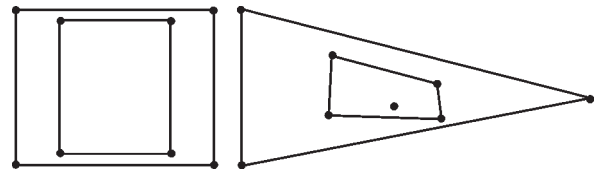


Рис.5. Примеры из восьми точек без выпуклых пятиугольников

Это старый результат, и его история немного туманна. Впервые он упоминается еще в 1935 году в статье [2], где он приписывается Э.Макаи. В 1961 году Эрдеш и Секереш опубликовали работу [3], и там уже говорится о двух авторах – все том же Макаи и П. Туране. Однако печатный вариант доказательства появился только в 1970 году. Потом были всяческие упрощения, и здесь мы приводим одно из простейших рассуждений.

Итак, пусть даны девять точек, образующих множество  $\mathcal{X}$  общего положения на плоскости. Рассмотрим выпуклую оболочку  $\mathcal{I}$  множества  $\mathcal{X}$ . Ввиду общности положения у  $\mathcal{I}$  не может быть меньше трех вершин. Если у  $\mathcal{I}$  пять или более вершин, то выпуклый пятиугольник найден, и дальше говорить не о чем. Иначе у  $\mathcal{I}$  три или четыре вершины. Остальные шесть или пять точек из множества  $\mathcal{X}$  находятся строго внутри  $\mathcal{I}$ . Возьмем теперь их выпуклую оболочку и назовем ее  $\mathcal{J}$ . Снова: либо у  $\mathcal{J}$  пять и более вершин, и тогда пятиугольник у нас получился, либо у  $\mathcal{J}$  три или четыре вершины... Стоп: а почему, например, не две? Мешает общность положения. Где тогда разместятся недостающие точки из  $\mathcal{X}$  (рис.6)? На внутреннем отрезке ведь их быть не может.

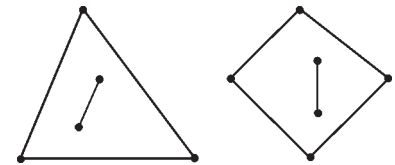


Рис.6. Почему у  $\mathcal{J}$  не две вершины

Давайте переведем дух. На данном этапе мы имеем следующую картину. Если в процессе построения выпуклых оболочек пятиугольник еще не найден, то у нас таких вложенных друг в друга оболочек уже две –  $\mathcal{I}$  и  $\mathcal{J}$ , и каждая из них есть либо треугольник, либо четырехугольник. А

всего-то точек девять. Значит, процесс можно продолжить.

Посмотрим внутрь  $J$ . Там, очевидно, одна, две или три точки из  $X$ . Обозначим через  $i$  количество вершин многоугольника  $q$ , через  $j$  – количество вершин многоугольника  $J$ , а через  $k$  – количество точек внутри  $J$ . Понятно, что их выпуклая оболочка  $K$  – это точка, отрезок или треугольник. В итоге остается изучить лишь четыре случая, и все они изображены на рисунке 7. По естественным причинам, назовем их случаями

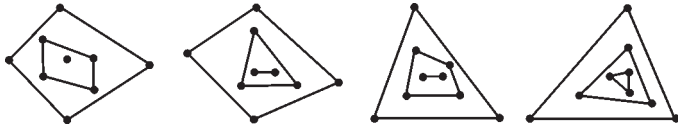


Рис.7. Случаи  $(4, 4, 1)$ ,  $(4, 3, 2)$ ,  $(3, 4, 2)$  и  $(3,3,3)$

(или еще конфигурациями вида)  $(4, 4, 1)$ ,  $(4, 3, 2)$ ,  $(3, 4, 2)$  и  $(3, 3, 3)$ .

Вообще, выражение «конфигурация вида  $(i, j, k)$ » весьма удобно, и нас никто не заставляет использовать его только для наших девятиточечных множеств. Например, конфигурация вида  $(3, 3, 2)$ , соответствующая

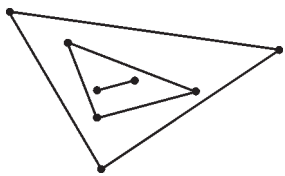


Рис.8. Конфигурация вида  $(3, 3, 2)$

восемиточечному множеству, изображена на рисунке 8.

Допустим, мы доказали, что в любых конфигурациях вида  $(3, 3, 2)$ ,  $(4, 3, 1)$  и  $(3, 4, 2)$  все-таки есть выпуклый пятиугольник. Что ж, это победа, ведь совсем легко

видеть, что каждая из конфигураций рисунка 7 в свою очередь содержит одну из указанных конфигураций (в  $(3, 3, 3)$  таится  $(3, 3, 2)$ ; в  $(4, 3, 2)$  и  $(4, 4, 1)$  угнездилась  $(4, 3, 1)$ ; с  $(3, 4, 2)$  все и так ясно).

Разберемся сперва со случаями  $(3, 3, 2)$  и  $(4, 3, 1)$ . Именно этим случаям посвящен рисунок 9. На нем

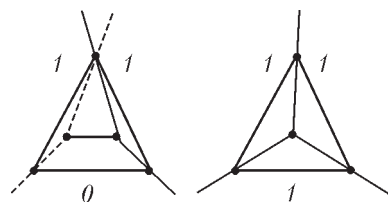


Рис.9. Случаи  $(3, 3, 2)$  и  $(4, 3, 1)$

изображены две оболочки, которые мы называли  $J$  и  $K$ . Далее, в первом случае мы покрываем плоскость вокруг треугольника  $J$  тремя областями, внутри которых написаны цифры. Область с нулем строго отделена от областей с единицами, а области с единицами между собой пересекаются (у одной граница пунктирная, а у другой – сплошная). Смысл очень простой: если, скажем, в какой-либо из областей с единицей окажется больше одной вершины многоугольника  $q$ , то, ввиду его выпуклости, и выпуклый пятиугольник у нас в руках. Иными словами, если мы предположим, что в нашей конфигурации выпуклых пятиугольников нет, то мы окажемся вынужденными признать, что у  $q$  не более двух вершин. Однако это неверно, чем и завершается разбор случая. Точно так же действуем во второй ситуации.

Остался случай  $(3, 4, 2)$ . Тут слегка похитрее. Снова посмотрим на промежуточный четырехугольник и внутренний отрезок. Благодаря общности положения, существуют лишь два варианта их взаимного расположения. А именно, прямая, содержащая отрезок, пересекает либо соседние стороны четырехугольника, либо противоположные. Первый вариант изображен на рисунке 10 слева, и в нем пятиугольник ловится сразу.

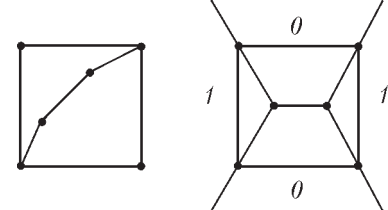


Рис.10. Случай  $(3, 4, 2)$

Второй вариант размещен на том же рисунке справа, и в нем мы действуем согласно логике предыдущего абзаца (разрезаем плоскость на части и выписываем, сколько вершин внешнего треугольника могли бы в эти части попасть, не будь в конфигурации выпуклого пятиугольника).

Все, неравенство  $g(5) \leq 9$  доказано.

### Видна закономерность?

Ну, это такое упражнение на IQ: продолжить последовательность 3, 5, 9, состоящую из значений  $g(n)$  при  $n = 3, 4, 5$ . Видно, что  $3 = 2^1 + 1$ ,  $5 = 2^2 + 1$ ,  $9 = 2^3 + 1$ . Иными словами, закрадывается подозрение, что  $g(n) = 2^{n-2} + 1$ . Не правда ли, красивая формула вырисовывается? Вот кабы она еще и верной оказалась!

К сожалению, все не так просто. За прошедшие 75 лет было получено лишь одно дополнительное подтверждение угаданной нами закономерности. Любопытно, что принадлежит этот результат все тому же Секерешу, который в соавторстве с Л.Питерсом установил равенство  $g(6) = 17$ . Еще более любопытно то, что соответствующая публикация появилась аж в 2006 году, т.е. Секереш не изменял своей задаче на протяжении семидесяти лет, и последняя его статья на эту тему вышла после его смерти. Подход, развитый Секерешем и Питерсом, довольно нетривиален. Им удалось придумать некий алгоритм, который за разумное время перебирает все (существенные) расположения из семнадцати точек на плоскости и в каждом из таких расположений находит вершины выпуклого шестиугольника. Иначе говоря, их доказательство в значительной мере опирается на компьютерный перебор, который, кстати, требует изрядных машинных ресурсов. В любом случае описание метода Секереша – Питерса выходит за рамки этой заметки, и мы лишь можем отослать заинтересованного читателя к оригинальной работе [4].

Саму закономерность Эрдеши и Секереш подметили, конечно, сразу, и в [2] сформулирована их гипотеза.

**Гипотеза 1.** *Имеет место равенство  $g(n) = 2^{n-2} + 1$ .*

Это утверждение никем до сих пор не доказано и не опровергнуто, что не может не производить впечатления: 75 лет прошло, а воз и ныне там. К слову, Эрдеши, великий сочинитель самых разнообразных математических задач, прославился еще и тем, что за решение

своих задач он назначал некие суммы денег, ранжируя, тем самым, задачи по «трудности». Кажется, самой большой из когда-либо предложенных им сумм была сумма в 3000 долларов. А о гипотезе 1 он незадолго до своей смерти в 1996 году писал, что, несомненно, заплатил бы за ее доказательство 500 долларов. Забавно и то, что за опровержение гипотезы он денег не предлагал: видимо, свято верил в ее справедливость и не хотел стимулировать движение математической мысли в неверном, с его точки зрения, направлении.

С гипотезы 1, попыток доказать ее и возникающей вокруг этого многогранной проблематики начинается по-настоящему серьезная работа над задачей. И в дальнейшем мы поговорим об этом. Прежде всего: а разве мы где-то, вообще, показали, что  $g(n) < \infty$  для каждого  $n$ ?

### Так почему же $g(n)$ всегда существует?

#### Несколько слов о теореме Рамсея

В математике все взаимосвязано, и иной раз для решения задачи из одной области приходится применять соображения из областей, которые, на первый взгляд, могут показаться весьма далекими от нее. Так и здесь: мы увидим вскоре, что задача Эрдеша – Секереша имеет непосредственный выход на классическую теорему Рамсея в комбинаторике. Давайте вспомним, что это такое, постепенно переходя от простых частных случаев к несколько более сложным общим ситуациям.

Итак, многие читатели, вероятно, слышали такое классическое школьное утверждение: среди любых шести человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых людей. Это утверждение очень легко доказать, и соответствующее рассуждение каждый без труда проделает сам. Заметим, кстати, что аналогичное утверждение для пяти человек, вообще говоря, не является верным.

Описанную ситуацию удобно (и принято) формулировать в терминах графов. Действительно, речь фактически идет о том, чтобы рассмотреть полный граф на шести вершинах-«людях», раскрасить все его  $C_6^2 = 15$  ребер в красный и синий цвета (ребро красное – люди знакомы, ребро синее – люди не знают друг друга) и убедиться в том, что либо в графе есть треугольник, у которого все ребра красные, либо в графе есть треугольник, у которого все ребра синие. При этом, опять же, для полного графа на пяти вершинах такой номер не проходит.

А вот и чуть более общее утверждение на языке графов. Для любых натуральных чисел  $s, t$  существует наименьшее натуральное число  $m_0$ , обладающее следующим свойством. Каково бы ни было  $m \geq m_0$  и какова бы ни была раскраска ребер полного графа на  $m$  вершинах в красный и синий цвета, либо в графе есть полный подграф на  $s$  вершинах, у которого все ребра красные, либо в графе есть полный подграф на  $t$  вершинах, у которого все ребра синие. Например, при  $s = t = 3$  имеем  $m_0 = 6$ .

Теперь заметим, что ребра графа суть, конечно, двухэлементные подмножества множества его вершин.

А что если мы отныне станем красить не ребра, но трех-, четырех-, ...,  $k$ -элементные подмножества данного множества? Чем это хуже? Ничем! И вот, наконец, теорема Рамсея во всей своей полноте.

**Теорема Рамсея.** Для любых натуральных чисел  $k, l_1, \dots, l_r$  существует наименьшее натуральное число  $m_0$ , обладающее следующим свойством. Каково бы ни было  $m \geq m_0$ , если каждое  $k$ -элементное подмножество множества  $\{1, \dots, m\}$  покрашено в один из  $r$  цветов с «именами»  $1, \dots, r$ , то найдется  $i \in \{1, \dots, r\}$  и такое  $l_i$ -элементное подмножество  $T \subset \{1, \dots, m\}$ , что все его  $k$ -элементные подмножества имеют цвет с именем  $i$ .

Результат про графы вытекает из этой теоремы при  $k = 2, r = 2, l_1 = s, l_2 = t$ .

Есть тут и своя маленькая логическая тонкость, которую пылливый читатель должен, по идее, заметить сразу: а что если  $k > l_i$  при каком-нибудь  $i$ ? Скажем, пусть по-прежнему  $k = 2, r = 2$ , но  $l_1 = 1, l_2 = 100$ . В этом случае срабатывает принцип «все крокодилы в реке Тумча красные». Смысл в том, что про отсутствующие элементы можно сказать все что угодно и, стало быть, здесь  $m_0 = 1$ . Аналогичные рассуждения применимы и в других подобных случаях.

Доказательство теоремы Рамсея получается с помощью многократной индукции и, будучи элементарным, требует все же чересчур много места для своего изложения в нашей заметке. По счастью, это настолько классический факт, что отыскать его полное доказательство не составляет большого труда. Читатель может обратиться как к оригинальным работам [5] и [2], так и к различным популярным источникам типа [6], [7] и [8].

Заметим, что для величины  $m_0$ , фигурирующей в теореме, используется более или менее стандартное обозначение  $R_k(l_1, \dots, l_r)$ . В частности, мы уже говорили, что  $R_2(3, 3) = 6$  и  $R_2(1, 100) = 1$ . Кстати, таких точных равенств известно очень мало. Их перечень проще всего найти в Википедии (см. [9]), откуда есть ссылка на обзор [10].

В следующем параграфе мы применим теорему Рамсея для доказательства того, что  $g(n) < \infty$ .

#### Два фокуса

Сейчас мы докажем, что  $g(n) \leq R_4(n, 5)$ . Действительно, пусть  $\mathcal{X}$  – множество точек, состоящее из не менее чем  $R_4(n, 5)$  элементов. Покрасим все четверки точек в нем в красный и синий цвета: если данные четыре точки являются вершинами выпуклого четырехугольника, объявляем четверку красной; иначе говорим, что она синяя. По теореме Рамсея возможны два варианта. В одном из них в  $\mathcal{X}$  найдутся пять точек, среди которых все четверки синие, т.е. нет ни одной четверки, которая бы порождала выпуклый четырехугольник. Но это нонсенс, так как противоречит утверждению Кляйн о том, что  $g(4) = 5$ . Значит, остается лишь альтернатива, при которой в  $\mathcal{X}$  есть  $n$  точек без синих четверок. Иными словами, все четырехугольники, порождаемые этими точками, выпуклые. Такое возможно только в случае, если сами эти  $n$  точек суть



вершины выпуклого  $n$ -угольника (докажите это). Все, неравенство получено. Не правда ли, удивительный трюк?

Аналогичный фокус позволяет установить и оценку  $g(n) \leq R_3(n, n)$ . Попробуйте понять это самостоятельно, используя следующую подсказку. Возьмем множество  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_m\}$  размера не менее  $R_3(n, n)$ . Рассмотрим в нем произвольную тройку  $\{x_i, x_j, x_k\}$  ( $i < j < k$ ) и поглядим на ее выпуклую оболочку (треугольник). Если, стартуя из точки  $x_i$  и двигаясь по часовой стрелке вокруг этого треугольника, мы встречаем точки  $x_i, x_j, x_k$  именно в таком порядке, то красим тройку в красный цвет. Иначе – в синий.

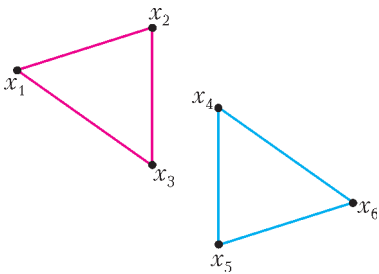


Рис.11. Слева красный треугольник, справа синий

На рисунке 11 мы приводим примеры красной и синей троек. Итак, теперь мы знаем, что  $g(n) < \infty$ . Но нам-то вслед за Эрдешем и Секерешем хочется верить в красивую гипотезу 1. Следовательно, хорошо бы сказать пару слов о том, как соотносятся величины  $R_4(n, 5)$ ,  $R_3(n, n)$  и  $2^{n-2} + 1$ . К сожалению, тут пока все довольно скверно. Прежде всего, очень мало известно о скорости роста функций  $R_4(n, 5)$  и  $R_3(n, n)$ . Из некоторых соображений кажется, что при больших  $n$  величина  $R_3(n, n)$  все-таки поменьше, чем  $R_4(n, 5)$ . Однако строго это не доказано. Виною тому то обстоятельство, что все оценки для нужных нам чисел Рамсея, которые на данном этапе развития науки удалось получить, весьма и весьма слабые. Например, вот лучшее, что мы умеем сказать про  $R_3(n, n)$ :

$$2^{an^2} < R_3(n, n) < 2^{bn^2},$$

где  $a$  и  $b$  – некоторые конкретные числа. В любом случае даже  $2^{an^2}$  растет куда быстрее, нежели  $2^{n-2} + 1$ , а о  $2^{bn^2}$  и говорить страшно.

Короче, фокусы – фокусами, а деваться некуда: надо думать дальше.

### Чашки и крышки

Сейчас мы определим два типа выпуклых ломаных на плоскости – чашки и крышки. Для этого зафиксируем на плоскости какую-нибудь прямоугольную систему координат (рис.12,а). Пусть даны натуральные числа  $k \geq 3$  и  $l \geq 3$ . Назовем  $k$ -чашкой ломаную, которая имеет  $k$  вершин с разными абсциссами ( $k - 1$  звено) и внешне напоминает чашку (рис.12,б), коль скоро мы глядим на нее как бы сверху вниз вдоль оси ординат. Аналогично определяем  $l$ -крышку (рис.12,в). Разумеется, существует куда более строгое определение каждого из введенных нами объектов. Например, в случае чашки суть в том, что многоугольная область, ограниченная чашкой и двумя прямыми, которые перпендикулярны оси абсцисс и проходят через левый и правый концы чашки, выпукла («надграфик» чашки –

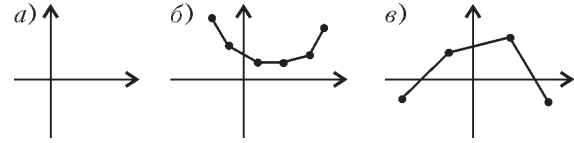


Рис.12. Наглядное определение чашек и крышек

выпуклое множество). Приведем еще для верности пример выпуклой ломаной, которая не является ни чашкой, ни крышкой в нашей системе координат (рис.13).

Понятно, что если мы найдем в том или ином множестве  $\mathcal{X}$  чашку или крышку с  $n$  вершинами в какой-нибудь системе координат, то выпуклый  $n$ -угольник у нас в кармане: достаточно соединить свободные концы ломаной недостающим отрезком. На самом деле, выражение «в какой-нибудь системе координат» можно спокойно заменить выражением «в любой системе координат, для которой пары точек из  $\mathcal{X}$  не задают прямых, параллельных оси  $y$ ». Назовем всякую систему координат с указанным свойством *правильной для*  $\mathcal{X}$ . Отметим, что в определенном смысле для данного  $\mathcal{X}$  «почти всякая» система координат правильная. Рассмотрим, стало быть, величину  $f(k, l)$ , равную наименьшему  $f_0$  такому, что для любого  $f \geq f_0$  в каждом множестве  $\mathcal{X}$  из  $f$  точек на плоскости и в каждой правильной для  $\mathcal{X}$  системе координат найдется либо  $k$ -чашка, либо  $l$ -крышка. В конечном счете  $g(n) \leq f(n, n)$ , так что теперь хорошо бы понять, как ведет себя функция  $f(k, l)$  с ростом своих аргументов.

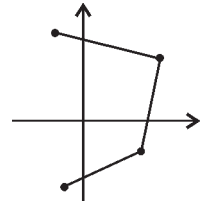


Рис.13. Не чашка и не крышка, хотя похожа

**Теорема о чашках и крышках.** *Имеет место рекуррентное неравенство*

$$f(k, l) \leq f(k - 1, l) + f(k, l - 1) - 1.$$

Теорему доказали Эрдеш и Секереш все в той же работе [2]. В следующем разделе мы приведем их рассуждение. Заметим, что сама величина  $f(k, l)$  очень похожа по структуре своего определения на число Рамсея  $R_2(k, l)$ . Однако это вовсе не означает, конечно, что  $g(n) \leq R_2(n, n)$  (хотя мы и знаем, что  $g(n) \leq f(n, n)$ ).

### Доказательство теоремы о чашках и крышках

Положим  $n = f(k - 1, l) + f(k, l - 1) - 1$ , зафиксируем произвольное множество  $\mathcal{X}$  мощности  $n$  и любую правильную для  $\mathcal{X}$  систему координат. Нам необходимо показать, что либо в  $\mathcal{X}$  есть  $k$ -чашка, либо в  $\mathcal{X}$  есть  $l$ -крышка. Обозначим через  $\mathcal{Y}$  множество *всех* точек, являющихся левыми концами  $(k - 1)$ -чашек в  $\mathcal{X}$ . Допустим сперва, что в множестве  $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$  не меньше чем  $f(k - 1, l)$  точек. Тогда либо в нем есть  $(k - 1)$ -чашка, либо в нем есть  $l$ -крышка. Однако первый случай невозможен, ведь  $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$  по построению не содержит ни одной  $(k - 1)$ -чашки. Значит, в предположении  $|\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}| \geq f(k - 1, l)$  в  $\mathcal{X}$  есть  $l$ -крышка, и все в порядке. Предположим тогда, что  $|\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}| \leq f(k - 1, l) - 1$ . В этом

случае

$$|\mathcal{Y}| = |\mathcal{X}| - |\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}| \geq n - f(k-1, l) + 1 = f(k, l-1).$$

Следовательно, либо в  $\mathcal{Y}$  есть  $k$ -чашка и снова все в порядке, либо в  $\mathcal{Y}$  есть  $(l-1)$ -крышка. Посмотрим на правый конец этой крышки. Он служит левым концом некоторой  $(k-1)$ -чашки. На рисунке 14 показаны оба возможных варианта взаимного расположения нашей



Рис.14. Варианты взаимного расположения чашки и крышки

$(l-1)$ -крышки и нашей  $(k-1)$ -чашки. В первом случае первое звено нашей чашки превращает нашу крышку в  $l$ -крышку; во втором случае последнее звено нашей крышки превращает нашу чашку в  $k$ -чашку. Так или иначе, либо  $l$ -крышка, либо  $k$ -чашка в  $\mathcal{X}$  есть, и теорема доказана.

А ведь, пожалуй, этот фокус почище прежних будет?

**Об одном комбинаторном тождестве**

Хорошо известно, что  $C_a^b = C_{a-1}^b + C_{a-1}^{b-1}$  (см., например, [11]). Рассмотрим функцию  $F(k, l) = C_{k+l-4}^{k-2} + 1$  и применим к ней указанное тождество. Получим

$$F(k, l) = C_{k+l-5}^{k-2} + C_{k+l-5}^{k-3} + 1 = F(k, l-1) + F(k-1, l) - 1.$$

Иными словами, функция  $F(k, l)$  удовлетворяет тому же рекуррентному неравенству, что и интересующая нас величина  $f(k, l)$ . Более того, нетрудно видеть, что

$$f(k, 3) = f(3, k) = F(k, 3) = F(3, k) = k.$$

Отсюда, очевидно, следует, что  $f(k, l) \leq F(k, l)$ . В частности,

$$g(n) \leq f(n, n) \leq F(n, n) = C_{2n-4}^{n-2} + 1.$$

Вот было бы здорово, если бы теперь вдруг оказалось, что функция  $C_{2n-4}^{n-2}$  не слишком быстро растет с ростом  $n$ . В следующем разделе мы поговорим об этом.

**Несколько слов о биномиальном коэффициенте**

Нам хочется прикинуть, как быстро растет функция  $C_{2n-4}^{n-2} + 1$ . Во-первых, слагаемое 1 нас сразу же не должно беспокоить, а во-вторых, положим для удобства  $m = n - 2$ . Итак, рассмотрим  $C_{2m}^m$ . Вспомним еще одно тождество:

$$2^{2m} = C_{2m}^0 + C_{2m}^1 + \dots + C_{2m}^{2m}.$$

Из него мгновенно следует оценка  $C_{2m}^m < 2^{2m}$ . В то же время слагаемое  $C_{2m}^m$  – самое большое в указанной сумме, а всего в ней слагаемых  $2m + 1$ . Таким образом,

$$C_{2m}^m > \frac{2^{2m}}{2m + 1}.$$

Существует способ еще точнее оценить биномиальный коэффициент. Для этого нам потребуется замечательная формула Стирлинга, дающая приближенное

значение для факториала. Вот она:

$$t! = \sqrt{2\pi t} \left(\frac{t}{e}\right)^t (1 + o(1)).$$

Здесь  $e = 2,71\dots$  – основание натурального логарифма, а запись  $o(1)$  означает, что существует функция  $\Phi$  от аргумента  $t$ , стремящаяся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , при подстановке которой вместо  $o(1)$  получится точное равенство.

Формула Стирлинга доказывается довольно сложно средствами математического анализа. При желании ее доказательство можно найти в книге [12]. Мы же лишь применим ее к выражению  $C_{2m}^m = \frac{(2m)!}{(m!)^2}$ . Опуская выкладки, напишем ответ:

$$C_{2m}^m = \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}} (1 + o(1)).$$

Короче, стало поприятнее. Если в гипотезе 1 фигурирует функция  $2^{n-2}$ , то у нас уже есть верхняя оценка посредством величины  $2^{2n-4}$ , что сравнительно неплохо.

**Что же дальше?**

А дальше попытки если не доказать гипотезу, то хотя бы еще немного уточнить оценку. Тут забавна сама история последовательных улучшений – как в плане хронологии, так и в плане полученных результатов. Мы ничего не станем доказывать, но лишь выпишем установленные факты.

Итак, неравенство  $g(n) \leq C_{2n-4}^{n-2} + 1$  доказали Эрдеш и Секереш в 1935 году. Потом наступило затишье, продолжавшееся больше шестидесяти лет. А в 1998 году, что называется, прорвало: сразу три уточнения! Первое из них принадлежит Ф.Чанг и Р.Грэхему и впечатляет своей «значительностью»:  $g(n) \leq C_{2n-4}^{n-2}$ . Они убрали слагаемое 1... Дальше – больше. Д.Клейтман и Л.Пахтер показали, что верно неравенство  $g(n) \leq C_{2n-4}^{n-2} + 7 - 2n$ . Наконец, третьего улучшения добились Г.Тот и П.Вальтр:  $g(n) \leq C_{2n-5}^{n-2} + 2$ . Последний результат примерно вдвое лучше результата Эрдеша – Секереша.

Текущий рекорд также принадлежит Тоту и Вальтру. Только датируется он 2005 годом. А достижение вполне в духе Чанг и Грэхема:  $g(n) \leq C_{2n-5}^{n-2} + 1$  при  $n \geq 5$ .

Все, больше никаких продвижений. Классическая задача, куча народу ей занимается, и так тяжело идет дело. Заметим, что Чанг и Грэхем (они, кстати, тоже супруги) решили последовать примеру Эрдеша и предложили 100 долларов за первое доказательство того, что  $g(n) \leq c^n$ , где  $c < 4$ . С одной стороны, сумма символическая, а с другой стороны, все логично: если за доказательство гипотезы 1 предлагать 500 долларов, то за куда более слабый результат надо и сумму куда меньшую выставлять. Впрочем, может, и дело бы пошло пошустрее, если б Эрдеш и Чанг с Грэхемом учитывали хотя бы инфляцию? Да вряд ли.

**А всегда ли  $g(n) \geq 2^{n-2} + 1$ ?**

Как-то в борьбе за верхние оценки мы совсем позабыли о том, что, в сущности, мы пока не знаем даже, верно ли неравенство  $g(n) \geq 2^{n-2} + 1$ . При  $n \leq 6$  оно, конечно, справедливо, а вот дальше? Сейчас мы для каждого  $n$  построим пример множества размера  $2^{n-2}$ , в котором нет выпуклых  $n$ -угольников. Здесь мы будем следовать Эрдешу и Секерешу (см. [3]).

Прежде всего вернемся к величине  $f(k, l)$ . Мы уже знаем, что  $f(k, l) \leq F(k, l) = C_{k+l-4}^{k-2} + 1$ . Теперь мы построим множество  $\mathcal{F}(k, l)$ , не содержащее ни  $k$ -чашек, ни  $l$ -крышек, но имеющее размер  $F(k, l) - 1$ . Иными словами, мы убедимся в том, что, хотя проблема отыскания величины  $g(n)$  крайне сложна, вспомогательная задача про  $f(k, l)$  куда проще, и в итоге  $f(k, l) = C_{k+l-4}^{k-2} + 1$ . Позже мы используем множества  $\mathcal{F}(k, l)$  для построения интересующего нас примера.

Организуем индуктивный процесс построения  $\mathcal{F}(k, l)$ . Базой послужат множества  $\mathcal{F}(k, 2)$  и  $\mathcal{F}(2, l)$ . Размер каждого из них должен быть равен единице, ну так одна точка и впрямь не содержит ни чашек, ни крышек.

Допустим, множества  $\mathcal{F}(k-1, l)$  и  $\mathcal{F}(k, l-1)$  (назовем их для краткости  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ ) уже построены. Понятно, что если  $\varphi$  и  $\psi$  — произвольные преобразования плоскости, представляющие собой композиции параллельных переносов и сжатий (растяжений) вдоль координатных осей, то множества  $\varphi(\mathcal{A})$  и  $\psi(\mathcal{B})$  по-прежнему не содержат чашек и крышек надлежащего размера. Наша цель — подобрать такие  $\varphi$  и  $\psi$ , чтобы  $\varphi(\mathcal{A}) \cap \psi(\mathcal{B}) = \emptyset$  и чтобы в множестве  $C = \varphi(\mathcal{A}) \cup \psi(\mathcal{B})$  не появилась ни  $k$ -чашка, ни  $l$ -крышка. Если мы цель реализуем, то получим (ср. раздел «Об одном комбинаторном тождестве»)

$$|C| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| = F(k-1, l) - 1 + F(k, l-1) - 1 = F(k, l) + 1 - 2 = F(k, l) - 1,$$

и все будет в порядке.

Мы выберем  $\varphi$  и  $\psi$  так, чтобы выполнялись следующие два условия:

1. Любая точка из множества  $\psi(\mathcal{B})$  имеет большее значение координаты  $x$ , нежели любая точка из множества  $\varphi(\mathcal{A})$ .

2. Угловой коэффициент любой прямой, проходящей через точку из  $\varphi(\mathcal{A})$  и точку из  $\psi(\mathcal{B})$ , больше, чем у любой прямой, проходящей через пару точек из  $\varphi(\mathcal{A})$  или пару точек из  $\psi(\mathcal{B})$ .

Ясно, что такой выбор легко осуществим (первое достигается параллельным переносом, второе — сжатием вдоль оси ординат, ведь и двигать, и «плющить» множества мы вольны по отдельности). И понятно в то же время, что за счет указанных условий каждая чашка из  $\varphi(\mathcal{A})$  (ее размер по определению не превосходит  $k-2$ ) может быть расширена не более чем одной точкой из  $\psi(\mathcal{B})$  и каждая крышка из  $\psi(\mathcal{B})$  (ее размер по определению не превосходит  $l-2$ ) может быть расширена не более чем одной точкой из  $\varphi(\mathcal{A})$ . Иными словами, ни  $k$ -чашки, ни  $l$ -крышки в  $\varphi(\mathcal{A}) \cup \psi(\mathcal{B})$  в самом деле нет. Построение  $\mathcal{F}(k, l)$  завершено, и мы

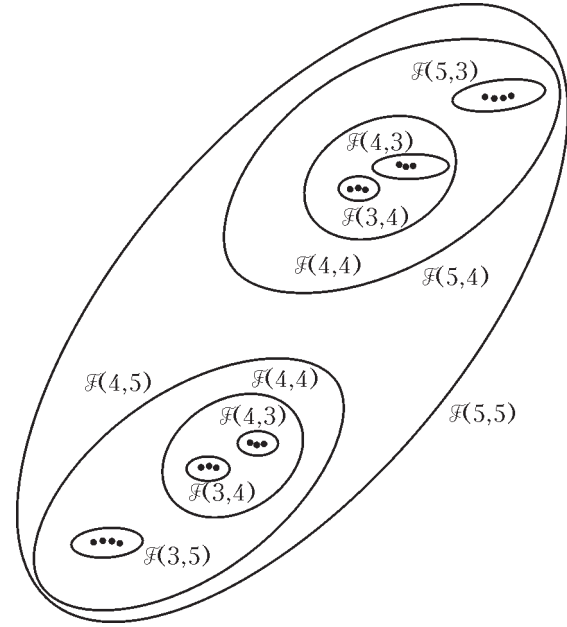


Рис.15. Процесс построения  $\mathcal{F}(k, l)$

лишь для пушей наглядности приводим на рисунке 15 процесс построения  $\mathcal{F}(k, l)$  вплоть до  $k = l = 5$ .

Вернемся к построению примера множества размера  $2^{n-2}$  без выпуклых  $n$ -угольников. Поскольку его формальное описание довольно муторное, попробуем сразу создать интуицию с помощью картинки. На рисунке 16 изображены конструкции для  $n = 4, 5, 6$ . А именно, это совокупности точек, как бы нанизанных на своеобразные дуги (случай  $n = 4$  соответствует левой, самой короткой, дуге, точки для случая  $n = 5$  расположены на средней дуге, а случай  $n = 6$  показан справа). При этом группировки точек на дугах тоже не с потолка взяты. Для левой они суть (сверху вниз)  $\mathcal{F}(4, 2)$ ,  $\mathcal{F}(3, 3)$ ,  $\mathcal{F}(2, 4)$ ; для средней —  $\mathcal{F}(5, 2)$ ,  $\mathcal{F}(4, 3)$ ,  $\mathcal{F}(3, 4)$ ,  $\mathcal{F}(2, 5)$ ; для правой —  $\mathcal{F}(6, 2)$ ,  $\mathcal{F}(5, 3)$ ,  $\mathcal{F}(4, 4)$ ,  $\mathcal{F}(3, 5)$ ,  $\mathcal{F}(2, 6)$ . Правда, при  $n = 6$  шесть точек в центре немного слиплись, и все равно закономерность уже почти ясна. Осталось лишь формализовать ее.

Рис.16. Картинки при  $n = 4, 5, 6$

Сперва рассмотрим на координатной плоскости прямой угол, образованный прямыми  $y = x$  и  $y = -x$  (именно тот, который содержит положительную полуось  $x$ , рис.17,а). Затем проведем в этом углу дугу окружности радиуса 1 (рис.17,б). Разделим дугу на  $n-2$  одинаковые дужки точками  $x_0, \dots, x_{n-2}$ , двигаясь сверху вниз (рис.17,в). Иными словами, вектор, идущий из начала координат в  $x_i$ , проходит под углом



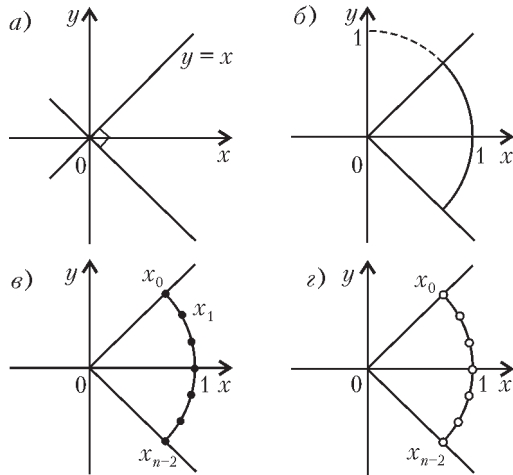


Рис.17. Построение «ожерелья»

$\frac{\pi}{4} - \frac{i\pi}{2(n-2)}$  к оси абсцисс. Наконец, возьмем одинаковые крошечные кружочки с центрами в  $x_0, \dots, x_{n-2}$  и, подобно бусинкам в ожерелье, нанижем их на нашу дугу (рис.17,з). Заметим сразу, что бусинки должны быть настолько мелкими, чтобы любая прямая, проведенная через какие-либо две точки, принадлежащие разным бусинкам, имела угловой коэффициент, по модулю больший единицы (т.е. была скорее «вертикальной», нежели «горизонтальной»).

Теперь рассмотрим множества  $\mathcal{F}(n, 2), \mathcal{F}(n-1, 3), \dots, \mathcal{F}(2, n)$ . Их столько же, сколько бусинок. Сжати-ями добьемся, во-первых, того, чтобы каждое из этих множеств без потери своих «чашечно-крышечных» свойств помещалось внутрь бусинки, а во-вторых, того, чтобы любая прямая, проходящая через две произвольные точки «уплощенного» множества, имела угловой коэффициент, по модулю не превосходящий единицы (т.е. была скорее горизонтальной, нежели вертикальной). С помощью параллельных переносов загоним сжатый вариант  $\mathcal{F}(n-i+2, i)$  в бусинку с центром в  $x_{i-2}$ ,  $i = 2, \dots, n$ . Обозначим новые множества, сидящие в бусинках, через  $\mathcal{F}(n-i+2, i)$ . Такие множества по-прежнему не содержат  $(n-i+2)$ -чашек и  $i$ -крышек, причем  $|\mathcal{F}(n-i+2, i)| = C_{n-2}^{i-2}$ .

Положим

$$\mathcal{X} = \mathcal{F}(n, 2) \cup \mathcal{F}(n-1, 3) \cup \dots \cup \mathcal{F}(2, n).$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} |\mathcal{X}| &= |\mathcal{F}(n, 2)| + |\mathcal{F}(n-1, 3)| + \dots + |\mathcal{F}(2, n)| = \\ &= C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 + \dots + C_{n-2}^{n-2} = 2^{n-2}. \end{aligned}$$

Понятно, к чему идет дело? Ну, разумеется, нам остается лишь проверить, что любое подмножество  $\mathcal{Y}$  в множестве  $\mathcal{X}$ , элементы которого служат вершинами выпуклого многоугольника, имеет размер, не превышающий  $n-1$ .

Возможны два варианта. Первый вариант состоит в том, что  $\mathcal{Y}$  целиком сидит в одной из бусинок, т.е. при некотором  $i$  имеем  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{F}(n-i+2, i)$ . Но в этом случае

$\mathcal{Y}$  не содержит ни  $(n-i+2)$ -чашки, ни  $i$ -крышки, а значит,

$$|\mathcal{Y}| \leq (i-1) + (n-i+2-1) - 2 = n-2.$$

Таким образом, мы вынуждены обратиться ко второму варианту, в рамках которого множество  $\mathcal{Y}$  имеет непустое пересечение сразу с несколькими бусинками. Обозначим через  $a$  и  $b$  номера самой «верхней» и самой «нижней» из этих бусинок. Благодаря махинациям с углами наклона прямых, которые мы с самого начала осуществили, множество точек из  $\mathcal{Y}$  в верхней бусинке порождает крышку, а множество точек из  $\mathcal{Y}$  в нижней бусинке – чашку, причем для любого  $i$  между  $a$  и  $b$  в бусинке  $\mathcal{F}(n-i+2, i)$  сидит не более одной точки из  $\mathcal{Y}$ . Следовательно, «сверху» у  $\mathcal{Y}$  не больше  $a-1$  точек, «снизу» – не больше  $n-b+1$  точек, а в промежутке – не больше  $b-a-1$  точек. Итого,

$$|\mathcal{Y}| \leq (a-1) + (n-b+1) + (b-a-1) = n-1.$$

Фуф, построили пример.

### Расстаемся, но не насовсем

Мы уже весьма далеко продвинулись на пути к пониманию задачи Эрдеша – Секереша, но путь пройден едва ли наполовину. Сейчас самое время передохнуть, осознать прочитанное и с новым энтузиазмом вернуться в одном из ближайших номеров журнала к покорению вершин нашей замечательной науки. В общем, сказка не окончена: *продолжение следует*.

### Список литературы

1. И.М.Яглом, В.Г.Болтянский. *Выпуклые фигуры*. – М.: Гостехиздат, 1951.
2. P.Erdős, G.Szekeres. *A combinatorial problem in geometry*. – Compositio Math., 2 (1935), 463–470.
3. P.Erdős, G.Szekeres. *On some extremum problems in elementary geometry*. – Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math., 3–4 (1961), 53–62.
4. G.Szekeres, L.Peters. *Computer solution to the 17-point Erdős-Szekeres problem*. – ANZIAM J., 48 (2006), 151–164.
5. F.P.Ramsey. *On a problem of formal logic*. – Proc. London Math. Soc. Ser. 2, 30 (1930), 264–286.
6. М.Холл. *Комбинаторика*. – М.: Мир, 1970.
7. Р.Грэхэм. *Начала теории Рамсея*. – М.: Мир, 1984.
8. А.М.Райгородский, *Вероятность и алгебра в комбинаторике*. – М.: МЦНМО, 2008.
9. [http://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey's\\_theorem](http://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey's_theorem).
10. S.Radziszowski. *Small Ramsey numbers*, <http://www.combinatorics.org/Surveys/ds1/sur.pdf>.
11. Н.Я.Виленкин, А.Н.Виленкин, П.А.Виленкин. *Комбинаторика*. – М.: МЦНМО, 2006.
12. Г.М.Фихтенгольц. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. – М. – Ижевск: Физматлит, 2003.
13. М.В.Волков, Н.Н.Силкин. *Кого послать на Марс?* – «Квант», №8, 1988.



# ЭТОТ ТАИНСТВЕННЫЙ СЛЫШИМЫЙ МИР

Е. СОКОЛОВ

**Х**ОРОШО ТИХИМ АВГУСТОВСКИМ ВЕЧЕРОМ СИДЕТЬ на высоком крутом берегу Оки и наблюдать за окружающим миром. Дневная жара уже спала, пахнет скошенной травой, в косых солнечных лучах роится мошкара, мысли уносятся далеко-далеко...

И вот однажды, когда я в таком благостном настроении любовался закатом, я услышал над своей головой шум самолетного мотора. Некоторое время я смотрел на тучку, из-за которой слышался звук, но самолет не появлялся. И вдруг краем глаза я заметил, что самолет промелькнул в просвете между облаками, но совсем не в том месте, где я ожидал (рис.1).

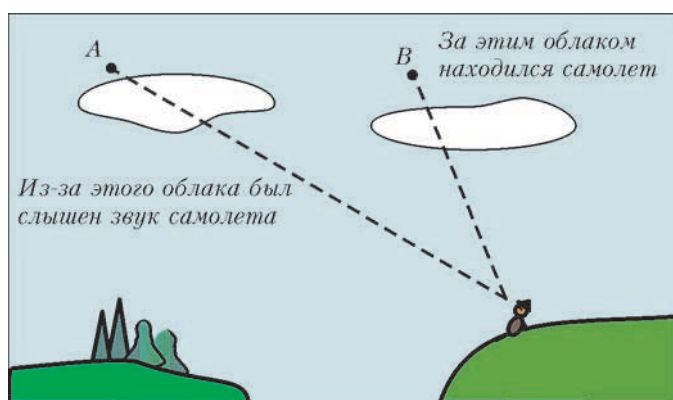


Рис. 1

«Да, дал маху! – подумал я. – Конечно, можно было бы легко сообразить, что точка, в которой мы видим самолет, и точка, в которой мы слышим самолет, – это совсем разные точки. Ведь пока звук дойдет до нас из точки *A*, самолет уже сместится в точку *B*».

За ужином я рассказал об этом казусе своим подопечным – участникам летнего школьного лагеря – в качестве примера того, что в любом, даже простом, деле следует применять логическое мышление, а не полагаться лишь на привычку.

А через некоторое время родился первый Главный вопрос. Как всегда, начал Александр.

– Интересно получается: то, что мы видим, и то, что мы слышим, – это совсем разные вещи. Тогда откуда вытекает, что Мир, который мы видим, и Мир, который мы слышим, – это совсем непохожие Миры!?

– Ну и что, подумаешь, – вмешалась Татьяна. – Мы-то живем, полагаясь на зрение.

– А кто вчера заблудился в молодняке и, если бы не

прошел поезд, до сих пор блуждал бы по лесу? А ведь до железной дороги было всего 50 метров. Только вот ничего видно не было, а слышно было поезд хорошо.

– И в океане даже в чистой воде ничего не рассмотришь дальше 20 метров. Если бы не звуковые сонары, подводные лодки заходили бы в чужие порты, как к себе домой. А дельфины? А кашалоты? А летучие мыши?

– Итак, подведем итог, – вмешался в спор я. – Все согласны, что слышимый мир может быть настолько же важным и полезным, как и видимый мир? А если так, то давайте выясним, как же устроен этот таинственный слышимый мир. Для этого нам понадобится совсем немного: одна формула и логическое мышление.

## Первая формула и логическое мышление

Начнем, как обычно, с разумных упрощений.

