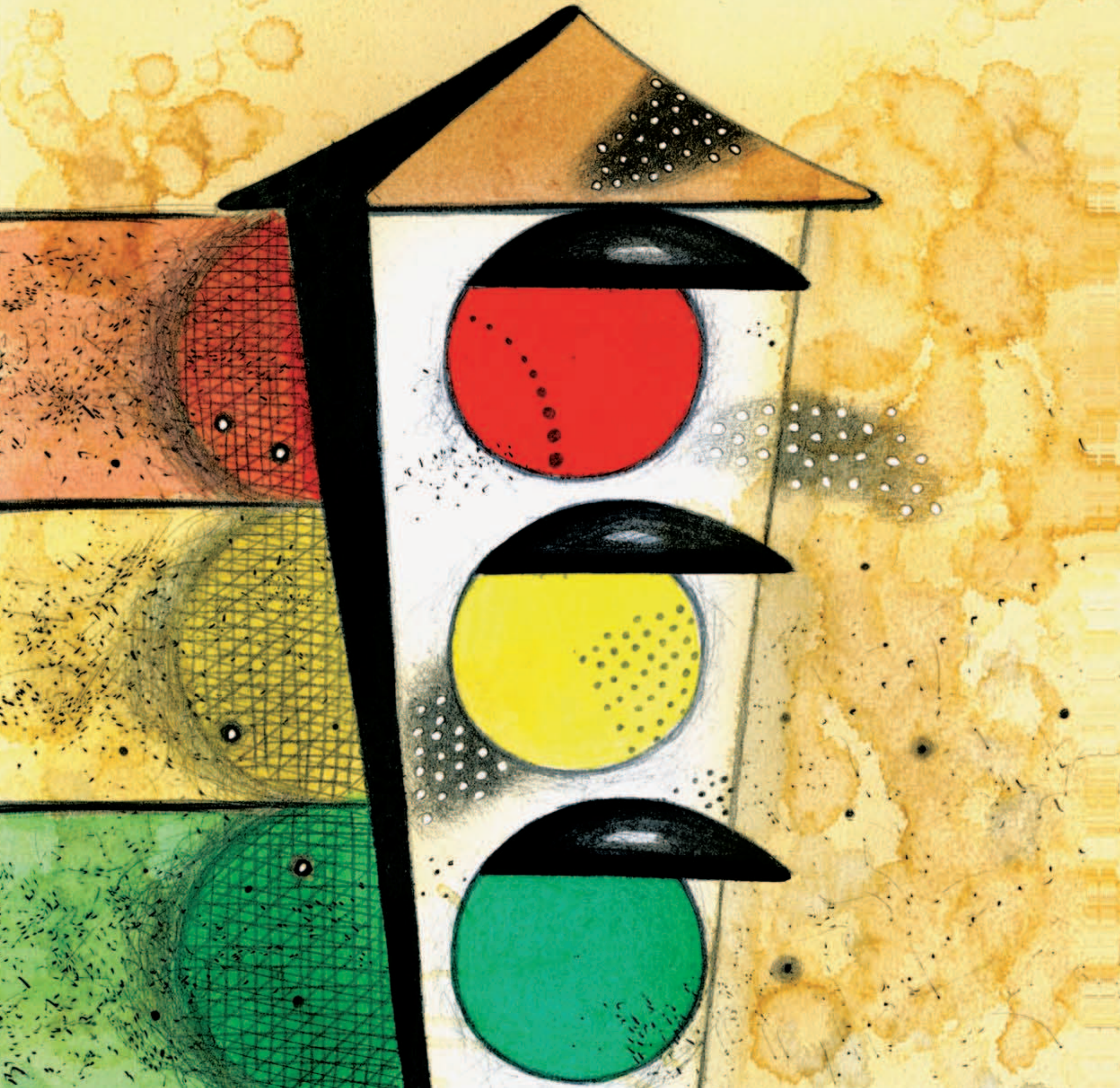
ISSN 0130-2221
2008 · №6
НОЯБРЬ/ДЕКАБРЬ

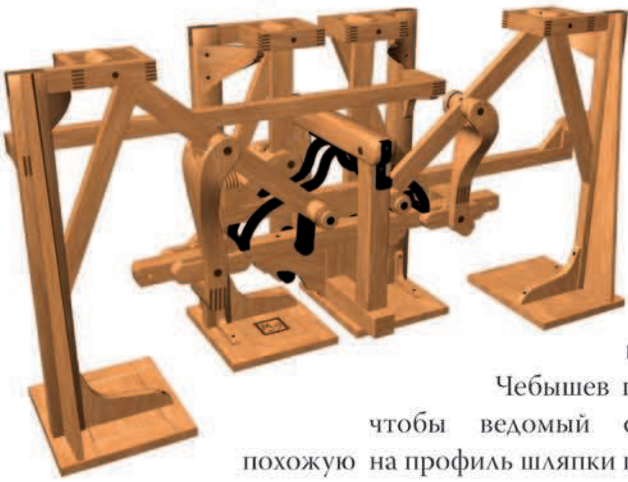
КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



Механизмы П. Л. Чебышева

Стопоходящая машина



Исследуя плоские шарнирные механизмы, великий российский математик Пафнутий Львович Чебышев создал первый в мире действующий шагающий механизм.

Разберем схему этого устройства. Красные точки на рисунке – два неподвижных шарнира, вокруг правого вращается маленькое ведущее звено, три других звена механизма имеют одинаковую длину. Этот механизм называется лямбда-механизмом, так как своим видом он напоминает букву λ из греческого алфавита.

Чебышев подобрал параметры механизма так, чтобы ведомый синий шарнир описывал траекторию, похожую на профиль шляпки гриба. Нижнему краю «шляпки» соответствует половина времени движения ведущего звена по окружности. При этом нижняя часть синей траектории очень мало отличается от отрезка прямой.

Добавим к синему шарниру лямбда-механизма «ногу» со стопой. Взяв четыре таких устройства и соединив их в единое целое, Чебышев создает шагающий механизм. «Стопоходящая машина» экспонировалась на Всемирной выставке в Париже в 1878 году и вызвала там всеобщее восхищение.

Оригинальный механизм, демонстрировавшийся на выставке, бережно хранится в Политехническом музее в Москве.

Сортировалка

В этом устройстве параметры изогнутого лямбда-механизма подобраны так, что часть траектории синего шарнира близка к дуге некоторой окружности. Время движения по этой части траектории составляет более половины продолжительности цикла, так как соответствует движению ведущего звена по большей части окружности.

Добавим к лямбда-механизму новое звено – «радиус» красной окружности. Если свободный конец «радиуса» будет управлять движением еще одного звена – коромысла, то оно большую часть времени будет оставаться почти неподвижным, а затем совершать быстрое колебательное движение.

Эту красивую геометрическую идею Пафнутий Львович Чебышев использовал при создании изящного механизма, сконструированного для решения важной практической задачи – сортировки зерна. И в XIX веке, и в наши дни зерно сортируют по массе с целью отобрать лучшие – более тяжелые – зерна.

Засыпанное в короб зерно поступает в лоток, закрепленный на конце коромысла. Во время «остановки» коромысла, продолжающейся более половины цикла, зерно заполняет лоток. При быстром качании коромысла зерно резко выбрасывается из лотка, и происходит сортировка по массе.

Оригинальный механизм хранится в Музее истории Санкт-Петербургского университета.

Полное описание механизмов П.Л.Чебышева и фильмы о них можно найти на сайте «Математические этюды» (http://etudes.ru)

журнал© Квант
НОЯБРЬ ДЕКАБРЬ 2008 № 6

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Учредители — Российская академия наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна), ИФТТ РАН

Бюро Квантум

Самая светлая революция и ее творцы

Ю.НОСОВ

Небольшое вступление

Нас уже не удивляет, что во многих светофорах лампочки заменили светодиодами, что подсветка жидких кристаллов полностью перешла к светодиодам, а огромные цветные экраны на стадионах, площадях, эстрадах не только дублируют тех, кого аудитория почти не видит, но и прихорашивают их, а завтра и вовсе заменят – «интеллектуальные», «умные» светодиоды способны на чудеса информационных мистификаций. Светодиодные маяки, створные огни, бакены несоизмеримо эффективнее традиционных; пожаро-, взрыво-, ударобезопасные фонари служат шахтерам, дайверам, спелеологам; ярчайшие, но холодные светильники обеспечивают комфортные условия хирургам, ювелирам, ТВ-дикторам.

А ведь еще совсем недавно, лет десять тому назад, светодиоды были знакомы нам как исключительно скромные, простенькие светлячки в кнопках включения-выключения телевизоров, компьютеров, стиральных машин. Теперь нас не удивляют и «новые места» работы светодиодов: фары дальнего света, салоны самолетов, повсеместная подсветка зданий. Вслед за этим мы без эмоций воспримем и решающий светодиодный прорыв – освещение наших квартир (пока это лишь область фантазии энергетиков, строителей, продвинутых дизайнеров).

Говорят, утрата удивительной способности удивляться есть одно из самых неприятных последствий воздействия технического прогресса на человека – черствеет душа. А удивляться есть чему. Активная область светодиодного чипа, в которой рождается свет, по своему объему в 100000 раз меньше нити накала 60-ваттной лампочки, а светят они почти одинаково; нить накала перегорает через 500 часов, а светодиод может светить «вечно», правда в паспортах для страховки гарантируют «лишь» 50–100 тысяч часов! Светодиоды уже сравнялись с лучшими люминесцентными трубками, но если требуется засвечивать какую-то определенную зону, то светодиоды оказываются экономичнее своих предшественников в десятки раз. И достигается это лишь специальной формой пластмассового корпуса-линзы, без дорогой и громоздкой внешней оптики. Когда необходим какой-нибудь спектрально-однородный свет, светодиоды вообще вне конкуренции – это заложено в их природе, светофильтры им не нужны (как раз наоборот – излучать в широком спектре, свойственном белому свету, светодиоды не могут, но и эту проблему уже решили).

Олег Владимирович Лосев

Итак, светодиодную революцию, начавшуюся в 1990-е годы, в ее внешнем проявлении характеризуют три момента: резкое повышение интенсивности и экономичности свечения («новые» светодиоды называют суперяркими); свечение любого цвета от густо-малинового до фиолетового, включая и белый; формирование требуемого пространственного распределения светового потока. Общий итог – создание бурно развивающейся индустрии «полупроводникового света», способной принципиально преобразовать информационную, развлекательную и осветительную технику. Говоря высоким слогом, к 2020–2025 годам ожидается кардинальное изменение световой, цветовой, информационной, культурообразующей составляющих среды обитания человека.

Содержательная же суть революции сосредоточена в крохотном светодиодном чипе, представляющем собой сложнейшую квантово-механическую структуру, изготавливаемую методами нанотехнологии. Успех на долгом и трудном пути был достигнут общими усилиями американских, русских, японских, немецких исследователей и технологов. А началось все в далеком 1922 году, когда Олег Лосев, девятнадцатилетний лаборант Нижегородской радиолаборатории, занялся кристаллическими детекторами... Но прежде – необходимое отступление.

О том, как мы видим, и о световых измерениях

Свет воспринимается сетчаткой, устилающей глазное дно, именно на нее линзой-хрусталиком фокусируется изображение окружающих предметов (рис.1). Сетчатка содержит около 125 миллионов нервных фоторецепторов, которые из-за их продолговатости называют

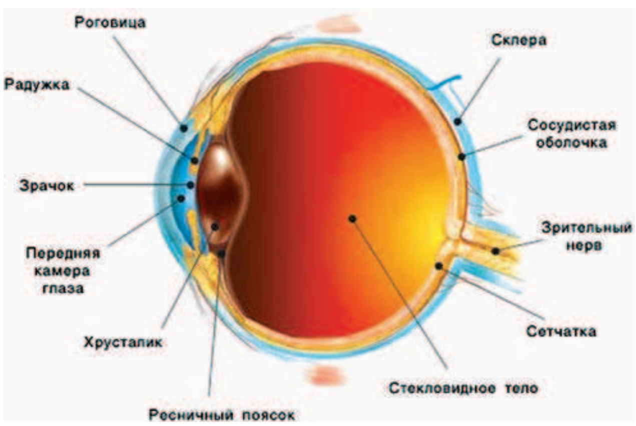


Рис. 1. Глаз человека в разрезе

палочками, и примерно 6–7 миллионов колбочек, получивших свое название из-за конической формы. Палочки сконцентрированы в основном на краях сетчатки, а колбочки располагаются в небольшой центральной зоне. Колбочки в сотни раз менее чувствительны, чем палочки, но зато «различают» цвета, а палочки реагируют лишь на изменения яркости света. Кавычки приходится использовать потому, что зрительный образ формируется в затылочных областях головного мозга, а глаз – это лишь фотоприемник, принимающий внешнюю информацию, преобразующий ее и по нервным волокнам передающий в мозг. Иными словами, «смотрим» мы глазами, а «видим» затылком. Глазная автоматика отлажена Природой так, что днем активны только колбочки, а в сумерках активны только палочки. Поэтому утверждение «ночью все кошки серы...» имеет вполне научное обоснование.

Цветовосприятие – уникальная способность человека; по-видимому, оно доступно исключительно высокоорганизованному мозгу. Видят все животные, многие зорче нас, некоторые почти в полной темноте, но практически все они пребывают в вечных серых сумерках (отличает ли собака сыр от мяса по цвету – до сих пор предмет дискуссии ученых). А нам, пожалуй, просто невозможно представить жизнь без красок, на уровне подсознания психика коррелирует с цветовой средой: лирическое настроение «окрашено» в голубой цвет и, наоборот, голубое погружает нас в лирику; драма – «фиолетова», оранжевое вызывает мажорный энтузиазм, мягкие охристо-коричневые тона ассоциируются с ностальгической грустью.

Обычный человек различает до двухсот цветовых оттенков, художники – до нескольких тысяч (так они утверждают, но, возможно, что-то здесь примешано другое), а в специальных технических цветовых атласах (например, в текстильной промышленности) перенумерованны миллионы цветов. Где еще можно найти такое многообразие – в звуках, запахе, во вкусовых ощущениях? Смешно даже пытаться сравнивать.

Физиологически наше цветовосприятие основано на наличии трех видов колбочек, избирательно чувствительных к красному, зеленому и синему цветам (трихроматное зрение). Используя технические аналогии, можно сказать, что каждый светочувствительный «пиксел» глаза образован R-G-B триадой, как в цветной видеокамере (R,G,B – первые буквы соответствующих английских слов red, green, blue).

Создатели светодиодов стремятся в максимальной степени удовлетворить «требования» глаза. Для освещения нужен белый свет с непрерывным спектром, как у солнца, – этим обеспечивается идеальная цветопередача, естественность окраски окружающих предметов. Для отображения информации надежнее использовать спектрально однородные цвета. Иными словами, в первом случае глаз реагирует на вид и цвет освещенных предметов, во втором – на сам источник света.

Световые измерения также подстраиваются под физиологию глаза, его резко изменяющуюся спектральную чувствительность (рис.2). Одинаковыми считаются воздействия, вызывающие одинаковые зрительные

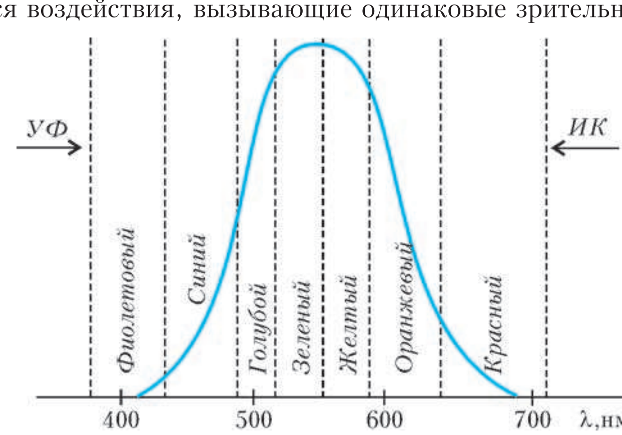


Рис. 2. Спектральная чувствительность человеческого глаза

ощущения, хотя физически они могут сильно различаться.

Мощность световой волны называется световым потоком и измеряется в люменах (лм). Для примера укажем, что «физическая цена» 1 лм в зеленой области составляет 1/680 Вт, в фиолетовой – 1/62 Вт, в красной – 1/6 Вт, точные пересчетные коэффициенты есть для каждой спектральной точки. Шестидесятиваттная лампочка излучает 500 лм, люминесцентная трубка – 5000 лм, уличный натриевый светильник – 10–30 тыс. лм. Светоотдача (лм/Вт) характеризует эффективность преобразования «электричество – свет», у лампочки накаливания это 10–11 лм/Вт, у лампы дневного света 80 лм/Вт.

Светильники, освещающие какую-то площадку (например, настольная лампа), характеризуют силой света (пространственной плотностью светового потока), измеряемой в канделах (1 кд = 1 лм/стер), и углом излучения. Для примера, светодиодный светофор обеспечивает силу света 300–500 кд в угле 20 градусов. Световой поток в 1 лм создает освещенность площадки в 1 $м^2$, равную 1 люксу (1 лк); для чтения вполне комфортно 500 лк, в операционной иногда хотят иметь и 50000 лк. Яркость – это отношение силы света к площади излучения, у светофора она составляет 10 тыс.$кд/м^2$, а у домашнего ТВ экрана – 500 $кд/м^2$.

«Свечение Лосева»

Вернемся к нашей истории.

Лосев, 1922 год… Поначалу он и лаборантом-то не был, его взяли посыльным, т.е. никем и с никакой зарплатой, но главное – разрешили заниматься радиотехникой. Тогда это было «болезнью» любознательного юношества, как в 30-е годы – авиация, в 50-е – атомная физика, сейчас – бизнес. Олег родом из Твери, в Нижнем Новгороде у него не было «ни кола, ни двора», он ночевал в здании лаборатории на предчердачной лестничной площадке, голодал (как все) и работал, работал, работал до восторга и изнеможения.

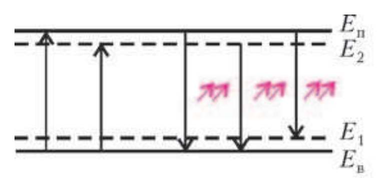
Неожиданно и вопреки всякой логике он обнаружил, что некоторые кристаллические детекторы не только детектировали, но и усиливали радиосигналы – объяснение этому эффекту дали лишь через три десятилетия, после изобретения транзистора. Сконструированный на таком детекторе радиоприемник – *кристадин* – принес Лосеву мировую известность и место в истории техники.

Но здесь речь о его другом, еще более значимом открытии. Олег заметил, что карбидокремниевые детекторы при пропускании через них тока испускают слабый зеленоватый свет, и с 1927 года он занялся этим явлением специально, посвятив ему всего себя. (Увы, жизнь его оказалась обидно короткой – Олег Владимирович Лосев скончался от истощения и холода в блокадном Ленинграде в январе 1942 года.) Его эксперименты показали, что свечение не было связано ни с поверхностными электрическими разрядами, ни с разогревом, «холодный свет» шел из самого кристалла.

Уже в 1930 году Лосев дал удовлетворительную теоретическую трактовку своим опытам на основе существующих квантовых представлений. Говоря сегодняшним языком, он открыл *инжекционную люминесценцию* полупроводников, тогда на Западе названную «свечением Лосева» (Losev Light). Его мировому признанию открыло дверь то обстоятельство, что он оперативно публиковался в немецких научных журналах. По-видимому, существенно и то, что по жизни с ним рядом оказывались такие замечательные ученые, как В.Л.Лёвшин, В.К.Лебединский, М.А.Бонч-Бруевич, А.Ф.Иоффе. Они не были его научными руководителями в общепринятом понимании, но несомненно оказали огромное влияние на его личность и на его признание. («Юноше, обдумывающему житье», подскажем, что попасть в подобную «компанию» не менее важно, чем родиться с талантом.) Характерно, что никто из мэтров не приписывался к Лосеву в соавторы – тогдашняя этика научного сообщества была щепетильна.

Для практических целей «свечение Лосева» было слишком слабым, тогда наука еще не знала, как его усилить, а тем временем грянула вторая мировая война, и интерес к занятному явлению фактически пропал. Лишь спустя почти два десятилетия, уже после изобретения транзистора (1948) и разработки американцем У.Шокли теории *p–n*-перехода (1949) вновь обратились к объяснению люминесценции полупроводников.

При протекании тока через диод часть электронов полупроводника «забрасывается» с равновесного нижнего энергетического уровня на более высокий уровень возбуждения, решающую роль при этом играет наличие *p–n*-перехода, потенциальный барьер которого и преодолевают электроны. А обратные переходы электронов с высокого квантового уровня на более низкие сопровождаются выделением энергии в виде фотонов, поток которых образует световое излучение (рис.3). Максимальный энергетический зазор $E_з$ определяется самой природой полупроводника ($E_з = E_п - E_в$, где $E_п$ и $E_в$ – границы зоны проводимости и валентной зоны соответственно) и называется шириной запрещенной зоны, положение других уровней E_1, E_2,… определяется видом вводимых легирующих примесей и неконтролируемыми дефектами. Чем значительнее энергетический «скачок» электрона ΔE, тем меньше длина волны излучения λ, предельные возможности реализуются при $\Delta E = E_з$. Нетрудно видеть, что для генерации «синих» фотонов ($\lambda = 465$ нм) пригоден только нитрид галлия GaN, тогда как красно-желтую часть спектра успешно могут «закрыть» тройные соединения GaAsP и GaAlAs. Отметим, что нередко переходы электронов верхнего уровня на нижний происходят не прямо, а через множество промежуточных уровней с испусканием такого же множества квантов, соответствующих инфракрасному (ИК) излучению. Но это – *безызлучательные переходы*, которые с точки зрения генерации света представляют собой бесполезное растрачивание энергии.



$E_з = E_п - E_в$

$\lambda = \dfrac{1230}{\Delta E, эВ}$ нм

Состав	$E_з$, эВ
GaAs	1,45
GaP	2,25
GaAsP	1,45–2,25
GaAlAs	1,45–2,16
GaN	3,5

Рис. 3. Схема генерации света в полупроводнике

Развитая теория (1951) объяснила, в частности, низкую интенсивность «свечения Лосева» – «вина» полностью ложилась на карбид кремния, где преобладают безызлучательные переходы. Разобрались, что не подходят транзисторные германий и кремний, «вычислили», что именно нужно для эффективной люминесценции, но… таких полупроводников в природе не существовало.

Первый акт светодиодной истории завершился. Успех? Провал? Будущее покажет, а пока – занавес.

Идеальные полупроводники для «свечения Лосева»

Вообще говоря, история «приборного проекта», как показывает опыт, обычно содержит последовательное решение четырех задач: разработка физических основ и изобретение прибора – выбор (или синтез) необходимых материалов и технологий – создание собственно прибора – применение. По счастливому стечению обстоятельств антракт между первым и вторым «действиями» не затянулся.

В 1952–53 годах немец Генрих Велькер предложил теорию создания целого класса искусственных полупроводников, обозначенных как A^3B^5, на основе соединения элементов 3-й и 5-й групп таблицы Менделеева (рис.4) и практически синтезировал некоторые из них. Он также сформулировал подходы к предсказанию свойств еще не созданных соединений. Даже беглый взгляд на рисунок 4 показывает, что перебор возможных вариантов чрезвычайно велик. Кроме того, сразу же становится ясно, что можно соединять не только два элемента, но и три, и четыре все из тех же групп таблицы Менделеева. В первые годы для нужд транзисторной техники и фотоэлектроники, основных потребителей полупроводников, были синтезированы арсенид и фосфид галлия (GaAs, GaP), антимонид и арсенид индия (InSb, InAs), арсенид-фосфид галлия (GaAlP), арсенид галлия-алюминия (GaAlAs). Ожидалось, что использование арсенида галлия позволит повысить рабочую температуру и быстродействие транзисторов (спустя годы это подтвердилось), однако необходимой технологии тогда разработать не смогли.

Группы		
III	IV	V
5 **B** бор	6 **C** углерод	7 **N** азот
13 **Al** алюминий	14 **Si** кремний	15 **P** фосфор
Sc 21 скандий	**Ti** 22 титан	**V** 23 ванадий
31 **Ga** галлий	32 **Ge** германий	33 **As** мышьяк
Y 39 иттрий	**Zr** 40 цирконий	**Nb** 41 ниобий
49 **In** индий	50 **Sn** олово	51 **Sb** сурьма
La 57 лантан	**Hf** 72 гафний	**Ta** 73 тантал
81 **Tl** таллий	82 **Pb** свинец	83 **Bi** висмут
Ac 89 актиний	**Rf** 104 резерфордий	**Db** 105 дубний

Рис. 4. Фрагмент периодической таблицы химических элементов

Возвратимся однако немного назад. Еще в 1950 году, т.е. за 2 года до публикаций Велькера, аспирантка Ленинградского физико-технического института Нина Горюнова синтезировала сурьмянистый индий (InSb) и предсказала его полупроводниковые свойства. Но зарубежной публикации не последовало, и Запад ее открытия не заметил. Горюнова, как химик, руководствовалась принципом кристаллохимического подобия новых соединений, и это не очень воспринималось окружающими ее физиками, ей не верили – трудно стать пророком в своем отечестве. Трудно, но сильных духом это не останавливает.

Когда в 1946 году Горюнова пришла в ленинградский Физтех, позади были химфак Университета, работа инженером в заводской лаборатории, война, голодные месяцы в блокаде, эвакуация. Теперь ей уже 30, у нее четырехлетний сын и годовалая дочь, надо растить детей и выживать самой – прозаическое трудовое будущее вроде бы вполне определилось. А она поступает в аспирантуру, да еще к самому академику А.Ф.Иоффе – патриарху отечественных физиков. Абрам Федорович определил в качестве ее темы исследование так называемого «серого» олова – одной из модификаций этого металла, образующегося на поверхности обычного «белого» олова при длительном хранении на холоде (в просторечии это «оловянная чума»). Тема – так себе, ожидать в ней ярких открытий не приходилось, но академик был методичен и планомерно осваивал клеточку за клеточкой в полупроводниковом пространстве. А для аспирантки «оловянная чума» на несколько лет стала важнее всего в мире, ей она отдает всю энергию, страсть, настойчивость. Горюнова пробивается в запасники Эрмитажа (!), где ей разрешают с потемневших старинных оловянных потиров наскрести пригоршню злосчастной серой дряни. В 1951 году – блестящая защита диссертации. Само «серое олово», как и ожидалось, интереса не представило, но развитые в работе Горюновой общие подходы к химии сложных полупроводников позволили ей выйти на соединения A^3B^5, к которым пришел и физик Велькер. И лишь «после Велькера» и после ряда технологически блистательных достижений американцев начали заниматься исследованиями указанных соединений у нас, но приоритет Горюновой 1950 года оказался, увы, безвозвратно утраченным – сложившееся мнение научного сообщества практически невозможно изменить.

В дальнейшем профессор Н.А.Горюнова внесла огромный вклад в технологию получения новых полупроводниковых соединений и в научные обобщения по этой группе веществ, совершив, по словам Нобелевского лауреата Н.Н.Семенова, «переворот в неорганической химии». Согласитесь, в XX веке претендовать на такое могут не многие.

При всей несхожести личностей О.В.Лосева и Н.А.Горюновой в их судьбах и путях к открытиям есть много общего. Оба пришли в науку в тяжелейшие для страны голодные годы, когда многие думали лишь о выживании, и пошли по избранному пути исключительно целеустремленно и с полной самоотдачей. Оба открыли новое там, где никто не искал, где, казалось бы, и найти-то было нечего, обоих отличала удивительная интуиция. Оба вращались в высокоинтеллектуальной научной среде и при этом сумели сохранить независимость суждений и самостоятельность в выборе пути, вполне в духе принципиального индивидуализма. И обоим сопутствовала удача.

Итак, в 1950-е годы соединения A^3B^5 в транзисторную электронику не пошли, однако выяснилось, что арсенид галлия и арсенид-фосфид галлия – идеальные полупроводники для реализации «свечения Лосева». Тогда же ученые всего мира устремились в новую область физики и техники – квантовую электронику – и сосредоточились на разработке лазеров. В 1960 году были созданы рубиновый и газовый лазеры, а в сентябре 1962 года – полупроводниковый лазер на основе арсенида галлия, правда излучал он в ближней инфракрасной области. В ноябре того же года один из не самых удачливых участников «лазерного проекта» американец Ник Холоньяк сообщил о создании светодиодов красного свечения на основе соединения арсенид-фосфид галлия и о начале их полупромышленного выпуска. Светодиод (рис.5) родился как бы сам собой, легко и просто, едва был

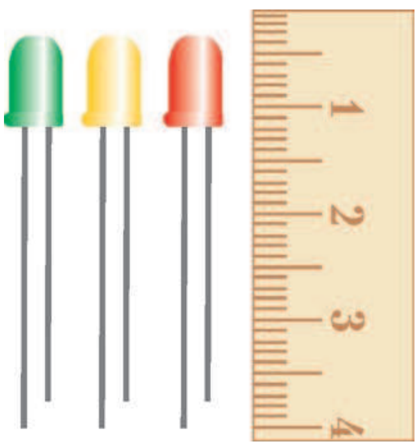


Рис. 5. Миниатюрные светодиоды

создан необходимый полупроводник. Его презентацию озаглавили «Свет надежды», вроде бы обычный журналистский штамп, а оказалось – пророчество. (И вновь мы упустили свой приоритет: на полгода раньше в одном из « почтовых ящиков» был организован выпуск довольно-таки ярких карбидокремниевых светодиодов для ядерной техники, но все засекретили, и первопроходцем в историю вполне оправдано вошел Холоньяк, получивший в 2003 году российскую премию «Глобальная энергия».)

Так фактически совместились второй и третий этапы «светодиодного проекта», успешно завершившегося к середине 1960-х годов. Разумеется, жизнь на этом не остановилась, расширялись производство и применение светодиодов, совершенствовались их устройство и характеристики, порой – принципиально. В 1970-е годы ученые ленинградского Физтеха, возглавляемые Ж.И.Алферовым, предложили технологию гетороструктур – геторосветодиоды оказались значительно ярче и долговечнее своих предшественников. (О гетероструктурах, за которые Ж.И.Алферов удостоен Нобелевской премии 2000 года, написано предостаточно, так что не будем здесь повторяться.)

Японский вызов

Все это замечательно, но в завершенном «светодиодном проекте» был существенный изъян – он охватил лишь красную область спектра и отчасти оранжевую и желтую, зеленого и синего света не получилось, а без этого невозможно реализовать белый свет. В световом пространстве нельзя довольствоваться частью, сделанное наполовину – это не младенец, который со временем повзрослеет, это – одноногий инвалид. Что-то вроде настенной живописи не знавших синего ацтеков – огненно-рыжий окрас, искажение пропорций, бешеная энергетика. Постоишь у стены минут десять – во рту пересыхает.

Как получить недостающие цвета спектра, наука прекрасно знала еще в 1970-е годы – надо просто использовать широкозонный полупроводник (см. таблицу на рисунке 3). Хорошо смотрелся нитрид галлия – замещая в нем частично галлий индием, можно было надеяться получить любые цвета свечения от фиолетового до зеленого. Все бы хорошо, да вот незадача – удавалось синтезировать GaN только n-типа, и ни при каких обработках он не превращался в полупроводник p-типа. А без этого нет p–n-перехода и нет светодиода. Родился даже тезис о принципиальной недостижимости этого – неудачникам как-то надо было оправдаться. На нитриде галлия фактически поставили крест. К счастью, не все.

В 1991 году японец Судзи Накамура опубликовал статью о создании сверхпрецезионной установки для выращивания тончайших и совершенных слоев GaN (InGaN), через полгода – о получении p–n-переходов и их ярком голубом свечении, а с 1993 года фирма «Ниче», где работал Накамура, начала производить на продажу голубые светодиоды силой света 1 кд! (Заметим, что этой условной границы суперяркости «красные» светодиоды тогда уже достигли благодаря использованию соединения AlInGaP– это было «круто», но вполне ожидаемо и в освоенной спектральной области.)

«Японский вызов» стал шоком для светодиодного мира: фирма «Ниче» занималась люминофорами для осветительных ламп, гигантам электроники «эти химики» вообще не были известны, а золушки становятся принцессами только в сказках и при обязательном содействии доброй феи. Фея для «Ниче» нашлась ...

Накамура пришел на фирму в 1979 году, ему было 25 лет, и он сумел убедить руководство в перспективности светодиодов. За три года он разработал отличную технологию «красного» светодиода, включая и соответствующий полупроводник, но продать разработку электронной промышленности не удалось – в традиционных направлениях уже наступило насыщение. Та же судьба постигла и два последующих проекта. Однако Накамура был упорен, к тому же за 10 лет приобрел важный опыт: решающей для светодиодов является технология исходного полупроводника. Фирма поставила на него еще раз, дала 3 млн долларов на изготовление установки, но сотрудников не выделила, так что он делал все своими руками. И стену, перед которой остановилась высокая наука, пробила технология. (Забегая вперед, отметим, что на успехе Накамуры фирма стала зарабатывать по 200 млн долларов прибыли ежегодно – такова цена удачной инновации.)

В 1989 году некий стажер одного из японских университетов, изучая воздействие электронного луча на GaN-пленки, как-то раз забыл выключить установку на ночь, а утром обнаружил необычайно яркое свечение образца – активация примеси, превращающей GaN в полупроводник *p*-типа, состоялась. (Как часто в истории науки случаются открытия, сделанные по нерадивости, забывчивости, неграмотности, лености их авторов! Это не призыв забывать выключать установки на ночь, важно другое – не проглядеть счастливую случайность.) Несколькими годами раньше похожий результат получили и исследователи из Московского университета. Однако обе публикации научный мир не заметил, нитрид галлия был уже не в моде, все разом переключились на селенид цинка, а вскоре так же дружно отвернулись и от него. (Удивляет, как глубокие независимые умы вдруг словно по команде бросают все и бегут на какую-нибудь яркую вспышку, которая частенько оборачивается миражом. А может они в массе не такие уж «глубокие и независимые»?)

Накамура увидел в публикациях главное – активация нитрида галлия и превращение его в полупроводник *p*-типа возможны. Этой процедуре он нашел удачное технологическое воплощение, которое и стало основой производства «синих» светодиодов в 1993 году. А вскоре он изящно использовал традиционные наработки фирмы «Ниче»: если на «синий» чип нанести подходящий люминофор, то, благодаря преобразованию части светового потока в зелено-желто-красные тона, можно, как итог, получить белый свет. Тем самым, светодиоды сделали серьезную заявку на вторжение в осветительную технику, и начиная с 2000–2001 годов светодиодная революция получила колоссальное ускорение.

Напомним, что «героем» всех этих пафосных событий является скромный, миниатюрный светодиодный чип площадью 2–4 мм^2 и толщиной в доли миллиметра. Но его внутренняя структура – это букет супердостижений физики и технологии твердого тела. Нитрид галлия удается получать только в виде тонких пленок, поэтому в качестве подложки берут пластину карбида кремния (он структурно близок к GaN) и на ней выращивают несколько десятков слоев состава GaN и его производных InGaN и AlGaN. Некоторые из них имеют вспомогательное технологическое назначение, а в активной зоне, т.е. там, где рождается свет, чередуются попеременно излучающие пленки InGaN и барьерные пленки чистого GaN (рис.6). Такие образования называют *сверхрешетками,* в них состав пленки изменяется на расстояниях, соизмеримых с размерами атомов, и ни одна из областей фактически не является однородной и независимой от соседей. Свойства сверхрешеток существенно отличаются от свойств тех же полупроводников в виде массивных образцов или в виде толстых пленок. Технология сверхрешеток открыла неисчерпаемые возможности перед создателями новых материалов, неизвестных и недоступных природе.

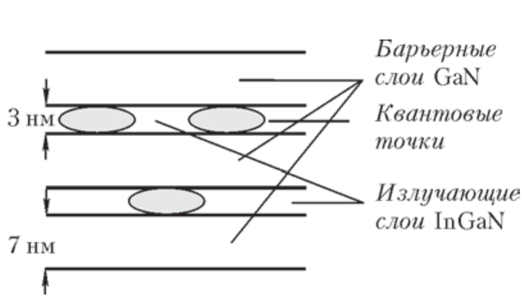


Рис. 6. Чередование слоев в активной зоне светодиода с квантовыми точками

Излучающий слой при ближайшем рассмотрении оказывается существенно неоднородным по площади, добавки индия скапливаются в небольших образованиях, занимающих не более 10% пленки. Это так называемые *квантовые точки* – «последний писк» полупроводниковой моды, которой, правда, уже лет двадцать. Именно через квантовые точки протекает ток светодиода, в них же рождается излучение, все остальное в кристалле – наподобие постамента под статуей, вроде бы и не обязателен, а без него нельзя.

Современные светодиоды – ярчайшая иллюстрация могущества нанотехнологии, только благодаря ей эффективность преобразования электричества в свет приблизилась к 50% по белому свету, а по спектрально-однородным цветам она еще выше.

Вернемся к земным делам, здесь было множество занимательных событий. Несколько лет фирме «Ниче» удавалось никого не подпускать к своей технологии и получать сверхприбыль, торгуя готовыми чипами, но когда на кону миллиарды долларов, ни патенты, ни суды не спасают от промышленного шпионажа, и секреты разглашаются. Накамура перебрался в США, и начались судебные разборки фирмы с перебежчиком, а в сентябре 2006 года Накамура получил престижную премию Миллениум (1 млн евро) – мир признал его лидерство.

Эпилог

Неблагодарное дело писать историю революции во время самой этой революции. Только-только автор придумает какую-то схему изложения событий, как вдруг – бац! – появляется открытие, перечеркивающее все его построения. Если отдаться безудержной фантазии, то можно ожидать многого. Например, создания полупроводниковых структур с таким многообразием энергетических уровней, которые позволят получать любое свечение и внешними командами управляемо изменять его. Тогда отпадет необходимость в люминофорах, повысится светоотдача, улучшится «качество» света, возрастет долговечность и температурная стабильность светодиодов.

Быть может, завтра эту фантазию превратит в реальность кто-то из наших читателей. Так что не будем подводить итоги, тема остается открытой...

Арифметические треугольники

В.ТИМОРИН

Треугольник назовем *арифметическим*, если квадраты длин всех его сторон – целые числа. Возможно, что такие треугольники называются как-то по-другому, но я не встречал никакого названия и поэтому придумал название сам. Тем не менее, арифметические треугольники чрезвычайно важны для теории чисел (и в этой статье мы увидим некоторые их применения). Дело просто в том, что обычно пользуются другим языком, более алгебраическим. Вообще, теория чисел изучает числа, а не фигуры. Поэтому многие рассказы про теорию чисел оперируют формулами и почти не содержат рисунков. Но, с другой стороны, очень полезно представлять себе математические объекты наглядно. Поэтому мы будем говорить про треугольники.

На геометрическом языке, наша задача состоит в описании классов арифметических треугольников. Дадим несколько определений.

Заметим, что в любом параллелограмме каждая его диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника. Все эти треугольники мы будем называть половинками данного параллелограмма. Два треугольника называются *соседями*, если они равны половинкам одного и того же параллелограмма, причем первый получается при проведении одной из диагоналей этого параллелограмма, а второй – при проведении другой диагонали (рис.1).

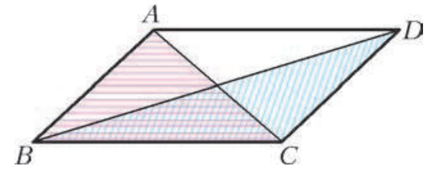


Рис.1. Переход к соседнему треугольнику. Треугольник ABC соседний для треугольника DBC

Другими словами, сосед данного треугольника получается так. Сначала мы выбираем одну из сторон треугольника. Затем достраиваем треугольник до параллелограмма так, что выбранная сторона будет его диагональю. После этого проводим в этом параллелограмме другую диагональ. Она делит параллелограмм на два равных треугольника – это один и тот же сосед для исходного треугольника (мы не делаем различия между равными треугольниками).

Докажем, что любой сосед арифметического треугольника тоже будет арифметическим. Достаточно показать, что если квадраты сторон и одной из диагоналей данного параллелограмма целые, то квадрат другой диагонали – тоже целый. Это вытекает из известной геометрической теоремы о том, что сумма

Иллюстрация М.Сумнинной

квадратов всех сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей. (Эту теорему нетрудно доказать, например, с помощью теоремы косинусов.)

Теперь мы можем написать формулу. Арифметический треугольник определяется тройкой натуральных чисел, а именно, квадратами длин всех сторон. Таким образом, $(a,\ b,\ c)$ будет означать арифметический треугольник со сторонами $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ и $\sqrt{c}$ (заметим, что порядок чисел a, b и c не важен). Как мы только что видели, каждой стороне треугольника $(a,\ b,\ c)$ соответствует некоторый соседний треугольник. Например, стороне c соответствует треугольник $(a,\ b,\ 2(a + b) - c)$ (что следует из сформулированной выше геометрической теоремы). Таким образом, одно из чисел a, b, c вычитается из удвоенной суммы двух остальных.

Например, рассмотрим треугольник (2, 1, 1) (заметим, что это прямоугольный равнобедренный треугольник с катетом 1 и гипотенузой $\sqrt{2}$). Из него можно получить соседний треугольник (2, 1, 5) (заменяя 1 на $2(2 + 1) - 1 = 5$). Из треугольника (2, 1, 5) мы можем получить обратно треугольник (2, 1, 1), а также два других треугольника – (10, 1, 5) и (2, 13, 5), и т.д. В общем случае из каждого арифметического треугольника получается три других арифметических треугольника, соседних данному (впрочем, некоторые из этих трех треугольников могут равняться друг другу или исходному треугольнику).

Скажем, что два арифметических треугольника *эквивалентны*, если один можно получить из другого путем последовательного перехода к соседним треугольникам. Класс эквивалентности определяется как множество всех треугольников, эквивалентных данному.

Как найти все треугольники, эквивалентные данному? Строго говоря, это невозможно, так как всякий класс эквивалентности состоит из бесконечного числа треугольников. С другой стороны, в произвольном классе можно легко выписать сколь угодно много треугольников. При этом удобно пользоваться такой схемой (ее идея принадлежит Дж. Конвею). Начнем опять с треугольника (2, 1, 1). Изобразим его в виде точки. Из этой точки ведут три отрезка, соединяющие треугольник (2, 1, 1) с тремя соседними ему треугольниками. В данном случае один из этих треугольников равен исходному, а два других равны (2, 1, 5). Напишем числа 2, 1, 1 между отрезками, выходящими из нашей точки. Тем самым, треугольник можно восстановить по изображающей его точке, просто прочитав, какие числа написаны в примыкающих к точке областях (рис. 2). Идем вдоль отрезка, разделяющего области 1 и 2. На конце этого отрезка появляется новая точка, а из нее выходят два новых отрезка, ограничивающих новую область. Нам нужно только понять, что написать в новой области. Мы берем числа, написанные в соседних областях, в нашем случае 1 и 2. Берем их удвоенную сумму, т.е. 6. Теперь из полученного числа вычитаем число, написанное в области, примыкающей к противоположному концу отрезка и не соседней с нашей новой областью. В данном случае нужно вычесть число 1. Получаем $6 - 1 = 5$. Теперь в новой точке можно прочесть новый треугольник (2, 1, 5), соседний треугольнику (2, 1, 1). Продолжая этот процесс, можно довольно быстро получить много арифметических треугольников, эквивалентных треугольнику (2, 1, 1) (рис.3). Итак, мы описали схему построения эквивалентных треугольников. Будем называть эту схему *схемой Конвея*.

