

журнал© Квант МАЙ 2007 №3 ИЮНЬ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Квант

Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипяна)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.А.Осипьян

ПЕРВЫЕ ЗАМЕСТИТЕЛИ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

С.С.Кротов, С.П.Новиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,
А.Н.Виленин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин,
Н.П.Долбилин

(заместитель главного редактора),

В.Н.Дубровский, А.А.Егоров, А.В.Жуков,
А.Р.Зильберман, П.А.Кожевников,
В.В.Козлов, С.П.Коновалов, А.А.Леонович,
Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, Н.Х.Розов,
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,

В.М.Тихомиров,

В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,

А.И.Черноуцан

(заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,

В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,

Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин,

Е.Л.Сурков, Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,
М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский,
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро  Квантум

© 2007, Президиум РАН,
Фонд Осипяна, «Квант»

- 2 Леонард Эйлер (к 300-летию со дня рождения).
В.Тихомиров
- 8 Лазер – замечательное достижение XX века. *П.Крюков*

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 18 Бугенвилль. *А.Васильев*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 19 Задачи М2041–М2050, Ф2048–Ф2057
21 Решения задач М2021–М2025, Ф2033–Ф2042
27 Победители конкурса «Задачник «Кванта» 2006 года

К М Ш

- 28 Задачи
29 Случай с Толей Клюквиным. *С.Дворянинов*

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 31 С полюса – на полюс. *А.Стасенко*
34 От простого – к сложному. *В.Эпштейн*
36 Размерности и ... правило квантования Бора. *Г.Бакунин*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Переменный поток

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 37 Эйлер и геометрия. *А.Заславский*

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 41 Резонанс против резонанса. *В.Майер*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 43 Работа газа при переходе из начального состояния в конечное. *В.Можаев*
46 Формулы геометрии помогают алгебре. *В.Мирошин*

ОЛИМПИАДЫ

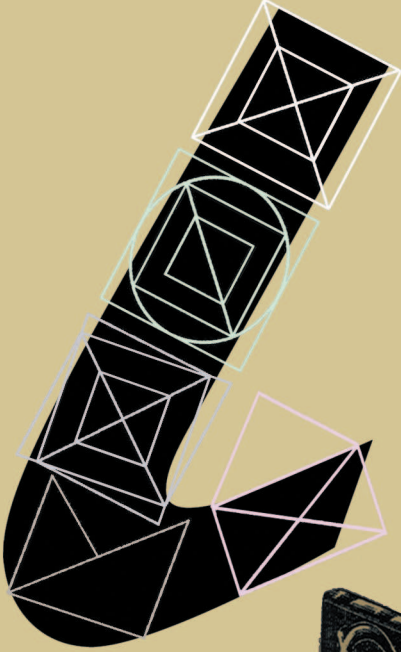
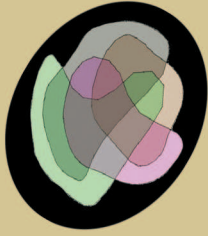
- 51 XV Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»
54 Всероссийская студенческая олимпиада по физике