Пусть на некоторой планете Ялмез, плоской как стол, нет ни гор, ни лесов, ни облаков, от которых мог бы отражаться звук, а есть лишь наблюдатель, находящийся в точке *H*, и самолет, летящий по прямой с постоянной скоростью *v* на высоте *h* (рис.2). За ноль отсчета времени мы примем момент, когда самолет будет находиться прямо над наблюдателем. При таком выборе закон движения самолета будет иметь вид

$$x_c(t) = vt.$$

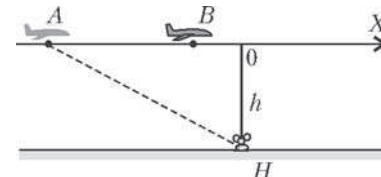


Рис. 2

Летящий самолет будет теперь для нас просто источником звука, который порождается вибрирующими в работе деталями мотора и турбулентными реактивными струями и распространяется во все стороны со скоростью звука *c*. Наблюдатель, которого лучше, по примеру подводников, назвать слухачом, внимательно вслушивается в приходящий к нему гул самолета, а мы приступаем к выяснению того, что же он слышит.

Нашу главную рабочую формулу мы получим, если переведем на математический язык уже сказанные выше слова: «пока звук дойдет до нас из точки *A*, самолет уже сместится в точку *B*». Сделаем это так. Пусть самолет в момент времени  $\tau$  находится в точке *A* с координатой  $x_c = v\tau$ . Звук, излученный в этот момент, начинает распространяться во все стороны.

Чтобы дойти до наблюдателя, ему надо пройти расстояние  $\sqrt{x_c^2 + h^2}$ , для чего ему потребуется время  $\Delta t = \sqrt{x_c^2 + h^2}/c$ . Поэтому момент времени излучения звука  $\tau$  и момент времени  $t$ , когда слушач услышит пришедший к нему звук, связаны следующей формулой:

$$t = \tau + \frac{\sqrt{x_c^2 + h^2}}{c} = \tau + \frac{\sqrt{v^2\tau^2 + h^2}}{c}. \quad (1)$$

Это и есть та формула, которая позволит нам разобраться с летающими самолетами, если, конечно, нас не подведет логическое мышление.

– Вы нас так предупреждаете о логическом мышлении, что можно подумать, будто нас ждет что-то страшное. Но, честно скажу, формула (1) лично мне не кажется ужасно сложной.

– Конечно, наша формула совсем не страшная, хотя из нее мы сейчас будем получать и более громоздкие формулы. Дело здесь в другом – не запутаться в похожих терминах. Смотрите,  $v$  – это...

– Скорость самолета.

– Правильно. А с...

– Скорость звука.

– Верно. А теперь времена (точнее – моменты времени, но оставим так для краткости)  $\tau$  и  $t(\tau)$ .

– Первое – это время, когда был излучен звук, а второе – это время, когда этот звук услышал наблюдатель. Причем можно говорить о зависимости времени прихода  $t(\tau)$  от времени излучения  $\tau$ , а можно, наоборот, найти из первой формулы, как  $\tau$  зависит от  $t$ :

$$\tau = t + \frac{v^2 t - \sqrt{c^2 v^2 t^2 + (c^2 - v^2) h^2}}{c^2 - v^2}, \quad (2)$$

и говорить о том, в какой момент  $\tau(t)$  был излучен звук, пришедший в момент  $t$  к наблюдателю.

**Упражнение 1.** Получите из формулы (1) формулу (2). Для этого вам придется решить квадратное уравнение и выбрать нужный корень.

– Ну что же, пока вы не запутались. Молодцы! Но тогда вот вам два последних похожих термина: координата самолета  $x_c$  и координата звукового изображения самолета  $x_{из}$  – я имею в виду точку  $A$  на траектории самолета, из которой к слушачу приходит звук в момент времени  $t$ . (Разумеется, было бы правильнее термин «звуковое изображение» писать в кавычках.) Ответьте на такой вопрос: если на часах слушача время  $t$ , то чему равны в этот момент координата самолета  $x_c$  и координата звукового изображения  $x_{из}$ ? Вот и задумались. Смелей! Возможно, вам поможет следующее упражнение-подсказка.

**Упражнение 2.** Какие фразы определяют одну и ту же точку: а) точка, в которой был излучен пришедший в данный момент к слушачу звук; б) точка, в которой в данный момент находится звуковое изображение; в) точка, в которой в данный момент находится самолет; г) точка, в которой находился самолет в тот момент, когда был излучен звук, который сейчас слышит слушач?

– Мы подумали и решили, что

$$x_c = vt, \quad x_{из} = v\tau(t).$$

– Правильно!

А теперь будем строить графики, иллюстрирующие полученные нами формулы. На рисунке 3 представлено, как время прихода звука  $t(\tau)$  зависит от времени излучения  $\tau$ , т.е. «изображена» формула (1). Этот график мы построили по трем точкам. В качестве первой точки мы взяли самую простую точку  $\tau = 0$ . Для нее формула дает  $t = h/c$ . В качестве второй взята «точка»  $\tau \rightarrow +\infty$ , когда самолет удалится очень-очень далеко от слушача. Для нее

$$t = \tau + \frac{\sqrt{v^2\tau^2 + 0}}{c} = \left(1 + \frac{v}{c}\right)\tau.$$

– А я и без вычислений могу получить эту формулу! Ведь если самолет очень-очень далеко, то такую «мелочь», как высоту  $h$ , можно не замечать и считать, что слушач стоит прямо на траектории самолета. А в этом случае все получается очень просто без корней и теоремы Пифагора. Если самолет летел вправо время  $\tau$ , то звук будет идти обратно до слушача еще время  $\Delta t = \frac{v}{c}\tau$  и придет к слушачу в момент времени

$$t = \tau + \frac{v}{c}\tau = \left(1 + \frac{v}{c}\right)\tau$$

– Отлично! Покажите сами, что для третьей «точки»  $\tau \rightarrow -\infty$  (самолет еще очень-очень далеко от слушача) получается

$$t = \left(1 - \frac{v}{c}\right)\tau.$$

Этих трех «точек» уже достаточно, чтобы построить график. А если есть какие-нибудь сомнения, то можно уточнить детали графика с помощью компьютера. Главное в этом графике другое: для каждого момента  $t_1$  найдется свой момент  $\tau_1$ . На обычном языке это означает, что в каждый момент времени  $t_1$  слушач слышит шум самолета, «видит» звуковой образ. Это тот звук, который был излучен в момент времени  $\tau_1 = \tau(t_1)$  в точке с координатой  $x_{из} = v\tau(t_1)$ .

– Точно, вчера мы слышали шум трактора в лесу задолго до того, как он показался на опушке. Думали, что он здесь делает, оказалось – срубленные деревья вывозил из леса.

**Упражнение 3.** Где находится звуковое изображение самолета, когда сам самолет находится над слушачом? А где находился самолет, когда звуковое изображение самолета находилось над слушачом?

Второй полезный факт, который мы можем извлечь из построенного графика, это то, что он нам практически дает график зависимости координаты изображения

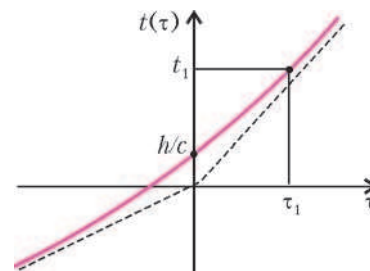


Рис. 3



от времени – оно просто пропорционально  $\tau(t)$ :

$$x_{\text{из}} = v\tau(t) = v \left( t + \frac{v^2 t - \sqrt{c^2 v^2 t^2 + (c^2 - v^2) h^2}}{c^2 - v^2} \right).$$

Единственное – оси надо поменять местами. Получаем рисунок 4, на котором заодно с координатой звукового изображения  $x_{\text{из}}$  (красная линия) представлена и координата самолета  $x_c = vt$  (синяя линия).

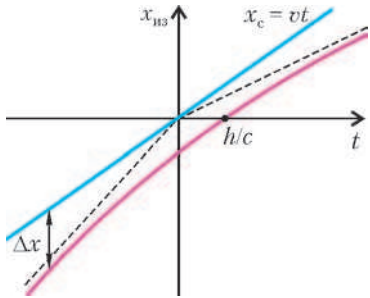


Рис. 4

– Смотрите, получается, что звуковое изображение самолета движется неравномерно! Сначала расстояние  $\Delta x$  между изображением и самим самолетом сокращается, а затем увеличивается.

– Да, в слышимом мире изображения равномерно движущихся предметов движутся неравномерно, с ускорением. Найти скорость изображения можно стандартным путем – по определению, вычислив производную от  $x_{\text{из}}(t)$  по времени  $t$ :

$$v_{\text{из}} = x'_{\text{из}} = v\tau'(t) = \frac{c^2}{c^2 - v^2} v \left( 1 - \frac{v^2 t}{\sqrt{c^2 v^2 t^2 + (c^2 - v^2) h^2}} \right).$$

График скорости изображения приведен на рисунке 5 (красная линия). Для наших восьмиклассников объясню две главные особенности этого графика попроще, без производных.

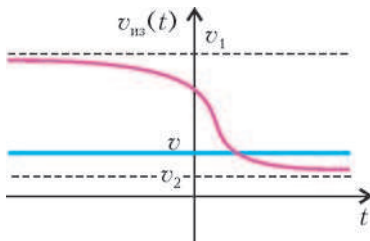


Рис. 5

Когда самолет находится еще очень далеко от нас ( $\tau \rightarrow -\infty$ ), мы с очень хорошей точностью можем записать

$$t = \left( 1 - \frac{v}{c} \right) \tau, \quad x_{\text{из}} = v\tau(t) = \frac{v}{1 - \frac{v}{c}} t.$$

Вы видите, что здесь изображение движется равномерно со скоростью, большей скорости самолета:

$$v_1 = \frac{v}{1 - \frac{v}{c}}.$$

Изображение пытается догнать самолет!

– А что будет в другом предельном случае, когда самолет уже улетит далеко-далеко от нас?

– А там

$$t = \left( 1 + \frac{v}{c} \right) \tau, \quad x_{\text{из}} = v\tau(t) = \frac{v}{1 + \frac{v}{c}} t \quad \text{и} \quad v_2 = \frac{v}{1 + \frac{v}{c}}.$$

Скорость изображения меньше скорости самолета, изображение неотвратно отстает от самолета!

**Упражнение 4.** Чему равна скорость изображения в тот момент, когда расстояние между ним и самолетом минимально? А чему равно это минимальное расстояние?

Мы уже почти полностью составили картину происходящего и можем нарисовать «кинолентку» всех событий. Только, для того чтобы рисунки получились интереснее, предлагаю снабдить наш слышимый мир еще и цветом. Вы знаете, почему мы видим предметы разноцветными? Это связано с тем, что приходящие к нам световые колебания имеют разные частоты. На рисунке 6 мы изобразили цвета радуги и указали, какая частота какому цвету соответствует.

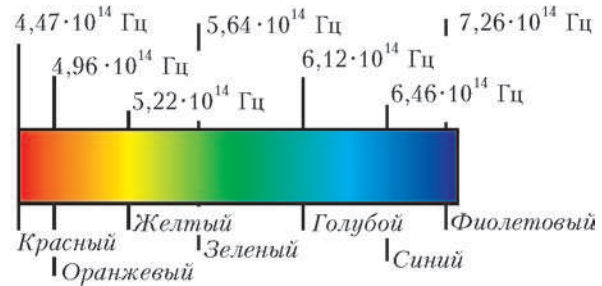


Рис. 6

– Но у нас-то один самолет и одна частота излучаемых колебаний!

– Да, частота испускаемого самолетом звука одна и та же (это – разумное упрощающее предположение), но вот слушач слышит звуки разных частот, в зависимости от положения звукового изображения. Изменение частоты звука в зависимости от движения источника известно в физике как эффект Доплера. Я думаю, что каждый из вас неоднократно наблюдал его в жизни. Например, когда мимо нас пронесется на большой скорости настоящий байкер, звук мотоциклетного мотора меняет свой тон от пронзительно высокого, когда байкер приближается к нам, до низкого, когда он удаляется от нас. Вот так же изменяется и тон шума самолетного мотора, который слышит наш слушач. Давайте сделаем соответствующий расчет. Только сначала – небольшое замечание. Если я три раза ударю по столу, сколько ударов услышит Александр?

– Конечно, три.

– А сколько ударов услышит Татьяна?

– Тоже три.

– Итак, общий вывод: где бы ни находился слушач, он всегда услышит одно и то же количество ударов, возгласов, колебаний и т.п.

Ну, а теперь обозначаем частоту излучаемого самолетом звука через  $\nu_0$  и начинаем рассуждать. Пусть за небольшой промежуток времени  $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$  самолет излучит звуковую волну, содержащую  $N = \nu_0 \Delta\tau$  колебаний. Этот звуковой сигнал придет и к наблюдателю, и он тоже насчитает в нем  $N$  колебаний, только слышать он будет этот сигнал в течение другого промежутка времени, а именно  $\Delta t = t(\tau_2) - t(\tau_1)$ . Поэтому он воспримет пришедший сигнал как звук уже другой частоты

$$\nu = \frac{N}{\Delta t} = \nu_0 \frac{\Delta\tau}{\Delta t}.$$

Это и есть формула Доплера. Отношение  $\Delta\tau/\Delta t$  можно сделать более удобным, если домножить числитель и знаменатель на скорость самолета:

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \frac{v}{v} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \frac{1}{v} \frac{\Delta(v\tau)}{\Delta t} = \frac{1}{v} \frac{\Delta x_{\text{из}}}{\Delta t} = \frac{v_{\text{из}}}{v}.$$

Тогда формула для слышимой частоты принимает очень красивый вид:

$$v = v_0 \frac{v_{\text{из}}}{v}.$$

Чем больше скорость изображения, тем выше приходится звук. И график изменения частоты в зависимости от времени (рис.7) полностью совпадает с графиком скорости изображения. Когда самолет летит на нас, частота звука увеличивается, а когда он пролетел мимо и улетает от нас — уменьшается. Поэтому давайте раскрашивать наши звуковые изображения так, чтобы их цвет соответствовал частоте слышимого звука. Для самой высокой частоты  $v_1 = v_0 \frac{1}{1 - v/c}$  выберем зеленый цвет, а для самой низкой частоты  $v_2 = v_0 \frac{1}{1 + v/c}$  — красный.

Теперь у нас получается следующая «кинокартина» происходящего (рис. 8). Зеленый-зеленый звуковой

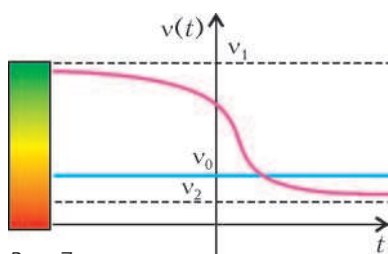


Рис. 7

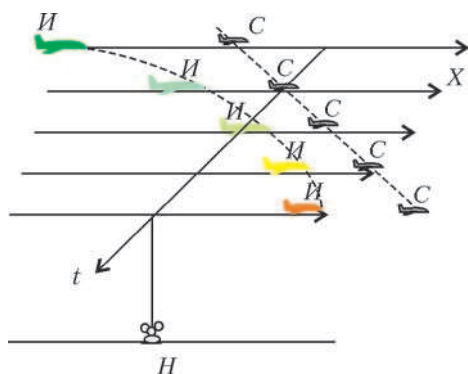


Рис. 8

самолет (И) с большой скоростью преследует безмятежно летящий маленький обычный самолетик (С). Он приближается все ближе и ближе и почти догоняет его, когда «пролетает» над наблюдателем. Звуковой самолет почти готов проглотить обычный самолетик, но силы покидают его. Скорость его уменьшается, и он начинает отставать. Его цвет становится желтым, затем оранжевым, а потом на небе остается лишь маленькая красная точка.

Разговор был окончен. Все заворуженно смотрели, как на экране ноутбука снова и снова разыгрывалась драма жизни разноцветного звукового образа. И тут родился второй Главный вопрос.

— А что если самолет сверхзвуковой?

— Если самолет сверхзвуковой, то в слышимом мире разворачиваются такие события, которые не сможет сочинить даже искусный фантазер. Но нам по силам разобраться со всем и в этом случае, если мы будем опираться на формулы. Формулы у нас все готовы, только давайте введем для упрощения записи новое обозначение:

$$M = \frac{v}{c}.$$

В честь австрийского ученого Эрнста Маха, это число называется числом Маха. Для дозвуковых скоростей ( $v < c$ ) оно меньше единицы, а для сверхзвуковых скоростей — больше единицы. Современные истребители, например, летают на скоростях, для которых  $M = 2 - 4$ , а для метеоритов, влетающих в нашу атмосферу с космическими скоростями,  $M > 10$ .

### Число Маха и новые формулы

Итак, формула (1) теперь принимает вид

$$t = \tau + \sqrt{M^2\tau^2 + \frac{h^2}{c^2}}.$$

Число  $M$  в нашем случае больше единицы, поэтому качественно изменяется график зависимости  $t(\tau)$  — он показан на рисунке 9. Заметили разницу?

— Да, здесь в отрицательной области асимптота идет уже во втором квадранте.

— А теперь самое главное. Летящий мимо слушача самолет излучает звук во все моменты времени от  $\tau \rightarrow -\infty$  до  $\tau \rightarrow +\infty$ , а вот всегда ли слышит этот звук слушач?

— Нет, не всегда. На графике (см. рис.9) видно, что для всех  $\tau$  время прихода звука к слушачу  $t(\tau)$  больше, чем некоторое  $t_1$ .

— Ясно, ведь  $t_1$  — это тот первый момент, когда слушач услышит звук, т.е. увидит звуковое изображение самолета.

— Да, а после этого момента он будет видеть два изображения, ведь теперь для каждого  $t$  будет уже два корня:  $\tau_{\text{лев}}$  и  $\tau_{\text{пр}}$ . Мы уже выражали время излучения  $\tau$  через время прихода звука  $t$ . Используя число Маха, для корней теперь можем записать

$$\tau_{\text{лев}} = \frac{1}{M^2 - 1} \left( -\sqrt{M^2 t^2 - \frac{(M^2 - 1)h^2}{c^2}} - t \right),$$

$$\tau_{\text{пр}} = \frac{1}{M^2 - 1} \left( +\sqrt{M^2 t^2 - \frac{(M^2 - 1)h^2}{c^2}} - t \right).$$

Эти формулы позволяют найти тот первый момент, когда слушач услышит звук. В этот момент оба корня совпадают, т.е. подкоренное выражение (дискрими-

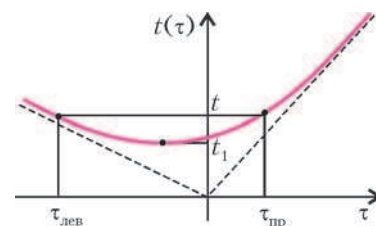


Рис. 9

нант квадратного уравнения) обращается в ноль:

$$M^2 t^2 - \frac{(M^2 - 1)h^2}{c^2} = 0.$$

Отсюда получаем выражение для момента первоначальной вспышки:

$$t_1 = \frac{h}{c} \sqrt{1 - \frac{1}{M^2}}.$$

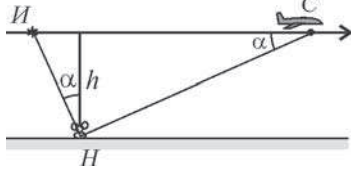


Рис. 10

(рис.10) для момента  $t_1$  прямоугольный и что угол  $\alpha$  при вершине  $C$  есть угол Маха, т.е.  $\sin \alpha = 1/M$ .

**Упражнение 6.** Докажите это.

– Итак, мы готовы построить «кинокартину» того, что происходит в слышимом мире при пролете сверхзвукового самолета (рис.11). Сначала весь слышимый мир погружен во тьму. Ничего не видно слухачу в

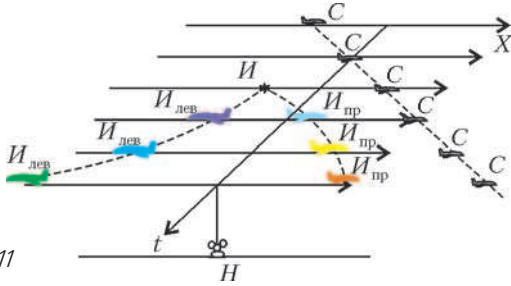


Рис. 11

ночном небе. И вдруг в момент времени  $t_1$  под некоторым углом  $\alpha$  к вертикали он скорее чувствует, чем видит в небе ярчайшую вспышку. Ее цвет находится на пределе восприятий слухача. Она даже не голубая и не фиолетовая, а ультрафиолетовая или даже рентгеновская. Через мгновение это световое пятно распадается на два образа – один из них, голубого цвета, летит с громадной скоростью вправо, другой, сине-фиолетовый, с еще большей скоростью летит влево. Со временем движение этих образов замедляется, как если бы между ними действовала сила притяжения, тормозящая их разлет. Скорость левого образа постепенно спадет до  $v_1 = cM/(M - 1) = c/(1 - \sin \alpha)$ . Летящий вправо образ затормозится еще сильнее – до скорости  $v_2 = cM/(1 + M) = c/(1 + \sin \alpha)$ , меньшей скорости звука. Изменяются и цвета образов. Правый из синего превращается в зеленый, потом он станет желтым, оранжевым и в конце концов превратится в маленькую красную точку в правой половине горизонта, а слева от наблюдателя будет слабо мерцать маленькая зеленоватая звездочка.

– Здорово! А только как вы узнали о скоростях и частотах звуковых образов?

– Во-первых, мы уже вычисляли скорость звукового изображения. Если чуть-чуть модернизировать полу-

ченную нами ранее формулу, чтобы она годилась для обеих корней (заменить знак «-» перед корнем на знак «+»), и использовать число Маха, то в нашем распоряжении окажутся такие формулы:

$$v_{из} = x'_{из} = v\tau'(t) = \frac{cM}{M^2 - 1} \left( \pm \frac{Mt}{\sqrt{t^2 - t_1^2}} - 1 \right).$$

Графики этих скоростей (синие линии) изображены на рисунке 12. Видно, что в момент первоначальной вспышки скорости обоих звуковых образов бесконечно велики.

Впрочем, это можно установить проще – внимательно посмотрев на рисунок 9. Только для этого следует представить начало формулы для скорости изображения следующим образом:

$$v_{из} = x'_{из} = v\tau'(t) = v \frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \frac{v}{(\Delta t / \Delta\tau)} = \frac{v}{t'(\tau)}.$$

Смотрите, скорость изображения тем больше, чем меньше значение производной  $t'(\tau)$ . А производная, как известно, равна тангенсу угла наклона касательной к графику. В точке минимума функции  $t(\tau)$  (в точке первоначальной вспышки) касательная к графику горизонтальна, тангенс угла наклона равен нулю, и поэтому получается, что скорость изображения в этот момент бесконечно велика. Дальше наклон обеих ветвей графика растет, постепенно приближаясь к наклонной асимптоте. Поэтому и скорости изображений постепенно уменьшаются, приближаясь к своим предельным значениям.

Что касается цветов, которые мы приписываем звуковым изображениям, то мы договорились выбирать их согласно слышимой слухачом частоте, а она (мы показали это) прямо пропорциональна скорости изображения. Поэтому чем больше скорость, тем больше должна быть частота и тем «голубей» должен быть цвет изображения звукового образа на нашем рисунке. Если для предельной частоты правого изображения

$v_2 = \frac{v_0}{1 + M}$  мы раньше выбрали красный цвет, а для частоты левого изображения  $v_1 = \frac{v_0}{M - 1}$  – зеленый, то

те очень быстрые изображения, которые появляются в момент первоначальной вспышки, мы должны рисовать синими, голубыми или даже фиолетовыми. А формулы для  $v_1$  и  $v_2$  мы выразили через угол  $\alpha$  потому, что в слышимом мире главной наблюдаемой величиной является не число Маха  $M$ , а угол  $\alpha$  (мы отсчитываем его от вертикали), под которым слухач слышит первоначальную вспышку.

– А почему вы рисовали звуковые образы разных размеров?

– Этим я пытался отобразить то, что слышимая мощность самолета тоже изменяется со временем. Смот-

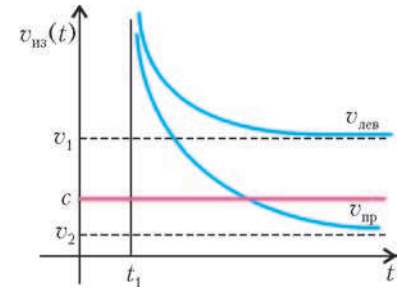


Рис. 12



рите, пусть мощность излучения звука равна  $P_0$ . Это означает, что за некоторое время  $\Delta t$  самолет излучит звуковую энергию, равную  $\Delta E = P_0 \Delta t$ . Энергия звуковых колебаний вместе со звуком будет распространяться во все стороны, и часть ее попадет в ухо слушателя. Только – внимание! – эту излученную за время  $\Delta t$  энергию слушач будет принимать в течение уже другого промежутка времени, а именно  $\Delta t = t(\tau_2) - t(\tau_1)$ . Поняли, что это означает?

– Это означает, что слышимая мощность самолета будет равна

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{P_0 \Delta t}{\Delta t} = P_0 \frac{v_{из}}{v}.$$

Такую мощность должен был бы иметь неподвижный самолет, чтобы так же громко звучать для слушателя, как и движущийся. Кстати, формула у нас снова получилась очень простой: как и слышимая частота, слышимая мощность пропорциональна скорости звукового образа.

– Ура! – закричали ребята. Теперь мы можем нарисовать, что происходит в небе слышимого мира для

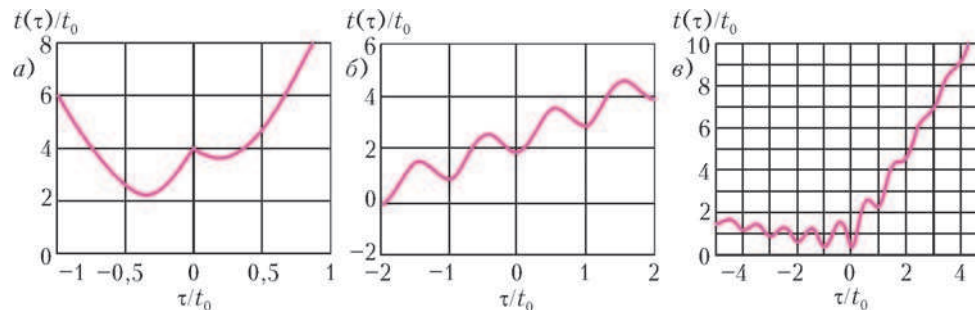


Рис. 13

любого движения самолета! Для этого просто надо построить на экране компьютера график функции  $t(\tau)$ . Точки минимума будут соответствовать появлению двух новых ультрафиолетовых и чрезвычайно быстрых звуковых образов! А точки максимума...

**Упражнение 7.** Закончите фразу.

И мы начали строить различные графики  $t(\tau)$  (точнее,  $t(\tau)/t_0$ , где  $t_0 = h/c$ ) для сверхзвуковых самолетов. Мы рассмотрели сверхзвуковой самолет, выполняющий резкий поворот (рис.13,а), кружащий над наблюдателем (рис.13,б) и движущийся по винтовой линии (рис.13,в). На экране компьютера появлялись все более и более сложные разноцветные образы...

## НОВОСТИ НАУКИ

### УСТРОИТЕЛИ СТОЛКНОВЕНИЙ

(к грядущему запуску Большого адронного коллайдера)

Collider – новое в английском языке существительное от глагола collide, т.е. сталкиваться. Перевести его можно как «то, что сталкивает», или «устроитель столкновений». В начале (лет пятьдесят назад) эти устройства имели более длинное название – ускорители заряженных частиц на встречных пучках. Сегодня все говорят просто – коллайдеры.

Столкновения встречных пучков частиц гораздо выгоднее, чем удары ускоренных частиц по неподвижной мишени. Это определяется законом сохранения импульса. При ударе по неподвижной мишени значительная часть кинетической энергии уйдет на придание импульса продуктам столкновения, а на преобразования, например на рождение новых частиц, останется ее малая часть. При встречном ударе эта доля – так называемая светимость коллайдера – значительно больше. Конечно, эта идея была ясна многим физикам, занимавшимся изучением элементарных частиц. Но в начале ускорительной эры главной задачей было само ускорение частиц, а в круговых ускорителях – еще и создание мощных магнитных полей, обеспечивающих движение по кругу. И уж затем инженеры-физики взялись за решение задачи обеспечения точности траекторий частиц, которая позволила бы столкнуться двум летящим навстречу крошечным объектам.

Началось научное состязание ученых и инженеров разных стран. В 1954 году 12 стран основали Европейский совет по ядерным исследованиям – ЦЕРН, базирующийся в Женеве. К сожалению, «холодная война» долго не позволяла нашей стране участвовать в крупных международных проектах –



нашим ученым приходилось действовать в одиночку. И тем не менее, именно у нас в конце 60-х годов прошлого века в Протвино вступил в строй самый мощный в то время ускоритель с энергией ускоряемых протонов до 80 ГэВ. В 80-е годы заработали протон-антипротонные коллайдеры в ЦЕРНе – с энергией частиц до 400 ГэВ и в Фермиевской национальной лаборатории близ Чикаго – с энергией до 1000 ГэВ, т.е. до 1 ТэВ, при которой скорости частиц отличаются от скорости света всего лишь на 0,00005%. Стало возможным проектировать эксперименты по проверке создаваемой теории фундаментальных частиц. И эта теория – так называемая стандартная модель – проверку выдержала. Были изучены параметры ряда предсказанных теорией частиц, например W- и Z-бозонов. Основной трудностью этих экспериментов было создание сфокусированных пучков антипротонов.

Однако к концу 80-х годов выяснилось, что для завершения проверки стандартной модели и ряда других возникших проблем необходимы энергии частиц на порядок больше – до 10 ТэВ. Начался очередной этап гонки за энергиями. В США проектировался суперколлайдер, было даже начато его строительство, но в 2002 году государственное финансирование было прекращено. И наоборот, в ЦЕРНе 16 декабря 1994 года было принято решение о создании нового коллайдера. В 1999 году началось его строительство, облегчаемое тем, что огромный туннель уже был сооружен – в нем размещался электрон-позитронный ускоритель. Родилось и название нового прибора – Большой адронный коллайдер, сокращенно БАК. Определилась и приблизительная стоимость – 4 миллиарда евро. Началось и успешно происходило финансирование, в котором приняли участие 20 европейских стран. Наше участие в финансировании было сравнительно небольшим и косвенным – 60 миллионов долларов Объединенному институту ядерных исследований в Дубне для оплаты труда российских (и стран СНГ) ученых, присоединившихся к международному коллективу по созданию приборов, в которых должны анализироваться результаты столкновений частиц. Россия входит в проект как страна-наблюдатель (впрочем, в таком же статусе находятся США и Япония).

Срок ввода в действие БАКа был нарушен – произошло несколько небольших аварий, причиной которых была недооценка «сопромата», т.е. способности материалов выдерживать большие перегрузки. Ожидается запуск коллайдера нынешней осенью.

Основные характеристики коллайдера таковы. Главный туннель, в котором находятся каналы для ускоряющихся частиц, это не просто окружность, а четыре дуги, соединенные прямолинейными участками, где происходит ускорение частиц высокочастотными электрическими полями, уточнение их траектории и встреча частиц. На этих участках расположены детекторы – приборы, анализирующие результаты столкновений. Общая длина туннеля приблизительно 27 км, поперечный размер около 8 км, глубина залегания туннеля порядка 100 м (для ослабления мешающего космического излучения). Туннель находится на границе Швейцарии с Францией, вблизи Женевы. Любопытно, что приливы, вызываемые Луной (они есть не только в океане, но и в земной коре), имеют здесь размах колебаний до 0,5 м, что увеличивает длину туннеля на 1 мм. Тем не менее, потребовался учет этого, казалось бы, чрезвычайно малого эффекта.

БАК – не протон-антипротонный, а протон-протонный коллайдер. Трудности создания узких антипротонных пучков при необходимых энергиях порядка 7 ТэВ были столь велики, что проще оказалось осуществить в туннеле встречное движение протонов в двух отдельных каналах с противоположными направлениями магнитных полей. Вначале протоны ускоряются до небольшой энергии в малом кольце, диаметром порядка 50 м, потом – в кольце диаметром около километра до энергии 0,45 ТэВ. Затем этот поток протонов раздваивается, и два потока по встречным путям направляются в главный туннель, где им предстоит ускорение до 7 ТэВ (или до скорости, составляющей 0,999999991 скорости света). В четырех местах встреч протонов в огромных подземных залах (высотой до 20 метров) установлены детекторы. Один из этих приборов предназначен для изучения столкновений не протонов, а тяжелых ионов – ионов свинца. В детекторах продукты столкновений рождают, в конечном счете, импульсы токов, передающиеся по миллионам проводов в компьютерные устройства, занимающие огромные помещения уже на поверхности. Количество этой информации – петабайты ( $10^{15}$  байт) в секунду. Компьютерные устройства профильтровывают информацию и только наибо-

лее важную, по их мнению, передают в глобальную сеть, объединяющую десятки тысяч компьютеров на трех континентах. Таким образом, БАК – это не просто туннель, а грандиозная фабрика со многими цехами.

Теперь – о характеристиках самого эксперимента. Протоны будут лететь сгустками. Каждый сгусток – это игла, содержащая  $10^{11}$  частиц и имеющая длину 3 см и толщину 16 мкм (как самый тонкий волос). При пробном запуске по всему туннелю будет ускоряться всего один такой сгусток, а при выходе на рабочий режим – 2808 сгустков. Это означает, что в детекторах будут сталкиваться 600 миллионов игл в секунду.

Для обеспечения движения ускоренных протонов по окружностям необходимы магнитные поля с индукцией до 20 Тл, а в обмотках электромагнитов должны протекать токи силой в десятки тысяч ампер. Такие токи проводники обмоток смогут выдержать только в сверхпроводящем состоянии, для чего необходимо поддержание температуры, лишь немного отличающейся от абсолютного нуля. 60 тонн жидкого гелия будут обеспечивать температуру не выше 1,9 К, но перед этим 10100 тонн жидкого азота понизят температуру до 80 К. Давление в каналах туннеля не должно превышать  $10^{-8}$  Па.

В эксперименте уже участвуют 3000 постоянных научных сотрудников и 6500 приглашаемых ученых. Число инженерно-технического персонала – в несколько раз больше.

И для чего же это все нужно? Ведущие физики не скупятся на эпитеты (не говоря уж об околонуточных журналистах): «это будет что-то грандиозное», «грядущие революции в физике». А конкретнее? Увы, рамки данной статьи не позволяют рассмотреть эти ожидания на серьезном научном уровне, а упрощающая вульгаризация здесь недопустима. Ограничимся лишь перечислением основных намеченных целей эксперимента.

1) Обнаружение и установление некоторых свойств и параметров фундаментальной частицы, называемой бозоном Хиггса. Эта частица совершенно «необходима» в теоретической стандартной модели микромира. Если она все-таки не будет обнаружена, потребуется серьезный пересмотр всей современной физики.

2) Поиск суперчастиц – главных подозреваемых в качестве основного содержания недавно обнаруженной «темной материи», составляющей 95% всей массы Вселенной.

3) Обнаружение скрытых размерностей геометрии мира сверх привычных трех измерений. В частности, в современной теории микромира число измерений равно 11. С этими исследованиями, возможно, будет связано и нахождение виртуальных черных дыр. Вот это, не без помощи околонуточных журналистов, очень испугало широкую общественность. Но на самом деле бояться совершенного нечего – во-первых, масса этих объектов ничтожна, а во-вторых, они все-таки виртуальные, т.е. находятся в неких пространствах других измерений.

4) Продолжение изучения (в опытах с ускоренными ионами свинца) свойств кварко-глюонного состояния (кварко-глюонной плазмы), в котором находилось вещество Вселенной сразу после своего рождения.

А на очереди – мировой (с участием США и Японии) проект по строительству еще более грандиозного ускорителя, на этот раз электрон-позитронного линейного коллайдера, запуск которого планируется к 2020 году. Предварительная оценка его стоимости – не менее 8 миллиардов долларов. Действительно, по меткому замечанию академика Л.Арцимовича, «наука – это способ удовлетворять любопытство ученых за счет общества».

*Л.Белопухов*

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июля 2009 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №2–2009» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «M2124» или «Ф2130». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам [math@kvant.info](mailto:math@kvant.info) и [phys@kvant.info](mailto:phys@kvant.info) соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задача M2126 предлагалась на региональном этапе XXXV Всероссийской олимпиады школьников по математике, задача M2129 – на I Президентской олимпиаде Казахстана. Задача M2130 была напечатана в болгарском журнале «Математика» и публикуется в «Кванте» в рамках сотрудничества с коллегами из Болгарии.

Задачи Ф2130–Ф2132 и Ф2137 предлагались на первом туре Московской городской олимпиады школьников по физике.

## Задачи M2124–M2130, Ф2130–Ф2137

**M2124.** Пусть  $n \geq 3$  – натуральное число, а  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – положительные числа, удовлетворяющие равенствам

$$x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 = \dots$$

$$\dots = x_{n-1}^2 - x_{n-1}x_n + x_n^2 = x_n^2 - x_nx_1 + x_1^2.$$

При каких  $n$  можно утверждать, что числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  равны?

*В. Сендеров*

**M2125.** Вписанная в треугольник  $ABC$  окружность  $\omega$  касается сторон  $CA$  и  $AB$  в точках  $B_1$  и  $C_1$  соответственно. Точка  $D$ , отличная от  $B_1$  и  $C_1$ , находится на расстоянии  $AC_1$  от точки  $A$ . Прямые  $DB_1$  и  $DC_1$  пересекают второй раз окружность  $\omega$  в точках  $B_2$  и  $C_2$ . Докажите, что  $B_2C_2$  – диаметр окружности  $\omega$ , перпендикулярный отрезку  $DA$ .

*Р. Женодаров*

**M2126.** На вечеринке компанию из 20 человек требуется посадить за 4 стола. Рассадка называется *удачной*, если любые два человека, оказавшиеся за одним столом, являются друзьями. Выяснилось, что удачные рассадки существуют, причем при любой удачной рассадке за каждым столом сидят ровно по 5 человек. Каково наибольшее возможное количество пар друзей в этой компании?

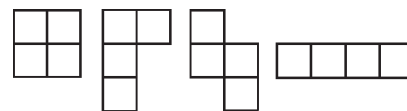
*П. Кожевников*

**M2127.** Внутри ветви гиперболы  $x = \sqrt{y^2 + 1}$  расположены окружности  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$  так, что при каждом

$n > 1$  окружность  $\omega_n$  касается гиперболы в двух точках и касается окружности  $\omega_{n-1}$ , а окружность  $\omega_1$  имеет радиус 1 и касается гиперболы в точке  $(1, 0)$ . Докажите, что для любого  $n$  радиус окружности  $\omega_n$  равен натуральному числу.

*В. Распоргуев*

**M2128.** Вася отметил 10 клеток в клетчатой таблице  $10 \times 10$  клеток. Всегда ли Петя может вырезать из этой таблицы по линиям сетки 19 фигурок вида



так, чтобы фигурки не содержали отмеченные клетки?

*И. Богданов, О. Подлипский*

**M2129.** Найдите все пары натуральных чисел  $n > 1$  и  $k$ , для которых  $1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n = n^k$ .

*В. Сендеров*

**M2130.** Дан плоский (невыпуклый) шестиугольник  $ABCDEF$ , в котором  $AB = DE$ ,  $BC = EF$ ,  $CD = FA$ ,  $\angle FAB = 3\angle CDE$ ,  $\angle BCD = 3\angle EFA$ ,  $\angle DEF = 3\angle ABC$  (здесь имеются в виду внутренние углы многоугольника, некоторые из которых могут быть больше  $180^\circ$ ). Известно, что никакие две стороны шестиугольника не параллельны. Докажите, что прямые  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$  пересекаются в одной точке.

*Н. Белухов (Болгария)*



**Ф2130.** Удав решил установить мировой рекорд в прыжках в высоту среди удавов. Удав может из положения «свернувшись лежа» выпрямиться почти вертикально и разогнаться до скорости  $v$ . Длина Удава  $L$ . Каким может быть рекорд? Как должен двигаться Удав, чтобы установить рекорд? Масса Удава распределена по его длине равномерно.

*С.Варламов*

**Ф2131.** Горизонтальная платформа, на которую положили без начальной скорости груз массой  $m$ , совершает  $f$  раз в секунду такие колебания: сначала она движется вправо с постоянным ускорением  $a$ , потом мгновенно останавливается и возвращается в начальное положение с постоянным ускорением  $a/2$ . Коэффициент трения между грузом и платформой  $\mu < 1$ , ускорение  $a \gg g$ , частота  $f \gg 1$  Гц. В каком направлении и по какому закону будет двигаться груз, и будет ли он вообще двигаться? Считать, что скорость движения груза всегда много меньше максимальной скорости движения платформы.

*А.Андреанов*

**Ф2132.** Один из концов U-образной трубки постоянного сечения с налитой в нее ртутью наглухо закрыли. Воздух в закрытом конце трубки стали медленно нагревать, измеряя зависимость его давления  $p$  от температуры  $T$ . Как оказалось, эта зависимость в начале нагревания приближенно является линейной:

$p = p_0(1 + \alpha(T/T_0 - 1))$ , где  $p_0 = 760$  мм рт. ст. – атмосферное давление,  $T_0$  – температура окружающей среды, коэффициент  $\alpha = 0,5$ . Найдите высоту столба воздуха в закрытом конце трубки в начале процесса.

*О.Шведов*

**Ф2133.** Проводящие концентрические сферы имеют радиусы  $R$  и  $3R$ , на расстоянии  $2R$  от их общего центра находится точечный заряд  $Q$ . Сферы соединяют между собой тонким проводом, и получившийся проводник заземляют тонким проводником, имеющим большое сопротивление. Какой заряд протечет по этому проводнику? Какое количество теплоты выделится в системе за большое время?

*А.Теплов*

**Ф2134.** Обычный «мостик» собран из трех резисторов сопротивлением  $100$  Ом каждый и одного резистора сопротивлением  $20$  Ом. В одну из диагоналей мостика включен амперметр, он показывает  $0,1$  А. Какой ток течет через батарейку, подключенную к другой диагонали мостика? Амперметр считать идеальным.

*О.Простов*

**Ф2135.** Конденсатор емкостью  $C = 100$  мкФ соединен последовательно с катушкой индуктивностью  $L = 1$  Гн. К выводам получившейся цепи подключают батарейку напряжением  $U_0 = 1$  В, и ток в цепи начинает увеличиваться. В тот момент, когда ток максимален, параллельно катушке подключают резистор сопротивлением  $R = 10$  кОм. Какой заряд протечет через резистор и сколько тепла в нем выделится

за большой интервал времени? Элементы цепи считать идеальными.

*А.Повторов*

**Ф2136.** Для передачи не очень высокоскоростной информации используется витая пара, состоящая из двух тонких изолированных проводов большой длины. Индуктивность проводов в расчете на  $1$  сантиметр длины пары равна  $1$  мкГн, емкость между проводами составляет  $1$  пФ на сантиметр. С какой скоростью бежит электромагнитная волна вдоль такой пары?

*З.Рафаилов*

**Ф2137.** Тонкая плосковогнутая рассеивающая линза прижата плоскостью к торцу цилиндрической трубки. В трубку вставлена плосковыпуклая собирающая линза так, что главные оптические оси линз совпадают с осью трубки, а собирающая линза обращена к рассеивающей плоской стороной. Собирающую линзу можно перемещать вдоль оси трубки. Если на первую (рассеивающую) линзу вдоль оси направить узкий параллельный пучок света, то при некотором расстоянии между линзами из системы выйдет также параллельный пучок. Если же пространство между линзами заполнить жидкостью, то для получения на выходе параллельного пучка расстояние между линзами необходимо увеличить в  $1,5$  раза. Найдите показатель преломления жидкости.

*В.Погожев*

### Решения задач М2101–М2110, Ф2118–Ф2122

**М2101.** Дан квадратный трехчлен  $f(x) = x^2 + ax + b$ . Известно, что для любого действительного числа  $x$  найдется такое действительное число  $y$ , что  $f(y) = f(x) + y$ . Найдите наибольшее возможное значение  $a$ .

**Ответ:**  $a = \frac{1}{2}$ .

Из условия следует, что квадратное уравнение  $f(y) - y - f(x) = 0$  разрешимо относительно  $y$  при любом значении  $x$ . Подставив  $x = -\frac{a}{2}$ , получаем уравнение  $y^2 + (a-1)y + \frac{a^2}{4}$ , дискриминант которого равен  $D = (a-1)^2 - a^2 = 1 - 2a \geq 0$ , откуда  $a \leq \frac{1}{2}$ .

С другой стороны, если  $a = \frac{1}{2}$ , то при любом  $x$  можно положить  $y = -x$ ; тогда имеем

$$f(y) - y - f(x) = \left(x^2 - \frac{1}{2}x + b\right) + x - \left(x^2 + \frac{1}{2}x + b\right) = 0,$$

что и требовалось.

*Д.Терёшин*

**М2102.** По кругу расставлены красные и синие числа. Каждое красное число равно сумме соседей, а каждое синее – полусумме соседей. Докажите, что сумма красных чисел равна нулю.

Пусть  $a, b, c$  – три числа, стоящие подряд. Если  $b$  – красное, то  $b = a + c$ , а если  $b$  – синее, то  $2b = a + c$ .

Запишем такие равенства для всех троек последовательных чисел и сложим их. Тогда, если  $R$  – сумма всех красных чисел, а  $B$  – сумма всех синих, то мы получим равенство  $R + 2B = 2(R + B)$ , откуда  $R = 0$ .

И. Богданов

**M2103.** Дана таблица  $n \times n$ , столбцы которой пронумерованы числами от 1 до  $n$ . В клетки таблицы расставляются числа 1, 2, ...,  $n$  так, что в каждой строке и в каждом столбце все числа различны. Назовем клетку хорошей, если число в ней больше номера столбца, в котором она находится. При каких  $n$  существует расстановка, в которой во всех строках одинаковое количество хороших клеток?

**Ответ:** при нечетных  $n$ .

Найдем общее количество хороших клеток. В первом столбце их  $n - 1$  (все, кроме клетки с числом 1), во втором их  $n - 2$  (все, кроме клеток с числами 1 и 2) и т.д., в последнем столбце таких клеток нет. Значит, всего их  $(n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ . Поэтому в каждой строке их должно быть по  $\frac{n-1}{2}$ , следовательно,  $n$  должно быть нечетным.