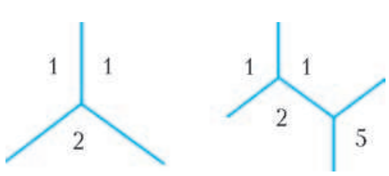


Рис. 2

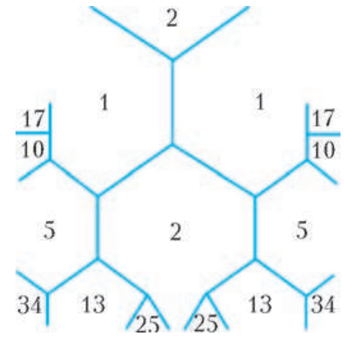


Рис.3. Построение схемы Конвея для треугольника (2, 1, 1)

Обсудим, какими могут быть квадраты сторон треугольников, эквивалентных данному. Например, что можно сказать о числах, являющихся квадратами сторон треугольников, эквивалентных треугольнику (2, 1, 1)? Заметим, что это в точности числа, написанные в схеме Конвея. Глядя на схему, можно попытаться угадать правило, которому подчиняются записанные в ней числа. Это не очень просто, и если вы хотите найти правило самостоятельно, отложите чтение – в следующем предложении сообщается ответ. Ответ такой: натуральное число является квадратом стороны треугольника, эквивалентного треугольнику (2, 1, 1), тогда и только тогда, когда оно представляется в виде $x^2 + y^2$, где x и y – взаимно простые целые числа (в частности, если одно из этих чисел ноль, то второе должно быть единицей). Как только утверждение сформулировано, его нетрудно доказать по индукции. Однако мы можем несколько упростить рассуждение таким образом. Во-первых, заметим, что схема Конвея имеет смысл для произвольной тройки целых чисел $(a,\ b,\ c)$ (и даже не обязательно целых) – не важно, являются ли числа a, b и c квадратами сторон арифметического треугольника. Например, некоторые из этих чисел могут быть отрицательными или равны нулю. Во-вторых, если мы сложим две тройки почленно (почленной суммой троек $(a,\ b,\ c)$ и (a', b', c') называется тройка $(a + a', b + b', c + c')$), то все числа, написанные в соответствующих местах схемы Конвея, тоже сложатся.

Теперь рассмотрим тройку чисел (1, 1, 0). Она, конечно, не соответствует никакому настоящему треугольнику, но можно ее представлять себе как вырожденный равнобедренный треугольник, у которого основание равно 0, а боковая сторона равна 1. Поэтому мы эту тройку все равно будем называть треугольником. Построим схему Конвея для треугольника (1, 1, 0) (рис.4). Сразу же видно, что в этой схеме написаны точные квадраты. Можно взглянуть на схему повнимательней и заметить, что в областях, примыкающих к вершине, написаны числа вида x^2, y^2 и z^2, где x, y и z – взаимно простые целые числа, знаки которых

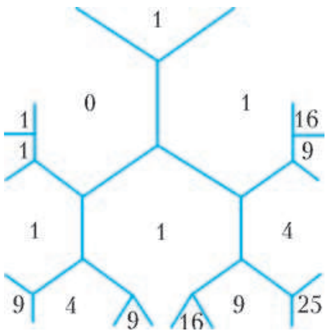


Рис.4. Схема Конвея для вырожденного треугольника (1, 1, 0)

можно выбрать так, что будет выполнено равенство $x+y+z=0$. Сформулируем это в виде теоремы.

Теорема 1. *Любой треугольник, эквивалентный треугольнику (1, 1, 0), имеет вид $\left(x^2,y^2,z^2\right)$, где x, y и z – (попарно) взаимно простые целые числа такие, что $x+y+z=0$. Обратно, любой треугольник такого вида эквивалентен треугольнику (1, 1, 0).*

Доказательство. Для доказательства того, что любой треугольник, эквивалентный треугольнику (1, 1, 0), имеет указанный вид, достаточно показать, что треугольник, соседний треугольнику вида

$$\left(x^2,y^2,z^2\right),\quad x+y+z=0,$$

тоже имеет такой вид. В самом деле, рассмотрим треугольник $\left(x^2,y^2,2\left(x^2+y^2\right)-z^2\right)$ (для двух остальных треугольников рассуждение аналогично). Имеем

$$2\left(x^2+y^2\right)-z^2=2\left(x^2+y^2\right)-(x+y)^2=(x-y)^2.$$

Другими словами, новый треугольник равен $\left(x^2,(-y)^2,(y-x)^2\right)$, т.е. имеет указанный вид (если числа x, y, $-(x+y)$ были взаимно простыми, то числа x, $-y$, $y-x$ тоже будут взаимно простыми).

Доказательство того, что любой треугольник указанного вида эквивалентен треугольнику (1, 1, 0), мы пока отложим. □

Непосредственным следствием теоремы 1 является следующая

Теорема 2. *Квадрат стороны любого треугольника, эквивалентного треугольнику (2, 1, 1), имеет вид $x_1^2+x_2^2$, где x_1 и x_2 – взаимно простые целые числа.*

Для доказательства теоремы 2 заметим, что треугольник (2, 1, 1) является суммой треугольников (1, 1, 0) и (1, 0, 1). Следовательно, треугольник, эквивалентный треугольнику (2, 1, 1), является суммой треугольников $\left(x_1^2,y_1^2,z_1^2\right)$ и $\left(x_2^2,y_2^2,z_2^2\right)$, где x_i, y_i и z_i – целые числа такие, что $x_i+y_i+z_i=0$ $(i=1,2)$. Кроме того, выполнены равенства

$$x_1y_2-x_2y_1=x_1z_2-x_2z_1=y_1z_2-y_2z_1=\pm 1,$$

что нетрудно проверить, заметив, что для исходных треугольников эти равенства справедливы и что при переходе к соседним треугольникам они сохраняются (проверьте!). В частности, квадрат стороны треугольника, эквивалентного треугольнику (2, 1, 1), равен $x_1^2+x_2^2$. Числа x_1 и x_2 взаимно просты, так как $x_1y_2-x_2y_1=\pm 1$.

Подобным же образом, можно вывести и много других интересных фактов, например: квадрат стороны любого треугольника, эквивалентного треугольнику (2, 2, 2), имеет вид $x_1^2+x_2^2+x_3^2$, где x_1, x_2 и x_3 – попарно взаимно простые целые числа такие, что $x_1+x_2+x_3=0$ (докажите это!).

Пусть даны два арифметических треугольника. Как понять, эквивалентны они или нет? Во-первых, есть очень простой тест: сравнить площади треугольников. Нетрудно видеть, что площади эквивалентных треугольников совпадают. Значит, если площади разные, то треугольники не могут быть эквивалентными. Площадь треугольника $(a,\ b,\ c)$ находится по формуле Герона:

$$S=\sqrt{p\left(p-\sqrt{a}\right)\left(p-\sqrt{b}\right)\left(p-\sqrt{c}\right)},$$

$$p=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2}.$$

Несложные вычисления показывают, что

$$16S^2=4ac-(a+c-b)^2=4ab-(a+b-c)^2=$$

$$=4bc-\left(b+c-a^2\right)=2(ab+bc+ac)-\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Эта величина $\left(16S^2\right)$ называется *дискриминантом* треугольника $(a,\ b,\ c)$. Заметим, что дискриминант арифметического треугольника всегда является целым числом и что два треугольника имеют одинаковые дискриминанты тогда и только тогда, когда у них одинаковые площади.

Упражнение 1. Докажите, что дискриминант арифметического треугольника либо делится на 4, либо дает 3 в остатке при делении на 4. Наоборот, любое натуральное число, дающее в остатке при делении на 4 либо 0, либо 3, является дискриминантом некоторого арифметического треугольника.

Итак, чтобы понять, эквивалентны ли два треугольника, нужно прежде всего сравнить их дискриминанты. Если дискриминанты разные, то треугольники не эквивалентны. Например, треугольник (1, 1, 1) с дискриминантом 3 не может быть эквивалентен треугольнику (2, 1, 1) с дискриминантом 4.

Что делать, если дискриминанты совпадают? Тогда нужно попытаться привести оба треугольника к наиболее простому виду. Один из способов такой: найти треугольник, эквивалентный данному и имеющий самый маленький периметр. Напомним, что периметр треугольника $(a,\ b,\ c)$ равен $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$, но можно вместо периметра минимизировать величину $a+b+c$, это не так важно. Важно то, что если, например, $a+b<c$, то можно заменить треугольник $(a,\ b,\ c)$ эквивалентным треугольником $(a,\ b,\ 2(a+b)-c)$. Заметим, что $2(a+b)-c<c$, т.е. две стороны не изменились, а третья уменьшилась. Геометрически неравенство $a+b<c$ означает, что угол, лежащий против стороны $\sqrt{c}$, тупой (это следует, например, из теоремы косинусов). Поскольку в параллелограмме против тупого угла лежит бо́льшая диагональ, мы в этом случае, переходя к соседнему треугольнику, просто заменяем в соответствующем параллелограмме бо́льшую диагональ на меньшую.

Действуя таким образом, мы будем все время уменьшать периметр (а также число $a + b + c$), пока не получим треугольник (a, b, c) такой, что

$$a + b \geq c, \quad b + c \geq a, \quad a + c \geq b\,.$$

Это значит, что треугольник $(a,\ b,\ c)$ не имеет тупых углов. Такой треугольник называется *приведенным*. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3. *Любой арифметический треугольник эквивалентен приведенному треугольнику, т.е. треугольнику без тупых углов.*

Следующий вопрос состоит в том, как описать приведенные треугольники данного дискриминанта. Пусть $(a,\ b,\ c)$ – приведенный треугольник дискриминанта Δ. Без ограничения общности, можно считать, что $b \geq a, c$. Поскольку треугольник приведенный, имеем также $0 \leq a + c - b \leq a, c$. Отсюда следует, что $(a + c - b)^2 \leq ac$, а значит,

$$3ac = 4ac - ac \leq 4ac - (a + c - b)^2 = \Delta\,.$$

Очевидно, существует лишь конечное число пар положительных целых чисел a, c, удовлетворяющих этому неравенству. Если a и c фиксированы, то b определяется из квадратного уравнения $4ac - (a + c - b)^2 = \Delta$. Напомним, что квадратное уравнение такого вида не может иметь более двух решений. Поэтому имеется лишь конечное число приведенных треугольников данного дискриминанта.

Например, перечислим все приведенные треугольники дискриминанта 4. Неравенству $3ac \leq 4$ удовлетворяет только пара $a = c = 1$. Теперь найдем b из уравнения $4 - (2 - b)^2 = 4$, получим $b = 2$. Таким образом, единственным приведенным треугольником дискриминанта 4 является треугольник (1, 2, 1) или, что то же самое, треугольник (2, 1, 1). Отсюда вытекает, что любые два арифметических треугольника дискриминанта 4 эквивалентны. В самом деле, любой арифметический треугольник дискриминанта 4 эквивалентен приведенному треугольнику, т.е. треугольнику (1, 2, 1).

Упражнение 2. Перечислите все приведенные треугольники дискриминантов 7, 8, 11.

Окончание доказательства теоремы 1. Нам осталось доказать, что треугольник вида (x^2, y^2, z^2), где x, y и z – попарно взаимно простые целые числа такие, что $x + y + z = 0$, эквивалентен треугольнику (1, 1, 0). Мы уже знаем, что любой треугольник, эквивалентный треугольнику такого вида, имеет тот же вид. Следовательно, достаточно рассмотреть приведенные треугольники указанного вида. Нетрудно проверить, что дискриминант треугольника вида (x^2, y^2, z^2), где $x + y + z = 0$, равен 0. Пусть $y \geq x, z$. Тогда, согласно неравенству $3x^2z^2 \leq \Delta$, либо x, либо z равно нулю. Допустим, $z = 0$. Тогда $x = -y$, и при этом x взаимно просто с y. Следовательно, $x, y = \pm 1$, т.е. $x^2 = y^2 = 1$. Таким образом, единственный приведенный треугольник рассматриваемого вида – это треугольник (1, 1, 0). □

Теорема 4. *Если два приведенных треугольника эквивалентны, то они равны.*

При помощи этой теоремы мы, наконец, можем эффективно проверить, эквивалентны ли два треугольника. Как мы уже говорили, сначала надо посчитать дискриминанты. Если они разные, то треугольники не эквивалентны. Если дискриминанты совпадают, то нужно заменить оба треугольника эквивалентными им приведенными треугольниками. Исходные треугольники эквивалентны тогда и только тогда, когда полученные приведенные треугольники равны.

Доказательство теоремы 4. Доказательство основано на таком простом соображении: если треугольник тупоугольный, то у него только один тупой угол, а значит, есть только один соседний ему треугольник, периметр которого меньше, чем периметр данного треугольника. (Ведь мы, переходя к соседнему треугольнику, фактически меняем в соответствующем параллелограмме одну диагональ на другую, и если диагональ лежала против острого (или прямого) угла, она заменится на более длинную (или такую же) диагональ.) В терминах схемы Конвея, можно сказать так: у вершины, соответствующей данному тупоугольному треугольнику, есть только одна соседняя вершина с меньшим периметром. Теперь допустим, что мы идем по ребрам схемы Конвея, причем никогда не возвращаемся по тому же ребру, по которому уже прошли. В этом случае, если на каком-то участке пути периметр увеличился, он будет увеличиваться и дальше; другими словами, он не может сначала увеличиваться, а потом уменьшаться. Рассмотрим приведенный треугольник и соседний ему треугольник, не равный исходному. Тогда второй треугольник будет иметь больший периметр по сравнению с первым треугольником или тот же самый периметр. Значит, в любой цепочке соседних треугольников, начинающейся в исходном приведенном треугольнике, периметр будет либо увеличиваться, начиная с некоторого места, либо останется тем же самым. Следовательно, такая цепочка не может вести к другому приведенному треугольнику, поскольку, как легко видеть, два соседних треугольника одинакового периметра равны. □

Мы должны обосновать законность названия, выбранного для арифметических треугольников, т.е. продемонстрировать некоторые применения арифметических треугольников в арифметике. Таких применений множество, но мы укажем только одно, выбранное из соображений простоты.

Теорема 5. *Предположим, что натуральное число a делит число вида $z^2 + 1$, где z – целое. Тогда a представляется в виде суммы квадратов двух взаимно простых целых чисел.*

Доказательство. Имеем $ac = z^2 + 1$ для некоторого натурального числа c. Следовательно,

$$4ac - (2z)^2 = 4\,.$$

Найдем целое число b из условия $a + c - b = 2z$. Можно проверить, что число b будет положительным, а числа $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ будут удовлетворять неравенствам треугольника (сделайте это!). Арифметический треугольник $(a,\ b,\ c)$ имеет дискриминант 4. Следовательно, он эквивалентен треугольнику $(1,\ 2,\ 1)$. В частности, квадрат любой стороны треугольника $(a,\ b,\ c)$ имеет вид x^2+y^2, где x и y – взаимно простые целые числа. Например, a имеет такой вид, что и требовалось доказать. □

Следующее упражнение довольно сложное и предполагает хорошее знание свойств взаимно простых чисел.

Упражнение 3. Пусть $a=x^2+y^2$, где x и y взаимно просты. Тогда все натуральные делители числа a тоже представляются в таком виде. Выясните, верны ли аналогичные утверждения для x^2+2y^2, x^2+3y^2, x^2+5y^2.

Теория, которую мы затронули в этой статье, классическая и обязана своим существованием Лагранжу и Гауссу. Лагранж и Гаусс, правда, пользовались другим языком. Они изучали свойства целых чисел, представимых данной *квадратичной формой*, т.е. представимых в виде $Ax^2+Bxy+Cy^2$ для заранее заданных целых значений A, B, C и для некоторых (произвольных) целых значений x и y. Квадратичной формой называется само выражение $Ax^2+Bxy+Cy^2$, в котором x и y рассматриваются как переменные. Началось все с Ферма, который описал значения квадратичных форм x^2+y^2, x^2+2y^2 и x^2+3y^2.

Упражнение 4. Можно ли число 7 представить в виде x^2+y^2 для некоторых целых x и y? А число 1007? Если a и b можно представить в таком виде, то всегда ли это верно для ab? А для $a+b$?

Выяснилось, что есть большие классы квадратичных форм, которые представляют одни и те же числа. Лагранж и Гаусс разработали теорию, позволяющую эффективно перечислять эти классы и работать с ними.

Упражнение 5. Докажите, что число a представляется в виде x^2+y^2 для некоторых целых x и y тогда и только тогда, когда оно представляется в виде $5u^2+6uv+2v^2$ для некоторых целых u и v.

Связь между арифметическими треугольниками и квадратичными формами такая. Треугольнику $(a,\ b,\ c)$ сопоставляется квадратичная форма

$$ax^2+(a+c-b)\,xy+cy^2.$$

Попробуйте понять, почему именно такая квадратичная форма и в чем ее смысл. Для этого полезно замостить плоскость треугольниками, равными данному. Эквивалентность арифметических треугольников имеет естественное описание на языке квадратичных форм. Намек на это описание содержится в следующем непростом упражнении.

Упражнение 6. Докажите, что существует арифметический треугольник со стороной $\sqrt{d}$, эквивалентный треугольнику $(a,\ b,\ c)$, тогда и только тогда, когда $d=ax^2+(a+c-b)\,xy+cy^2$ для некоторых взаимно простых целых чисел x и y.

Интереснейший материал о квадратичных формах, схеме Конвея и еще о многом другом можно найти в замечательной книге Джона Конвея «Квадратичные формы, данные нам в ощущениях» (М.: МЦНМО, 2008).

В заключение мы укажем, в каком направлении может развиваться дальнейшая теория. Это направление действительно активно развивается, но люди, в основном, пользуются другим языком, более алгебраическим. Оказывается важным рассмотрение не просто арифметических треугольников, а арифметических треугольников с *ориентацией*. Это означает, что треугольники, получающиеся друг из друга отражением, считаются разными. Треугольники, полученные друг из друга вращением или параллельным переносом, по-прежнему отождествляются. Мотивируется это тем, что отражение нельзя осуществить, не выходя из плоскости. В наших обозначениях, треугольник $(a,\ b,\ c)$ – это то же самое, что треугольники $(b,\ c,\ a)$ и $(c,\ a,\ b)$, но, вообще говоря, не то же самое, что треугольник $(b,\ a,\ c)$. Понятия эквивалентности и классов легко переносятся на ориентированные арифметические треугольники.

Из результатов Гаусса следует, что ориентированные арифметические треугольники одинакового дискриминанта можно, в некотором смысле, перемножать. Результат умножения зависит только от классов эквивалентности сомножителей, а не от самих сомножителей. Этот результат определен лишь с точностью до эквивалентности. Таким образом, умножение является на самом деле операцией над классами ориентированных арифметических треугольников, а не над самими треугольниками. Умножение обладает привычными свойствами: переместительным (коммутативность) и сочетательным (ассоциативность). Кроме того, можно делить треугольники друг на друга, т.е. существует операция, обратная к умножению. Заметим, что число классов ориентированных арифметических треугольников данного дискриминанта по-прежнему конечно. Таким образом, имеется естественная, и обладающая хорошими свойствами, операция умножения на конечном множестве. Эта операция очень важна для теории чисел. Но ее подробное обсуждение уже не вписывается в формат этой статьи.

Вот только одно замечательное свойство умножения треугольников: умножим класс треугольника со стороной $\sqrt{a}$ на класс треугольника со стороной $\sqrt{b}$. Тогда полученный класс содержит треугольник со стороной $\sqrt{ab}$! Отсюда вытекает такое утверждение (попробуйте его доказать): если числа $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ и $\sqrt{c}$ являются сторонами трех эквивалентных арифметических треугольников, то число $\sqrt{abc}$ тоже является стороной некоторого арифметического треугольника, эквивалентного данным.

Вместо списка литературы для дальнейшего чтения (который был бы слишком велик), я просто перечислю важнейшие ключевые слова. Как уже упоминалось, понятие арифметического треугольника не используется. Вместо этого, говорят про *классы квадратичных форм*. Операция умножения этих классов называется *композицией*. Также говорят, что классы образуют *группу*, называемую *группой классов*. Есть много книг и статей, в которых объясняется смысл этих терминов и развивается дальнейшая теория.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 марта2009 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №6–2008» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2111» или «Ф2118». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvant.info и phys@kvant.info соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2112 и М2115 предлагались на XLIX Международной математической олимпиаде, а задача М2113 предлагалась на XXIX Турнире городов.

Задачи М2111 – М2115, Ф2118 – Ф2122

М2111. Одна из клеток бесконечной клетчатой полоски окрашена. Вначале фишка находится на расстоянии n клеток от окрашенной. Бросается игральная кость, и, в случае выпадения k очков ($k \in \{1,2,3,4,5,6\}$), фишка перемещается на k клеток по направлению к окрашенной клетке. Процесс продолжается, пока фишка не попадает в окрашенную клетку (выигрыш) или пока она не проскочит окрашенную клетку (проигрыш). При каком натуральном n вероятность выигрыша p_n наибольшая? Найдите это наибольшее значение вероятности.

В.Лецко

М2112. Пусть H – точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC. Окружность с центром в середине стороны BC, проходящая через точку H, пересекает прямую BC в точках A_1 и A_2. Аналогично, окружность с центром в середине стороны CA, проходящая через точку H, пересекает прямую CA в точках B_1 и B_2, и окружность с центром в середине стороны AB, проходящая через точку H, пересекает прямую AB в точках C_1 и C_2. Докажите, что точки $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на одной окружности.

А.Гаврилюк

М2113. Многочлен степени $n > 1$ имеет различные вещественные корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а его производная – корни $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. Докажите, что среднее арифметическое чисел $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$ больше, чем среднее арифметическое чисел $y_1^2, y_2^2, \ldots, y_{n-1}^2$.

М.Мурашкин

М2114. Докажите, что существует бесконечно много точных квадратов, не оканчивающихся нулем, в которых любая отличная от нуля цифра – нечетная.

В.Сендеров

М2115*. Пусть $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, в котором $BA \neq BC$. Обозначим окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC, через ω_1 и ω_2 соответственно. Предположим, что существует окружность ω, которая касается продолжения отрезка BA за точку A, продолжения отрезка BC за точку C и касается прямых AD и CD. Докажите, что общие внешние касательные к окружностям ω_1 и ω_2 пересекаются на окружности ω.

В.Шмаров

Ф2118. Тележка едет по горизонтальному столу под действием привязанной к ней нерастяжимой нити. Нить переброшена через маленький блок, закрепленный на высоте H над плоскостью стола. Свободный конец нити вытягивают с постоянной скоростью v_0, направленной горизонтально. Найдите скорость тележки и ее ускорение в тот момент, когда угол между нитью и горизонтом составляет $45°$.

М.Учителев

Ф2119. В длинной трубе, наполненной водой, сделана поперечная перегородка из пробки толщиной 1 см, перегородка делит трубу на две части. Если температуры воды в частях трубы отличаются на 1 градус, поток тепла через перегородку составляет 2 Дж/с. Добавим еще одну перегородку – толщиной 2 см, теперь перегородки «выделяют» в трубе цилиндрическую полость. Слева от этой полости будем поддерживать температуру воды $+50$ °C, справа – температуру $+20$ °C. Определите установившуюся температуру воды в полости. Определите тепловые потоки через каждую перегородку. Теплопроводность стенок трубы пренебрежимо мала.

А.Перегородцев

Ф2120. В сосуде находится порция гелия при температуре 100 К и давлении 1000 Па. Сосуд двигают поступательно со скоростью 1000 м/с. Какой станет температура газа в сосуде через некоторое время после его мгновенной остановки? Стенки сосуда не проводят тепла. Теплоемкость самого сосуда пренебрежимо мала.

З.Повторов

Ф2121. К выводам катушки индуктивностью $L = 2$ Гн подключают заряженный конденсатор емкостью $C = 100$ мкФ, начальное напряжение конденсатора $U_0 = 100$ В. Напряжение конденсатора начинает уменьшаться, и в тот момент, когда оно падает до половины начального значения, параллельно подключают еще один такой же конденсатор и еще одну такую же катушку (все четыре элемента оказываются соединенными параллельно). Найдите максимальное значение тока через вторую катушку. Сопротивление соединяющих элементы проводников довольно мало. Катушки и конденсаторы считать идеальными.

Р.Александров

Ф2122. Лампа дневного света включена в сеть 220 В, 50 Гц последовательно с катушкой индуктивности, причем в горящем состоянии напряжение на катушке в 3 раза больше напряжения на лампе. Во сколько раз можно увеличить «косинус фи» такой цепи, включив параллельно в сеть конденсатор? Как выбрать емкость такого конденсатора?

А.Зильберман

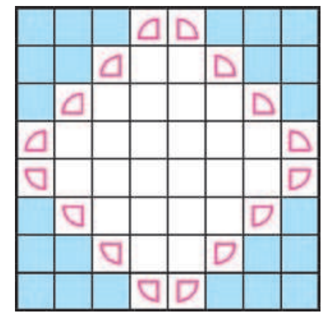
Решения задач М2086 – М2095, Ф2102 – Ф2107

М2086. *Даны две арифметические прогрессии $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$, состоящие из натуральных чисел. Известно, что $a_1 = b_1$ и для каждого номера n числа a_n и b_n имеют равные остатки при делении на n. Докажите, что прогрессии совпадают.*

По условию первые члены прогрессий совпадают, остается доказать совпадение их разностей d и d'. Из условия следует, что для любого натурального n число $b_n - a_n = (b_1 + (n-1)d') - (a_1 + (n-1)d) = (n-1)(d' - d)$ делится на n, значит, и $d' - d$ делится на n. Получаем, что целое число $d' - d$ делится на любое натуральное число, т.е. $d' - d = 0$.

Н.Калинин

М2087. *Шахматная фигура «прожектор» бьет один из углов, на которые делят доску проходящие через нее горизонталь и вертикаль, включая примыкающие к углу клетки горизонтали и вертикали. (Например, прожектор в левом нижнем углу может бить либо одну клетку, либо нижнюю горизонталь, либо левую вертикаль, либо всю доску.) Какое наибольшее число прожекторов можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?*



Ответ: 16.

В одной вертикали не могут находиться 3 или более прожекторов, иначе прожектор, который находится между двумя другими, бьет один из них. Следовательно, более $8 \cdot 2 = 16$ прожекторов расставить нельзя. Пример с 16 прожекторами приведен на рисунке.

А.Шаповалов

М2088. *Докажите, что для положительных чисел x, y, z, сумма которых равна 1, выполнено неравенство*

$$\frac{x^2 + 3xy}{x + y} + \frac{y^2 + 3yz}{y + z} + \frac{z^2 + 3zx}{z + x} \le 2.$$

Заметим, что для положительных чисел a и b справедливо неравенство $\dfrac{2ab}{a+b} \le \dfrac{a+b}{2}$, так как

$$4ab \le (a+b)^2 \Leftrightarrow 0 \le a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2.$$

Отсюда

$$\frac{x^2 + 3xy}{x + y} = \frac{(x^2 + xy) + 2xy}{x + y} = x + \frac{2xy}{x + y} \le x + \frac{x + y}{2} = \frac{3x}{2} + \frac{y}{2}.$$

Аналогично,

$$\frac{y^2 + 3yz}{y + z} \le \frac{3y}{2} + \frac{z}{2} \quad \text{и} \quad \frac{z^2 + 3zx}{z + x} \le \frac{3z}{2} + \frac{x}{2}.$$

Складывая три полученных неравенства, получаем

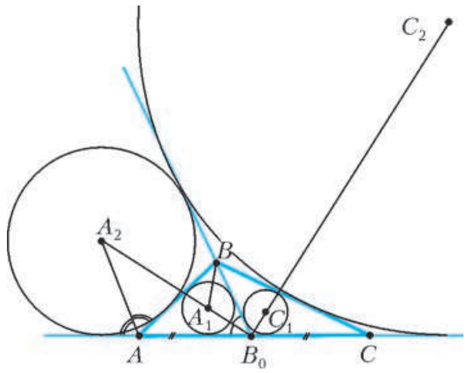
$$\frac{x^2 + 3xy}{x + y} + \frac{y^2 + 3yz}{y + z} + \frac{z^2 + 3zx}{z + x} \le 2(x + y + z) = 2.$$

П.Кожевников, Р.Пиркулиев

М2089. *Пусть B_0 – середина стороны AC треугольника ABC. Обозначим через A_1 и A_2 центры вписанной и касающейся AB вневписанной окружности треугольника ABB_0. Аналогично для треугольника CBB_0 определим точки C_1 и C_2. Докажите, что четырехугольник $A_1A_2C_2C_1$ – вписанный.*

Докажем, что треугольники B_0A_1B и B_0AA_2 подобны по двум углам (см. рисунок). Точки A_1 и A_2 лежат на биссектрисе угла AB_0B, поэтому $\angle A_1B_0B = \angle AB_0A_2$. Далее, так как AA_2 – внешняя биссектриса угла BAB_0, то

$$\angle A_2AB_0 = 90° + \frac{1}{2}\angle BAB_0 = 90° + \left(90° - \frac{1}{2}\angle ABB_0 - \frac{1}{2}\angle AB_0B\right) = 180° - \angle A_1BB_0 - \angle A_1B_0B = \angle BA_1B_0.$$



Из подобия треугольников B_0A_1B и B_0AA_2 вытекает равенство $B_0A_1 \cdot B_0A_2 = B_0A \cdot B_0B$.

Аналогично докажем равенство $B_0C_1 \cdot B_0C_2 = B_0C \cdot B_0B$. Так как $B_0A = B_0C$, то $B_0C_1 \cdot B_0C_2 = B_0A_1 \cdot B_0A_2$, поэтому точки A_1, A_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности.

Л.Емельянов

М2090. *Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – действительные числа; $S_1 = c_1$, $S_2 = c_1 + c_2$, $S_3 = c_1 + c_2 + c_3, \ldots,$ $S_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$; M и m – соответственно максимальное и минимальное среди чисел $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$. Докажите неравенства:*

а) $m \le c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \ldots + \frac{1}{n}c_n \le M$;

б) $nm \le nc_1 + (n-1)c_2 + \ldots + c_n \le nM$;

в) если $\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \ldots \ge \alpha_n > 0$, *то* $\alpha_1 m \le \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \ldots + \alpha_n c_n \le \alpha_1 M$.

Докажем сразу более общее утверждение в). С суммой $S = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \ldots + \alpha_n c_n$ произведем тождественное преобразование (иногда называемое *преобразованием Абеля*):

$$S = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 (S_2 - S_1) + \ldots + \alpha_n (S_n - S_{n-1}) =$$
$$= (\alpha_1 - \alpha_2) S_1 + (\alpha_2 - \alpha_3) S_2 + \ldots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) S_{n-1} + \alpha_n S_n.$$

После этого сумму можно оценить сверху и снизу, пользуясь тем, что числа

$$\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1} - \alpha_n, \alpha_n$$

неотрицательные:

$$\alpha_1 m =$$
$$= (\alpha_1 - \alpha_2) m + (\alpha_2 - \alpha_3) m + \ldots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) m + \alpha_n m \le$$
$$\le S \le (\alpha_1 - \alpha_2) M + (\alpha_2 - \alpha_3) M + \ldots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) M +$$
$$+ \alpha_n M = \alpha_1 M.$$

П.Кожевников

М2091. *Докажите, что для любых натуральных $n > 2$ и m существуют n попарно взаимно простых натуральных чисел, больших 10^{10} и таких, что сумма их m-х степеней делится на их сумму.*

Для данного m найдем числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с нужным свойством.

При $m = 1$ годятся n различных простых чисел, больших 10^{10}.

I. Пусть $m > 1$ – нечетное число.

Если $n = 3$, то положим $a_1 = p - 2$, $a_2 = p$, $a_3 = p + 2$, где p – простое число, большее $10^{10} + 2$. Тогда

$$a_1^m + a_2^m + a_3^m \equiv (-2)^m + 0 + 2^m \equiv 0 \pmod{p}.$$

Поскольку числа a_1, a_2, a_3 дают различные остатки при делении на 3,

$$a_1^m + a_2^m + a_3^m \equiv (-1)^m + 0 + 1^m \equiv 0 \pmod{3}.$$

Отсюда следует, что $a_1^m + a_2^m + a_3^m$ делится на $3p = a_1 + a_2 + a_3$.

Считаем далее, что $n > 4$. Пусть $p_1 > p_2 > \ldots > p_{n-1}$ – различные простые числа, большие чем $\max\{10^{10}, n^m\}$.

Для $i = 1, 2, \ldots, n-1$ положим $a_i = p_i^{\alpha}$, где $\alpha = (p_1 - 1)(p_2 - 1)\ldots(p_{n-1} - 1)$ (так как α делится на $p_i - 1$, то по малой теореме Ферма число a_i дает остаток 1 при делении на p_j, где $j \ne i$, $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, – это условие будет использовано в дальнейшем). Очевидно, что числа $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ попарно взаимно простые и большие 10^{10}. Далее, положим

$$a_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})^m -$$
$$- (a_1^m + a_2^m + \ldots + a_{n-1}^m) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}).$$

Докажем, что 1) $a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m$ делится на сумму $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, 2) $a_n > 10^{10}$, 3) a_n взаимно просто с числами $a_1, \ldots, a_{n-1}$.

1) Из определения a_n следует, что

$$s = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})^m - (a_1^m + a_2^m + \ldots + a_{n-1}^m).$$

Так как $a_n \equiv -(a_1 + \ldots + a_{n-1}) \pmod{s}$, то

$$a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m \equiv$$
$$\equiv a_1^m + a_2^m + \ldots + a_{n-1}^m - (a_1 + \ldots + a_{n-1})^m \equiv -s \equiv 0 \pmod{s}.$$

2) Полагая $x = a_1$, $y = a_2 + \ldots + a_{n-1}$ и пользуясь разложением

$$(x + y)^m = x^m + mx^{m-1}y + \ldots + y^m,$$

имеем

$$a_n \ge \Big(a_1^m + ma_1^{m-1}(a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}) +$$
$$+ (a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1})^m\Big) - \left(a_1^m + a_2^m + \ldots + a_{n-1}^m\right) -$$
$$-(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) \ge$$
$$\ge ma_1^{m-1}(a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}) - (n-1)a_1 \ge$$
$$\ge a_1\left(10^{10}(n-2) - (n-1)\right) \ge a_1 > 10^{10}.$$

3) Достаточно установить, что a_n не делится на p_i при $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Так как для таких i выполнено $a_i \equiv 0 \pmod{p_i}$ и $a_j \equiv 1 \pmod{p_i}$ при $j \ne i$, $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, то $a_n \equiv (n-2)^m - 2(n-2) \pmod{p_i}$. Но $p_i > (n-2)^m - 2(n-2) > 0$, поэтому a_n не делится на p_i.

II. В случае четного m достаточно, рассуждая аналогично случаю нечетного $m > 1$, положить

$$a_n = \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}\right)^m + \left(a_1^m + a_2^m + \ldots + a_{n-1}^m\right) - \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}\right).$$

В пункте 3), при доказательстве взаимной простоты a_n и a_i ($i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$), получим сравнение $a_n \equiv (n-2)^m \pmod{p_i}$, поэтому a_n не делится на p_i.

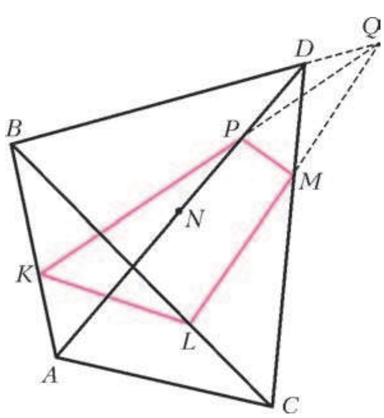
В.Сендеров

М2092. *На ребрах AB, BC, CD, DA тетраэдра ABCD взяты точки K, L, M, N соответственно. Точки K', L', M', N' симметричны точкам K, L, M, N относительно середин ребер AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что объемы тетраэдров KLMN и $K'L'M'N'$ равны.*

Пусть плоскости KLM и $K'L'M'$ пересекают ребро AD в точках P и P' соответственно. Покажем, что

$$\frac{BK}{AK} \cdot \frac{AP}{DP} = \frac{BL}{CL} \cdot \frac{CM}{DM}. \qquad (1)$$

Если плоскость $KLMP$ пересекает прямую BD в точке Q (см. рисунок), то по теореме Менелая, примененной к треугольникам ABD и CBD с секущими KP и ML, имеем $\frac{BQ}{DQ} = \frac{BK}{AK} \cdot \frac{AP}{DP}$ и $\frac{BQ}{DQ} = \frac{BL}{CL} \cdot \frac{CM}{DM}$, откуда следует (1). Если же плоскость $KLMP$ параллельна ребру BD, то $KP \parallel ML \parallel BD$, и нужное соотношение (1) следует из теоремы Фалеса в гранях ABD и CBD. Аналогично доказывается, что



$$\frac{BK'}{AK'} \cdot \frac{AP'}{DP'} = \frac{BL'}{CL'} \cdot \frac{CM'}{DM'}. \qquad (1')$$

Из условия задачи следует, что $AK = BK'$, $BK = AK'$, $BL = CL'$, $CL = BL'$, $CM = DM'$, $DM = CM'$. Поэтому из (1) и (1′) вытекает, что $\frac{AP}{DP} = \frac{DP'}{AP'}$, т.е. точки P и P' симметричны относительно середины ребра AD (отсюда, в частности, $AP' = DP$, $NP = N'P'$).

Далее будем пользоваться следующей простой *леммой*. Пусть прямая TT' пересекает плоскость треугольника XYZ в точке O. Тогда отношение объемов $\frac{V(XYZT)}{V(XYZT')} = \frac{OT}{OT'}$.

Для доказательства леммы достаточно заметить, что у тетраэдров $XYZT$ и $XYZT'$ общее основание XYZ, а высоты, проведенные к этому основания, относятся как OT к OT'.

Вернемся к задаче. Согласно лемме,

$$\frac{V(KLMN)}{V(KLMD)} = \frac{NP}{DP} = \frac{N'P'}{AP'} = \frac{V(K'L'M'N')}{V(K'L'M'A)}.$$

Теперь достаточно доказать равенство $V(KLMD) = V(K'L'M'A)$.

Снова по лемме,

$$\frac{V(KLMD)}{V(KLCD)} = \frac{MD}{CD} = \frac{CM'}{CD} = \frac{V(K'L'M'A)}{V(K'L'DA)}.$$

Остается доказать, что $V(KLCD) = V(K'L'DA)$.

Далее,

$$\frac{V(KLCD)}{V(KBCD)} = \frac{CL}{BC} = \frac{BL'}{BC} = \frac{V(K'L'DA)}{V(K'CDA)}.$$

Достаточно установить, что $V(KBCD) = V(K'CDA)$. Но это верно, так как

$$\frac{V(KBCD)}{V(ABCD)} = \frac{BK}{AB} = \frac{AK'}{AB} = \frac{V(K'CDA)}{V(BCDA)}.$$

Замечание. Если зафиксировать тетраэдр $ABCD$, а точкам K, L, M, N позволить двигаться по ребрам AB, BC, CD, DA соответственно, то величина $\pm V(KLMN)$ (знак выбирается в зависимости от ориентации тетраэдра) является функцией от четырех переменных AK/KB, BL/LC, CM/MD, DN/NA, линейной по каждому из аргументов. Фактически, этим соображением мы и пользовались в решении, последовательно «перетаскивая» точки K, L, M, N в вершины тетраэдра $ABCD$.

П.Кожевников

М2093. *Фокуснику завязывают глаза, а зритель выкладывает в ряд N одинаковых монет, сам выбирая, какие орлом вверх, а какие решкой. Ассистент фокусника просит зрителя написать на бумаге любое натуральное число от 1 до N и показать его всем присутствующим. Увидев число, ассистент указывает на одну из монет ряда и просит перевернуть ее. Затем фокуснику развязывают глаза, он смотрит на ряд монет и безошибочно определяет написанное зрителем число. Найдите все N, для которых у фокусника с ассистентом есть способ гарантированно отгадывать число.*

Ответ: N – степень двойки.

Докажем *лемму*: если у фокусника с ассистентом есть способы, позволяющие фокуснику гарантированно отгадывать число для $N = k$, то есть способ и для $N = 2k$.

Мысленно расположив монеты в клетках таблицы $2 \times k$, фокусник пишет под каждым столбцом из двух клеток O, если монеты там лежат одной стороной вверх, и P – если разными сторонами. Эта комбинация сообщает ему число n от 1 до k. Если в верхней строке четное число решек, он называет n, иначе $n + k$.

Пусть зритель назвал число m. Чтобы сообщить его, ассистент тоже мысленно пишет строку из O и P по тому же правилу. Он может изменить одну из букв, чтобы получить код, соответствующий числу m (при $m \le k$) или $m-k$ (при $m > k$). Для этого ему достаточно перевернуть любую из монет в соответствующем столбце. Выбором верхней или нижней монеты он обеспечивает нужную четность числа решек в верхней строке. Лемма доказана.

При $N = 1$ способ очевиден, при $N = 2$ способ такой: числу 1 соответствует орел, а числу 2 – решка на левой монете. По лемме, последовательно удваивая, получим способы для каждого N вида 2^m.

Докажем теперь, что при других значениях N способов нет. Комбинаций из N монет всего 2^N. Допустим, способ у ассистента и фокусника есть. Рассмотрим какую-нибудь одну комбинацию (она может попасться ассистенту). Изменяя в ней положение ровно одной монеты, можно получить ровно N других комбинаций. Каждая из N этих комбинаций должна обозначать для фокусника свое число от 1 до N (так как есть N вариантов для загаданного числа). Припишем этим комбинациям номера, которые они обозначают. Таким образом можно *каждой* из 2^N комбинаций приписать число, которое она обозначает для фокусника (так как каждую комбинацию можно получить из некой другой описанным выше способом).

Посчитаем, скольким комбинациям приписано число 1. Всего комбинаций 2^N, из каждой можно получить ровно одну комбинацию, которой приписана 1. Всего получаем 2^N комбинаций, которым приписана 1, но при этом каждую такую комбинацию мы посчитали N раз (поскольку каждую комбинацию можно получить ровно из N других). Значит, 1 приписана $2^N/N$ комбинациям. Это число должно быть целым, что возможно только если N является степенью двойки.

Л.Медников, А.Шаповалов

М2094. *На плоскости нарисованы два выпуклых[1] многоугольника P и Q. Для любой стороны многоугольника P многоугольник Q можно зажать между двумя прямыми, параллельными этой стороне. Обозначим через h расстояние между этими прямыми, а через l – длину стороны. Просуммировав все произведения lh по всем сторонам P, получим число, которое обозначим $(P,\ Q)$. Докажите, что $(P,\ Q) = (Q,\ P)$.*

Докажем, что $(P,Q) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_i b_j \sin\varphi_{ij} = (Q,P)$, где a_i – стороны P, b_j – стороны Q, φ_{ij} – угол между a_i и b_j.

Зафиксируем некоторую сторону a_i, зажмем многоугольник Q между прямыми, параллельными a_i, и выберем две вершины C и D, лежащие на этих двух прямых. Контур Q разбивается на две ломаные с концами C и D. Ввиду выпуклости проекция такой ломаной на перпендикулярную a_i прямую m складывается из проекций звеньев ломаной. Значит, проекция многоугольника Q на m покрывается проекциями его сторон ровно два раза, т.е. сумма длин проекций сторон равна удвоенному расстоянию h_i между зажимающими Q прямыми. Длина проекции b_j на m равна $b_j\cos\left(90° - \varphi_{ij}\right) = b_j \sin\varphi_{ij}$, значит, $2h_i = \sum_j b_j \sin\varphi_{ij}$, а $a_i h_i = \frac{1}{2}\sum_j a_i b_j \sin\varphi_{ij}$. Складывая такие суммы по всем i, получим нужную формулу.

Л.Медников, А.Шаповалов

М2095. *Перед Алешей 100 закрытых коробочек, в каждой-либо красный, либо синий кубик. У Алеши на счету есть рубль. Он подходит к любой закрытой коробочке, объявляет цвет и ставит любую сумму (можно нецелое число копеек, но не больше, чем у него на счету на данный момент). Коробочка открывается, и Алешин счет увеличивается или уменьшается на поставленную сумму в зависимости от того, угадан или не угадан цвет кубика. Игра продолжается, пока не будут открыты все коробочки. Какую наибольшую сумму на счету может гарантировать себе Алеша, если ему известно, что синих кубиков ровно n?*

Ответ: $\dfrac{2^{100}}{C_{100}^n}$.

Рассмотрим общую ситуацию: Алеша знает, что есть m красных и n синих кубиков в $m + n = K$ коробочках. Попросим его в таком случае поставить $\dfrac{|n-m|}{K}$-ю часть своего капитала на тот цвет, которого больше (в частности, при $m = n$ Алеша ничего не ставит). Докажем индукцией по K, что, действуя так, Алеша увеличит свой капитал в $\dfrac{2^K}{C_K^n}$ раз.

Когда коробочка всего одна, утверждение очевидно: Алеша увеличивает капитал в два раза. Пусть теперь утверждение верно для $K - 1$ коробочки, докажем его для K коробочек.