Приведем пример расстановки при нечетном  $n$ . Пусть в первой строке записаны числа в порядке 1,  $n, n - 1, n - 2, \dots, 2$ , а каждая следующая строка является циклическим сдвигом предыдущей строки на 1 клетку

1	$n$	$n - 1$	...	2
2	1	$n$	...	3
3	2	1	...	4
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n - 1$	$n - 2$	$n - 3$	...	$n$
$n$	$n - 1$	$n - 2$	...	1

(см. рисунок). Очевидно, в любой строке и в любом столбце каждое из чисел 1, 2, ...,  $n$  встречается по одному разу. Рассмотрим  $m$ -ю строку ( $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ ). В ее первых  $m$  клетках стоят числа 1, 2, ...,  $m$

в обратном порядке, поэтому среди этих клеток ровно  $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$  хороших. В ее последних  $n - m$  клетках (т.е. в столбцах с номерами  $m + 1, m + 2, \dots, n$ ) стоят числа  $m + 1, m + 2, \dots, n$  в обратном порядке, поэтому среди этих клеток ровно  $\left\lfloor \frac{n-m}{2} \right\rfloor$  хороших. Так как числа  $m$  и  $n - m$  разной четности, то в  $m$ -й строке ровно  $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m}{2} \right\rfloor = \frac{m}{2} + \frac{n-m}{2} - \frac{1}{2} = \frac{n-1}{2}$  хороших клеток.

К. Чувиллин

**M2104.** Фокусник отгадывает площадь выпуклого 2008-угольника  $A_1A_2 \dots A_{2008}$ , находящегося за шириной. За один вопрос он называет две точки на периметре многоугольника; зрители отмечают эти точки, проводят через них прямую и сообщают фокуснику меньшую из двух площадей частей, на которые 2008-угольник разбивается этой прямой. При этом в качестве точки фокусник может назвать либо вершину, либо точку, делящую указанную им сторону в указанном им численном отношении. Дока-

жите, что за 2006 вопросов фокусник сможет отгадать площадь многоугольника.

Пусть  $A = A_{2008}$ . Диагонали, выходящие из вершины  $A$ , делят его на 2006 треугольников  $AA_1A_2, \dots, AA_{2006}A_{2007}$  (см. рисунок). Пусть  $AM_1, \dots, AM_{2006}$  – медианы этих треугольников. Покажем, что называя все пары точек  $(A, M_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, 2006$ , фокусник сможет отгадать площадь многоугольника. Пусть  $S_k$  – площадь, сообщаемая фокуснику для прямой  $AM_k$ , а  $2T_k$  – площадь треугольника  $AA_kA_{k+1}$ . Так как медиана делит треугольник на две равновеликие части, то



$$S_k = \min \{2(T_1 + \dots + T_{k-1}) + T_k, T_k + 2(T_{k+1} + \dots + T_{2006})\}.$$

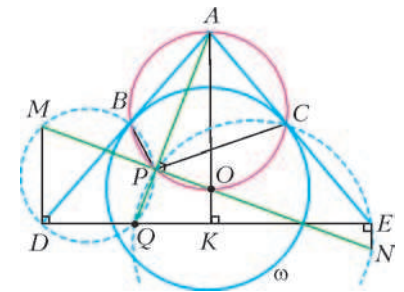
При этом ясно, что  $S_1 = T_1$  и  $S_{2006} = T_{2006}$ . Заметим, что фокуснику достаточно найти все  $T_k$ .

Пусть  $AL$  – прямая, делящая площадь многоугольника пополам. Если отрезки  $AM_1, \dots, AM_t$  расположены по одну сторону от прямой  $AL$ , а отрезки  $AM_{t+1}, \dots, AM_{2006}$  – по другую, то фокуснику будут сообщать площадь многоугольника  $AA_1 \dots A_k M_k$  при  $k = 1, \dots, t$  и многоугольника  $AA_{2007} \dots A_{k+1} M_k$  при  $k = t + 1, \dots, 2006$ . Поэтому  $S_1 < \dots < S_t$  и  $S_{t+1} > \dots > S_{2006}$ . Таким образом, если фокусник обнаружил, что  $S_1 < \dots < S_n \geq S_{n+1} > \dots > S_{2006}$ , то  $t = n$  или  $t = n - 1$ . Следовательно, при  $k = 1, \dots, n - 1$  имеем  $S_k = 2(T_1 + \dots + T_{k-1}) + T_k$ , откуда находятся  $T_1, \dots, T_{n-1}$ , а при  $k = n + 1, \dots, 2006$  имеем  $S_k = T_k + 2(T_{k+1} + \dots + T_{2006})$ , откуда находятся  $T_{2006}, \dots, T_{n+1}$ . Остается найти  $T_n$ , которое вычисляется из равенства

$$S_n = 2 \min \{T_1 + \dots + T_{n-1}, T_{n+1} + \dots + T_{2006}\} + T_n.$$

Н. Агаханов

**M2105.** Окружность  $\omega$  с центром  $O$  вписана в угол  $BAC$  и касается его сторон в точках  $B$  и  $C$ . Внутри угла  $BAC$  выбрана точка  $Q$ . На отрезке  $AQ$  нашлась такая точка  $P$ , что  $AQ \perp OP$ . Прямая  $OP$  пересекает окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , описанные около треугольников  $BPQ$  и  $CPQ$ , вторично в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что  $OM = ON$ .



Пусть описанные окружности треугольников  $BPQ$  и  $CPQ$  пересекают лучи  $AB$  и  $AC$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно (см. рисунок).

Из теоремы о произведении отрезков секущих получаем  $AB \cdot AD = AP \cdot AQ$  и, аналогично,  $AC \cdot AE = AP \cdot AQ$ , откуда  $AB \cdot AD = AC \cdot AE$ . Так как  $AB = AC$  (отрезки касательных к  $\omega$ ), то  $AD = AE$ , и треугольник  $ADE$  – равнобедренный. Пусть  $K$  – сере-

дина  $DE$ . Тогда прямая  $AK$  является медианой, высотой и биссектрисой равнобедренного треугольника  $ADE$ , в частности,  $AK$  проходит через  $O$ .

Так как  $\angle ABO = \angle ACO = \angle APO = 90^\circ$ , то точки  $A, B, C, P, O$  лежат на окружности с диаметром  $AO$ . Из вписанных четырехугольников  $ABPC, BPQD, CPQE$  имеем

$$\begin{aligned} \angle PQD &= 180^\circ - \angle PBD = \angle ABP = \\ &= 180^\circ - \angle ACP = \angle PCE = 180^\circ - \angle PQE, \end{aligned}$$

поэтому точка  $Q$  лежит на отрезке  $DE$ .

Так как четырехугольник  $PQDM$  вписанный, то  $\angle MDQ = \angle MPQ = 90^\circ$ , откуда  $MD \perp DE$ . Аналогично,  $NE \perp DE$ . Таким образом,  $MD \parallel OK \parallel NE$  и  $DK = KE$ . Отсюда вытекает, что  $OM = ON$ .

А.Акопян, П.Кожевников

**M2106.** При каких натуральных  $n > 1$  существуют такие натуральные  $b_1, \dots, b_n$  (не все из которых равны), что при всех натуральных  $k$  число  $(b_1 + k)(b_2 + k) \dots (b_n + k)$  является степенью натурального числа? (Показатель степени может зависеть от  $k$ , но должен быть всегда больше 1.)

**Ответ:** при составных  $n$ .

Все числа в решении считаются натуральными, если не оговорено противное.

Пусть  $n$  – составное число, т.е.  $n = r \cdot s$ , где  $r > 1, s > 1$ . Тогда достаточно рассмотреть числа  $b_1 = \dots = b_r = 1, b_{r+1} = \dots = b_n = 2$ . Очевидно, что при всяком  $k$  число  $(b_1 + k) \dots (b_n + k) = r$ -я степень.

Пусть теперь  $n$  – простое число и  $b_1, \dots, b_n$  – произвольные натуральные числа, не все из которых равны. Без ограничения общности можно считать, что  $b_1, \dots, b_l$  – попарно различные числа, а каждое из чисел  $b_{l+1}, \dots, b_n$  равно одному из  $b_1, \dots, b_l$ . Пусть среди чисел  $b_1, \dots, b_n$  имеется  $s_i$  равных  $b_i$ , где  $1 \leq i \leq l$ ;  $s_1 + \dots + s_l = n$ .

Воспользуемся **китайской теоремой об остатках**: каковы бы ни были натуральные попарно взаимно простые числа  $a_1, a_2, \dots, a_l$  и целые неотрицательные числа  $r_1, r_2, \dots, r_l$  ( $r_1 < a_1, r_2 < a_2, \dots, r_l < a_l$ ), существует такое натуральное число  $m$ , которое при делении на числа  $a_1, a_2, \dots, a_l$  дает остатки  $r_1, r_2, \dots, r_l$  соответственно.

Возьмем  $l$  различных простых чисел  $p_1, \dots, p_l$ , которые больше всех  $b_i$ , и положим  $a_i = p_i^2, r_i = p_i - b_i$  при  $1 \leq i \leq l$ . Числа  $p_i^2$  попарно взаимно просты и  $0 < r_i < p_i < p_i^2$ , таким образом, выполняются условия китайской теоремы об остатках. Рассмотрим существующее вследствие этой теоремы число  $m$  и докажем, что если  $(b_1 + m) \dots (b_n + m) = u^v$ , то  $v = 1$ .

Возьмем произвольное число  $i, 1 \leq i \leq l$ . Число  $b_i + m$  при делении на  $p_i^2$  дает остаток  $r_i + b_i = p_i$ . Отсюда ясно, что  $b_i + m$  делится на  $p_i$  и не делится на  $p_i^2$ . При  $j \neq i$  имеем  $0 < |b_i - b_j| < p_i$ , поэтому  $b_j + m$  на  $p_i$  не делится.

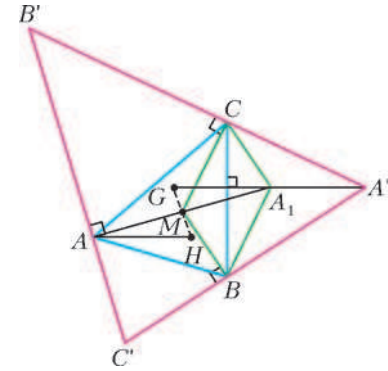
Таким образом, в каноническом разложении числа  $(b_1 + m) \dots (b_n + m)$  на простые множители каждое число  $p_i$  содержится ровно в степени  $s_i$ .

Значит, число  $v$  является делителем всех  $s_i$ , а следо-

вательно, и делителем их суммы  $n$ . При этом  $v < n$ , поэтому  $v = 1$ .

В.Произволов, В.Сендеров

**M2107.** В неравнобедренном треугольнике  $ABC$  точки  $H$  и  $M$  – точки пересечения высот и медиан соответственно. Через вершины  $A, B$  и  $C$  проведены прямые, перпендикулярные прямым  $AM, BM, CM$  соответственно. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника, образованного проведенными прямыми, лежит на прямой  $MH$ .



Пусть  $A'B'C'$  – треугольник, образованный проведенными прямыми (см. рисунок), и  $G$  – точка пересечения его медиан. Мы докажем, что  $M$  является серединой отрезка  $GH$ .

Достроим треугольник  $BMC$  до параллелограмма  $BMC_1A_1$ . Отрезок  $MA_1$  делит сторону  $BC$  пополам, поэтому  $A_1$  лежит на прямой  $AM$ , причем  $AM = A_1M$  (поскольку точка  $M$  делит медиану в отношении 2:1). Кроме того,  $BA_1 \parallel MC \perp A'B'$  и  $CA_1 \parallel MB \perp A'C'$ , поэтому  $BA_1$  и  $CA_1$  – высоты треугольника  $BA_1C'$ , значит,  $A_1$  является ортоцентром треугольника  $BA_1C'$ , и  $A'A_1 \perp BC$ . Стороны треугольника  $BA_1M$  перпендикулярны сторонам треугольника  $A'B'C'$  соответственно, поэтому эти треугольники подобны, причем соответствующие прямые  $BC$  и  $A'G$ , содержащие медианы этих треугольников, перпендикулярны. Значит, прямая  $A'G$  совпадает с прямой  $A'A_1$ . Пусть  $G'$  – точка, симметричная точке  $H$  относительно  $M$ . Треугольники  $AHM$  и  $A_1G'M$  симметричны относительно  $M$ , поэтому  $A_1G' \parallel AH \perp BC$ . Отсюда следует, что  $G'$  лежит на прямой  $A'G$ . Аналогично, получаем, что  $G'$  лежит на прямой  $B'G$ , т.е.  $G'$  совпадает с  $G$ .

Л.Емельянов, П.Кожевников

**M2108.** Дано конечное множество простых чисел  $P$ . Докажите, что найдется натуральное число  $x$  такое, что оно представляется в виде  $x = a^p + b^p$  ( $a, b$  – натуральными) при всех  $p \in P$  и не представляется в таком виде для любого простого  $p \notin P$ .

**Лемма.** Пусть  $p$  – простое число. Тогда число  $2^n$  представляется в виде  $a^p + b^p$  в том и только том случае, когда  $n - 1 \vdots p$ .

**Доказательство.** Если  $n - 1 = kp$ , то представление существует:  $2^n = (2^k)^p + (2^k)^p$ . Предположим, что при некотором  $n$  такое представление нашлось:  $2^n = a^p + b^p$ . Пусть  $a = 2^s k, b = 2^t l$ , где  $k, l$  нечетны. Если, скажем,  $s > t$ , то  $a^p + b^p = 2^{pt} (2^{p(s-t)} k^p + l^p)$ , и число  $2^n$  имеет нечетный делитель  $2^{p(s-t)} k^p + l^p$ , больший единицы; это невозможно. Значит,  $s = t$ , и тогда  $a^p + b^p = 2^{pt} (k^p + l^p)$ .



Если  $p = 2$ , то число  $k^p + l^2$  имеет остаток 2 при делении на 4, и если оно больше 2, то  $2^n$  имеет нечетный делитель  $\frac{k^p + l^p}{2}$ , больший 1; это невозможно, поэтому  $k = l = 1$ ,  $2^n = 2 \cdot 2^{pt}$ , и  $n = pt + 1$ , что и требовалось. Если же  $p > 2$ , то оно нечетно, и

$$k^p + l^p = (k + l)(k^{p-1} - k^{p-2}l + \dots + l^{p-1}).$$

Вторая скобка нечетна и является делителем числа  $2^n$ , поэтому она равна 1; значит,  $k^p + l^p = k + l$ , что возможно лишь при  $k = l = 1$ , и тогда опять получаем  $n = pt + 1$ . Лемма доказана.

Перейдем к решению задачи. Пусть  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ . Положим  $x = 2^{p_1 p_2 \dots p_n + 1}$ . Тогда по лемме это число является искомым.

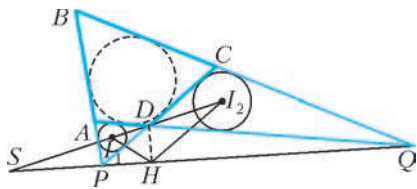
*Замечание.* Легко видеть, что существует бесконечно много таких чисел; подходят, например, все числа вида  $2^{p_1^k p_2 \dots p_n + 1}$ .

В. Сендеров

**M2109.** Дан выпуклый четырехугольник  $ABCD$ . Пусть  $P$  и  $Q$  – точки пересечения лучей  $BA$  и  $CD$ ,  $BC$  и  $AD$  соответственно, а  $H$  – проекция  $D$  на  $PQ$ . Докажите, что четырехугольник  $ABCD$  является описанным тогда и только тогда, когда вписанные окружности треугольников  $ADP$  и  $CDQ$  видны из точки  $H$  под равными углами.

Пусть  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – вписанные окружности треугольников  $ADP$  и  $CDQ$ ,  $I_1$  и  $I_2$  – их центры,  $r_1$  и  $r_2$  – их радиусы. Так как окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  гомотетичны с центром  $D$ , то  $\frac{r_1}{r_2} = \frac{DI_1}{DI_2}$ .

1. Пусть  $r_1 \neq r_2$ , и пусть  $S$  – центр гомотетии с положительным коэффициентом, переводящей  $\omega_1$  в  $\omega_2$  (т.е. точка пересечения общих внешних касательных к окружностям; см. рисунок). Второе условие равносильно тому,



что  $\frac{HI_1}{HI_2} = \frac{r_1}{r_2}$ . Известно, что множе-

ство всех точек  $X$  таких, что  $\frac{XI_1}{XI_2} = \frac{DI_1}{DI_2} = \frac{SI_1}{SI_2}$ , есть окружность с диаметром  $SD$  (она называется *окружностью Аполлония*). Поэтому последнее условие равносильно тому, что  $\angle DHS = 90^\circ$ , т.е. тому, что  $S$  лежит на прямой  $PQ$ . Остается доказать, что условие  $S \in PQ$  равносильно описанности четырехугольника  $ABCD$ . Пусть четырехугольник  $ABCD$  описан вокруг некоторой окружности  $\omega$ . Из теоремы о трех центрах гомотетии следует, что точки  $S$ ,  $P$  и  $Q$  лежат на одной прямой (как центры гомотетий с положительными коэффициентами, переводящих  $\omega_1$  в  $\omega_2$ ,  $\omega$  в  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  в  $\omega$ ).

Наоборот, предположим, что  $S$  лежит на  $PQ$ . Пусть  $\omega$  – вневписанная окружность треугольника  $CDQ$ , касающаяся его стороны  $CD$ . Пусть  $T$  – центр гомотетии с

положительным коэффициентом окружностей  $\omega$  и  $\omega_1$  (точка пересечения их общих внешних касательных). Из теоремы о трех центрах гомотетии следует, что  $T$ ,  $Q$  и  $S$  лежат на одной прямой, т.е.  $T$  лежит на прямой  $PQ$ . С другой стороны,  $T$  лежит на прямой  $PC$ , поэтому  $T$  совпадает с  $P$ . Тогда прямая  $PB$  касается  $\omega$ , т.е. четырехугольник  $ABCD$  описан вокруг  $\omega$ .

2. Пусть  $r_1 = r_2$ , тогда  $\omega_1$  и  $\omega_2$  симметричны относительно биссектрисы  $l$  угла  $ADC$ . Второе условие равносильно тому, что

$$HI_1 = HI_2 \Leftrightarrow DH \perp I_1 I_2 \Leftrightarrow I_1 I_2 \parallel PQ.$$

Если четырехугольник  $ABCD$  описан около  $\omega$ , то  $\omega$  симметрична относительно  $l$ . Тогда прямые  $BA$  и  $BC$ ,  $DC$  и  $DA$  симметричны относительно  $l$  (как общие касательные к  $\omega$  и  $\omega_1$ ,  $\omega$  и  $\omega_2$ ), а значит,  $P$  и  $Q$  также симметричны, и  $PQ \parallel I_1 I_2$ .

Наоборот, если  $I_1 I_2 \parallel PQ$ , то прямые  $DA$  и  $DC$  симметричны относительно прямой  $DH$  (как касательные к  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ). Тогда точки  $P$  и  $Q$  симметричны относительно  $DH$ ; значит, прямые  $BA$  и  $BC$  симметричны относительно прямой  $DH$ . Поэтому четырехугольник  $ABCD$  симметричен относительно прямой  $DH$ , следовательно, он описан.

В. Шмаров

**M2110.** В блицтурнире принимали участие  $2n + 3$  шахматистов. Каждый сыграл с каждым ровно по одному разу. Для турнира был составлен такой график, чтобы игры проводились одна за другой и чтобы каждый игрок после сыгранной партии отдыхал не менее  $n$  игр. Докажите, что один из шахматистов, игравших в первой партии, играл и в последней.

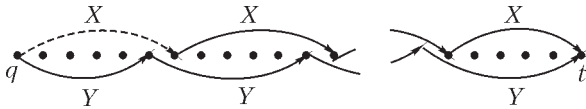
Назовем *шагом* шахматиста количество партий между двумя его соседними играми (включая вторую из них). Тогда все шаги не меньше  $n + 1$ .

Рассмотрим любые  $n + 3$  последовательные игры  $g_1, \dots, g_{n+3}$ ; в них  $2n + 6$  участников. Заметим, что только три шахматиста могли участвовать в этих партиях дважды. Действительно, это могло произойти только в парах партий  $(g_1, g_{n+2})$ ,  $(g_1, g_{n+3})$ ,  $(g_2, g_{n+3})$ , и в каждой паре может быть только один такой участник (иначе два шахматиста сыграют дважды). Значит, чтобы набралось  $2n + 6$  участников, для каждой из пар должен найтись шахматист, участвовавший в обеих партиях этой пары; остальные  $2n$  шахматистов должны участвовать ровно в одной из партий  $g_1, \dots, g_{n+3}$ . (В частности, каждый из  $2n + 3$  шахматистов участвует хотя бы в одной из партий  $g_1, \dots, g_{n+2}$ .) Мы получили, что шаги шахматистов из партии  $g_1$  равны  $n + 1$  и  $n + 2$  (а шаг одного участника партии  $g_2$  также равен  $n + 1$ ). Значит, любой шаг любого шахматиста равен  $n + 1$  или  $n + 2$ .

Если найдется шахматист  $Z$ , все шаги которого равны  $n + 2$ , то сумма  $2n + 1$  его шагов будет равна  $(n + 2)(2n + 1) = 2n^2 + 5n + 2$ ; поскольку всего игр было  $\frac{(2n + 3)(2n + 2)}{2} = 2n^2 + 5n + 3$ , это означает, что  $Z$  обя-

зан участвовать и в первой, и в последней играх, что и требовалось.

Предположим противное: пусть каждый шахматист делал шаг  $n + 1$ . Рассмотрим шахматиста  $X$ , который сделал первый такой свой шаг последним; пусть в результате этого шага он встретился с шахматистом  $Y$  в  $t$ -й игре. Тогда  $Y$  делал шаг  $n + 1$  до этого; пусть последний такой его шаг (до  $t$ -й партии) был из  $q$ -й партии в  $(q + (n + 1))$ -ю (см. рисунок). Тогда все его последующие шаги (до  $t$ -й партии) были по  $n + 2$ , поэтому  $t = q + (n + 1) + k(n + 2)$ . С другой стороны, все предыдущие шаги  $X$  были по  $n + 2$ ; поэтому если он сделал хотя бы  $k$  таких шагов, то за  $k + 1$  шаг до  $t$ -й партии он участвовал в партии с номером  $t - (n + 1) - k(n + 2) = q$ ; следовательно, он встречался с  $Y$



дважды. Если же  $X$  сделал до  $t$ -й партии меньше  $k + 1$  шагов, то его первая партия имела номер, не меньший  $t - (n + 1) - (k - 1)(n + 2) = q + (n + 2) \geq n + 3$ ; этого также не может быть, так как по доказанному все шахматисты участвовали в первых  $n + 2$  партиях. Полученное противоречие завершает доказательство.

И. Богданов

**Ф2118.** Тележка едет по горизонтальному столу под действием привязанной к ней нерастяжимой нити. Нить переброшена через маленький блок, закрепленный на высоте  $H$  над плоскостью. Свободный конец нити вытягивают с постоянной скоростью  $v_0$ , направленной горизонтально. Найдите скорость тележки и ее ускорение в тот момент, когда угол между нитью и горизонтом составляет  $45^\circ$ .

Скорость тележки находится просто:

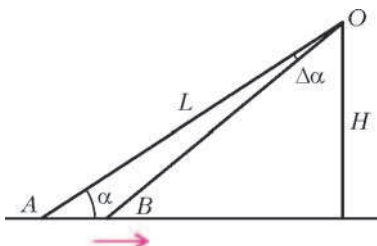
$$v = \frac{v_0}{\cos \alpha} = v_0 \sqrt{2}.$$

Для нахождения ускорения можно записать длину горизонтального участка пути как функцию времени и взять вторую производную, но можно поступить немного проще. Зададим малый интервал времени  $\Delta t$  и выразим приращение скорости тележки:

$$\Delta v = v_0 \left( \frac{1}{\cos(\alpha + \Delta\alpha)} - \frac{1}{\cos \alpha} \right) = \frac{v_0 \Delta\alpha \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

Из «узкого» треугольника  $AOB$  (см. рисунок) легко выразить синус угла  $\Delta\alpha$  – практически сам этот малый угол:

$$\Delta\alpha = \frac{v_0 \Delta t \operatorname{tg} \alpha}{L} = \frac{v_0 \Delta t \operatorname{tg} \alpha}{H / \sin \alpha}.$$



Тогда для ускорения тележки получаем

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_0^2 \operatorname{tg}^3 \alpha}{H}.$$

При угле между нитью и горизонтом

$\alpha = 45^\circ$  ускорение тележки равно

$$a = \frac{v_0^2}{H}.$$

М. Учительев

**Ф2119.** В длинной трубе, наполненной водой, сделана поперечная перегородка из пробки толщиной 1 см, перегородка делит трубу на две части. Если температуры воды в частях трубы отличаются на 1 градус, поток тепла через перегородку составляет 2 Дж/с. Добавим еще одну перегородку – толщиной 2 см, теперь перегородки «выделяют» в трубе цилиндрическую полость. Слева от этой полости будем поддерживать температуру воды  $+50^\circ\text{C}$ , справа – температуру  $+20^\circ\text{C}$ . Определите установившуюся температуру воды в полости. Определите тепловые потоки через каждую перегородку. Теплопроводность стенок трубы пренебрежимо мала.

Для определенности предположим, что температура  $+20^\circ\text{C}$  поддерживается около более толстой перегородки (противоположный случай так же прост). При стационарном состоянии системы поток тепла от горячей воды в полость равен потоку тепла из полости в холодную воду. Будем считать, что поток тепла пропорционален разности температур с двух сторон перегородки и обратно пропорционален ее толщине. Тогда для установившейся температуры  $T$  внутри полости получим соотношение

$$(50 - T) = 0,5(T - 20), \text{ откуда } T = 40^\circ\text{C}.$$

Поток тепла через тонкую перегородку при разности температур 10 градусов в 10 раз больше заданной в условии величины 2 Дж/с, следовательно, потоки тепла в полость и из полости составят по 20 Дж/с.

А. Перегородцев

**Ф2120.** В сосуде находится порция гелия при температуре 100 К и давлении 1000 Па. Сосуд двигают поступательно со скоростью 1000 м/с. Какой станет температура газа в сосуде через некоторое время после его мгновенной остановки? Стенки сосуда не проводят тепла. Теплоемкость самого сосуда пренебрежимо мала.

При установившемся движении частицы относительно сосуда двигаются хаотически, и их скорости  $\vec{v}_i$  определяются «в среднем» температурой газа. Суммарная энергия частиц после остановки сосуда не изменяется. С учетом скорости сосуда  $\vec{v}_0$  ( $v_0 = 1000$  м/с) скорости частиц будут  $\vec{v}_0 + \vec{v}_i$ , и суммарную энергию частиц запишем, усредняя энергии:

$$U = N \epsilon_{\text{cp}} = N \left( v_0^2 + \left( v_i^2 \right)_{\text{cp}} \right)$$

– слагаемое  $2\vec{v}_0\vec{v}_i$  при усреднении дает ноль. Средний квадрат скорости хаотического движения частиц равен

$$\left( v_i^2 \right)_{\text{cp}} = \frac{3}{2} \frac{kT}{m} = \frac{3}{2} \frac{RT}{M} =$$

$$= \frac{3}{2} \frac{8,3 \cdot 100}{0,004} \text{ м}^2/\text{с}^2 \approx 3,1 \cdot 10^5 \text{ м}^2/\text{с}^2.$$

Это означает, что температура газа после установления

равновесия в сосуде будет определяться «новой» средней энергией хаотического движения частиц и станет больше начальной в

$$1 + \frac{v_0^2}{(v_i^2)_{\text{ср}}} \approx 4,2 \text{ раза} .$$

Итак, через некоторое время после резкой остановки сосуда температура в нем будет примерно 400 К. Подумайте сами, что было бы после МЕДЛЕННОГО торможения сосуда вместо его мгновенной остановки.

3. Повторю

**Ф2121.** К выводам катушки индуктивностью  $L = 2 \text{ Гн}$  подключают заряженный конденсатор емкостью  $C = 100 \text{ мкФ}$ , начальное напряжение конденсатора  $U_0 = 100 \text{ В}$ . Напряжение конденсатора начинает уменьшаться, и в тот момент, когда оно падает до половины начального значения, параллельно подключают еще один такой же конденсатор и еще одну такую же катушку (все четыре элемента оказываются соединенными параллельно). Найдите максимальное значение тока через вторую катушку. Сопротивление соединяющих элементы проводников довольно мало. Катушки и конденсаторы считать идеальными.

Ток  $I_0$  через первую катушку перед подключением других элементов найдем из закона сохранения энергии:

$$\frac{CU_0^2}{2} = \frac{C(U_0/2)^2}{2} + \frac{LI_0^2}{2}, \quad I_0 = \sqrt{\frac{3CU_0^2}{4L}} \approx 0,61 \text{ А} .$$

Сразу после подключения еще одной катушки и дополнительного конденсатора токи катушек не изменятся, а напряжение конденсаторов быстро (это время определяется их емкостями и малым сопротивлением проводов) уменьшится вдвое – будем считать для простоты, что это произойдет мгновенно. Тогда энергия системы сразу после подключения дополнительных элементов составит

$$2 \frac{C(U_0/4)^2}{2} + \frac{LI_0^2}{2} = \frac{7CU_0^2}{16} .$$

В тот момент, когда ток  $I$  второй катушки будет максимальным, ЭДС индукции обратится в ноль, энергии конденсаторов будут нулевыми, и энергия системы будет равна суммарной энергии магнитного поля катушек. За небольшое время (меньше периода колебаний в системе) в тепло перейдет малая часть общей энергии, будем считать для простоты, что энергия в тепло вообще не переходит. Полный магнитный поток катушек не меняется («сверхпроводящий» контур из двух катушек), изменения токов катушек при этом одинаковы, и ток первой катушки будет равен  $I_0 - I$ . Еще раз запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{7}{16} CU_0^2 = \frac{L(I_0 - I)^2}{2} + \frac{LI^2}{2} .$$

Получим квадратное уравнение относительно  $I$ :

$$I^2 - \sqrt{\frac{3CU_0^2}{4L}} I - \frac{1}{16} \frac{CU_0^2}{L} = 0 .$$

У этого уравнения два корня, один из них соответствует минимуму, другой максимуму. Максимальный ток через вторую катушку равен

$$I_{\text{max}} = I_0 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \approx 0,66 \text{ А} .$$

Р.Александров

**Ф2122.** Лампа дневного света включена в сеть 220 В, 50 Гц последовательно с катушкой индуктивности, причем в горячем состоянии напряжение на катушке в 3 раза больше напряжения на лампе. Во сколько раз можно увеличить «косинус фи» такой цепи, включив параллельно в сеть конденсатор? Как выбрать емкость такого конденсатора?

В исходной схеме тангенс угла сдвига фаз между напряжением и током цепи (катушка и лампа, соединенные последовательно) равен 3 – лампу можно считать обычным резистором, сопротивление которого в 3 раза меньше индуктивного сопротивления катушки на частоте сети. Тогда косинус угла сдвига фаз в этой цепи равен  $\cos \varphi = 1/\sqrt{10} \approx 0,32$ . Эту величину можно довести до 1, подобрав емкость параллельно подключенного конденсатора – его ток может скомпенсировать перпендикулярную составляющую тока цепи катушка–лампа. Таким образом можно увеличить «косинус фи» примерно в 3 раза.

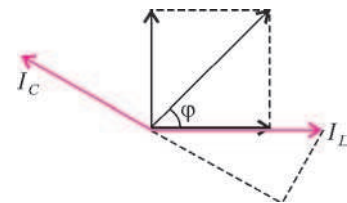
Разумеется, мы хотим увеличить не просто тригонометрическую величину  $\cos \varphi$ , исходная цепь потребляет от сети лишнюю мощность – максимальное значение потребляемой мощности существенно превышает среднее значение, а сеть должна выдерживать именно максимальное значение. Да и потери в сопротивлении проводов получаются больше, чем надо.

Для нахождения емкости конденсатора удобно нарисовать векторную диаграмму (или провести расчет с комплексными числами). Изобразим ток через катушку (и через лампу)  $I_L$  горизонтальным отрезком (красный вектор на рисунке). Напряжение катушки опережает ток на  $90^\circ$ , напряжение резистора совпадает с током по фазе. Черным нарисованы векторы, изображающие напряжения резистора (лампы), катушки и суммарное напряжение – это и есть напряжение сети. На этой же диаграмме нарисован вектор  $I_C$  (красный) – он изображает ток конденсатора, который опережает на  $90^\circ$  напряжение сети. Нам нужно сделать равной нулю величину проекции суммарного тока на перпендикулярное вектору напряжения сети направление, для этого нужно выполнить условие

$$I_C = I_L \sin \varphi .$$

Обозначим напряжение сети  $U$  (мы можем всюду писать условия для амплитудных величин, а можем и для действующих, пусть это будут амплитуды – для определенности). Тогда получим

$$U \omega C = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin \varphi, \text{ или } \omega^2 LC = \frac{9}{10} .$$





Отсюда для индуктивности катушки, например, 2 Гн найдем

$$C \approx 4,6 \text{ мкФ}.$$

Такие конденсаторы часто включают параллельно лам-

пам дневного света, причем один конденсатор (разумеется, с пересчетом емкости) можно использовать с несколькими лампами.

*А.Зильберман*

## КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВЛОМОК

### Рижские башни

(Начало см. на 2-й странице обложки)

Мы покажем, что задача о рижских башнях имеет единственное решение. Если и основание, и крыша музея образуют один и тот же узор из двух, изображенных на рисунке 3 (см. 2-ю страницу обл.), то двенадцать башен разбиваются на шесть пар, состоящих из дополняющих друг друга башен, как, например, (1,1,1) и (6,6,6). Однако легко видеть, что это невозможно. Действительно, у нас есть башня (4,6,6), но нет башни (1,1,3).

Предположим, что основание здания соответствует левому изображению на рисунке 3, а крыша – правому. Тогда двенадцать башен образуют шесть перекрывающихся пар, в каждой из которых ровно одна башня перевернута, причем она стоит двумя своими призмами на двух призмах неперевернутой башни так, что сумма высот примыкающих друг к другу призм из разных башен равна 7. Пример показан на рисунке 4.

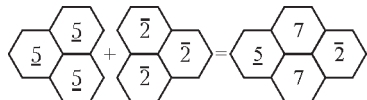


Рис. 4

Заметим, что (2,2,2) обязательно образует пару с (5,5,5). На первый взгляд, (1,1,1) и (6,6,6) тоже образуют естественную пару, но нужно учесть, что (1,1,1) может также сочетаться с (4,6,6), а для (6,6,6) подходит и (1,1,2). Создается впечатление, что для остальных, несимметричных, башен нужно рассмотреть много вариантов. На самом деле оказывается, что (1,3,4) сочетается только с (4,6,6), а (3,5,6) – только с (1,1,2). Таким образом, (1,1,1) и (6,6,6) все же должны быть вместе. Эти три пары показаны на рисунке 5.

Рассмотрим пары (2,2,2)+(5,5,5), (1,3,4)+(4,6,6), (1,1,2)+(3,5,6) и (1,1,1)+(6,6,6) как кости домино [2,5], [4,6], [1,3] и [1,6] соответственно.

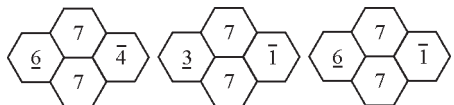


Рис. 5

Мы хотим разбить оставшиеся четыре башни на пары и сделать из них домино. Если мы сложим из шести домино кольцо так, чтобы сумма примыкающих чисел в соседних домино была равна 7, то мы решим задачу о рижских башнях.

Чтобы соединить домино [2,5] с остальными тремя, каждое из оставшихся двух домино должно иметь одно число 2 или 5, а другое – ни 2, ни 5. Имея это в виду, рассмотрим оставшиеся четыре башни. Возможны два способа разбить их на пары.

Мы можем соединить (1,2,3) с (4,6,5), а (1,2,5) – с (2,6,5). Оказывается, каждое из этих соединений можно осуществить тремя разными способами. Однако полученные домино имеют вид [1,6], [2,5] и [3,4]. Это совсем не то, что нам надо. Поэтому мы должны разбить башни на пары другим образом, т.е. соединить (1,2,3) с (2,6,5) в домино [2,3], а (1,2,5) с (4,6,5) – в домино [4,5].

Эти шесть домино образуют кольцо с нужным нам свойством, а именно, [2,5], [2,3], [4,6], [1,6], [1,3] и [4,5]. По этому кольцу строится единственное решение задачи о рижских башнях, показанное на рисунке 6.

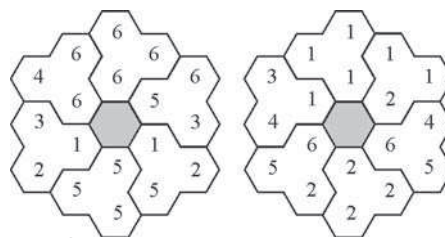


Рис. 6

Стоит отметить, что единственность решения имеет место только с точностью до симметрии. Если бы мы предположили, что основание музея соответствует правому изображению на рисунке 3, а крыша – левому, мы получили бы решение, изображенное на рисунке 7. Мы не считаем эти два решения различными.

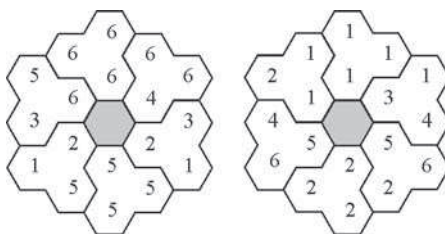


Рис. 7

Идея головоломки «Рижские башни» была найдена в 32-страничной брошюре «Кувшин алмазов», опубликованной украинским изобретателем головоломок Сергеем Грабарчуком в Ужгороде в 1991 году. Там башни несимметричны, но решений много. Латвийский математик Альбертс Ванас нашел вручную набор башен с тремя возможными решениями. Позднее латвийский физик Атис Блумбергс нашел на компьютере набор с единственным решением. Это достижение повторила Мария Бабича, студентка Латвийского университета. Однако в их наборах много симметричных башен.

В наш набор (найденный Андрисом Цибулисом) входят лишь шесть симметричных башен. Он был представлен на 25 Всемирном съезде любителей головоломок в Хельсинки в июле 2005 года. Демонстрация решения головоломки имеется на сайте: <http://www.chiuchang.org.tw/download/catalog/rigatower.ppt>

В 2006 году Мария Бабича нашла следующий набор, содержащий только четыре симметричные башни, но допускающий единственное решение: (1,1,1), (3,3,3), (4,4,4), (6,6,6), (1,2,3), (1,3,5), (1,5,6), (1,6,4), (2,3,5), (2,5,4), (2,6,4) и (3,4,6). Используя наш подход, читатель легко найдет решение этой версии головоломки «Рижские башни».

*Андрис Цибулис, Энди Лю, Вен-Хсиен Сун*

# Задачи

1. В однокруговом турнире по футболу участвовали 4 команды. «Чистое» второе место заняла команда, набравшая 3 очка. Восстановите результаты всех матчей. «Чистое» второе место означает, что больше нет команд, набравших столько же очков, и есть ровно одна команда, набравшая больше очков. За выигрыш дается 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков.

А.Блинков



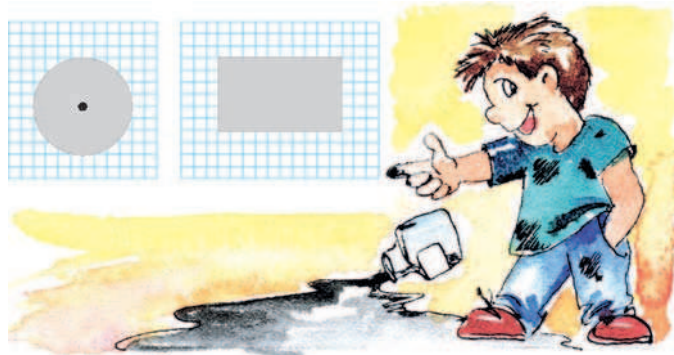
2. Лена пошла выгулять щенка в парк. Как только она оказалась в начале дорожки длиной 41 м, идущей вдоль парка, в конце этой дорожки показалась ее подруга Катя. Щенок от радости стал бегать от Лены к Кате и назад и бегал несколько раз туда-сюда до тех пор, пока подруги не встретились на расстоянии 13 м от начала дорожки. Всего щенок пробежал 85 м. Какое расстояние он пробежал в одну сторону и какое — в другую?

Г.Гальперин



3. Наблюдая за расплыванием чернильных клякс на промокашке, Петя сформулировал закон распространения клякс: каждая точка, до которой дошла клякса, сама становится источником вторичных круглых клякс (см. рисунок слева), причем скорость роста вторичных клякс равна 1 клетке в минуту. Считая этот закон справедливым, найдите, какую площадь будет зани-

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.



мать через 4 минуты «прямоугольная клякса» размером  $6 \times 10$  единичных клеток (см. рисунок справа).

Е.Соколов

4. Фабрика выпускает наборы из пяти белых слоников различной величины и массы. Если расставить слоников по росту, то по стандарту разность масс соседних слоников должна быть одной и той же. Сможет ли контролер это проверить с помощью чашечных весов без гирь? А если бы наборы были из четырех слоников?

А.Шаповалов



5. На плоскости расположены два прямоугольника  $P$  и  $Q$ , пересечением которых является равносторонний восьмиугольник (не обязательно правильный). Докажите, что  $P$  и  $Q$  — квадраты с общим центром.

К.Матвеев





# Что мы видим в зеркале?

А. ТОЛПЫГО

**П**РЕЖДЕ ЧЕМ ЧИТАТЬ ЭТУ СТАТЬЮ, ПОПРОБУЙТЕ РЕШИТЬ простенькую задачу.

Я поглядел на электронные часы и увидел, что они показывают время 20:51. Случайно я перевел взгляд на зеркало и заметил, что в нем те же цифры, но «перескочила» единица: зеркальные часы показывали 12:05.

Как это могло получиться?

(Замечание: так все и было, задача возникла из наблюдения. Добавлю, что никакой сложной системы зеркал не было, часы и зеркало были самые обычные.)

\*\*\*

Все знают, что в зеркале мы видим не совсем то, что есть на самом деле: что-то меняется местами. Но что с чем?

«Правое с левым», — ответят почти все, не задумываясь. Но это всеобщее убеждение ошибочно. Поскольку вектор, перпендикулярный плоскости зеркала, имеет направление «вперед — назад», то на самом деле в зеркале меняются местами не правое и левое, а лоб и затылок. Вы легко в этом убедитесь, попросив кого-нибудь встать между зеркалом и вами (рис.1); тогда перед вами будет затылок вашего друга, тогда как в зеркале вы увидите его лоб (или наоборот). Эту ситуацию мы ниже еще обсудим подробнее.



Рис. 1

Или предположим, что вы движетесь из глубины комнаты к зеркалу. Будем, к примеру, считать, что зеркало расположено в плоскости «верх-низ, восток-запад». Тогда вы идете на север, а ваш двойник в зеркале, наоборот, идет на юг (рис.2).

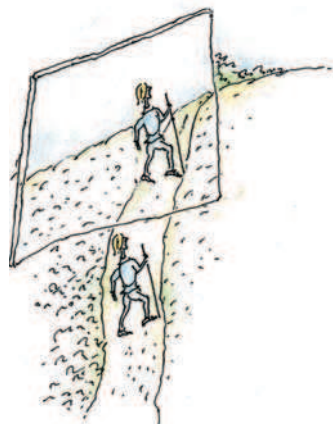


Рис. 2

Если же мы пойдем вдоль зеркала с востока на запад, т.е. справа налево, то и двойник пойдет справа налево.

Точно так же, если вы держите в руке какой-нибудь предмет, у которого явно отличаются «право» и «лево», то

ваше отражение будет держать его так же.

Например, если вы берете стрелу острием влево, то в зеркале острие отраженной стрелы также смотрит влево (рис.3).

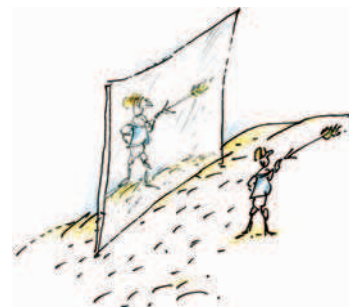


Рис. 3

Понять, почему в зеркале меняются местами «лоб-затылок», нетрудно. Гораздо интереснее понять, на чем основано всеобщее представление о том, что в нем меняются правое и левое. Ведь большинство, даже посмотрев на приведенные примеры, возразит: тут, мол, какое-то непонятное, но очевидное жульничество — мы прекрасно знаем, что на самом деле все-таки меняется левое с правым. Взгляните, — скажет всякий, — если я что-то делаю правой рукой, мой двойник делает то же самое левой рукой. Или возьмите книгу (текст идет слева направо) и посмотрите, как идет текст в отраженной книге.

Начнем именно с текста, потому что здесь легче всего опровергнуть привычное заблуждение.

Возьмите в руки какой-нибудь текст — но прозрачный текст, т.е. текст, исполненный на прозрачном материале. (Очень хорошо для такого опыта годятся гардеробные номерки — например, театральные; их часто делают из прозрачной пластмассы.) Покажите этот текст (этот номерок) сами себе в зеркале (рис.4). Получится то же самое, что было на рисунке 1, — отраженный текст вовсе не идет «справа налево», местами поменялись передняя и задняя стороны номерка (его «лоб» и «затылок»).

Конечно, если мы поставим зеркало иначе, то плоскость отражения будет иной. К примеру, если зеркало прикреплено к потолку, то меняются местами верх и

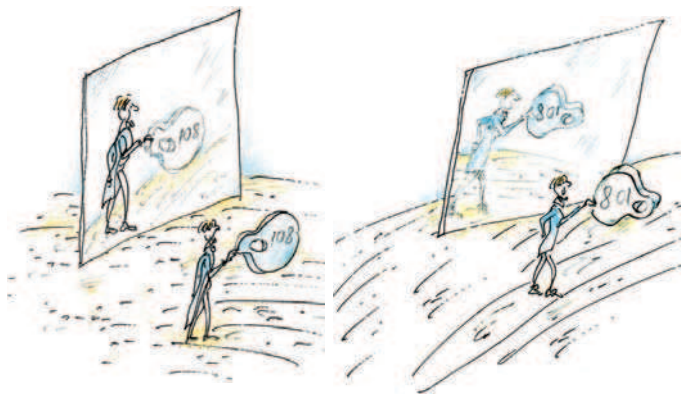


Рис. 4



низ: в зеркале пол окажется наверху, выше всего, а люди будут по нему ходить вверх ногами.

Если же вы хотите, чтобы поменялись местами именно правое и левое, это тоже можно сделать: поставьте зеркало сбоку. Именно так обстояло дело в задаче, с которой началась статья: я ехал поздно вечером в автобусе, и роль зеркала играло боковое стекло автобуса. При этом цифры пошли в обратном порядке: 2051 → 1502. При отражении двойка превратилась в пятерку, и наоборот, и на часах в зеркале я увидел 12:05.

А если бы зеркало стояло перед часами (рис.5)? В этом случае, чтобы увидеть и электронные часы, и изображение в зеркале одновременно, необходимо,

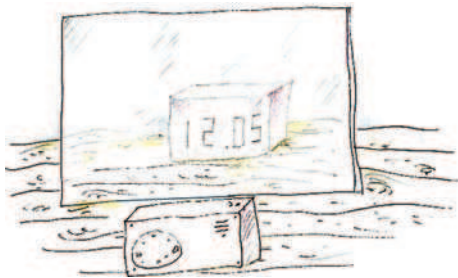


Рис. 5

чтобы часы были прозрачными. Но тогда бы и на часах, и в зеркале были одни и те же цифры. Если же часы непрозрачны, то я либо вообще не увидел бы, что они показывают, либо (если бы я сам сидел между часами и зеркалом) мне пришлось бы выворачивать голову, чтобы поглядеть на них с другой стороны. Между тем, в условии сказано только «перевел взгляд».

А что же происходит с книгой? И что происходит с человеком «в зазеркалье»?

Здесь надо учитывать два фактора: (1) симметрия в пространстве невыполнима, (2) а вот две симметрии одновременно выполнить можно. И настоящая симметрия «лицо-затылок» путем выполнения двух симметрий сразу превращается в симметрию «право-лево», которую мы якобы наблюдаем. Вот как это происходит.

Книга, в отличие от номерка, непрозрачна. Для того чтобы показать себе в зеркале ее текст, вы должны повернуть ее текстом к зеркалу, т.е. поменять местами ее «перед» и «зад» (вы держите книгу к себе уже не так, как при чтении: не текстом, а раскрытым переплетом). Но мы не можем поменять только перед и зад: в нашем трехмерном пространстве нельзя сделать отражение только в одной плоскости, зато можно сделать его одновременно в двух плоскостях. Отражение сразу в двух, перпендикулярных друг другу, плоскостях есть поворот на  $180^\circ$ .

Итак, вместо того чтобы отразить книгу (что невозможно), вы поворачиваете книгу на  $180^\circ$ , причем меняются, во-первых, перед и зад, а во-вторых, правое и левое. В результате человек, который смотрит на текст в зеркало, видит, что перед и зад книги в зеркале расположены нормальным образом: раскрытая страница перед глазами, как ей и положено, — а вот правое и левое в самом деле поменялись местами. Можно

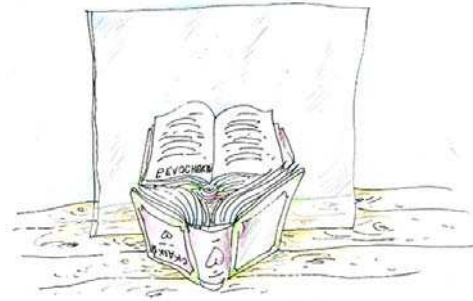


Рис. 6

было бы повернуть книгу и иначе, так чтобы правое осталось справа, но поменялись бы верх и низ (рис.6), однако обычно никто не держит ее вверх ногами. Войди это у нас в привычку, мы бы, пожалуй, склонны были думать, что в зеркале переворачиваются верх и низ.

Но — вряд ли. Ведь есть еще главный аргумент: человек в зеркале. У него-то, вроде бы, действительно правая рука оказывается слева?

Но и здесь та же история, что с книгой. Человек не может оказаться в зазеркалье. Зато легко себе представить, как обойти зеркало и встать с той стороны. Дальше начинается психология.

Человек почти симметричен относительно плоскости, делящей его на правую и левую половины. И несимметричен относительно плоскости, делящей его на переднюю и заднюю половины. Затылок расположен симметрично лицу, но совершенно на него не похож. А вот левая рука достаточно похожа на правую.

Представим себе, что Витя стоит перед некой плоскостью, которую мы будем условно называть «зеркалом», но сквозь которую можно пройти, а его брат-близнец Митя прошел через эту плоскость. Он стоит точно так же, как Витя (носом на север, затылком к югу).

«Но, — думает Витя, — он совершенно не похож на мое отражение: ведь в зеркале я вижу свой нос, а вовсе не затылок». — А ну-ка, повернись! — командует он Мите.

Митя поворачивается...

Здесь-то и происходит самое главное. Человек не может совершить отражение (так, чтобы сердце оказалось справа), но легко может совершить разом два отражения: ведь результат (композиция) двух отражений и есть поворот, в данном случае — поворот на  $180^\circ$ . Итак, Митя поворачивается, т.е. отражается одновременно в двух плоскостях: «перед-зад» (север и юг меняются местами) и «право-лево» (меняются запад и восток).

«Вот теперь, — думает Витя, — Митя встал правильно, точно так, как мое отражение. Только правая рука у него находится против моей левой — в зеркале было бы не так. Значит, у моего зеркального двойника меняются местами именно правое и левое».

Нет, дорогой Витя! У зеркального двойника меняются местами лоб и затылок; ты же, сравнивая его с Митей, не заметил, что Митя совершил двойное отражение. Отсюда и идет твоя ошибка.

# Замощения плоскости

Легко замостить плоскость паркетом из правильных треугольников, квадратов или шестиугольников (рис. 1, 2 и 3).

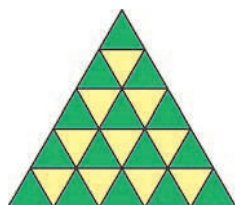


Рис. 1

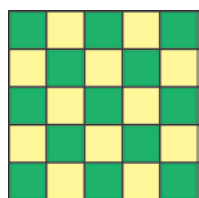


Рис. 2

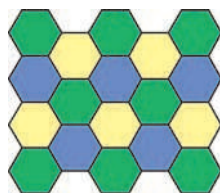


Рис. 3

Можно замостить плоскость и плитками другой формы, например уголками (рис. 4).

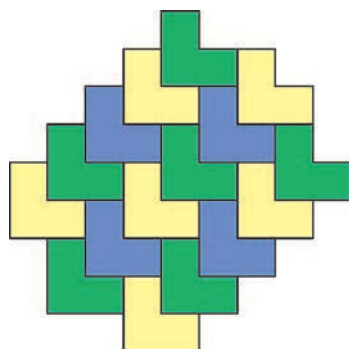


Рис. 4

Но не всякие плитки годятся: скажем, правильными пятиугольниками замостить плоскость нельзя. Причина простая: трех углов недостает, чтобы составить  $360^\circ$ , но четыре уже не поместятся (рис. 5).

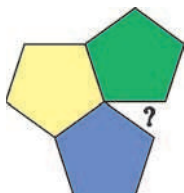


Рис. 5

Оказывается, что четырехугольники годятся любые, даже и невыпуклые. Почему? Приложим к желтому четырехугольнику (рис. 6) еще один такой же (зеленый), получится (выпуклый) шестиугольник. У этого шестиугольника противоположные стороны параллельны и равны, и можно сложить шестиугольники в полосу. Верхний и нижний края этой полосы одинаковы, и такими полосками можно выложить всю плоскость.

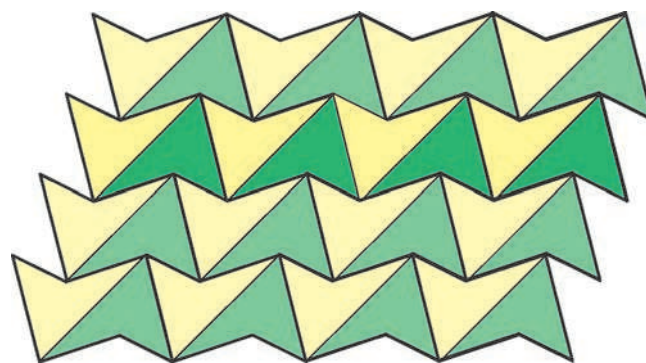


Рис. 6

Все эти замощения периодичны: одна и та же конфигурация плиток повторяется в них со сдвигом.

Заметим, что правильный треугольник и квадрат допускают также и непериодические замощения (рис. 7), а правильный шестиугольник — нет.

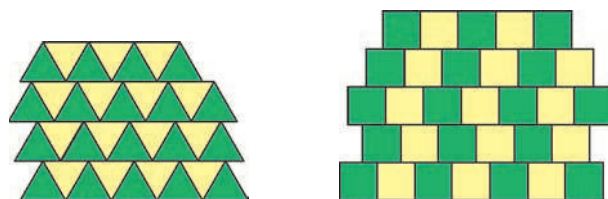


Рис. 7

Отразив вершину  $E$  правильного пятиугольника  $ABCDE$  относительно диагонали  $AD$ , получим невыпуклый пятиугольник (рис. 8), копиями которого

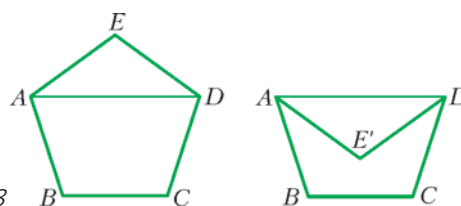


Рис. 8

можно покрыть плоскость как периодически (рис. 9), так и непериодически (рис. 10).

Рассмотрим девятиугольник с равными сторонами и специально подобранными углами (рис. 11). Из таких девятиугольников можно составить непериодическую спираль (рис. 12). Продолжается она следующим образом. К очередной стороне предыдущего витка спирали прикладывается зеленый многоугольник, «щель» между соседними зелеными многоугольниками заполняется «перевернутыми» желтыми многоугольниками.

Есть и периодическое замощение плоскости теми же девятиугольниками (рис. 13). Придумать много-



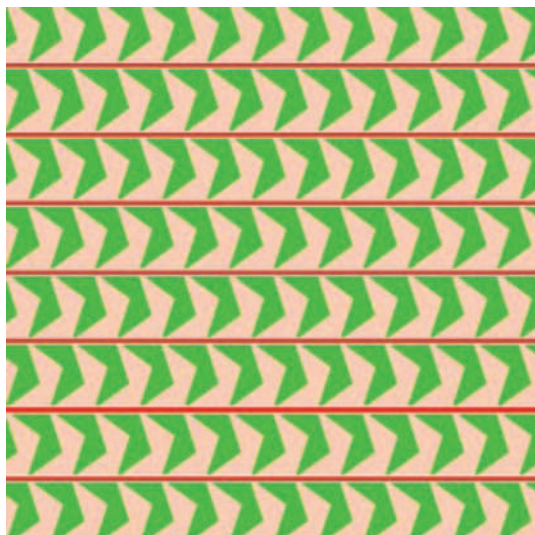


Рис. 9

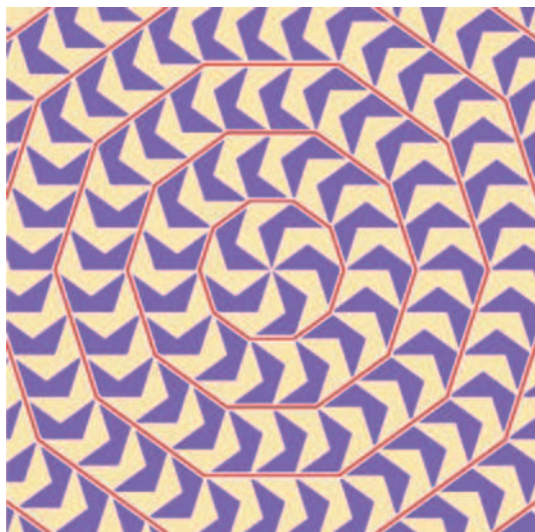


Рис. 10

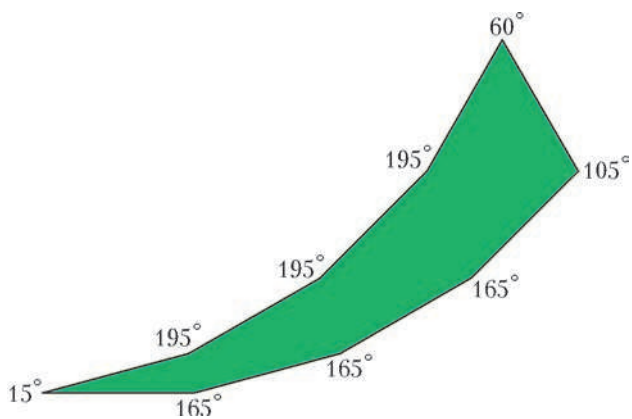


Рис. 11

угольник, который допускал бы только неперидические замощения, до сих пор никому не удалось!

**Знаете ли вы, что:**

**1.** Плоскость можно разбить на одинаковые невыпуклые семиугольники.

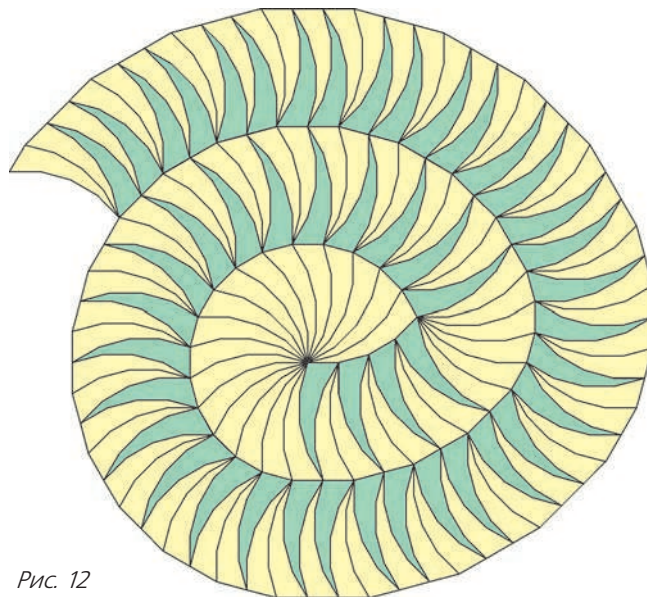


Рис. 12

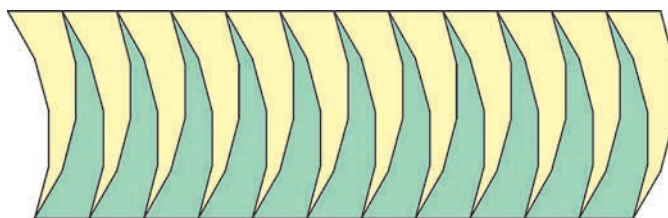


Рис. 13

**2.** Если плоскость разбита на выпуклые семиугольники, то среди них найдется либо сколь угодно маленький, либо сколь угодно большой.

**3.** Есть пример разбиения пространства на равные выпуклые 38-гранники, но никто не знает, можно ли число 38 заменить большим.

**4.** Существует набор из трех выпуклых многоугольников, которым можно замостить плоскость бесконечным числом способов, но каждый из этих способов является неперидическим. При этом никто не знает, можно ли число 3 уменьшить — это открытая проблема. В пространстве задача решена — существует многогранник, которым можно замостить все пространство, но только неперидически.

**5.** Неизвестно, какими тетраэдрами можно замостить все пространство.

**6.** Есть 3 типа выпуклых шестиугольников и 14 типов выпуклых пятиугольников, которыми можно замостить всю плоскость. Про невыпуклые проблема открыта.

**7.** Никто не знает, существует ли алгоритм, который получает на входе многоугольник, а на выходе говорит, можно ли этим многоугольником замостить всю плоскость.

*С.Маркелов*

Комментарии к статье можно послать автору по адресу [markelov@mcsme.ru](mailto:markelov@mcsme.ru).

Материалы этой статьи доступны по адресу [www.mcsme.ru/~markelov](http://www.mcsme.ru/~markelov). Любой желающий может копировать статью или ее часть любым способом без разрешения автора.



# Вневписанная окружность

А.БЛИНКОВ, Ю.БЛИНКОВ

НАЧНЕМ С ПРОСТОГО ВОПРОСА, КОТОРЫЙ МОЖЕТ ВОЗНИКНУТЬ УЖЕ НА НАЧАЛЬНОМ ЭТАПЕ ИЗУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ.

Пусть на плоскости заданы три прямые, которые попарно пересекаются в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$  (рис.1,а). Вопрос: сколько существует точек, равноудаленных от этих прямых?

Многие школьники дают немедленный ответ: конечно одна, а именно, центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . Как часто бывает в подобных случаях, этот ответ неверен.

Действительно, рассмотрим, например, биссектрисы внешних углов  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  (рис.1,б). Так как сумма углов, образованных ими со стороной  $BC$ , меньше, чем  $180^\circ$ , то эти биссектрисы пересекутся в некоторой точке  $Q$ . Тогда точка  $Q$  равноудалена от прямых  $AB$ ,  $AC$  и  $BC$ . Аналогично, рассматривая другие пары внешних углов треугольника  $ABC$ , получим еще две точки, обладающие требуемым свойством.

Таким образом, помимо центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , существуют, по крайней мере, еще три точки, равноудаленные от заданных прямых. Каждая из этих точек является центром окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других сторон. Такие окружности называют вневписанными для данного треугольника  $ABC$ .

### Упражнения

1. Докажите, что других точек, равноудаленных от прямых  $AB$ ,  $AC$  и  $BC$ , не существует (т.е. их ровно четыре).
2. Докажите, что точка  $Q$  лежит на биссектрисе угла  $BAC$  (см. рис.1,б).
3. Вычислите угол  $BQC$ , если  $\angle BAC = \alpha$ .

Посмотрим, как могут применяться изложенные факты.

**Задача 1.** Постройте треугольник  $ABC$ , зная положение трех точек  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ , являющихся центрами вневписанных окружностей треугольника  $ABC$ .

**Решение.** Пусть искомым треугольник  $ABC$  построен. Центр каждой его вневписанной окружности лежит на пересечении соответствующих биссектрис внутреннего и внешнего углов. Проведя их, получим точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  (рис.2).

Так как биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой, то вершины  $A$ ,  $B$  и  $C$  искомого треугольника лежат на сторонах треугольника  $A_1B_1C_1$ . Кроме того, так как биссектриса внешнего угла треугольника перпендикулярна биссектрисе внутреннего угла, проведенной из той же вершины, то  $A_1A \perp B_1C_1$ ,  $B_1B \perp A_1C_1$ ,  $C_1C \perp A_1B_1$ .

Таким образом, решение задачи сводится к построению треугольника  $A_1B_1C_1$  и его высот.

Используя результат упражнения 3, нетрудно доказать, что задача имеет решение (причем единственное) тогда и только тогда, когда треугольник  $A_1B_1C_1$  – остроугольный.

Это позволяет сформулировать полезный факт: вершины остроугольного треугольника являются центрами вневписанных окружностей для его ортотреугольника (треугольника, образованного основаниями высот).

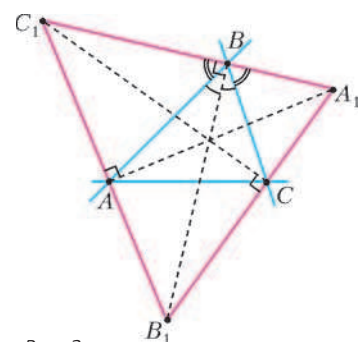


Рис. 2

Геометрические конфигурации, связанные с вневписанными окружностями, очень содержательны и встречаются во многих задачах. Рассмотрим основные факты, связанные с такими конфигурациями.

Пусть вневписанная окружность касается стороны  $BC$  треугольника  $ABC$  в точке  $M$ , а продолжений сторон  $AB$  и  $AC$  – в точках  $P$  и  $T$  соответственно. Вписанная в этот треугольник окружность касается сторон  $BC$ ,  $AB$  и  $AC$  в точках  $K$ ,  $L$  и  $N$  соответственно (рис.3). Докажем следующие равенства:

1.  $BK = p - b$ , где  $p$  – полупериметр треугольника  $ABC$ ,  $b$  – длина стороны  $AC$ ;
2.  $AP = p$ ;
3.  $BK = CM$ , т.е. точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной треугольника симметричны относительно середины этой стороны.

Действительно, из равенства отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки, получим:  $AN = AL$ ,  $BK = BL$  и  $CN = CK$ . Сумма этих шести отрезков составляет периметр треугольника  $ABC$ , поэтому  $AN + BK + CN = p$ . Учитывая, что  $AN + CN = b$ , получаем равенство 1.

Применяя эту же теорему об отрезках касательных к другой окружности, получим:  $AP = AT$ ,  $BM = BP$  и  $CM = CT$ . Тогда  $P_{ABC} = AB + AC + BC = AB + AC + BM + CM = AB + AC + AP + AT + BC = AB + AC + 2AP$ , откуда следует равенство 2.

Так как  $AT = p$ , то и  $CM = CT = AT - AC = p - b = BK$ . Таким образом, доказано равенство 3.

**Упражнение 4.** Пользуясь обозначениями рисунка 3, докажите, что: а)  $PL = BC$ ; б) прямая  $AM$  делит периметр треугольника  $ABC$  пополам.

Теперь получим соотношения, связывающие радиусы вписанной и вневписанной окружностей. Для этого (временно убрав обозначения некоторых точек) дополним рисунок 3, отметив центры вписанной и вневписанной окружностей – точки  $I$  и  $Q$  соответственно – и проведя радиусы  $IL = r$  и  $QP = r_a$  этих окружностей (рис.4). Тогда прямоугольные треугольники  $A_1IL$  и  $A_1QP$  подобны (так как у них общий острый угол), поэтому  $\frac{IL}{QP} = \frac{AL}{AP} = \frac{AI}{AQ}$ . Учитывая, что  $AL = p - a$  (см. равенство 1) и  $AP = p$  (см. равенство 2), получим,

что  $\frac{r}{r_a} = \frac{p - a}{p}$ . Из этого соотношения, в частности, можно получить формулу, выражающую площадь треугольника

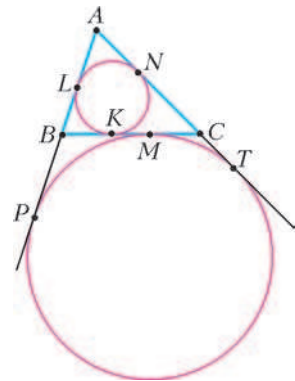


Рис. 3

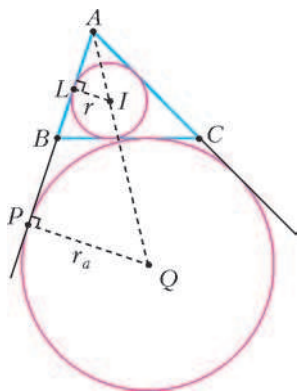


Рис. 4

через радиус вневписанной окружности. Действительно, так как  $S_{ABC} = pr$ , то  $S_{ABC} = (p-a)r_a$ .

Тем самым мы доказали еще два полезных равенства:

$$4. \frac{r}{r_a} = \frac{p-a}{p};$$

$$5. S_{ABC} = (p-a)r_a.$$

**Упражнение 5.** Докажите, что в любом треугольнике выполняются равенства:

$$a) r_a = ptg \frac{\alpha}{2}, \text{ где } \alpha - \text{ угол}$$

треугольника, противолежащий стороне  $a$ ;

$$б) r_a : r_b : r_c = \frac{1}{p-a} : \frac{1}{p-b} : \frac{1}{p-c};$$

$$в) \frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c};$$

$$г) S = \sqrt{rr_a r_b r_c}.$$

Еще один интересный факт можно получить, решив следующую задачу.

**Задача 2.** Продолжение биссектрисы угла  $A$  треугольника  $ABC$  пересекает описанную около него окружность в точке  $M$ ;  $I$  – центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ ;  $Q$  – центр вневписанной окружности, касающейся стороны  $BC$ . Докажите, что точки  $B, C, I$  и  $Q$  лежат на окружности с центром  $M$ .

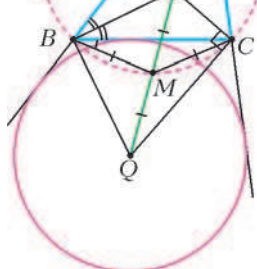


Рис. 5

**Решение.** По условию,  $I$  – точка пересечения биссектрис треугольника  $ABC$ , а  $Q$  – точка пересечения биссектрис внешних углов при вершинах  $B$  и  $C$  (рис.5). Так как  $\angle IBQ = \angle ICQ = 90^\circ$ , то точки  $B$  и  $C$  лежат на окружности с диаметром  $IQ$ .

Пусть  $\angle BAC = \alpha$ ;  $\angle ABC = \beta$ . Угол  $\angle BIM$  – внешний для треугольника  $AIB$ , значит,  $\angle BIM = \angle IAB + \angle IBA = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ .

Кроме того,  $\angle IBM = \angle IBC + \angle MBC = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$ , так как  $\angle MBC = \angle MAC = \frac{1}{2}\beta$  (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности, описанной около треугольника  $ABC$ ). Следовательно,  $\angle BIM = \angle IBM$ , т.е.  $MI = MB$ .

Аналогично получим, что  $MI = MC$ , значит,  $M$  – центр окружности, описанной около треугольника  $BIC$ , а точка  $Q$  лежит на этой окружности, т.е. точки  $B, C, I$  и  $Q$  лежат на окружности с центром  $M$ .

Отметим, что равенство  $MB = MC = MI$ , являющееся следствием доказанного утверждения, иногда называют *теоремой о «трилистнике»*.

Далее рассмотрим несколько «классических» задач, в которых вневписанная окружность выступает в роли «вспомогательной».

**Задача 3.** Постройте прямую, проходящую через данную точку и отсекающую от данного угла треугольник с заданным периметром.

**Решение.** Пусть на плоскости даны угол  $O$  и точка  $M$ .

Предположим, что искомая прямая  $AB$  построена, т.е. треугольник  $AOB$  имеет заданный периметр  $P$ . Проведем окружность, касающуюся сторон данного угла и отрезка  $AB$  (рис.6). Пусть  $K$  и  $L$  – точки касания этой окружности со сторонами угла, тогда  $OK = OL = \frac{1}{2}P$  (см. равенство 2).

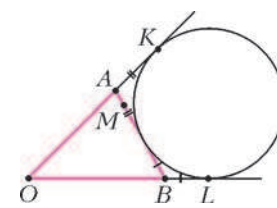


Рис. 6

Таким образом, решение задачи сводится к построению вспомогательного равнобедренного треугольника  $KOL$  (сторону  $KL$  которого можно не проводить) и окружности, касающейся сторон данного угла в точках  $K$  и  $L$ . После этого через точку  $M$  проводится касательная  $AB$  к этой окружности.

Отметим, что в зависимости от расположения точки  $M$  задача может иметь два решения, одно решение или не иметь решений.

**Задача 4.** В треугольнике  $ABC$  с углом  $B$ , равным  $120^\circ$ , проведены биссектрисы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ . а) Докажите, что треугольник  $A_1B_1C_1$  – прямоугольный. б) Найдите угол  $B_1C_1C$ .

**Решение.** а) На продолжении стороны  $AB$  (за точку  $B$ ) отметим точку  $D$ , тогда  $\angle DBC = 60^\circ$ , т.е. луч  $BC$  – биссектриса угла  $DBB_1$  (рис.7). Так как  $AA_1$  – биссектриса угла

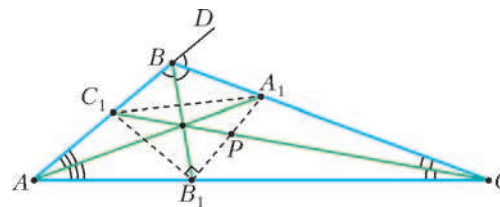


Рис. 7

$BAC$ , то  $A_1$  – центр окружности, касающейся  $BB_1$ ,  $BD$  и  $B_1C$ . Такая окружность является вневписанной для треугольника  $ABB_1$ , поэтому  $B_1A_1$  – биссектриса угла  $BB_1C$ . Аналогично,  $C_1$  – центр вневписанной окружности для треугольника  $CBB_1$ , поэтому  $B_1C_1$  – биссектриса угла  $BB_1A$ . Следовательно,  $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$ .

б) Из доказанного следует, что точка  $P$  пересечения  $CC_1$  и  $B_1A_1$  является пересечением биссектрис треугольника  $BCB_1$ . Следовательно,

$$\angle B_1PC = 180^\circ - (\angle PB_1C + \angle PCB_1) =$$

$$= 180^\circ - \frac{\angle BB_1C + \angle BCB_1}{2} = 120^\circ.$$

Так как  $\angle B_1PC$  – внешний для прямоугольного треугольника  $PB_1C_1$ , то  $\angle B_1C_1C = \angle B_1PC - 90^\circ = 30^\circ$ .

**Задача 5.** На стороне  $BC$  квадрата  $ABCD$  выбрана точка  $M$ , а на стороне  $CD$  – точка  $K$  так, что угол  $MAK$  равен  $45^\circ$ . Докажите, что расстояние от вершины  $A$  до прямой  $MK$  равно стороне квадрата.

**Решение.** Пусть точка  $P$  – основание перпендикуляра, опущенного из вершины  $A$  на прямую  $MK$  (рис.8). Проведем диагональ  $AC$  квадрата и рассмотрим треугольник  $CMK$ . Точка  $A$  лежит на биссектрисе угла  $C$  этого треугольника и  $\angle MAK = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle C$ , следовательно,  $A$  является центром вневписанной окружности треугольника  $CMK$  (см. упражнение 3). Тогда  $AP = AB = AD$  (радиусы этой окружности).

Отметим, что из доказанного следует также, что периметр треугольника  $CMK$  равен половине периметра квадрата.

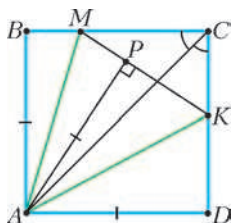


Рис. 8

Заметим также, что эту задачу можно было решить и другим способом: рассмотрев образ треугольника  $ADK$  при повороте с центром  $A$  на угол  $90^\circ$  (против часовой стрелки).

**Упражнение 6.** Докажите обратное утверждение: если отрезок  $MK$  отсекает от квадрата  $ABCD$  треугольник  $CMK$ , периметр которого равен половине периметра квадрата, то угол  $MAK$  равен  $45^\circ$  (см. рис.8).

Рассмотрим еще несколько любопытных фактов, связанных с вневписанными окружностями. Вернувшись к рисунку 4, отметим, что равенство 4 можно было получить не из подобия треугольников, а из того, что при гомотетии с центром  $A$  и коэффициентом  $k = \frac{AQ}{AI}$  вневписанная окружность переходит во вписанную. Эта же гомотетия позволяет заметить важное утверждение: пусть точка  $F$  диаметрально противоположна точке  $K$  касания вписанной окружности со стороной  $BC$  (рис.9). Тогда точки  $A, F$  и  $M$  лежат на одной прямой.

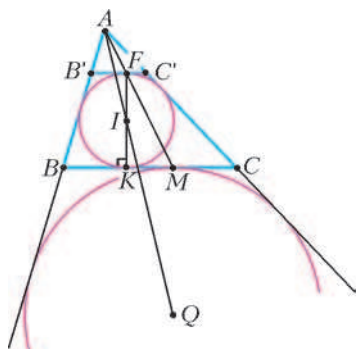


Рис. 9

Действительно, образом касательной  $BC$  к вневписанной окружности при указанной гомотетии является касательная  $B'C'$  к вписанной окружности, причем  $B'C' \parallel BC$  (см. рис.9). Поэтому образом точки  $M$  является точка касания  $B'C'$  и вписанной окружности, которая совпадает с точкой  $F$ , поскольку диаметр  $FK$ , перпендикулярный  $BC$ , перпендикулярен также и  $B'C'$ .

**Упражнение 7.** На рисунке 9 проведем луч  $AK$ , который вторично пересечет вневписанную окружность в точке  $E$ . Докажите, что  $ME \perp BC$ .

**Задача 6.** Докажите, что середина высоты треугольника, центр вписанной в него окружности и точка касания стороны, на которую опущена высота, с соответствующей вневписанной окружностью лежат на одной прямой.

**Решение.** Рассмотрим треугольник  $ABC$ , в котором  $AH$  – высота, точка  $D$  – ее середина, точки  $I$  и  $Q$  – центры вписанной и вневписанной (касающейся стороны  $BC$ ) окружностей соответственно,  $K$  и  $M$  – точки касания этих окружностей со стороной  $BC$  (рис.10).

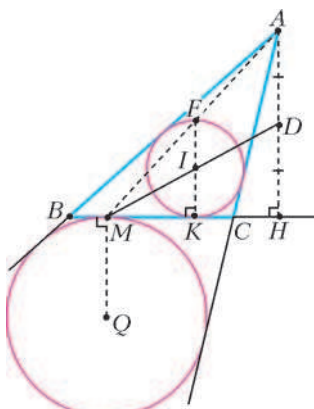


Рис. 10

Проведем  $KF$  – диаметр вписанной окружности, тогда точки  $A, F$  и  $M$  лежат на одной прямой. Так как  $KF \parallel AH$ , то медиана  $MD$  треугольника  $AMH$  проходит через середину отрезка  $KF$ , т.е. содержит точку  $I$ .

**Упражнения**

**8.** Докажите, что в прямоугольном треугольнике центр вписанной окружности, середина катета и точка касания

другого катета с вневписанной окружностью лежат на одной прямой.

**9.** Докажите, что точки  $D, K$  и  $Q$  (см. рис.10) лежат на одной прямой.

Эффективность применения некоторых из полученных ранее соотношений можно показать еще на одном ярком примере. Известно, что если в треугольник  $ABC$  вписана окружность, касающаяся его сторон в точках  $A', B'$  и  $C'$ , то отрезки  $AA', BB'$  и  $CC'$  пересекаются в одной точке (называемой точкой Жергонна; рис.11,а). Для доказательства этого утверждения достаточно использовать то, что  $AB' = AC', BC' = BA'$  и  $CA' = CB'$ . Тогда  $\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1$ , откуда по теореме Чевы и следует, что указанные отрезки пересекаются в одной точке.

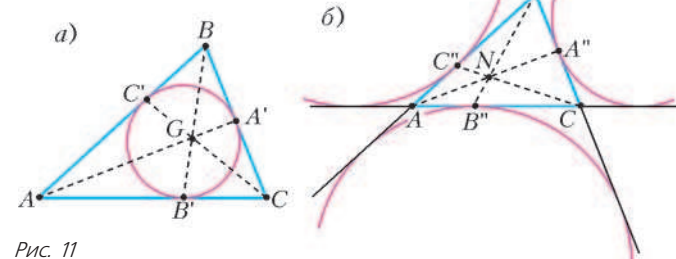


Рис. 11

Аналогичное утверждение верно и для точек касания вневписанных окружностей со сторонами треугольника, т.е. если  $A'', B''$  и  $C''$  – точки касания вневписанных окружностей со сторонами треугольника  $ABC$ , то отрезки  $AA'', BB''$  и  $CC''$  пересекаются в одной точке (называемой точкой Нагеля; рис.11,б).

Для того чтобы свести доказательство этого утверждения к предыдущему, достаточно опять использовать теорему Чевы и доказанное равенство 3, заменяя в каждом случае расстояние от вершины до точки касания стороны и вневписанной окружности на равное ему расстояние от вершины до точки касания этой стороны и вписанной окружности.

Приведенный пример иллюстрирует часто встречающуюся двойственность утверждений, касающихся вписанной и вневписанной окружностей.

**Упражнение 10.** Пользуясь обозначениями рисунка 3, докажите, что прямые  $AM, BT$  и  $CP$  пересекаются в одной точке.

Вневписанная окружность часто «всплывает» и при изучении стереометрии. Рассмотрим, например, треугольник  $ABC$  и точку  $P$ , не лежащую в его плоскости и равноудаленную от прямых  $AB, BC$  и  $AC$ . Пусть точка  $Q$  – ортогональная проекция точки  $P$  на плоскость  $ABC$ . Каковую роль играет точка  $Q$  по отношению к треугольнику  $ABC$ ?

И в этом случае (так же, как и в планиметрии) некоторые школьники дают неверный ответ: « $Q$  – центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ ».

На самом деле, из условия следует только, что точка  $Q$  равноудалена от прямых, содержащих стороны треугольника (по теореме о трех перпендикулярах и по свойству равных наклонных, проведенных к плоскости из одной точки). Поэтому точка  $Q$  является либо центром окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , либо центром одной из вневписанных окружностей этого треугольника (рис.12,а,б).

**Упражнения**

**11.** Для треугольной пирамиды  $PABC$  докажите равносильность утверждений а)–г):



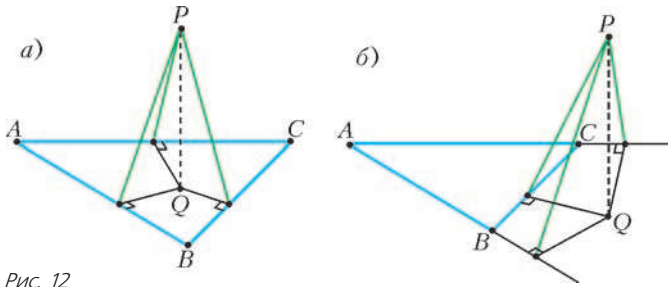


Рис. 12

а) Ортогональной проекцией вершины  $P$  на плоскость  $ABC$  является либо центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , либо центр одной из вневписанных окружностей этого треугольника.

б) Высоты боковых граней, проведенные из вершины  $P$ , равны.

в) Плоскости боковых граней одинаково наклонены к плоскости основания.

г) Плоскости боковых граней образуют одинаковые углы с высотой пирамиды.

12. В основании пирамиды – правильный треугольник со стороной 1. Каждая боковая грань пирамиды образует с основанием угол  $60^\circ$ . Найдите высоту пирамиды, если известно, что ее длина больше, чем 0,5.

13. Докажите, что в треугольной пирамиде, у которой боковые грани образуют одинаковый угол  $\varphi$  с плоскостью основания, площадь боковой поверхности можно вычислить по формуле:

$$S_{\text{бок}} = \frac{pr}{\cos \varphi}$$
, где  $p$  – полупериметр основания,  $r$  – либо радиус окружности, вписанной в основание, либо радиус вневписанной окружности.

В заключение выразим надежду, что рассмотренные утверждения, факты и соотношения, а также упражнения и разобранные задачи, позволят читателю успешно справиться с циклом задач, которые мы предлагаем для самостоятельного решения.

#### Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что треугольник является прямоугольным тогда и только тогда, когда:

а) радиус одной из вневписанных окружностей равен полупериметру треугольника;

б) площадь треугольника равна произведению радиусов вписанной и одной из вневписанных окружностей;

в) площадь треугольника равна произведению двух радиусов вневписанных окружностей.

2. Отрезок, отличный от диагонали, разбивает квадрат на два многоугольника, в каждый из которых вписана окружность. Найдите длину этого отрезка, если радиусы окружностей равны  $R$  и  $r$  ( $R > r$ ).

3. Постройте треугольник по углу, высоте, проведенной из вершины этого угла, и периметру.

4. В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $AD$  и  $BE$ . Оказалось, что  $DE$  – биссектриса треугольника  $ADC$ . Найдите угол  $BAC$ .

5. Углы, прилежащие к одной из сторон треугольника, равны  $15^\circ$  и  $30^\circ$ . Какой угол образует с этой стороной проведенная к ней медиана?

6. Точка  $E$  на стороне  $AD$  квадрата  $ABCD$  такова, что  $\angle AEB = 60^\circ$ . Биссектриса угла  $AEB$ , отразившись от стороны  $AD$ , пересекает отрезок  $BE$  в точке  $F$ . Докажите, что точка  $F$  лежит на диагонали квадрата.

7. На полосу наложился квадрат, сторона которого равна ширине полосы, так, что его граница пересекает границы полосы в четырех

точках. Докажите, что две прямые, проходящие крест-накрест через эти точки, пересекаются под углом  $45^\circ$ .

8. Дан треугольник  $ABC$ . На лучах  $AB$  и  $AC$  (вне треугольника) построены точки  $A_1$  и  $A_2$  соответственно так, что  $BA_1 = CA_2 = BC$ .  $A_0$  – точка пересечения отрезков  $BA_2$  и  $CA_1$ . Докажите, что прямая, проходящая через  $A_0$  перпендикулярно прямой  $BC$ , содержит центр вневписанной окружности треугольника  $ABC$ .

9. Окружность с центром  $D$  проходит через вершины  $A, B$  и центр  $Q$  вневписанной окружности треугольника  $ABC$ , касающейся его стороны  $BC$ . Докажите, что точки  $A, B, C$  и  $D$  лежат на одной окружности.

10.  $ABCD$  – параллелограмм. Вневписанные окружности треугольников  $ABC$  и  $ACD$  касаются сторон  $BC$  и  $CD$  соответственно. Докажите, что точки их касания с прямой  $AC$  совпадают.

11. Дан параллелограмм  $ABCD$ . Вневписанная окружность треугольника  $ABD$  касается продолжений сторон  $AD$  и  $AB$  в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что точки пересечения отрезка  $MN$  со сторонами  $BC$  и  $CD$  лежат на вписанной окружности треугольника  $BCD$ .

12. Постройте четырехугольник  $ABCD$  по двум сторонам  $AB$  и  $AD$  и двум углам  $B$  и  $D$ , если известно, что в него можно вписать окружность.

13. а) Докажите, что произведение расстояний от вершины треугольника до центра вписанной окружности и до центра соответствующей этой вершине вневписанной окружности равно произведению сторон треугольника, сходящихся в этой вершине.

б) Через две вершины треугольника и центр вписанной в него окружности проведена окружность. Докажите, что отрезок касательной, проведенной к этой окружности из третьей вершины, есть среднее геометрическое между сторонами треугольника, сходящимися в этой вершине.

14. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник, касается катета  $BC$  и гипотенузы  $AB$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Вневписанная окружность, касающаяся катета  $BC$ , касается продолжения катета  $AC$  в точке  $T$ . Докажите, что точки  $P, Q$  и  $T$  лежат на одной прямой.

15. а) Через середину  $D$  стороны  $BC$  треугольника  $ABC$  и центр  $I$  окружности, вписанной в этот треугольник, проведена прямая, пересекающая высоту  $AH$  в точке  $E$ . Докажите, что отрезок  $AE$  равен радиусу вписанной окружности.

б) Биссектриса угла  $A$  пересекает окружность, описанную около треугольника  $ABC$ , в точке  $W$ . Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается стороны  $BC$  в точке  $K$ ,  $P$  – точка пересечения прямой  $WK$  с высотой  $AH$ . Докажите, что отрезок  $HP$  равен радиусу вписанной окружности.

16. а) Через середину  $D$  стороны  $BC$  треугольника  $ABC$  и центр  $Q$  вневписанной окружности, касающейся этой стороны, проведена прямая, пересекающая высоту  $AH$  в точке  $T$ . Докажите, что отрезок  $AT$  равен радиусу этой вневписанной окружности.

б) Биссектриса угла  $A$  пересекает окружность, описанную около треугольника  $ABC$ , в точке  $W$ ,  $M$  – точка касания вневписанной окружности со стороной  $BC$ ,  $Z$  – точка пересечения прямой  $WM$  с высотой  $AH$ . Докажите, что отрезок  $HZ$  равен радиусу этой вневписанной окружности.

17. Вневписанная окружность треугольника  $ABC$  касается его стороны  $BC$  в точке  $K$ , а продолжения стороны  $AB$  – в точке  $L$ . Другая вневписанная окружность касается продолжений сторон  $AB$  и  $AC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Прямые  $KL$  и  $MN$  пересекаются в точке  $X$ . Докажите, что  $CX$  – биссектриса угла  $ACN$ .

18. Равнобедренные треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$  лежат в параллельных плоскостях. Известно, что точка  $C'$  равноудалена от вершин треугольника  $ABC$ , а каждая из точек  $B'$  и  $C'$  находится на таком же расстоянии от прямых  $AB, BC$  и  $AC$ . Найдите отношение площадей данных треугольников.

(Продолжение см. на с. 45)

# Прыгучий шарик

В. МАЙЕР

**Ш**ИРОКО ИЗВЕСТЕН ОПЫТ, В КОТОРОМ ДВА ЛЕЖАЩИХ друг на друге шарика одновременно падают на твердую поверхность, при этом после удара верхний шарик меньшей массы подскакивает на высоту, превышающую ту, с которой он начал падать. Рассмотрим теорию этого явления в системах отсчета, связанных с поверхностью Земли и со свободно падающим в поле тяжести Земли массивным шариком.

Мы привыкли систему отсчета, связанную с поверхностью Земли, считать *инерциальной* и все механические задачи решать именно в этой системе отсчета. На самом деле, безупречно доказать инерциальность какой бы то ни было системы отсчета невозможно, а систему отсчета, связанную с Землей, можно считать инерциальной лишь с известной степенью приближения.