Пусть для определенности $m \le n$. Если на первом шаге открыт синий кубик, то на этом шаге Алеша увеличил капитал в $1 + \dfrac{n-m}{K} = \dfrac{2n}{K}$ раз, остались $n - 1$ синий кубик и $K - 1$ коробочка, что, по предположению, даст увеличение капитала в $\dfrac{2^{K-1}}{C_{K-1}^{n-1}}$ раз. Перемножая эти числа и учитывая, что $C_{K-1}^{n-1}\cdot\dfrac{K}{n} = C_K^n$, получим требуемое $\dfrac{2^K}{C_K^n}$. Если на первом шаге открыт красный кубик, капитал уменьшился, умножившись на $1 - \dfrac{n-m}{K} = \dfrac{2m}{K}$, и остались n синих кубиков и $K - 1$ коробочка, что, по предположению, даст увеличение капитала в $\dfrac{2^{K-1}}{C_{K-1}^n}$ раз. Перемножая, учтем, что $C_{K-1}^n\cdot\dfrac{K}{m} = C_{K-1}^{m-1}\dfrac{K}{m} = C_K^m = C_K^n$, и снова получим требуемое.

Покажем теперь индукцией по K, что в большее число раз Алеша капитал увеличить не может. Для случая

[1] *В условии задачи, опубликованном в «Кванте» №3 за 2008 год, была допущена неточность – пропущено слово «выпуклый».*

одной коробочки это очевидно. Если коробочек несколько, и Алеша поставит на синий цвет долю, большую указанной в алгоритме, то при выпадении красного он получит меньше, чем по алгоритму. А если он поставит долю меньше, чем по алгоритму (в том числе отрицательную, если ставит на красный), он получит меньше, чем по алгоритму при выпадении синего.

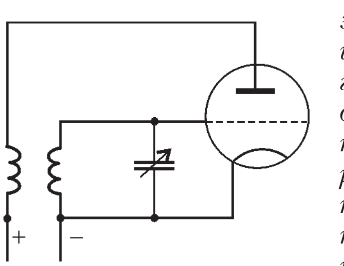
Приведем также план решения, не использующего индукцию.

Заметим, что поставить x (рублей) на красный цвет это то же самое, что поставить $-x$ на синий. Поэтому можно считать, что Алеша ставит x на синий цвет, где $|x|$ не превосходит имеющейся у него суммы.

Предположим, что после каждого шага Алеша платит налог в размере половины имеющихся денег (в итоге он получит в 2^{100} раз меньше денег, чем в условиях задачи). При наличии перед очередным шагом суммы S и ставке x у него после этого шага остается либо $\frac{S+x}{2}$, либо $\frac{S-x}{2}$, что в сумме снова дает S. Поэтому можно считать, что Алеша каждый раз просто раскладывает свои деньги на 2 кучки – на случай того или иного цвета кубика. Если учесть все возможные варианты распределения кубиков по коробочкам, все деньги (1 рубль) будут разложены на 2^{100} кучек. Из них C_{100}^n кучек соответствуют наборам из n синих кубиков, и в них должно лежать денег поровну – по $\frac{1}{C_{100}^n}$ (иначе в одном из вариантов «выигрыш» меньше), а в остальных – 0. Умножив на 2^{100}, получаем ответ.

Л.Медников, А.Шаповалов

Ф2102. *Генератор незатухающих колебаний собран по обычной «ламповой» схеме – потери в колебательном LC-контуре компенсируются подкачкой энергии через дополнительную катушку, включенную в анодную цепь лампы-триода. Частота колебаний перестраивается за счет изменения емкости конденсатора, включенного в контур (настройка при помощи конденсатора переменной емкости). Генератор работает на заданной частоте, но его настроили неправильно – если мы хотя бы немного уменьшим подкачку энергии (например, уменьшим число витков вспомогательной катушки на один виток), колебания просто не возникнут. Перестроим частоту колебаний на 5%, уменьшив емкость конденсатора. Как нужно изменить число витков вспомогательной катушки, чтобы генератор мог работать на этой частоте? Считайте, что потери энергии в колебательном контуре связаны главным образом с сопротивлением провода, которым намотана катушка индуктивности. Упрощенная схема генератора приведена на рисунке.*



Запишем уравнение для собственных колебаний в колебательном контуре, состоящем из катушки индуктивности, конденсатора и резистора малого сопротивления:

$$LI' + rI + \frac{1}{C}q = 0\text{, или } q'' + \frac{r}{L}q' + \frac{1}{LC}q = 0\,.$$

Для получения незатухающих колебаний второе слагаемое нужно скомпенсировать, «включив» в контур дополнительную ЭДС. В приведенной схеме генератора это достигается при помощи катушки, включенной в анодную цепь лампы: $\mathcal{E}_{\text{доп}} = -MI_{\text{а}}'$, где M – коэффициент взаимной индукции катушек, $I_{\text{а}}$ – анодный ток. Впрочем, можно этого и не знать – нужно только записать для «дополнительного» магнитного поля соотношение $B \sim n_2 I_{\text{а}}$, где n_2 – число витков вспомогательной катушки. Тогда

$$B = k_1 n_2\left(I_0 + S\frac{q}{C}\right)\text{, и } \mathcal{E}_{\text{доп}} \sim -B' = -k_2 n_2 \frac{S}{C}q'\,.$$

Здесь I_0 – начальный анодный ток (при нулевом напряжении между сеткой и катодом), S – крутизна вольт-амперной характеристики лампы, коэффициент k_2 включает и площадь витка основной катушки, и число ее витков, и еще некоторые геометрические характеристики контура, которые в нашем случае не изменяются. Окончательно получим

$$k_2 n_2 \frac{S}{C}q' = \frac{r}{L}q'\text{, или } n_2 = \frac{rC}{L}\frac{1}{k_3}\,.$$

Для увеличения частоты генератора на 5 % емкость придется уменьшить примерно на 10 %. Для сохранения прежнего условия возникновения колебаний в генераторе следовало бы уменьшить примерно на 10 % число витков вспомогательной катушки, но этого можно не делать – колебания возникнут и при прежнем числе витков. При этом увеличится амплитуда колебаний (должна была бы измениться и форма «выходного сигнала», но благодаря контуру колебания останутся «почти» гармоническими). Отсюда следует, что, изменяя частоту генератора, не обязательно «перематывать» катушку.

А.Контуров

Ф2103. *Навстречу друг другу по одной прямой с одинаковыми скоростями v = 1 м/с движутся шарики с массами m = 10 г и $3m$ = 30 г. Какую максимальную скорость может приобрести легкий шарик после лобового удара шариков?*

Для определения максимальной скорости малого шарика нужно понять, какой это был удар. Многие школьники уверены, что удар может быть либо абсолютно упругим, либо абсолютно неупругим. Однако это не так – часть энергии шариков может перейти в тепло (не абсолютно упругий удар), но не столько, сколько выделилось бы при абсолютно неупругом ударе. Будем исходить из того, что закон сохранения импульса при любом виде удара выполняется, а вместо закона сохранения механической энергии нам придется записать условие «неувеличения» полной механической энергии, т.е. получится одно уравнение и одно неравенство.

Обозначим скорость легкого шара после удара u, а скорость тяжелого v. Направим обе скорости в ту сторону, куда была направлена начальная скорость v_0 тяжелого шара. Полной уверенности в том, что шары после столкновения будут двигаться именно туда, у нас нет – ну и не надо: если ответ получится отрицательным, это будет означать, что соответствующая скорость направлена в противоположную сторону. Итак, запишем

$$-m \cdot v_0 + 3m \cdot v_0 = m \cdot u + 3m \cdot v,$$

$$m \cdot v_0^2 + 3m \cdot v_0^2 \geq m \cdot u^2 + 3m \cdot v^2.$$

Теперь можно выразить из уравнения скорость v и подставить в неравенство:

$$v = \frac{2v_0 - u}{3}, \quad 4v_0^2 \geq u^2 + \frac{4v_0^2 - 4v_0u + u^2}{3},$$

$$12v_0^2 \geq 3u^2 + \left(4v_0^2 - 4v_0u + u^2\right),$$

$$u^2 - v_0u - 2v_0^2 \leq 0.$$

Максимальное значение скорости u находим обычным способом – запишем уравнение $u^2 - v_0u - 2v_0^2 = 0$ и найдем тот корень, что побольше:

$$u = 2v_0 = 2\text{ м/с}.$$

Это и есть ответ задачи. Кстати, получается это значение именно при абсолютно упругом ударе. Интересно, это вам было заранее понятно?

А.Простов

Ф2104. *Легкая нить намотана множеством витков на гладкую неподвижно закрепленную катушку радиусом R (рис.1). На свободном конце нити закреплен маленький шарик массой m, другой конец нити начинают вытягивать через отверстие в катушке, постепенно увеличивая скорость вдоль поверхности катушки до величины v. В результате через большое время движение шарика устанавливается. Найдите скорость установившегося движения шарика и радиус траектории его движения. Сила тяжести отсутствует, сила трения шарика о воздух пропорциональна его скорости: $F_{\text{тр}} = ku$.*

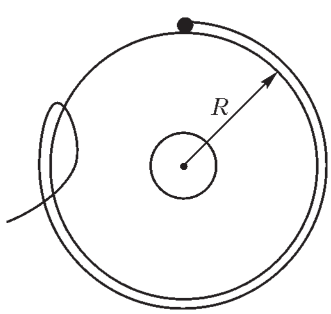


Рис. 1

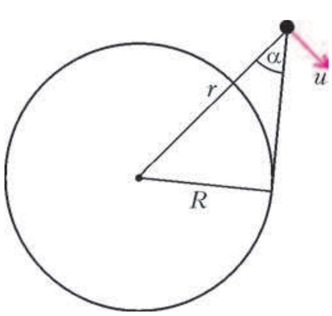


Рис. 2

При вытягивании нити шарик оторвется от катушки, поскольку нет сил, которые обеспечивали бы его движение по дуге окружности радиусом R. Под действием окружающей среды шарик займет равновесное положение на некоторой орбите радиусом r, имея скорость u (рис.2). Запишем уравнение второго закона Ньютона в проекциях на направления вдоль этого радиуса и перпендикулярно ему:

$$m\frac{u^2}{r} = F\cos\alpha, \quad 0 = F\sin\alpha - ku,$$

где F – сила натяжение нити. Учитывая следующие соотношения:

$$v = u\sin\alpha, \quad R = r\sin\alpha,$$

получаем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{kR}{mv},$$

откуда

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{mv}{kR}\right)^2}}.$$

В итоге находим искомые скорость шарика u и радиус траектории r:

$$u = \frac{v}{\sin\alpha} = v\sqrt{1+\left(\frac{mv}{kR}\right)^2}, \quad r = \frac{R}{\sin\alpha} = R\sqrt{1+\left(\frac{mv}{kR}\right)^2}$$

М.Гырдымов

Ф2105. *Цикл тепловой машины проводят с порцией гелия. Он состоит из двух изобар с отношением давлений 2:1 и двух изохор. Найдите максимально возможный термодинамический КПД такого цикла.*

Пусть минимальный объем в цикле V, максимальный объем в цикле nV, давления на изобарах p и $2p$. Тогда работа в цикле равна

$$A = p(n-1)V.$$

Тепло газ получает на участках изохорического нагревания и изобарического расширения. Для точки с минимальной температурой $pV = \nu RT$, максимальная температура в $2n$ раз выше минимальной, поэтому полученное в цикле количество теплоты равно

$$Q = 2pV(n-1) + 1{,}5pV(2n-1).$$

В таком случае термодинамический коэффициент полезного действия цикла составляет

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{pV(n-1)}{2pV(n-1) + 1{,}5pV(2n-1)}.$$

После простого анализа формулы видно, что чем больше n, тем больше η. При очень большом значении n получается $\eta = 0{,}2$.

А.Старов

Ф2106. *Конденсатор емкостью C = 100 мкФ подключен к батарейке напряжением U = 6 В последовательно с резистором сопротивлением r = 100 кОм. Вольтметр, имеющий сопротивление R = 200 кОм, периодически подключают параллельно конденсатору и отключают от него. Время подключения составляет каждый раз τ = 0,05 с, а время, в течение которого вольтметр отключен, составляет каждый раз 2τ. Что показывает вольтметр?*

При такой частоте переключений стрелка прибора немного «дрожит», но вольтметр показывает какое-то определенное напряжение. Условие постоянства этого напряжения – заряд конденсатора остается почти постоянным. При отключении вольтметра заряд немного увеличивается, при подключении – на такую же величину уменьшается. Пусть искомое напряжение равно U_1. Тогда «прибыль» заряда за время 2τ получится

$$\Delta Q = \frac{2\tau\left(U - U_1\right)}{r}.$$

При подключении вольтметра стекающий с верхней обкладки конденсатора заряд должен оказаться таким же:

$$\Delta Q = \frac{\tau U_1}{R} - \frac{\tau\left(U - U_1\right)}{r}.$$

Приравнивая правые части, получим

$$U_1 \approx 5{,}1 \text{ В}.$$

Нам не понадобилось значение емкости конденсатора, и для получения ответа нужно знать не сами сопротивления, а только их отношение. Значения сопротивлений и емкости нужны только для того, чтобы проверить выполнение условия $rC \gg \tau$. В числах: $1 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 10^{-4} = 10 \gg 0{,}05$. Выполняется! Это означает, что конденсатор за время подключения/отключения изменяет заряд действительно на ничтожно малую долю.

З.Рафаилов

Ф2107. *Цилиндрический магнит небольшого размера создает на своей оси магнитное поле $B_0 = 0{,}001$ Тл в точке, находящейся на расстоянии $L = 5$ м от торца магнита. Проволочный виток с током $I = 2$ А расположен в указанной точке на оси магнита так, что плоскость кольца перпендикулярна оси магнита, а ось проходит через центр кольца. Найдите силу, действующую в магнитном поле на кольцо. Кольцо сделано из тонкой проволоки. Магнитная индукция на оси магнита на расстоянии $L_1 = 5{,}1$ м составляет $B_1 = 0{,}94B_0$.*

Автор забыл задать в условии задачи радиус кольца, а от него явно зависит ответ. Добавим в условие задачи значение $r = 1$ см. Если взять кольцо большого размера (например, $r = 20$ см), то точки кольца будут лежать далеко от оси и мы не сможем найти величину магнитной индукции там, где течет ток, – а значит, и не получится посчитать величину действующей на кольцо силы.

Важно, что нас интересует только «перпендикулярная» составляющая вектора магнитной индукции – проекция на ось нам не годится, так как она растягивает кольцо, а не пытается его сместить. На оси магнита магнитная индукция имеет только продольную составляющую B_1. Поперечная составляющая B_2 появляется лишь при удалении «вбок» от оси. Найдем составляющую B_2 на расстоянии r от оси – там, где течет ток. Для этого нарисуем вокруг оси тонкий цилиндр радиусом r, его ближнее основание расположено на расстоянии L от торца магнита (там, где поле B_0), высота цилиндра H (его верхний торец там, где магнитная индукция B_1). Разность магнитных потоков через основания цилиндра равна потоку через его боковую поверхность. Будем считать поле B_2 одинаковым во всех точках боковой поверхности цилиндра, тогда запишем

$$\pi r^2\left(B_0 - B_1\right) = 2\pi r H B_2, \text{ откуда } B_2 = \frac{0{,}03B_0 r}{H}.$$

Сила направлена параллельно оси магнита (куда именно, от магнита или к магниту, неизвестно – это зависит от направления тока кольца), величина силы составляет

$$F = 2\pi r I B_2 = \frac{2\pi r^2 I \cdot 0{,}03B_0}{H} =$$
$$= \frac{6{,}3 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}001}{0{,}1} \text{ Н} \approx 3{,}8 \cdot 10^{-7} \text{ Н}.$$

Очень маленькая сила.

А.Зильберман

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

Шкатулка с секретом

(Начало см. на 4-й с. обложки)

Специальная страничка «Коллекция головоломок» впервые появилась в «Кванте» в 1993 году. Последние семь лет она присутствует в каждом номере журнала. За эти годы читатели познакомились с десятками самых новых, самых популярных и самых трудных головоломок из разных стран мира. На страницы журнала головоломки попадали при обязательном выполнении двух условий: они были трудны в решении и просты в изготовлении.

В «Коллекции» собраны практически все виды «умных игрушек»: сборно-разборные узлы, задачи на упаковки и перестановки, проволочные и шнурковые головоломки и даже «невозможные предметы». Не хватало очень интересной разновидности головоломок – «шкатулок с секретами». И сегодня этот пробел будет восполнен.

Конструкцию секретного замка придумала Татьяна Матвеева из Подмосковья. Предлагаемое запорное устройство, изображенное на обложке, находится внутри пластинки из фанеры размером $45 \times 45 \times 6$ мм, в которой просверлены три канала. Их диаметры зависят от размеров штифтов, поэтому изготовление замка лучше всего начать с них. Стальные штифты делают из обычных гвоздей толщиной 2,5 мм и длиной 30 мм. Один конец каждого штифта аккуратно стачивают надфилем до диаметра 1 мм на длину около 6 мм. Для немагнитного штифта используют отрезок медной или латунной проволоки длиной 35 мм и чуть большего диаметра, чем стальные штифты.

Самая ответственная часть работы – сверление каналов. Сначала сверлят два тонких канала диаметром 1,5 мм насквозь, через всю пластину. Эту работу следует выполнять осторожно, но на большой скорости, постоянно следя за тем, чтобы сверло не «уводило» в сторону от вертикали. После этого каналы рассверливают с одной стороны до диаметра 4 мм, затем сверлят поперечный канал диаметром 4,5 мм. Каналы очищают от заусенцев круглым надфилем, штыри ставят на свои места и проверяют их свободное скольжение. Ориентируясь на рисунок, один из каналов вскрывают для установки магнита. Углубление

(Продолжение см. на с. 34)

К М Ш

Задачи

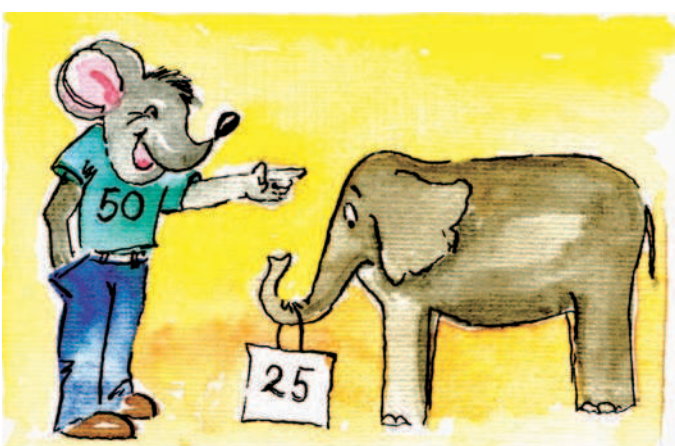
1. На доске написано неверное равенство:

Проведите один прямолинейный отрезок так, чтобы получилось верное равенство.

А.Анджанс

2. Даны пятьдесят различных натуральных чисел, двадцать пять из которых не превосходят 50, а остальные больше 50, но не превосходят 100. При этом никакие два из них не различаются ровно на 50. Найдите сумму этих чисел.

В.Произволов



3. В 10 коробках лежат карандаши (пустых коробок нет). Известно, что в разных коробках разное число карандашей, причем в каждой коробке все карандаши разных цветов. Докажите, что из каждой коробки можно выбрать по карандашу так, что все они будут разных цветов.

П.Кожевников

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

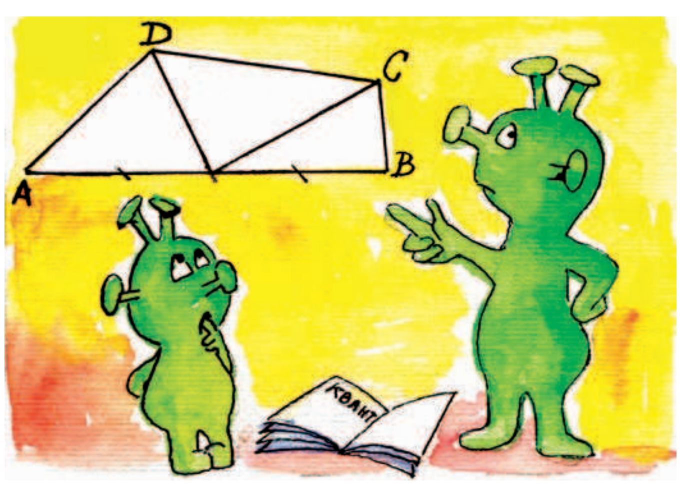
4. Найдите все тройки натуральных чисел (a, b, c), для которых

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+b+c}=1.$$

Г.Гальперин

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ сторона CD видна из середины стороны AB под прямым углом. Докажите, что $AD + BC \geq CD$.

Д.Калинин



Иллюстрации Д.Гришуковой

Конкурс имени А.П.Савина
«Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» или по электронному адресу:* math@kvant.info *(с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

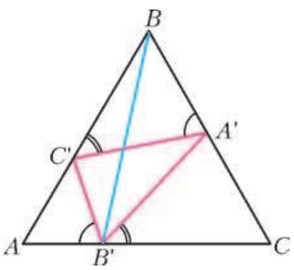


Рис. 1

11. Треугольник $A'B'C'$ вписан в равносторонний треугольник ABC так, как показано на рисунке 1. Известно, что углы $BA'C'$ и $C'B'A$ равны, а также углы $BC'A'$ и $A'B'C$ равны. Докажите, что прямая $B'B$ делит угол $A'B'C'$ пополам.

В.Произволов

12. Докажите, что разность $9^{9^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{9}}}}} - 8^{8^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{8}}}}}$, где число девяток не меньше двух, а число восьмерок любое, всегда делится на 7.

Г.Гальперин

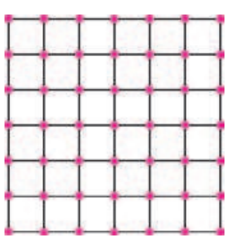


Рис. 2

13. На плоскости отмечены 49 точек, являющихся узлами клетчатой таблицы 6×6 (рис.2). Докажите, что у любой замкнутой ломаной, вершинами которой являются все эти точки, найдутся два параллельных звена.

А.Грибалко

14. Перед вами три суперкомпьютера: американский, китайский и российский. На вид они неразличимы, и вам неизвестно, где какой компьютер. Разрешается задать только один вопрос, на который можно ответить «да» или «нет», какому-нибудь одному из компьютеров, после чего этот компьютер даст ответ. Беда в том, что правдиво на вопросы отвечает лишь американский компьютер, а два других сломаны: китайский всегда отвечает неправду, а российский отвечает что попало.

Можно ли придумать вопрос, который позволит гарантированно купить:

а) не российский компьютер;

б) не китайский компьютер?

Компьютеры знают все друг о друге.

Фольклор

15. В прямоугольную коробку положили 40 батареек (рис.3). Батарейки лежат «вплотную» – ни одну нельзя подвинуть. После этого нашли еще одну батарейку. Как теперь упаковать все батарейки в ту же коробку?

С.Посицельский, М.Семёнова

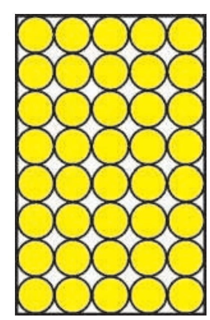


Рис. 3

Шкатулка с секретом

(Начало см. на 4-й с. обложки)

для магнита можно сделать фрезой или тупо заточенным сверлом. Перед тем как закрепить (приклеить) магнит, в канал вставляют стальной штифт и, поворачивая магнит, ориентируют его для получения максимальной силы притяжения. Магнит можно вырезать из магнитной наклейки или игрушки. Он должен надежно удерживать штифт, не давая ему оторваться при случайном резком движении замка.

После проверки правильности установки всех штырей и их скольжения нужно деревянными пробочками-заглушками заклеить лишние отверстия в пластинке (на рисунке они показаны пунктиром). Изготовление замка закончено, остается только приклеить его к внутренней крышке шкатулки. Затем нужно установить внутри коробочки запорную жестяную скобу, за которую будут зацепляться тонкие кончики штифтов, и шкатулка с секретом готова.

В исходном (после изготовления) состоянии шкатулка отперта, нижний (как изображено на рисунке) штифт прижат к магниту, а верхнему штифту мешает двигаться медный штифт. Чтобы запереть шкатулку, нужно закрыть крышку, наклонить коробочку вперед, «на себя», и резко ударить передней стороной шкатулки о ладонь. Нижний штифт оторвется от магнита, и шкатулка окажется запертой на один штифт. Теперь верните ее в исходное положение и наклоните вправо. Медный штифт скользнет вниз в своем канале и освободит путь верхнему стальному штифту. Снова верните шкатулку в исходное положение и наклоните «на себя». В результате верхний стальной штифт зацепится за запорную скобу. Верните шкатулку в исходное положение, наклоните ее влево, снова верните в исходное положение, а затем наклоните «от себя». Медный штифт скользнет в канале, запрет верхний штифт и освободит путь нижнему стальному штифту, который притянется к магниту. Шкатулка окажется надежно запертой.

Все эти наклоны, удары и повороты кажутся вам слишком сложными? Но ведь уже говорилось о том, что в «Коллекцию головоломок» попадают самые новые, самые популярные, самые трудные в решении и самые умные игрушки. А сделать шкатулку с секретом достаточно просто.

А.Калинин

Дюжина задач о среднем арифметическом

А. ШЕНЬ

Если девяти школьникам дать сто конфет, то хотя бы один из них получит 12 конфет или больше. Почему? Рассуждаем «от противного». Если это не так, то каждый из 9 школьников получил 11 конфет или меньше. Тогда всего они получили не более $9 \cdot 11 = 99$ конфет, а не 100. Противоречие – значит, так быть не может.

По существу, то же самое рассуждение можно изложить иначе. Если 9 школьников получили 100 конфет, то в *среднем* на каждого школьника пришлось по $\frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$ конфеты, и потому хотя бы один должен быть получить больше 11 конфет.

Что означают здесь слова «в среднем»? Речь идет о *среднем арифметическом*. Среднее арифметическое двух чисел a и b равно их полусумме $(a+b)/2$, среднее трех чисел a, b, c равно $(a+b+c)/3$ и так далее: среднее арифметическое n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равно сумме всех чисел, деленной на их количество, т.е.

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

В нашем примере $n = 9$ (девять школьников), $a_1, a_2, \ldots, a_9$ – количество конфет, полученных каждым из них, общее число конфет $a_1 + a_2 + \ldots + a_9$ равно 100, и среднее равно $\frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$.

Среднее арифметическое можно объяснить так: если мы хотим сравнять все числа, не меняя их суммы, то каждое из них надо заменить на среднее арифметическое.

Задачи

1. Найдите среднее арифметическое чисел 1, 2, 3, 4, ..., 19, 20.

2. Найдите среднее арифметическое чисел

$$-19, -18, -17, -16, \ldots, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, 19, 20.$$

3. Найдите среднее арифметическое всех целых чисел от 1 до 1000.

4. Когда в комнату вошел четвертый человек, средний возраст находящихся в ней людей увеличился с 11 лет до 14. Сколько лет вошедшему?

5. Среднее арифметическое чисел a и b делит пополам отрезок с концами a и b на числовой оси. Найдите координату точки, которая делит этот отрезок в отношении 3 : 5.

6. Одного из школьников 7 А класса перевели в 7 Б, отчего средний рост школьников в обоих классах (7 А и 7 Б) увеличился. Могло ли так быть?

7. Желая найти среднюю годовую оценку по математике у всех семиклассников, завуч попросил учителей математики седьмых классов вычислить средние оценки в каждом из классов и потом взял среднее арифметическое этих оценок. Прав ли он?

8. Говорят, что средний доход 10% самых богатых жителей города в 15 раз превосходит средний доход всех жителей города. Докажите, что это выдумки.

9. В прямоугольной таблице из трех строк и двух столбцов средние арифметические в трех строках равны a, b, c, а среднее арифметическое в первом столбце равно d. Найдите среднее арифметическое всех чисел таблицы и среднее арифметическое во втором столбце.

10. Может ли среднее арифметическое каждого столбца прямоугольной таблицы быть положительным, а среднее арифметическое каждой строки – отрицательным?

11. Таблица умножения на обороте школьной тетради содержит все произведения однозначных чисел от 1 до 9 (всего 81: сначала 1 умножается на все числа от 1 до 9, потом 2 и т.д.). Найдите среднее арифметическое всех произведений в таблице.

12. В строчку написаны сто чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$, при этом $a_1 = 1$, $a_{100} = 100$ и каждое число в строчке (кроме двух крайних) не больше среднего арифметического двух соседей: $a_2 \le (a_1 + a_3)/2$, $a_3 \le (a_2 + a_4)/2$ и так далее. Докажите, что $a_{43} \le 43$.

Решения задач

1. Сумма всех 20 чисел равна 210, поэтому среднее арифметическое равно $210/20 = 10{,}5$.

2. Тут 19 отрицательных чисел, 20 положительных и ноль, всего 40 чисел. При суммировании все числа, кроме 0 и 20, попарно сокращаются. Значит, среднее арифметическое равно $20/40 = 0{,}5$.

3. Здесь удобно сгруппировать числа в пары: 1 и 1000, затем 2 и 999 и так далее. Получится 500 пар, последняя будет 500 и 501. В каждой паре сумма составляет 1001 и среднее равно 500,5. Поэтому и среднее всех чисел равно 500,5.

4. Сначала среднее арифметическое трех чисел было равно 11, т.е. их сумма равнялась 33. Затем среднее четырех чисел было равно 14, т.е. их сумма равнялась 56. Значит, вошедшему было $56 - 33 = 23$ года.

Тогда сумма всех годовых оценок в классе А равна $25a$, а в классе Б равна $29b$. Сумма всех оценок в двух классах равна $25a + 29b$, и это надо разделить на $25 + 29 = 54$. Поэтому средняя оценка всех семиклассников равна

$$\frac{25a+29b}{54} = \frac{25}{54}a + \frac{29}{54}b,$$

а не полусумме a и b. Это число называют *взвешенным средним* чисел a и b.

8. Если 1/10 самых богатых жителей города имеют доход в 15 раз больше среднего, то их общий доход в полтора раза больше суммарного дохода всех жителей города, включая их самих.

9. Так как все строки содержат поровну элементов, то среднее арифметическое всех чисел таблицы равно $(a + b + c)/3$. По аналогичным причинам оно равно $(d + x)/2$, где x – неизвестное среднее арифметическое во втором столбце. Отсюда

$$x = \frac{2}{3}(a+b+c) - d.$$

10. Нет, поскольку тогда среднее всех чисел таблицы окажется положительным и отрицательным одновременно.

11. Если раскрыть скобки в произведении

$$(1+2+\ldots+8+9)(1+2+\ldots+8+9),$$

то получится как раз сумма всех чисел таблицы, поэтому она равна 45^2, а среднее равно $45^2/9^2 = 5^2 = 25$. Можно пытаться объяснить этот ответ по-простому: средний сомножитель (среднее арифметическое чисел от 1 до 9) равен 5, и потому среднее произведение равно 25. Но это опасная логика: так можно решить, что среднее чисел $1^2, 2^2, \ldots, 9^2$ равно 5^2, а это совсем не так.

12. Докажем, что $a_i \le i$ при всех $i = 1, 2, \ldots, 100$. Для этого рассмотрим числа $b_i = a_i - i$. Два крайних (b_1 и b_{100}) равны нулю, а каждое из остальных не больше полусуммы соседей. Надо доказать, что среди b_i нет положительных. Пусть это не так и пусть наибольшее из них b_j. Оно не может быть крайним, так как с краев нули, поэтому равно полусумме соседей. Соседи не могут быть больше b_j и, значит, равны b_j: рядом с наибольшим стоят тоже наибольшие. Двигаясь к краю, получаем противоречие.

5. Пусть, скажем, $a < b$ (случай $a > b$ рассматривается аналогично). Искомая координата x должна составлять пропорцию $(x - a) : (b - x) = 3 : 5$, откуда получаем уравнение $5(x - a) = 3(b - x)$, $5x - 5a = 3b - 3x$, $8x = 5a + 3b$, $x = \frac{5}{8}a + \frac{3}{8}b$.

6. Да, например, если этот школьник был самым низким в 7 А, но оказался самым высоким в 7 Б. Вообще, такое происходит, если школьник был ниже среднего в 7 А и выше среднего в 7 Б.

7. Такой способ годится, только если во всех классах поровну учеников. Пусть, скажем, в классе А учатся 25 школьников, а в классе Б учатся 29 школьников и средние арифметические в этих классах равны a и b.

Формула любви

Е.МЕЙЛИХОВ

Печальная история любви, описанная Шекспиром, известна всем. В наше время герои этой истории учились бы в школе, ходили на дискотеку, «сидели» бы в Интернете. Могла ли сегодня случиться с ними такая же грустная история? И вообще, отчего бывает счастливая или несчастная любовь? Обычно такие вопросы обсуждаются на школьных уроках литературы, где анализируются отношения персонажей знаменитых романов, подробно разбираются мотивы их поступков, превозносятся их достоинства и критикуются недостатки. Уверен, что просвещенных современников постиндустриального XXI века такой качественный анализ, не подкрепленный уравнениями и графиками, полностью удовлетворить не может.

В связи с этим возникает вопрос: «А можно ли переложить на математический язык и исследовать математическими методами такую тонкую материю, как любовь?» Ответ поэта: «В одну телегу впрячь не можно коня и трепетную лань», т.е. нельзя «поверить алгеброй гармонию». Ответ математика или физика: «Несомненно, можно. Нужно лишь выбрать модель, описывающую явление, и выразить ее в количественной форме – в виде уравнений, формул, графиков».

Самое трудное здесь (так же, как при решении любой физической задачи) – именно создание модели. Образование, опыт и талант нужны для того, чтобы сформулировать «хорошую» модель – такую, в рамках которой учитываются самые основные факторы, определяющие изучаемое явление или процесс, и отбрасывается множество других, оказывающих на него лишь слабое влияние. В такой «хорошей» модели и уравнения оказываются «хорошими» – их удается решить и получить необходимые (аналитические или численные) результаты.

Итак, наша задача – создать модель любви, написать соответствующие уравнения, решить их и проанализировать результаты.

Как всегда в науке, начнем с определения тех величин, которые мы собираемся изучать, и введем для них единицы измерения. Нас интересует, как развиваются во времени любовные отношения между Ромео и Джульеттой или между Сашей и Машей. Соответственно, мы имеем две характеристики этого процесса – любовь и время.

Что касается времени, то здесь все просто: мы знаем множество единиц, в которых оно измеряется, – секунда, минута, час и т.д., – и надо лишь выбрать ту единицу, которая для нас наиболее удобна. Из практики любовных отношений известно, что характерное время их развития (зарождения или затухания) составляет месяцы и годы. Для определенности остановим свой выбор на единице времени, равной году, будем обозначать время, как обычно, символом t и в дальнейшем для краткости будем писать просто $t = 1$ или $t = 10$, имея в виду $t = 1$ год или $t = 10$ лет соответственно.

Гораздо сложнее обстоит дело с определением любви. О ней писали тысячи поэтов, ее испытывали миллионы влюбленных, но никто так и не выработал четкой формулировки типа: «Любовь – это процесс (или состояние?), характеризующийся следующим набором параметров (каких?): $\alpha = \ldots$, $\beta = \ldots, \ldots$ » Тот факт, что общепринятого определения любви не существует, развязывает нам руки и освобождает нашу фантазию – мы можем сами придумать это определение. При этом не будем слишком конкретными (не следует, например, подробно описывать отличие биохимических процессов в организме влюбленного от таковых в отсутствие любви) и постараемся предложить что-нибудь достаточно простое и поддающееся количественному измерению и описанию. Ведь в науке имеют смысл только те сущности, которые могут быть измерены.

Дойдя до этого места, автор осознал, что он не в состоянии дать разумного определения любви. Но, может быть, это и не страшно? Ведь используем же мы, например, такое понятие, как электрический заряд, хотя его определения не существует. Наличие или отсутствие заряда и его величину мы определяем косвенно – например, по силе взаимодействия зарядов друг с другом или по их поведению в магнитном поле. Поступим так же и с любовью – будем считать, что это нечто, заставляющее дотоле нормальных людей совершать безумные поступки, подвиги, глупости, мчаться на другой конец света, стреляться и т.п.

Однако уход от определения рассматриваемой величины не снимает (как и в случае с электрическим зарядом) необходимости дать рецепт ее количественного измерения. Придумать такой рецепт тоже непросто. Действительно, каков смысл утверждения о том, что Саша любит Машу в два раза сильнее, чем Дашу? Означает ли это, что он дарит Маше вдвое больше цветов, проводит с ней вдвое больше времени или, наконец, что увеличение его пульса при встрече с Машей вдвое выше? Для нашей цели годится любой из приведенных способов измерения любви, но для определенности выберем последний вариант с пульсом, который удобен тем, что допускает простое измерение и, кроме того, может давать для любви не только положительные, но и отрицательные значения – снижение пульса характеризует антипатию (отрицательную любовь).

Для того чтобы отстраниться от индивидуальных особенностей разных людей, будем количественно характеризовать любовь безразмерным параметром

$$Y = 10\ln\left(\frac{P}{P_0}\right),$$

пропорциональным логарифму отношения пульса P к его нормальному (для данного индивида) значению P_0. Соответствующие единицы измерения называются децибелами. Множитель 10 выбран произвольно с тем, чтобы типичные значения любви попадали в удобный численный диапазон. Например, повышение пульса на 10% по сравнению с нормальным значением происходит при величине любви $Y = 10\ln 1{,}1 \approx 1$, а двукратное увеличение пульса происходит при любви $Y = 10\ln 2 \approx 7$. Неизменность же пульса указывает на отсутствие любви: $Y = 0$ при $P = P_0$.

Поскольку любовь – это отношение двух людей, необходимо составить два уравнения: одно пусть описывает эволюцию любви Ромео, а другое – эволюцию любви Джульетты. Любовь Джульетты будем характеризовать функцией $J(t)$, а любовь Ромео – функцией $R(t)$.

Теперь мы готовы к написанию уравнений, описывающих эволюцию любви, т.е. показывающих, как она меняется с течением времени. Такие уравнения называются кинетическими. Итак, мы приступаем к выводу *кинетических уравнений любви*.

С кинетическими уравнениями многие из читателей наверняка имели дело. Таковым является, например, уравнение, соответствующее второму закону Ньютона:

$$\frac{dp}{dt} = F - F_{\text{тр}},$$

в котором p – импульс тела, F – сила, увеличивающая его импульс, и $F_{\text{тр}}$ – сила трения, уменьшающая импульс тела. Эти силы могут зависеть как от свойств *самого* тела, так и от свойств *других* тел, с которыми оно взаимодействует. Приведенное уравнение описывает временну́ю эволюцию импульса: оно показывает, как быстро изменяется импульс в результате совместного действия двух сил.

Запишем в таком же виде наши кинетические уравнения любви:

$$\frac{dJ}{dt} = F_{11} + F_{12},$$

$$\frac{dR}{dt} = F_{21} + F_{22},$$

в которые мы включили четыре «любовные» силы F_{11}, F_{12}, F_{21} и F_{22}, определяющие эволюцию функций любви $J(t)$ и $R(t)$. Ясно, что эти силы не могут быть постоянными, так как тогда скорости изменения любви dJ/dt и dR/dt также были бы постоянными, а это означало бы бесконечный рост (или спад) любви, что противоречит опытным данным. Необходимо поэтому считать, что силы любви зависят от времени t и от величин любви обоих влюбленных J и R: $F_{ik} = F_{ik}(t, J(t), R(t))$, где i, k = 1, 2. Однако в нашей простой модели мы не будем учитывать *явную* зависимость этих сил от времени (в механике такая система называется автономной) и будем считать, что любовные силы зависят исключительно от интенсивности любви партнеров, т.е.

$$F_{ik} = F_{ik}(J(t), R(t)).$$

Как уже отмечалось, модель, приближенно описывающая реальную ситуацию, хороша тогда, когда соответствующие уравнения можно решить. Полученная нами система кинетических уравнений любви легко решается, если она линейна, т.е. силы F_{ik} являются линейными функциями $J(t)$ и $R(t)$. В этом приближении нашу систему уравнений можно записать в виде

$$\frac{dJ}{dt} = a_{11}J + a_{12}R, \qquad (1)$$

$$\frac{dR}{dt} = a_{21}J + a_{22}R,$$

где коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{21} и a_{22} – постоянные (не зависящие от времени) величины. Мы будем задавать полный набор значений этих коэффициентов таблицей (она называется матрицей):

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Для полной определенности нужно еще задать начальные условия. Пусть знакомство Ромео и Джульетты состоялось в момент времени $t = 0$. Очевидно, что до этого момента $J = 0$ и $R = 0$. Однако в момент $t = 0$ величины J и R могут измениться – приобрести, например, значения $J(0) = 1$ и $R(0) = 1$ (это называется взаимная любовь с первого взгляда) или $J(0) = -1$ и $R(0) = -1$ (взаимная антипатия) и т.п.

Начальные условия $J(0)$ и $R(0)$ вкупе с коэффициентами a_{ik} полностью определяют все дальнейшее развитие отношений между Ромео и Джульеттой. Если с начальными условиями все более или менее ясно, то коэффициенты a_{ik} могут принимать разные (в том числе и по знаку) значения, которые зависят от индивидуальных особенностей влюбленных. Это приводит к необходимости понять, какие факторы влияют на любовь – способствуют ее росту или угасанию. Для этого мы обратимся к большому массиву экспериментальных данных, накопленных в литературе и показывающих большое разнообразие соответствующих коэффициентов. Вот несколько примеров.

Чем меньше женщину мы любим,
- Тем легче нравимся мы ей... $\to a_{12} < 0$.

(А.С.Пушкин, «Евгений Онегин»)

Стыдливо-холодна, восторгу моему
Едва ответствуешь, не внемлешь ничему
- И оживляешься потом все боле, боле – $\to a_{12} > 0$.

И делишь наконец мой пламень поневоле!
(А.С.Пушкин, «Нет, я не дорожу мятежным наслажденьем»)

Любовь, которая внутри пылает, –
- Душа всегда изгнать ее вольна. $\to a_{11}, a_{22} < 0$.

(Данте, «Божественная комедия»)

С усильем тяжким и бесплодным,
Я цепь любви хочу разбить.
- О, если б вновь мне быть свободным, $\to a_{11}, a_{22} < 0$.

О, если б мог я не любить!
(Д. Мережковский, «Проклятие любви»)

Любовь, любить велящая любимым,
- Меня к нему так властно привлекла... $\to a_{11}, a_{22} > 0$.

(Данте, «Божественная комедия»)

- Я не любим, но как же я влюблен! $\to a_{21} < 0$.

(В.Шекспир, «Ромео и Джульетта»)

Но я полюбил ее с первого дня
- За то, что она полюбила меня! $a_{21} > 0$.

(Роберт Бернс)

Поскольку наша задача – не социологическая, а математическая, не будем углубляться в психологические тонкости и рассмотрим далее несколько разных ситуаций, которые могут встретиться в жизни.

В принципе, *аналитическое* решение нашей системы линейных уравнений (1) несложно найти. Однако мы не будем здесь этим заниматься и воспользуемся одной из программ компьютерной математики, которая так и называется Mathematica (сейчас доступна уже пятая версия этой программы – Mathematica 5). Решение системы дифференциальных уравнений (а наши уравнения – дифференциальные, так как содержат не только функции, но и их производные) в программе Mathematica производится очень просто – достаточно в окне этой программы написать:

```
J0 = 0; R0 = 1;
a11 = 1; a12 = 1; a21 = 1; a22 = 1;
t1 = 5;

NDSolve [ {J'[t] = = a11 J[t] + a12  R[t] , R'[t] == a21 J[t]
+ a22 R[t], J[0] == J0,  R[0] == R0},  {J, R}, {t, 0, t1} ];

Plot [Evaluate[{J[t],  R[t]}/.%], {t, 0, t1}]
```

Здесь первые три строки – это начальные данные $J(0)$ и $R(0)$, значения коэффициентов a_{ik} и продолжительность t_1 интересующего нас промежутка времени (приведены чисто иллюстративные значения), две последующие строки – директива NDSolve для решения нашей системы уравнений (N=Numerical – численный, D=Differential – дифференциальный, Solve – решать) и, наконец, последняя строка – команда представления результатов в виде графика для интервала времени $0 < t < t_1$ (Plot – график, Evaluate – вычислить). Теперь остается только менять параметры модели и анализировать получающиеся результаты. Именно этим мы сейчас и займемся.