Мы уверенно называем *неинерциальной* систему отсчета, связанную со свободно падающим в поле тяжести Земли телом и, следовательно, движущуюся относительно нее с ускорением свободного падения. (В действительности, как раз такая система отсчета, если она ограничена небольшими размерами, и является инерциальной, точнее – локально инерциальной. Но это – разговор особый.)

Попробуем показать, насколько эффективно бывает использование неинерциальной системы отсчета, связанной со свободно падающим телом.

**Эксперимент.** Возьмите каучуковый шарик диаметром 30–50 мм и шарик для пинг-понга. В каучуковом шарике сверлом сделайте углубление и вставьте в него полиэтиленовый стержень от шариковой ручки. В шарике для пинг-понга просверлите диаметрально отверстия диаметром на 2–3 мм больше, чем диаметр стержня. Вместо пинг-понгового шарика можно использовать второй каучуковый шарик, масса которого значительно меньше массы первого; в таком случае в нем нужно просверлить сквозное отверстие. Наденьте шарик для пинг-понга на стержень и обрежьте стержень так, чтобы удобно было брать его пальцами (рис.1).

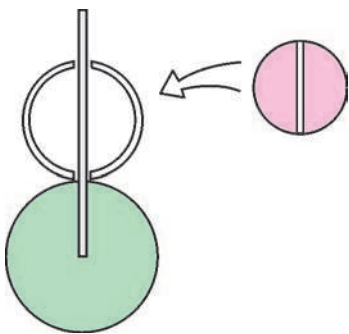


Рис. 1

Теперь – опыты. С высоты 10–20 см на твердую массивную столешницу опустите снятый со стержня пинг-понговый шарик. Он отскочит и поднимется почти на ту же высоту, с которой падал. Возьмите за стержень каучуковый шарик и опустите его с той же высоты, что и шарик для пинг-понга, – он отскочит и поднимется почти до той же высоты, с которой падал. Результаты этих опытов очевидны: шарики испытывают близкое к упругому соударению с поверхностью стола, поэтому энергии почти не теряют



Рис. 2

и подскакивают на высоту, лишь чуть-чуть меньшую той, с которой падали.

Снова наденьте шарик для пинг-понга на стержень, возьмите выступающий конец стержня пальцами и опустите оба шарика с той же высоты, что и раньше (рис.2). Вы с изумлением обнаружите, что пинг-понговый шарик при этом подскакивает на значительно бóльшую высоту, чем раньше!

В чем дело? Нежели легкий шарик приобретает откуда-то дополнительную энергию? Давайте разберемся.

**Явление в системе отсчета, связанной с поверхностью Земли.** Шарики разной массы, практически не взаимодействуя друг с другом, подлетают с одной и той же скоростью  $\vec{v}$  к твердой горизонтальной поверхности (рис.3). Первый

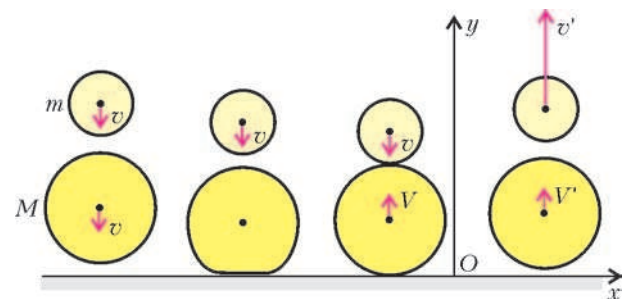


Рис. 3

(нижний) шарик, ударившись о поверхность, деформируется и на мгновение останавливается. Считая удар упругим, получаем, что после удара массивный шарик отскакивает со скоростью  $\vec{V}$ , по модулю равной скорости  $\vec{v}$ , которой он обладал в начале удара:  $V = v$ . В этот момент легкий шарик все еще продолжает падать вниз с прежней скоростью  $\vec{v}$ .

Таким образом, в нашей модели упруго взаимодействуют два шарика с массами  $M$  и  $m$ , движущиеся навстречу друг другу со скоростями  $\vec{V}$  и  $\vec{v}$  соответственно. Обозначим скорости первого и второго шариков после соударения  $\vec{V}'$  и  $\vec{v}'$  соответственно. По закону сохранения импульса система тел после взаимодействия имеет тот же импульс, что и до

взаимодействия:

$$M\vec{V} + m\vec{v} = M\vec{V}' + m\vec{v}'.$$

Переходя от векторов к их проекциям на вертикальную ось  $Oy$ , получаем

$$(M - m)v = MV' + mv'$$

(здесь индексы  $y$  у проекций скоростей опущены). Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{MV'^2}{2} + \frac{mv'^2}{2},$$

или, учитывая, что  $V = v$ ,

$$(M + m)v^2 = MV'^2 + mv'^2.$$

Исключим из формул скорость  $V'$ . Для этого выразим эту скорость из закона сохранения импульса:

$$V' = \frac{(M - m)v - mv'}{M} = v - \frac{m}{M}(v + v')$$

и возведем ее в квадрат:

$$V'^2 = v^2 - 2\frac{m}{M}(v + v')v + \frac{m^2}{M^2}(v + v')^2.$$

Масса шарика для пинг-понга значительно меньше массы каучукового шарика, поэтому членом, содержащим  $m^2/M^2$ , можно пренебречь по сравнению с остальными членами последней формулы. Тогда, подставляя значение  $V'^2$  в закон сохранения энергии, получаем

$$(M + m)v^2 = Mv^2 - 2m(v + v')v + mv'^2,$$

или

$$3v^2 = -2vv' + v'^2.$$

Добавив слева и справа в последнем равенстве по  $v^2$ , находим

$$4v^2 = (v - v')^2, \text{ или } 2v = v' - v.$$

Таким образом, приходим к заключению, что скорость шарика меньшей массы после соударения в три раза больше скорости этого шарика до соударения:

$$v' = 3v.$$

Кинетическая энергия тела, упавшего с высоты  $h$ , равна начальной потенциальной энергии:  $mv^2/2 = mgh$ . Аналогичное равенство можно записать для тела, поднявшегося на высоту  $h'$  после удара о столешницу:  $mv'^2/2 = mgh'$ . Тогда окончательно получаем, что высота, на которую подскокивает легкий шарик, в 9 раз больше высоты, с которой он падает:

$$\frac{h'}{h} = \frac{v'^2}{v^2} = 9.$$

Конечно, такого большого подскока мы не увидим. Во-первых, потому – не будем забывать этого – что наш результат приближенный, так как при выводе мы допустили упрощения. Во-вторых, потому что удары, конечно, далеко не упругие.

Большого эффекта можно добиться, если вместо рекомендованных выше шариков взять стальные: один диаметром 30–50 мм, а второй диаметром 5–10 мм. В этом случае высота подскока маленького шарика будет приближаться к вычисленному значению. Однако сам опыт, как нетрудно сообразить, станет гораздо более капризным.

**Явление в системе отсчета, связанной со свободно падающим шариком.** Вначале еще раз напомним, как происходит явление в системе отсчета  $xOy$ , связанной с поверхностью Земли. Для удобства векторы скоростей, совпадающие

по направлению с осью  $y$ , будем считать положительными, а противоположные ей – отрицательными.

Подлетая к поверхности стола, шарики имеют одинаковые скорости  $-v$  (рис.4,а). При ударе нижнего шарика о стол он испытывает упругое соударение и отскакивает вверх со

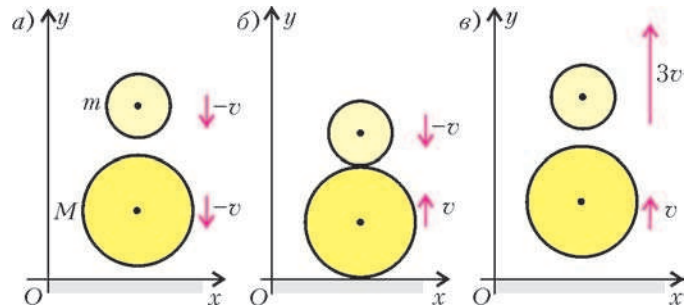


Рис. 4

скоростью  $v$ , а верхний шарик в этот момент продолжает двигаться со скоростью  $-v$  относительно стола (рис.4,б). Далее верхний шарик сталкивается с движущимся навстречу ему нижним. Проведенный выше расчет показывает, что если считать это соударение упругим, а массу нижнего шарика существенно превышающей массу верхнего, то после соударения верхний шарик приобретает скорость, примерно равную  $3v$  (рис.4,в).

Теперь это же явление рассмотрим в системе отсчета  $x'O'y'$ , связанной с нижним шариком. Подлетая к столу, оба шарика в этой системе отсчета имеют нулевую скорость, а стол движется навстречу им со скоростью  $v$  (рис.5,а). После упругого удара стола по нижнему шарик у стола получает скорость  $-v$ , а верхний шарик, который продолжает двигаться относительно стола со скоростью  $-v$ , приобретает

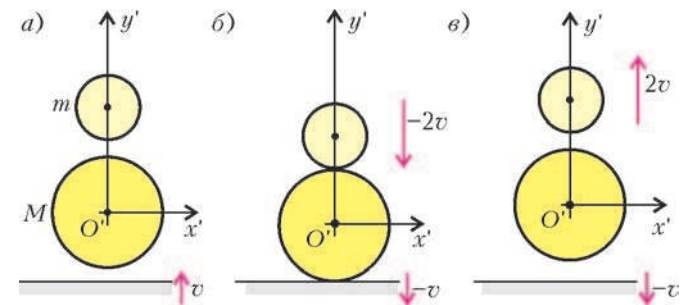


Рис. 5

скорость  $-2v$  (рис.5,б). С этой скоростью он налетает на массивный нижний шарик и после упругого соударения с ним получает скорость, примерно равную  $2v$ , если  $m \ll M$  (рис.5,в). Значит, относительно стола, который движется со скоростью  $-v$ , верхний шарик после удара начнет двигаться со скоростью приблизительно  $3v$  и подскочит на высоту, примерно в 9 раз превышающую ту, с которой он начал падать. Именно это и требовалось доказать.

Заметим, что решение нашей задачи в неинерциальной системе отсчета, связанной со свободно падающим шариком, оказалось гораздо проще решения в инерциальной системе отсчета, связанной с поверхностью Земли.

**Рекомендация.** Проведите такой опыт в школе и выясните, кто из ваших товарищей сможет сразу объяснить явление, быстро перейдя в «страшную» неинерциальную систему отсчета, движущуюся с ускорением свободного падения. Если такие ребята обнаружатся, значит, дела с физикой в вашей школе обстоят нормально.



# Разрезания на треугольники

А. СПИВАК

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР (1707–1783) БЫЛ ПЕРВЫМ, КТО СТОЛКНУЛСЯ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ, НЫНЕ НОСЯЩЕЙ ИМЯ ЭЖЕНА ШАРЛЯ КАТАЛАНА (1814–1894). Он спросил себя, сколькими способами можно выпуклый  $n$ -угольник разрезать на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри него. Ответ для  $n = 3$  тривиален: один способ, так как никаких диагоналей проводить не надо. В четырехугольнике можно провести любую из двух диагоналей, так что способов два. В пятиугольнике – из любой вершины две диагонали, 5 способов.

При  $n = 6$  – первый не вполне очевидный ответ: 14 способов (рис. 1); чтобы не запутаться, сторона  $BC$  выделена и отдель-

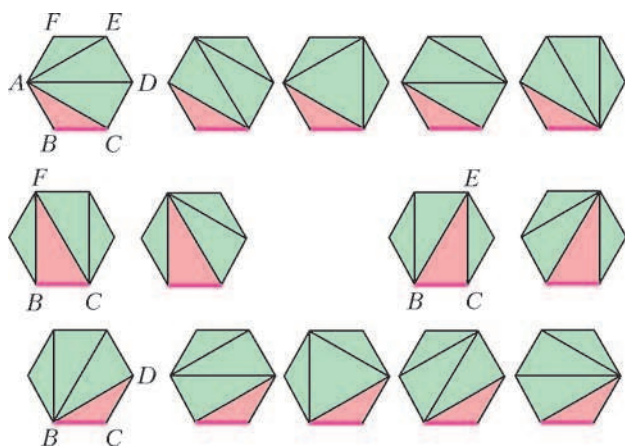


Рис. 1

но нарисованы разрезания, в которых к ней примыкают соответственно треугольники  $BSC$ ,  $BSCF$ ,  $BCE$  и  $BCD$ .

В статье «Числа Каталана» («Квант» № 3 за 2004 год) приведено много других определений этой последовательности и тремя способами выведена явная формула

$$P_n = \frac{(2n-5)!!}{(n-1)!} \cdot 2^{n-2} \quad (*)$$

для количества  $P_n$  разрезаний выпуклого  $n$ -угольника на треугольники. В этой формуле  $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)$  – произведение первых  $n-1$  натуральных чисел, а  $(2n-5)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-5)$  – произведение первых  $n-3$  нечетных натуральных чисел. Например,  $P_3 = \frac{1!!}{2!} \cdot 2^1 = 1$  и

$$P_4 = \frac{3!!}{3!} \cdot 2^2 = 2.$$

Предлагаю вашему вниманию довольно простое доказательство формулы (\*). Его основная идея содержится в письме Ламэ Лиувиллю, которое было опубликовано в журнале «Journal de math. pures et appl.» в 1838 году.

Воспользуемся индукцией по  $n$ . База индукции (при  $n = 3$ ) уже проверена.

Рассмотрим выпуклый  $n$ -угольник, разрезанный диагоналями на треугольники. Легко доказать, что количество диагоналей равно  $n-3$ .

### Упражнения

1. Докажите это утверждение по индукции.
2. Докажите по индукции, что количество треугольников разбиения равно  $n-2$ .
3. Подсчитывая количества сторон треугольников, выведите формулу для количества диагоналей из формулы для количества треугольников.

Теперь – основная идея. Рассмотрим выпуклый  $n$ -угольник, разрезанный на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри многоугольника. Любая из  $n-3$  диагоналей, осуществляющих это разрезание, может двумя способами, как показано на рисунках 2 и 3 для  $n = 4$  и  $n = 5$

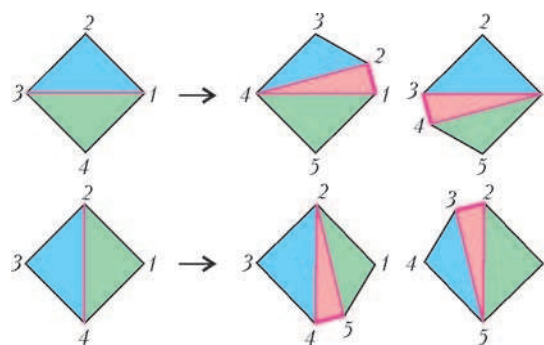


Рис. 2

соответственно, превратиться в треугольник и тем самым превратить разрезание  $n$ -угольника в разрезание  $(n+1)$ -угольника  $A_1A_2 \dots A_nA_{n+1}$ .

Таким образом  $P_n$  разрезаний выпуклого многоугольника  $A_1A_2 \dots A_n$  превращаются в  $2(n-3)P_n$  разрезаний выпуклого  $(n+1)$ -угольника  $A_1A_2 \dots A_nA_{n+1}$ . На каждом таком разрезании выделена одна сторона (возникшая при «раздувании» диагонали в треугольник и выделенная на рисунках 2 и 3 красным цветом). Любая сторона, кроме  $A_{n+1}A_1$ , может быть выделенной.

Посмотрим на это с другой точки зрения. Пусть в выпуклом  $(n+1)$ -угольнике  $ABCD \dots$  выделена сторона  $BC$ ; выясним, сколько существует разрезаний на треугольники (как всегда, диагоналями, не пересекающимися внутри многоугольника). По определению, способов разрезать  $(n+1)$ -угольник всего  $P_{n+1}$ . Однако не во всех таких способах сторона  $BC$  может быть выделенной: не годятся те способы, когда одним из треугольников, на которые разрезан  $(n+1)$ -угольник, является треугольник  $ABC$  или  $BCD$ . Отрезая от  $(n+1)$ -угольника треугольник  $ABC$ , мы получаем выпуклый  $n$ -угольник; для него по определению существует  $P_n$  разрезаний. То же самое происходит при отрезании от  $(n+1)$ -угольника треугольника  $BCD$ : получаем выпуклый  $n$ -угольник, для которого количество разрезаний равно  $P_n$ .

Вернемся к подсчету количества «раздутых»  $n$ -угольников. Поскольку любая из сторон  $(n+1)$ -угольника  $A_1A_2 \dots A_nA_{n+1}$ , кроме  $A_{n+1}A_1$ , может быть выделенной, то

$$(2n-6)P_n = n(P_{n+1} - 2P_n),$$

откуда

$$nP_{n+1} = (4n-6)P_n.$$

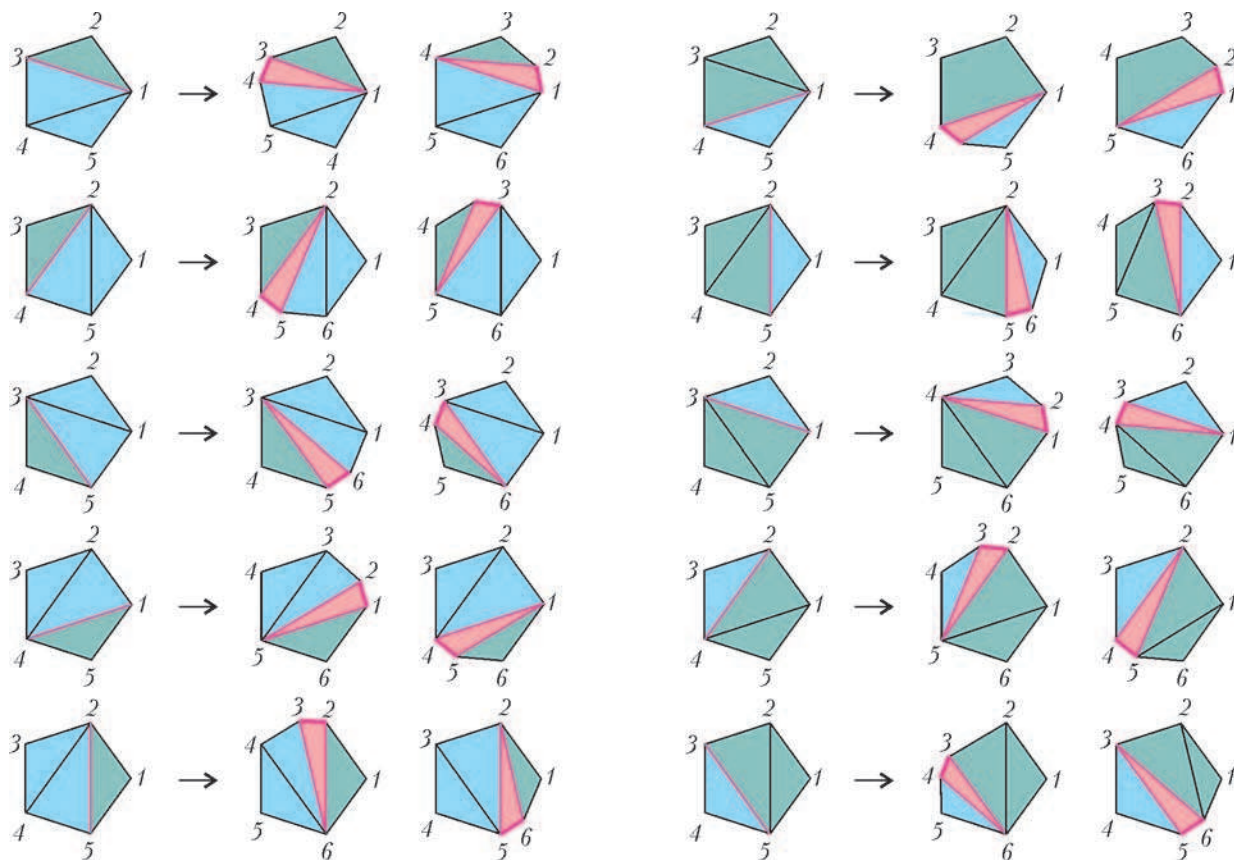


Рис. 3

Следовательно, если для некоторого натурального  $n$  верна формула (\*), то

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} \cdot \frac{(2n-5)!!}{(n-1)!} \cdot 2^{n-1} = \frac{(2n-3)!!}{n!} \cdot 2^{n-1},$$

так что формула (\*) верна в таком случае и для следующего за числом  $n$  натурального числа  $n + 1$ . Индукционный переход обоснован, формула (\*) доказана!

# Неравенства и ... параллельный перенос

**М. ГОРЕЛОВ**

В СТАТЬЕ РАССКАЗЫВАЕТСЯ О МЕТОДЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА неравенств, основанном на качественном рассмотрении графиков многочленов. Говоря о методе, я имею в виду стандартную последовательность шагов, позволяющую решать достаточно широкий круг задач, опираясь на знания и умения, а не на изобретательность и удачу. Конечно, роль изобретательности в математическом творчестве трудно переоценить. Но она дает тем больший эффект, чем шире технический арсенал, на который она опирается. Итак, поговорим о методе.

### Основная идея

Докажем неравенство Коши<sup>1</sup> для двух неотрицательных чисел:  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ .

Для этого рассмотрим квадратный трехчлен  $f(t) = (t-a)(t-b)$ . Его график – парабола «ветвями вверх» (рис. 1). Среднее арифметическое  $\frac{a+b}{2}$  – это абсцисса вершины параболы, а квадрат среднего геометрического  $\sqrt{ab}$  равен ординате точки пересечения параболы с осью ординат.

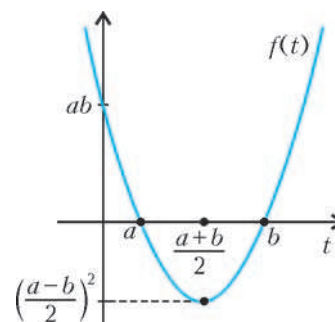


Рис. 1

Рассмотрим еще многочлен  $g(t) = f(t) + \delta$ , где  $\delta$  – некоторое положительное число. Его график получается из графика многочлена  $f(t)$  параллельным переносом на расстояние  $\delta$  вверх (рис. 2). Если число  $\delta$  не очень велико, то многочлен  $g(t)$  тоже имеет

<sup>1</sup> Огюстен Луи Коши (1789–1857) – один из крупнейших французских математиков.

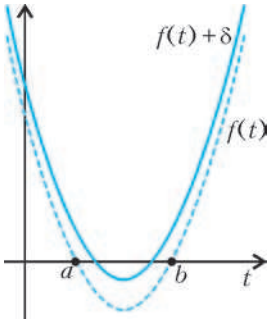


Рис. 2

два корня  $c$  и  $d$ , и мы можем написать аналогичное неравенство  $\frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd}$ .

Какое из этих двух неравенств сильнее? Конечно второе, так как левые части у этих неравенств равны (график-то мы сдвигали вверх, значит, абсцисса вершины не изменилась), а правая часть у второго неравенства больше, так как новый график пересекает ось ординат выше старого. Очевидно, что чем

больше  $\delta$ , тем более сильное неравенство мы будем получать.

Зададимся теперь вопросом, а при каких  $\delta$  наши рассуждения справедливы? Очевидно, они проходят, пока получающийся многочлен имеет корни. Значит, самое сильное неравенство мы получим при  $\delta = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ . Его нам *достаточно* доказать. Но при таком  $\delta$  неравенство очевидно: в этом случае парабола касается оси абсцисс, корни нашего квадратного трехчлена совпадают, а среднее арифметическое и среднее геометрическое двух равных чисел равны между собой. Задача решена.

Конечно, у этой задачи есть другие, наверное, более естественные решения. И все сказанное выше не имело бы смысла, если бы аналогичные соображения не проходили и в других, более сложных случаях. Данную идею можно развивать в разных направлениях. Одно из них уже появлялось в «Кванте» (см. статью Л. Курляндчика «Приближение к экстремуму» в №1 за 1981 г.). Мы пойдем другим путем.<sup>2</sup>

### Упражнения

1 (олимпиада мехмата МГУ, 1999 г.). Для положительных чисел  $a$  и  $b$  рассмотрим среднее гармоническое  $H = \frac{2ab}{a+b}$ , среднее геометрическое  $G = \sqrt{ab}$ , среднее арифметическое  $A = \frac{a+b}{2}$  и среднее квадратическое  $Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ . Что больше:  $HQ$  или  $AG$ ?

2 (М483). Найдите наибольшее значение отношения квадрата радиуса вписанной окружности прямоугольного треугольника к сумме квадратов длин медиан, проведенных из острых углов.

### Ключевой пример

Решим задачу, предлагавшуюся на олимпиаде 239 школы Санкт-Петербурга в 1995 году.

**Задача 1.** Сумма чисел  $x$ ,  $y$  и  $z$  равна 0. Докажите, что  $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 3 \geq 6xyz$ .

**Решение.** Прделаем несколько трюков.

Трюк первый. Преобразуем неравенство. Заметим, что  $(xy + yz + zx)^2 = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2x^2yz + 2xy^2z + 2xyz^2 = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyz(x + y + z)$ .

С учетом того, что  $x + y + z = 0$ , неравенство переписывается в виде  $(xy + yz + zx)^2 + 3 \geq 6xyz$ .

Рассмотрим многочлен

$$f(t) = (t-x)(t-y)(t-z) = t^3 - (x+y+z)t^2 + (xy+yz+zx)t - xyz.$$

<sup>2</sup> Много интересного получается при синтезе этих двух направлений, но рамки статьи слишком узки, чтобы изложить соответствующие результаты. Оставим это читателям для самостоятельного исследования.

Его график приведен на рисунке 3. Очевидно, в некоторой точке  $a$ , лежащей между меньшим и средним своим корнем, этот многочлен достигает локального максимума.

А сейчас второй трюк. Рассмотрим еще многочлен

$$g(t) = (t-a)(t-a)(t+2a) = t^3 - (a+a-2a)t^2 + (aa-2aa-2aa)t - aa(-2a).$$

Сравним коэффициенты многочленов  $f(t)$  и  $g(t)$ . Коэффициенты при  $t^3$  и  $t^2$  у них одинаковые: при  $t^3$  – единица, при  $t^2$  – нуль. Следовательно, производные этих многочленов отличаются на константу. Но при  $t = a$  обе они обращаются в нуль (у многочлена  $f(t)$  в этой точке локальный максимум, а у многочлена  $g(t)$  – кратный корень). Поэтому  $f'(t) = g'(t)$ , т.е. коэффициенты при  $t$  у многочленов  $f(t)$  и  $g(t)$  тоже равны. Значит, график многочлена  $g(t)$  получается из графика многочлена  $f(t)$  параллельным переносом в вертикальном направлении. Но в точке  $a$  значение одного из них равно нулю, а другого – положительно. Значит, этот перенос осуществляется вниз. Стало быть,  $g(0) \leq f(0)$ , или  $aa(-2a) \geq xyz$ .

Запишем интересное нас неравенство для трех чисел  $a$ ,  $a$ ,  $-2a$ :  $(aa - 2aa - 2aa)^2 + 3 \geq -12a^3$ . Сказанное выше позволяет заключить, что новое неравенство сильнее исходного (левые части у них равны, а правая больше у нового), поэтому нам *достаточно* доказать, что  $9a^4 + 12a^3 + 3 \geq 0$ .

Теперь третий трюк:

$$9a^4 + 12a^3 + 3 = (9a^2 - 6a + 3)(a^2 + 2a + 1)$$

– и проверка неравенства уже не составляет труда. Задача решена.

Непосвященному может показаться, что это решение основано на цепи случайных совпадений. Чтобы показать, что это не так, раскроем секрет фокуса.

### Теорема о симметрических многочленах

Первый раз нам повезло в том, что сумму  $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$  удалось выразить через коэффициенты многочлена  $f(t)$ . Этот трюк основан на весьма важной теореме, значение которой выходит далеко за границы рассматриваемого нами круга вопросов. Поэтому сформулируем и докажем ее в общем виде.

Будем рассматривать многочлены от  $n$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Они по-разному ведут себя при перестановках переменных. Например, многочлен  $x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1$  превратится в многочлен  $x_2^2x_1 + x_1^2x_3 + x_3^2x_2$ , если мы поменяем местами переменные  $x_1$  и  $x_2$ , а многочлен  $x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2$  при той же перестановке переменных переходит в многочлен  $x_2^2x_1^2 + x_1^2x_3^2 + x_3^2x_2^2$ , т.е. сам в себя.

**Упражнение 3.** Сколько разных многочленов можно получить перестановками переменных из многочленов, рассмотренных выше?

Многочлены, которые не меняются при *любой* перестановках переменных, называются симметрическими.

**Упражнение 4.** Докажите, что сумма, разность и произведение двух симметрических многочленов будут снова симметрическими многочленами.



Вот несколько важных примеров симметрических многочленов:

$$\begin{aligned} p_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1 + x_2 + \dots + x_n, \\ p_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n, \\ p_3(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n, \\ &\dots \\ p_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1x_2 \dots x_n \end{aligned}$$

(во второй строчке стоит сумма всевозможных попарных произведений, в третьей – сумма всех произведений по три и так далее). Эти многочлены называются элементарными симметрическими. С точностью до знаков они равны коэффициентам при степенях  $t$  в стандартной записи многочлена

$$f(t) = (t - x_1)(t - x_2) \dots (t - x_n).$$

**Теорема 1.** Для всякого симметрического многочлена  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  существует такой многочлен  $\Phi$ , что при всех значениях  $x_1, x_2, \dots, x_n$  выполняется равенство

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Phi(p_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, p_n(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

**Доказательство.** Фиксируем некоторое число  $q$  и докажем теорему для всех многочленов, степень которых меньше  $q$ . (Напомним, что степень одночлена  $Ax_1^{m_1}x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$  называется числом  $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ . Степенью многочлена называется наибольшая из степеней входящих в него одночленов.) Поскольку число  $q$  может быть выбрано произвольно, тем самым теорема будет доказана для всех многочленов.

Весом одночлена  $Ax_1^{m_1}x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$  будем называть сумму  $m_1q^{n-1} + m_2q^{n-2} + \dots + m_{n-1}q + m_n$ . Весом многочлена будем называть максимальный из весов входящих в него одночленов.

**Утверждение 1.** Многочлен степени, меньшей  $q$ , не содержит членов равного веса.

**Утверждение 2.** Вес произведения двух многочленов равен сумме весов сомножителей, причем «самый тяжелый» член произведения равен произведению «самых тяжелых» членов сомножителей.

**Упражнение 5.** Докажите утверждения 1 и 2.

Воспользуемся индукцией по весу многочлена. Многочлен веса 0 – это просто константа, и для него утверждение теоремы очевидно.

Предположим, теорема уже доказана для всех многочленов, вес которых меньше  $w$ . Пусть симметрический многочлен  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  имеет вес  $w$ , и  $Ax_1^{m_1}x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$  – входящий в него одночлен максимального веса.

**Утверждение 3.** Верно неравенство  $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n$ .

**Упражнение 6.** Докажите это.

Рассмотрим многочлен

$$\begin{aligned} \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ &= A \cdot (p_1(x_1, x_2, \dots, x_n))^{m_1 - m_2} p_2(x_1, x_2, \dots, x_n)^{m_2 - m_3} \dots \\ &\dots (p_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n))^{m_{n-1} - m_n} (p_n(x_1, x_2, \dots, x_n))^{m_n}. \end{aligned}$$

**Утверждение 4.** Одночлен  $Ax_1^{m_1}x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$  входит в многочлен  $\Psi$ , а веса всех остальных одночленов, входящих в него, меньше  $w$ .

**Упражнение 7.** Докажите это.

Тогда разность  $F(x_1, x_2, \dots, x_n) - \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  имеет вес, меньший  $w$ , и к ней можно применить предположение индукции. Для завершения доказательства остается воспользоваться равенством

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ &= \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n) + (F(x_1, x_2, \dots, x_n) - \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n)). \end{aligned}$$

Мне не удалось выяснить, когда впервые появилась эта теорема. Приведенные выше рассуждения с небольшими изменениями воспроизводят доказательство Гаусса<sup>3</sup>.

Этот метод доказательства конструктивен: применяя описанную в нем процедуру, можно за конечное число шагов получить разложение произвольного симметрического многочлена через элементарные симметрические. Однако на практике такой способ не всегда является самым экономичным. Чаще эта теорема используется как чистая теорема существования. Обычно это позволяет найти необходимое разложение, а иногда можно обойтись и без этого.

**Упражнение 8.** Докажите, что если в условиях теоремы 1 многочлен  $F$  имеет целые коэффициенты, то и многочлен  $\Phi$  имеет целые коэффициенты.

Теперь первый трюк при рассмотрении ключевого примера может быть сделан так. По теореме 1 сумма  $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$  может быть записана в виде

$$\begin{aligned} x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 &= \\ &= \alpha(x + y + z)^4 + \beta(xy + xz + yz)(x + y + z)^2 + \\ &\quad + \gamma xyz(x + y + z) + \delta(xy + xz + yz)^2, \end{aligned}$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  – некоторые числа. Коэффициент  $\delta$  можно легко найти, положив  $x = 1, y = -1, z = 0$ . Значения же остальных коэффициентов для нас не важны, поскольку по условию  $x + y + z = 0$ . Отсюда и получаем равенство  $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = (xy + xz + yz)^2$ .

Приведем еще один пример использования теоремы 1.

**Задача 2** (ключительный тур Всероссийской олимпиады, 2003 г.). Пусть  $a > 0, b > 0, c > 0$  и  $a + b + c = 1$ . Докажите неравенство

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$

**Решение.** Это неравенство симметрично. Тождественные преобразования никогда не нарушают симметрии, поэтому, если мы умножим его на  $(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)$  и соберем все слагаемые в левой части, то получим неравенство вида  $F(a, b, c) \geq 0$ , где  $F$  – некоторый симметрический многочлен. Удобнее доказать, что это неравенство выполняется для всех неотрицательных значений  $a, b, c$ .

Степень этого многочлена не превосходит пяти. По теореме о симметрических многочленах его можно разложить через элементарные симметрические многочлены. А поскольку его степень достаточно мала, элементарный симметрический многочлен  $abc$  будет входить в это разложение в степени, не превышающей первую.

Будем рассматривать числа  $a, b, c$  как корни многочлена  $f(t) = (t-a)(t-b)(t-c)$ . Можно считать, что они различны: случай совпадения хотя бы двух чисел  $a, b, c$  будет разобран далее; поэтому график многочлена  $f(t)$  имеет вид, изображенный на рисунке 3. Сдвигая этот график вдоль оси ординат, т.е. прибавляя к  $f(t)$  константу, мы меняем числа  $a, b, c$  так, что значения симметрических многочленов  $a + b + c$  и  $ab + bc + ca$  остаются неизменными, а произведение  $abc$  меняется в известных пределах (напомним, что с точностью до знака это коэффициенты многочлена  $f$ ). Значит,  $F(a, b, c)$  имеет вид  $\alpha abc + \beta$ , где числа  $\alpha$  и  $\beta$  не меняются при наших сдвигах. Но линейная функция  $\alpha abc + \beta$  от произведения  $abc$  обязательно достигает своего наименьшего значения на отрезке в одном из концов этого отрезка.

<sup>3</sup> Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) – крупнейший немецкий математик.

Пределы изменения величины произведения  $abc$  могут определяться двумя обстоятельствами: либо график многочлена  $f(t) = (t-a)(t-b)(t-c)$  «зацепится» за ось абсцисс точкой локального минимума или точкой локального максимума, либо одно из чисел  $a, b, c$  обратится в ноль. Рассмотрим эти два случая отдельно.

В первом случае можем, не ограничивая общности, считать, что  $a = b, c = 1 - 2a$ . Тогда исходное неравенство запишется в виде  $\frac{2}{1-a} + \frac{1}{2a} \geq \frac{4}{1+a} + \frac{2}{2-2a}$ , или после преобразований<sup>4</sup> как  $9a^2 - 6a + 1 = (3a-1)^2 \geq 0$ . Последнее неравенство очевидно.

Во втором случае можем считать, что  $c = 0$ . Тогда исходное неравенство переписывается в виде  $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b}$ , причем  $a + b = 1$ . Для доказательства этого неравенства можно вновь применить ту же идею! После приведения к общему знаменателю получим симметрическое неравенство третьей степени, поэтому элементарный симметрический многочлен  $ab$  будет входить в него линейно. А значит, неравенство достаточно доказать в двух случаях: когда числа  $a$  и  $b$  равны (и равны одной второй), или когда одно из чисел равно нулю. В обоих случаях неравенство очевидно. Задача решена, причем почти без вычислений!

#### Упражнения

9. Докажите, что для любых неотрицательных чисел  $a, b, c$  выполняется неравенство

$$4(a^3 + b^3 + c^3 + 6abc) \geq (a+b+c)^3.$$

10 (American Mathematical Monthly, задача E2284, 1971 г.). Докажите, что если  $a, b, c$  — неотрицательные числа и  $x = b + c - a, y = c + a - b, z = a + b - c$ , то

$$abc(xy + yz + xz) \geq xyz(ab + bc + ac).$$

11 (П.Финслер, Г.Хадвигер). Пусть  $a, b, c, S$  — соответственно стороны и площадь треугольника. Докажите неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3} + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

#### Теорема Безу<sup>5</sup>

Вернемся к ключевому примеру. Пришло время раскрыть секрет второго трюка. Напомню, что я «вытащил из рукава» многочлен  $g(t) = (t-a)(t-a)(t+2a)$ , а потом чудесным образом оказалось, что его график получается из графика многочлена  $f(t)$  параллельным переносом. Должен признаться, что на самом деле я действовал в обратном порядке: сначала сделал параллельный перенос графика, а потом разложил соответствующий многочлен на множители. А помогла мне в этом следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть  $c$  — корень многочлена  $F(t)$ . Тогда найдется такой многочлен  $G(t)$ , что  $F(t) = G(t)(t-c)$ .

**Доказательство.** Пусть  $F(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \dots + a_{n-1}t + a_n$  и  $F(c) = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} F(t) - F(c) &= a_0t^n + a_1t^{n-1} + \dots + a_{n-1}t + a_n - \\ &- (a_0c^n + a_1c^{n-1} + \dots + a_{n-1}c + a_n) = \\ &= a_0(t^n - c^n) + a_1(t^{n-1} - c^{n-1}) + \dots + a_{n-1}(t - c). \end{aligned}$$

<sup>4</sup> Нам опять «повезло»: получился многочлен второй степени, а не пятой. Подумайте, почему.

<sup>5</sup> Этьен Безу (1730–1783) — французский математик, член Парижской академии наук.

Правая часть этого равенства делится на  $t-c$ . Это следует из хорошо известного тождества

$$t^k - c^k = (t-c)(t^{k-1} + t^{k-2}c + \dots + tc^{k-2} + c^k),$$

которое в старых книгах называется тождеством Безу.

С его помощью нетрудно найти и коэффициенты многочлена  $G(t)$ . Коэффициент при  $t^m$  равен  $a_0c^{n-m-1} + a_1c^{n-m-2} + \dots + a_{n-m-2}c + a_{n-m-1}$ . Этой формулой иногда удобно пользоваться, выполняя деление. Доказательство завершено.

Итак, как же был сделан второй трюк. Возьмем точку  $a$ , в которой многочлен  $f(t)$  достигает локального максимума, и рассмотрим многочлен  $g(t) = f(t) - f(a)$ . Так как  $g(a) = 0$ , по теореме Безу  $g(t) = h(t)(t-a)$ , где  $h(t)$  — некоторый многочлен. Но  $a$  — точка локального максимума многочлена  $g(t)$ , поэтому в этой точке он не меняет знака, оставаясь вблизи нее неположительным. А выражение  $(t-a)$  в этой точке меняет знак, значит, должен менять знак и многочлен  $h(t)$ , а тогда  $a$  — его корень. Следовательно,  $h(t) = p(t)(t-a)$  и  $g(t) = p(t)(t-a)^2$ . Слева здесь стоит кубический многочлен, поэтому многочлен  $p(t)$  — линейный, и тогда  $g(t) = (\alpha t - \beta)(t-a)^2$ . Сравнивая коэффициенты при старшем члене в левой и правой частях равенства, находим  $\alpha = 1$ , а сравнение коэффициентов при  $t^2$  дает  $\beta = -2a$ . Вот и весь секрет.

Та же теорема позволяет объяснить и третий трюк. Казалось бы, нам повезло, что многочлен четвертой степени разложился в произведение двух квадратных трехчленов. На самом деле никакого везения здесь нет. Авторы задачи придумали хорошее неравенство. А хорошее неравенство — это такое неравенство, которое при некоторых значениях переменных обращается в равенство, и потому не может быть усилено. Наше неравенство обращается в равенство при  $x = y = -1; z = 2$ . Поэтому не удивительно, что  $a = -1$  — корень многочлена  $9a^4 + 12a^3 + 3$ . Рассуждая как в предыдущем абзаце, приходим к выводу, что  $9a^4 + 12a^3 + 3 = (\alpha a^2 + \beta a + \gamma)(a+1)^2$ . Числа  $\alpha, \beta, \gamma$  найдем, сравнивая коэффициенты при  $a^0, a^4$  и  $a^3$  в левой и правой частях равенства.

Только что мы столкнулись еще с двумя совпадениями, над которыми советую подумать самостоятельно. Во-первых, оказывается, что хорошее неравенство доказать проще, чем плохое. А во-вторых, хорошее симметрическое неравенство обращается в равенство, когда значения по крайней мере двух переменных совпадают<sup>6</sup>. Во многих случаях это позволяет «угадывать»<sup>7</sup> корни многочленов.

Итак, все секреты раскрыты. Это позволяет говорить не о «трюках», а о шагах алгоритма, доказывающего неравенства. Кстати, этот алгоритм нетрудно реализовать на компьютере. Особенно удобны для этого пакеты символьных вычислений типа Maple, Mathematica, MATLAB. Выходит, что компьютер в состоянии решать олимпиадные задачи, причем «на доказательство». Вот еще один пример работы этого алгоритма.

**Задача 3** (Московская олимпиада, 1982 г.). Пусть  $a, b, c$  — неотрицательные числа. Докажите, что

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) + abc(a+b+c) \geq 0.$$

<sup>6</sup> Строго говоря, это утверждение верно, если степень неравенства не слишком высока по сравнению с числом переменных.

<sup>7</sup> Кратные корни не обязательно угадывать. Для их поиска существует регулярная процедура, основанная на поиске наибольшего общего делителя многочлена и его производной с помощью алгоритма Евклида.

**Решение.** Неравенство имеет четвертую степень, поэтому произведение  $abc$  может входить в разложение левой части по элементарным симметрическим многочленам только в первой степени. Если <sup>8</sup> коэффициент при  $abc$  отрицателен, сдвинем график многочлена  $f(t) = (t-a)(t-b)(t-c)$  вниз, так, чтобы он зацепился точкой максимума за ось абсцисс. А если этот коэффициент положителен, то будем сдвигать этот график вверх до тех пор, пока не произойдет одно из двух событий: график зацепится за ось абсцисс точкой минимума или один из корней обратится в ноль. В результате мы получим более сильное неравенство. Значит, исходное неравенство достаточно доказать в двух частных случаях: когда два из трех чисел равны, и когда одно из чисел обращается в ноль.

В случае  $b = c$  получим  $a^4 - 4a^2b^2 + ab^2(a+2b) \geq 0$ . Разделив на  $b^4$  и обозначив  $t = a/b$ , получим равносильное неравенство  $t(t^3 - 3t + 2) \geq 0$ . Оно обращается в ноль при  $t = 1$ , значит, естественно предположить, что  $t^3 - 3t + 2 = (\alpha t + \beta)(t - 1)^2$ . Сравнивая старшие коэффициенты и свободные члены слева и справа, находим  $\alpha = 1$  и  $\beta = 2$ . Теперь нетрудно проверить, что  $t^3 - 3t + 2 = (t+2)(t-1)^2$ . При положительных  $t$  это выражение неотрицательно.

В случае  $c = 0$  доказываемое неравенство очевидно.

#### Упражнения

**12** (Международная олимпиада, 1984 г.). Пусть  $a, b, c$  — неотрицательные действительные числа такие, что  $a + b + c = 1$ . Докажите, что  $0 \leq ab + ac + bc - 2abc \leq 7/27$ .

**13** (M1834). Для действительных чисел  $x, y, z$  докажите неравенство  $x^6 + y^6 + z^6 + 3x^2y^2z^2 \geq 2(x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3)$ .

**14.** Пусть  $x, y, z$  — произвольные действительные числа,  $p = x + y + z$ ,  $q = xy + xz + yz$ ,  $r = xyz$ . Докажите неравенство  $3(3r - pq)^2 \leq 4(p^2 - 2q)(2q^2 - 3pr)$ .

**15. а)** Пусть  $a, b$  и  $c$  — длины сторон произвольного треугольника. Докажите, что

$$a(b^2 + c^2 - a^2) + b(a^2 + c^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) \leq 3abc.$$

**б)** Пусть  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы треугольника. Докажите неравенство  $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq 3/2$ .

**16.** Пусть  $r_a, r_b, r_c$  — радиусы вневписанных окружностей некоторого треугольника,  $m_a, m_b, m_c$  — длины его медиан. Докажите неравенство  $m_a m_b m_c \geq r_a r_b r_c$ .

<sup>8</sup> Мне не хочется разбираться, какой из двух случаев на самом деле имеет место. Проще разобрать оба.

## Вневписанная окружность

(Начало см. на с. 34)

### Список литературы

1. Р.К.Гордин. *Геометрия. Планиметрия*. Задачник для 7–9 классов. — М.: МЦНМО, 2004.
2. И.А.Кушнир. *Триумф школьной геометрии. Учебное пособие для 7–11 классов*. — Киев: Наш час, 2005.
3. Л.М.Лоповок. *Факультативные задания по геометрии для 7–11 классов*. — Киев: Радянська школа, 1990.
4. *Математические турниры имени А.П.Савина* / Сост. А.В. Спивак, С.И. Токарев: в 2 ч. — М.: Бюро Квантум, 2003 и 2006.
5. *Московские математические регаты* / Сост. А.Д.Блинков, Е.С.Горская, В.М.Гуровиц. — М.: МЦНМО, 2007.
6. Я.П.Понарин. *Элементарная геометрия: в 2 т.* — М.: МЦНМО, 2004 и 2006.

17. Пусть  $A = \sin \alpha \sin \beta + \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \sin \gamma$ . Докажите, что
  - а)  $A \leq 9/4$ , если  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы произвольного треугольника;
  - б)  $A > 1$ , если  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы остроугольного треугольника;
  - в)  $A \leq \frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ , если  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы неостроугольного треугольника.

**18** (Московская олимпиада, 1997 г.). Положительные числа  $a, b, c$  таковы, что  $abc = 1$ . Докажите, что

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+a+c} + \frac{1}{1+b+c} \leq 1.$$

**19.** Пусть  $r$  и  $R$  — радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника,  $p$  — его полупериметр. Докажите неравенство  $5R - r \geq \sqrt{3}p$ .

**20.** Сумма положительных чисел  $x, y, z$  равна  $\frac{\pi}{2}$ . Докажите, что  $\cos x + \cos y + \cos z \geq 1 + \sin x + \sin y + \sin z$ .

**21.** Действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют условиям  $x + y + z = 0$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Найдите наибольшее значение суммы  $x^3 + y^3 + z^3$ .

**22** (олимпиада США, 2001 г.). Неотрицательные числа  $a, b, c$  удовлетворяют условию  $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ . Докажите, что  $0 \leq ab + bc + ac - abc \leq 2$ .

**23** (M1364). Пусть  $a + b + c = 1$ ,  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $c \geq 0$ . Докажите неравенство

$$a^3 + b^3 + c^3 + abcd \geq \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{9} + \frac{d}{27}\right\}.$$

**24.** Пусть  $a, b, c$  — неотрицательные числа. Докажите, что

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) + 3(abc)^{4/3} \geq 0.$$

**25.** Правильный треугольник  $ABC$  вписан в окружность единичного радиуса. Точка  $X$  лежит на этой окружности.

а) Какое наибольшее значение может иметь произведение расстояний  $AX \cdot BX \cdot CX$ ?

б) Найдите наибольшее и наименьшее значения суммы  $AX + BX + CX$ .

**26** (Всесоюзная олимпиада, 1980 г.). Пусть длины ребер прямоугольного параллелепипеда равны  $a, b$  и  $c$  сантиметров ( $a < b < c$ ),  $a p = 4(a + b + c)$ ,  $s = 2(ab + bc + ac)$  и  $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  — соответственно его периметр, площадь поверхности и длина диагонали. Докажите, что

$$a < \frac{1}{3} \left( \frac{1}{4} p - \sqrt{d^2 - \frac{1}{2} s} \right), \quad c > \frac{1}{3} \left( \frac{1}{4} p + \sqrt{d^2 - \frac{1}{2} s} \right).$$

7. В.В.Прасолов. *Задачи по планиметрии: в 2 ч.* — М.: Наука, 1995.

8. В.В.Произволов. *Задачи на вырост.* — М.: Бюро Квантум, 2003.

9. В.Ю.Протасов. *Касающиеся окружности: от Тебо до Фейербаха*. «Квант», №4, 2008.

10. И.Ф.Шарыгин, Р.К.Гордин. *Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами.* — М.: Астрель, 2001.

### Список веб-ресурсов

1. [www.problems.ru](http://www.problems.ru) — база задач по математике.
2. [www.geometry.ru](http://www.geometry.ru) — всероссийская олимпиада по геометрии имени И.Ф.Шарыгина.
3. [olympiads.mccme.ru/ustn](http://olympiads.mccme.ru/ustn) — устные геометрические олимпиады.

Авторы благодарны П.А.Кожевникову и В.Ю.Протасову за ценные замечания по тексту и Е.С.Горской за выполнение чертёж.



# «Подводные камни» силы Архимеда

М. РОМАШКА

**ЗАКОН АРХИМЕДА** – ОДИН ИЗ ПЕРВЫХ В ИСТОРИИ ЧЕЛОВЕЧЕСТВА физических законов, имеющих четкую формулировку, дожившую до наших дней без изменений. Словесно закон Архимеда обычно формулируют так: *на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, равная по модулю весу вытесненной им жидкости*. Математически он выражается простой формулой

$$F_A = \rho_{\text{ж}} g V, \quad (*)$$

где  $F_A$  – сила Архимеда,  $V$  – объем погруженной части тела,  $\rho_{\text{ж}}$  – плотность жидкости,  $g$  – ускорение свободного падения. Произведение  $\rho_{\text{ж}} V$  равно массе  $m_{\text{ж}}$  вытесненной жидкости, а  $\rho_{\text{ж}} g V = m_{\text{ж}} g$  – это вес вытесненной жидкости (жидкости, на место которой помещено тело).

Однако за этой, простой на первый взгляд, формулировкой скрывается несколько «подводных камней». В ней не сказано, например, будет ли выполняться закон Архимеда, если тело движется в жидкости или если весь сосуд с жидкостью движется относительно земли. В этой статье мы обсудим некоторые особенности силы Архимеда и решим несколько интересных задач.

Для начала – немного теории. По сути, сила Архимеда (выталкивающая сила) – это равнодействующая сил давления жидкости на погруженное в нее тело (рис.1). Она обусловлена разностью давлений жидкости на разной глубине. Поэтому формулу (\*), выражающую закон Архимеда, легко доказать. В большинстве учебников приводится ее вывод для случая, когда погруженное тело имеет форму

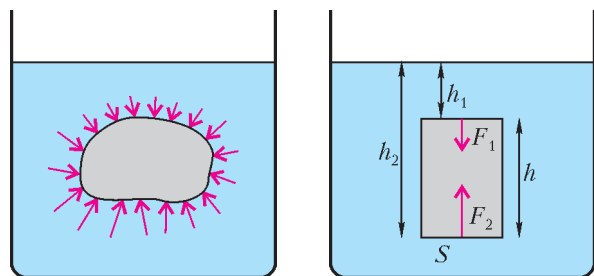


Рис. 1

Рис. 2

параллелепипеда, или цилиндра, или тела с вертикальными стенками и произвольной формой основания. Напомним этот вывод.

Представим себе, что твердый цилиндр погружили в жидкость и удерживают в ней (рис.2). На боковую поверхность цилиндра действуют силы давления со стороны жидкости, но их равнодействующая равна нулю, так как цилиндр симметричен. Рассмотрим силы давления, действующие на

верхнее и нижнее основания цилиндра:

$$F_1 = p_1 S, \quad F_2 = p_2 S,$$

где  $S$  – площадь основания цилиндра,  $p_1 = \rho_{\text{ж}} g h_1$  и  $p_2 = \rho_{\text{ж}} g h_2$  – давления в жидкости на уровне верхнего и нижнего основания соответственно,  $\rho_{\text{ж}}$  – плотность жидкости. Атмосферное давление не учитываем, поскольку оно, по закону Паскаля, передается на верхнее и нижнее основания одинаково. Имеем

$$F_1 = \rho_{\text{ж}} g h_1 S, \quad F_2 = \rho_{\text{ж}} g h_2 S.$$

Так как  $h_2 > h_1$ , то  $F_2 > F_1$ . Равнодействующая этих сил направлена в сторону большей из них, т.е.  $F_2$ , и равна их разности:

$$F = F_2 - F_1 = \rho_{\text{ж}} g h_2 S - \rho_{\text{ж}} g h_1 S = \rho_{\text{ж}} g S (h_2 - h_1) = \rho_{\text{ж}} g S h = \rho_{\text{ж}} g V.$$

Вот мы и получили формулу (\*).

Впрочем, существует более простой, красивый и универсальный способ вычисления силы Архимеда, применимый для тела любой формы. Пусть имеется сосуд с жидкостью, и мы хотим поместить в этот сосуд тело сложной формы. Выделим мысленно объем жидкости  $V$ , на место которого мы

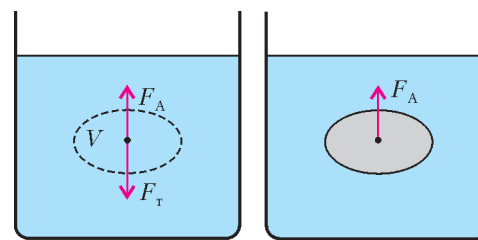


Рис. 3 а)

б)

затем поместим тело (рис.3,а). Так как этот объем покоится (находится в равновесии), то сила тяжести, действующая на него, равна силе Архимеда:  $F_T = F_A$ . Силу тяжести мы вычислим легко:  $F_T = m_{\text{ж}} g = \rho_{\text{ж}} g V$ , значит,  $F_A = \rho_{\text{ж}} g V$ . Теперь представим, что мы убрали объем жидкости  $V$ , а на его место поместили тело (рис.3,б). Давление в каждой точке на границе тела не изменилось. Поэтому равнодействующая сил давления жидкости на поверхность, ограничивающую тело, не изменилась и осталась равной

$$F_A = \rho_{\text{ж}} g V.$$

Эта формула справедлива для тела любой формы, включая и те случаи, когда тело плавает на поверхности жидкости и погружено в жидкость лишь частично. В последнем случае  $V$  – это объем той части тела, которая находится ниже уровня жидкости.

Однако если часть поверхности тела плотно прилегает к стенке или дну сосуда так, что между ними нет прослойки жидкости, то закон Архимеда неприменим. Иллюстрацией к этому служит опыт, когда одну грань деревянного кубика натирают парафином и плотно приставляют ко дну сосуда, а затем осторожно наливают в сосуд воду (рис.4). Кубик не всплывает, так как на его нижнее основание сила давления воды не действует, а сила, действующая на верхнее основание, лишь прижимает кубик ко дну.

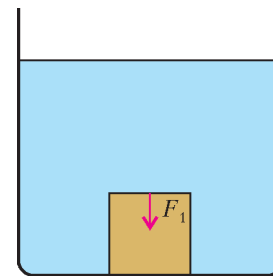


Рис. 4

Заметим, что закон Архимеда справедлив также и для тела, помещенного в газ. Сила Архимеда – это та сила, благодаря которой плавают корабли и поднимаются в воздух воздушные шары и аэростаты.

Теперь решим несколько задач.

**Задача 1.** В озере плавает льдина. Плотность воды  $\rho_v = 1000 \text{ кг/м}^3$ , а плотность льда  $\rho_l = 900 \text{ кг/м}^3$ . Докажите, что 9/10 объема льдины находится под водой. Изменится ли уровень воды в озере, если льдина растает?

**Решение.** Сила тяжести, действующая на льдину, уравновешивается силой Архимеда, поскольку льдина плавает. Обозначим весь объем льдины через  $V$ , а объем подводной части льдины – через  $V_1$ . Тогда  $F_T = mg = \rho_l g V$ , а  $F_A = \rho_v g V_1$ . Приравняем эти силы друг другу и выразим из полученного равенства нужное нам отношение  $V_1/V$ :

$$\rho_l g V = \rho_v g V_1, \text{ и } \frac{V_1}{V} = \frac{\rho_l}{\rho_v} = 0,9,$$

что и требовалось доказать.

Теперь ответим на второй вопрос задачи. Рассмотрим полный объем содержимого озера ниже начального уровня воды. В этот объем входит и подводная часть льдины объемом  $V_1$ . Когда льдина растает, объем  $V_1$  будет вычтен из полного объема, но зато добавится объем воды, образовавшейся при таянии льдины. Обозначим объем этой воды через  $V_2$  и сравним объемы  $V_1$  и  $V_2$ . Пусть  $m$  – масса льдины. Тогда

$$V_2 = \frac{m}{\rho_v}.$$

Массу можно связать с объемом погруженной части льдины, приравняв силу тяжести силе Архимеда:

$$mg = F_A = \rho_v g V_1, \text{ откуда } m = \rho_v V_1.$$

Подставляя это в формулу для  $V_2$ , получаем

$$V_2 = \frac{\rho_v V_1}{\rho_v}, \text{ т.е. } V_2 = V_1.$$

Мы видим, что объем воды, образовавшейся при таянии льдины, равен объему подводной части льдины до таяния. Можно представить, что при таянии льдина «сжалась» (ведь плотность воды больше плотности льда) и образовавшаяся вода сосредоточилась в объеме погруженной части льдины до таяния. Поэтому уровень воды в озере не изменился.

Ответ на второй вопрос можно было получить и более простым и универсальным способом – через давление. Сила Архимеда, как мы знаем, связана с давлением жидкости, и при решении задач с плавающими телами часто есть выбор: пользоваться законом Архимеда или формулой для гидростатического давления. В этой задаче второе оказывается даже проще. Будем рассуждать так. Когда льдина растаяла, полная масса озера не изменилась, следовательно, вес содержимого озера также не изменился. А это значит, что давление воды на дно озера в каждой точке дна не изменилось. Пусть уровень воды в озере, отсчитываемый от какой-то точки дна (от какой – не важно), равен  $h$ , а гидростатическое давление в этой точке равно  $p$ . По формуле для гидростатического давления,

$$p = \rho g h,$$

где  $\rho$  – плотность воды. Ответ очевиден: если  $p$  не изменилось, то и  $h$  не изменилось.

**Задача 2.** В цилиндрическую кастрюлю радиусом  $r = 10 \text{ см}$  налита вода до уровня  $h = 15 \text{ см}$ . В кастрюлю бросили губку (кусок поролона) массой  $m = 60 \text{ г}$ . Губка впитала в себя часть воды, но продолжала плавать на поверхности. Найдите установившийся уровень воды в кастрюле. Плотность воды  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ .

**Решение.** Мы не знаем, сколько воды впитала губка и на сколько при этом изменился ее объем. Можно обозначить объем впитавшейся воды через  $V$  и решать задачу, причем в ходе решения этот неизвестный объем сократится. Однако можно пойти более простым путем и решать задачу через давление.

Давление на дно кастрюли, по определению, равно

$$p = \frac{F}{S},$$

где  $F$  – вес содержимого кастрюли,  $S$  – площадь ее дна. Вес содержимого, после того как в кастрюлю бросили губку, стал равен  $(m_b + m)g$ , где  $m_b$  – общая масса воды в кастрюле. Найдем эту массу:  $m_b = \rho V = \rho S h$ . Таким образом,

$$F = (m_b + m)g = (\rho S h + m)g.$$

Отсюда получим, что давление после бросания губки стало

$$p = \frac{(\rho S h + m)g}{S} = \rho g h + \frac{mg}{S}.$$

Осталось выразить  $S$  через радиус  $r$ , и давление найдено:

$$p = \rho g h + \frac{mg}{\pi r^2}.$$

С другой стороны, по формуле для гидростатического давления,

$$p = \rho g h_1,$$

где  $h_1$  – новый установившийся уровень воды в кастрюле. Приравняв два полученных выражения для  $p$ , имеем

$$\rho g h_1 = \rho g h + \frac{mg}{\pi r^2},$$

откуда получаем ответ:

$$h_1 = h + \frac{m}{\rho \pi r^2} = 15,3 \text{ см}.$$

**Задача 3.** На рисунке 5 изображен проект «вечного двигателя». Цепь с поплавками проходит через сосуд с водой. На поплавки в сосуде действует сила Архимеда, которая, по задумке автора, должна вечно вращать цепь в направлении, показанном стрелкой. В чем ошибка автора проекта?

**Решение.** На самый нижний из находящихся в сосуде с водой поплавков действует сила давления воды сверху. Она будет больше всех сил Архимеда вместе, действующих на погруженные в воду поплавки (сделайте расчет и убедитесь в этом). Поэтому на самом деле цепь будет вращаться не в том направлении, которое показано стрелкой, а в противоположном, и вода быстро выльется из сосуда. А чтобы снова налить воду в сосуд, нужно совершить работу, т.е. затратить энергию. Поэтому «вечный двигатель» не получится.

**Задача 4.** На рисунке 6 представлен еще один проект «вечного двигателя». В стенку сосуда с водой встроен барaban, который может вращаться на оси. Сила Архимеда будет вечно вращать его по часовой стрелке. В чем ошибка автора этого проекта?

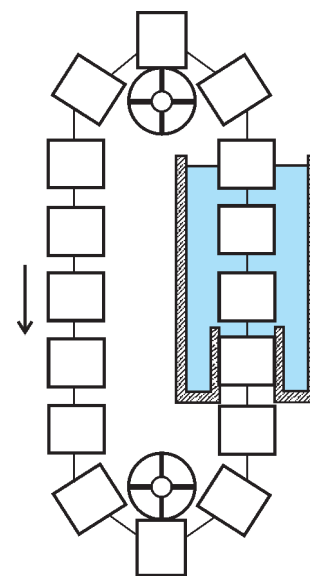


Рис. 5

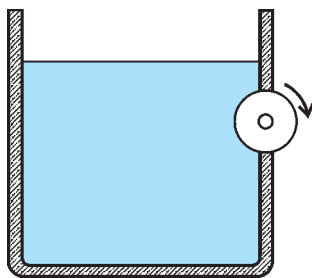


Рис. 6

значит, и ее момент равен нулю. Действительно, сила давления жидкости перпендикулярна поверхности. На каждый маленький участок барабана действует сила, перпендикулярная поверхности. Линия действия каждой такой силы проходит через ось барабана, поэтому момент силы равен нулю. Значит, момент равнодействующей всех этих сил тоже равен нулю. Кстати, равнодействующая всех этих сил направлена не вертикально, а под некоторым углом к вертикали (объясните, почему).

Мы столкнулись здесь с одним из «подводных камней» силы Архимеда: если тело погружено в жидкость не полностью (имеется непогруженная часть или поверхность), то формула (\*) может оказаться неприменимой. Эти случаи требуют особого внимания. Чтобы понять, применима формула (\*) или нет, можно мысленно проделать тот универсальный вывод этой формулы, который мы приводили выше. Если вывод проходит – значит, формула справедлива.

**Задача 5.** Бревно имеет диаметр  $d = 20$  см. Часть бревна длиной  $H = 2$  м вертикально опустили в воду (рис.7).

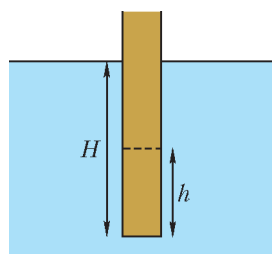


Рис. 7

Разделим погруженную часть бревна условно на две части: верхнюю и нижнюю длиной  $h = 1$  м. С какой силой верхняя часть действует на нижнюю? Плотность воды  $\rho_в = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, плотность бревна  $\rho_б = 680$  кг/м<sup>3</sup>. Атмосферное давление  $p_0 = 10^5$  Па.

**Решение.** Первое, что приходит в голову, это применить условие равновесия нижней части бревна.

Для этого найдем соответствующие силу тяжести и силу Архимеда и посмотрим, какой силы не хватает для равновесия. Однако, эта задача – с ловушкой. Здесь нельзя применять закон Архимеда и формулу (\*). Это как раз тот случай, когда тело погружено в жидкость не полностью.

Сила Архимеда обусловлена разностью давлений воды на разной глубине, но на верхний конец нижней части бревна вода не действует, а действует только на нижний конец бревна. Поэтому действующая сила – это сила полного давления воды, которое равно сумме гидростатического давления воды и атмосферного давления. Таким образом, на нижнюю часть бревна действуют три силы: сила тяжести, сила полного давления воды и сила  $F$  со стороны верхней части бревна. Записывая условие равновесия нижней части бревна (подробные выкладки проделайте сами, мы здесь для краткости не будем их писать) и выражая нужную нам силу  $F$ , получим ответ:

$$F = ((\rho_в H - \rho_б h)g + p_0) \frac{\pi d^2}{4} = 3544 \text{ Н}.$$

**Задача 6.** Тело объемом  $V = 2$  дм<sup>3</sup> из материала плотностью  $\rho = 900$  кг/м<sup>3</sup> плавает на границе раздела двух жидкостей с плотностями  $\rho_1 = 800$  кг/м<sup>3</sup> и  $\rho_2 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>

**Решение.** Во-первых, закон Архимеда и формула (\*) здесь неприменимы, поскольку барабан не погружен в воду полностью и не плавает. На барабан, конечно, действует некоторая сила со стороны воды, но простое рассуждение показывает, что линия действия этой силы проходит через ось барабана. В таком случае ее плечо равно нулю, а

(рис.8,а). Найдите объемы частей тела, находящиеся выше и ниже границы раздела. Можно ли в этой задаче применять формулу (\*)?

**Решение.** Легко показать, что в этой задаче закон Архимеда и формулу (\*) применять можно. Для этого выделим мысленно объем на границе раздела двух жидкостей, в котором в дальнейшем будет плавать тело (рис.8,б).

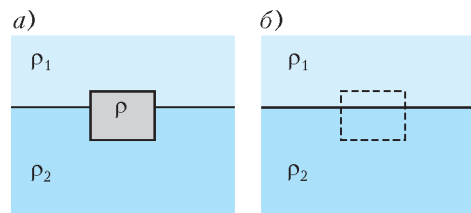


Рис. 8

Сила тяжести, действующая на выделенный объем, уравновешивается силой Архимеда. Если жидкости из выделенного объема заменить реальным телом, то давление в каждой точке на границе выделенного объема не изменится. Следовательно, сила Архимеда тоже не изменится. Это означает, что справедлива формула (\*).

Пусть объем части тела, находящейся в верхней жидкости, равен  $V_1$ , а в нижней –  $V_2$ . Сила Архимеда равна

$$F_A = \rho_1 g V_1 + \rho_2 g V_2,$$

а сила тяжести равна

$$F_T = mg = \rho g V.$$

Приравняв эти силы, получаем

$$\rho_1 g V_1 + \rho_2 g V_2 = \rho g V.$$

С другой стороны,

$$V = V_1 + V_2.$$

Имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными  $V_1$  и  $V_2$ . Решим ее методом подстановки. Из второго уравнения выразим объем нижней части тела:  $V_2 = V - V_1$  и подставим в первое уравнение. Получим

$$\rho_1 g V_1 + \rho_2 g (V - V_1) = \rho g V.$$

Отсюда найдем объем  $V_1$  верхней части тела:

$$V_1 = V \frac{\rho - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} = 1 \text{ дм}^3.$$

Зная  $V_1$ , легко найти и  $V_2$ :

$$V_2 = V \frac{\rho_1 - \rho}{\rho_1 - \rho_2} = 1 \text{ дм}^3.$$

Отметим, что если положить  $\rho_1 = 0$ , то получается частный случай, когда тело плавает в одной жидкости, а сверху находится воздух, плотностью которого можно пренебречь, или вакуум. Так мы заодно доказали справедливость формулы (\*) для случая плавания тела на поверхности жидкости.

В следующей задаче рассматривается случай, когда жидкость вместе с погруженным в нее телом движется относительно земли с ускорением.

**Задача 7.** К дну сосуда с жидкостью плотностью  $\rho_ж$  за нить привязан поплавок объемом  $V$ , плотность которого  $\rho_п$  ( $\rho_п < \rho_ж$ ), полностью погруженный в жидкость. На какой угол отклонится нить от вертикали, если сосуд будет двигаться

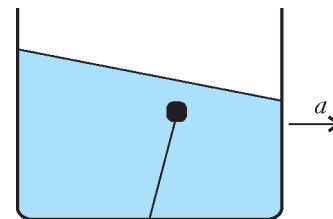


Рис. 9



с постоянным ускорением  $a$  в горизонтальном направлении (рис.9)? Чему будет равна сила натяжения нити?

**Решение.** На первый взгляд может показаться, что все элементарно: перейдем в систему отсчета, связанную с сосудом, и все будет происходить так же, как в неподвижном сосуде. Но тогда почему нить должна отклониться от вертикали? Дело в том, что система отсчета, связанная с сосудом, неинерциальная (она движется относительно земли с ускорением), поэтому в ней не выполняется второй закон Ньютона. Нужно производить расчет в системе отсчета, связанной с землей. Но это еще не все «подводные камни». Поверхность движущейся жидкости (см. рис.9) не горизонтальна, а это подсказывает нам, что распределение давлений в жидкости будет уже не таким, как в покоящейся жидкости. Поэтому силу, действующую на поплавок со стороны жидкости, нельзя искать по формуле (\*). Нужно найти другую, обобщенную формулу для силы Архимеда, годящуюся в случае ускоренно движущейся жидкости.

Выведем эту обобщенную формулу с помощью того же универсального способа, которым мы выводили формулу (\*). Пусть имеется сосуд с жидкостью, и мы хотим поместить в этот сосуд тело сложной формы. Выделим мысленно объем жидкости  $V$ , на место которого мы затем поместим тело (рис.10,а). Запишем второй закон Ньютона для выде-

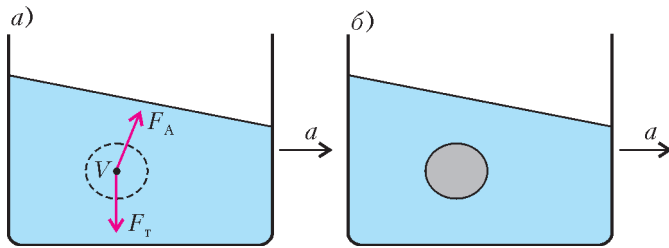


Рис. 10

ленного участка жидкости:

$$\vec{F}_T + \vec{F}_A = m\vec{a}, \text{ или } \rho_{ж}V\vec{g} + \vec{F}_A = \rho_{ж}V\vec{a},$$

откуда найдем

$$\vec{F}_A = \rho_{ж}V(\vec{a} - \vec{g}).$$

Если жидкость убрать, а на ее место поместить какое-либо тело (рис.10,б), то распределение давлений не изменится, а значит, и сила Архимеда не изменится. Поэтому полученное нами последнее выражение – это и есть обобщенная формула для силы Архимеда.

Теперь закончим решение задачи. Для удобства сразу разложим обобщенную силу Архимеда на вертикальную и горизонтальную составляющие. Перечислим силы, действующие на поплавок: это направленная вниз сила тяжести  $\rho_{п}Vg$ , направленная вверх вертикальная составляющая силы Архимеда  $\rho_{ж}Vg$ , направленная вдоль нити сила натяжения  $T$  и направленная вправо горизонтальная составляющая силы Архимеда  $\rho_{ж}Va$  (под действием этой силы двигалась бы с ускорением  $a$  жидкость, занимающая объем поплавка, если бы его не было). Обозначим угол отклонения нити от вертикали через  $\alpha$ . Запишем второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальную ось:

$$\rho_{п}Va = \rho_{ж}Va - T \sin \alpha, \text{ или } T \sin \alpha = (\rho_{ж} - \rho_{п})Va,$$

и на вертикальную ось:

$$\rho_{ж}Vg = \rho_{п}Vg + T \cos \alpha, \text{ или } T \cos \alpha = (\rho_{ж} - \rho_{п})Vg.$$

Отсюда найдем угол отклонения нити от вертикали:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{g}$$

и силу натяжения нити:

$$T = (\rho_{ж} - \rho_{п})V\sqrt{a^2 + g^2}.$$

**Упражнения**

**1.** В цилиндрический сосуд налита жидкая смола плотностью  $\rho_1 = 1200 \text{ кг/м}^3$ . В смоле плавает кусок парафина объемом  $V = 12 \text{ см}^3$  и плотностью  $\rho_2 = 900 \text{ кг/м}^3$ . Какой объем парафина находится ниже уровня смолы, а какой – выше? Изменится ли уровень жидкости в сосуде, если парафин расплавить?

**2.** В цилиндрическую кастрюлю радиусом  $r = 8 \text{ см}$  налили воду. Потом туда опустили сжатую резиновую грушу. Груша вобрала в себя часть воды, но продолжала плавать на поверхности, а уровень воды в кастрюле увеличился на  $h = 2 \text{ мм}$ . Чему равна масса груши? Плотность воды  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ .

**3.** В кастрюле с водой плавает пластмассовая мыльница, в которой лежит железный предмет. Вовочка вынул предмет из мыльницы и бросил его на дно кастрюли. Изменился ли уровень воды в кастрюле, и если да, то в какую сторону и на сколько? Площадь дна кастрюли  $S$ , масса предмета  $m$ , плотности воды и железа известны.

**4.** В ванну налили воду до уровня  $h = 40 \text{ см}$  и положили на сливное отверстие стеклянный брусок, масса которого  $m = 640 \text{ г}$  (рис.11). Диаметр сливного отверстия  $d = 4 \text{ см}$ . Вода подтекает под брусок, покрывая все дно ванны, но очень медленно (уровень воды можно считать постоянным и гидродинамическими эффектами пренебречь). С какой силой брусок давит на дно ванны? Плотность воды  $\rho_{в} = 1000 \text{ кг/м}^3$ , плотность стекла  $\rho_{с} = 2500 \text{ кг/м}^3$ .

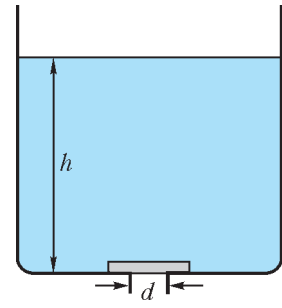


Рис. 11

**5.** К одному концу тонкостенной трубочки для питья радиусом  $r$  прилепили кусок пластилина массой  $m$ . Трубочку в вертикальном положении, пластилином вниз, опустили в жидкость на глубину  $h$ , много большую размеров куска пластилина. С какой силой кусок пластилина действует на трубочку, если плотность жидкости  $\rho_1$ , а плотность пластилина  $\rho_2$ ? Верхний конец трубочки открыт и находится в воздухе.

**6.** Малый сосуд расположен внутри большого так, как показано на рисунке 12. В дне малого сосуда есть отверстие, в которое вставлен сосновый цилиндр. Высота цилиндра  $H = 21 \text{ см}$ . В малом сосуде находится вода, а в большом – спирт, и при этом цилиндр покоится. На какой глубине под водой (отсчитывая от дна малого сосуда) находится верхнее основание цилиндра? Плотность воды  $\rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$ , плотность спирта  $\rho_2 = 790 \text{ кг/м}^3$ , а плотность сосны  $\rho = 600 \text{ кг/м}^3$ . Трением между цилиндром и малым сосудом пренебречь.

**7.** К дну вагона-цистерны, заполненной жидкостью, привязан тросом шар, плотность которого меньше плотности жидкости (рис.13). Когда вагон движется

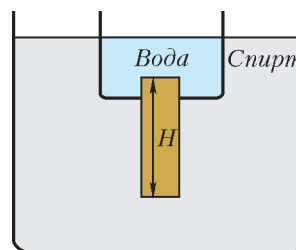


Рис. 12

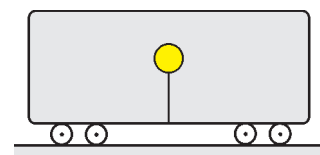


Рис. 13

равномерно, сила натяжения троса равна  $T$ . Чему будет равна сила натяжения троса при торможении поезда с постоянным ускорением  $a$  в установившемся режиме (когда шар установится неподвижно относительно цистерны)? В какую сторону от вертикали и на какой угол отклонится трос?

8. Система, изображенная на рисунке 14, состоит из двух сообщающихся сосудов и симметрична относительно вертикальной плоскости. Система

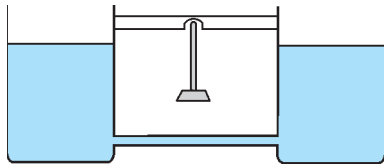


Рис. 14

наполнена водой и уравновешена на тонкой опоре. В сосуды опускают гири одинаковой массы: в левый сосуд – свинцовую, а в правый – алюминиевую. Центры масс гирь равноудалены от плоскости симметрии. Сохранится ли равновесие, и если нет, то какой сосуд перевесит? Плотность алюминия  $\rho_a = 2700 \text{ кг/м}^3$ , плотность свинца  $\rho_c = 11300 \text{ кг/м}^3$ .

Теперь из сосудов достали гири и опустили туда деревянные бруски: в левый сосуд – дубовый, а в правый – сосновый. Сохранится ли равновесие, и если нет, то какой сосуд перевесит? Зависит ли ответ от положения центров масс брусков? Плотности сосны и дуба равны  $\rho_c = 680 \text{ кг/м}^3$  и  $\rho_d = 800 \text{ кг/м}^3$  соответственно.

9. Имеется куб объемом  $V$ . Одну из граней куба натирают

парафином и приставляют к вертикальной стенке сосуда. Затем сосуд заполняют водой так, что куб полностью находится под водой, но под грань, натертую парафином, вода не подтекает, а центр этой грани находится на глубине  $h$ . Коэффициент трения между парафином и стенкой сосуда  $\mu$ . Куб отпускают. При каких значениях плотности материала куба  $\rho$  он останется неподвижным?

10. В задаче 4 про вечный двигатель, разобранный в статье, вычислите силу, действующую на барабан со стороны воды, если известно, что барабан представляет собой цилиндр радиусом  $R$  и высотой  $h$ , а его ось находится на глубине  $H$  под водой. Под каким углом к вертикали направлена эта сила? Плотность воды  $\rho$  известна.

*Подсказки.* Задачи 5 и 10 можно решить просто, воспользовавшись приемом под названием «прибавить ноль». Представим, что в телах, фигурирующих в задачах, сделали тонкие разрезы, куда затекает вода. В первом случае кусок пластилина разрезается горизонтальной плоскостью вблизи места соединения пластилина с трубкой. Во втором случае барабан разрезается вертикальной плоскостью вдоль стенки, в которую он встроен. Силы давления воды действуют на обе стороны разреза (вверх и вниз в первом случае и влево и вправо во втором случае), поэтому сумма этих сил равна нулю. Значит, произведение разреза не меняет полной суммы сил, действующих на тело. Но после разреза мы имеем тело, полностью погруженное в жидкость, и рассчитывать нужные силы становится проще.

# ЕГЭ-2009 по физике

**М.ДЕМИДОВА, А.ЧЕРНОУЦАН**

В ЭТОМ ГОДУ ЕГЭ ПО ФИЗИКЕ БУДУТ СДАВАТЬ ЗНАЧИТЕЛЬНО БОЛЬШЕ ШКОЛЬНИКОВ, ЧЕМ В ПРЕДЫДУЩИЕ ГОДЫ. Хотя в школе физика является экзаменом по выбору, ее захотят сдавать те школьники, которым физика нужна для участия в конкурсе на выбранную специальность в вузе. А это – большинство технических и естественно-научных специальностей.

Как показывает анализ результатов ЕГЭ в предыдущие годы, наибольшую трудность вызывают те вопросы и задачи (даже базового уровня), формулировка которых отличается от стандартной и является неожиданной для ученика. Например, на вопрос А17 приведенного ниже варианта экзамена правильно ответили меньше половины школьников. Единственный способ подготовиться к экзамену так, чтобы избежать ошибок в ответе на неожиданные вопросы и правильно решить задачи повышенного и высокого уровня, – это глубокое изучение теории, сопровождаемое решением достаточно большого числа задач разного уровня.

В 2009 году структура экзамена по физике несколько изменилась. Первые 25 задач группы А содержат 4 варианта ответа, один из которых правильный. Каждая из этих задач оценивается в один балл. Задачи В1 и В2 относятся к задачам на установление соответствия. Ответом к ним является последовательность двух или трех цифр. Если все цифры правильные, за задачу начисляется два балла, если одна

цифра неправильная – то один балл. Задачи В3–В5 относятся к задачам на получение численного ответа, они оцениваются в один балл каждая. К задачам С1–С6 необходимо дать развернутые ответы, они оцениваются экспертами; за каждую задачу можно получить максимум три балла. При этом задача С1 является качественной, она требует развернутого описания явления, процесса или зависимости, во многих случаях без применения формул. Задачи С2–С6 представляют собой обычные задачи на применение нескольких формул и законов. Всего за выполнение варианта можно получить 50 первичных баллов, которые затем переводятся в 100-балльную шкалу.

Для знакомства со структурой ЕГЭ-2009 по физике рекомендуем изучить демонстрационный вариант, который можно найти в Интернете, и решить приведенный ниже вариант, составленный из задач открытого сегмента банка экзаменационных задач прошлых лет.

## Вариант

А1. На рисунке 1 приведен график зависимости проекции скорости тела от времени. Какой из графиков на рисунке 2 представляет проекцию ускорения тела в интервале времени от 3 с до 5 с?

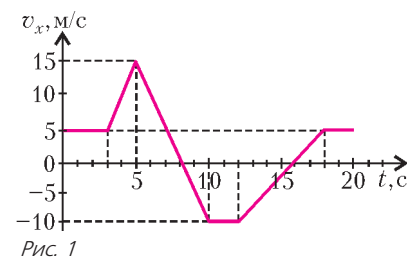


Рис. 1

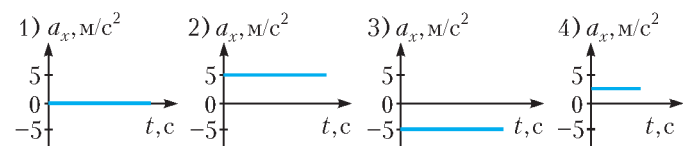


Рис. 2

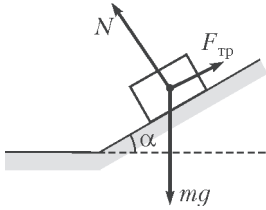


Рис. 3

**A2.** Брусок лежит на шероховатой наклонной опоре (рис.3). На него действуют 3 силы: сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила упругости опоры  $\vec{N}$  и сила трения  $\vec{F}_{тр}$ . Если брусок покоится, то модуль равнодействующей сил  $\vec{F}_{тр}$  и  $m\vec{g}$  равен:

- 1)  $N$ ; 2)  $N \cos \alpha$ ; 3)  $N \sin \alpha$ ; 4)  $mg + F_{тр}$ .

**A3.** Во сколько раз сила притяжения Земли к Солнцу больше силы притяжения Меркурия к Солнцу? Масса Меркурия составляет  $\frac{1}{18}$  массы Земли, а расположен он в 2,5 раза ближе к Солнцу, чем Земля.

- 1) В 2,25 раза; 2) в 2,9 раза; 3) в 7,5 раз; 4) в 18 раз.

**A4.** Масса планеты Плук в 2 раза меньше массы Земли, а период обращения спутника, движущегося вокруг Плука по низкой круговой орбите, совпадает с периодом обращения аналогичного спутника Земли. Отношение средних плотностей Плука и Земли равно:

- 1) 1; 2) 2; 3) 0,5; 4) 0,7.

**A5.** Четыре одинаковых листа фанеры толщиной  $L$  каждый, связанные в стопку, плавают в воде так, что уровень воды приходится на границу между двумя средними листами (рис.4). Если в стопку добавить еще один такой же лист, то глубина ее погружения увеличится на:

- 1)  $L/4$ ; 2)  $L/3$ ; 3)  $L/2$ ; 4)  $L$ .

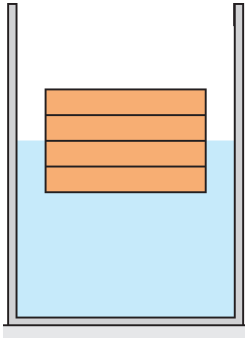


Рис. 4

**A6.** Как изменится период колебаний математического маятника, если его длину уменьшить в 4 раза?

- 1) Увеличится в 4 раза; 2) увеличится в 2 раза; 3) уменьшится в 4 раза; 4) уменьшится в 2 раза.

**A7.** Сани с охотником стоят на очень гладком льду. Охотник стреляет из ружья в горизонтальном направлении. Масса заряда 0,03 кг. Скорость саней после выстрела 0,15 м/с. Общая масса охотника с ружьем и саней 120 кг. Какова скорость заряда при выстреле?

- 1) 0,54 м/с; 2) 4 м/с; 3) 240 м/с; 4) 600 м/с.

**A8.** Закрепленный пружинный пистолет стреляет вертикально вверх. Какова масса пули  $m$ , если высота ее подъема в результате выстрела равна  $h$ , жесткость пружины  $k$ , а деформация пружины перед выстрелом  $\Delta l$ ? Трением и массой пружины пренебречь, считать  $\Delta l \ll h$ .

- 1)  $\frac{k(\Delta l)^2}{4gh}$ ; 2)  $\frac{k(\Delta l)^2}{gh}$ ; 3)  $\frac{2k(\Delta l)^2}{gh}$ ; 4)  $\frac{k(\Delta l)^2}{2gh}$ .

**A9.** Воздух в комнате состоит из смеси газов: водорода, кислорода, азота, водяных паров, углекислого газа и др. При тепловом равновесии у всех этих газов одинаковое (-ая):

- 1) давление; 2) температура; 3) концентрация молекул; 4) теплоемкость.

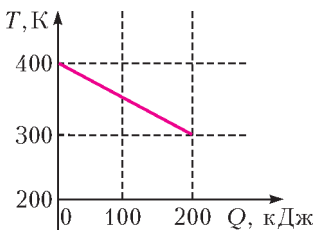


Рис. 5

**A10.** На рисунке 5 приведен график зависимости температуры твердого тела от отданного им количества теплоты. Масса тела 4 кг. Какова удельная теплоемкость вещества этого тела?

- 1) 0,002 Дж/(кг · К); 2) 0,5 Дж/(кг · К); 3) 500 Дж/(кг · К); 4) 40000 Дж/(кг · К).

**A11.** Какую работу совершает газ при переходе из состояния 1 в состояние 4 (рис.6)?

- 1) 2 Дж; 2) 2 кДж; 3) 2,5 кДж; 4) 5 кДж.

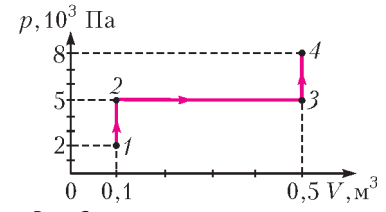


Рис. 6

**A12.** В процессе эксперимента внутренняя энергия газа уменьшилась на 40 кДж, при этом он совершил работу 35 кДж. Следовательно, в результате теплообмена газ отдал окружающей среде количество теплоты:

- 1) 75 кДж; 2) 40 кДж; 3) 35 кДж; 4) 5 кДж.

**A13.** В субботу температура воздуха была выше, чем в воскресенье. Парциальное давление водяного пара в атмосфере в эти дни оставалось постоянным. В какой из дней относительная влажность воздуха была больше? Учтите, что давление насыщенного пара увеличивается с ростом температуры.

- 1) В субботу; 2) в воскресенье; 3) влажность воздуха в эти дни была одинаковой; 4) недостаточно данных для ответа на вопрос.

**A14.** Расстояние между двумя точечными электрическими зарядами увеличили в 3 раза, и один из зарядов увеличили в 3 раза. Сила взаимодействия между ними:

- 1) не изменилась; 2) уменьшилась в 27 раз; 3) увеличилась в 3 раза; 4) уменьшилась в 3 раза.

**A15.** Отрицательный заряд перемещается в однородном электростатическом поле из точки  $A$  в точку  $B$  по траекториям I, II, III (рис.7). В каком случае работа сил электростатического поля наименьшая?

- 1) Только II; 2) только III; 3) I и III; 4) работа сил электростатического поля на траекториях I, II, III одна и та же.

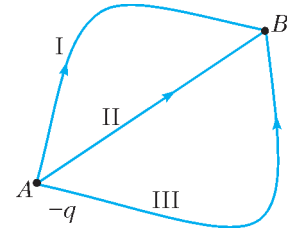


Рис. 7

**A16.** Если площадь поперечного сечения однородного цилиндрического проводника и электрическое напряжение на его концах увеличатся в 2 раза, то сила тока, протекающего по нему:

- 1) не изменится; 2) увеличится в 2 раза; 3) увеличится в 4 раза; 4) уменьшится в 4 раза.

**A17.** Как изменится сопротивление участка цепи  $AB$ , изображенного на рисунке 8, если ключ  $K$  разомкнуть? Сопротивление каждого резистора равно 4 Ом.

- 1) Уменьшится на 4 Ом; 2) уменьшится на 2 Ом; 3) увеличится на 2 Ом; 4) увеличится на 4 Ом.

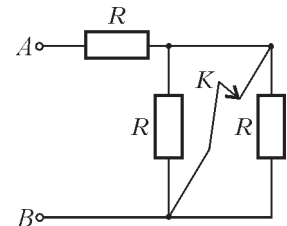


Рис. 8

**A18.** Электрон  $e^-$ , влетевший в зазор между полюсами электромагнита, имеет горизонтальную скорость  $\vec{v}$ , перпендикулярную вектору индукции  $\vec{B}$  магнитного поля (рис.9). Куда направлена действующая на электрон сила Лоренца  $\vec{F}$ ?

- 1) От нас перпендикулярно плоскости рисунка; 2) к нам из-за плоскости рисунка; 3) горизонтально вправо в плоскости рисунка; 4) вертикально вверх в плоскости рисунка.

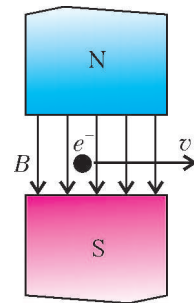


Рис. 9

**A19.** Один раз полосовой магнит падает сквозь неподвижное металлическое



кольцо южным полюсом вниз, второй раз – северным полюсом вниз. Ток в кольце:

1) возникает в обоих случаях; 2) не возникает ни в одном из случаев; 3) возникает только в первом случае; 4) возникает только во втором случае.

**A20.** Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью  $C$  и катушки индуктивностью  $L$ . Как изменится период электромагнитных колебаний в этом контуре, если емкость конденсатора увеличить в 2 раза, а индуктивность катушки в 2 раза уменьшить?

1) Не изменится; 2) увеличится в 2 раза; 3) увеличится в 4 раза; 4) уменьшится в 4 раза.

**A21.** Емкость конденсатора, включенного в цепь переменного тока, равна 6 мкФ. Уравнение колебаний напряжения на конденсаторе имеет вид  $U = 50 \cos(1 \cdot 10^3 t)$ , где все величины выражены в единицах СИ. Найдите амплитуду силы тока.

1) 0,003 А; 2) 0,3 А; 3) 0,58 А; 4) 50 А.

**A22.** На рисунке 10 показан ход лучей от точечного источника света  $A$  через тонкую линзу. Какова приблизительно оптическая сила линзы?