Однако прежде введем для удобства последующего изложения несколько терминов-определений:

- *Нарцисс* (H^+) – человек, чья любовь к партнеру *растет* тем быстрее, чем больше он *сам* его любит (Джульетта – Нарцисс, если $a_{11} > 0$, Ромео – Нарцисс, если $a_{22} > 0$);
- *анти-Нарцисс* (H^-) – человек, чья любовь к партнеру *угасает* тем быстрее, чем больше он *сам* его любит (Джульетта – анти-Нарцисс, если $a_{11} < 0$, Ромео – анти-Нарцисс, если $a_{22} < 0$);
- *Дон Жуан* ($ДЖ^+$) – человек, чья любовь к партнеру *угасает* тем быстрее, чем больше *последний* его любит (Джульетта – Дон Жуан, если $a_{12} < 0$, Ромео – Дон Жуан, если $a_{21} < 0$);
- *анти-Дон Жуан* ($ДЖ^-$) – человек, чья любовь к партнеру *растет* тем быстрее, чем больше *последний* его любит (Джульетта – анти-Дон Жуан, если $a_{12} > 0$, Ромео – анти-Дон Жуан, если $a_{21} > 0$).

Для определенности можно считать, что классические персонажи Дон Жуан и Нарцисс (в мужской или женской ипостаси) имеют коэффициенты $a_{21} = +1$ (или $a_{12} = +1$) и $a_{22} = +1$ (или $a_{11} = +1$) соответственно.

В нашей модели существует бесконечное множество пар влюбленных, отличающихся знаком и величиной коэффициентов a_{ik} , а также начальными условиями. Число различных пар велико, даже если считать, что эти коэффициенты и начальные значения любви могут принимать всего лишь три значения: 0, ± 1 . Количество таких пар равно $3^5 = 243$. Ниже мы ограничимся рассмотрением только этого варианта, в рамках которого проанализируем эволюцию взаимной и неразделенной любви нескольких разных пар.

Взаимная любовь с первого взгляда (J(0) = +1, R(0) = +1)

1. *Пара*: Джульетта – $ДЖ^-$, Ромео – $ДЖ^+$; $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Этот, на первый взгляд простой, случай приводит к довольно интересному результату (рис.1): чувства влюбленных периодически меняют знак, переходя от любви к антипатии. Однако чувства обоих остаются в ограниченном диапазоне значений – ни бесконечной любви, ни бесконечной ненависти не возникает. Соответствующие периодические (гармонические) функции сдвинуты друг относительно друга на четверть периода, так что для бесконечного процесса взаимная любовь ($J > 0$, $R > 0$) имела бы место в течение 25% времени. В ходе первых десяти лет этот процент несколько меньше – только 23,5%. При достаточном терпении наша пара всегда может дождаться момента, когда отношения вновь наладятся.

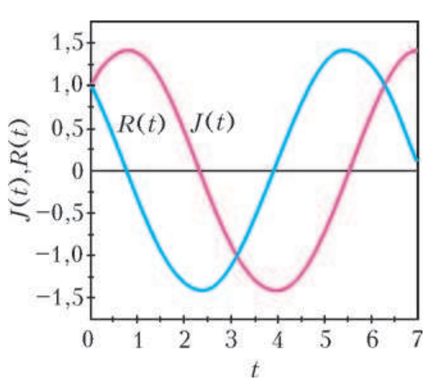


Рис.1. Периодические изменения отношений

2. *Пара*: Джульетта – H^+, Ромео – ($ДЖ^+ + H^+$); $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

По сравнению с предыдущим случаем Джульетта – не анти-Дон Жуан, а Нарцисс. Это приводит к серьезному конфликту отношений. Джульетта руководствуется только собственным положительным чувством к Ромео, и ее любовь к нему непрерывно растет, в то время как чувство Ромео постепенно охладевает (рис.2). Взаимная любовь ограничена во времени и исчезает через год, чтобы никогда больше не вернуться. Трагедия!

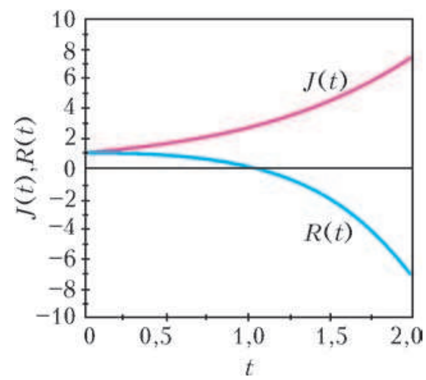


Рис.2. Кризис отношений

Этот пример выявляет один из дефектов нашей простой модели – ее результатом может быть *неограниченно* возрастающая (или убывающая) во времени любовь. Очевидно, этот результат противоречит экспериментальным данным. В реальной жизни существует некий механизм ограничения любви и ненависти. Как можно это учесть в нашей модели (и тем самым исправить ее), мы обсудим ниже.

Любовь/антипатия с первого взгляда (J(0) = +1, R(0) = −1)

1. *Пара*: Джульетта – H^+, Ромео – $ДЖ^-$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Оказывается, даже в этом, казалось бы безнадежном, случае неудачного знакомства бывает счастливый исход. Немного (чуть более полугода) терпения со стороны Джульетты, и Ромео падает к ее ногам, сраженный силой ее любви (рис.3). Интересно, что похожая ситуация наблюдается и

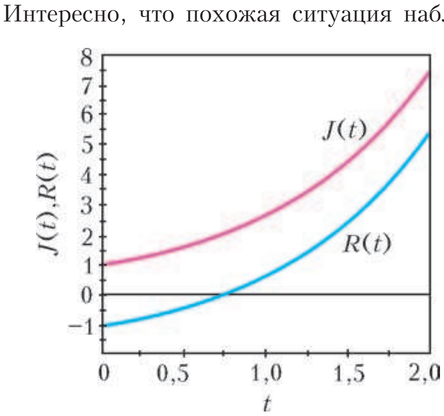


Рис.3. Счастливый исход сложных отношений

при других «конфигурациях» персонажей. Любовь побеждает антипатию, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Правда, в последнем случае Джульетте надо быть более терпеливой: срок «созревания» Ромео составляет целый год.

2. *Пара*: Джульетта – $ДЖ^-$, Ромео – ($ДЖ^- + Н^-$); $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Этот случай интересен сложными душевными переживаниями Джульетты: сначала в ответ на холодность Ромео ее чувство начинает спадать, но через 10 месяцев, пройдя через

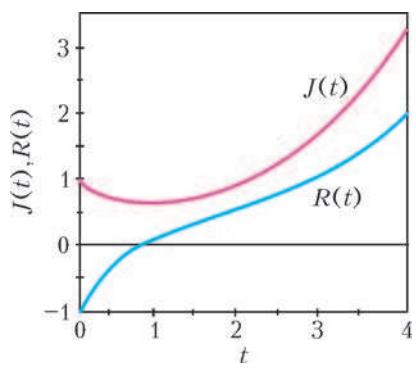


Рис.4. Превратности любви

минимум, устремляется вверх, возбуждая в Ромео все более нарастающее ответное чувство (рис.4). Любовь торжествует!

Равнодушие/любовь с первого взгляда (J(0) = 0, R(0) = +1)

1. *Пара*: Джульетта – $ДЖ^-$, Ромео – $Н^-$; $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Совершенно неожиданный результат развития событий в этом случае: полное равнодушие Джульетты постепенно перерастает в любовь. Жаль только, что поздно – Ромео, в

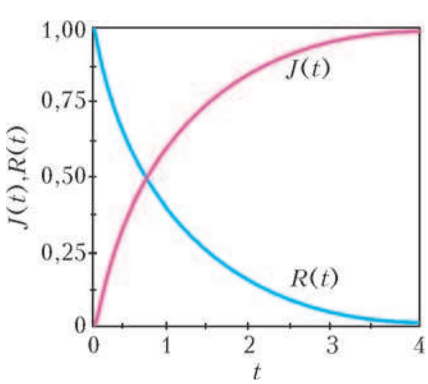


Рис.5. Непродолжительное счастье

отсутствие пылкого ответного чувства, наоборот, становится равнодушен к Джульетте (рис.5). Утешить их может лишь примерно полуторо-двухлетний период взаимного увлечения, когда Джульетта уже неравнодушна к Ромео, а он еще не успел разлюбить ее. Очень жизненная ситуация!

2. *Пара*: Джульетта – ($ДЖ^- + Н^-$), Ромео – ($ДЖ^- + Н^-$); $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

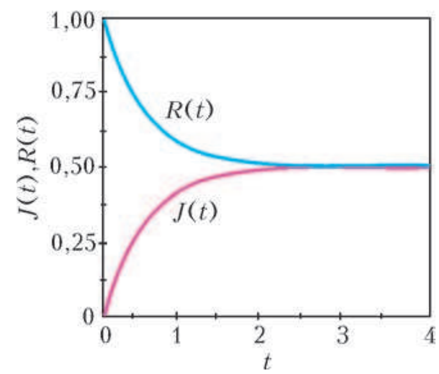


Рис.6. Вечная любовь

Когда люди схожи характером (а это – тот самый случай), происходит маленькое чудо: достаточно одному из них полюбить другого – и через какие-нибудь пару лет этот другой (вначале совершенно равнодушный) воспылает любовью к первому (рис.6). Наступит идиллия – они будут любить друг друга одинаково крепко, и это будет длиться вечно!

Но настоящее чудо происходит в последнем из приводимых здесь примеров.

Взаимная антипатия с первого взгляда (J(0) = –1, R(0) = –1)

Пара: Джульетта – ($ДЖ^+ + Н^-$), Ромео – ($ДЖ^- + Н^-$); $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Необходимое условие настоящего чуда: оба партнера – анти-Нарциссы, но один из них – Дон Жуан, а другой – анти-Дон Жуан. В этом случае взаимная антипатия непостижимым образом перерастает во взаимную любовь. Впрочем, это

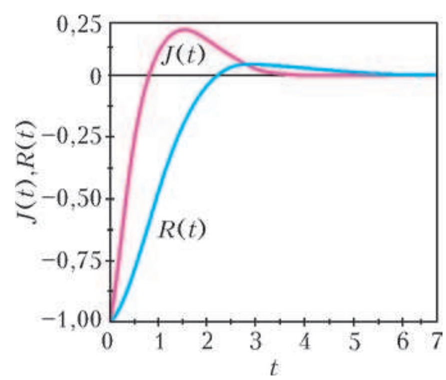


Рис.7. От ненависти до любви – один шаг

чудо не вечно: любовь сменяется полным равнодушием друг к другу (рис.7). Но год общего счастья гарантирован!

Выше уже отмечалось, что наша простая модель в ряде случаев приводит к выводу о возможности неограниченного роста любви (или антипатии). Но так можно и здоровье подорвать! Между тем, давно замечено:

Люби умеренно – пролюбишь дольше.

(В.Шекспир, «Ромео и Джульетта»)

Ошибка заключается в том, что мы не ввели в наши кинетические уравнения (1) никаких ограничений роста функций $J(t)$ и $R(t)$ – правые части этих уравнений линейны по J и R. Ограничить функции $J(t)$ и $R(t)$ можно введением нелинейности в кинетические уравнения. Добавим, например, в их правые части дополнительные слагаемые, квадратичные по J и R:

$$\frac{dJ}{dt} = a_{11}J + a_{12}R - \gamma J^2, \qquad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = a_{21}J + a_{22}R - \gamma R^2.$$

Параметр γ должен быть положительным – тогда с ростом J и R скорости dJ/dt и dR/dt изменения этих функций будут падать, что и предотвратит их неограниченный рост.

Посмотрим, как повлияет эта нелинейность на развитие событий в уже рассмотренном выше случае «Любовь/антипатия с первого взгляда» для второй пары (см. рис.4). Чтобы не менять полученные ранее результаты в том интервале, где $J(t)$ и $R(t)$ не очень велики, надо выбрать $\gamma \ll 1$ – тогда дополнительными нелинейными слагаемыми в уравнениях (2) можно пренебречь. Положим, например, $\gamma = 0{,}1$ (и, естественно, добавим новые слагаемые в программу Mathematica). Результат решения подправленной системы уравнений показан на рисунке 8. Видно, что любовь партнеров через 10 лет насыщается.

Итак, ограничение любви (или ненависти) можно объяснить нелинейностью чувств, заложенной в нас Природой.

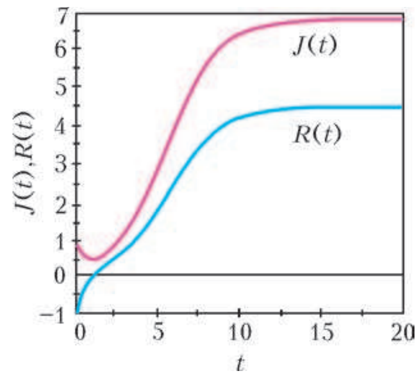


Рис.8. Насыщение отношений

Нужно ли всерьез относиться ко всему вышеизложенному? И да, и нет. Конечно, наивно думать, что столь простая модель действительно может описать все многообразие отношений между влюбленными. Например, она не включает в себя взаимодействие персонажей с другими людьми. Еще одно неучтенное осложнение состоит в том, что вид уравнений или, по крайней мере, значения входящих в него параметров могут меняться со временем. Это называется неавтономностью, и поэты давно ее заметили:

Весной фантазия мужчины
Легко склоняется к любви.
(А.Теннисон, «Локсли-Холл»)

Но даже у примитивных моделей есть то положительное свойство, что их опровержение или усовершенствование заставляет глубже взглянуть на суть явления, выявить новые, не учтенные ранее факторы, оценить границы применимости старой модели, выработать другой язык описания и, в конечном счете, предложить более точную новую модель.

Хотелось бы, однако, чтобы в рассматриваемом случае такая модель не появлялась как можно дольше!

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Золотое сечение и числа Фибоначчи

В.БУГАЕНКО

Основные определения

Пусть на отрезке AB расположена точка M. Она делит отрезок на две части. Если отношение длин большей части к меньшей равно отношению длины всего отрезка к длине большей части, то говорят, что точка делит отрезок *в крайнем и среднем отношении*, а само это отношение называют *золотым сечением*. Если считать, что $AM \geq MB$, то приведенное условие записывается в виде соотношения

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MB}. \qquad (1)$$

Существование и единственность золотого сечения мы докажем чуть ниже.

Последовательность, первые два члена которой равны единице, а каждый следующий равен сумме двух предыдущих, называется *последовательностью Фибоначчи*, а ее члены – *числами Фибоначчи*. Вот несколько первых членов последовательности Фибоначчи:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ldots$$

На первый взгляд, золотое сечение и числа Фибоначчи никак не связаны между собой. Более того, они относятся к разным разделам математики: золотое сечение – к геометрии, а числа Фибоначчи – к алгебре. Однако же удивительным образом во многих задачах, связанных с золотым сечением, возникают числа Фибоначчи. И наоборот, в задачах о числах Фибоначчи появляется золотое сечение. С некоторыми такими примерами мы познакомимся в этой статье. Кроме того, мы увидим, что золотое сечение является пределом некоторых естественным образом возникающих числовых последовательностей. Таким образом, мы получим наглядную иллюстрацию того, что вся математика едина, а различные ее разделы (алгебра, геометрия, математический анализ) тесно взаимосвязаны.

Для начала рассмотрим две несложные геометрические задачи, приводящие к понятию золотого сечения.

Золотой прямоугольник

Задача 1. *Существует ли прямоугольник, который можно разрезать на две части, одна из которых является квадратом, а вторая – прямоугольником, подобным исходному?*

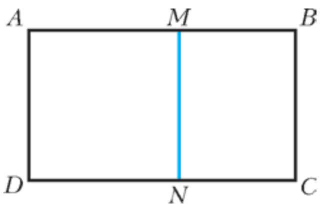


Рис. 1

Решение. Очевидно, что, для того чтобы прямоугольник был разрезан на два прямоугольника, линия разреза должна быть параллельна его стороне. Пусть данный прямоугольник $ABCD$ разрезан прямой MN так, что образовались квадрат $AMND$ и прямоугольник $BCNM$ (рис.1). Тогда условие подобия прямоугольников $ABCD$ и $BCNM$ запишется в виде

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{MB};$$

учитывая, что $BC = AM$, получаем соотношение (1), а это и означает, что точка M делит отрезок AB в крайнем и среднем отношении. Поэтому такой прямоугольник существует, и отношение его сторон равно золотому сечению. Будем называть его *золотым прямоугольником*.

Золотые треугольники

Задача 2. *Существует ли равнобедренный треугольник, который можно разрезать на два различных равнобедренных треугольника, один из которых подобен данному?*

Решение. Обозначим исходный треугольник ABC. Линия разреза, очевидно, должна проходить через одну из его вершин. Пусть линией разреза будет отрезок CM, где M – точка на стороне AB. Разберем отдельно два случая, когда AB – основание и когда AB – боковая сторона треугольника.

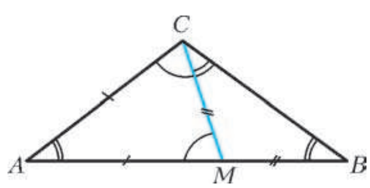


Рис. 2

Пусть AB – основание, а C – вершина равнобедренного треугольника ABC (рис.2). Пусть треугольник CMB подобен треугольнику ABC, а ACM – не равный ему равнобедренный треугольник. Тогда $AM = AC = BC$, $MB = MC$. Из подобия следует

$$\frac{AC}{MB} = \frac{AB}{BC};$$

заменяя AC в числителе левой части и BC в знаменателе правой части на AM, получаем соотношение (1). А это и означает, что точка M делит отрезок в крайнем и среднем отношении. Таким образом, искомый равнобедренный треугольник таков, что отношение его основания к боковой стороне равно золотому сечению.

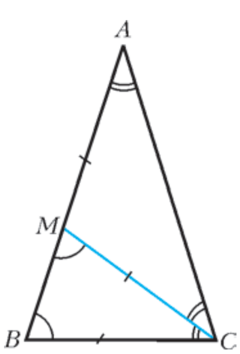


Рис. 3

Теперь пусть основанием треугольника является BC (рис.3). Очевидно, что из двух частей подобным треугольнику ABC может являться только BCM. Имеем $BC = CM = MA$ и $AB = AC$. Из подобия следует

$$\frac{BC}{MB} = \frac{AB}{BC},$$

и, заменяя BC на AM, опять получаем соотношение (1). Значит, и в этом случае точка M делит отрезок в крайнем и среднем отношении. В этом треугольнике отношение стороны к основанию равно золотому сечению.

Итак, мы нашли два типа искомых треугольников. В обоих случаях отношение сторон такого треугольника равно золотому сечению. Во втором случае это отношение боковой стороны к основанию, и треугольник получается остроугольным, а в первом случае – наоборот, золотому сечению равно отношение основания к боковой стороне, и в этом случае треугольник тупоугольный. Каждый из двух типов золотых треугольников разрезается на два золотых треугольника разных типов.

Золотое сечение

Пришло время доказать существование и единственность золотого сечения, а заодно и вычислить его значение. Итак, пусть точка M делит отрезок AB в крайнем и среднем отношении, и предположим, что $AM > MB$. Обозначим $AM = a$, $MB = b$, $a/b = \varphi$. По условию, $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$, или $1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$, откуда получаем равенство

$$1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi, \qquad (2)$$

которое сводится к квадратному уравнению относительно φ:

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0. \qquad (3)$$

Это квадратное уравнение имеет корни $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, однако лишь один из них является положительным числом. Следовательно, искомое отношение φ равно $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Углы золотых треугольников

Найдем, чему равны углы золотых треугольников. Сначала рассмотрим тупоугольный золотой треугольник (см. рис.2). Обозначим угол при его основании через α. Тогда $\angle CAB = \angle CBA = \angle BCM = \alpha$. Следовательно, $\angle AMC = 2\alpha$, как внешний угол треугольника MBC. Отсюда $\angle ACM = \angle AMC = 2\alpha$, и $\angle ACB = 3\alpha$. Получаем, что сумма углов треугольника ABC равна 5α, откуда $\alpha = 36°$. Итак, углы тупоугольного золотого треугольника равны $36°$, $36°$ и $108°$.

Теперь перейдем к остроугольному золотому треугольнику (см. рис.3). На этот раз обозначим через α угол BAC при вершине. Тогда $\angle ACM = \alpha$, поскольку треугольник MAC равнобедренный, и $\angle BCM = \alpha$, поскольку треугольники ABC и CMB подобны. Таким образом, угол при основании треугольника ABC равен 2α, поэтому сумма углов треугольника равна 5α, откуда $\alpha = 36°$. Итак, углы остроугольного золотого треугольника равны $36°$, $72°$ и $72°$.

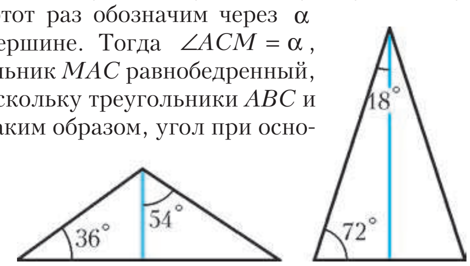


Рис. 4

Разрезав золотые треугольники по оси симметрии на два равных прямоугольных треугольника (рис. 4), можно легко найти тригонометрические функции некоторых углов, связанных с этими треугольниками:

$$\sin 54° = \cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}; \quad \sin 18° = \cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Эти равенства дают возможность найти тригонометрические функции всех углов, кратных $18°$. Они дополняют хорошо известные «табличные» синусы и косинусы углов, кратных $30°$ и $45°$.

Правильный пятиугольник

Если провести все диагонали правильного пятиугольника $ABCDE$ (рис.5), то получится правильная пятиконечная звезда, высекающая внутри себя меньший правильный пятиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$. Углы правильного пятиугольника равны $108°$, а углы при лучах правильной пятиконечной звезды равны $36°$. Эти же величины являются углами золотых треугольников. Поэтому в получившейся конструкции можно найти много золотых треугольников, некоторые из них разрезаны на меньшие золотые треугольники описанным выше способом. Например, золотой тупоугольный треугольник ABC разрезан линией BD_1 на два золотых треугольника. Один из них – треугольник BD_1C – в свою очередь разрезан на два меньших золотых треугольника отрезком BE_1. А отрезок AE_1 разрезает золотой остроугольный треугольник ABD на два золотых треугольника.

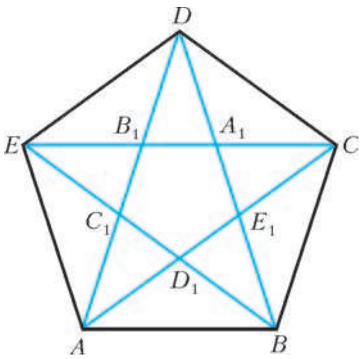


Рис. 5

Золотые треугольники могут быть построены с помощью циркуля и линейки. Действительно, для этого достаточно построить два отрезка, отношения длин которых равно φ. Затем из двух длинных и одного короткого получается остроугольный золотой треугольник, а из двух коротких и одного длинного – тупоугольный. Осталось показать, как увеличить данный отрезок в φ раз. Один из возможных способов – это действовать «в лоб». Пусть мы имеем отрезок длины b. Сначала строим прямоугольный треугольник с катетами b и $2b$. Его гипотенуза равна $\sqrt{5}b$. Затем эту гипотенузу удлиняем на b и результат делим пополам.

Тем самым, мы умеем строить с помощью циркуля и линейки угол в $108°$, являющийся углом правильного пятиугольника. А значит, мы попутно нашли решение классической задачи о построении правильного пятиугольника. Действительно, для этого достаточно построить пятизвенную ломаную с равными звеньями и углами по $108°$. После откладывания пятого звена она замкнется, и тем самым будет получен правильный пятиугольник. Основанный на той же идее, но более изящный способ построения правильного пятиугольника приведен в упражнении 2.

Число φ и последовательность Фибоначчи

Найдем приближенное значение числа φ: $\varphi = 1{,}61803\ldots$ Обратная величина к φ равна $0{,}61803\ldots$ Золотое сечение – единственное положительное число, обратное к которому получается вычитанием единицы. Это следует из равенства (2). Аналогично, из равенства (3) получаем, что для возведения числа φ в квадрат достаточно добавить к нему единицу: $\varphi^2 = 1 + \varphi$. Зададимся вопросом: можно ли так же просто вычислить другие степени числа φ? Воспользовавшись формулой для квадрата, получаем искомые формулы для последующих степеней:

$$\varphi^3 = \left(\varphi^2\right)\varphi = (1+\varphi)\varphi = \varphi + \varphi^2 = \varphi + (1+\varphi) = 1 + 2\varphi;$$

$$\varphi^4 = \left(\varphi^3\right)\varphi = (1+2\varphi)\varphi = \varphi + 2\varphi^2 = \varphi + 2(1+\varphi) = 2 + 3\varphi;$$

$$\varphi^5 = \left(\varphi^4\right)\varphi = (2+3\varphi)\varphi = 2\varphi + 3\varphi^2 = 2\varphi + 3(1+\varphi) = 3 + 5\varphi;$$

$\ldots$

Нетрудно заметить закономерность:

$$\varphi^n = f_{n-1} + f_n\varphi, \tag{4}$$

где f_n – последовательность Фибоначчи. Ее легко доказать, используя метод математической индукции. В качестве базы индукции можно взять уже проверенные равенства для $n = 2$ и 3. А шаг индукции заключается в простой выкладке:

$$\varphi^{n+1} = \left(\varphi^n\right)\varphi = \left(f_{n-1} + f_n\varphi\right)\varphi =$$
$$= f_{n-1}\varphi + f_n\varphi^2 = f_{n-1}\varphi + f_n(\varphi+1) =$$
$$= \left(f_{n-1} + f_n\right)\varphi + f_n = f_n + f_{n+1}\varphi.$$

Рассмотрим теперь число $\bar{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ – отрицательный корень уравнения (3). Для его n-й степени выполняется такая же формула, как и для числа φ:

$$\bar{\varphi}^n = f_{n-1} + f_n\bar{\varphi}. \tag{5}$$

Действительно, доказывая формулу (4), мы пользовались лишь тем, что число φ является корнем уравнения (3), а значит, она останется верной при замене φ на другой корень того же уравнения. Вычтя (5) из (4), получаем $\varphi^n - \bar{\varphi}^n = f_n(\varphi - \bar{\varphi})$, откуда следует $f_n = \frac{\varphi^n - \bar{\varphi}^n}{\varphi - \bar{\varphi}}$, или, после замены φ и $\bar{\varphi}$ на их явные выражения,

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}. \tag{6}$$

Эта формула позволяет вычислять число Фибоначчи непосредственно через его номер, не вычисляя все предыдущие, и называется *формулой Бинэ*. На первый взгляд может показаться удивительным, что иррациональное выражение, стоящее в ее правой части, дает целое число при любом n.

Записав формулу Бинэ в виде разности

$$f_n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\bar{\varphi}^n}{\sqrt{5}}, \tag{7}$$

заметим, что вычитаемое в правой части является числом, по модулю меньшим $1/\sqrt{5}$, а его знак зависит от четности n. Поэтому n-е число Фибоначчи можно вычислить как ближайшее целое число к $f_n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$. При этом округление происходит в меньшую сторону при четных n и в большую сторону при нечетных n.

Замечательные пределы, связанные с золотым сечением

Фундаментальное значение золотого сечения обосновывается также тем, что φ является пределом некоторых простых и естественным образом определенных числовых последовательностей. В качестве примера приведем два бесконечных выражения для числа φ:

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}, \tag{8}$$

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}. \tag{9}$$

(Продолжение см. на с. 34)

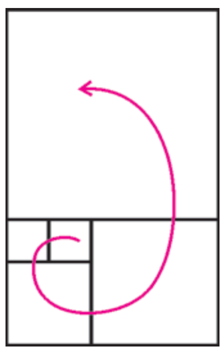
Бесконечность в задачах

В каждой задаче этого калейдоскопа речь идет так или иначе о чем-то бесконечном (например, о плоскости или десятичной дроби). Разумеется, можно придумать сколь угодно много задач, в которых участвует нечто бесконечное. Мы же ограничимся очень небольшим числом тем, и в каждой приведем несколько красивых примеров.

Фигуры на плоскости

1. *Можно ли покрыть плоскость бесконечным числом квадратов, среди которых ровно два одинаковых? Квадраты не могут перекрываться.*

Ответ: да, можно. Нарисуем квадрат со стороной 1, приставим к нему слева квадрат со стороной 1, чтобы получился прямоугольник 1×2, к этому прямоугольнику приставим снизу квадрат со стороной 2, чтобы получился прямоугольник 2×3, к нему приставим справа квадрат со стороной 3 и так далее: будем заполнять плоскость «по спирали», каждый раз приставляя к имеющейся фигуре квадрат так, чтобы его сторона совпала с одной из сторон фигуры. Ясно, что любая точка плоскости будет покрыта одним из квадратов. Кстати, длины сторон этих квадратов образуют последовательность Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …– подробно о ней рассказано в этом номере журнала в рубрике «Математический кружок».



Подумайте над более сложным вопросом: можно ли покрыть плоскость бесконечным числом неперекрывающихся квадратов, среди которых нет одинаковых?

2. *Можно ли покрыть плоскость конечным числом а) внутренностей парабол;*

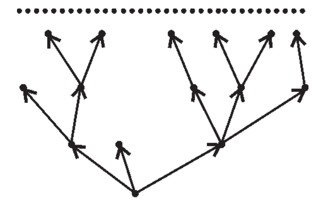
б) внутренностей углов, сумма которых меньше 360°?

Приведем решение пункта а). Ответ: нельзя. Предположим, что такие параболы найдутся. Заметим, что внутренность параболы пересекается с прямой по бесконечному куску только в случае, если прямая параллельна оси параболы. Проведем прямую, не параллельную ни одной из осей наших парабол (это возможно, так как их конечное число). Тогда каждая парабола пересечет эту прямую по отрезку, а так как отрезков будет конечное число, то даже эта прямая не будет покрыта.

Бесконечные графы

3. *Пусть известно, что человечество бессмертно, а каждый человек смертен. Число людей в каждом поколении конечно. Докажите, что найдется бесконечная цепочка мужчин, начинающаяся с Адама (каждый следующий в цепочке – сын предыдущего).*

Построим такую картинку. На первом этаже разместим одну точку – она будет изображать Адама. Из нее выпустим столько стрелок, сколько было у Адама сыновей, на второй этаж (концы стрелок соответствуют сыновьям Адама). Из каждой точки–человека второго этажа выпустим стрелки на третий этаж (стрелки опять соответствуют сыновьям), и так далее. Получим систему точек и стрелок из бесконечного числа этажей (так как человечество бессмертно), но на каждом этаже будет конечное число точек.



Ясно, что есть бесконечное количество конечных путей, идущих по стрелкам, с началом в точке первого этажа. Надо доказать, что есть бесконечный путь. Объясним, как его найти. Первой в нем будет точка первого этажа. Так как есть бесконечно много путей, ведущих из точки первого этажа, то на втором этаже найдется точка, через которую проходит бесконечно много путей. Эта точка будет второй в нашем пути. Рассмотрим все пути, проходящие через выбранные две точки, – их бесконечно много, и значит, на третьем этаже найдется точка, через которую проходит бесконечно много из них. Выберем ее третьей. Каждый раз мы сможем достраивать наш путь, увеличивая его длину, и в итоге получится бесконечный путь.

4. *Имеется язык с конечным алфавитом. Словом в этом языке называется любая (конечная или бесконечная) последовательность букв из алфавита этого языка. Часть слов (конечной длины) в языке – неприличные. Назовем слово абсолютно приличным, если в нем нет неприличных подслов. Известно, что существуют сколь угодно длинные абсолютно приличные слова. Докажите, что существует бесконечно длинное абсолютно приличное слово.*

Преследования на плоскости

5. *Игра происходит на плоскости. Играют двое: первый передвигает одну фишку-волка, второй – 99 фишек-овец. После хода волка ходит одна из овец, затем после следующего хода волка – опять какая-нибудь из овец и т.д. И волк, и овцы передвигаются за один ход в любую сторону не более чем на один метр. Верно ли, что при любой первоначальной позиции волк поймает хотя бы одну овцу (окажется с ней в одной точке)?*

Ответ: неверно. Нарисуем на плоскости 100 параллельных прямых так, чтобы расстояние между соседними прямыми равнялось 3 метрам. Разместим овец на разные прямые, каждая в дальнейшем будет двигаться только по своей прямой. Волка поместим на сотую прямую.

Приведем алгоритм поведения овец, при котором расстояние от волка до любой овцы перед ходом волка всегда будет больше метра. Если расстояние от волка до каждой из овец больше метра, двигаем любую овцу (вдоль ее прямой) так, чтобы она удалилась от волка. Как только волк приближается к какой-то из овец на расстояние 1 метр или ближе (такая овца может быть ровно одна), сдвигаем овцу по ее прямой в одну из сторон на 1 метр так, чтобы расстояние между ней и волком стало больше метра.

6. *Город представляет собой бесконечную клетчатую плоскость (линии – улицы, клеточки – кварталы). На одной из улиц через каждые 100 кварталов на перекрестках стоит по милиционеру. Где-то в городе есть бандит (его местонахождение неизвестно, но перемещается он только по улицам). Цель милиции – увидеть бандита. Есть ли у милиции алгоритм наверняка достигнуть своей цели? Максимальные скорости милиции и бандита – какие-то конечные, но неизвестные нам величины (у бандита скорость может быть больше, чем у милиции). Милиция видит вдоль улиц во все стороны на бесконечное расстояние.*

Выберем систему координат так, чтобы милиционеры стояли на улице $y = 0$ в точках (0; 0), (100; 0), (–100; 0), (200;0), (–200;0) и т.д. Пусть милиционеры, стоящие в точках вида (200k; 0), где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, останутся на месте. Тогда бандит окажется внутри некоторой полосы между прямыми $x = 200m$ и $x = 200(m + 1)$; он сможет двигаться внутри это полосы, но не сможет выбраться за ее пределы.

Остальные милиционеры (назовем их патрульными) пусть движутся по улице $y = 0$ в направлении точки (0; 0) до ближайшего к ней перекрестка, до которого еще не доходил никто из патрульных. Дойдя до перекрестка (n; 0), патрульный сворачивает на перпендикулярную улицу и движется по ней до точки (n; n) и там останавливается. В результате постепенно патрульные будут занимать все перекрестки на прямой $y = x$. Докажите, что, действуя таким образом, милиционеры через некоторое время смогут увидеть бандита.

7*. *В городе из предыдущей задачи трое полицейских ловят вора (местонахождение вора неизвестно, но перемещается он только по улицам). Максимальные скорости у полицейских и вора одинаковы. Вор считается пойманным, если он оказался на одной улице с полицейским. Как полицейским поймать вора?*

Бесконечные десятичные дроби

8. *Докажите, что любое действительное положительное число можно представить в виде суммы девяти чисел, десятичная запись каждого из которых состоит только из цифр 0 и 8.*

Легко представить любое положительное число в виде суммы девяти чисел, запись которых состоит только из нулей и единиц (проверьте). Теперь решим исходную задачу. Пусть нам надо представить число a. Представим сначала число $a/8$ в виде суммы девяти чисел, записи которых состоят только из нулей и единиц, а затем домножим каждое из этих чисел на 8 – получим искомые 9 чисел, сумма которых равна a.

9. *Докажите, что в любой бесконечной десятичной дроби можно так переставить цифры, что полученная дробь станет периодической (возможно, с предпериодом).*

Если в записи дроби есть цифры, встречающиеся в этой записи конечное число раз, то перенесем их все в начало (запишем подряд сразу после запятой). Остальные цифры встречаются бесконечное число раз. Пусть это, например, цифры 2, 5, 7 и 8. Тогда можно переносить их последовательно в начало так, чтобы они шли в порядке 257825782578... В итоге получится периодическая дробь.

Роботы на клетчатой плоскости

Робот – это машина с конечной памятью, способная выполнять программу конечной длины. У робота есть несколько флажков. Робот может выполнять следующие действия:

– попав в клетку, проверить, есть ли там флажок;

– сдвинуться на одну из соседних клеток (на плоскости – влево, вправо, вверх, вниз);

– установить или снять флажок в клетке, где робот находится.

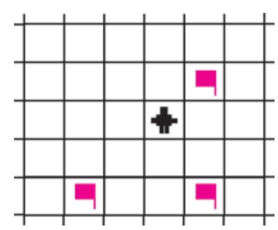
10. *Робот с двумя флажками стоит на одной из клеток бесконечной клетчатой полоски шириной в одну клетку. Как ему действовать, чтобы обойти всю полоску, т.е. побывать на каждой ее клетке хотя бы раз?*

Ставим в клетку флажок, сдвигаемся влево, ставим в клетку второй флажок. Далее действуем по очень простому алгоритму: сдвигаемся вправо, пока не дойдем до флажка, снимаем флажок, сдвигаемся еще на клетку вправо, ставим флажок и движемся влево до флажка, передвигаем его на клетку влево и возвращаемся в начало алгоритма (движемся вправо до флажка и т.д.).

11. *Как роботу с четырьмя флажками обойти клетчатую плоскость? Можно ли обойтись тремя флажками?*

Алгоритм «обходить плоскость по спирали», чередуя ходы влево, вверх, вправо и вниз, периодически увеличивая длину хода на 1 клетку, не годится: роботу придется запоминать все бóльшие и бóльшие числа, а его память конечна.

Расположим четыре флажка в клетках квадрата 2×2. Далее будем «расширять» квадрат, например так. Сдвигаем левый верхний флажок влево и вверх, идем из этой клетки вправо, проверяя, нет ли под нами флажка. Если есть, сдвигаем его вправо и вверх, затем из этой клетки идем вниз, проверяя, нет ли слева от нас флажка, и так далее. В результате мы будем обходить плоскость, двигаясь «по спирали».



Оказывается, достаточно даже трех флажков (подсказка изображена на рисунке).

12. *Сможет ли робот обойти клетчатое трехмерное пространство, имея всего три флажка?*

13. *Как роботу обойти клетчатую полуплоскость, имея всего один флажок? Граница полуплоскости является стенкой. Изначально робот стоит у стенки. Робот видит стенку, когда оказывается рядом с ней.*

14. *На плоскость высадили двух совершенно одинаковых роботов. У каждого есть несколько флажков. Робот отличает свои флажки от чужих. Как им встретиться? Программы у них должны быть одинаковыми.*

Если бы у роботов могли быть разные программы, то организовать встречу было бы легко: один робот стоит на месте, а другой обходит плоскость, используя три флажка. Но роботы сделаны на одном конвейере, и программы поведения у них одинаковые. Попробуйте придумать программу, позволяющую роботам встретиться, используя как можно меньше флажков.

Материал подготовили
С.Дориченко, А.Николаев

(Начало см. на с. 29)

Для обоснования формулы (8) рассмотрим задаваемое ею число φ (мы пока не знаем, что это и есть золотое сечение, а лишь будем это доказывать). Заметим, что в правой части формулы под знаком корня стоит сумма двух слагаемых – единицы и выражения, совпадающего со всей правой частью формулы. Отсюда получаем уравнение $\varphi = \sqrt{1+\varphi}$, легко сводящееся к квадратному уравнению (3). Нам подходит лишь положительный корень этого уравнения, следовательно, рассматриваемое число φ и есть золотое сечение. Аналогично, формула (9) сводится к уравнению $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$, которое опять же приводит нас к квадратному уравнению (3). А значит, число φ, определяемое формулой (9), также равно золотому сечению.

Конечно же, приведенные в предыдущем абзаце рассуждения не являются вполне строгими. Чтобы избавиться от этого недостатка и придать им строгость, нужно прежде всего определить, что означают бесконечные выражения в правых частях формул (8) и (9). Правая часть формулы (8) – это, по определению, предел последовательности

$$a_n = \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}}_{n \text{ корней}}. \qquad (10)$$

Она задается рекуррентным соотношением

$$a_1 = 1, \quad a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}.$$

Таким образом, уравнение $\varphi = \sqrt{1+\varphi}$ возникает как переход к пределу в правой и левой частях рекуррентного соотношения. Такой переход допустим, если рассматриваемая последовательность сходится. То же самое касается и правой части формулы (9), означающей предел последовательности

$$b_n = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{1}}}} \left.\vphantom{\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{1}}}}}\right\} n \text{ «этажей»}, \qquad (11)$$

которая может быть задана рекуррентно:

$$b_1 = 1, \quad b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}}.$$

Переход к пределу в этом соотношении приводит нас к уравнению $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$. Обе рассматриваемые последовательности состоят из положительных чисел, поэтому искомый предел не может быть отрицательным, а значит, можно ограничиться рассмотрением лишь неотрицательных корней уравнений. Для завершения доказательства формул (8) и (9) осталось лишь доказать, что рассматриваемые последовательности (10) и (11) сходятся. Оставим это в качестве упражнения для читателей, знакомых с теоремой Больцано–Вейерштрасса.

Напоследок докажем, что отношение двух последовательных чисел Фибоначчи стремится к золотому сечению. Применяя формулу Бинэ и воспользовавшись тем, что $\frac{\bar\varphi}{\varphi} < 1$, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\varphi^{n+1}-\bar\varphi^{n+1}}{\varphi^n - \bar\varphi^n} = \varphi\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{\bar\varphi}{\varphi}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{\bar\varphi}{\varphi}\right)^{n}} = \varphi.$$

Более подробную информацию о числах Фибоначчи можно почерпнуть в книге Н.Н.Воробьева [1]. Советуем также прочитать соответствующие главы из книг замечательного популяризатора математики Мартина Гарднера [2, 3] и посвященную золотому сечению главу из классической книги Гарольда Кокстера [4].

Упражнения

1. Обоснуйте следующий способ деления отрезка AB в крайнем и среднем отношении с помощью циркуля и линейки (рис.6). На перпендикуляре к отрезку AB в точке B откладывается отрезок BC, равный половине отрезка AB. Точки A и C соединяются отрезком и на нем откладывается отрезок CK, равный CB. На отрезке AB откладывается отрезок AM, равный AK. Точка M является искомой.

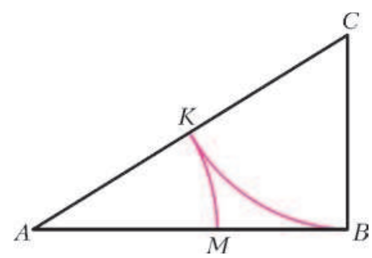


Рис. 6

2. Обоснуйте следующий способ построения правильного пятиугольника с помощью циркуля и линейки (рис.7). В окружности с центром O проводится диаметр BC и перпендикулярный ему радиус OA. Далее радиус OB делится пополам точкой D. На отрезке DC откладывается отрезок DE, равный DA. Отрезок AE равен стороне правильного пятиугольника, вписанного в исходную окружность. Осталось отложить его последовательно пять раз в виде хорд исходной окружности.

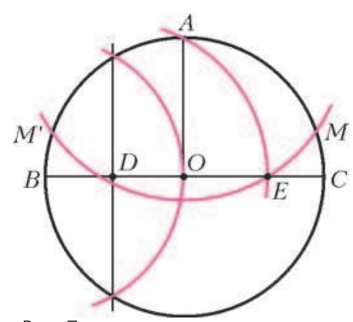


Рис. 7

3. Перечислите все равнобедренные треугольники, которые можно разрезать на два равнобедренных треугольника.

4. Докажите с помощью формулы бинома Ньютона, что правая часть формулы Бинэ является целым числом при любом n.

5. Назовем последовательность, каждый член которой, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих (а первые два члена могут быть произвольными), *обобщенной последовательностью Фибоначчи*. Найдите формулу, выражающую произвольный член обобщенной последовательности Фибоначчи через ее номер n и два первых члена a и b.

6. Докажите, что последовательности (10) и (11) сходятся.

7. Докажите, что общий член последовательности (11) может быть записан в виде $b_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$.