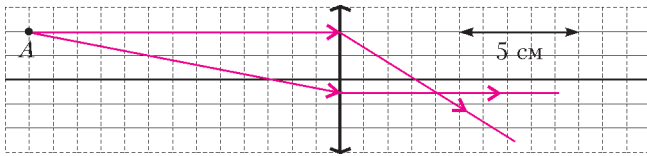


Рис. 10

1) 7,7 дптр; 2) -33,3 дптр; 3) 33,3 дптр; 4) 25,0 дптр.

**A23.** Торий  $^{232}_{90}\text{Th}$ , испытав два электронных  $\beta$ -распада и один  $\alpha$ -распад, превращается в элемент:

1)  $^{236}_{94}\text{Pu}$ ; 2)  $^{228}_{90}\text{Th}$ ; 3)  $^{228}_{86}\text{Rh}$ ; 4)  $^{234}_{86}\text{Rh}$ .

**A24.** Исследовалась зависимость растяжения жгута от приложенной силы. Погрешности измерения силы и величины растяжения жгута составляли 0,5 Н и 0,5 см соответственно. Результаты измерений с учетом их погрешности пред-

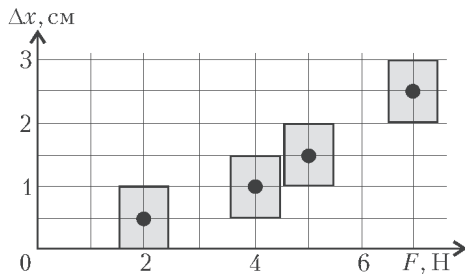


Рис. 11

ставлены на рисунке 11. Согласно этим измерениям, жесткость жгута приблизительно равна:

1) 110 Н/м; 2) 200 Н/м; 3) 300 Н/м; 4) 500 Н/м.

**A25.** Была выдвинута гипотеза, что размер мнимого изображения предмета, создаваемого рассеивающей линзой, зависит от оптической силы линзы. Необходимо экспериментально проверить эту гипотезу. Какие два опыта, представленные на рисунке 12, можно провести для такого исследования?

1) А и Б; 2) А и В; 3) Б и В; 4) В и Г.

**В1.** Плоский воздушный конденсатор зарядили до некоторой разности потенциалов и отключили от источника тока. Как изменятся перечисленные в первом столбце физические величины, если пластины конденсатора раздвинуть на некоторое расстояние? К каждой позиции первого столбца под-

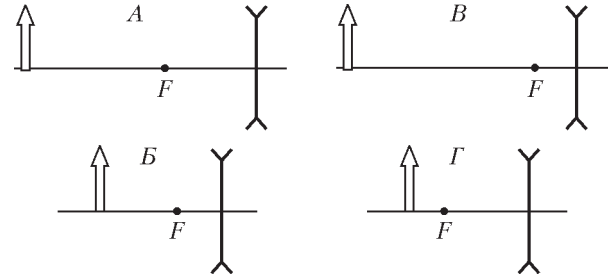


Рис. 12

берите соответствующую позицию второго и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

*Физические величины*

*Их изменения*

- |   |                 |
|---|-----------------|
| А) Заряд на обкладках конденсатора          | 1) Увеличится   |
| Б) Емкость конденсатора                     | 2) Уменьшится   |
| В) Энергия электрического поля конденсатора | 3) Не изменится |

А	Б	В

**В2.** Ядро атома некоторого элемента претерпевает  $\beta$ -распад. Как изменяются перечисленные в первом столбце характеристики ядра? К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию второго и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

*Физические величины*

*Их изменения*

- |                           |                 |
|---------------------------|-----------------|
| А) Порядковый номер ядра  | 1) Увеличится   |
| Б) Массовое число ядра    | 2) Уменьшится   |
| В) Число нейтронов в ядре | 3) Не изменится |

А	Б	В

**В3.** Небольшой камень, брошенный с ровной горизонтальной поверхности земли под углом к горизонту, упал обратно на землю в 20 м от места броска. Чему была равна скорость камня через 1 с после броска, если в этот момент она была направлена горизонтально?

**В4.** В калориметр с водой бросают кусочки тающего льда. В некоторый момент кусочки льда перестают таять. Первоначальная масса воды в сосуде была 330 г, а в конце процесса таяния масса воды увеличилась на 84 г. Какой была начальная температура воды в калориметре? Ответ выразите в градусах Цельсия ( $^{\circ}\text{C}$ ).

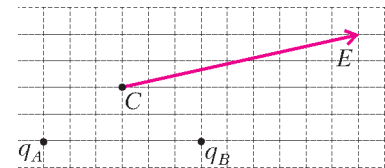


Рис. 13

**В5.** На рисунке 13 изображен вектор напряженности  $\vec{E}$  электрического поля в точке  $C$ , которое создано двумя точечными зарядами  $q_A$  и  $q_B$ . Чему равен заряд  $q_B$ , если заряд  $q_A$  равен +2 мкКл? Ответ выразите в микрокулонах (мкКл).

**С1.** В электрической цепи, изображенной на рисунке 14, ползунок реостата перемещают вправо. Как изменяются при этом показания вольтметра и амперметра?

**С2.** Начальная скорость снаряда, выпущенного из пушки вертикально вверх, равна 200 м/с. В

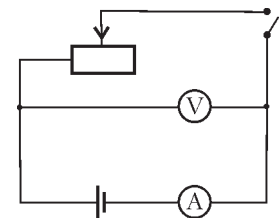


Рис. 14

точке максимального подъема снаряд разорвался на два одинаковых осколка. Первый упал на землю вблизи точки выстрела со скоростью 250 м/с. Через какое время после этого упадет на землю второй осколок? Сопротивлением воздуха пренебречь.

**С3.** Один моль идеального одноатомного газа сначала нагрели, а затем охладил до первоначальной температуры 300 К, уменьшив давление в 3 раза (рис.15). Какое количество теплоты сообщено газу на участке 1–2?

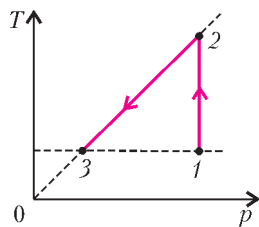


Рис. 15

**С4.** В сосуде с небольшой трещиной находится воздух, который может просачиваться сквозь трещину. Во время опыта давление воздуха в сосуде возросло в 2 раза, а его абсолютная температура уменьшилась в 4 раза при неизменном объеме. Во сколько раз изменилась внутренняя энергия воздуха в сосуде? (Воздух считать идеальным газом.)

**С5.** На экране с помощью тонкой линзы получено изображение предмета с пятикратным увеличением. Экран передвинули на 30 см вдоль главной оптической оси линзы. Затем при неизменном положении линзы передвинули предмет, чтобы изображение снова стало резким. В этом случае получилось изображение с трехкратным увеличением. На сколько пришлось передвинуть предмет относительно его первоначального положения?

**С6.** Препарат активностью  $1,7 \cdot 10^{11}$  частиц в секунду помещен в медный контейнер массой 0,5 кг. За какое время температура контейнера повышется на 1 К, если известно, что данное радиоактивное вещество испускает  $\alpha$ -частицы с энергией 5,3 МэВ? Считать, что энергия всех  $\alpha$ -частиц полностью переходит во внутреннюю энергию. Теплоемкостью препарата и теплообменом с окружающей средой пренебречь.

**Ответы к задачам групп А и В**

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
2	1	2	1	3	4	4	4	2	3
A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20
2	4	2	4	4	3	2	2	1	1
A21	A22	A23	A24	A25	B1	B2	B3	B4	B5
2	3	2	3	2	321	132	10	20	-1

**Краткие решения избранных задач**

**В3.** Скорость камня в верхней точке траектории направлена горизонтально. Время от броска до падения в 2 раза больше данного времени, т.е.  $t = 2t_1 = 2$  с. Следовательно, скорость в верхней точке равна  $v_1 = v_x = s/t = 10$  м/с.

**В4.** Лед перестанет таять, когда температура воды опустится до температуры плавления льда  $t_{пл} = 0^\circ\text{C}$ . Масса растаявшего льда равна увеличению массы воды:  $m_л = 84$  г. Уравнение теплового баланса приобретает вид

$$c_в m_в (t_{пл} - t_в) + \lambda m_л = 0, \text{ откуда } t_в = 20^\circ\text{C}.$$

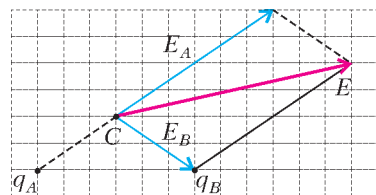


Рис. 16

**В5.** Векторы  $\vec{E}_A$  и  $\vec{E}_B$  находятся построением (рис.16). Поскольку расстояния от точки С до зарядов одинаковы, то  $|q_B|/|q_A| = E_B/E_A = 1/2$ . Получаем

$$q_B = -1 \text{ мкКл.}$$

**С1.** Сила тока в цепи и напряжение на реостате даются выражениями

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R}, \quad U = IR = \frac{\mathcal{E}R}{r + R} = \frac{\mathcal{E}}{\frac{r}{R} + 1}.$$

При увеличении сопротивления  $R$  реостата сила тока уменьшается, а напряжение возрастает.

**С2.** Максимальная высота подъема снаряда равна

$$h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Скорость снаряда в верхней точке равна нулю, поэтому из закона сохранения импульса  $0 = mv_1 - mv_2$  следует, что начальные скорости осколков равны:

$$v_1 = v_2 = v.$$

Поскольку первый осколок упал рядом с местом выстрела, скорости осколков направлены по вертикали: у первого осколка вниз, у второго – вверх. Скорости осколков при падении на землю также равны и связаны с их начальной скоростью законом сохранения энергии

$$mgh + \frac{mv^2}{2} = \frac{mu^2}{2}.$$

Отсюда получаем

$$v = \sqrt{u^2 - 2gh} = \sqrt{u^2 - v_0^2} = 150 \text{ м/с.}$$

Времена падения найдем из кинематических соотношений

$$u = v + gt_1, \quad u = -v + gt_2,$$

откуда

$$t_1 = 10 \text{ с, } t_2 = 40 \text{ с, } t_2 - t_1 = 30 \text{ с.}$$

**С3.** Процесс 2–3 изохорный, поэтому

$$\frac{T_2}{T_3} = \frac{p_2}{p_3} = \frac{1}{3}, \text{ т.е. } T_2 = 3T_1.$$

Процесс 1–2 изобарный, следовательно,

$$Q_{12} = \Delta U + A = \frac{3}{2} \nu R (T_2 - T_1) + \nu R (T_2 - T_1) = \frac{5}{2} \nu R (T_2 - T_1) = 5\nu RT_1 \approx 12,5 \text{ кДж.}$$

**С4.** Внутренняя энергия идеального газа пропорциональна  $\nu R$ , т.е. пропорциональна  $pV$ . Значит, внутренняя энергия воздуха возросла в 2 раза. Как часто бывает в вопросах и задачах ЕГЭ, не все данные из условия входят в ответ.

**С5.** Из уравнений

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} \text{ и } \frac{f}{d} = \Gamma$$

выразим  $d$  и  $f$  через увеличение  $\Gamma$  для случая действительного изображения:

$$d = \left(1 + \frac{1}{\Gamma}\right)F, \quad f = (1 + \Gamma)F.$$

Поскольку  $\Gamma_2 < \Gamma_1$ , то  $f_2 < f_1$  и  $d_2 > d_1$ . Получаем

$$d_2 - d_1 = \left(\frac{1}{\Gamma_2} - \frac{1}{\Gamma_1}\right)F, \quad f_1 - f_2 = (\Gamma_1 - \Gamma_2)F,$$

откуда находим

$$d_2 - d_1 = \frac{f_1 - f_2}{\Gamma_1 \Gamma_2} = 2 \text{ см.}$$

**С6.** Из закона сохранения энергии  $EAt = cm\Delta T$ , где  $E$  – энергия  $\alpha$ -частицы и  $A$  – активность, найдем искомое время:

$$t \approx 23 \text{ мин.}$$

# Региональный этап XXXV Всероссийской олимпиады школьников по математике

С 2008/09 года Всероссийская олимпиада школьников проводится согласно новому Положению об олимпиадах, принятому в 2007 году. Региональный этап стал отборочным к участию в Заключительном этапе Всероссийской олимпиады для всех регионов страны. Олимпиада проводилась в январе по единым заданиям, подготовленным Методической комиссией по математике. Впервые региональный этап в данном формате проводился в Москве и Санкт-Петербурге. Среди задач олимпиады наиболее сложными оказались задача 8 в 9 классе и задача 4 в 11 классе.

## ЗАДАЧИ

9 класс

Первый день

1. Гриб называется *плохим*, если в нем не менее 10 червей. В лукошке 90 плохих и 10 хороших грибов. Могут ли все грибы стать хорошими после того, как некоторые черви переползут из плохих грибов в хорошие?

А. Канель

2. Рациональные числа  $a$  и  $b$  удовлетворяют равенству

$$a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0.$$

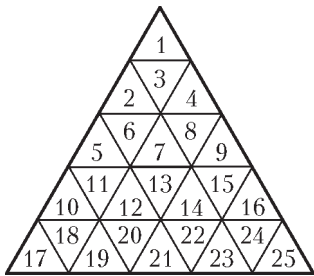
Докажите, что число  $1 - ab$  является квадратом рационального числа.

Р. Женодаров

3. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ . Прямая, перпендикулярная стороне  $AC$  и проходящая через точку  $A_1$ , пересекает прямую  $B_1C_1$  в точке  $D$ . Докажите, что угол  $ADC$  прямой.

Д. Скробот

4. На рисунке показан треугольник, разбитый на 25 меньших треугольников, занумерованных числами от 1 до 25. Можно ли эти же числа расставить в клетках квадрата  $5 \times 5$  так, чтобы любые два числа, записанные в соседних треугольниках, были записаны и в соседних клетках квадрата? (Треугольники, так же, как и клетки квадрата, считаются соседними, если имеют общую сторону.)



А. Грибалко

Второй день

5. На 11 листках бумаги написаны 11 фраз (по одной на листке):

1) Левее этого листка нет листков с ложными утверждениями.

2) Ровно один листок левее этого содержит ложное утверждение.

3) Ровно 2 листка левее этого содержат ложные утверждения ...

11) Ровно 10 листков левее этого содержат ложные утверждения.

Листки в некотором порядке выложили в ряд, идущий слева направо. После этого некоторые из написанных утверждений стали верными, а некоторые – неверными. Каково наибольшее возможное число верных утверждений?

И. Рубанов

6. Натуральное число  $m$  таково, что сумма цифр в десятичной записи числа  $8^m$  равна 8. Может ли при этом последняя цифра числа  $8^m$  быть равной 6?

В. Сендеров

7. Дан параллелограмм  $ABCD$ , в котором угол  $ABC$  тупой. Прямая  $AD$  пересекает второй раз окружность  $\omega$ , описанную вокруг треугольника  $ABC$ , в точке  $E$ . Прямая  $CD$  пересекает второй раз окружность  $\omega$  в точке  $F$ . Докажите, что центр описанной окружности треугольника  $DEF$  лежит на окружности  $\omega$ .

Т. Емельянова

8. В шахматном турнире участвовали 8 шахматистов, причем каждый сыграл с каждым ровно по одной партии. Известно, что любые два шахматиста, сыгравшие между собой вничью, набрали в итоге разное число очков. Найдите наибольшее возможное число ничьих в этом турнире. За выигрыш партии шахматисту начисляется 1 очко, за ничью  $-\frac{1}{2}$  очка, за поражение  $-0$ .

С. Токарев

10 класс

Первый день

1. Квадратный трехчлен  $f(x)$  таков, что многочлен  $(f(x))^3 - f(x)$  имеет ровно три вещественных корня. Найдите ординату вершины графика этого трехчлена.

И. Богданов

2. Докажите, что найдется такое натуральное число  $n > 1$ , что произведение некоторых  $n$  последовательных натуральных чисел равно произведению некоторых  $n + 100$  последовательных натуральных чисел.

В. Сендеров

3. У Кости было два набора по 17 монет: в одном наборе все монеты настоящие, а в другом наборе ровно 5 фальшивых. Все монеты выглядят одинаково; все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые тоже весят одинаково, но неизвестно, легче или тяжелее настоящих. Один из наборов Костя отдал другу, а впоследствии забыл, какой именно из двух наборов у него остался. Может ли Костя при помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь выяснить, какой именно из двух наборов он отдал?

К. Кноп



4. Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  касаются внешним образом в точке  $O$ . Точки  $A$  и  $B$  на окружности  $\omega_1$  и точки  $C$  и  $D$  на окружности  $\omega_2$  таковы, что  $AC$  и  $BD$  – общие внешние касательные к окружностям. Прямая  $AO$  пересекает отрезок  $CD$  в точке  $M$ , а прямая  $CO$  пересекает вторично окружность  $\omega_1$  в точке  $N$ . Докажите, что точки  $B$ ,  $M$  и  $N$  лежат на одной прямой.

*П. Кожевников*

*Второй день*

5. Натуральное число  $m$  таково, что сумма цифр в десятичной записи числа  $2^m$  равна 8. Может ли при этом последняя цифра числа  $2^m$  быть равной 6?

*В. Сендеров*

6. Вписанная в треугольник  $ABC$  окружность  $\omega$  касается сторон  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  соответственно. На продолжении отрезка  $AA_1$  за точку  $A$  взята точка  $D$  такая, что  $AD = AC_1$ . Прямые  $DB_1$  и  $DC_1$  пересекают второй раз окружность  $\omega$  в точках  $B_2$  и  $C_2$ . Докажите, что  $B_2C_2$  – диаметр окружности  $\omega$ .

*Р. Женодаров*

7. Положительные числа  $x_1, x_2, \dots, x_{2009}$  удовлетворяют равенствам

$$x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 = x_3^2 - x_3x_4 + x_4^2 = \dots \\ \dots = x_{2008}^2 - x_{2008}x_{2009} + x_{2009}^2 = x_{2009}^2 - x_{2009}x_1 + x_1^2.$$

Докажите, что числа  $x_1, x_2, \dots, x_{2009}$  равны.

*В. Сендеров*

8. См. задачу M2126 «Задачник «Кванта»».

*11 класс*

*Первый день*

1. Квадратный трехчлен  $f(x)$  таков, что многочлен  $(f(x))^5 - f(x)$  имеет ровно три вещественных корня. Найдите ординату вершины графика этого трехчлена.

*И. Богданов*

2. В некоторых клетках таблицы  $10 \times 10$  расставлены несколько крестиков и несколько ноликов. Известно, что нет линии (строки или столбца), полностью заполненной одинаковыми значками (крестиками или ноликами). Однако если

в любую пустую клетку поставить любой значок, то это условие нарушится. Какое минимальное число значков может стоять в таблице?

*И. Богданов*

3. Докажите, что  $x \cos x \leq \frac{\pi^2}{16}$  при  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

*В. Сендеров*

4. В остроугольном неравностороннем треугольнике  $ABC$  проведена высота  $AA'$  и отмечены точки  $H$  и  $O$  – точка пересечения высот и центр описанной окружности. Докажите, что точка, симметричная центру описанной окружности треугольника  $HOA'$  относительно прямой  $HO$ , лежит на средней линии треугольника  $ABC$ .

*Д. Прокопенко*

*Второй день*

5. На плоскости провели несколько прямых и отметили все их точки пересечения. Сколько прямых могло быть проведено, если на одной из проведенных прямых отмечена одна точка, на другой – три, а на третьей – пять? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.

*И. Богданов*

6. Точка  $D$  на стороне  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  такова, что  $AB = AD$ . Окружность, описанная около треугольника  $ABD$ , пересекает сторону  $AC$  в точках  $A$  и  $K$ . Прямая  $DK$  пересекает перпендикуляр, опущенный из  $B$  на  $AC$ , в точке  $L$ . Докажите, что  $CL = BC$ .

*И. Богданов*

7. Даны натуральные числа  $a, b, c$ , взаимно простые в совокупности. Верно ли, что обязательно существует такое натуральное  $n$ , что число  $a^k + b^k + c^k$  не делится на  $2^n$  ни при одном натуральном  $k$ ?

*В. Сендеров*

8. По кругу стоят 11 натуральных чисел. Известно, что любые два соседних числа различаются хотя бы на 20, а сумма любых двух соседних чисел не меньше ста. Найдите минимальную возможную сумму всех чисел.

*И. Богданов*

*Публикацию подготовили Н. Агаханов, И. Богданов, П. Кожевников, О. Подлипский, Д. Терёшин*

# Региональный этап XLIII Всероссийской олимпиады школьников по физике

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

*7 класс*

**Задача 1. Две шкалы.** Когда в доме включили отопление, температура в комнате стала медленно расти и за 45 минут увеличилась на  $5^\circ\text{C}$ . Найдите, с какой средней скоростью (в мм/ч) поднимался верхний край столбика ртути (рис.1). Для удобства слева от шкалы термометра приложили линейку.

*М. Замятнин*

**Задача 2. Винни-Пух и точное время.** Отправляясь навестить Кролика, Винни-Пух заметил, что его настенные часы стоят, показывая 10 часов 35 минут. Он их завел и пошел в гости. Войдя в дом к Кролику, первым делом Винни посмотрел на часы. На них было 10 часов 10 минут. Через 3 часа, после того как весь мед был съеден, медвежонок отправился в обратный путь. Когда он вернулся, его часы показывали 2 часа 5 минут. Винни немедленно



*Рис. 1*

перевел стрелки на точное время. Какое время он выставил на своих часах? Известно, что все путешествие заняло меньше шести часов.

*И.Бушмин*

**Задача 3. Обманчивый куб.** В мастерской изготовили из алюминия плотностью  $\rho_1 = 2,70 \text{ г/см}^3$  куб с ребром  $a = 10 \text{ см}$ . Внутри куба осталась полость, которую потом залили свинцом плотностью  $\rho_2 = 11,30 \text{ г/см}^3$ . В результате измерений неопытный лаборант подумал, что перед ним куб из латуни плотностью  $\rho = 8,72 \text{ г/см}^3$ . Определите объем полости в кубе.

*Фольклор*

**Задача 4. Стыдно!** Честный мальчик Петя вышел из дома в школу. По дороге он нашел велосипед и, поскольку опаздывал, решил воспользоваться находкой и доехать на нем, подумав, что потом обязательно вернет велосипед на место. В результате вся дорога в школу заняла 10 минут. Возвращаясь обратно, он вспомнил о своем намерении только подъезжая к дому. Пете стало стыдно, и он вернулся к месту находки, оставил там велосипед и пешком дошел до дома. Таким образом, дорога из школы заняла у него 18 минут. Как далеко от дома лежал велосипед, если на нем Петя мчался со скоростью  $15 \text{ км/ч}$ ?

*И.Ерофеев*

8 класс

**Задача 1. Скорый поезд и электричка.** Экспериментатор Глюк наблюдал за встречным движением скорого поезда и электрички. Оказалось, что каждый из поездов прошел мимо Глюка за одно и то же время  $t_1 = 23 \text{ с}$ . А в это время друг Глюка теоретик Баг ехал в электричке и определил, что скорый поезд прошел мимо него за  $t_2 = 13 \text{ с}$ . Во сколько раз скорый поезд длиннее электрички?

*В.Слободянин*

**Задача 2. Определение плотности.** Экспериментатор Глюк проводил исследования с телами равного объема. С помощью динамометра он удерживал каждое тело полностью погруженным в воду и обнаружил, что во всех опытах показания динамометра составляли либо  $F_1 = 1 \text{ Н}$ , либо  $F_2 = 2 \text{ Н}$ . Плотность самого тяжелого тела Глюк определил экспериментально:  $\rho_m = 1,4 \text{ г/см}^3$ . 1) Определите объем  $V$  одного тела. 2) Найдите все возможные для описанного опыта плотности других тел.

*Примечание.* Плотность воды  $\rho_0 = 1 \text{ г/см}^3$ ,  $g = 9,8 \text{ Н/кг}$ .

*А.Сеитов*

**Задача 3. Что такое psi?** Теоретика Багу подарили английский барометр, который измеряет давление в необычных для нас (и обычных для англичан) единицах psi (от англ. *round-force per square inch* – давление, которое оказывает вес одного фунта на квадратный дюйм). Багу захотелось перевести показания  $15,0 \text{ psi}$  в паскалы. К сожалению, у него не оказалось таблиц для перевода единиц измерения давления, но он обнаружил финансовый журнал, в котором нашел статью, посвященную стоимости золота в России и в Англии. Вот выдержка из нее:

	В России	В Англии
Слитки	522,0 тыс. руб./кг	5413 J/фунт
Проволока	10,07 тыс. руб./метр	5,845 J/дюйм

Золото можно было купить либо в слитках, либо в проволоке стандартного сечения. Помогите Багу понять, сколько паскалей все-таки показывает барометр, если реальная стоимость золота в России и в Англии одинакова, а по данным

Центробанка фунт стерлингов J стоит 43 рубля 78 копеек. Принять  $g = 9,8 \text{ Н/кг}$ .

*М.Осин, И.Ерофеев*

**Задача 4. «Джоулеметр».** Экспериментатор Глюк создал «джоулеметр». Прибор состоял из алюминиевого стаканчика, частично заполненного водой. Стаканчик был обернут пенопластом (для исключения теплообмена с окружающей средой). Через небольшое отверстие в пенопластовой крышке Глюк опустил в стакан термометр, позволяющий измерять температуру в диапазоне от  $+10$  до  $+90^\circ\text{C}$ . Цена деления термометра  $1^\circ\text{C}$ . Масса стаканчика  $m = 50 \text{ г}$ . Рядом со шкалой термометра Глюк поместил подвижную шкалу с ценой деления  $1 \text{ кДж}$ . Перед началом эксперимента он откалибровал «энергетическую» шкалу так, чтобы ее ноль совпал с начальной температурой воды в «джоулеметре». Затем экспериментатор поместил в прибор испытуемое тело (горячее или холодное) и после установления теплового равновесия определил по энергетической шкале, сколько джоулей отдало (получило) тело в результате теплообмена с прибором. 1) Сколько воды было в приборе, если одному делению шкалы термометра соответствует одно деление шкалы «джоулеметра»? 2) В каком диапазоне можно измерять количество теплоты, отданное или полученное исследуемым телом, если начальная температура «джоулеметра» была  $+20^\circ\text{C}$ ? Удельная теплоемкость алюминия  $c = 920 \text{ Дж/(кг}\cdot^\circ\text{C)}$ , воды  $c_0 = 4200 \text{ Дж/(кг}\cdot^\circ\text{C)}$ .

*М.Замятнин*

9 класс

**Задача 1. Табурет.** Толщина сидения деревянного табурета «Лакк» равна толщине ножек. Основными стандартными показателями табуретов «Лакк» являются давление  $p_0 = 2,8 \text{ кПа}$ , которое он оказывает на пол, стоя на ножках, и коэффициент  $\beta_0 = 1,6$ , равный отношению площади сидения к площади поверхности одной из боковых сторон. Экспериментатору Глюку привезли бракованный табурет: у него не хватает двух противоположных ножек (рис.2). Какими показателями  $p_1$  и  $\beta_1$  будет довольствоваться экспериментатор?

*И.Ерофеев*

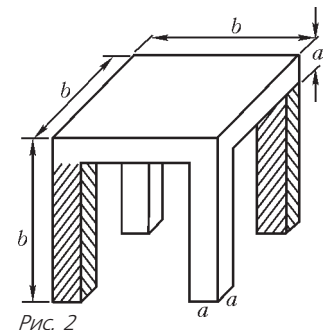


Рис. 2

**Задача 2. Вода и масло.** Два стакана высотой  $4H$  заполнены до уровня  $3H$  водой и маслом соответственно (рис.3). Плотность воды  $\rho_0 = 10^3 \text{ г/см}^3$ , а плотность масла  $\rho_m = 0,8 \cdot 10^3 \text{ г/см}^3$ . Сверху стаканы соединены заполненной водой тонкой трубкой с краном. Открытые концы трубки погружены на  $2H$  в каждую из жидкостей. Какие уровни установятся в стаканах, если кран открыть?

*М.Замятнин*

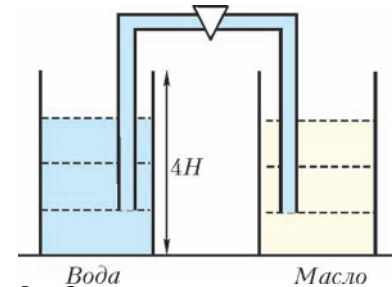


Рис. 3

**Задача 3. Электронный ключ.** В электрической цепи (рис.4) сопротивления резисторов  $R_0 = 15 \text{ Ом}$ ,  $r = 16 \text{ Ом}$ . Параллельно резистору сопротивлением  $r$  подсоединен электронный ключ  $D$  (диод). Вычислите сопротивление резистора  $R_1$ ,

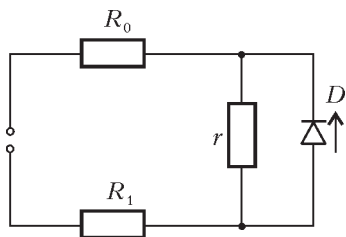


Рис. 4

если суммарная мощность, выделяемая на резисторах сопротивлениями  $R_1$  и  $r$ , не зависит от полярности приложенного напряжения.

*Примечание.* Полупроводниковый диод – это электронное устройство, которое пропускает электрический ток только в одном направлении (по стрелке на рисунке). При этом сопротивление диода пренебрежимо мало.

Фольклор

**Задача 4. Старый график.** В архивах экспериментатора Глюка нашли график (рис.5) изменения со временем проекции на вертикальную ось скорости шарика, который был выпущен из пневматического пистолета вертикально вверх с балкона 17 этажа. Масштаб на оси скорости от времени выцвел, а на оси времени частично сохранился. Определите начальную скорость шарика и скорость, с которой шарик упал на землю. Ветра в день эксперимента не было.

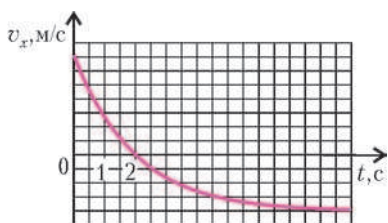


Рис. 5

10 класс

М.Замятнин

**Задача 1. Два против одного.** Три одинаковые длинные «резинки», которые при растяжении подчиняются закону Гука, уложили параллельно друг другу и совместили концы, которые с одной стороны связали узлом. Два свободных конца взял в руки Вася, а третий свободный конец – Петя. Вася, держа концы резинок, бежит на север со скоростью 8 м/с, а Петя, держа свою резинку, бежит на восток со скоростью 9 м/с. В тот момент когда резинки выпрямились и совсем немного растянулись, они расположились в направлении восток–запад. С какой по модулю скоростью двигался в этот момент узел?

С.Варламов



Рис. 6

$CD$  нити горизонтальны. Массами

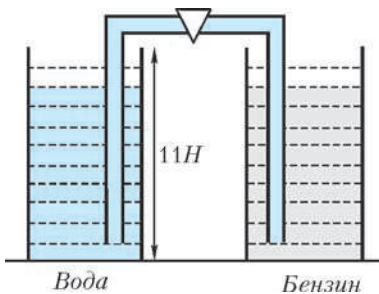


Рис. 7

**Задача 2. Динамометр.** В установке (рис.6) масса динамометра  $M$ , а массы грузов  $m_1$  и  $m_2$ . Коэффициент трения между динамометром и поверхностью стола  $\mu$ . Участки  $AB$  и  $CD$  нити горизонтальны. Массами

И.Алескеров

**Задача 3. Вода и бензин.** Два стакана высотой  $11H$  заполнены до уровня  $9H$  водой и бензином соответственно (рис.7). Плотность

воды  $\rho_0 = 1 \text{ г/см}^3$ , а плотность бензина  $\rho_6 = 0,72 \text{ г/см}^3$ . Сверху стаканы соединены заполненной водой тонкой трубкой с краном. Открытие концы трубки погружены на  $8H$  в каждую из жидкостей. Какие уровни установятся в стаканах, если кран открыты?

М.Замятнин

**Задача 4. В поисках максимума.** Электрическая цепь (рис.8) подключена к сети постоянного напряжения. При изменении сопротивления  $R$  переменного резистора на нем выделяется мощность  $P_0 = 16 \text{ Вт}$  при токах  $I_1 = 1 \text{ А}$  и  $I_2 = 4 \text{ А}$ . Определите наибольшую мощность  $P_{\text{max}}$ , которая может выделяться на этом резисторе.

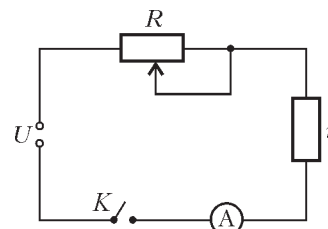


Рис. 8

Фольклор

**Задача 5. Необычная теплоемкость.** Идеальный одноатомный газ расширился в политропном процессе. При этом оказалось, что отношение совершенной газом работы к подведенному к нему количеству теплоты составило  $\alpha = 2,5$ . Вычислите молярную теплоемкость  $C$  газа в этом процессе.

*Примечание.* Политропным называется процесс, протекающий с постоянной теплоемкостью.

В.Слободянин

11 класс

**Задача 1. Неплоский процесс.** Над одноатомным идеальным газом производят сложный процесс, показанный на рисунке 9, который состоит из шести простых процессов. У точки 1 координаты  $p, V, T$ , а у точки 4 координаты  $3p, 3V, 3T$ . График каждого из простых процессов параллелен одной из координатных осей. 1) Среди простых процессов найдите все изотермические. 2) Определите в каждом из них изменение внутренней энергии газа. 3) Найдите все процессы, изменение внутренней энергии в которых  $\Delta U = 0$ .

И.Ерофеев,  
Г.Тарнопольский

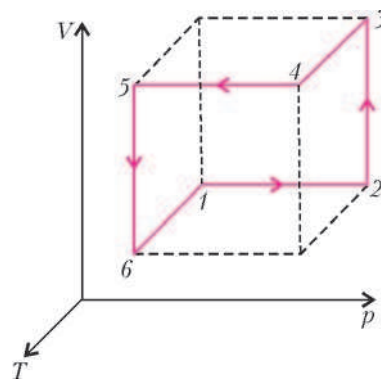


Рис. 9

**Задача 2. Космическая станция.** На большом экране в Центре управления полетами отображается траектория Международной космической станции (МКС) – след от пересечения поверхности Земли прямой, проведенной от центра Земли к станции (рис.10). Станция движется по круговой

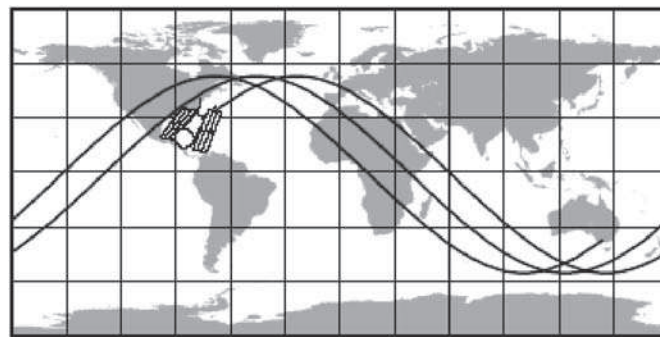


Рис. 10



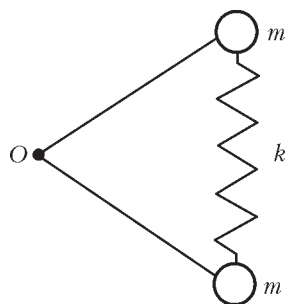


Рис. 11

$= 2\pi\sqrt{m/k}$ , где  $m$  – масса каждого из шариков, а  $k$  – жесткость пружины. Соединение легких стержней шарнирное и закреплено в точке  $O$ . Найдите длину  $L$  пружины в нерастянутом состоянии.

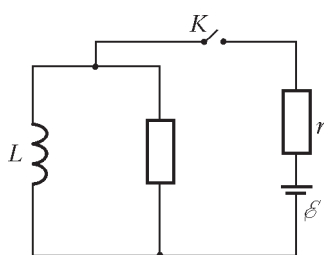


Рис. 12

орбите. Оцените с помощью данного рисунка высоту  $h$  космической станции над поверхностью Земли. Считайте, что радиус Земли  $R = 6380$  км, ускорение свободного падения на поверхности Земли  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>.

Я.Калда

**Задача 3. Колебания системы.** Период малых колебаний системы (рис.11) около положения равновесия равен  $T =$

Фольклор

**Задача 4. Цепь с катушкой.** Электрическая схема (рис.12) состоит из источника постоянного тока с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$ , индуктивности  $L$  и сопротивления неизвестной величины. Ключ  $K$  в схеме сначала замыкают, а затем размыкают в тот момент, ког-

да скорость изменения энергии, запасенной индуктивностью, достигает максимума. Какое количество теплоты выделится в схеме после размыкания ключа?

А.Шеронов

**Задача 5. Интересное соседство.** В речке поймали карася и посадили в шарообразный аквариум радиусом  $R$ , а рядом поставили точно такой же аквариум с золотой рыбкой (рис.13).

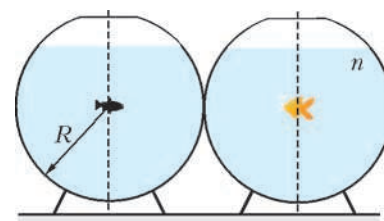


Рис. 13

Карасю такая соседка показалась необычной, и он начал с интересом разглядывать ее, плавая в центре аквариума. Заметив наблюдение, золотая рыбка тоже замерла в центре аквариума и стала вглядываться в своего соседа. 1) На каком расстоянии, с точки зрения карася, плавает золотая рыбка, если показатель преломления воды в аквариумах  $n = 4/3$ ? 2) Во сколько раз видимый поперечный размер золотой рыбки отличается от ее истинного размера? 3) Прямое или перевернутое изображение соседки видит карась?

*Примечание.* Считайте, что размеры рыбок много меньше  $R$ .

В.Слободянин

Публикацию подготовил В.Слободянин

## ПРОГУЛКИ С ФИЗИКОЙ

### Антибликовые очки и ЖК-дисплей

(Начало см. на 4-й странице обложки)

Блики – отражения света от различных поверхностей – часто мешают увидеть детали интересующего нас объекта. Неполаризованный, т.е. естественный, свет после отражения от плоскости превращается в частично поляризованный. Если угол падения луча близок к  $90^\circ$ , то плоскость поляризации отраженного луча параллельна плоскости, от которой свет отразился. Так, низкое солнце над рекой является источником множества бликов, получающихся в результате отражения от поверхности воды. Плоскость поляризации этих бликов, мешающих, например, рыболову рассмотреть поплавок, горизонтальна. Поляризованные, или антибликовые, очки избавляют нас от бликов, так как они пропускают свет только одной поляризации, как правило вертикаль-



Рис. 1



Рис. 2

ной. Такие очки, надетые на человека, стоящего по стойке «смирно», позволяют ему избавиться от бликов, возникающих на горизонтальных поверхностях, например на водной глади. Наверное, поэтому поляризационные очки и продаются в магазинах «Рыболов-спортсмен».

Многие компании (например, *Polaroid*) изготавливают солнцезащитные очки, которые являются одновременно поляризационными. Это позволяет значительно снизить интенсивность неполяризованного света, не искажая его спектр.

Жидкокристаллические дисплеи компьютеров, мобильных телефонов, телевизоров и т.п. являются источниками линейно поляризованного света. В этом легко убедиться, если положить на любой ЖК-дисплей поляризационные очки или посмотреть через них на этот дисплей. Всегда можно подобрать такое положение очков, при котором закрытая ими часть дисплея будет хорошо различима (рис.1). Если после этого повернуть очки на  $90^\circ$ , то они перестанут пропускать свет дисплея (рис.2).

Но если через поляризационные очки посмотреть на ЖК-дисплей, то его яркость будет зависеть от того, насколько мы наклонили голову к левому или правому плечу. А если сквозь такие очки смотреть на экран вращающегося перед нами мобильного телефона, то он превращается в «мигалку». Проблемы возникают и у водителей, носящих поляризационные очки, так как некоторые приборы, например GPS-навигаторы, оснащены жидкокристаллическими дисплеями, и, взглянув на дисплей под неудачным углом, водитель может ничего не увидеть.

К.Богданов

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## КМШ

### ЗАДАЧИ

(см. «Квант» № 1)

1. Можно. Возьмем, например, кирпич размером  $1 \times 2 \times 6$ . Две грани  $1 \times 2$  покроем четырьмя квадратами  $1 \times 1$ . Оставшиеся четыре грани можно покрыть квадратом  $6 \times 6$ .
2. Не может. Докажем это. Очевидно, что среди семи цифр, участвующих в равенстве, нет нуля (иначе одно произведение равно нулю, а другое нет). Нет и цифры 7 (если она присутствует, то одно из произведений делится на 7, а другое нет). По аналогичной причине отсутствует и цифра 5. Остаются семь цифр: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9. Так как в ребусе присутствуют семь разных букв, каждая из указанных цифр встретится по одному разу. Если бы равенство из условия задачи выполнялось, то произведение

$$x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 = 2^7 \cdot 3^4$$

было бы квадратом целого числа  $S \times A \times M$ . Это невозможно, так как в разложение числа  $x$  на простые множители двойка входит в нечетной степени.

3. Пусть, например, кузнечики сидят в десяти вершинах правильного 11-угольника, а в 11-й вершине никого нет. Тогда каждый из кузнечиков может перепрыгнуть в незанятую вершину, и мы снова получим ту же самую фигуру.
4. 499.

Заметим сначала, что общее количество денег у зрителей не меняется. Поэтому в итоге у каждого зрителя должно оказаться столько же денег, сколько было вначале. Значит, если зрителю рубли давали, то он их и отдавал. Докажем, что каждый зритель чихнул хотя бы один раз. Предположим, что это не так. Рассмотрим зрителя, который не чихал, а значит, и не отдавал никому денег. Тогда его соседи тоже не отдавали денег, и соседи его соседей также не отдавали денег, и т.д., т.е. никто в кинотеатре никому не отдавал денег. Противоречие с условием – ведь Дима расплачивался со своими соседями. Следовательно, наименьшее количество чиханий не меньше  $20 \cdot 25 - 1$  (чихание Димы не считаем).

Покажем, что случай, когда каждый из зрителей чихнул ровно один раз, возможен. Пронумеруем всех зрителей в произвольном порядке, начав с Димы. Пусть они чихают и расплачиваются по очереди в этом порядке. Рассмотрим любых двух соседей. В какой-то момент один из них отдал другому рубль. В некий другой момент времени второй также отдал первому рубль. Можно считать, что рубль этот один и тот же, т.е. они могут друг другу ничего не отдавать. Поэтому можно считать, что никто никому ничего не отдавал, а значит, у всех столько денег, сколько было вначале. Следовательно, после того как все чихнут в этом порядке, у зрителей будет поровну денег.

5. Если настенные часы расположены прямо напротив зеркала, то в зеркале они будут показывать 20:51. Подумайте, как поднести к зеркалу наручные часы, чтобы в зеркале они показывали 15:02. См. также статью А.Толпыго «Что мы видим в зеркале?» в этом номере журнала.

### КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №5 за 2008 г.)

6. Покажем, как проверить правильность всех надписей за 10 взвешиваний. Сравним друг с другом гири с надписями 1 и 2, 2 и 4, ..., 512 и 1024. Если результаты всех взвешиваний согласуются с надписями, то все надписи правильные. Докажем, что за 9 взвешиваний мы не сможем определить, все ли надписи правильные. Выпишем в строчку числа, соот-

ветствующие надписям на гирях:

$$1, 2, \dots, 512, 1024.$$

Пусть мы сделали какое-то взвешивание, и максимальное число среди написанных на гирях было  $2^k$ . Назовем гирю с этой надписью *особой*. В силу неравенства  $1 + 2 + \dots + 2^{k-1} < 2^k$  чаша с особой гирей должна перевесить, иначе есть неправильные надписи. Пусть чаша с особой гирей перевесила. Поставим перед числом, написанным на особой гире, вертикальную черту в нашем ряду:

$$1, 2, \dots, 2^{k-1} | 2^k, \dots, 512, 1024.$$

Если набор масс гирь слева от черты совпадает с набором надписей на них, то это же свойство выполнено для гирь, расположенных справа от черты. В этом случае результат взвешивания не будет зависеть от порядка гирь по одну сторону от черты (вспомним неравенство  $1 + 2 + \dots + 2^{k-1} < 2^k$ ). Сделаем 9 взвешиваний и поставим 9 палочек. Тогда между двумя какими-то числами палочки не будет:

$$1 | 2 | \dots | 2^{a-1}, 2^a | \dots | 512 | 1024.$$

Теперь ясно, что если на гире массой  $2^{a-1}$  будет написано  $2^a$  и наоборот, то результат каждого взвешивания будет такой же, как и при правильных надписях.

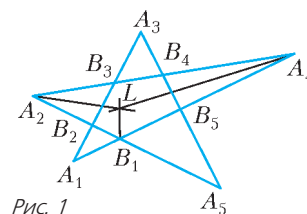


Рис. 1

7. Обозначим вершины звезды через  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ , а вершины пятиугольника через  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$ , как показано на рисунке 1.

Пусть биссектрисы углов звезды пересекаются в точке  $L$ . Докажем, что биссектрисы углов пятиугольника  $B_1B_2B_3B_4B_5$  проходят через точку  $L$ . Рассмотрим треугольник  $A_2B_1A_4$ , заметим, что биссектриса угла  $B_1$ , она же биссектриса в пятиугольнике, проходит через точку  $L$ . Аналогично доказывается для других биссектрис пятиугольника.

8. Обозначим наше число через  $x$ . Заметим, что  $x = 1$  и  $x = 2$  – плохие. Действительно, легко проверить, что 1 и 4 нельзя представить как сумму ненулевых квадратов. Для разности квадратов натуральных чисел  $a$  и  $b$ , где  $a > b$ , мы имеем равенство  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ . Сомножители  $a+b$  и  $a-b$  одинаковой четности, причем первый сомножитель больше 2. Поэтому 1 и 4 нельзя представить и как разность ненулевых квадратов.