Литература

1. *Н.Н.Воробьев.* Числа Фибоначчи. (М.: Наука, 1992)

2. *М.Гарднер.* Математические головоломки и развлечения. Глава 23: Число φ – золотое сечение. (М.: Мир, 1999)

3. *М.Гарднер.* Математические новеллы. Глава 32: Числа Фибоначчи. (М.: Мир, 2000)

4. *Г.С.М.Кокстер.* Введение в геометрию. Глава 11: Золотое сечение и филлотаксис. (М.: Наука, 1966)

Движение проводника в магнитном поле

А.ЧЕРНОУЦАН

Закон электромагнитной индукции утверждает, что электродвижущая сила (ЭДС) индукции в контуре возникает *при любом изменении* магнитного потока через контур и по модулю равна скорости изменения магнитного потока:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\Phi'(t). \qquad (1)$$

Знак «минус» формально отражает правило Ленца для определения направления ЭДС индукции (точнее – индукционного тока) и имеет практический смысл только в том случае, если контур предварительно ориентирован, т.е. взаимосвязанно определены положительное направление нормали к контуру и положительное направление его обхода.

Слова «при любом изменении» выделены для того, чтобы подчеркнуть универсальность формулы (1): она дает правильный ответ в двух существенно различных случаях.

Первый случай: контур неподвижен, магнитное поле зависит от времени. В этой ситуации роль сторонней силы, приводящей в движение заряды в контуре, играет *сила со стороны вихревого электрического поля*, которое возникает при любом изменении магнитного поля со временем.

Второй случай: магнитное поле не меняется, магнитный поток изменяется за счет перемещения в пространстве всего контура или его частей. В такой ситуации роль сторонней силы выполняет *сила Лоренца*, действующая на свободные заряды проводника при его движении.

Универсальность формулы (1) является следствием принципа относительности Эйнштейна. При переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую меняется состав электромагнитного поля, т.е. соотношение между электрическим и магнитным полями, но индукционный ток в контуре наблюдается в любом случае. В качестве примера рассмотрим проводящее кольцо, которое с постоянной скоростью приближается к неподвижному магниту. С точки зрения неподвижного наблюдателя, ток в кольце возникает под действием только сил Лоренца. Если же перейти в систему отсчета, связанную с кольцом, то индукционный ток создается только вихревым электрическим полем (сила Лоренца на неподвижные заряды не действует).

В этой статье мы рассмотрим задачи, связанные со вторым случаем, т.е. с движением проводников в постоянном магнитном поле. Для вычисления электродвижущей силы индукции можно использовать как формулу (1), так и прямое определение ЭДС через работу сторонних сил, т.е. в данном случае силы Лоренца. В некоторых ситуациях нужно использовать первый подход, в других одинаково удобны оба подхода, но в ряде случаев, как мы убедимся, второй подход имеет существенное преимущество.

Задача 1. *Медное кольцо радиусом $r = 5$ см помещают в однородное магнитное поле с индукцией $B = 8$ мТл перпендикулярно линиям индукции. Какой заряд пройдет по кольцу, если его повернуть на 180° вокруг оси, совпадающей с его диаметром? Сопротивление единицы длины кольца $\rho_l = 2$ мОм/м.*

Решение. Эту задачу надо решать с помощью формулы (1). Начальный магнитный поток равен $\Phi_1 = BS$ (нормаль выбрана вдоль вектора $\vec{B}$), конечный поток составляет $\Phi_2 = -BS$, и прошедший заряд вычисляется так:

$$|q| = |I_{\text{ср}}\Delta t| = \left|\frac{\mathcal{E}_{\text{ср}}}{R}\Delta t\right| = \left|-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\frac{\Delta t}{R}\right| = \left|-\frac{\Delta\Phi}{R}\right| = \frac{2BS}{R}$$

(мы применили закон Ома для полной цепи $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$). Подставляя $S = \pi r^2$, $R = \rho_l \cdot 2\pi r$, получим

$$q = \frac{Br}{\rho_l} = 200 \text{ мКл}.$$

Задача 2. *Сторона прямоугольного каркаса, имеющая длину $l = 10$ см, скользит со скоростью $v = 1$ м/с по двум другим сторонам, оставаясь с ними в электрическом контакте. Плоскость прямоугольника перпендикулярна линиям индукции однородного магнитного поля $B = 0{,}01$ Тл. Найдите силу тока в прямоугольнике через $t = 0{,}9$ с после начала движения. Сопротивление единицы длины провода $\rho_l = 1$ Ом/м. В начальный момент площадь прямоугольника равна нулю.*

Решение. В этой задаче ЭДС индукции одинаково просто получить и из формулы (1), и через силу Лоренца.

Направив положительную нормаль вдоль вектора $\vec{B}$ (рис. 1), получим $\Phi = Blx$, $\Delta\Phi = Bl\Delta x$, откуда

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -Bl\frac{\Delta x}{\Delta t} = -Bvl.$$

Знак «минус» позволяет найти направление ЭДС – против положительного направления обхода (см. рис.1). Величину тока в контуре находим из закона Ома для полной цепи $I = \mathcal{E}/R$, где сопротивление контура в данный момент времени равно $R = \rho_l(2l + 2vt)$. Окончательно получаем

$$I = \frac{Bvl}{\rho_l(2l + 2vt)} = 500 \text{ мкА}.$$

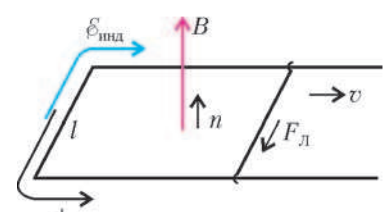


Рис. 1

Теперь посмотрим, как находить ЭДС индукции прямо из определения – через работу сторонних (не электростатических) сил по переносу единичного пробного заряда. В данном случае сторонняя сила – это сила Лоренца, возникающая за счет движения зарядов вместе с проводником:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \frac{A_{\text{стор}}}{q} = \frac{(qvB)l}{q} = Bvl. \qquad (2)$$

Видим, что модуль ЭДС совпадает с полученным выше. Совпадают и направления индукционного тока: оно в данном подходе определяется направлением силы Лоренца, которое находится мгновенно (без необходимости ориентировать контур и выбирать нормаль).

Основное преимущество второго подхода состоит в том, что он позволяет естественным образом вычислять ЭДС индукции в изолированном проводнике, движущемся в магнитном поле. Применение формулы (1) затрудняется тем, что иногда в задаче отсутствует контур из проводников и приходится вводить воображаемый «заметаемый» контур. Вывод формулы (2) свободен от этих недостатков. Более того, этот подход позволяет легко разобраться с вычислением ЭДС индукции при произвольном взаимном расположении проводника, вектора его скорости (при поступательном движении проводника) и вектора магнитной индукции. Поскольку в работу силы Лоренца войдет только ее составляющая, направленная вдоль проводника, то у векторов $\vec{v}$ и $\vec{B}$ надо оставить только составляющие, перпендикулярные к проводнику. Если угол между этими составляющими равен α, то

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \frac{\left(qv_\perp B_\perp \sin\alpha\right) l}{q} = B_\perp v_\perp l \sin\alpha\ . \qquad (3)$$

Задача 3. *Самолет летит горизонтально со скоростью $v = 900$ км/ч. Найдите разность потенциалов, возникающую между концами его крыльев, если вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли $B_{\text{верт}} = 50$ мкТл, а размах крыльев $l = 12$ м.*

Решение. Изолированный проводник, движущийся в магнитном поле, надо рассматривать как источник в разомкнутой цепи, а разность потенциалов на зажимах такого источника равна его ЭДС. Более подробно: сторонние силы (сила Лоренца) вызывают перемещение свободных зарядов до тех пор, пока возникшее электростатическое поле разделенных зарядов не уравновесит действие сторонних сил. Поскольку крылья самолета и его скорость горизонтальны, то остается только вертикальная составляющая магнитного поля $B_{\text{верт}}$ (в формуле (3) $B_\perp \sin\alpha = B_{\text{верт}}$). Получаем

$$\Delta\varphi = B_{\text{верт}} v l = 150 \text{ мВ}.$$

Подход с силой Лоренца позволяет вычислять ЭДС индукции и разность потенциалов не только при поступательном, но и при вращательном движении проводника.

Задача 4. *С какой угловой скоростью надо вращать прямой проводник вокруг оси, проходящей через один его конец, в плоскости, перпендикулярной линиям однородного магнитного поля с индукцией $B = 0,2$ Тл, чтобы в проводнике возникла ЭДС индукции $\mathcal{E}_{\text{инд}} = 0,3$ В? Длина проводника $l = 20$ см.*

Решение. В этом случае сила Лоренца, действующая на пробный заряд q, зависит от расстояния x до оси вращения:

$$F_{\text{Л}} = qvB = q\omega x B\ ,$$

но поскольку зависимость линейная, то работа этой силы вдоль проводника легко вычисляется:

$$A_{\text{стор}} = \frac{1}{2}\left(0 + q\omega l B\right) l\ .$$

Тогда ЭДС индукции, возникающая в проводнике, равна

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \frac{A_{\text{стор}}}{q} = \frac{1}{2} B\omega l^2\ ,$$

откуда

$$\omega = \frac{2\mathcal{E}_{\text{инд}}}{l^2 B} = 75 \text{ рад/с}\ .$$

Наиболее важное преимущество подхода с вычислением $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ через силу Лоренца проявляется в задачах с разветвленной схемой, где движущийся проводник входит не в один, а, скажем, в два контура.

Задача 5. *Из проволоки, сопротивление единицы длины которой $\rho_l = 0,1$ Ом/м, сделали квадрат и поместили его в однородное магнитное поле с индукцией $B = 4$ мТл перпендикулярно линиям поля. По двум противоположным сторонам квадрата скользит со скоростью $v = 0,3$ м/с перемычка из такой же проволоки, оставаясь параллельной двум другим сторонам. Чему равен ток через перемычку в тот момент, когда она делит квадрат пополам?*

Решение. При попытке использовать формулу (1) мы сталкиваемся с тем, что $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ каким-то образом (формула не конкретизирует) распределена как в левом, так и в правом контуре (рис.2,*а*), которые имеют общее сопротивление – движущуюся перемычку. Нарисовать в этих условиях эквивалентную схему для расчета токов представляется затруднительным.

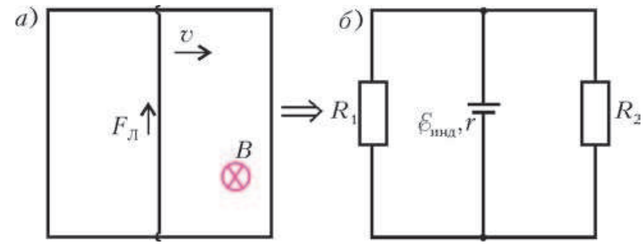


Рис. 2

Напротив, при втором подходе мы знаем, что сторонние силы и $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ локализованы только в движущейся перемычке, а в остальных частях контура сторонние силы отсутствуют. Это позволяет однозначно составить эквивалентную схему (рис.2,*б*), в которой $\mathcal{E}_{\text{инд}} = Bva$, $r = \rho_l a$, $R_1 = R_2 = \rho_l \cdot 2a$, где a – сторона квадрата. Полное внешнее сопротивление равно $R = R_1R_2/\left(R_1 + R_2\right) = \rho_l a$, и ток через перемычку (через источник) равен

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{r + R} = \frac{Bva}{\rho_l a + \rho_l a} = \frac{Bv}{2\rho_l} = 6 \text{ мА}.$$

Вычисление ЭДС индукции через силу Лоренца обладает еще одним важным преимуществом. Такой подход позволяет применить энергетические соображения, опирающиеся на очень простое свойство силы Лоренца: поскольку эта сила перпендикулярна скорости заряда, полная работа сил Лоренца над всеми зарядами проводника равна нулю. Это значит, что работа постоянного магнитного поля над зарядами в замкнутом контуре в качестве сторонней силы точно равна по величине и противоположна по знаку механической работе магнитного поля (силы Ампера) над движущимся проводником с током.

Задача 6. *Длинную проволоку согнули под углом α таким, что $\sin\alpha = 0,6$, и поместили в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,1$ Тл перпендикулярно линиям поля. Вдоль сторон угла равномерно перемещают перемычку из такой же проволоки так, что она все время образует прямой угол с одной из его сторон. В начальный момент перемычка находится на расстоянии $x_1 = 0,2$ м, а через время $t = 1$ с – на расстоянии $x_2 = 0,6$ м от вершины угла. Какое количество теплоты выделилось в системе за это время? Сопротивление единицы длины проволоки $\rho_l = 0,01$ Ом/м.*

Решение. Начнем с того, что вычислим ток в контуре. Если в какой-то момент перемычка находится на расстоянии x от вершины угла (рис.3), то

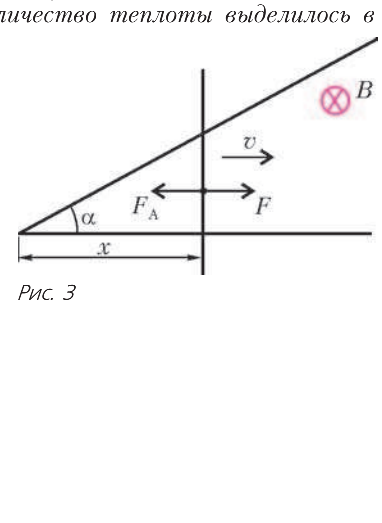


Рис. 3

длина перемычки между точками контакта равна $l = x\,\mathrm{tg}\,\alpha$, откуда для ЭДС индукции получаем

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = Bvl = Bvx\,\mathrm{tg}\,\alpha\,,$$

где $v = (x_2 - x_1)/t$. Сопротивление контура в этот же момент равно

$$R = \rho_l\left(x + x\,\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{x}{\cos\alpha}\right).$$

Видно, что сила тока в цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R} = \frac{Bv\,\mathrm{tg}\alpha}{\rho_l\left(1 + \mathrm{tg}\alpha + \dfrac{1}{\cos\alpha}\right)} = \frac{Bv\sin\alpha}{\rho_l\,(1 + \sin\alpha + \cos\alpha)} = 1\ \text{А}$$

не зависит от x, т.е. остается постоянной.

Тепловая мощность $P = I^2R$ линейно зависит от x, а значит, и от t. Это позволяет вычислить выделившееся тепло в лоб, используя график зависимости $P(t)$ (или интегрируя). Попробуйте сделать это самостоятельно, мы же пойдем несколько иным путем.

Поскольку выделившееся количество теплоты (точнее, увеличение внутренней энергии системы) равно работе сторонних сил, а эта работа, в свою очередь, равна работе силы Ампера (с противоположным знаком), то можно вместо количества теплоты вычислить механическую работу. Сила Ампера

$$F_{\text{А}} = IBl = IBx\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

линейно зависит от x, поэтому ее работа (по модулю) равна

$$|A| = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}IB\,\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\left(x_2^2 - x_1^2\right) = 12\ \text{мДж}\,.$$

Задача 7. *По П-образной рамке, помещенной в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости рамки, движется без трения с постоянной скоростью v = 2 м/с перемычка, сопротивление которой R = 2 Ом. К перемычке приложена сила F = 4 Н. Найдите силу тока в перемычке. Сопротивлением рамки пренебречь. Силу тяжести не учитывать.*

Решение. На перемычку, кроме внешней силы F, действует сила Ампера $F_{\text{А}}$, направленная против движения. Это можно проверить в лоб, найдя направление силы Лоренца в перемычке и тем самым направление силы тока (сделайте это), мы же приведем энергетический аргумент. Поскольку работа магнитного поля в качестве ЭДС контура положительна (других ЭДС нет), то механическая работа магнитного поля отрицательна (еще раз напомним, что полная работа сил Лоренца равна нулю). Значит, сила Ампера направлена против движения.

Второй закон Ньютона для перемычки имеет вид

$$F - F_{\text{А}} = 0\,,$$

где

$$F_{\text{А}} = IBl, \quad I = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R} = \frac{Bvl}{R}\,.$$

Исключая лишние переменные, получаем

$$I^2R = Fv, \ \text{ и } \ I = \sqrt{\frac{Fv}{R}} = 2\ \text{А}.$$

Обратите внимание на то, что написанное слева соотношение имеет простой энергетический смысл и, подумав немного, его можно было бы написать сразу. Тепловая мощность тока равна мощности сторонних сил (сил Лоренца), а та, в свою очередь, равна мощности силы Ампера (с противоположным знаком), которая равна мощности внешней силы F. Иными словами, магнитное поле, не совершая работу, позволяет осуществить преобразование механической работы в работу электрического тока.

Задача 8. *По П-образной рамке, наклоненной под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту и помещенной в однородное вертикальное магнитное поле, начинает соскальзывать без трения перемычка массой m = 30 г. Длина перемычки l = 10 см, ее сопротивление R = 1 мОм, индукция магнитного поля B = = 0,1 Тл. Найдите установившуюся скорость движения перемычки. Сопротивлением рамки пренебречь.*

Решение. Запишем второй закон Ньютона для равномерно движущейся перемычки (рис.4) в проекции на направление скорости:

$$mg\sin\alpha - F_{\text{А}}\cos\alpha = 0\,,$$

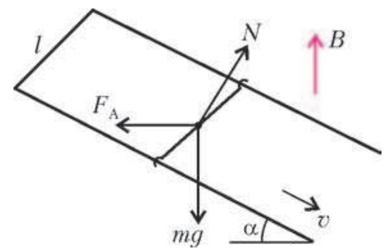


Рис. 4

формулу для силы Ампера:

$$F_{\text{А}} = IBl\,,$$

закон Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R}$$

и формулу для ЭДС индукции:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = Bvl\sin\left(90^\circ + \alpha\right) = Bvl\cos\alpha\,.$$

Из этих уравнений найдем

$$v = \frac{mgR\sin\alpha}{B^2l^2\cos^2\alpha} = 2\ \text{м/с}.$$

Разберем теперь пример, когда ток в контуре определяется совместным действием магнитного поля и дополнительного источника.

Задача 9. *Замкнутый контур образован двумя вертикальными рейками, между нижними концами которых включен источник тока с ЭДС $\mathcal{E}$ = 60 мВ и внутренним сопротивлением r = 1 мОм, а верхние концы замкнуты перемычкой длиной l = 10 см и массой m = 10 г. Контур находится в перпендикулярном его плоскости однородном магнитном поле с индукцией B = 0,1 Тл. Когда перемычку освобождают, она начинает опускаться. Пренебрегая сопротивлением реек и перемычки, а также трением, найдите установившуюся скорость перемычки.*

Решение. В начальный момент сила тока определяется только источником: $I_0 = \mathcal{E}/r$. Легко убедиться, что в этот момент величина силы Ампера $F_{\text{А}0} = I_0Bl = \mathcal{E}Bl/r = 0{,}6$ Н больше силы тяжести mg = 0,1 Н. В условии сказано, что перемычка после освобождения стала опускаться. Следовательно, источник включен таким образом, что сила Ампера в начальный момент направлена вниз (рис.5,*а*).

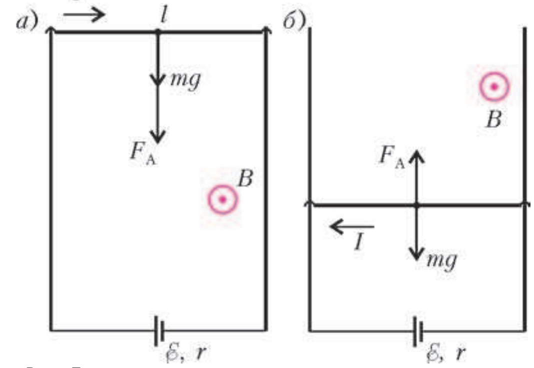


Рис. 5

С увеличением скорости перемычки растет ЭДС индукции, направленная против тока (полная мощность магнитного поля равна нулю). Когда ЭДС индукции сравняется с ЭДС источника, а затем превысит ее, ток поменяет направление. В дальнейшем сила Ампера направлена вверх и возрастает до тех пор, пока не сравняется с силой тяжести (рис.5,*б*). На втором этапе движения (после смены направления тока) ЭДС индукции направлена по току, а ЭДС источника – против. Второй закон Ньютона и закон Ома для полной цепи имеют вид

$$mg - IBl = 0, \quad I = \frac{Bvl - \mathscr{E}}{r}.$$

Отсюда получаем

$$v = \frac{mgr}{B^2l^2} + \frac{\mathscr{E}}{Bl} = 7 \text{ м/с}.$$

В следующей задаче система не переходит в режим установившейся скорости, и надо следить за ее ускорением.

Задача 10. *По вертикальной* П*-образной рамке, помещенной в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости рамки, может без трения скользить перемычка. В короткую сторону рамки включена катушка индуктивностью* $L = 0{,}4$ *мГн. Масса перемычки* $m = 10$ *г, ее длина* $l = 10$ *см, индукция поля* $B = 0{,}1$ *Тл. Перемычку сначала удерживают на месте, затем отпускают. Пренебрегая сопротивлениями всех элементов цепи, найдите максимальную скорость и максимальное смещение перемычки.*

Решение. Поскольку сопротивления всех элементов цепи пренебрежимо малы, сумма всех ЭДС контура равна нулю:

$$L\frac{\Delta I}{\Delta t} = Bl\frac{\Delta x}{\Delta t},$$

откуда получаем

$$LI = Blx.$$

Это означает, что сила Ампера, действующая на перемычку и направленная вверх (рис.6), пропорциональна ее смещению:

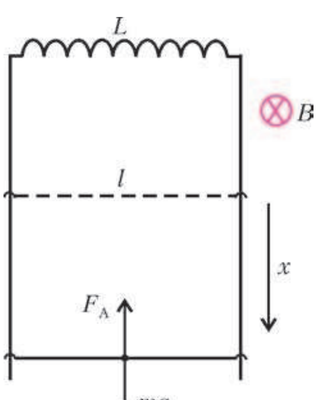


Рис. 6

$$F_A = IBl = \frac{B^2l^2}{L}x.$$

Уравнение движения перемычки (второй закон Ньютона)

$$ma = mg - \frac{B^2l^2}{L}x$$

совпадает с уравнением движения груза, подвешенного на пружине жесткостью $k = B^2l^2/L$ и отпущенного без начальной скорости. Следовательно, перемычка совершает колебания с такими циклической частотой и амплитудой:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{B^2l^2}{mL}}, \quad A = \frac{mgL}{B^2l^2}.$$

Максимальная скорость перемычки равна

$$v_{\max} = \omega A = \frac{g\sqrt{mL}}{Bl} = 2 \text{ м/с},$$

а ее максимальное смещение равно

$$x_{\max} = 2A = \frac{2mgL}{B^2l^2} = 0{,}8 \text{ м}.$$

Максимальные скорость и смещение можно найти также с помощью закона сохранения энергии

$$\frac{LI^2}{2} - mgx + \frac{mv^2}{2} = 0,$$

подставив сюда $I = Blx/L$.

Упражнения

1. Максимальная ЭДС индукции, возникающая в прямоугольной рамке, вращающейся в однородном магнитном поле, $\mathscr{E}_{\max} = 3$ В. С какой угловой скоростью вращается рамка, если максимальный магнитный поток через рамку $\Phi_{\max} = 0{,}05$ Вб? Ось вращения рамки проходит через середины ее противоположных сторон и перпендикулярна линиям индукции поля.

2. Чему равна максимальная ЭДС, которая может возникнуть при движении самолета со скоростью $v = 900$ км/ч, если размах его крыльев $l = 20$ м? Горизонтальная составляющая магнитного поля Земли $B_г = 0{,}03$ мТл, вертикальная составляющая $B_в = 0{,}04$ мТл.

3. Из проволоки, сопротивление единицы длины которой $\rho_l = 0{,}1$ Ом/м, сделали правильный треугольник и поместили его в однородное магнитное поле с индукцией $B = 7$ мТл перпендикулярно линиям поля. По треугольнику со скоростью $v = 0{,}5$ м/с скользит перемычка из такой же проволоки, оставаясь параллельной его стороне. Чему равен ток через перемычку в тот момент, когда она проходит через середины сторон треугольника?

4. По П-образной рамке, наклоненной к горизонту под углом α таким, что $\sin\alpha = 0{,}8$, и помещенной в однородное вертикальное магнитное поле, соскальзывает перемычка массой $m = 20$ г. Длина перемычки $l = 10$ см, ее сопротивление $R = 1{,}2$ мОм, индукция поля $B = 0{,}1$ Тл, коэффициент трения между перемычкой и рамкой $\mu = 0{,}5$. Найдите установившуюся скорость движения перемычки. Сопротивлением рамки пренебречь.

5. Замкнутый контур образован двумя вертикальными рейками, между концами которых включены одинаковые резисторы сопротивлением $R = 4$ мОм. Расстояние между рейками $l = 10$ см, их сопротивления очень малы. Контур находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл, линии которого перпендикулярны плоскости контура. По рейкам без трения соскальзывает перемычка массой $m = 10$ г, сопротивление которой $r = 4$ мОм. Найдите установившуюся скорость перемычки.

6. Замкнутый контур образован двумя вертикальными рейками, между верхними концами которых включен источник тока с ЭДС $\mathscr{E} = 60$ мВ и внутренним сопротивлением $r = 1$ мОм, а нижние концы замкнуты перемычкой, длина которой $l = 10$ см, а масса $m = 10$ г. Контур находится в перпендикулярном его плоскости однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл. Когда перемычку освобождают, она начинает подниматься. Пренебрегая сопротивлениями реек и перемычки, а также трением, найдите установившуюся скорость перемычки.

7. По П-образной рамке, наклоненной под углом $\alpha = 30°$ к горизонту и помещенной в однородное вертикальное магнитное поле, соскальзывает без трения перемычка. В короткую сторону рамки включен конденсатор емкостью $C = 4$ мФ. Масса перемычки $m = 2$ г, ее длина $l = 25$ см, индукция поля $B = 4$ Тл. Пренебрегая сопротивлениями всех элементов цепи, найдите ускорение перемычки.

8. По горизонтальной П-образной рамке, помещенной в однородное вертикальное магнитное поле, может без трения скользить перемычка. В короткую сторону рамки включена катушка с индуктивностью $L = 0{,}4$ мГн. Масса перемычки $m = 10$ г, ее длина $l = 10$ см, индукция поля $B = 0{,}1$ Тл. Перемычке сообщают начальную скорость $v_0 = 2$ м/с вдоль рамки. Пренебрегая сопротивлениями всех элементов цепи, найдите максимальное смещение перемычки.

XLIX Международная математическая олимпиада

Очередная Международная математическая олимпиада (ММО), проходившая с 10 по 22 июля 2008 года в столице Испании Мадриде, вновь побила рекорд по числу участников и делегаций: в олимпиаде приняли участие 535 юных математиков из 97 стран мира. Олимпиада подарила участникам много ярких впечатлений, новых друзей и свежих математических идей. Экскурсии в Королевский дворец, в знаменитый монастырь Сан Лоренцо дель Эскориал, танцевальное фламенко-шоу, конкурсы и спортивные состязания в свободное время надолго запомнятся школьникам с разных концов света.

Команда России на XLIX Международной математической олимпиаде. Слева направо: В.Волков, Р.Бойкий, Е.Горинов, Н.Кудык, И.Бажов, Д.Бабичев

На главном школьном математическом соревновании мира Россию представляли выпускники *Владислав Волков* и *Роман Бойкий* из Санкт-Петербурга (ФМШ 239), *Дмитрий Бабичев* из города Долгопрудного (ФМШ 5), *Никита Кудык* из Омска (гимназия 117), *Иван Бажов* из Екатеринбурга (гимназия 9) и *Евгений Горинов* из Кирова (ФМЛ). Руководителями команды были Н.Х.Агаханов, П.А.Кожевников, Д.А.Терёшин, Д.Г.Фон-Дер-Флаас. Наша команда выступила убедительно и ровно, повторив, казалось, неповторимое достижение 2002 года – все шестеро участников из России удостоились медалей высшей пробы. Такого результата не смогла добиться еще ни одна сборная.

Задачный вариант олимпиады 2008 года по стилю несколько отличался от вариантов предыдущих двух лет, когда среди шести задач ММО две задачи были достаточно простые, а две – крайне трудными. В этом году вариант был значительно ровнее по трудности задач. Интересно, что самая легкая и самая трудная задачи олимпиады (задачи 1 и 6) – это геометрические миниатюры, предложенные для ММО Россией, причем оба автора – Андрей Гаврилюк и Владимир Шмаров – студенты Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова, в недавнем прошлом победители Международной и Всероссийской олимпиад.

Приводим таблицу результатов российских участников (каждая задача оценивается из 7 баллов):

Участник	Баллы по задачам						Сумма баллов	Медаль
	1	2	3	4	5	6		
Волков Владислав	7	7	7	7	7	2	37	золотая
Бабичев Дмитрий	7	7	7	7	7	1	36	золотая
Бойкий Роман	7	4	7	7	7	0	32	золотая
Кудык Никита	7	4	7	7	7	0	32	золотая
Бажов Иван	7	7	1	7	7	2	31	золотая
Горинов Евгений	7	4	6	7	7	0	31	золотая

а также таблицу результатов стран, получивших наивысшие рейтинги в командном зачете:

Рейтинг	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
1	Китай	217	5	1	0
2	Россия	199	6	0	0
3	США	190	4	2	0
3	Южная Корея	188	4	2	0
5	Иран	181	1	5	0
6	Таиланд	175	2	3	1
7	КНДР	173	2	4	0
8	Турция	170	3	1	2
9	Тайвань	168	2	4	0
10	Венгрия	165	2	3	1
11	Япония	163	2	3	1
12	Вьетнам	159	2	2	2
13	Польша	157	2	3	1
14	Болгария	154	2	1	3
15	Украина	153	2	2	2
16	Бразилия	152	0	5	1
17	Перу	141	1	3	2
17	Румыния	141	0	4	2
19	Австралия	140	0	5	1
20	Сербия	139	1	3	0
20	Германия	139	1	2	3

Руководители команды выражают благодарность всем педагогам-наставникам, которые помогли ребятам воплотить свой талант в прекрасные результаты. Благодарим также членов тренерского совета, завершавших подготовку команды на сборах, которые проходили с 23 июня по 13 июля в пансионате «Лисицкий бор» Тверской области (на сборах с командой работали: аспирант Института системного анализа *А.В.Акопян*, педагог ФМЛ 239 из Санкт-Петербурга *С.Л.Берлов*, старший преподаватель МФТИ *И.И.Богданов*, аспирант Математического института РАН *А.И.Гарбер*, аспирант мехмата МГУ *А.А.Глазырин*, профессор Ярославского государственного университета *В.Л.Дольников*, научный сотрудник Петербургского отделения Математического института РАН и преподаватель СПбГУ *Д.В.Карпов*, педагог ФМЛ 239 из Санкт-Петербурга *М.Я.Пратусевич*, программист из Москвы *Г.Р.Челноков*).

Руководители команды искренне признательны *Дмитрию Юрьевичу Дойхену* за оказание поддержки в проведении мероприятий по подготовке национальной команды России и ее участия в международных математических соревнованиях.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. См. задачу М2112 «Задачника «Кванта».

(Россия)

2. а) Докажите, что неравенство

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\ge 1$$

выполняется для любых отличных от 1 действительных чисел x, y, z таких, что $xyz = 1$.

б) Докажите, что указанное неравенство обращается в равенство для бесконечного числа троек отличных от 1 рациональных чисел x, y, z таких, что $xyz = 1$.

(Австрия)

3. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что число n^2+1 имеет простой делитель, который больше чем $2n+\sqrt{2n}$.

(Литва)

4. Найдите все функции f: $(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ (т.е. функции, определенные на множестве всех положительных действительных чисел и принимающие положительные значения) такие, что

$$\frac{(f(w))^2+(f(x))^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

для любых положительных w, x, y, z, удовлетворяющих равенству $wx = yz$.

(Южная Корея)

5. Пусть n и k – натуральные числа такие, что $k\ge n$, а число $k-n$ четное. Имеются $2n$ лампочек, занумерованных числами 1, 2, …, $2n$, каждая из которых может находиться в одном из двух состояний: *вкл.* (включена) и *выкл.* (выключена). Вначале все лампочки были выключены. Рассматриваются упорядоченные последовательности *шагов*: на каждом шаге ровно одна из лампочек меняет свое состояние на противоположное (с вкл. на выкл. либо с выкл. на вкл.).

Обозначим через N количество последовательностей из k шагов, приводящих к ситуации, в которой все лампочки с 1-й по n-ю включены, а все лампочки с $(n+1)$-й по $(2n)$-ю выключены.

Обозначим через M количество последовательностей из k шагов, приводящих к ситуации, в которой также все лампочки с 1-й по n-ю включены, все лампочки с $(n+1)$-й по $(2n)$-ю выключены, но при этом ни одна из лампочек с $(n+1)$-й по $(2n)$-ю ни разу не меняла своего состояния.

Найдите значение отношения N/M.

(Франция)

6. См. задачу М2115 «Задачника «Кванта».

(Россия)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

2. Сделаем замену $\frac{x}{x-1}=a$, $\frac{y}{y-1}=b$, $\frac{z}{z-1}=c$, где a, b, c не равны 1. Заметим, что x, y, z однозначно выражаются через a, b, c: $x=\frac{a}{a-1}$, $y=\frac{b}{b-1}$, $z=\frac{c}{c-1}$. Условие $xyz = 1$ переписывается в виде

$$(a-1)(b-1)(c-1)=abc \Leftrightarrow a+b+c-1=ab+bc+ca \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(a+b+c-1)=(a+b+c)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-1=(a+b+c)^2-2(a+b+c)+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-1=(a+b+c-1)^2.$$

Отсюда вытекает нужное неравенство $a^2+b^2+c^2\ge 1$. Кроме того, из приведенных выкладок ясно, что если $a\ne 1$, $b\ne 1$, $c\ne 1$ и $a+b+c-1=ab+bc+ca$, то неравенство обращается в равенство при условии $a+b+c=1$. Иначе говоря, условие обращения неравенства в равенство для чисел $a\ne 1$, $b\ne 1$, $c\ne 1$ эквивалентно системе

$$\begin{cases}a+b+c=1,\\ ab+bc+ca=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=1-a-b,\\ a+b-a^2-ab-b^2=0.\end{cases}$$

Положим $b=\lambda a$ и подставим в уравнение $a+b-a^2-ab-b^2=0$. Получим $a\left(1+\lambda-a\left(1+\lambda+\lambda^2\right)\right)=0$. Отсюда следует, что при любом λ тройка чисел $a=\frac{1+\lambda}{1+\lambda+\lambda^2}$, $b=\frac{\lambda+\lambda^2}{1+\lambda+\lambda^2}$, $c=\frac{-\lambda}{1+\lambda+\lambda^2}$ удовлетворяет системе. Если в качестве λ брать натуральные числа, то, как легко видеть, мы получаем бесконечное количество различных троек рациональных чисел a, b, c, отличных от 1. Соответственно, этим тройкам чисел a, b, c соответствует бесконечное количество различных троек рациональных чисел x, y, z, удовлетворяющих условию.

3 (Р.Бойкий).

В решении используется существование бесконечного количества простых чисел p вида $4a+1$ (т.е. дающих остаток 1 при делении на 4), а также то, что -1 является *квадратичным вычетом* по модулю простого p вида $4a+1$ (т.е. для простого p вида $4a+1$ найдется такое целое m, что m^2+1 делится на p).

Докажем, что для каждого простого числа $p > 20$ вида $4a+1$ найдется требуемое натуральное n.

Рассмотрим такое целое число m, что $m^2+1\,\vdots\,p$. Эта делимость сохранится, если заменить m на остаток при делении m на p, значит, можно считать, что $m\in\{0,1,2,\ldots,p-1\}$. Кроме того, если $m^2+1\,\vdots\,p$, то и $(p-m)^2+1\,\vdots\,p$. Положим $n=\min\{m,p-m\}$, тогда $n^2+1\,\vdots\,p$ и $0\le n\le\frac{p-1}{2}$.

Запишем n в виде $n=\frac{p-1}{2}-k$, где k – целое число, $0\le k\le\frac{p-1}{2}$. Имеем

$$\left(\frac{p-1}{2}-k\right)^2+1\,\vdots\,p \Rightarrow (p-(1+2k))^2+4\,\vdots\,p \Rightarrow (2k+1)^2+4\,\vdots\,p,$$

а так как $(2k+1)^2+4>0$, то

$$(2k+1)^2+4 \geq p \Rightarrow (2k+1)^2 \geq p-4.$$

Проверим, что найденное n удовлетворяет условию задачи:

$$p>2n+\sqrt{2n} \Leftrightarrow p>2\left(\frac{p-1}{2}-k\right)+\sqrt{2\left(\frac{p-1}{2}-k\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p>p-1-2k+\sqrt{p-1-2k} \Leftrightarrow 2k+1>\sqrt{p-1-2k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2k+1)^2+(2k+1)>p,$$

но это неравенство верно, так как по доказанному

$$(2k+1)^2+(2k+1) \geq p-4+\sqrt{p-4}>p-4+\sqrt{20-4}=p.$$

Из приведенных рассуждений вытекает, что чисел n с требуемым свойством бесконечно много. В самом деле, пусть это не так и N – максимальное из чисел, удовлетворяющих условию задачи. Возьмем простое число p вида $4a+1$ такое, что $p>\max\{20, N^2+1\}$. Как мы доказали, для этого p найдется натуральное n, удовлетворяющее условию и такое, что $n^2+1 \vdots p$. Тогда $n^2+1 \geq p > N^2+1$, откуда $n>N$ – противоречие.

4 (Д.Бабичев). *Ответ*: $f(x)=x$ и $f(x)=\frac{1}{x}$.

Пусть $w=x=y=z=a>0$. Тогда из исходного уравнения получаем $\frac{2(f(a))^2}{2f(a^2)}=\frac{a^2+a^2}{a^2+a^2}=1$, откуда для всех $a>0$ выполнено

$$(f(a))^2=f(a^2), \tag{1}$$

в частности $(f(1))^2=f(1)$ и $f(1)=1$ (так как $f(1)\neq 0$).

Далее, положим $w=x=a>0$, $y=1$, $z=a^2$: $\frac{2(f(a))^2}{f(a^4)+f(1)}=\frac{2a^2}{a^4+1}$. Согласно (1), $f(a^4)=(f(a^2))^2=(f(a))^4$, откуда $\frac{2(f(a))^2}{(f(a))^4+1}=\frac{2a^2}{a^4+1}$. Положив $t=f(a)$, имеем

$$\frac{2t^2}{t^4+1}=\frac{2a^2}{a^4+1} \Leftrightarrow t^2a^4+t^2=a^2t^4+a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a^2t^2-1)(a^2-t^2)=0.$$

Так как $a>0$ и $t>0$, отсюда следует, что для каждого $a>0$ выполнено $t=f(a)=a$ или $t=f(a)=\frac{1}{a}$. Предположим, что нашлись положительные a и b, не равные 1 и такие, что $f(a)=a$, $f(b)=\frac{1}{b}$. Тогда положив $w=a$, $x=b$, $y=ab$, $z=1$, получим (с учетом (1))

$$\frac{a^2+\frac{1}{b^2}}{1+(f(ab))^2}=\frac{a^2+b^2}{1+a^2b^2}. \tag{2}$$

Если $f(ab)=ab$, то из (2) следует

$$\frac{a^2+\frac{1}{b^2}}{1+a^2b^2}=\frac{a^2+b^2}{1+a^2b^2} \Leftrightarrow \frac{1}{b^2}=b^2 \Rightarrow b^4=1 \Rightarrow b=1,$$

что противоречит предположению.

Если же $f(ab)=\frac{1}{ab}$, то из (2) следует

$$\frac{a^2+\frac{1}{b^2}}{1+\frac{1}{a^2b^2}}=\frac{a^2+b^2}{1+a^2b^2} \Rightarrow \frac{a^2b^2}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{1+a^2b^2} \Rightarrow a^4b^2+a^2=$$

$$=a^2+b^2 \Rightarrow b=0 \text{ или } a^4=1,$$

что противоречит предположению.

Таким образом, либо для всех $x>0$ выполнено $f(x)=x$, либо для всех $x>0$ выполнено $f(x)=\frac{1}{x}$. Непосредственно подстановка показывает, что функции $f(x)=x$ и $f(x)=\frac{1}{x}$ подходят.

5 (В.Волков). *Ответ*: 2^{k-n}.

Назовем последовательность из k шагов, меняющую состояние каждой из лампочек 1, 2, …, n нечетное количество раз (и не меняющую состояние лампочек $n+1$, …, $2n$ ни разу), последовательностью I типа; по условию, число таких последовательностей равно M. Назовем последовательность из k шагов, меняющую состояние каждой из лампочек 1, 2, …, n нечетное количество раз, а лампочек $n+1$, …, $2n$ – четное количество раз, последовательностью II типа; по условию, число таких последовательностей равно N. Разобьем лампочки на n пар: в i-ю пару объединим i-ю и $(n+i)$-ю лампочки, $i=1, 2, \ldots, n$. Если на каком-то шаге одна из лампочек некоторой пары изменила состояние, будем говорить, что пара изменила состояние. Рассмотрим последовательность II типа. На каждом из k шагов меняет состояние ровно одна из n пар, причем каждая пара должна изменить состояние нечетное количество раз. Если объявить теперь пары «новыми» лампочками с номерами 1, 2, …, n, то из последовательности II типа получаем соответствующую последовательность I типа.

Докажем, что при таком соответствии каждая последовательность I типа поставлена в соответствие ровно 2^{n-k} последовательностям II типа, – отсюда сразу последует, что $N/M=2^{k-n}$. Зафиксируем последовательность I типа, пусть в ней пара с номером i меняла состояние в $2l_i+1$ шагах ($i\in\{1,2,\ldots,n\}$). Чтобы восстановить последовательность II типа, надо эти $2l_i+1$ шагов разбить на 2 множества – шаги, на которых изменяет состояние i-я лампочка, и шаги, на которых изменяет состояние $(n+i)$-я лампочка, причем в первом множестве должно быть нечетное количество шагов. Всего вариантов такого разбиения 2^{2l_i} (это число равно числу способов разбить множество из $2l_i+1$ элементов на два подмножества, поскольку ровно в одном из подмножеств нечетное число элементов). Такое рассуждение о восстановлении последовательности II типа проведем независимо для $i=1, 2, \ldots, n$. В результате получим, что данная последовательность I типа сопоставлена $2^{2l_1}\cdot 2^{2l_2}\cdot\ldots\cdot 2^{2l_n}=2^{2l_1+2l_2+\ldots+2l_n}$ последовательностям II типа. Заметим, что $(2l_1+1)+(2l_2+1)+\ldots+(2l_n+1)=k$ – общее число ходов, поэтому $2l_1+2l_2+\ldots+2l_n=k-n$, что и требовалось.

Публикацию подготовили
Н.Агаханов, П.Кожевников,
Д.Терёшин, Д.Фон-Дер-Флаасс

XXXIX Международная физическая олимпиада

В этом году во Вьетнам на Международную олимпиаду по физике прибыли 376 школьников из 82 стран мира.

В сборную команду России вошли:

Зеленеев Андрей – Киров, физико-математический лицей, учителя-наставники Заграй Владимир Сергеевич, Гырдымов Михаил Владимирович,

Буслаев Павел – Санкт-Петербург, «Физико-техническая школа» при Физико-техническом институте им. А.Ф.Иоффе, учителя-наставники Савельев Артем Владимирович, Иванов Михаил Георгиевич,

Матвеев Харитон – Москва, лицей 1581, учителя-наставники Бучнева Лидия Викторовна, Зильберман Александр Рафаилович, Киселев Александр Михайлович,

Самойлов Леонид – Саратов, физико-технический лицей 1, учителя-наставники Правдина Людмила Вениаминовна, Татарков Гарри Николаевич,

Мельников Игорь – Челябинск, лицей 31, учителя-наставники Иоголевич Иван Александрович, Карманов Максим Леонидович, Лисицын Сергей Григорьевич.

Нашу команду возглавили профессор Московского физико-технического института (МФТИ) Станислав Миронович Козел и доцент МФТИ Валерий Павлович Слободянин. В составе российской делегации в качестве наблюдателей были доцент МФТИ Дмитрий Анатольевич Александров и Заслуженный учитель России Иван Александрович Иоголевич. Участие в олимпиаде наблюдателей состоялось благодаря поддержке Русского фонда содействия образованию и науке и Попечительского совета лицея 31 города Челябинска.

Подготовка команды уже многие годы начинается более чем за год и проводится по стандартной схеме на базе Московского физико-технического института.

На олимпиаде участникам были предложены три теоретические задачи и два экспериментальных задания. Каждая теоретическая задача оценивалась из 10 баллов, а экспериментальные – из 9,5 и 10,5 баллов. Таким образом, максимальное количество баллов, которое мог набрать каждый из участников олимпиады, равнялось 50.

Сравнительные результаты выступления на олимпиаде 16 лучших команд таковы:

№	Страна	Количество медалей			Сумма
		золото	серебро	бронза	баллов
1	Китай	5			197,5
2	Тайвань	5			185,01
3	Южная Корея	4	1		176,31
4	Вьетнам	4	1		169,34
5	Индия	4	1		168,55
6	Таиланд	3	2		165,45
7	США	3	2		163,38
8	Россия	3	1	1	155,60
9	Индонезия	2	2	1	150,31
10	Франция		4	1	144,55
11	Канада	1	1	3	137,55
12	Сингапур	1	3	1	136,21
13	Румыния		3	2	136,00
14	Германия	1	1	3	131,80
15	Гонконг	1		4	128,33
16	Иран			5	117,38

Из таблицы видно, что, как и в прошлые годы, лидирует группа стран из Юго-Восточной Азии. Команды этих стран устойчиво добиваются высоких результатов в Международных олимпиадах и по другим предметам. Это может означать лишь одно: в этих странах уделяется исключительное внимание образованию и, в частности, работе с одаренными детьми – интеллектуальным потенциалом нации.

Члены сборной команды России показали следующие результаты:

Участник	Теория	Эксперимент	Сумма баллов	Медаль
Самойлов Леонид	17,70	18,20	35,90	золото
Матвеев Харитон	17,80	16,45	34,25	золото
Буслаев Павел	15,65	17,45	33,10	золото
Мельников Игорь	9,80	18,20	28,00	серебро
Зеленеев Андрей	8,00	16,35	24,35	бронза

Следует отметить, что объем заданий олимпиады от года к году возрастает, причем этот рост связан в основном с увеличением расчетной части. В этом году на олимпиаде перегруженность вычислениями заданий теоретического тура превысила все разумные пределы. Это привело к тому, что большинство участников получили за теорию менее трети от максимального количества баллов.

На экспериментальном туре участникам было предложено освоить дифференциальный термометрический метод, широко используемый в технике прецизионных измерений.

В первой части эксперимента дифференциальный термометрический метод применялся для определения температуры затвердевания чистого кристаллического вещества, предоставленного в количестве 20 мг. В случае такой малой массы вещества обычный метод дает слишком большую ошибку. При выполнении задания необходимо было провести несколько предварительных экспериментов и построить ряд графиков для определения параметров установки и оценки погрешностей. Во время тренировочных сборов наши ребята хорошо подготовились к заданиям такого рода. За первую часть эксперимента они набрали 97% возможных баллов. Это чрезвычайно высокий результат.

Во второй части экспериментального задания участники исследовали работу солнечного элемента и с помощью дифференциального термометрического метода определяли его коэффициент полезного действия. При выполнении этой части задания участникам нужно было продемонстрировать знание законов термодинамики и умение обрабатывать результаты эксперимента. С помощью графиков требовалось доказать, что теоретические формулы правильно описывают работу установки, и выполнить ряд сложных фотометрических измерений. В целом наши ребята успешно справились и с этой частью задания. Однако к концу работы ощущалась нехватка времени, и последние пункты задания были выполнены некоторыми членами нашей команды наспех. В итоге во второй части экспериментального задания наши ребята набрали 77% возможных баллов. Если учесть сложность экспериментального задания и его объем, то это неплохой результат. К сожалению, часть баллов, как и на прежних олимпиадах, была потеряна из-за небрежного исполнения графиков, неаккуратной записи результатов измерений и т. д.

В целом за эксперимент наша команда набрала 87% возможных баллов и показала третий результат в мире, опередив в этом виде соревнования Китай. За всю историю Международных олимпиад (а наша команда принимала участие в 38 таких олимпиадах) впервые результаты выполнения теоретического тура оказались значительно ниже результатов экспериментального тура. Такая же картина наблюдалась и у большинства других команд.

Ниже приводятся условия задач теоретического тура соревнований.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

Задача 1. Водяная ступа для шлифовки риса

Рис является главным национальным продуктом для подавляющего большинства людей во Вьетнаме. Чтобы получить белый рис, от него необходимо отделить сначала его кожуру («обдирка»), затем отруби («шлифовка»). Горные регионы северного Вьетнама богаты водными струями, и люди, живущие в этих регионах, используют водяные устройства (ступы) для шлифовки риса.

Водяная ступа, показанная на рисунке 1, состоит из собственно ступы (ступки), рычага и дубинки. Ступа – это просто деревянная емкость для риса. Рычаг, который представляет собой деревянный ствол с концами разной длины, может вращаться вокруг некоторой горизонтальной оси. Дубинка (пестик) прикреплена перпендикулярно к рычагу с его короткой стороны; длина дубинки такова, что она может прикасаться к рису в ступе, когда рычаг лежит горизонтально. На длинном конце рычага вырезано углубление, играющее роль сосуда для воды. Форма этого сосуда очень важна для действия устройства.

Ступа может работать в двух режимах: в рабочем и в мертвом.

В рабочем режиме ступа совершает некоторый рабочий цикл, проиллюстрированный на рисунке 2.

a) В начальный момент сосуд пуст, дубинка покоится в ступке. Вода начинает течь в сосуд с маленькой скоростью , но рычаг некоторое время остается в горизонтальном положении.

Рис. 1

b) В некоторый момент количество воды в сосуде оказывается достаточным для поднятия рычага. Вода перетекает к более отдаленной стороне сосуда, наклоняя рычаг все быстрее. Вода начинает вытекать при угле $\alpha = \alpha_1$.

c) Угол α продолжает увеличиваться, вода продолжает вытекать. При некотором значении угла наклона $\alpha = \beta$ суммарный вращающий момент становится равным нулю.

d) Угол α продолжает расти, вода продолжает вытекать до тех пор, пока сосуд не опорожнится при угле $\alpha = \alpha_2$.

e) Угол α продолжает расти по инерции. Благодаря форме сосуда, втекающая вода сразу вытекает из него. Движение рычага по инерции продолжается до тех пор, пока угол α не достигает максимального значения α_0 .

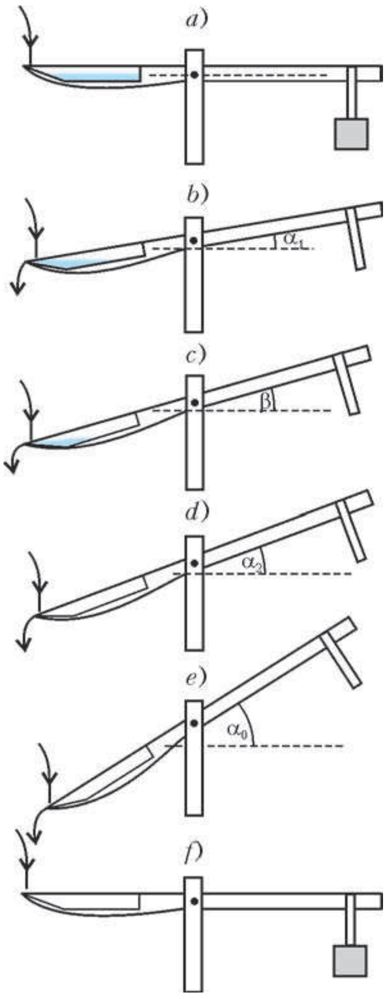


Рис. 2

f) Когда сосуд пуст, вес рычага возвращает его назад в начальное горизонтальное положение. Дубинка совершает тяжелый удар по ступке (с рисом внутри него), и начинается новый цикл.

Шлифовка риса происходит благодаря энергии, передаваемой от дубинки к рису в стадии f). Если по какой-то причине дубинка не может прикасаться к дну ступки, говорят, что устройство не работает.

Мертвый режим – это режим с поднятым рычагом. В стадии c) рабочего цикла, когда угол наклона рычага α увеличивается, количество воды в сосуде уменьшается. В определенный момент времени количество воды становится достоточным для уравновешивания рычага. Значение угла наклона в этот момент обозначено β. Если рычаг расположен под углом β и его начальная угловая скорость равна нулю, он останется навсегда в этом положении. Это и есть мертвый режим с поднятым рычагом. Устойчивость этого положения рычага зависит от скорости Φ натекания воды в сосуд. Если Φ превышает некоторое значение Φ_2, стабилен только мертвый режим и ступа переходит в него из любого начального положения, т.е. не может перейти в рабочий режим. Другими словами, Φ_2 является минимальной скоростью течения, при превышении которой устройство перестает работать.

Основные размеры водной рисошлифующей ступки приведены на рисунке 3. Масса рычага (с дубинкой, но без воды) $M = 30$ кг, центр масс рычага находится в точке G. Рычаг вращается вокруг оси T, момент инерции рычага вокруг этой оси $I = 12\ кг \cdot м^2$. Когда в сосуде есть вода, ее масса обозна-

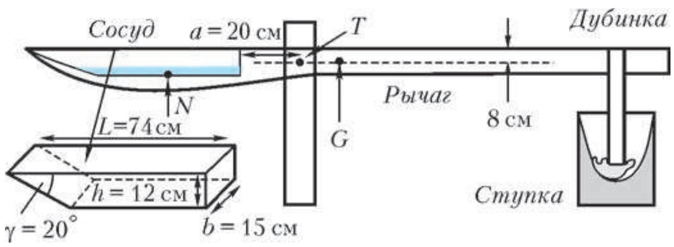


Рис. 3

чается m, центр масс воды – точкой N. Угол наклона рычага к горизонту обозначается α.

Трением в оси вращения и силой, возникающей из-за натекания воды в сосуд, пренебрегайте. Считайте, что поверхность воды всегда горизонтальна.

1. Параметры устройства

В начальный момент сосуд пуст и рычаг расположен горизонтально. Затем вода втекает в сосуд до тех пор, пока рычаг не начинает поворачиваться. Масса воды в сосуде в этот момент $m = 1{,}0$ кг.

1.1. Определите расстояние от центра масс G рычага до оси вращения T. Известно, что линия GT горизонтальна, когда сосуд пуст.

1.2. Вода начинает вытекать из сосуда, когда угол между рычагом и горизонтальной осью достигает некоторого значения α_1. Вода полностью выливается из сосуда, когда значение этого угла становится равным α_2. Вычислите значения углов α_1 и α_2.

1.3. Пусть $\mu(\alpha)$ – суммарный вращающийся момент (относительно оси T), создаваемый весом рычага и воды в сосуде. При некотором угле $\alpha = \beta$ этот момент становится равным нулю $\mu(\alpha) = 0$. Рассчитайте значения угла β и массы m_1 воды в сосуде в этот момент.

2. Параметры рабочего режима

Пусть вода втекает в сосуд с малой постоянной скоростью. Количество воды, втекающей в сосуд за время движения рычага, пренебрежимо мало. В этой части задачи пренебрегайте изменением момента инерции системы в рабочем цикле.

2.1. Нарисуйте схематический график зависимости вращающего момента μ от угла α в течение рабочего цикла. Приведите явные значения $\mu(\alpha)$ при углах α_1, α_2, и $\alpha = 0$.

2.2. Используя график, нарисованный в пункте 2.1, дайте геометрическую интерпретацию значений общей работы W_t, произведенной моментом сил тяжести, и работы W_p, совершенной дубинкой над рисом, за один цикл.

2.3. С помощью графика зависимости $\mu(\alpha)$ оцените максимальный угол отклонения α_0 и работу W_p (предполагая, что кинетическая энергия воды, текущей в сосуд и из него, пренебрежимо мала). Для облегчения расчетов можете заменить кривые ломанными линиями.

3. Мертвый режим

Пусть вода втекает в сосуд с постоянной скоростью натекания (масса в единицу времени) Φ. В данной части задачи необходимо учитывать количество воды, втекающей в сосуд при движении рычага.

3.1. Будем считать сначала, что сосуд всегда наполнен водой (которая переливается через его край).

3.1.1. Нарисуйте примерный график зависимости вращающего момента μ от угла α в окрестности $\alpha = \beta$. К какому виду равновесия относится положение рычага при $\alpha = \beta$?

3.1.2. Найдите аналитическую формулу для вращающего момента как функции $\Delta\alpha$, когда $\alpha = \beta + \Delta\alpha$, причем $\Delta\alpha$ мало.

3.1.3. Запишите дифференциальное уравнение движения рычага, который движется с нулевой начальной скоростью от начального положения $\alpha = \beta + \Delta\alpha$ ($\Delta\alpha$ мало). Покажите, что это движение с хорошей точностью является гармоническими колебаниями. Рассчитайте их период τ.

3.2. Пусть теперь при заданной скорости натекания Φ сосуд наполнен водой все время только в том случае, когда рычаг движется достаточно медленно. Тогда амплитуда гармонических колебаний зависит от Φ. Определите значение Φ_1 скорости натекания (в кг/с) такое, чтобы рычаг мог совершать гармонические колебания с амплитудой 1°.

3.3. Пусть скорость Φ велика настолько, что при колебательном движении рычага, когда угол наклона изменяется от α_2 до α_1, сосуд всегда остается наполненным водой. В этом случае устройство не может действовать в рабочем режиме. Допуская, что движение рычага является гармоническими колебаниями, оцените минимальную скорость течения Φ_2, при которой устройство перестает функционировать в рабочем режиме.

Задача 2. Черенковское излучение и кольцевой черенковский детектор

Свет распространяется в вакууме со скоростью c. Не существует частиц, движущихся со скоростью больше c. Однако в прозрачной среде частица может двигаться со скоростью v, превышающей скорость света в этой среде c/n, где n – показатель преломления среды. Эксперимент (Черенков, 1934) и теория (Тамм и Франк, 1937) показали, что заряженная частица, движущаяся со скоростью v в прозрачной среде с показателем преломления n, удовлетворяющим условию $v > c/n$, излучает свет, названный черенковским излучением, в направлениях, образующих с ее траекторией угол $\theta = \arccos\dfrac{1}{\beta n}$, где $\beta = \dfrac{v}{c}$.

1. Чтобы объяснить этот эффект, рассмотрим частицу, движущуюся с постоянной скоростью $v > c/n$ по прямой линии (рис.4). Она проходит точку A в момент времени 0 и точку B в момент t_1. Так как задача симметрична относительно вращения вокруг оси AB, достаточно рассмотреть световые лучи в любой плоскости, содержащей AB. В любой точке C между A и B частица излучает сферическую световую волну, распространяющуюся со скоростью c/n. Назовем волновым фронтом в заданный момент времени t огибающую всех таких сфер в этот момент.

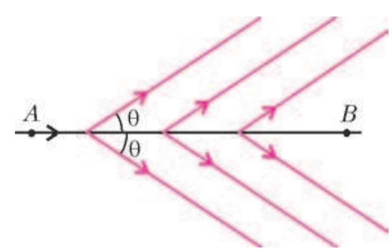


Рис. 4

1.1. Определите волновой фронт в момент времени t_1 и начертите линию его сечения плоскостью, содержащей траекторию частицы.

1.2. Выразите угол φ между указанной линией и траекторией частицы через n и β.

2. Рассмотрим пучок частиц, движущихся вдоль прямой линии IS, пересекающей в точке S выпуклое сферическое зеркало с фокусным расстоянием f и центром C. Скорость пучка $v > c/n$ такова, что угол θ мал. Отрезок SC образует с линией SI малый угол α. Излучение пучка частиц создает кольцевое изображение в фокальной плоскости зеркала. Поясните это явление с помощью рисунка. Определите положение центра кольца и его радиус r.

Установка, описанная выше, используется в кольцевых черенковских детекторах (КЧД), а среда, через которую частицы проходят, называется излучателем.

Примечание: поскольку углы α и θ малы, во всех пунктах данной задачи соответствующими членами второго и высших порядков малости можно пренебречь.

3. Рассмотрим пучок частиц с известным импульсом $P = 10{,}0$ ГэВ/c, состоящий из частиц трех типов: протонов, каонов и пионов с массами покоя $M_p = 0{,}94$ ГэВ/c^2, $M_\text{к} = 0{,}50$ ГэВ/c^2 и $M_\pi = 0{,}14$ ГэВ/c^2 соответственно. Напомним, что величины Pc и Mc^2 имеют размерность энергии, 1 эВ – энергия, приобретаемая электроном, ускоренным разностью потенциалов 1 В, 1 ГэВ = 10^9 эВ, 1 МэВ = 10^6 эВ.

Пучок частиц движется в воздухе, находящемся под давлением p, который играет роль излучателя. Показатель преломления воздуха выражается через его давление p, измеренное в атмосферах, с помощью формулы $n = 1 + ap$, где $a = 2{,}7 \cdot 10^{-4}$ атм$^{-1}$.

3.1. Рассчитайте для каждого из трех типов частиц минимальное значение $p_{\min}$ атмосферного давления, при котором они начинают давать черенковское излучение.

3.2. Рассчитайте давление $p_{1/2}$, при котором радиус кольцевого изображения, порожденного излучением каонов, равен половине радиуса кольцевого изображения, порожденного излучением пионов, а также значения $\theta_\text{к}$ и θ_π для этого случая. Можно ли при таком давлении наблюдать кольцевое изображение, порожденное излучением протонов?

4. Предположим теперь, что пучок не является полностью монохроматическим: импульс частиц распределен в интервале с центром в точке 10 ГэВ/c, имеющем полуширину ΔP (на половине высоты). Это приводит к уширению кольцевого изображения. Соответствующее уширение распределения по θ характеризуется полушириной $\Delta\theta$ (на половине высоты).

4.1. Вычислите $\Delta\theta_\text{к}/\Delta P$ и $\Delta\theta_\pi/\Delta P$, т.е. значение $\Delta\theta/\Delta P$ для пионов и каонов.

4.2. Два кольцевых изображения, созданных излучением пионов и каонов, можно хорошо различить, если угловое расстояние $\theta_\pi - \theta_\text{к}$ превышает сумму полуширин $\Delta\theta = \Delta\theta_\text{к} + \Delta\theta_\pi$ более чем в 10 раз, т.е. $\theta_\pi - \theta_\text{к} > 10\Delta\theta$. Рассчитайте максимальное значение ΔP, при котором два изображения еще можно хорошо различить.

5. Черенков впервые открыл эффект, ныне носящий его имя, наблюдая за сосудом с водой, расположенным вблизи радиоактивного источника. Он увидел, что вода в сосуде светилась.

5.1. Найдите минимальное значение кинетической энергии $T_{\min}$ частицы с массой покоя M, движущейся в воде, при котором появляется черенковское излучение. Показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

5.2. Радиоактивный источник, использованный Черенковым, излучал α-частицы (ядра гелия), имеющие массу покоя $M_\alpha = 3{,}8$ ГэВ/c^2, и β-частицы (электроны), имеющие массу покоя $M_e = 0{,}51$ ГэВ/c^2. Рассчитайте численные значения $T_{\min}$ для α- и β-частиц.

Зная, что кинетическая энергия частиц, излучаемых радиоактивными источниками, не превышает нескольких МэВ, определите, какие частицы порождали излучение, наблюдавшееся Черенковым.

6. В предыдущих пунктах задачи не учитывалась зависимость черенковского излучения от длины волны λ. Учтем теперь тот факт, что черенковское излучение частицы имеет широкий непрерывный спектр, включающий видимую область (длины волн от 0,4 мкм до 0,8 мкм). Известно также, что при возрастании λ в пределах этой области показатель преломления излучателя линейно уменьшается на 2% от величины $(n - 1)$.

6.1. Рассмотрим пучок пионов с заданным импульсом 10,0 ГэВ/c, движущийся в воздухе, находящемся под давлением 6 атм. Определите разность углов $\delta\theta$, соответствующих краям видимой области.

6.2. Качественно исследуйте влияние дисперсии (т.е. зависимости n от λ) на изображение кольца, созданное излучением пучка пионов. Импульсы пионов распределены в интервале с центром в точке P = 10 ГэВ/c, имеющем полуширину ΔP = 0,3 ГэВ/c (на половине высоты).

6.2.1. Рассчитайте уширение, обусловленное дисперсией (изменением показателя преломления), а также уширение, вызываемое немонохроматичностью пучка (разбросом импульсов частиц).

6.2.2. Опишите, как изменяется цвет кольца при переходе от его внутреннего края к внешнему.

Задача 3. Изменение температуры воздуха с высотой, атмосферная стабильность и загрязнение

Вертикальное движение воздуха определяет многие атмосферные процессы, например образование облаков и осадков, а также рассеяние воздушных загрязнений. Если атмосфера стабильна, вертикальное движение ограничено и воздушные загрязнения имеют тенденцию не рассеиваться, а собираться над областью, в которой находятся источники загрязнения. В то же время, в нестабильной атмосфере вертикальное движение воздуха способствует вертикальному распространению загрязнений. Таким образом, концентрация загрязнений зависит не только от активности их источников, но и от стабильности атмосферы.

Будем определять атмосферную стабильность с помощью модели воздушного пакета, принимаемой в метеорологии, и сравнивать температуру такого пакета, поднимающегося или опускающегося адиабатически в атмосфере, с температурой окружающего воздуха. Мы увидим, что во многих случаях воздушный пакет, содержащий воздушные загрязнения и поднимающийся от земли, останавливается на некоторой высоте, называемой высотой смешивания. Чем больше высота смешивания, тем меньше концентрация воздушных загрязнений. В данной задаче предлагается оценить высоту смешивания и концентрацию угарного газа (CO), выбрасываемого мотоциклами в многолюдной части Ханоя, для примера в утренний час пик, когда на уровнях выше 119 м вертикальное перемешивание ограничено из-за температурной инверсии (температура воздуха увеличивается с высотой).

Будем рассматривать воздух как идеальный двухатомный газ с молярной массой М = 29 г/моль. Квазистатический адиабатический процесс подчиняется уравнению $pV^\gamma = \text{const}$, где $\gamma = C_p/C_V$ – отношение молярных теплоемкостей газа в изобарическом и изохорическом процессах.

Вы можете использовать следующие данные при необходимости: универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К), атмосферное давление у земной поверхности p_0 = 101,3 кПа, ускорение свободного падения $g = 9{,}81$ м/c^2, молярная теплоемкость воздуха при постоянном давлении $C_p = \frac{7}{2}R$, молярная теплоемкость воздуха при постоянном объеме $C_V = \frac{5}{2}R$.

Математические подсказки:

а) $\int \frac{dx}{A + Bx} = \frac{1}{B}\int \frac{d(A + Bx)}{A + Bx} = \frac{1}{B}\ln(A + Bx)$;

b) решение дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} + Ax = B$ (A и B – константы) есть $x(t) = x_1(t) + \frac{B}{A}$, где $x_1(t)$ – решение однородного дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} + Ax = 0$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

1. Изменение давления с высотой

1.1. Предположим, что температура атмосферы постоянна по высоте и равна T_0. Напишите формулу, выражающую атмосферное давление p как функцию высоты z.

1.2. Допустим теперь, что температура атмосферы меняется с высотой по закону $T(z) = T(0) - \Lambda z$, где Λ – константа, называемая скоростью изменения температуры атмосферы с высотой (вертикальный градиент температуры равен $-\Lambda$).

1.2.1. Выразите атмосферное давление p в виде функции высоты z.

1.2.2. Конвекция называется свободной, если она происходит вследствие того, что плотность верхних слоев больше, чем нижних. При каких значениях Λ возникает свободная конвекция?

2. Изменение температуры воздушного пакета при вертикальном движении

Воздушный пакет представляет собой некоторый объем воздуха достаточного размера (шириной порядка нескольких метров), так что его можно рассматривать как самостоятельный термодинамический объект, но все же достаточно малый – чтобы температуру всех его точек можно было считать одинаковой. Вертикальное движение воздушного пакета будем рассматривать как квазистатический адиабатический процесс, т.е. теплообменом с окружающим воздухом можно пренебречь. Если воздушный пакет поднимается в атмосфере, он расширяется и охлаждается. Напротив, если он опускается, растущее внешнее давление сжимает воздух внутри пакета, в результате его температура увеличивается.

Так как размер пакета невелик, давление воздуха в разных его точках имеет одно и то же значение $p(z)$, где z – высота центра пакета. Температура также предполагается постоянной по всему пакету и равной $T_p(z)$; эта температура в общем случае отличается от температуры окружающего воздуха $T(z)$. В частях 2.1 и 2.2 мы не будем делать никаких предположений относительно вида зависимости $T(z)$.

2.1. Изменение температуры пакета T_p с высотой характеризуется величиной $\frac{dT_p}{dz} = -G$. Выведите выражение для $G(T, T_p)$.

2.2. Рассмотрим особое состояние атмосферы, при котором на любой высоте z температура атмосферы равна температуре пакета: $T(z) = T_p(z)$. Обозначим через Γ значение G при $T = T_p$, т.е. $\Gamma = -\frac{dT_p}{dz}$ при $T = T_p$. Величина Γ называется скоростью изменения температуры в сухой адиабатической атмосфере.

2.2.1. Выведите выражение для Γ.

2.2.2. Вычислите численное значение Γ.

2.2.3. Выведите выражение для температуры атмосферы $T(z)$ как функции высоты.

2.3. Предположим, что температура атмосферы изменяется с высотой по закону $T(z) = T(0) - \Lambda z$, где Λ – константа. Получите зависимость температуры пакета от высоты, т.е. $T_p(z)$.

2.4. Напишите приближенное выражение для $T_p(z)$, если $|\Lambda z| \ll T(0)$ и $T(0) \approx T_p(0)$.

3. Стабильность атмосферы

В этой части мы будем предполагать, что T изменяется с высотой по линейному закону.

3.1. Рассмотрим воздушный пакет, находящийся в начальный момент времени в равновесии с окружающим воздухом на высоте z_0, т.е. имеющий ту же температуру $T(z_0)$, что и окружающий воздух. Если пакет незначительно смещается вверх или вниз (например, при атмосферном возмущении), возможен один из следующих трех случаев:

пакет возвращается на первоначальную высоту z_0, равновесие пакета устойчиво, в этом случае говорят, что атмосфера стабильна;

пакет продолжает двигаться в направлении первоначального смещения, равновесие пакета неустойчиво, атмосфера нестабильна;

пакет остается в его новом положении, равновесие пакета безразлично, атмосфера нейтральна.

Каким условиям должно удовлетворять значение Λ, чтобы атмосфера была: стабильной, нестабильной, нейтральной?

3.2. Пусть температура пакета на земле $T_p(0)$ выше, чем температура $T(0)$ окружающего воздуха. Выталкивающая сила поднимает пакет. Выведите выражение для максимальной высоты, которой пакет может достигать в случае стабильной атмосферы, в зависимости от Λ и Γ.

4. Высота смешивания

4.1. Таблица показывает температуру воздуха, записанную шаром-зондом в 7 часов утра в ноябрьский день в Ханое. Зависимость температуры от высоты внутри диапазонов $0 < z < 96$ м, $96 \text{ м} < z < 119$ м, $119 \text{ м} < z < 215$ м может быть приближенно описана формулой $T(z) = T(0) - \Lambda z$, где каждому диапазону соответствует свое значение Λ.

Таблица

Высота, м	5	60	64	69	75	81	90	96	102
Температура, °C	21,5	20,6	20,5	20,5	20,4	20,3	20,2	20,1	20,1
Высота, м	109	113	119	128	136	145	153	159	168
Температура, °C	20,1	20,1	20,1	20,2	20,3	20,4	20,5	20,6	20,8
Высота, м	178	189	202	215	225	234	246	257	
Температура, °C	21,0	21,5	21,8	22,0	22,1	22,2	22,3	22,3	

Рассмотрим воздушный пакет с температурой $T_p = 22$ °C, поднимающийся от земли. На основании данных таблицы вычислите температуры пакета на высотах 96 м и 119 м, используя описанное выше линейное приближение.

4.2. Какой максимальной высоты H может достичь пакет? Найдите температуру T_p пакета на этой высоте. Высота H называется высотой смешивания. Воздушные загрязнения, выбрасываемые в атмосферу с земли, могут смешиваться с атмосферным воздухом (например из-за ветра, турбулентности и т.д.) и остаются во взвешенном состоянии ниже высоты H.

5. Оценка загрязнения угарным газом (CO) в течение утреннего часа пик в Ханое

Густо населенная часть Ханоя может быть аппроксимирована прямоугольником со сторонами L и W, как показано на рисунке 5 (сторона L идет вдоль Красной реки). По оценке, в течение утреннего часа пик, начинающегося с 7:00 утра, на дорогах находится $8 \cdot 10^5$ мотоциклов, каждый из которых пробегает в среднем 5 км и выпускает 12 г CO на километр.

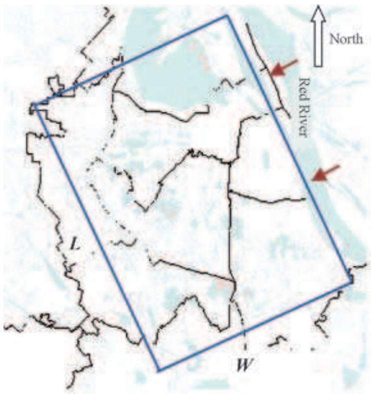


Рис. 5

Будем считать, что это количество CO-загрязнений выпускается равномерно по времени в течение часа пик; общую массу загрязнений, выбрасываемую в единицу времени, обозначим M. В то же время, чистый северо-восточный ветер, дующий перпендикулярно Красной реке (стороне L прямоугольника) со скоростью u, проходит через город с такой же скоростью и уносит часть загрязненного воздуха из городской атмосферы.

Мы будем использовать следующее грубое приближение:

• CO быстро распространяется по всему объему зоны смешивания над густозаселенной частью Ханоя, так что концентрация $C(t)$ угарного газа в момент времени t можно считать одинаковой по всему прямоугольному параллелепипеду со сторонами L, W и H;

• приносимый ветром воздух является чистым, а загрязненный воздух не может покидать параллелепипед через стороны, параллельные ветру;

• до 7:00 утра концентрация CO в атмосфере пренебрежимо мала.

5.1. Получите дифференциальное уравнение для зависимости концентрации $C(t)$ CO-загрязнений от времени.

5.2. Решите это уравнение и запишите выражение для $C(t)$.

5.3. Рассчитайте численное значение $C(t)$ в 8:00 утра, если $L = 15$ км, $W = 8$ км, $u = 1$ м/с.

Публикацию подготовили С.Козел, В.Слободянин

Московская студенческая олимпиада по физике

В мае 2008 года в Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э.Баумана прошла очередная (двенадцатая) Московская городская олимпиада по физике среди студентов технических вузов.

В командном зачете первое место заняла команда Российского государственного университета (РГУ) нефти и газа им. И.М.Губкина, набравшая 128 баллов, второе место заняла команда Московского института стали и сплавов (112 баллов), третье место – команда Московского института электронной техники (МИЭТ) (108 баллов).

В личном зачете первое место поделили Доан Дык Ня (РГУ нефти и газа им. И.М.Губкина) и Дмитрий Бундин (МИЭТ), набравшие по 33 балла, второе место завоевал Дмитрий Рухлов (МИЭТ, 30 баллов), третье место – Игорь Прудников (МГТУ им. Н.Э.Баумана, 29 баллов).

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Определите, произойдет ли столкновение при движении двух автомобилей по шоссе, если первый автомобиль резко затормозит с ускорением a, время реакции водителя второго автомобиля τ, ускорение торможения второго автомобиля на 20% больше, чем у первого. Начальная скорость автомобилей $v = 8a\tau$, а начальная дистанция между ними $L = 11a\tau^2/4$.

2. Маятник представляет из себя нить длиной l, к нижнему концу которой привязан стержень. Точка соединения находится от центра масс стержня на расстоянии $R \ll l$. Маятник совершает малые колебания таким образом, что угол отклонения от вертикали у стержня всегда вдвое больше, чем у нити. Определите длину стержня.

3. Орбитальная околоземная станция находится на низкой круговой орбите, имеет вид однородного стержня длиной 0,1 радиуса Земли и ориентирована все время к ее центру. Определите максимальный вес человека массой m, находящегося внутри станции, а также расстояние от центра масс станции до точки, в которой сила растяжения корпуса станции максимальна.

4. Два невесомых цилиндра радиусами r и R, оси которых горизонтальны и параллельны между собой, находятся в равновесии на наклонной плоскости, если на них положена доска массой m. Угол между наклонной плоскостью и горизонтом α, проскальзывание отсутствует. Определите расстояние между осями цилиндров.

5. Две одинаковые тепловые машины работают с одноатомным газом по циклу, состоящему из двух изохор, в которых $V_2/V_1 = 2^{3/2}$, и двух адиабат. Температура в начале изохорного охлаждения T_2, а в начале изохорного нагрева T_1, при этом $T_2/T_1 = 5$. Работа осуществляется таким образом, что, когда в одной машине идет изохорное охлаждение, она отдает тепло другой машине, в которой в этот момент идет изохорный нагрев. Определите, на сколько повышается КПД за счет процесса обмена теплом, если он протекает до выравнивания температур.

6. Работа по перемещению заряда q из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии l от центра металлической сферы радиусом R, равна A, если сфера изолирована. Определите работу, которую необходимо затратить, чтобы удалить заряд на бесконечность, если заряд сначала внесли при заземленной сфере, а затем заземляющую перемычку удалили.

7. Перемычка массой m с сопротивлением R лежит на двух горизонтальных параллельных рельсах, расстояние между которыми a. К рельсам на время t подключили источник с ЭДС $\mathcal{E}$. Какое вертикально направленное магнитное поле B необходимо создать, чтобы скорость перемычки после отключения источника достигла максимального значения? Считать, что $\exp(1,26) = 3,52$.

8. Зонная пластинка с закрытой первой зоной Френеля помещена в отверстие, радиус которого равен радиусу пятой зоны Френеля, и освещена светом интенсивностью I_0. Определите интенсивность света в точке наблюдения. Что изменится, если радиусы всех зон увеличить на половину следующей зоны (закрыть полторы первой зоны, с середины третьей зоны по середину четвертой и т.д.)?

Очередной набор в ОЛ ВЗМШ

Открытый лицей «Всероссийская заочная многопредметная школа» (ОЛ ВЗМШ) Российской академии образования, работающий при Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова, в сорок пятый раз проводит набор учащихся.

ОЛ ВЗМШ – государственное учреждение дополнительного образования, причем не только для школьников. «ОТКРЫТЫЙ» – значит доступный для всех желающих пополнить свои знания в одной или нескольких из следующих областей науки: математика, биология, филология, физика, экономика, химия, правоведение, история, информатика (перечисление – в хронологическом порядке открытия отделений).

Сейчас ОЛ ВЗМШ совместно с другими научно-педагогическими учреждениями ведет исследовательские работы по разработке новых интерактивных технологий в образовании и переводу части своих учебно-методических комплексов на язык современных телекоммуникаций, в частности – по организации Интернет-отделения ОЛ ВЗМШ.

За время существования ВЗМШ удостоверения о ее окончании получили несколько сотен тысяч школьников и тысячи кружков – групп «Коллективный ученик ВЗМШ».

Обучение в школе ЗАОЧНОЕ, т.е. начиная с сентября-октября 2009 года все поступившие будут систематически получать специально разработанные для заочного обучения материалы, содержащие изложение теоретических вопросов, методов рассуждений, разнообразные задачи для самостоятельной работы, образцы решений задач, деловые игры, контрольные и практические задания.

Контрольные работы учащихся будут тщательно проверяться и рецензироваться преподавателями ВЗМШ – студентами, аспирантами, преподавателями и научными сотрудниками МГУ, а также других вузов и учреждений, где имеются филиалы школы. Многие из преподавателей в свое время сами закончили ВЗМШ и поэтому особенно хорошо понимают, как важно указать, помимо конкретных недочетов, пути ликвидации имеющихся пробелов в знаниях, порекомендовать дополнительную литературу, поругать за невнимательность и похвалить за заметный (а иногда – и за самый маленький) прогресс и трудолюбие.

Поступившие в ОЛ ВЗМШ смогут узнать об увлекательных вещах, часто остающихся за страницами школьного учебника, познакомиться с интересными нестандартными задачами и попробовать свои силы в их решении. Для многих станет откровением, что задачи бывают не только в математике, физике и химии, но и в биологии, филологии, экономике и других науках. Решение задач поможет прояснить, сделать интересными многие разделы, казавшиеся непонятными и скучными.

Одна из особенностей учебных программ и пособий ВЗМШ – в том, что они созданы действующими на переднем крае науки талантливыми учеными и опытными незаурядными педагогами. Недаром на X Всемирном конгрессе по математическому образованию, который прошел летом 2004 года в Дании, рассказ о 40-летней работе математического отделения ОЛ ВЗМШ вызвал неподдельный интерес и одобрение участников.

Чтобы успешно заниматься в заочной школе, вам придется научиться самостоятельно и продуктивно работать с книгой, грамотно, четко, коротко и ясно излагать свои мысли, а это, как известно, умеют далеко не все. Возможно, наша заочная школа поможет вам выбрать профессию, найти свое место в окружающем мире.

Все выполнившие программу ОЛ ВЗМШ получают дипломы. Хотя формальных преимуществ они не дают, приемные комиссии многих вузов учитывают, что обладатели этих удостоверений в течение продолжительного времени самоотверженно трудились над приобретением знаний, научились самостоятельно творчески работать, а это значит, что из них получатся хорошие студенты и, в дальнейшем, грамотные, вдумчивые, широко образованные специалисты.

Если у вас имеется такая возможность, вы будете частично общаться с нашей школой с помощью Интернета – чем дальше, тем больше.

Для поступления в ОЛ ВЗМШ надо успешно выполнить вступительную контрольную работу. Приемную комиссию интересует, в первую очередь, ваше умение рассуждать, попытки (пусть поначалу не совсем удачные) самостоятельно мыслить и делать выводы. Преимуществом при поступлении пользуются проживающие в сельской местности, поселках и небольших городах, где нет крупных научных центров и учебных заведений и где получить дополнительное образование можно лишь заочно.

Решения задач вступительной работы надо написать на русском языке в обычной ученической тетради в клетку (на некоторые отделения – на открытке или на двойном тетрадном листе; см. ниже). Желающие поступить сразу на несколько отделений каждую работу присылают *в отдельной тетради*. На обложке тетради укажите: *фамилию, имя, отчество, год рождения, базовое образ*ование (сколько классов средней школы будет закончено *к сентябрю 2009 года*), *полный почтовый адрес* (с индексом), *откуда узнали об ОЛ ВЗМШ* (из «Кванта», от друзей, из афиш заочной школы и т.п.), *на какое отделение хотите поступить.*

Вступительные работы обратно не высылаются.

Без вступительной работы, только по заявлению, принимаются на индивидуальное обучение победители областных (краевых, республиканских) туров всероссийских олимпиад по соответствующим предметам, а также участники финальных туров этих олимпиад.

Учащиеся ОЛ ВЗМШ частично возмещают расходы на свое обучение. По просьбе тех, кто не в состоянии внести эту плату, ОЛ ВЗМШ готов обратиться в школу, в орган народного образования, к другому спонсору с ходатайством об оплате этим благотворителем соответствующих расходов.

Помимо индивидуального обучения, на всех отделениях ВЗМШ, кроме экономического и биологического, имеется форма обучения «Коллективный ученик». Это группа учащихся, работающая под руководством преподавателя (школьного учителя, преподавателя вуза, студента или другого энтузиаста), как правило, по тем же пособиям и программам, что и индивидуально. *Прием в эти группы проводится до 15 октября 2009 года.* Для зачисления группы требуется заявление ее руководителя (с указанием его профессии и должности, со списком учащихся и сообщением о том, в каком классе они будут учиться с сентября 2009 года); заявление должно быть подписано руководителем группы, заверено и подписано руководителем учреждения, при котором будет работать группа. Работа с группами «Коллективный ученик» может оплачиваться школами как факультативные занятия.

Обо всех наших отделениях вы можете узнать на общешкольном сайте ОЛ ВЗМШ:

www.vzmsh.ru

На ваши вопросы мы ответим по электронной почте:

vzms@yandex.ru

На Северо-Западе России работает Заочная школа Ленинградского областного Министерства образования, созданная при Санкт-Петербургском государственном университете и имеющая отделения математики, биологии и химии.

Проживающие на Северо-Западе России (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми республиках), желающие поступить на отделение математики, высылают вступительные работы по адресу: 197755 Санкт-Петербург, Лисий Нос, Ново-Центральная ул., д. 21/7, Северо-Западная ЗМШ (на прием).

Проживающие в остальных регионах России, дальнем и ближнем зарубежье высылают свои работы по математике в адрес ОЛ ВЗМШ или соответствующего филиала.

Адрес ОЛ ВЗМШ: 119234 Москва, Воробьевы горы, МГУ, ОЛ ВЗМШ, на прием (укажите отделение)

Телефон: (495) 939-39-30

Адреса филиалов математического отделения ОЛ ВЗМШ:
241035 г.Брянск, ул. Мало-Орловская, д. 8;
тел.: (4832) 56-18-08; e-mail: brotek@mail.ru;
610002 г. Киров, а/я 2039, ЦДООШ;
тел.: (8332) 35-15-03, 35-15-04; e-mail: sms@extedu.kirov.ru;
сайт: http://cdoosh.kirov.ru;
150000 г. Ярославль, ул. Советская, д.14;
тел.: (0852) 11-82-03; e-mail: olimp@olimp.edu.yar.ru

Ниже вы найдете краткие сведения о каждом отделении ОЛ ВЗМШ и условия вступительных контрольных заданий.

Отделение математики

Из этого отделения, открывшегося в 1964 году, выросла вся заочная школа (вначале она так и называлась – математическая).

За время обучения вы более глубоко, чем в обычной школе, сможете осознать основные идеи, на которых базируется курс элементарной математики, познакомиться (по желанию) с некоторыми дополнительными, не входящими сейчас в школьную программу разделами, а также поучиться решать олимпиадные задачи. На последнем курсе большое внимание уделяется подготовке к сдаче школьных выпускных экзаменов и вступительных экзаменов в вузы.

На отделении созданы учебно-методические комплексы, приспособленные для заочного обучения. Часть из них издана массовым тиражом. Осуществляется перевод уже апробированных и вновь создаваемых материалов на электронный язык в интерактивном режиме, отделение готовится к работе в Интернете. Практически каждый год издаются и «проходят обкатку» новые пособия, расширяющие и дополняющие программу обучения.

Окончившие отделение математики получат, в зависимости от желания и способностей, либо подготовку, необходимую для выбора математики как профессии, либо математическую базу для успешного усвоения вузовского курса математики, лежащего в основе профессиональной подготовки по другим специальностям: ведь сейчас математика служит мощным инструментом исследований во многих отраслях человеческой деятельности. Поступившие в этом году на первый курс смогут выбирать новые пособия, разработанные для будущих физиков и биологов, химиков и историков...

Обучение длится 5 лет. Можно поступить на любой курс. Для этого к сентябрю 2009 года надо иметь следующую базу: на 1-й курс – 6 классов средней школы, на 2-й курс – 7 классов, на 3-й – 8, на 4-й – 9, на 5-й – 10 классов. При этом поступившим на 2-й, 3-й и 4-й курсы будет предложена часть заданий за предыдущие курсы. Для поступивших на 5-й курс обучение проводится по специальной интенсивной программе с упором на подготовку в вуз.

Для поступления надо решить хотя бы часть задач помещенной ниже вступительной работы (около номера каждой задачи в скобках указано, учащимся каких классов она предназначена; впрочем, можно, конечно, решать и задачи для более старших классов). На обложке тетради напишите, на какой курс вы хотите поступить и в каком классе будете учиться с 1 сентября 2009 года.

Срок отправки вступительной работы – до 15 апреля 2009 года.

Группы «Коллективный ученик» (на все курсы по любой программе) принимаются без вступительной работы.

Работы можно отправлять по электронному адресу: priem@vzms.org

Сайт математического отделения:
http://math.vzms.org

Задачи

1 (6–10). Из 40 т руды выплавили 20 т металла, содержащего 6% примесей. Каков процент примесей в руде?

2 (8–10). Через точку A окружности проведены касательная и хорда AB длины 5. Хорда BC параллельна проведенной касательной и равна 6. Найдите радиус окружности.

3 (8–10). Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+x-6}-\left|3y+2\right|=0,\\ 5\sqrt{9y^2+12y+4}+\sqrt{x^2-3x+2}=0.\end{cases}$$

4 (6–10). В спортивной секции фигурного катания на коньках 5/6 всех мальчиков и 3/4 всех девочек занимаются парным фигурным катанием, остальные – индивидуальным. Какая часть всех ребят секции занимается индивидуальным фигурным катанием (увлекающиеся парным катанием могут кататься только в одной паре)?