Теперь докажем, что любое  $x \geq 3$  – хорошее. Пусть сначала  $x$  нечетно. Найдем такое  $a$ , что  $x^2 = (a+1)^2 - a^2$ . Имеем

$$x^2 = 2a + 1, \quad a = \frac{x^2 - 1}{2} - \text{целое.}$$

Тогда можно взять треугольник со сторонами  $x$ ,  $a$  и  $a+1$ , и он будет прямоугольным. Пусть теперь  $x$  – четное. Подберем такое  $b$ , что  $x^2 = (b+2)^2 - b^2$ .

$$\text{Имеем } x^2 = 4b + 4, \quad x^2 = 4(b+1),$$

$b = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1$  – целое. Тогда можно взять прямоугольный треугольник со сторонами  $x$ ,  $b$ ,  $b+2$ .

9. Пусть прямая, проведенная через точку  $M$  пересечения медиан треугольника  $ABC$ , пересекла стороны  $AB$  и  $AC$  в точках  $C_1$  и  $B_1$  соответственно (рис. 2). Пусть  $A_1$  – середина стороны  $BC$ . Легко видеть, что

$$S_{\Delta AB_1M} = \frac{2}{3} S_{\Delta AB_1A_1}, \quad S_{\Delta AC_1M} = \frac{2}{3} S_{\Delta AC_1A_1}, \quad \text{откуда } S_{\Delta AB_1C_1} =$$

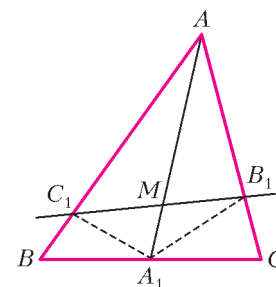


Рис. 2

$= \frac{2}{3} S_{AB_1A_1C_1} < \frac{2}{3} S_{\Delta ABC}$ , и поэтому никакая прямая, проходящая через  $M$ , не может отсекал треугольник площади  $\frac{2}{3} S_{\Delta ABC}$ .

**10.** Заметим, что длина отрезка равна разности координат его начала и конца. Так как  $100 + 99 + \dots + 51 - 50 - 49 - \dots - 1 = 2500$  – максимальная возможная сумма, то точки 1, 2, ..., 50 являются левыми концами отрезков, а 51, ..., 100 – правыми.

Рассмотрим все отрезки, концы которых дают остаток 1 от деления на 5. Их ровно 10, а их суммарная длина равна  $(51 + 56 + \dots + 96) - (1 + 6 + \dots + 46) = 500$ . Аналогично, суммарная длина отрезков с концами в числах с остатком 2, 3, 4 и 0 равна 500. Таким образом, мы получили нужное нам разбиение.

### ЭТОТ ТАИНСТВЕННЫЙ СЛЫШИМЫЙ МИР

**1.** Квадратное уравнение, которое получается из формулы (1), имеет вид

$$(c^2 - v^2)\tau^2 - 2c\tau t + c^2t^2 - h^2 = 0.$$

Из него определяем, как время излучения звука  $\tau$  зависит от времени его прихода  $t$ :

$$\tau = t + \frac{v^2t \pm \sqrt{c^2v^2t^2 + (c^2 - v^2)h^2}}{c^2 - v^2}.$$

Корень выбираем со знаком «-», так как  $\tau$  должно быть меньше  $t$  (звук сначала был излучен, а потом услышан наблюдателем). Окончательный ответ:

$$\tau = t + \frac{v^2t - \sqrt{c^2v^2t^2 + (c^2 - v^2)h^2}}{c^2 - v^2}.$$

**2.** Фразы а), б) и г) определяют одну и ту же точку.

**3.** Если самолет находится над слушателем, то координата самолета равна нулю:  $x_c = vt = 0$ . Следовательно,  $t = 0$ , а время испускания пришедшего в этот момент звука равно

$$\tau(0) = 0 + \frac{v^2 \cdot 0 - \sqrt{c^2v^2 \cdot 0^2 + (c^2 - v^2)h^2}}{c^2 - v^2} = - \frac{h}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

Координата изображения в этот момент равна

$$x_{\text{из}} = v\tau = - \frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}} h.$$

Можно сказать и так: наблюдатель «видит» звуковое изображение под углом  $\gamma = \arcsin \frac{v}{c}$  к горизонтали.

Если же над слушателем находится звуковое изображение, то координата изображения равна нулю:  $x_{\text{из}} = v\tau(t) = 0$ . Следовательно,  $\tau = 0$ , а  $t(0) = h/c$ . Координата самолета в этот момент равна

$$x_c = vt = \frac{v}{c} h.$$

Можно сказать и так: наблюдатель видит самолет под углом  $\beta = \arctg \frac{v}{c}$  к вертикали.

**4.** Скорость изображения равна скорости самолета. Минимальное расстояние между изображением и самолетом есть просто координата самолета в этот момент, поэтому

$$L_{\text{min}} = |x_c| = \frac{v}{c} h.$$

**5.** Координата самолета, согласно закону движения, равна

$$x_c = vt_1 = M \sqrt{1 - \frac{1}{M^2}} h.$$

Координата изображения – это координата самолета в тот мо-

мент  $\tau(t_1)$ , когда был излучен звук:

$$\tau(t_1) = \frac{1}{M^2 - 1} \left( -\sqrt{M^2t^2 - (M^2 - 1)\frac{h^2}{c^2}} - t \right) = -\frac{1}{M^2 - 1} t_1 = -\frac{1}{\sqrt{1 - 1/M^2}} \frac{h}{c},$$

и

$$x_{\text{из}} = v\tau(t_1) = -\frac{M}{\sqrt{1 - 1/M^2}} h.$$

**6. Указание.** Воспользуйтесь теоремой, обратной теореме о том, что в прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, есть среднее геометрическое отрезков, на которые она делит гипотенузу.

**7.** Точки максимума надо трактовать как аннигиляцию (исчезновение) двух движущихся навстречу друг другу звуковых образов.

### РАЗРЕЗАНИЯ НА ТРЕУГОЛЬНИКИ

**1.** База очевидна: для разрезания треугольника не нужно ни одной диагонали, а  $3 - 3 = 0$ . Пусть  $n$ -угольник разрезан диагональю на  $k$ -угольник и  $m$ -угольник, причем для чисел  $k$  и  $m$  утверждение о количестве диагоналей верно. Тогда  $k + m = n + 2$  и количество диагоналей, разбивающих  $n$ -угольник, равно  $(k - 3) + (m - 3) + 1 = k + m - 5 = n - 3$ .

**2.** Аналогично первому упражнению, только вместо формул  $3 - 3 = 0$  и  $(k - 3) + (m - 3) + 1 = k + m - 5 = n - 3$  используем формулы  $3 - 2 = 1$  и  $(k - 2) + (m - 2) = k + m - 4 = n - 2$ .

**3.** Пересчитывая у каждого из треугольников разбиения его стороны, получаем число  $3(n - 2) = 3n - 6$ . Поскольку каждая из  $n$  сторон многоугольника входит в состав только одного треугольника, то на долю диагоналей остаются  $(3n - 6) - n = 2n - 6$  сторон. Учтя, что каждая из диагоналей, участвующих в разрезании  $n$ -угольника на треугольники, является общей стороной двух треугольников, получаем количество диагоналей, по которым проведены разрезы:  $(2n - 6) : 2 = n - 3$ .

### «ПОДВОДНЫЕ КАМНИ» СИЛЫ АРХИМЕДА

**1.** Ниже уровня смолы находится объем  $V_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1} V = 9 \text{ см}^3$ , а выше – объем  $V_2 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} V = 3 \text{ см}^3$ . При плавлении парафина уровень жидкости не изменится.

**2.**  $m = \rho \pi r^2 h = 40 \text{ г}$ .

**3.** Уровень воды понизился на  $\Delta h = \frac{m}{\rho_B S} \frac{\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{ж}}}$ , где  $\rho_{\text{в}}$  – плотность воды,  $\rho_{\text{ж}}$  – плотность железа.

**4.**  $F = mg + \rho_{\text{в}} g \left( \frac{\pi d^2 h}{4} - \frac{m}{\rho_{\text{с}}} \right) = 8,7 \text{ Н}$ .

**5.**  $F = g \left| m \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} - \rho_1 h \pi r^2 \right|$ . **6.**  $h = H \frac{\rho_2 - \rho}{\rho_1 - \rho_2} = 1 \text{ см}$ .

**7.** Трос отклонится назад по ходу поезда на угол  $\gamma = \arctg \frac{a}{g}$  от вертикали. Сила натяжения станет равной

$$T_1 = T \sqrt{\frac{a^2 + g^2}{g^2}}.$$

**8.** В первом случае перевесит левый сосуд. Плотность свинца больше плотности алюминия, поэтому объем свинцовой гири меньше алюминиевой. Уровень воды в сосудах установится одинаковый, но в левом сосуде будет больше воды, потому что свинцовая гиря занимает меньше места, чем алюминиевая. Во втором случае будет равновесие. Бруски, в отличие от гирь, плавают и не касаются дна. На дно действует только



сила давления воды, а это давление у дна везде одинаковое. Ответ не зависит не только от положения центров масс, но и от самих масс брусьев.

9.  $\rho_v - \frac{\mu\rho_v h}{\sqrt[3]{V}} \leq \rho \leq \rho_v + \frac{\mu\rho_v h}{\sqrt[3]{V}}$ , где  $\rho_v$  – плотность воды.

10. Сила равна  $F = \rho g R h \sqrt{\left(\frac{\pi R}{2}\right)^2 + 4H^2}$  и направлена под углом  $\gamma = \arctg \frac{4H}{\pi R}$  к вертикали.

**РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП XXXV ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ**

**9 класс**

1. Могут.

Пусть в каждом плохом грибе ровно 10 червей, а в хорошем червей нет. Далее, пусть из каждого плохого гриба по одному червяку переползут в хорошие, по 9 в каждый. В результате в каждом грибе окажется по 9 червей, и все грибы будут хорошими.

2. I решение. Преобразуем исходное выражение:

$$\begin{aligned} 0 &= a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = ab(a+b)^2 + 2(a+b) + 1 = \\ &= (ab-1)(a+b)^2 + (a+b)^2 + 2(a+b) + 1 = \\ &= (ab-1)(a+b)^2 + (a+b+1)^2. \end{aligned}$$

Заметим, что  $a+b \neq 0$ , ибо в противном случае  $1=0$ .

Значит,  $1-ab = \frac{(a+b+1)^2}{a+b}$ ; поскольку числа  $a$  и  $b$  рациональны, то и  $\frac{a+b+1}{a+b}$  – рациональное число, и утверждение задачи доказано.

II решение. Умножим данное равенство на  $ab$  и преобразуем:

$$\begin{aligned} a^2b^2(a+b)^2 + 2ab(a+b) + ab &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a^2b^2(a+b)^2 + 2ab(a+b) + 1 &= 1-ab \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1-ab &= (ab(a+b)+1)^2. \end{aligned}$$

Из последнего равенства следует утверждение задачи.

III решение. Если  $ab = 0$ , то утверждение верно:  $1-ab = 1^2$ .

Если же  $ab \neq 0$ , то квадратное уравнение  $abx^2 + 2x + 1 = 0$  имеет рациональный корень  $(a+b)$  и рациональные коэффициенты. Из формулы корней квадратного уравнения следует, что его дискриминант является квадратом рационального числа. Но  $D = 4(1-ab)$ , и утверждение доказано.

3. Пусть  $K$  – точка пересечения отрезков  $A_1D$  и  $AC$  (рис.3). Из равенства  $\angle AB_1B = \angle AA_1B = 90^\circ$  вытекает, что четырехугольник  $AB_1A_1B$  вписан в окружность (с диаметром  $AB$ ), поэтому  $\angle A_1B_1K = 180^\circ - \angle A_1B_1A = \angle ABC$ . Аналогично, четырехугольник  $BC_1B_1C$  вписан в окружность (с диаметром  $BC$ ); следовательно,  $\angle DB_1K = 180^\circ - \angle C_1B_1C = \angle ABC$ . Получаем, что  $\angle A_1B_1K = \angle DB_1K$ . Из условия следует, что  $\angle A_1KB_1 = \angle DKB_1 = 90^\circ$ ; значит, прямоугольные треугольники  $A_1B_1K$  и  $DB_1K$  равны (по катету и острому углу), откуда  $A_1K = DK$ . Последнее равенство означает, что точки  $A_1$  и  $D$  симметричны относительно прямой  $AC$ ; следовательно, тре-

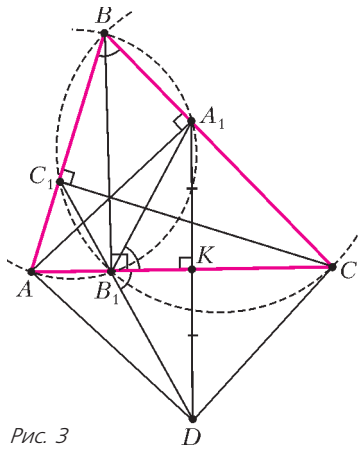


Рис. 3

гольники  $A_1AC$  и  $DAC$  симметричны относительно этой же прямой. Тогда  $\angle ADC = \angle AA_1C = 90^\circ$ , что и требовалось доказать.

4. Нет.

Раскрасим треугольники и ячейки квадрата в черный и белый цвета так, как это показано на рисунке 4.

Заметим, что из любого треугольника можно пройти в любой другой, причем в цепочке треугольников, образующих этот путь, каждые два соседних треугольника окрашены

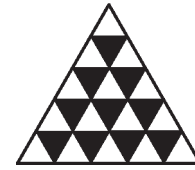
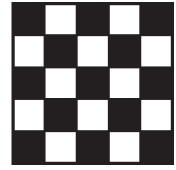


Рис. 4



различно. То же верно и для клеток квадрата. Отсюда следует, что каждые два числа, записанные в треугольниках одного цвета, должны быть записаны и в клетках одного цвета.

Но у нас имеется 15 белых треугольников, что больше как количества черных (13) клеток, так и количества белых (12) клеток. Поэтому числа в квадрате  $5 \times 5$  расставить требуемым образом невозможно.

5. 6.

Если листки лежат в следующем порядке:

**0 10 1 9 2 8 3 7 4 6 5**

(для краткости на каждом листке указано число ложных утверждений левее него), то будет 6 верных утверждений.

Покажем, что больше быть не может. Предположим, что два листка с верными утверждениями расположены рядом; тогда число листков с ложными утверждениями левее каждого из них одно и то же; это невозможно, так как на этих листках написаны разные числа. Значит, на двух подряд идущих листках одно из утверждений ложное. Поэтому всего листков с ложными утверждениями не менее пяти, так как в каждой из пяти первых пар есть ложное.

6. Утверждение задачи – это частный случай задачи 5 для 10 класса.

7. Пусть  $\angle ABC = \angle ADC = \angle EDF = \alpha$ ; по условию,  $\alpha > 90^\circ$  (рис.5). Так как  $BC \parallel AD$ , то  $ABCE$  – равнобокая трапеция, откуда

$$\angle ECF = \angle BCE - \angle BCD = \alpha - (180^\circ - \alpha) = 2\alpha - 180^\circ.$$

Далее, пусть  $P$  – центр описанной окружности  $\omega_1$  треугольника  $DEF$ . Поскольку  $\angle EDF > 90^\circ$ , точка  $P$  лежит внутри угла  $EDF$ , причем точки  $D$  и  $P$  лежат по разные стороны от прямой  $EF$ . В окружности  $\omega_1$  дуга  $EDF$  дополняет дугу величины  $2\alpha$ , на которую опирается угол  $EPF$ , до полной окружности, поэтому центральный угол  $EPF$  равен  $360^\circ - 2\alpha$ . Получаем, что  $\angle ECF + \angle EPF = (2\alpha - 180^\circ) + (360^\circ - 2\alpha) = 180^\circ$ ; значит, четырехугольник  $CEPF$  вписанный, т.е. точка  $P$  лежит на окружности  $\omega$ , что и требовалось доказать.

8. 20.

Мы будем оценивать число  $S$  – сумму количеств ничьих всех 8 шахматистов. Эта сумма ровно в 2 раза больше числа ничьих в турнире (каждую ничью посчитали 2 раза – у обоих игроков). Докажем, что  $S \leq 41$  – тогда число ничейных партий в турнире не превосходит 20, так как оно целое. Это число и будет ответом, поскольку пример с 20 ничьими существует (рис.6; шахматисты обозначены буквами  $A, B, C, D, E, F, G$  и  $H$ ).

Заметим сразу, что если два человека никому не проиграли,

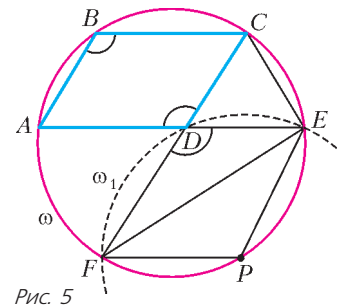


Рис. 5

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	1/2	1/2	1	1/2	1	1/2	1/2	1/2
B	1/2	0	1	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
C	1/2	0	1	1/2	1/2	1	1/2	1
D	0	1/2	1/2	0	1	1/2	1/2	1/2
E	1/2	1/2	1/2	0	1	1/2	1/2	1
F	0	1/2	0	1/2	1/2	0	1	1/2
G	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	0	1	1/2
H	1/2	1/2	0	1/2	0	1/2	1/2	0

Рис. 6

то они сыграли друг с другом вничью и потому, по условию, имеют разное число очков; то же самое верно, если они ни у кого не выиграли. Отсюда сразу следует, что есть не больше одного человека с 7 ничьими и не больше двух человек с 6 ничьими (такой человек либо никому не проиграл, либо ни у кого не выиграл).

Кроме того, людей с 5 ничьими, у которых обе результативные партии выиграны или обе проиграны, – тоже не больше чем по одному. Заметим, что все остальные игроки с 5 ничьими имеют по  $3\frac{1}{2}$  очка.

Пусть есть человек  $X$  с 7 ничьими; тогда других игроков с 5 ничьими быть не может, ибо у них будет столько же очков, сколько у  $X$ , причем они с  $X$  сыграют вничью. Значит, людей с 5 ничьими в этом случае не больше 2, и  $S \leq 7 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 41$ . Пусть теперь человека с 7 ничьими нет. Оценим в этом случае количество игроков с 5 ничьими и  $3\frac{1}{2}$  очками. Каждый из них должен был сыграть с каждым не вничью; однако у них всего по 2 результативных партии – значит, их не больше 3, а всего игроков с 5 ничьими не больше  $3 + 2 = 5$ . Следовательно, и в этом случае  $S \leq 2 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 4 = 41$ , что и требовалось.

### 10 класс

#### 1. 0.

Так как  $g(x) = (f(x))^3 - f(x) = f(x)(f(x)-1)(f(x)+1)$ , то корнями многочлена  $g(x)$  являются корни трехчленов  $f(x)$ ,  $f(x) - 1$  и  $f(x) + 1$ . Ясно, что любое число может быть корнем только одного из них.

Пусть  $y_0$  – искомая ордината вершины. Предположим, что  $y_0 \neq 0$ . Будем считать, что старший коэффициент в  $f(x)$  положителен (иначе заменим  $f(x)$  на  $-f(x)$ , при этом  $y_0$  изменится на  $-y_0$ ). Предположим, что  $y_0 > 0$ ; тогда  $f(x) > 0$  и  $f(x) + 1 > 0$  при всех  $x$ , значит, корни многочлена  $g(x)$  являются корнями  $f(x) - 1$ , а их не больше двух. Если же  $y_0 < 0$ , то трехчлены  $f(x)$  и  $f(x) - 1$  имеют по два корня, значит,  $g(x)$  имеет хотя бы 4 корня. Оба случая невозможны; значит,  $y_0 = 0$ .

*Замечание.* При  $y_0 = 0$   $f(x)$  имеет один корень,  $f(x) + 1$  – ни одного, а  $f(x) - 1$  – два, поэтому  $g(x)$  как раз имеет три корня.

2. Например, при  $n = 101! - 101$  произведение первых  $n + 100$  натуральных чисел равно произведению  $n$  подряд идущих чисел, начиная с 102 и заканчивая  $n + 101$ . Действительно, после сокращения равенство  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n + 100) = 102 \cdot 103 \cdot \dots \cdot (n + 101)$  принимает вид  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 101 = n + 101$ , что верно.

*Замечание.* Существует бесконечная серия подобных примеров.

#### 3. Может.

Назовем набор из 17 настоящих монет *хорошим*, а набор из 12 настоящих и 5 фальшивых монет – *плохим*. Опишем возможные действия Кости.

Разобьем 17 монет из оставшегося у него набора на четыре группы  $A, B, C, D$ , содержащие 2, 3, 5 и 7 монет соответ-

ственно. При первом взвешивании на одну чашу весов положим группы  $A$  и  $B$ , а на другую –  $C$ . При втором взвешивании на одну чашу весов положим группы  $A$  и  $C$ , а на другую –  $D$ . Если в одном из взвешиваний весы не показали равновесия, то оставшийся у Кости набор плохой. Покажем, что если весы в обоих случаях показали равновесие, то оставшийся у Кости набор хороший. Пусть это не так, и количества фальшивых монет в группах  $A, B, C, D$  равны  $a, b, c, d$  соответственно. Тогда  $a + b + c + d = 5$ . Из равновесия при двух взвешиваниях следует  $a + b = c$  и  $a + c = d$ , откуда  $5 = a + b + c + d = a + b + (a + b) + (2a + b) = 4a + 3b$ . В случаях  $a = 0$  или  $b = 0$  получаем  $b = \frac{5}{3}$  или  $a = \frac{5}{4}$  соответственно, что невозможно. Если же  $a \geq 1$  и  $b \geq 1$ , то  $4a + 3b \geq 7 > 5$ . Противоречие.

#### 4. Из симметрии относительно линии центров $l$ имеем:

$AB \parallel CD \perp l$ ,  $OA = OB$ ,  $\angle OAB = \angle OBA = \alpha$ ,  $\angle OCD = \angle ODC = \beta$  (рис.7). По теореме об угле между касательной и хордой,  $\angle OAC = \angle OBA = \alpha$ ,  $\angle OCA = \angle ODC = \beta$ .

Так как  $AB \parallel CD$ , то  $\angle OMC = \angle OAB = \alpha$ ; значит, и  $\angle AOC = 180^\circ - \alpha - \beta = \angle MOC$ . Треугольники  $OAC$  и  $OMC$  равны по стороне ( $OC$  – общая) и двум углам, поэтому  $OA = OM$  и  $\angle AOC = \angle MOC = 90^\circ$ .

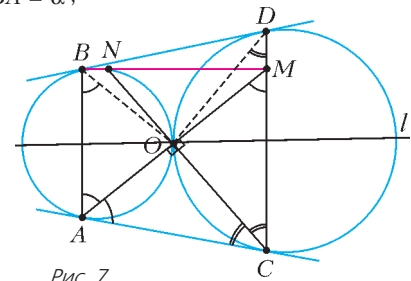


Рис. 7

В треугольнике  $ABM$  имеем  $AO = OM = OB$ ; следовательно, он прямоугольный, т.е.  $\angle ABM = 90^\circ$ . Так как  $\angle AON = \angle MOC = 90^\circ$ , то  $AN$  – диаметр окружности  $\omega_1$ , откуда  $\angle ABN = 90^\circ$ . Итак,  $\angle ABM = \angle ABN = 90^\circ$ , значит, точки  $B, M, N$  лежат на перпендикуляре к  $AB$ , проведенном через точку  $B$ .

#### 5. Не может.

*I решение.* При  $m = 1, 2, 3$  последняя цифра числа  $2^m$  не равна 6. Предположим, что сумма цифр числа  $2^m$  при некотором  $m > 3$  равна 8, и оно оканчивается на 6. Число  $2^m$  не может оканчиваться на 06 или на 26, так как в этом случае оно не делится на 4. Следовательно, оно оканчивается на 16 (иначе сумма цифр будет больше 8), и поэтому имеет десятичную запись  $\overbrace{1000\dots 016}^{k \text{ цифр}}$ . Тогда  $2^m = 10^k + 16$ , т.е. число  $10^k + 16$  – степень двойки.

Но если  $k \geq 5$ , то  $10^k + 16 = 2^4(2^{k-4} \cdot 5^k + 1)$ , и в скобках получаем нечетный множитель, больший 1. Остается рассмотреть случаи  $k = 2, k = 3, k = 4$ :  $10^2 + 16 = 4 \cdot 29$ ,  $10^3 + 16 = 8 \cdot 127$ ,  $10^4 + 16 = 32 \cdot 313$ . Таким образом,  $10^k + 16$  не является степенью двойки ни при каком натуральном  $k$ , что и требовалось доказать.

*II решение.* Предположим противное, и пусть  $2^m$  оканчивается на 6 и имеет сумму цифр, равную 8. Заметим, что  $2^1$  оканчивается на 2,  $2^2$  оканчивается на 4,  $2^3$  оканчивается на 8,  $2^4$  оканчивается на 6,  $2^5$  оканчивается на 2. Далее последняя цифра степени двойки повторяется с периодом 4, поскольку последняя цифра числа  $2^m$  определяется однозначно последней цифрой числа  $2^{m-1}$ . Таким образом,  $2^m$  оканчивается на 6 тогда и только тогда, когда  $m$  делится на 4.

Сумма цифр имеет тот же остаток при делении на 3, что и само число, поэтому  $2^m$  должно иметь остаток 2 при делении на 3. Заметим, что  $2^1$  имеет остаток 2 при делении на 3,  $2^2$  имеет остаток 1 при делении на 3,  $2^3$  имеет остаток 2 при де-

лении на 3, и далее остатки степени двойки повторяются с периодом 2. Таким образом,  $2^m$  имеет остаток 2 при делении на 3 тогда и только тогда, когда  $m$  нечетно. Это противоречит тому, что  $m$  должно делиться на 4.

6. Решение будет опубликовано в «Задачнике «Кванта» (задача является частным случаем задачи M2125).

7. Решение будет опубликовано в «Задачнике «Кванта» (решение задачи следует из решения задачи M2124).

11 класс

1. 0.

Так как

$$g(x) = (f(x))^5 - f(x) = f(x)(f(x) - 1)(f(x) + 1)((f(x))^2 + 1),$$
 то корнями нашего многочлена являются корни трехчленов  $f(x)$ ,  $f(x) - 1$  и  $f(x) + 1$  (поскольку многочлен  $(f(x))^2 + 1$  всюду положителен). Ясно, что любое число может быть корнем только одного из них.

Далее см. решение задачи 1 для 10 класса.

2. 98.

Пусть мы заполнили таблицу согласно условию, а клетка  $A$  свободна. Так как при постановке в нее любого значка должна получаться линия из одинаковых значков, то существует линия, содержащая ее, в которой все остальные клетки заполнены крестиками, и то же самое верно для ноликов (эти линии должны быть, естественно, строкой и столбцом). В частности, все свободные клетки стоят в разных строках и столбцах.

Предположим, что пустых клеток больше двух. Тогда для двух из них, скажем для  $A$  и  $B$ , направления линии крестиков совпадают (т.е. либо для обеих крестики стоят в их горизонталях, либо для обеих – в вертикалях; рис.8). Пусть крестики стоят в их столбцах, а нолики – в их строках; тогда в

A	o	o	?	o	o	o	o	o
x			x					
?	o	o	B	o	o	o	o	o
x			x					
x			x					
x			x					
x			x					
x			x					
x			x					
x			x					

Рис. 8

	o	o	o	o	o	o	o	o
x	x	x	x	x	x	x	x	x
x	o	*	*	*	*	*	*	*
x	o	*	*	*	*	*	*	*
x	o	*	*	*	*	*	*	*
x	o	*	*	*	*	*	*	*
x	o	*	*	*	*	*	*	*
x	o	*	*	*	*	*	*	*
x	o	*	*	*	*	*	*	*
x	o	*	*	*	*	*	*	*

Рис. 9

пересечении строки, содержащей  $A$ , со столбцом, содержащим  $B$ , должен стоять и крестик, и нолик (ибо это пересечение не пусто); противоречие. Значит, пустых клеток не больше двух. Пример с двумя пустыми клетками приведен на рисунке 9 (вместо звездочек могут стоять любые значки).

3. I решение. Так как  $\sin t \leq t$  при  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ , то имеем

$$x \cos x = x \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \leq x\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\pi^2}{16} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 \leq \frac{\pi^2}{16},$$

что и требовалось.

II решение. Перепишем доказываемое неравенство в виде

$$\sqrt{x \cos x} \leq \frac{\pi}{4}.$$

По неравенству о средних имеем

$$\sqrt{x \cos x} \leq \frac{x + \cos x}{2}.$$

В правой части стоит неубывающая функция (так как  $(x + \cos x)' = 1 - \sin x \geq 0$ ); значит,

$$x + \cos x \leq \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

откуда и следует требуемое.

4. Пусть  $A_0, B_0, C_0$  – середины сторон  $BC, CA, AB$  соответственно (рис.10). Так как  $OA_0 \perp BC$  и  $B_0C_0 \parallel BC$ , то  $A_0O$

– высота треугольника  $A_0B_0C_0$ . Аналогично,  $B_0O$  и  $C_0O$  – высоты треугольника  $A_0B_0C_0$ . Поэтому  $O$  является точкой пересечения высот треугольника  $A_0B_0C_0$ . Треугольник  $ABC$  подобен треугольнику  $A_0B_0C_0$  с коэффициентом 2, поэтому  $\overline{HA} = 2\overline{A_0O}$ .

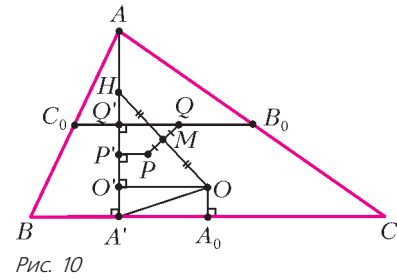


Рис. 10

Обозначим через  $P, M, Q$ , соответственно, центр описанной окружности треугольника  $HOA'$ , середину отрезка  $HO$  и точку, симметричную точке  $P$  относительно прямой  $OH$ . Поскольку точка  $P$  равноудалена от точек  $H$  и  $O$ , точки  $P$  и  $Q$  лежат на серединном перпендикуляре к отрезку  $HO$ , следовательно, точки  $P$  и  $Q$  симметричны относительно  $M$ . Так как  $O$  и  $H$  также симметричны относительно  $M$ , получаем, что  $\overline{OQ} = \overline{PH}$ .

Пусть  $O', P', Q'$  – проекции точек  $O, P, Q$  на высоту  $AA'$ . Проецируя равенство векторов, получаем, что

$$\overline{O'Q'} = \overline{P'H} = \frac{1}{2}\overline{A'H} \quad (\text{так как } P' \text{ – середина } A'H).$$

Значит,  $\overline{A'Q'} = \overline{A'O'} + \overline{O'Q'} = \frac{1}{2}\overline{HA} + \frac{1}{2}\overline{A'H} = \frac{1}{2}\overline{A'A}$ . Это и означает, что  $Q'$  совпадает с серединой высоты  $AA'$ , поэтому  $Q'$  и  $Q$  лежат на средней линии  $B_0C_0$ .

5. 8 прямых.

Пусть  $l_1, l_3, l_5$  – прямые, на которых отмечены одна, три и пять точек соответственно, а  $A$  – единственная отмеченная точка на  $l_1$ . Тогда все остальные прямые проходят через эту точку – назовем эти прямые *меридианами*, или параллельны  $l_1$  – назовем их *параллелями*. Заметим, что каждый меридиан пересекается с каждой параллелью, и все такие точки пересечения различны; более того, этими точками исчерпываются все точки пересечения, кроме  $A$ . Значит, на каждом меридиане отмечено поровну точек, и на каждой параллели –

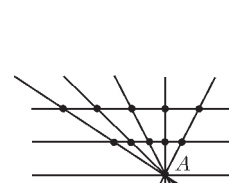


Рис. 11

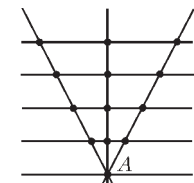


Рис. 12

тоже. Тогда из условия следует, что либо на каждом меридиане по три точки, а на каждой параллели – по 5 (а значит, есть 2 параллели и 5 меридианов; рис.11), либо наоборот (а значит, есть 4 параллели и 3 меридиана; рис.12). В обоих случаях получилось 8 прямых.

6. Поскольку треугольник  $ABD$  равнобедренный, получаем  $\angle ADB = \angle ABD$ . Так как четырехугольник  $ABDK$  вписан, то  $\angle AKB = \angle ADB$  и  $\angle ABD = 180^\circ - \angle AKD = \angle LKA$  (рис.13). Значит, в треугольнике  $BKL$  высота  $KA$  является биссектрисой, а следовательно, и медианой; тогда точки  $L$  и  $B$  симметричны относительно  $AC$ , поэтому отрезки  $CL$  и  $CB$  также

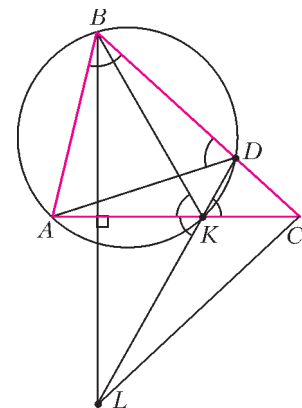


Рис. 13



симметричны. Значит, их длины равны.

7. Верно.

Обозначим через  $\alpha_2(d)$  степень, с которой входит 2 в разложение числа  $d$  на простые множители.

Если среди чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  есть одно или три нечетных числа, то при любом натуральном  $k$  число  $a^k + b^k + c^k$  нечетно, т.е. можно положить  $n = 1$ . Все три числа четными быть не могут. Пусть теперь среди них ровно одно четное – скажем,  $a$ . Исследуем, чему может быть равно число  $\alpha_2(b^k + c^k)$ .

При четном  $k$  каждое из чисел  $b^k$  и  $c^k$  при делении на 4 дает остаток 1, поэтому  $\alpha_2(b^k + c^k) = 1$ . Пусть  $k$  нечетно.

Тогда  $b^k + c^k = (b+c)(b^{k-1} - b^{k-2}c + \dots + c^{k-1})$ . Во второй скобке стоит сумма нечетного количества ( $k$ ) нечетных слагаемых, т.е. нечетное число. Таким образом,

$$\alpha_2(b^k + c^k) \leq \alpha_2(b+c) \text{ для любого } k.$$

Заметим теперь, что если  $k > \alpha_2(b+c)$ , то  $\alpha_2(a^k) \geq k > \alpha_2(b+c) \geq \alpha_2(b^k + c^k)$ . Значит,  $\alpha_2(a^k + b^k + c^k) \leq \alpha_2(b+c)$  при всех  $k > \alpha_2(b+c)$ . Тогда ясно, что можно выбрать  $n > \alpha_2(b+c)$  так, что и при  $k \leq \alpha_2(b+c)$  число  $a^k + b^k + c^k$  не будет делиться на  $2^n$ , что и требовалось.

*Замечание.* Аналогично  $\alpha_2(d)$  можно определить  $\alpha_p(d)$  для любого простого  $p$ . Можно показать, что при любом нечетном простом  $p$  последовательность  $\{\alpha_p(a^k + b^k + c^k)\}$  может оказаться неограниченной.

8. 580.

*1 решение.* Рассмотрим расстановку, удовлетворяющую условию, и соединим каждые два соседних числа стрелкой от меньшего к большему. Так как общее количество стрелок нечетно, найдутся две подряд идущие стрелки, направленные в одну сторону:  $a \rightarrow b \rightarrow c$ . Значит,  $b \leq c - 20$ ,  $a \leq b - 20 \leq c - 40$ , поэтому  $100 \leq a + b \leq 2c - 60$ , откуда  $c \geq 80$ . Все

числа, кроме  $c$ , можно разбить на 5 пар соседних чисел; значит, сумма всех чисел не меньше  $80 + 5 \cdot 100 = 580$ .

Один из примеров расстановки, в которой эта оценка достигается, приведен на рисунке 14.

*11 решение.* Приведем другое доказательство того, что сумма не меньше 580. Заметим, что в любой паре соседних чисел одно из них не меньше 60 (если большее из них меньше 60, то второе меньше 40, а их сумма меньше 100). Рассмотрим максимальное число  $c$ . Разобьем остальные числа на пары соседних (сумма в каждой паре не меньше 100, значит, сумма всех этих 10 чисел не меньше 500). Далее, в каждой паре отметим число, не меньшее 60; также отметим число  $c$ . Мы отметили 6 чисел из 11, значит, два из них – соседние. Тогда большее из них не меньше  $60 + 20 = 80$ , поэтому и  $c \geq 80$ . Значит, сумма всех чисел не меньше  $80 + 500 = 580$ .

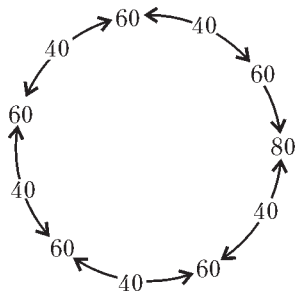


Рис. 14

## РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП XLIII ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

### 7 класс

- $v_{cp} = 10$  мм/ч.    2. 13 часов 25 минут.
- $V_{II} = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} a^3 = 700$  см<sup>3</sup>.    4.  $l = 1$  км.

### 8 класс

- В 1,3 раза.
- 1)  $V = 0,51$  л или  $V = 0,255$  л. 2)  $\rho_i = 1,4; 0,6; 0,2$  г/см<sup>3</sup> или  $\rho_i = 1,4; 1,2; 0,8; 0,6$  г/см<sup>3</sup>.
- 15,0 psi = 103,3 кПа.
- 1)  $m_0 \approx 227$  г. 2)  $-10$  кДж <  $Q$  < 70 кДж.

### 9 класс

- $p_1 = 4,4$  кПа;  $\beta_1 = \frac{16}{7}$ .    2.  $h_B = 2\frac{7}{9}H$ ,  $h_M = 3\frac{2}{9}H$ .
- $R_1 = 9$  Ом.    4.  $v_0 = 35$  м/с;  $v = 20$  м/с.

### 10 класс

- $v = 5$  м/с.    2.  $F = \frac{M(1+\mu) + 2m_2}{m_1 + m_2 + M} m_1 g$ .
- $h_B = 7\frac{37}{50}H$ ,  $h_6 = 10\frac{13}{50}H$ .
- $P_{max} = P_0 \frac{(I_1 + I_2)^2}{4I_1 I_2} = 25$  Вт.    5.  $C = -R$ .

### 11 класс

- 1) Это процессы 1-2, 2-3, 4-5 и 5-6. 2)  $\Delta U_{12} = 3pV$ ,  $\Delta U_{23} = 9pV$ ,  $\Delta U_{45} = -9pV$ ,  $\Delta U_{56} = -3pV$ . 3) Это процессы 3-4 и 6-1.
- $h \approx 280$  км.    3.  $L = l\sqrt{2}$ .    4.  $Q = \frac{L\epsilon^2}{8r^2}$ .
- Прямое и увеличенное в 2 раза изображение золотой рыбки карась видит на расстоянии  $3R$ .

# Квант журнал ©

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**С.А.Дориченко, А.А.Егоров, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.Е.Пацхверия, М.В.Сумнина, В.М.Хлебникова**

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**Е.В.Морозова**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева**

**Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»**

**Тел.: 930-56-48**

**E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info,**

**phys@kvant.info**

**Сайт: kvant.info**

**Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени**

**«Чеховский полиграфический комбинат»**

**142300 г.Чехов Московской области,**

**Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru**

**Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00**

**Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59**

## Задача Успенского РЕШЕНА

В шахматной математике весьма популярна задача о расстановке наименьшего числа одноименных фигур (коней, ладей, ферзей, королей и слонов), которые держат под обстрелом все свободные поля шахматной доски.

Коней достаточно иметь 12 (рис.1), причем существуют всего две необходимые расстановки – вторая получается из данной при зеркальном отражении (относительно вертикальной или горизонтальной прямых, делящих доску пополам). Ладей требуется 8, и нетрудно убедиться, что общее число расстановок составляет  $2 \times 2^8 - 8!$  На рисунке 2 показана самая популярная из них. Ферзей хватает 5 (рис.3), существует 4860 способов расставить их нужным образом. Наименьшее число королей, которые держат все свободные поля доски, равно 9 (рис.4), всего имеется 3600 расстановок. Наконец, достаточно поставить на доску 8 слонов, и все остальные поля будут под контролем (рис.5). Подсчитано, что всего необходимых расстановок 20736.

Эта задача допускает множество обобщений. Самые известные из них – переход к произвольным доскам размера  $n \times n$  или рассмотрение различных наборов фигур, необязательно одноименных. Вот еще один весьма оригинальный подход, придуманный известным математиком профессором В.А.Успенским, заведующим кафедрой математической логики и теории алгоритмов мехмата МГУ.

Напомним, что в русских шашках на 64-клеточной доске три дамки при правильной игре всегда ловят одну неприятельскую, если она не стоит на «большой дороге», т.е. на диагонали a1-h8. В.А.Успенский предложил следующее шахматно-математическое обобщение этой шашечной ситуации.

**Какое наименьшее число одноименных фигур данного цвета могут поймать одну такую же фигуру противоположного цвета (все эти фигуры ходят по шахматным правилам, а других на доске нет)?**

Рассмотрим эту задачу для каждой из пяти фигур, предполагая, что сильнейшая сторона – белые и ход всегда их (исходное положение произвольное).

**Ферзи.** Пять белых ферзей, помогая друг другу, всегда могут занять положение на рисунке 3, и черному ферзю некуда скрыться. Однако, оказывается, что достаточно и 4 ферзей (рис. 6). Эту симпатичную позицию указал А.Ханян – ферзи здесь расположены в

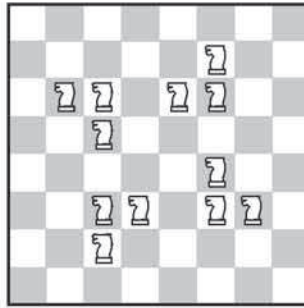


Рис.1

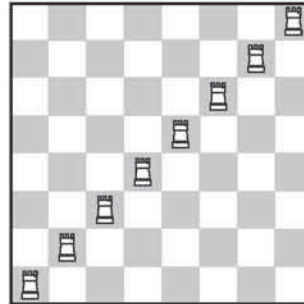


Рис.2

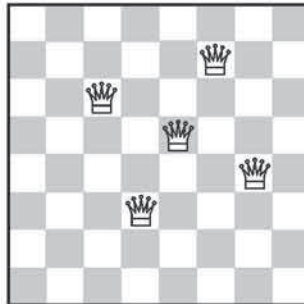


Рис.3

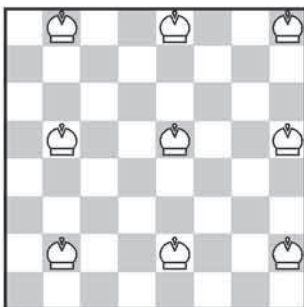


Рис.4

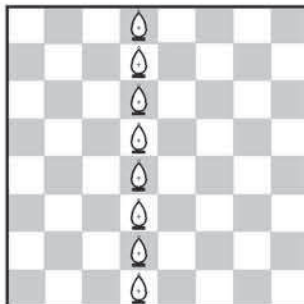


Рис.5

вершинах параллелограмма, напоминающего стрелку компаса, вписанную в квадрат. Можно убедиться, что, вза-

имодействуя друг с другом, белые ферзи легко располагаются указанным образом. После этого в распоряжении черного ферзя останутся три свободных поля – b4, f1 и g6, не связанных

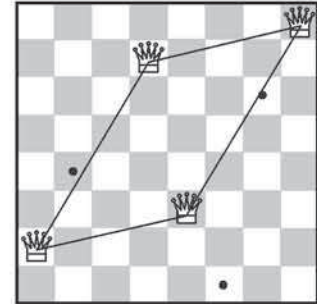


Рис.6

между собой ходом ферзя. Значит, на каком бы из них черный ферзь ни находился, при своем ходе он не может перескочить на безопасное поле и сразу же попадает под бой.

**Ладьи.** Шесть белых ладей (а тем более меньшее количество) не могут справиться с одной черной. Действительно, где бы они ни находились, найдутся две свободные горизонтали и две свободные вертикали. Четыре поля на пересечении этих линий образуют прямоугольник и не атакованы. При своем ходе черная ладья всегда может перескочить с одного из безопасных полей на другое. А вот 7 ладей без труда ловят неприятельскую. Например, если на рисунке 2 снять любую белую ладью, то в распоряжении черной будет только это поле и, делая ход, она встанет под удар. (Очевидно, что одна черная ладья не мешает семи белым, действующим сообща, занять семь разных вертикалей и горизонталей.)

**Слоны.** Пусть фигуры белопольные; тогда четыре белых слона, помогая друг другу, занимают поля d1, d3, d5 и d7. В результате для белопольного черного слона на доске не остается свободных полей.

**Короли.** Два белых короля легко отесняют неприятельского на край доски, а затем в угол. У того не остается пространства, и он вынужден встать под бой (в данном случае математические правила важнее шахматных).

**Кони.** Для этого случая составлена компьютерная программа, позволяющая трем белым коням всегда справиться с одним черным. Конечно, белый конь e5 один «обыгрывает» коня h8 при ходе черных; но это исключение из правила.

Похоже, проблема Успенского полностью решена!

Е. Гук



## Антибликовые очки и ЖК-дисплей

При отражении света от гладких поверхностей часто возникают блики. Естественный свет после отражения становится частично поляризованным. Поэтому для устранения бликов используются специальные антибликовые очки, пропускающие свет только одной поляризации. Однако поляризационные очки плохо совместимы с жидкокристаллическими экранами, например компьютеров или мобильных телефонов, которые являются источниками линейно поляризованного света.

*(Подробнее – на странице 58 внутри журнала)*



*Продукты с физикой*