5 (8–10). Хорда AB окружности радиуса 12 разделена точкой C на отрезки $AC = 8$ и $CB = 10$. Найдите наибольшее и наименьшее расстояния от точки C до точек окружности.

6 (6–10). Найдите все пары целых чисел $(a;\ b)$, удовлетворяющие уравнению

$$a^2b^2+a^2+b^2=2004\,.$$

7 (8–10). В равнобедренной трапеции $ABCD$ большее основание AD равно 12, меньшее основание BC равно 6, высота равна 4. Что больше: угол BAC или угол CAD?

8 (7–10). Известно, что при всех значениях величины x, кроме $x = 2$, имеет место равенство

$$\frac{1}{\left(x^2+x+1\right)\left(x-2\right)}=\frac{ax+b}{x^2+x+1}+\frac{c}{x-2}\,.$$

Найдите a, b и c.

9 (8–10). Пусть a, b, c – длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+2ac}{a^2+c^2}+\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2}>3\,.$$

10 (6–10). Единичный квадрат разбит прямыми, параллельными его сторонам, на 9 равных квадратов, и средний квадрат выброшен. Каждый из оставшихся восьми маленьких квадратов в свою очередь разделен прямыми, параллельными его сторонам, на 9 равных частей (квадратиков), и его средняя часть выброшена, после чего аналогичная операция проделана с каждым из оставшихся 64 квадратиков и т.д. Пусть эта операция повторена n раз.

а) Сколько квадратиков со стороной $\frac{1}{3^n}$ осталось?

б) К чему стремится сумма площадей квадратов, выброшенных за все n шагов, при неограниченном возрастании n?

Отделение биологии

Зачисление на отделение проводится на конкурсной основе по результатам вступительной работы. В конкурсе могут принять участие школьники, которые в этом учебном году занимаются в 8 или 9 классе, независимо от места проживания. Обучение для восьмиклассников длится 3 года, для девятиклассников – 2 года.

Учащимся восьмых классов необходимо решить задачи 1–5 помещенной ниже вступительной работы, девятиклассникам – задачи 2–6. В ответах можно использовать и факты, найденные в литературе, и собственные идеи. Просим для сведений, почерпнутых из книг, приводить ссылки на источники.

Вместе с работой пришлите конверт с маркой и заполненным адресом (для отправки решения приемной комиссии).

Срок отправки вступительной работы – не позднее 10 мая 2009 года.

Задачи

1. Какие вы знаете приспособления, защищающие растения от поедания их животными?

2. Как известно, летать могут и млекопитающие, и птицы, и насекомые (хотя и не все). Какие приспособления к полету имеются у этих организмов? Для каждого приспособления укажите, в каких из трех перечисленных групп животных оно встречается.

3. Для каждого из перечисленных ниже мероприятий укажите, предотвращению каких болезней и групп болезней людей оно будет способствовать, а против каких заболеваний окажется бессильным. А какие из этих мероприятий позволят снизить тяжесть заболевания? Ответы обоснуйте.

А. Применение антибиотиков.

Б. Употребление поливитаминов.

В. Обливания холодной водой.

Г. Переливание плазмы крови людей, выздоровевших после этой болезни.

Д. Постоянное ношение на лице марлевой повязки.

4. У одних видов организмов плотность особей на единицу площади обитания относительно стабильна в разные сезоны и годы, а у других – скачкообразно меняется. Приведите примеры тех и других видов. Перечислите причины, с которыми могут быть связаны указанные отличия.

5. В почве обитают представители самых разных групп животных. Какие приспособления к такому образу жизни у них возникли? Для каждого из указанных вами приспособлений приведите по одному-два примера животных, у которых оно имеется.

6. Ареалом вида называют географическую область его распространения. У многих организмов за последние 2000 лет ареалы значительно изменились. С какими конкретными причинами это связано в разных случаях? Каждую из причин проиллюстрируйте одним-двумя примерами.

Отделение физики

Обучение на отделении одно-, двух- и трехгодичное. На трехгодичный поток (курс Ф3) принимаются оканчивающие в 2009 году 8 классов средней школы, на двухгодичный (курс Ф2) – оканчивающие 9 классов и на одногодичный (курс Ф1) – 10 классов. Учащиеся, оканчивающие десятый класс, могут пройти ускоренно всю программу за один год (курс Ф0). Для поступления на курс Ф3 нужно решить задачи 1–5 приведенной ниже вступительной работы, на курс Ф2 – задачи 4–9, на курс Ф1 – задачи 5–10, на курс Ф0 – задачи 4–10. На обложке тетради следует указать фамилию, имя и отчество, код курса (Ф0, Ф1, Ф2 или Ф3), сколько классов будет закончено к 1 сентября 2009 года, полный почтовый адрес (с индексом), адрес e-mail (если есть), телефон.

Срок отправки вступительной работы – до 1 июня 2009 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются на курсы Ф1, Ф2, Ф3 без вступительной работы.

Сайт отделения физики: http://www.phys.problems.ru

Задачи

1. По параллельным железнодорожным путям *1* и *2*, отстоящим друг от друга на $L = 100$ м, едут два поезда одинаковой длины $L_0 = 100$ м со скоростями $v_1 = 54$ км/ч и $v_2 = 36$ км/ч соответственно. На перпендикулярной дороге на расстоянии $s = 50$ м от первого пути стоит человек, который замечает поезда, когда они оба находятся на расстоянии $l = 100$ м слева от дороги (рис.1). Сколько времени человек не будет целиком видеть поезд, идущий по второму пути?

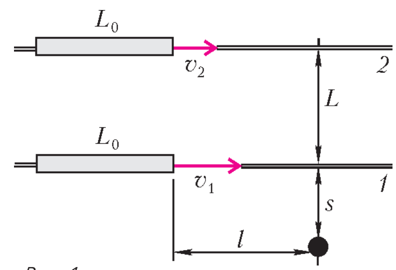


Рис. 1

2. В калориметр, содержащий воду массой $m = 150$ г, добавляют лед. Чтобы не весь лед растаял, его нужно положить не менее $m_1 = 50$ г, а чтобы замерзла вся вода – не менее $m_2 = 150$ г. Сколько нужно положить льда той же температуры, чтобы после наступления теплового равновесия его масса не изменилась?

3. На рисунке 2 изображена электрическая схема, собранная из одинаковых лампочек. Найдите: а) какая лампочка будет гореть наиболее ярко при подключении постоянного напряжения к точкам A и B; б) отношение мощностей, выделяющихся на лампочках *5* и *6* при подключении постоянного напряжения к точкам A и C.

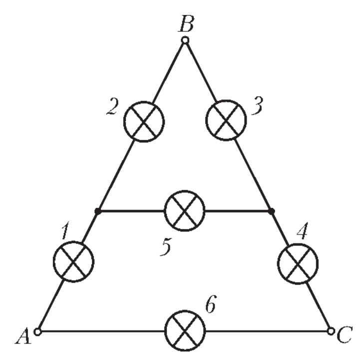


Рис. 2

4. Найдите, сколько времени секундная стрелка часов будет находиться впереди минутной за первые 10 мин каждого часа и сколько – за последние 10 мин. Считается, что впереди находится та стрелка, которая составляет больший угол с направлением на 12 часов, отсчитанный от этого направления по ходу движения стрелок.

5. Шарик радиусом R, подвешенный на нити, освещен параллельным пучком света. За шариком на расстоянии $2R$ от его центра перпендикулярно пучку установлен экран. Перед шариком на таком же расстоянии устанавливают перпендикулярно пучку либо собирающую линзу с фокусным расстоянием $F_1 = 6R$, либо рассеивающую линзу с фокусным расстоянием $F_2 = -2R$. Найдите отношение радиусов теней от шарика на экране в этих двух случаях.

6. На горизонтальном столе лежит маленький мячик. В некоторый момент стол начинает двигаться вниз, практически мгновенно приобретая скорость v, которая в дальнейшем не изменяется. Найдите среднюю скорость движения мячика в промежутках между соударениями со столом, считая их абсолютно упругими.

7. Два груза одной и той же массы соединены длинной нитью, переброшенной через неподвижный блок. Один из грузов представляет собой мешок с песком. В некоторый момент песок начинает высыпаться с постоянной скоростью, и через промежуток времени $T = 1$ мин мешок оказывается пустым. За какое время сила давления нити на ось блока становится вдвое меньше исходного значения? Массой мешка можно пренебречь, нить и блок идеальные.

8. Прописная буква А сделана из однородных деревянных палочек общей массой $m = 200$ г. Наклонные палочки равны по длине и составляют друг с другом угол $\alpha = 30°$, третья палочка соединяет их середины. Растянута или сжата окажется эта палочка в направлении своей оси и с какой силой, если букву: а) подвесить за точку соединения наклонных палочек; б) поставить на гладкую горизонтальную поверхность?

9. В комнате с высотой потолка $H = 2{,}2$ м бросают сверху вниз маленький мячик со скоростью $v = 9$ м/с с расстояния $h = 1$ м от пола. Сколько произойдет ударов мячика о потолок, если при каждом ударе о пол или потолок доля $\alpha = 25\%$ кинетической энергии мячика переходит в тепло?

10. Над газом совершают циклический процесс *1–2–3–4–1*. В начальном состоянии *1* давление, объем и температура газа равны p_1, V_1 и T_1 соответственно. В процессе *1–2* газ изобарически расширяется в полтора раза. На участке *2–3* давление газа линейно уменьшается с увеличением объема до значения $p_1/2$. Процесс *3–4* – изобарический, а *4–1* – изохорический. Найдите температуру газа в точке *3*, если известно, что работа, совершенная газом за цикл, равна $A = p_1V_1/3$.

Отделение химии

На отделение принимаются учащиеся, имеющие базовое образование в объеме 8, 9 и 10 классов средней школы.

Полная программа обучения на отделении – три года.

Программа включает следующие одногодичные курсы:

- общая химия (с элементами неорганической химии);
- неорганическая химия;
- органическая химия;
- химия окружающей среды (полгода).

Если вы хотите научиться решать задачи, вам будет полезен курс «Методы решений задач по химии». Его можно совмещать с другими курсами.

Более подробные сведения о программе и порядке обучения высылаются вместе с извещением о решении Приемной комиссии.

Задачи вступительной работы, помещенные ниже, – общие для всех поступающих, независимо от базового образования.

Срок отправки вступительной работы – до 15 июня 2009 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы.

Наш сайт: http://www.chem-dist.ru

Задачи

1. Некоторая соль содержит 46,43% калия, 14,29% углерода, 38,10% кислорода (по массе). Найдите брутто-формулу соли. Как называется эта соль?

2. Давайте обсудим процесс

$$SrO + CO_2 \rightleftarrows SrCO_3 + Q .$$

А) Как сдвинуть равновесие этой реакции вправо? Перечислите все возможные способы.

Б) Как увеличить скорость этой реакции? Перечислите все возможные способы.

3. К 200 г 16,56%-го раствора нитрата свинца (II) добавили 80 г 28%-го раствора гидроксида калия. Был получен прозрачный раствор. Затем в этот раствор при 25 °С пропустили 7,34 л хлороводорода. Выпал белый осадок. Установите его состав. Рассчитайте массу осадка. Напишите уравнения реакций.

4. Какие продукты могут образовываться при взаимодействии 3-фенилпропена-1 с бромом? Укажите условия реакций.

5. Какие процессы будут происходить, если аминоуксусную кислоту поместить: а) в кислый раствор; б) в щелочной раствор? Напишите уравнения реакций. Постройте на одном графике качественную зависимость концентраций разных форм аминоуксусной кислоты от pH.

6. Как хранить универсальный растворитель (который растворяет ВСЕ)?

Отделение филологии

За время существования отделения подготовлено и издано большое количество уникальных учебных пособий по русскому языку, общему языкознанию, истории и теории литературы.

На отделение принимаются все желающие, имеющие базовую подготовку в объеме 7 классов.

Отделение предлагает на выбор 18 учебных программ. Подробно о них рассказано на нашем сайте. Также сведения о программах и порядке обучения высылаются вместе с извещением о решении Приемной комиссии. При оценке вступительной работы учитывается, в каком классе вы учитесь.

Вы хотите исправить грамотность? Познакомиться с любопытными проблемами теории и практики русского языка? Освоить приемы лингвистического или литературоведческого анализа? Узнать кое-что о журналистике и оценить свои творческие способности? Приобрести навыки, необходимые для успешной сдачи экзаменов в вуз? Тогда выполните и пришлите нам вступительное задание.

Внимание! На первой странице укажите следующие данные: Ф.И.О., какой класс заканчиваете, полный (с индексом!) почтовый адрес, телефон. Вместе с выполненным заданием пришлите, пожалуйста, стандартный конверт с маркой и заполненным вашим адресом (с индексом) для ответа Приемной комиссии.

Срок отправки вступительной работы – до 15 мая 2009 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы.

Если вопросы, предложенные нами, для вас пока сложны, но вы хотите у нас учиться, пришлите информацию о себе, и мы постараемся помочь.

Наш e-mail: filologiyvzmsh@mail.ru

Наш сайт: http://philologist.su

Вопросы

1. Помните историю дуэли Онегина и Ленского? Автор утверждает, что «пружина чести», сработав, как всегда, безотказно, заставила Онегина принять вызов. При этом сам герой недоволен собой: он чувствует, что повел себя не как следует «мужу с честью и умом». Итак, Онегин стрелялся, следуя закону чести или вопреки ему?

2. Прокомментируйте правку, осуществленную М.Н.Катковым при первой публикации романа «Отцы и дети» в его журнале «Русский вестник». Вот, например, описание лица Базарова: «Длинное и худое, с широким *угреватым* лбом». Из фразы Евгения об отце («презабавный старикашка и добрейший») были выброшены слова «и добрейший». Что такие изменения привносили в роман и зачем это понадобилось редактору?

3. Откуда берется «музыка поэзии»? Проиллюстрируйте свои размышления любым поэтическим текстом.

4. В русском языке много пословиц, поговорок, устойчивых выражений, в которых упоминаются собаки, щенки. Попробуйте вспомнить как можно больше выражений, содержащих слова *корова, бык, теленок* и все их производные.

5. Раскройте скобки, вставьте пропущенные буквы, расставьте недостающие знаки препинания:

Старик хозяин показал зва(н, нн)ым гостям к...(л, лл)екцио(н, нн)ые стари(н, нн)ые серебря(н, нн)ые монеты собра(н, нн)ые им (в)течени... всей его жизни которые были продума(н, нн)но систематизирова(н, нн)ы и уложе(н, нн)ы в карто(н, нн)ные коробочки с прикле...(н, нн)ыми стекля(н, нн)ыми крышечками на которых масл...(н, нн)ыми красками начерта(н, нн)ы номера в соответстви... с простра(н, нн)ыми ко(м, мм)ентариями напечата(н, нн)ого на машинке многостраничного к...т...лога.

Отделение экономики

Обучение на отделении проводится по двум основным программам: «Прикладная экономика» и «Экономика и география». Программа «Прикладная экономика» включает изучение основ экономической теории, а также знакомство с практикой бизнеса в деловой игре по переписке. Учащиеся программы «Экономика и география», помимо изучения основ экономической теории, знакомятся с физической и экономической географией, участвуют заочно в увлекательных путешествиях по странам мира.

Окончившим одну из основных программ предлагается специализация по выбору: «Основы предпринимательства и менеджмента», «Бухгалтерский учет и финансовый анализ», «Мировая экономика», «Экономика России: прошлое, настоящее и будущее».

На отделение принимаются все желающие с образованием не ниже 7 классов средней школы. Обучение проводится либо индивидуально, либо в небольших группах (2–4 человека). Формы обучения «Коллективный ученик» на отделении нет.

Учащимся 10–11 классов, желающим подготовиться одновременно к вступительным экзаменам на экономические факультеты МГУ им.М.В.Ломоносова и других экономических вузов, предлагается специальная программа «Экономика ПЛЮС», включающая, наряду с экономическими дисциплинами, углубленное изучение нескольких дополнительных предметов: математики, обществознания, русского языка и литературы. Программа включает подготовку к ЕГЭ по тем предметам, по которым экономические вузы принимают результаты ЕГЭ в качестве вступительных экзаменов. Для школьников, интересующихся географической наукой и собирающихся поступать на географический факультет МГУ или другого вуза, существует программа «География ПЛЮС», созданная преподавателями ОЛ ВЗМШ и географического факультета МГУ на основе опыта подготовительных курсов по географии Московского университета.

Вступительная работа для учащихся дается в форме теста. Решения присылайте *только* на открытках с указанием полного почтового адреса и индекса, фамилии, имени и отчества (все – *печатными буквами*); обязательно укажите источник информации об ОЛ ВЗМШ и напишите «Экономика, вступительный тест-2009». На открытке достаточно записать в строчку номера вопросов и под каждым написать букву, соответствующую ответу, который вы считаете правильным. Ответы на большую часть вопросов вы можете найти, внимательно изучив научно-популярные журналы «Квант» и «Наука и жизнь» за 2008 год. Правильно ответившие на все вопросы получат из букв своих ответов зашифрованное слово, являющееся названием страны – крупного экспортера природных ресурсов, развитие которой все больше связывается со становлением экономики знаний.

Срок отправки вступительной работы — до 1 июня 2009 года.

Тест

1. Как называется одна из универсальных закономерностей в развитии современного общества, представляющая собой объективный процесс универсализации, упорядочивания социальных институтов, связей и отношений, становления единых общепланетарных структур в различных сферах жизни общества:

Т) волюнтаризм;
Р) глобализация;
К) интернационализация;
З) провиденциализм;
П) урбанизация?

2. Берега какой из перечисленных стран не омываются водами Северного Ледовитого океана:

У) Дания;
О) Исландия;
А) Канада;
Е) Норвегия;
И) США?

3. Укажите ОШИБКУ в перечне мер государственной экономической политики, направленных на борьбу с инфляцией:

Р) снижение импортных пошлин;
Н) сокращение социальных расходов;
В) повышение ставок подоходного налога;
С) осуществление деноминации;
М) введение государственного контроля за уровнем цен.

4. Примером народа, некогда населявшего территорию современной России, но ушедшего в историческое небытие, являются:

Ц) курды;
А) нивхи;
Е) саами;
С) скифы;
Б) таты.

5. Укажите ОШИБКУ в перечне факультетов МГУ им. М.В.Ломоносова:

Д) факультет глобальных процессов;
Й) факультет мировой политики;
И) факультет нанотехнологий;
Ш) факультет почвоведения;
Р) факультет фундаментальной медицины.

6. В связи с тяжелым транспортным положением в столице правительство Москвы приняло решение о строительстве нового (пятого) транспортного кольца, протяженностью 541 км. Допустим, строительство начинается 1 июня 2008 года, причем через каждый месяц протяженность готового дорожного полотна будет увеличиваться вдвое. Строительство планируется завершить к Дню города (4–5 сентября) 2009 года. Когда протяженность построенного полотна будет составлять половину от запланированной протяженности:

К) 1 января 2009 года;
Т) 31 августа 2009 года;
А) 1 июня 2009 года;
Я) 1 августа 2009 года;
И) невозможно определить?

Отделение «Нравственность, право, закон» (право и граждановедение)

Школьникам 8–11 классов и группам «Коллективный ученик» предлагаются два курса.

1) Годовой курс «Беседы о правах человека, нравственности, праве, законе и государстве». В курсе даются современные представлений об основных понятиях, связанных с правом, законом и государством, рассказывается об основах российского законодательства, о правах человека. Разбираются примеры судебных процессов, приводятся общекультурные примеры, связанные с направленностью курса.

2) Полуторагодовой курс «Беседы об основах демократии».

Мы предлагаем проходить курсы именно в таком порядке. И только старшеклассники, если они не успевают пройти оба курса подряд, но обязательно хотят пройти именно второй курс, могут начинать прямо с него.

Желающие учиться должны сообщить свой полный почтовый адрес (адрес электронной почты, если есть), фамилию, имя и отчество, сколько классов закончено. При оценке вступительной работы мы учитываем возраст (базовое образование) поступающего. В письмо обязательно *вложите обычный конверт с маркой и вашим адресом* (чтобы мы могли вам ответить) и ответы на приведенные ниже вопросы.

Срок отправки вступительной работы – до 1 июня 2009 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы.

Вопросы

1. Зачем нужны партии, представляющие заведомое меньшинство населения?

2. Почему, несмотря на возмущение большинства пассажиров трамвая (или другого общественного транспорта), водитель ожидает, пока откроется возможность безопасного проезда мимо мешающего проезду автомобиля, в котором могут быть и всего-то 1–2 человека?

3. Сравните понятия «право» и «законодательство». Какое из них кажется вам более широким?

4. Какая из перечисленных ниже фамилий попала сюда «по ошибке»: Кони А.Ф.; Корнилов Л.Г.; Плевако Ф.Н.; Александров П.А.; Спасович В.Д.?

5. Упорядочите по трудности (лично для вас) заданные выше вопросы.

Отделение истории

Обучение на отделении позволит всем, в том числе жителям самых отдаленных городов и деревень, расширить свой кругозор, подготовиться к поступлению в вуз. Успешно прошедшие курс обучения получают диплом.

А зачем нужно изучать историю? Во-первых, это просто интересно. Любопытно знать, как жили когда-то люди, во что одевались, чем питались, что читали, как женились и выходили замуж, за что боролись и «на что напарывались». Во-вторых, это полезно. Только зная прошлое, можно понять настоящее и прогнозировать будущее. Мы поможем вам в этом разобраться.

Специально для вас опытные преподаватели пишут книжки. Последние новости из мира истории вы узнаете одними из первых! Мы будем поддерживать с вами постоянную связь. По нашим книжкам вы будете выполнять особые задания и сообщать нам, что вы раскопали. Ведь, в сущности, труд историка и состоит из этих раскопок. Историк-археолог, копая землю и песок, отыскивает крупицы ушедших времен; историк-архивариус копается в груде бумаг и достает из архивов и даже из частной переписки все, что может позволить ему понять образ времени; историк-теоретик как увлекательный роман читает археологические таблицы, сухие сводки, статистику и восстанавливает по ним живую ткань ушедшей жизни. У историка особая профессия: он в одном лице следователь, прокурор и адвокат времени.

Вступительное задание на отделение выполняется на двойном листе бумаги.

Срок отправки вступительной работы – до 1 июня 2009 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы по заявлению руководителя.

Задание

1. Отгадайте кто это:

- Над его гробом воздвигнут храм.
- Ему посвящена икона Андрея Рублева «Троица» и картина Нестерова «Видение отроку Варфоломею».
- Сын бедного ростовского дворянина.
- В детстве имел необычный для XIV века интерес – страсть к грамоте.
- В XX веке о нем бы сказали «не от мира сего, белая ворона».
- Возможная карьера для такого юноши в Древней Руси – книгочей в храме, переписчик книг, составитель летописного свода... если бы не его подвижническая натура.
- В молодости – отшельник. В лесу на крутом холме поставил келью и уединился, дав обет молчания, иночества, безбрачия.
- Основатель и настоятель Троице-Сергиева монастыря.
- Установил на Руси праздник Троицы (в годы ига – символ единства Руси).
- Личным примером увлек массы русских людей на неосвоенные земли.
- Способствовал переселению в края, недоступные для ордынских набегов.
- Один за другим его ученики уходят в глухие места на пустоши и ставят монастыри – духовные и культурные центры Руси.
- Его ученики поставили 40 монастырей, ученики учеников – 60.
- Его последователи – Савва Сторожевский, Кирилл Белозерский и др.

2. Опишите, не более чем в 7 предложениях, политический портрет председателя первого советского правительства.

Внимание!

ОЛ ВЗМШ проводит набор на курс «Обществознание». Курс включает следующие дисциплины: философия, социология, политология, теория государства, государственное устройство России, право, экономика.

Слушателям направляются оригинальные учебные пособия, созданные на основе многолетнего опыта работы авторов курса. Проверка знаний осуществляется с помощью общепринятой системы тестирования.

Программа курса рассчитана на 1 год. Обучение носит заочный характер и имеет целью дать выпускникам школ – как крупных городов, так и небольших сел – глубокие знания по общественным дисциплинам, подготовить их к успешной сдаче ЕГЭ и поступлению в гуманитарные вузы.

Для записи на курс (как по индивидуальной программе, так и по программе «Коллективный ученик») необходимо отправить заявление *до 1 июня 2009 года*. В заявлении укажите фамилию, имя, отчество, свой полный домашний адрес (с индексом!), класс, в котором вы будете учиться с 1 сентября 2009 года.

Заявление отправьте по адресу: *119234 Москва, Воробьевы горы, МГУ, ОЛ ВЗМШ (курс «Обществознание»).*

Отделение информатики

Прием ведется на курс «Программирование для начинающих».

На отделение принимаются все желающие с образованием не ниже 7 классов средней школы. Для успешного выполнения практических заданий должна быть возможность работы на компьютере. За год обучения учащиеся освоят основные конструкции языка Паскаль, изучат простейшие алгоритмы и в качестве итоговой работы напишут игровую программу.

Для зачисления необходимо прислать анкету с ответами на приведенные ниже вопросы.

Внимание! Ответы на вопросы анкеты присылайте на двойном тетрадном листе, указав на первой странице важные для нас данные: Ф.И.О., класс, который вы заканчиваете, полный (с индексом!) почтовый адрес, e-mail (если есть). Пишите развернутые ответы на вопросы.

Срок отправки анкеты – до 15 мая 2009 года.

Вопросы

1. Изучаете ли вы в школе информатику? Какие темы вы изучили?

2. Что такое информатика? Что изучается в разделе «Программирование»?

3. Изучали ли вы какие-нибудь языки программирования? Какие?

4. Какие операционные системы вы знаете?

5. Какие программы установлены на компьютере, за которым вы работаете?

6. Есть ли у вас возможность выхода в Интернет?

7. Знаете ли вы, что такое: а) циклы; б) массивы; в) функции; г) условия?

8. Что такое рекурсия, индукция? В чем различия между ними?

9. По кругу выложены 15 камушков, в порядке увеличения веса. Внешне все камушки отличаются друг от друга: состоят из разных пород, имеют различную окраску, форму, вес, объем и т.д. Как при помощи чашечных весов без стрелок и гирек найти самый тяжелый камень, сделав при этом как можно меньше взвешиваний?

Федеральная заочная физико-техническая школа при МФТИ

Федеральная заочная физико-техническая школа (ФЗФТШ) при Московском физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся общеобразовательных учреждений (школ, лицеев, гимназий и т. п.), расположенных на территории Российской Федерации, на 2009/10 учебный год.

ФЗФТШ при МФТИ как государственное образовательное учреждение профильного дополнительного образования детей работает с 1966 года. За прошедшие годы школу окончили более 80 тысяч учащихся; практически все ее выпускники поступают в ведущие вузы страны, а каждый второй студент МФТИ – ее выпускник. Финансирует школу Федеральное агентство по образованию. Обучение для учащихся, проживающих в Российской Федерации, в рамках утвержденного плана приема – бесплатное.

Научно-методическое руководство школой осуществляет Московский физико-технический институт (государственный университет), который готовит высококвалифицированных специалистов по современным направлениям науки и техники. В их подготовке принимают участие ведущие отраслевые и академические научно-исследовательские институты и научно-производственные объединения страны (базовые организации МФТИ). Преподавание в МФТИ ведут известные педагоги и ученые, среди которых около 100 членов Российской академии наук. Физтеховское образование позволяет не только успешно работать в науке, но и хорошо ориентироваться в жизни.

Цель нашей школы – помочь учащимся, интересующимся физикой и математикой, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам, а также способствовать профессиональному самоопределению учащихся.

Набор в 8, 9, 10 и 11 классы на 2009/10 учебный год проводится на заочное, очно-заочное и очное отделения.

Заочное отделение *(индивидуальное обучение)*

Тел./факс: (495) 408-51-45, e-mail: zftsh@pop3.mipt.ru

Прием на заочное отделение проводится на конкурсной основе по результатам выполнения вступительного задания по физике и математике, приведенного ниже. Полная программа обучения рассчитана на 4 года, т.е. на 8 – 11 классы, но поступать можно в любой из этих классов.

В течение учебного года, в соответствии с программой ФЗФТШ, ученик будет получать задания по физике и математике по каждой теме (4 задания по каждому предмету для 8 класса, 6 – 7 заданий по каждому предмету для 9, 10 и 11 классов), а затем – рекомендуемые авторские решения этих заданий вместе с проверенной работой. Задания содержат теоретический материал, разбор характерных примеров и задач по соответствующей теме и 8 – 12 контрольных вопросов и задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Задания составляют опытные преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ. Работы учащихся-заочников проверяют студенты, аспиранты и выпускники МФТИ (из них 80% – бывшие выпускники нашей школы).

Срок отправления решения вступительного задания – *не позднее 1 марта 2009 года.* Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 2009 года.

Вне конкурса в ФЗФТШ принимаются *победители областных, краевых, республиканских, окружных и всероссийских олимпиад по физике и математике 2008/09 учебного года.* Им необходимо до 15 мая 2009 года выслать в ФЗФТШ выполненную вступительную работу по физике и математике вместе с копиями дипломов, подтверждающих участие в перечисленных выше олимпиадах.

Тетрадь с выполненными заданиями (по физике и математике) высылайте по адресу:

141700 г. Долгопрудный Московской области, Институтский пер., д.9, ФЗФТШ при МФТИ.

Вступительное задание по физике и математике ученик выполняет на русском языке самостоятельно в одной школьной тетради, сохраняя тот же порядок задач, что и в задании. Тетрадь нужно выслать в конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку).

На *внутреннюю* сторону обложки тетради наклейте справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса.

На *лицевую* сторону обложки наклейте лист бумаги, четко заполненный по приведенному ниже образцу.

На конкурс ежегодно приходит более 4 тысяч вступительных работ. Пожалуйста, обратите внимание на правильность заполнения анкеты! Пишите аккуратно, лучше печатными буквами.

Для получения ответа на вступительное задание и для отправки вам первых заданий *обязательно* вложите в тетрадь *два одинаковых* бандерольных конверта размером 160 × 230 мм. На конвертах четко напишите свой домашний адрес.

Образец

Л. №								
№ задачи	1	2	3	…	15	16	17	Σ
М.								
Ф.								

1. Республика, край, область	*Кемеровская область*
2. Фамилия, имя, отчество	*Чистова Галина Сергеевна*
3. Класс, в котором учитесь	*восьмой*
4. Номер школы	*35*
5. Вид школы (обычная, лицей, гимназия, с углубленным изучением предмета)	*лицей*
6. Подробный домашний адрес (с указанием индекса), телефон, e-mail	*654041 г. Новокузнецк, ул. Волжская, д.74,кв.3, e-mail:dio@rdsc.ru*
7. Место работы и должность родителей:	
отец	*доцент*
мать	*врач*
8. Адрес школы, телефон, факс, e-mail	*654041 г. Новокузнецк, ул. Циолковского, д.65*
9. Фамилия, имя, отчество преподавателей:	
по физике	*Григорьева Алена Михайловна*
по математике	*Горшенина Нина Анатольевна*
10. Каким образом к вам попало это объявление?	

Очно-заочное отделение *(обучение в факультативных группах)*

Тел./факс: (495) 409-93-51, e-mail: zftsh@pop3.mirt.ru

Факультативные группы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении *двумя преподавателями* – физики и математики, в отдельных случаях разрешается обучение по одному предмету. Руководители факультатива принимают в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ФЗФТШ.

Группа (не менее 8 человек) принимается в школу, если директор общеобразовательного учреждения сообщит в ФЗФТШ фамилии, имена, отчества ее руководителей и поименный алфавитный список обучающихся (Ф.И.О. полностью, с указанием класса *текущего учебного года и итоговых оценок* за вступительное задание по физике и математике, домашний адрес учащихся, с указанием индекса, телефон и e-mail), телефон, факс и e-mail общеобразовательного учреждения. Все эти материалы и конверт для ответа о приеме в ФЗФТШ с обратным адресом одного из руководителей следует выслать до *25 июня 2009 года* по адресу: 141700 г. Долгопрудный Московской области, Институтский пер., д. 9, ФЗФТШ при МФТИ (с пометкой «Факультатив»). *Тетради с работами учащихся не высылаются.*

Работа руководителей факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением как руководство профильными факультативными занятиями по предоставлении ФЗФТШ при МФТИ соответствующих сведений.

Руководители, работающие с учащимися, будут получать в течение учебного года учебно-методические материалы (программы по физике и математике, задания по темам программ, решения заданий с краткими рекомендациями по оценке работ учащихся), приглашаться на курсы повышения квалификации учителей физики и математики, проводимые на базе МФТИ. Работы учащихся проверяют и оценивают руководители факультативных групп, а в ФЗФТШ ими *высылаются ведомости с итоговыми оценками по каждому заданию и итоговая ведомость за год.*

Очное отделение *(обучение в вечерних консультационных пунктах)*

Тел.: (495) 409-95-83, e-mail: zftsh@pop3.mipt.ru

Для учащихся Москвы и Московской области по программе ФЗФТШ работают вечерние консультационные пункты, набор в них проводится по результатам вступительных экзаменов по физике и математике и собеседований, которые проходят во второй половине сентября.

Программы ФЗФТШ при МФТИ являются профильными дополнительными образовательными программами и едины для всех отделений. Кроме того, ученикам всех отделений будет предложено участвовать в физико-математической олимпиаде «ФИЗТЕХ-2009», которая проводится на базе МФТИ и в ряде городов России в конце марта и в середине мая, в других очных и заочных олимпиадах МФТИ и его факультетов, а также в конкурсах, турнирах и конференциях. Для учащихся 9 – 11 классов на базе МФТИ работает субботний лекторий по физике и математике по программе ФЗФТШ. Лекции читают преподаватели института, как правило авторы заданий. Подробнее об этих мероприятиях можно прочитать на сайте ФЗФТШ:

http://www.school.mipt.ru

По окончании учебного года учащиеся, успешно выполнившие программу ФЗФТШ, переводятся в следующий класс, а выпускники (одиннадцатиклассники) получают свидетельство об окончании школы с итоговыми оценками по физике и математике, которое учитывается на собеседовании при поступлении в МФТИ.

Ученикам, зачисленным в ФЗФТШ в рамках утвержденного плана приема, будет предложено оплатить безвозмездный целевой взнос для обеспечения учебного процесса в соответствии с уставными целями школы. Сумма взноса ориентировочно будет составлять для учащихся заочного отделения 1300 – 2000 руб. в год, для очного 2000 – 3000 руб., для очно-заочного 2000 – 3500 руб. (с каждой факультативной группы за год).

Для учащихся Украины работает Киевский филиал ФЗФТШ при МФТИ (обучение платное). Желающим в него поступить следует высылать работы по адресу: 03680 Украина, г. Киев, б-р. Вернадского, д. 36, ГСП, Киевский филиал ФЗФТШ при МФТИ. Телефоны: 8(10-38044) 424-30-25, 8(10-38044) 422-95-64.

Для учащихся из зарубежных стран возможно только платное обучение на заочном и очно-заочном отделениях. Условия обучения для прошедших конкурсный отбор будут сообщены дополнительно.

Ниже приводятся вступительные задания по математике и физике. Номера задач, обязательных для выполнения (заочное и очно-заочное отделения), даны в таблице (номера классов соответствуют текущему 2008/09 учебному году):

	7 класс	8 класс	9 класс	10 класс
Математика	1 – 5	3 – 6, 7а), 8	6, 7а) и б), 8 – 14	7а), б) и в), 9 – 14
Физика	1 – 5	5 – 10	9 – 14	11 – 17

Вступительное задание по математике

После порядкового номера задачи в скобках указано количество очков за задачу.

1(2). Мотоциклист ехал из пункта A в пункт B со скоростью 40 км/ч, а возвращался назад по той же дороге со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость движения мотоциклиста за всю поездку.

2(3). Введите на клетчатой бумаге систему координат, отметьте точки $A(-2;4)$, $B(-1;-1)$, $C(-4;10)$, $D(-2;5)$, $E(4;7)$, $F(10;6)$, соедините их последовательно отрезками AB, BC, CD, DE, EF, FA и найдите площадь фигуры, которую они ограничивают. (Площадь одной клетки считайте равной 1 см^2.)

3(4). В погребе замка лежали несколько целых пачек печенья. Ночью пришли крысы и съели 33 пачки, причем все ели поровну. У некоторых из них от обжорства заболели животы, поэтому на следующую ночь в погреб пришли не все крысы, а только 13 из них. Они доели оставшееся печенье, но каждая крыса смогла съесть втрое меньше печенья, чем накануне. Сколько пачек печенья было на складе первоначально?

4(3). Незнайка и Пончик одновременно начали сбор земляники: Незнайка собирал ягоды в трехлитровый бидон, а Пончик – в четырехлитровый, причем Незнайка собирал ягоды в 1,8 раза медленнее. В какой-то момент они поменялись бидонами и закончили сбор ягод одновременно (набрав полные бидоны). Сколько литров земляники собрал Пончик за все время? А сколько он собрал ягод до обмена бидонами?

5(4). В семье четыре человека. Если Алисе удвоят стипендию, то общий доход всей семьи возрастет на 2,5%, если вместо этого маме повысят зарплату в полтора раза – возрастет на 18,75%, если же зарплату на 45% повысят папе – возрастет на 18,45%. На сколько процентов возрастет доход всей семьи, если дедушке повысят пенсию на 20%?

6(4). Для некоторых натуральных чисел n и k выполняется соотношение

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(k-1)\cdot k}=2008$$

(в числителе дроби записано произведение всех натуральных чисел от 1 до n, а в знаменателе – от 1 до k). Найдите n и k. Ответ обоснуйте.

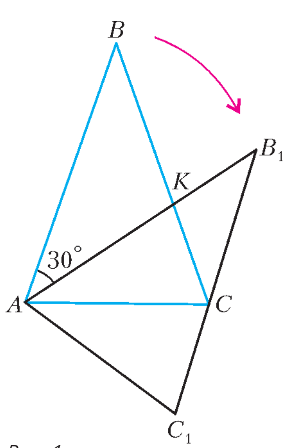


Рис. 1

7. Равнобедренный треугольник ABC с основанием AC поворачивают вокруг точки A на угол 30°, при этом точка B переходит в точку B_1, точка C – в точку C_1, а отрезок B_1C_1 проходит через точку C (рис.1).

а)(4) Найдите расстояние от точки K до стороны AC (K – это точка пересечения отрезков AB_1 и BC), если известно, что $AB = 6$.

б)(2) Найдите длину отрезка BC_1.

в)(2) Найдите площадь четырехугольника ABB_1C_1.

8(4). Города A и B расположены на берегу реки, причем город B лежит ниже по течению. В 7 часов утра из A в B отправился плот, плывущий относительно берегов со скоростью течения реки. В 9 часов утра из B в A отправилась лодка, которая встретилась с плотом в 11 часов утра. Доплыв до города A, лодка мгновенно повернула обратно и приплыла в город B одновременно с плотом. В какое время они прибыли в город B?

9(3). Решите неравенство

$$x+\frac{4x^2+6x+3}{x^2-x-6}>\frac{9}{5x-15}+\frac{5x+1}{5x+10}.$$

10(4). У одного человека был прямоугольный сад со сторонами 55 м и 40 м, и ему захотелось проложить в нем дорожку шириной 1 м, как показано на рисунке 2. Чему равна площадь дорожки?

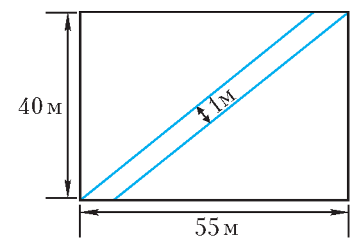


Рис. 2

11(4). Фигура M на координатной плоскости состоит из точек, координаты которых удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} y+3\ge k(x+1), \\ y\le 1-|x-3|. \end{cases}$$

Определите, при каком значении параметра k площадь фигуры M равна 20.

12(3). Найдите $\dfrac{\sin 5x}{\sin x}$, если $\dfrac{\sin 3x}{\sin x}=\dfrac{6}{5}$.

13(4). Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$|x+3|+|x+6|=|y-2|+|y+1|.$$

14(5). При каких значениях параметра a уравнение

$$x^4+(a-3)x^2+(a+10)^2=0$$

имеет четыре корня, расположенные в порядке возрастания, причем эти четыре корня составляют арифметическую прогрессию?

Вступительное задание по физике

1. Стеклянная банка вмещает не более 3 л воды. Вес банки, целиком заполненной водой, составляет 40 Н. Определите объем стекла, из которого изготовлена банка. Плотность стекла $\rho_с = 2500$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, $g = 10$ Н/кг.

2. История сохранила некоторые подробности одного из последних путешествий таракана Митрофана по полу кухни. На графике (рис.3) показано, как изменялось со временем расстояние от таракана до точки старта. Известно, что все время таракан двигался с постоянной по величине скоростью, не проходя при этом одну точку дважды. Первые три и последние три секунды своего путешествия он двигался по прямой линии. Используя данные графика, определите модуль скорости таракана и пройденный им путь. Нарисуйте траекторию движения таракана в масштабе 1:10.

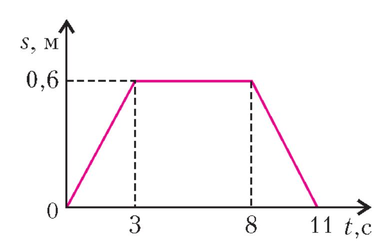


Рис. 3

3. Эхолот, установленный на всплывающем с постоянной скоростью $v = 3$ м/с батискафе, посылает короткий звуковой импульс. На какой глубине находился в этот момент эхолот, если глубина моря в месте погружения составляет $H = 3$ км, а отраженный от дна импульс был зарегистрирован эхолотом в момент его выхода на поверхность? Скорость звука в воде $v_{зв} = 1500$ м/с.

4. Два груза массами $m_1 = 200$ г и $m_2 = 300$ г соединены легкой пружиной и насажены на гладкую вертикальную спицу. Вначале нижний конец спицы упирается в горизонтальную поверхность стола, груз массой m_1 находится внизу (рис. 4,*а*), при этом пружина сжата, и ее длина равна $L_1 = 12$ см. Если конструкцию подвесить на нити, прикрепив ее к грузу массой m_2 (рис.4,*б*), длина пружины станет равной $L_2 = 22$ см. Какой будет длина пружины, если конструкцию подвесить на нити, прикрепленной аналогично, но только к грузу массой m_1?

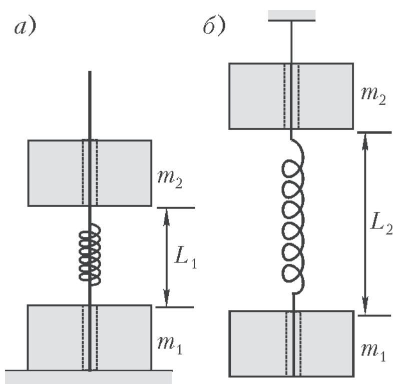


Рис. 4

5. Проведенные с помощью манометра измерения давления жидкости на разных глубинах в открытом резервуаре дали следующие результаты: у дна резервуара давление составило $p_1 = 34{,}8$ кПа, а на расстоянии $h = 1$ м от дна оно составило $p_2 = 27{,}8$ кПа. Определите по этим данным плотность жидкости и высоту столба жидкости в резервуаре. При вычислениях считайте $g = 9{,}8$ Н/кг. Манометр измеряет разность между полным давлением на данной глубине и атмосферным давлением.

6. Металлический брусок в форме куба подвешен на тонкой невесомой нерастяжимой длинной нити так, что одна из его плоскостей горизонтальна. С помощью динамометра, прикрепленного к другому концу нити, измеряют вес кубика в воздухе и в широком сосуде с жидкостью. Зависимость показаний динамометра от расстояния от нижней грани кубика до дна сосуда изображена на графике (рис.5). Определите по этим показаниям высоту столба жидкости в сосуде, длину ребра кубика, а также плотности жидкости и материала кубика. Изменением уровня жидкости в сосуде при поднятии кубика пренебречь. Динамометр в жидкость не погружается. Силой Архимеда в воздухе пренебречь. При вычислениях считать $g = 10$ Н/кг.

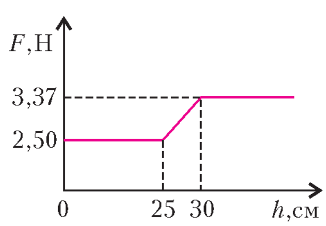


Рис. 5

7. На краю горизонтальной поверхности стола лежит, частично выступая за край, тонкий однородный деревянный стержень. Чтобы приподнять выступающий конец стержня, требуется минимальная сила F_1. Чтобы приподнять конец стержня, находящийся на столе, требуется надавить на выступающий конец стержня с минимальной силой F_2. Какая часть стержня выступает за край стола, если известно, что $F_2 = 4F_1$?

8. В стеклянный стакан массой $m_с = 100$ г налили горячую воду массой $m_в = 200$ г при температуре $t_в = 60$ °С. После того как температуры воды и стакана сравнялись, оказалось, что температура стакана повысилась на $\Delta t = 40$ °С. Определите начальную температуру стакана и его конечную температуру. Удельная теплоемкость воды $c_в = 4200$ Дж/(кг · °С), удельная теплоемкость стекла $c_с = 840$ Дж/(кг · °С). Потерями тепла пренебречь.

9. В калориметр, где находится вода массой $m_в = 2{,}5$ кг при температуре $t_в = 5$ °С, помещают кусок льда массой $m_л = 700$ г. Когда установилось тепловое равновесие, оказалось, что масса льда увеличилась на $m = 64$ г. Определите начальную температуру льда. Удельная теплоемкость воды $c_в = 4200$ Дж/(кг · °С), удельная теплоемкость льда $c_л = 2100$ Дж/(кг · °С), удельная теплота кристаллизации воды $\lambda_в = 3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг. Потерями тепла пренебречь.

10. Используя два резистора с некоторыми сопротивлениями R_1 и R_2 собирают две схемы: в одной их соединяют последовательно, а в другой – параллельно. На рисунке 6 изображены графики *А* и *Б* зависимости силы тока в цепи от приложенного напряжения. Определите, какой из графиков соответствует каждой схеме. Найдите также значения сопротивлений R_1 и R_2 резисторов.

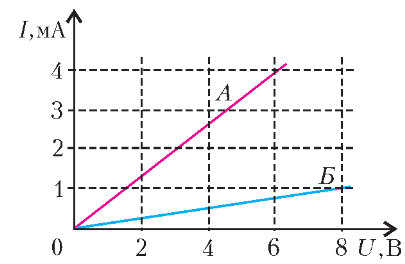


Рис. 6

11. Два автомобиля двигаются по прямолинейному участку шоссе в одном направлении. В начальный момент времени расстояние между автомобилями $l = 300$ м. Скорость автомобиля, едущего первым, составляет $v_0 = 36$ км/ч, а у второго автомобиля скорость в два раза больше. Оба автомобиля одновременно начинают разгон с постоянными ускорениями. Ускорение первого автомобиля равно $a = 1$ м/с^2, а второго – в два раза меньше. Каково минимальное расстояние между автомобилями при движении?

12. Массивная платформа движется с постоянной скоростью v_0 по горизонтальному полу (рис.7). С заднего края платформы производится удар по мячу. Модуль начальной скорости мяча относительно платформы равен $u = 2v_0$, причем вектор $\vec{u}$ составляет угол $\alpha = 60°$ с горизонтом. На какую максимальную высоту над полом поднимется мяч? На каком расстоянии от края платформы будет находиться мяч в момент приземления? Высотой платформы и сопротивлением воздуха пренебречь. Все скорости лежат в одной вертикальной плоскости.

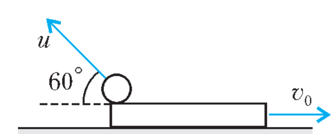


Рис. 7

13. Через легкий блок с неподвижной осью перекинута легкая нерастяжимая нить так, что ее концы свисают вертикально. К ним прикреплены грузы массами $m = 400$ г каждый. На один из грузов положили перегрузок массой $m = 200$ г. Найдите силу давления перегрузка на груз в процессе движения. Найдите силу давления на ось блока. Трением в оси блока пренебречь.

14. Стальной шарик массой $m = 0{,}1$ кг падает без начальной скорости на горизонтальную поверхность стола с высоты $h_1 = 0{,}5$ м и отскакивает после удара на высоту $h_2 = 0{,}4$ м. Найдите среднюю силу давления шарика на стол при ударе, если длительность удара $\tau = 0{,}02$ с. Сопротивлением воздуха пренебречь. Действие силы тяжести на шарик во время удара не учитывать.

15. Два сосуда, содержащие кислород при температуре 300 К, соединены тонкой горизонтальной трубкой постоянного сечения. В трубке находится перекрывающая ее капелька ртути. В начальный момент объемы, занимаемые кислородом по обе стороны от капельки, равны 40 см^3 каждый. Когда один из сосудов медленно нагрели на 3 К, а другой охладили на 3 К, капелька ртути сместилась вдоль трубки на 1 см. Какова площадь поперечного сечения трубки?

16. Сосуд объемом $V = 5$ л содержит сухой воздух при давлении $p_1 = 1$ атм. В сосуд впрыснули воду массой $m = 1{,}5$ г. Во время всего опыта в сосуде поддерживается постоянная температура $100\ °\text{C}$. Будет ли пар, образовавшийся в результате испарения воды, насыщенным? Определите влажность воздуха и давление влажного воздуха в сосуде после установления равновесия.

17. Маленький заряженный шарик прикреплен к легкой непроводящей нити и находится в равновесии в горизонтальном однородном электрическом поле. Шарик имеет массу m и положительный заряд q. Известно, что сила натяжения нити в 2 раза больше действующей на шарик силы тяжести. Определите модуль напряженности электрического поля и угол между нитью и вертикалью.

Новый прием в школы-интернаты при университетах

Специализированный учебно-научный центр (СУНЦ) МГУ (школа имени академика А.Н. Колмогорова), а также СУНЦ НГУ, СУНЦ УрГУ и Академическая гимназия при СПбГУ объявляют набор учащихся в 10 классы (двухгодичное обучение) на физико-математическое и химико-биологическое отделения и в 11 классы (одногодичное обучение) на физико-математическое отделение. В рамках двухгодичного физико-математического отделения кроме основного профиля выделяется компьютерно-информационный класс (СУНЦ МГУ). Химико-биологическое отделение представлено специализациями по химии и биологии.

Зачисление в школу проводится на конкурсной основе. Первый тур экзаменов – заочный письменный экзамен по математике и физике или химии. Успешно выдержавшие заочный экзамен в апреле-мае приглашаются в областные центры Российской Федерации на устные экзамены. Однако *допускается участие в очном туре школьников, не участвовавших в заочном туре*.

Победители заочного тура СУНЦ МГУ будут приглашены на очный тур (в марте 2009 года, вместе с победителями проекта «Покори Воробьевы горы»), где получат возможность досрочно поступить в СУНЦ МГУ.

Ниже приводятся условия задач *заочного* вступительного экзамена. Работа должна быть выполнена в обычной ученической тетради, на обложке которой указываются фамилия, имя, отчество (полностью), желаемый профиль обучения, подробный домашний адрес с индексом, электронный адрес (если имеется), адрес и номер школы, класс.

Работу нужно отправить простой бандеролью на имя Приемной комиссии по одному из следующих адресов (обязательно вложите конверт с маркой, заполненный на ваш домашний адрес с индексом):

121357 Москва, Кременчугская ул., 11, СУНЦ МГУ (внимание: жители Москвы принимаются в школу без предоставления общежития), телефон Приемной комиссии: (495)445-11-08, сайт: http://www.pms.ru, e-mail: priem@pms.ru;

199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/96, Академическая гимназия;

620137 Екатеринбург, ул. Голощекина, 30, СУНЦ УрГУ;

630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11, СУНЦ НГУ (Олимпиадный комитет).

Срок отправки работ – *не позднее 20 февраля 2009 года* (по почтовому штемпелю). Работы, высланные позже этого срока, рассматриваться не будут.

Если вы не сможете решить все задачи – не отчаивайтесь: Приемная комиссия рассмотрит работы с любым числом решенных задач.

Вступительные экзамены второго, *очного* тура будут проводиться с 20 марта по 20 мая 2009 года по регионам.

Вступительное задание заочного тура

Математика

Для поступающих в 10 класс

1. Можно ли число $\dfrac{1}{2009}$ представить в виде суммы: а) трех; б) четырех чисел, обратных различным нечетным числам?

2. Конференция началась между 10 и 11 часами утра, когда часовая и минутная стрелки лежали на одной прямой, но были направлены в разные стороны, а закончилась между 16 и 17 часами того же дня, когда стрелки часов совпали. Сколько времени длилась конференция?

3. Решите уравнение

$$\sqrt{4x - y^2} = \sqrt{y+2} + \sqrt{4x^2 + y}\,.$$

4. Ортоцентр (точка пересечения высот) остроугольного треугольника ABC делит высоту, выходящую из точки C, в отношении 3:1, считая от вершины C. Пусть M – середина этой высоты. Чему равен угол AMB?

5. Числа x, y, z таковы, что

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = 1\,.$$

Какие значения может принимать выражение

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\,?$$

Для поступающих в 11 класс

1. Можно ли число $\dfrac{1}{2008}$ представить в виде суммы: а) двух; б) трех; в) n различных чисел, обратных натуральным, т.е. чисел вида $\dfrac{1}{a}$, где a – натуральное число?

2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, центр которой лежит внутри него. Найдите площадь четырехугольника, если углы BAD и DAC равны, а диагонали AC и BD равны m и n соответственно.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{y}} + \dfrac{y}{\sqrt{x}} = xy, \\ x^3 + y^3 = 8. \end{cases}$$

4. Сколько сторон может иметь выпуклый многоугольник, если сумма его тупых углов равна $3000°$?

5. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, где a, b и c – целые числа. Найдите наибольшее значение $|b|$, если $|f(x)| \le 1$ при всех $x \in [0;1]$.

Физика

(физико-математическое отделение)

Для поступающих в 10 класс

1. Частицы a и b движутся по оси X. В момент времени $t_0 = 0$ они находились в начале координат, а затем одновременно достигли точки C, координата которой $x_C = s$. Частица a первую половину пути прошла со скоростью $2v$, вторую половину пути – со скоростью $v/2$. Частица b пошла первую половину пути со скоростью $v/2$, вторую половину пути – со скоростью $2v$. Найдите интервал времени, в течение которого расстояние между частицами принимает постоянное наибольшее значение s_m. Определите s_m и среднее значение скорости частиц.

2. Частица движется по прямой линии с постоянным ускорением, проходит путь l за пятую секунду и останавливается. Найдите путь s, пройденный частицей за третью секунду.

3. Центр тяжести C шара радиусом R находится на расстоянии $b = R/\sqrt{2}$ от геометрического центра шара O. Шар поставили на шероховатую наклонную плоскость, образующую угол $\alpha = \pi/6$ с горизонтальной плоскостью. Найдите угол β, образуемый отрезком CO с вертикалью в положении равновесия.

4. Наклонная плоскость образует угол $\alpha = \pi/6$ с горизонтальной плоскостью. Если телу, находящемуся у основания наклонной плоскости, сообщить начальную скорость, то оно остановится через интервал времени $t_п$ и соскользнет до основания за интервал времени $t_{сп}$, причем $t_{сп}/t_п = 2$. Найдите коэффициент трения μ между телом и плоскостью.

5. Батискаф массой m выполнен в форме цилиндра с площадью основания S и высотой d, составленного из двух половинок с площадью основания S. Батискаф находится в положении равновесия на глубине H, равной расстоянию от поверхности воды до средней плоскости поперечного сечения цилиндра. Давление в батискафе равно атмосферному давлению. Найдите величину сил реакции N, действующих на каждую половинку цилиндра.

Для поступающих в 11 класс

1. Для удержания на поверхности земли метеорологического шара-зонда массой $m = 12{,}25$ кг необходимо приложить силу $F = 7mg$. Оболочка шара герметичная и упругая. Шар поднимается до максимальной высоты, на которой объем шара увеличивается в два раза. Найдите эту максимальную высоту подъема H. Известно, что плотность воздуха зависит от вертикальной координаты z по закону $\rho(z) = \rho_0 (1/2)^{z/h}$, где $\rho_0 = 1{,}225$ кг/м^3 – плотность воздуха у поверхности земли, $h \approx 5$ км.

2. Одинаковые массы водорода и гелия находятся в сосуде объемом V_1, который отделен от пустого сосуда объемом V_2 полунепроницаемой перегородкой, пропускающей только молекулы водорода. После установления равновесия давление в первом сосуде уменьшилось в два раза. Найдите отношение V_2/V_1.

3. В координатах p, V изобразите циклический процесс a–b–c–a, для которого отрезок bc – изобара, отрезок ca – изохора, кривая ab – произвольный процесс. Температуры в состояниях a и b одинаковы: $T_a = T_b$, КПД цикла η, разность максимальной и минимальной температур в цикле ΔT. Найдите работу A'_{ab}, совершенную газом в процессе a–b.

4. Заряд $q_1 = Q$ находится в начале координат на расстоянии b от заряда $q_2 = -q$. Найдите потенциал, создаваемый системой зарядов, и уравнение эквипотенциальной поверхности с потенциалом, равным нулю: $F(x_s, y_s, z_s) = \text{const}$, где $\vec{s} = (x_s, y_s, z_s)$ – радиус-вектор точек искомой поверхности.

5. Генератор постоянного напряжения U развивает мощность P, сопротивление линии передачи электроэнергии R. Найдите КПД линии электропередачи.

Химия

(химико-биологическое отделение)

1. 2,24 л смеси водорода с кислородом (н.у.) взорвали. Продукты взрыва при 1 атм и 273 °С занимают объем 3,36 л. Определите возможное содержание кислорода (в % по объему) в исходной смеси.

2. Напишите не менее трех уравнений реакций, соответствующих схеме

$$A + n\,H_2SO_4 = m\,CuSO_4 + B + C + D\,.$$

В левой части уравнения может меняться одно исходное вещество (A), справа может быть разное число продуктов. Укажите условия протекания реакций.

3. Белый порошок массой 12 г реагирует с избытком 30%-й серной кислоты. При этом выделяется 2,45 л газа (при 20 °С и 745 мм рт.ст.). Выделяющийся газ способен обесцвечивать 1%-й раствор перманганата калия в 2%-й серной кислоте. 1) Каков может быть состав исходного порошка? 2) Напишите уравнения возможных реакций.

Школа «Комбинаторная математика и теория алгоритмов»

В августе 2008 года на базе отдыха «Берендеевы поляны», которая расположена в Костромской области, мы – коллектив преподавателей Московского физико-технического института – впервые провели летнюю школу «Комбинаторная математика и теория алгоритмов» для старшеклассников.

Ни для кого, конечно, не секрет, что комбинаторика – это один из самых красивых и увлекательных разделов современной математики, богатый задачами, которые просты по своей постановке и в то же время далеко не всегда поддаются решению. Практическое значение комбинаторных методов также не подлежит сомнению. Столь популярные в последние годы «высокие технологии» в существенной мере опираются на идеи комбинаторной математики. Здесь и информационные технологии (задачи поиска в интернете и пр.), и технологии биоинженерии, и многое-многое другое.

Наш коллектив активно занимается исследованиями именно в области комбинаторики, теории алгоритмов и их разнообразных приложений. Наша цель – привлечь талантливых школьников к этим исследованиям, на примерах *реальных* (а не только учебных) задач продемонстрировать им все разнообразие и значимость комбинаторной проблематики.

Разумеется, мы вовсе не пытались ограничиться рассмотрением сильно специализированных тем. Математика – это, по существу, живая и единая наука, а потому мы обсуждали и многие вопросы, которые, на первый взгляд, не имеют непосредственной связи ни с комбинаторикой, ни с алгоритмами. Тем не менее, комбинаторно-алгоритмическое направление деятельности в рамках школы оставалось для нас основным.

Приведем примеры некоторых мини-курсов, которые мы прочитали на школе:

- А.М.Райгородский, «Вероятность и вероятностные методы решения комбинаторных задач»,
- Д.В.Мусатов, «Основные идеи теории сложности вычислений»,
- А.В.Савватеев, «Некоторые задачи теории игр»,
- А.А.Кустарёв, Г.Г.Гусев, «Избранные вопросы геометрии и топологии»,
- В.А.Кошелев, «Задача об отыскании выпуклых многоугольников в множествах точек на плоскости: теория и алгоритмы».

Занятия проходили живо и неформально, и мы решили сделать эту школу традиционной, причем проводить ее будем и летом, и зимой (т.е. два раза в год). Ближайшая школа запланирована на 4–11 февраля 2009 года. Пройдет она на той же базе «Берендеевы поляны». Вся информация о новой школе размещена на странице:

http://www.lmsh.ru/?pg=14

Кроме того, мы организовали кружок для 10- и 11-классников, на котором рассматриваем задачи комбинаторики и теории алгоритмов. Сайт кружка расположен по адресу:

http://circle.combalg.ru/

И на кружке, и на школе мы очень ждем заинтересованных, талантливых старшеклассников со всей страны!

А.Райгородский

Открылся новый математический факультет

Факультет математики Государственного университета – Высшей школы экономики является одним из немногих в России факультетов, который будет выдавать диплом по специальности «математик». Будущее время использовано сознательно – факультет совершенно новый, и первый в его истории набор студентов прошел летом 2008 года.

Преподавателями факультета являются сотрудники Независимого московского университета – уникального учебного центра, готовящего математиков-исследователей высокого уровня. Одним из главных мотивов создания нового факультета математики стала давняя идея организации «дневной версии» Независимого университета, соединяющей в себе все преимущества полноценного государственного университета с возможностью сколь угодно глубокого изучения математики в традициях лучших московских математических школ и семинаров. Другая и не менее важная цель состояла в том, чтобы дать возможность молодым людям, интересы которых к третьему-четвертому курсу по тем или иным причинам отворачиваются от чистой математики, максимально эффективно переключиться на более прикладные задачи, такие, например, как математическая экономика.

Поступить на математический факультет можно двумя способами: либо по конкурсу, в котором в 2008 году учитывались результаты ЕГЭ по русскому языку и по математике и результаты устного вступительного экзамена по математике (который имел решающее значение), либо вне конкурса – став призером заключительного этапа Всероссийской математической олимпиады школьников или победителем математической олимпиады, проводимой факультетом.

Организация устного вступительного экзамена была во многом заимствована у Петербугской математической олимпиады, где уже много лет успешно проводится устный тур, на котором участникам предоставляется несколько попыток рассказа решения каждой задачи. В 2008 году экзамен состоял в решении пяти задач (никаких «развернутых ответов» на «теоретические вопросы» от абитуриентов не требовалось). Главные принципы, которыми руководствовались составители варианта, таковы: задачи должны быть интересными, не требующими никакой специальной натасканности на тот или иной раздел «вступительной математики», но позволяющими продемонстрировать знания и навыки, *действительно нужные* для профессиональных занятий математикой и ее естественнонаучными приложениями.

Официальный регламент экзамена и математической олимпиады математического факультета, а также разнообразные неформальные подробности о его жизни можно узнать на сайте:

http://vyshka.math.ru

Примеры вступительных заданий приведены в приложении к этому номеру журнала.

А.Городенцев

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №5)

1. Да, можно. Пример приведен на рисунке 1 (в каждой строке сумма равна 40, а в каждом столбце сумма равна 24).

1	11	5	14	9
8	3	12	4	13
15	10	7	6	2

Рис. 1

2. 15.

Предположим, что за столом сидят не менее 16 рыцарей. Тогда какие-то два рыцаря сидят рядом. Поскольку лжецов не менее одного, найдутся два соседних рыцаря, рядом с одним из которых сидит лжец. Значит, есть рыцарь, который дал ответ «1», и тогда все дали ответ «1». Отсюда следует, что рыцари сидят парами, каждую пару рыцарей окружают лжецы. Кроме того, любой лжец окружен рыцарями (иначе найдется лжец, соседи которого – рыцарь и лжец, и тогда он сказал правду, что невозможно). Всем этим условиям удовлетворяет только такое расположение:

... Р Р Л Р Р Л Р Р Л ...

(Р – рыцарь, Л – лжец). При этом общее число человек кратно трем, что не так. Противоречие.

Осталось привести пример, когда за столом сидели 15 рыцарей. Вот он:

Л Р Л Р

При этом каждый из сидящих дал ответ «2».

3. Да, обязательно.

Пусть нам дано число A, в котором n цифр. Заметим, что

прибавление числа 2008 пять раз равносильно прибавлению числа 10040. Если же мы прибавим к числу A число 10040 всего 10^n раз, то результатом будет число, которое получается выписыванием подряд чисел 10040 и A и, тем самым, начинается на 1. Значит, прибавив к числу A число 2008 всего $5 \cdot 10^n$ раз, мы получим число, начинающееся на 1.
Попробуйте решить более общую задачу: если даны любые натуральные числа A и B и мы прибавляем к числу A число B, затем к результату снова прибавляем число B и так далее, то в какой-то момент мы обязательно получим число, начинающееся на 1.

4. Нет, нельзя.
Предположим, что такой срез возможен. У отпиленного кусочка четыре грани: одна – это треугольник со сторонами 2, 3, 4, а три других – прямоугольные треугольники с гипотенузами 2, 3 и 4. Пусть a и b – катеты треугольника с гипотенузой 4. Ясно, что один из этих катетов не больше 2 (поскольку является также катетом треугольника с гипотенузой 2), а другой – не больше 3 (аналогично). По теореме Пифагора должно быть выполнено равенство $a^2 + b^2 = 4^2 = 16$. С другой стороны, $a^2 + b^2 < 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$ – противоречие. Значит, такой срез невозможен.

5. Заметим, что среди имеющихся у нас гирь три самые маленькие уравновешивают одну самую большую. Значит, это единственный способ уравновесить одну гирю тремя (в любых других случаях чаша с тремя гирями перевесит чашу с одной).
Тогда первым взвешиванием кладем на одну чашу весов гири с надписями 1 г, 2 г, 3 г, а на вторую чашу – гирю с надписью 6 г. Если весы не будут в равновесии, задача решена – какие-то надписи перепутаны. Если же весы в равновесии, то гиря с надписью 6 г действительно весит 6 г, а гири с надписями 1 г, 2 г, 3 г – действительно гири с этими массами (но, может быть, перепутаны между собой).
Следующим взвешиванием кладем на первую чашу весов гири с надписями 1 г и 6 г, а на вторую чашу – гири с надписями 3 г и 5 г. Ясно, что масса гирь на первой чаше не меньше 7 г, а на второй – не больше 8 г. Поэтому, если вторая чаша перевешивает первую, то действительно на первой чаше 7 г, на второй 8 г, и нетрудно видеть, что надписи на всех гирях верны. В противном случае какие-то надписи перепутаны.

ЗАДАЧИ

(см. с.24)

1. Проведем отрезок так, чтобы один из знаков «+» превратился в цифру 4, и получим верное равенство (рис.2):

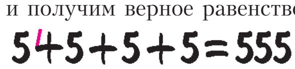


Рис. 2

2. Вычтем 50 из каждого числа, которое больше 50. По условию ни одна из разностей не равна ни одному из 25 чисел, которые не превосходят 50. Поэтому вместе с ними разности дают 50 различных натуральных чисел, которые не превосходят 50, т.е. это все числа от 1 до 50. Их сумма равна 51×25, а сумма всех исходных чисел равна, стало быть, $51 \times 25 + 50 \times 25 = 101 \times 25 = 2525$.

3. Расположим коробки в ряд так, чтобы число карандашей в них возрастало слева направо. Заметим, что тогда в самой левой коробке минимум один карандаш, во второй слева — минимум два, ..., в десятой слева — минимум 10 карандашей. Из самой левой коробки возьмем любой лежащий в ней карандаш. Поскольку во второй коробке лежат карандаши минимум двух разных цветов, там найдется карандаш не того цвета, что мы взяли из первой коробки. Возьмем его. В третьей коробке лежат карандаши минимум трех разных цветов. Поэтому там найдется карандаш, цвет которого отличается от цветов обоих уже выбранных. Возьмем его. Действуя так и дальше, мы выберем искомые 10 карандашей разных цветов.

4. $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$.
Если a не меньше трех, то дробь $\frac{1}{a}$ не больше $\frac{1}{3}$, а две другие дроби меньше $\frac{1}{3}$, и сумма трех дробей меньше 1. Поэтому a меньше 3. Но a не может равняться 1 – тогда сумма дробей будет больше 1. Значит, $a = 2$, и нам надо найти все такие числа b и c, что $\frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+b+c} = \frac{1}{2}$. Далее рассуждаем аналогично. Если b не меньше 2, то дробь $\frac{1}{2+b}$ не больше $\frac{1}{4}$, а другая дробь меньше $\frac{1}{4}$, и их сумма не может равняться $\frac{1}{2}$. Поэтому $b = 1$. Тогда $\frac{1}{3+c} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, откуда $c = 3$.

5. Пусть O – середина стороны AB (рис.3). Проведем из точки A прямую, перпендикулярную DO, а из точки B проведем прямую, перпендикулярную CO. Пусть X – точка пересечения этих прямых. Поскольку угол DOC – прямой, DO параллельна BX, а CO параллельна AX, и треугольник AXB – прямоугольный. Так как O – середина AB, то OD будет срединным перпендикуляром к AX, а OC будет срединным перпендикуляром к BX. Поэтому $AD = XD$ и $BC = XC$. Значит, $AD + BC = XD + XC \geq$ $\geq CD$ по неравенству треугольника.

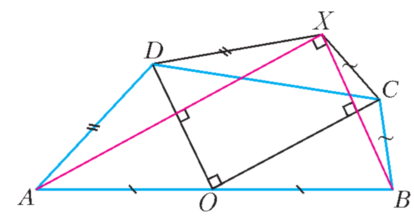


Рис. 3

ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ И ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ

1. По теореме Пифагора $AC = \frac{\sqrt{5}}{2} AB$. Далее,
$AM = AK = AC - BC = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB = \frac{1}{\varphi} AB$. Значит, $\frac{AB}{AM} = \varphi$.

2. Непосредственный подсчет показывает, что $\frac{AE}{OA} = \sqrt{3-\varphi}$. С другой стороны, отношение стороны правильного пятиугольника к радиусу описанной окружности равно той же самой величине $2\sin 36° = \sqrt{3-\varphi}$. Значит, отрезок AE равен стороне правильного пятиугольника, вписанного в окружность с радиусом OA.

3. Равнобедренный прямоугольный треугольник, два золотых треугольника и треугольник с углами $\frac{540°}{7}$, $\frac{540°}{7}$, $\frac{180°}{7}$.

4. При раскрытии скобок в числителе правой части формулы (6) члены с четными степенями $\sqrt{5}$ взаимно уничтожатся. Остальные члены имеют вид $\sqrt{5}q$, где q – рациональное число. После сокращения с $\sqrt{5}$ в знаменателе получаем рациональное число.

5. Нетрудно доказать по индукции, что n-й член обобщенной последовательности Фибоначчи $f_n(a,b)$ выражается через обычную последовательность Фибоначчи f_n следующей формулой:

$$f_n(a,b) = f_{n-2} \cdot a + f_{n-1} \cdot b .$$

Сочетая эту формулу с формулой Бинэ, получаем требуемое выражение.

6. Последовательность (10) является монотонной и ограничена сверху числом φ. Неравенство $a_{n-1} < a_n < \varphi$ доказывается по индукции. Шаг индукции заключается в добавлении единицы и извлечении квадратного корня из всех трех (положительных) частей неравенства. Согласно теореме Больцано–Вейерштрасса, последовательность a_n сходится.

Последовательность (11) распадается на две подпоследовательности – с нечетными и четными номерами. Первая является монотонно возрастающей и ограниченной сверху числом φ, а вторая – монотонно убывающей и ограниченной снизу числом φ. Оба эти факта доказываются одновременно по индукции. База индукции сводится к простой проверке неравенства $b_1 < b_3 < \varphi$. Шаг индукции заключается в применении к двойному неравенству $b_n < b_{n+2} < \varphi$ (соответственно, $b_n > b_{n+2} > \varphi$) двух операций – взятия обратной величины и добавления единицы. Первая из этих операций меняет знак неравенства. Получаем: $b_{n+1} > b_{n+3} > \varphi$ (соответственно, $b_{n+1} < b_{n+3} < \varphi$). Следовательно, каждая из этих подпоследовательностей сходится. Предел каждой из них положителен и должен удовлетворять уравнению $x = 1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{x}}$, которое сводится к уже знакомому нам квадратному уравнению $x^2 - x - 1 = 0$. Значит, оба предела совпадают и равны φ, а следовательно, к этому же пределу сходится и вся последовательность.

7. Примените метод математической индукции.

ДВИЖЕНИЕ ПРОВОДНИКА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

1. $\omega = \dfrac{\mathcal{E}_{\max}}{\Phi_{\max}} = 60$ рад/с. **2.** $\mathcal{E}_{\text{инд}} = \sqrt{B_{\text{г}}^2 + B_{\text{в}}^2}\, vl = 250$ мВ.

3. $I = \dfrac{3}{7}\dfrac{Bv}{\rho_l} = 15$ мА.

4. $v = \dfrac{mgR(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{B^2l^2\cos\alpha(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} = 2$ м/с^2.

5. $v = \dfrac{mg(R/2 + r)}{B^2l^2} = 6$ м/с. **6.** $v = \dfrac{\mathcal{E}}{Bl} - \dfrac{mgr}{B^2l^2} = 5$ м/с.

7. $a = \dfrac{mg\sin\alpha}{m + CB^2l^2\cos^2\alpha} = 2$ м/с^2. **8.** $x_{\max} = \dfrac{v_0\sqrt{mL}}{Bl} = 0{,}4$ м.

XXXIX МЕЖДУНАРОДНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Задача 1

1.1. $TG = 0{,}016$ м. **1.2.** $\alpha_1 = 20{,}6°$, $\alpha_2 = 30°$.

1.3. $m_1 = 0{,}61$ кг, $\beta = 23{,}6°$. **2.1.** См. рис.4.

2.2. Площадь под графиком $\mu(\alpha)$ численно равна совершенной работе. Тогда $W_{\text{t}} = S_{OAB} - S_{OBCDFO}$, а $W_{\text{p}} = S_{OEDFO}$.

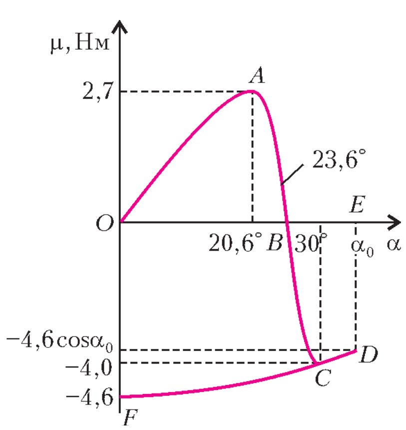


Рис. 4

2.3. $\alpha_0 = 34{,}7°$, $W_{\text{p}} \approx 2{,}6$ Дж.

3.1.1. Равновесие устойчиво.

3.1.2. $\mu = -47{,}2\Delta\alpha$ (Н · м).

3.1.3. $\dfrac{d^2\Delta\alpha}{dt^2} = -47\Delta\alpha$, $\tau = 3{,}2$ с.

3.2. $\Phi_1 = 0{,}23$ кг/с.

3.3. $\Phi_2 = 0{,}7$ кг/с.

Задача 2

1.1. См. рис.5.

1.2. $\varphi = \arcsin\dfrac{1}{\beta n}$.

2. Кольцо имеет радиус $r = f\theta$, его центр находится на расстоянии $f\alpha$ от главной оптической оси.

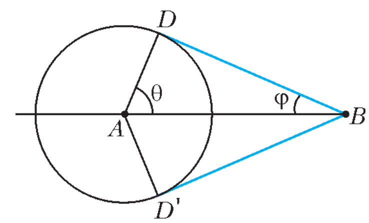


Рис. 5

3.1. $p_{\min}$ равно 16 атм для протонов, 4,6 атм для каонов, 0,36 атм для пионов.

3.2. $p_{1/2} = 6$ атм, $\theta_{\text{к}} = 1{,}6°$, $\theta_\pi = 2\theta_{\text{к}} = 3{,}2°$; мы не сможем наблюдать кольцевого изображения для протонов.

4.1. $\dfrac{\Delta\theta_{\text{к}}}{\Delta P} = 0{,}51\dfrac{1°}{\text{ГэВ}/c}$, $\dfrac{\Delta\theta_\pi}{\Delta P} = 0{,}02\dfrac{1°}{\text{ГэВ}/c}$.

4.2. $\Delta P < 0{,}3$ ГэВ/c.

5.1. $T_{\min} = 0{,}517Mc^2$.

5.2. Для α-частиц $T_{\min} = 1{,}96$ ГэВ, для электронов $T_{\min} = 0{,}264$ ГэВ.

6.1. $\delta\theta = \dfrac{\delta n}{\theta} = 0{,}033°$. **6.2.1.** $0{,}017°; 0{,}006°$.

6.2.2. Красный, белый и синий.

Задача 3

1.1. $p(z) = p(0)\cdot e^{-\frac{Mg}{RT_0}z}$.

1.2.1. $p(z) = p(0)\cdot\left(1 - \dfrac{\Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{Mg}{R\Lambda}}$.

1.2.2. $\Lambda > \dfrac{Mg}{R} = 0{,}034$ К/м.

2.1. $G = \dfrac{\gamma - 1}{\gamma}\dfrac{Mg}{R}\dfrac{T_{\text{p}}}{T}$.

2.2.1. $\Gamma = \dfrac{Mg}{C_p}$.

2.2.2. $\Gamma = 0{,}00978$ К/м.

2.2.3. $T(z) = T(0) - \Gamma z$.

2.3. $T_{\text{p}}(z) = T_{\text{p}}(0)\cdot\left(\dfrac{T(0) - \Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{\Gamma}{\Lambda}}$.

2.4. $T_{\text{p}}(z) \approx T_{\text{p}}(0) - \Gamma z$.

3.1. При $\Lambda > \Gamma$ атмосфера нестабильна, при $\Lambda < \Gamma$ атмосфера стабильна, при $\Lambda = \Gamma$ атмосфера нейтральна.

3.2. $h = \dfrac{1}{\Lambda}\left(T(0) - \left(\dfrac{(T(0))^\Gamma}{(T_{\text{p}}(0))^\Lambda}\right)^{1/(\Gamma - \Lambda)}\right)$.

4.1. $T_{\text{p}}(96\text{ м}) = 294{,}04\text{ К} \approx 21\ °\text{C}$, $T_{\text{p}}(119\text{ м}) = 291{,}81\text{ К} \approx 20{,}8\ °\text{C}$.

4.2. $H = 142$ м, $T_{\text{p}}(H) = 293{,}6\text{ К} = 20{,}6\ °\text{C}$.

5.1. $\dfrac{dC(t)}{dt} + C(t)\dfrac{u}{W} = \dfrac{M}{LWH}$.

5.2. $C(t) = \dfrac{M}{LHu}\left(1 - \exp\left(-\dfrac{ut}{W}\right)\right)$.

5.3. $C = 2{,}3$ мг/м^3.

МОСКОВСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКЕ

1. Столкновение произойдет.

2. $L = \sqrt{6lR}$.

3. $P_{\max} = \dfrac{31}{231}mg$; $\Delta r = 0{,}001R$.

4. $L = \dfrac{R - r}{\sin\alpha}$.

5. КПД увеличивается на $\dfrac{1}{7}$.

6. $A^* = -A + \dfrac{q^2R}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$.

7. $B = \sqrt{\dfrac{1,26mR}{a^2t}}$.

8. $16I_0$; интенсивность не изменится, а фаза изменится на $\pi/2$.

НАПЕЧАТАНО В 2008 ГОДУ

журнал Квант ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

С.А.Дориченко, А.А.Егоров, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.Е.Пацхверия, М.В.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: 930-56-48
E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info
Сайт: kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г.Чехов Московской области,
Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru
Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00
Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59

Ананд досрочО
ОБЫГРАЛ КРАМНИКА

Поединок на первенство мира между Виши Анандом и Владимиром Крамником ожидался как большой шахматный праздник, ведь впервые после марафона Карпова с Каспаровым за доску сели два короля-классика, 14-й и 15-й чемпионы мира.

Этот матч, состоявшийся в октябре 2008 года в Бонне, был 50-м, юбилейным состязанием за шахматную корону. Напомним, что за год до этого, в конце 2007 года, в Мехико на чемпионате мира в турнире по круговой системе на вершину поднялся Ананд, а Крамник, разделивший 2-е место, получил право на матч-реванш. На сей раз двум корифеям предстояло сыграть 12 партий с полноценным контролем времени, а при счете 6:6 провести тай-брейк по быстрым шахматам.

Итак, все ждали праздника. Но в действительности матч сложился слишком прозаично, протекал с подавляющим преимуществом индийского гроссмейстера. По сути, поединок закончился уже после первой половины, когда Ананд забил сопернику три безответных гола. В заключительной встрече экс-чемпион тоже оказался у разбитого корыта и вынужден был предложить ничью, которая вполне устроила Ананда – он снова поднялся на шахматный трон.

Теперь не осталось ни одной системы, по которой Ананд не стал бы чемпионом мира: и по версии ФИДЕ, и по классике; в турнире и в матче. После нынешней матчевой победы Ананд встал в один ряд со своими знаменитыми предшественниками – Стейницем и Ласкером, Капабланкой и Алехиным, Ботвинником и Смысловым, Талем и Спасским, Фишером и Каспаровым.

Но почему игра в Бонне протекала в одни ворота? В основном называются две причины, обе на поверхности – плохая форма Крамника, не сумевшего подойти к главному испытанию на пике формы, и неудачный выбор секундантов, не снабдивших его плодотворными идеями. Но есть, на мой взгляд, еще одна причина, более существенная, обнаружившая себя еще восемь лет назад, когда Крамник победил Каспарова и впервые стал чемпионом.

Напомню, что тот матч Владимир получил от Гарри в качестве подарка, без всякого отбора. И парадокс в том, что Каспарову, жаждавшему матча-реванша, Крамник предложил… пройти необходимый отбор. В течение пяти лет все попытки Каспарова встретиться за доской со своим обидчиком были пресечены на корню, и именно на совести Крамника, уклонявшегося от борьбы, лежит потеря для шахматного мира великого чемпиона, от отчаяния закончившего свою спортивную карьеру. К тому же, Крамник почти официально провозгласил сомнительный принцип – с сильными шахматистами черными не напрягаться и довольствоваться ничьей, а ставку делать только на белый цвет.

Иначе говоря, Крамник устроил себе во всех отношениях комфортную жизнь, и такая жизненная стратегия не могла не дать сбой. Уровень его игры падал на глазах – в 2004 году чемпион мира чуть не потерял свой титул в матче с Леко (спасся в последний момент), в 2006 одолел Топалова лишь в тай-брейке, в 2008 не показал ни одного достойного результата. Последствия комфортной жизни окончательно проявились в Бонне. Игра Крамника поблекла и потеряла привлекательность. Как заметил Каспаров, «Ананд развеял иллюзию, что Крамник – великий матчевый игрок».

Но что же дальше? В 2009 году Ананд должен опять отстаивать свой титул – с победителем матча Топалов – Камский. Шахматное будущее Крамника менее определенно. Сомневаюсь, что он станет участвовать в изнурительном отборе, тем более в Кубке мира, проходящем по нокаут-системе. Не исключено, конечно, что ФИДЕ придумает для экс-чемпиона мира особый, комфортный способ избежать тяжелого подъема на вершину. Впрочем, к чему приводит комфортная жизнь, мы уже знаем.

Приведем 5-ю партию, одну из самых важных в матче, в ней Ананд одержал вторую победу черными.

Крамник – Ананд

Славянская защита

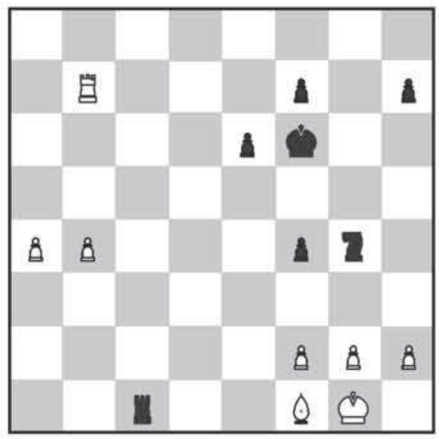
1. d4 d5 2. c4 c6 3. ♘f3 ♘f6 4. ♘c3 e6 5. e3 ♘bd7 6. ♗d3 dc 7. ♗:c4 b5 8. ♗d3 a6 9. e4 c5 10. e5 cd 11. ♘:b5 ab 12. ef gf 13. 0-0 ♕b6 14. ♕e2 ♗b7 15. ♗:b5 ♖g8. В 3-й партии Ананд продолжал 15… ♗d6 и одержал красивую победу, первую в матче. И, как ни странно, он же применяет новинку и в этой встрече.

16. ♗f4 ♗d6 17. ♗g3. Кажется, ладья ограничена, но слон стоит здесь неустойчиво. **17…f5 18. ♖fc1 f4 19. ♗h4 ♗e7.** Ананд готов разменять слонов, а на e7 удобно пристроится король. **20. a4 ♗:h4 21. ♘:h4 ♔e7.** Не опасаясь шаха с f5, ведь коню тут же придется вернуться на защиту пешки g2.

22. ♖a3 ♖ac8 23. ♖:c8. При ладье на g8 белым то и дело надо было считаться с ударом на g2, например в случае возвращения 23. ♖aa1? следовало 23… ♖:g2+! 24. ♘:g2 ♖g8 25. f3 d3+ 26. ♕f2 ♗:f3! 27. ♕:b6 ♖:g2+ 28. ♔f1 ♘:b6, и белым вряд ли устоять.

23…♖:c8 24. ♖a1 ♕c5 25. ♕g4 ♕e5 26. ♘f3 ♕f6 27. ♖e1 ♖c5 28. b4. Как мы сейчас увидим, брать пешку на d4 нельзя. **28…♖c3 29. ♘:d4??** В цейтноте Крамник зевает несложную выигрывающую комбинацию. Впрочем, белым несладко, уже грозило взятие слоном на f3 с дальнейшим ♘e5.

29…♕:d4 30. ♖d1 ♘f6! Решающий промежуточный ход. **31. ♖:d4 ♘:g4 32. ♖d7+ ♔f6 33. ♖:b7.** Фигура отыграна, но теперь следует эффектная концовка. **31… ♖c1+ 34. ♗f1.**



34… ♘e3! 35. fe fe. Белые сдались, так как нет защиты от e3-e2 с неизбежным матом.

После этого разгрома стало ясно, что Крамник уступает сопернику по всем компонентам: плохая дебютная подготовка, слабая техника защиты, да и спортивная форма оставляет желать лучшего – иногда отставание по времени доходило до часа.

А на следующий день Ананд опять выиграл, и счет стал 4,5:1,5. Все было кончено.

Е.Гик

Индекс 70465

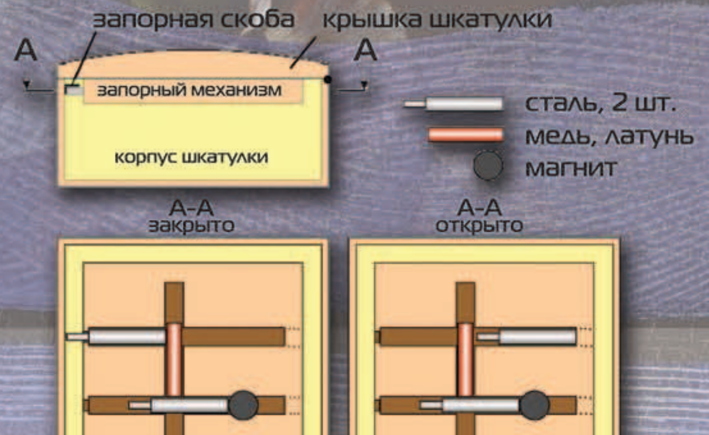
Коллекция головоломок

Шкатулка с секретом

Вашему вниманию предлагается шкатулка с секретом, впервые представленная на 28-м съезде любителей головоломок в Праге в 2008 году. Автор головоломки – Татьяна Матвеева, инженер из города Ивантеевка Московской области. Татьяна назвала головоломку "Тамара", в честь своей мамы.

Конструкция секретного запора, придуманная Татьяной, подходит практически к любой шкатулке. Замок изготавливают отдельно, а затем устанавливают его в коробочку с открывающейся вверх крышкой. Запорное устройство, изображенное на рисунке, заключено внутри пластинки из фанеры с тремя каналами, в один из которых помещают магнит.

(Подробнее - на с. 20 внутри журнала)



(Продолжение – на с.00 внутри журнала)