ИНФОРМАЦИЯ

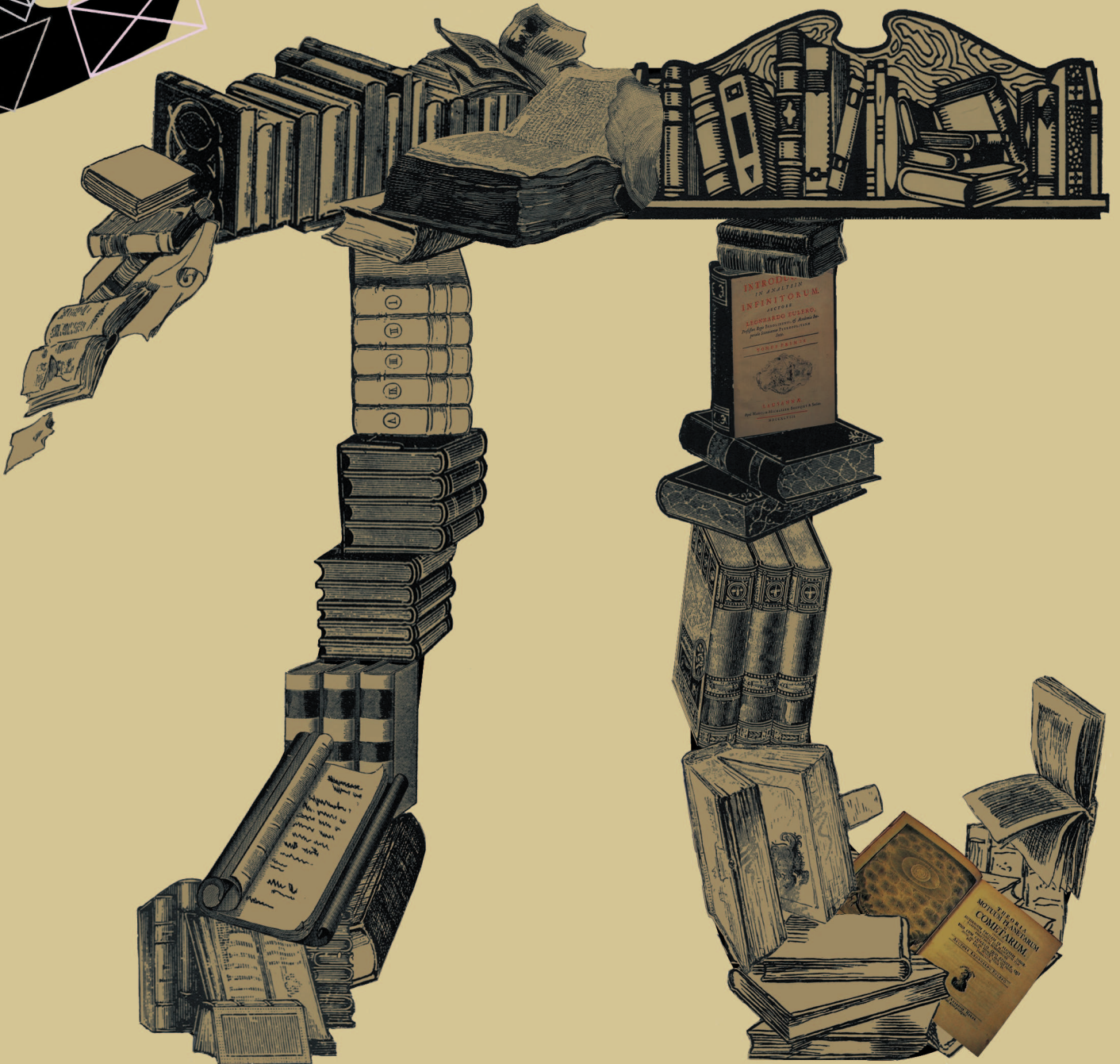
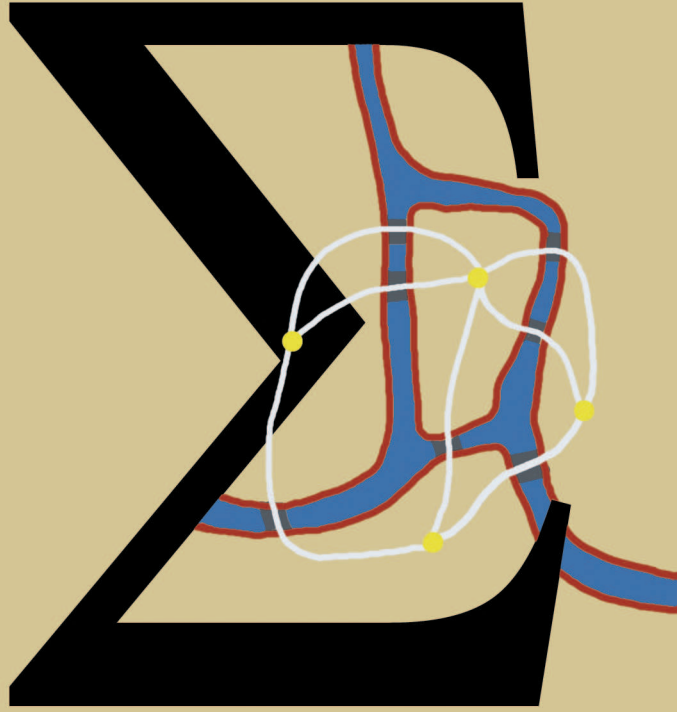
- 55 Рождественская аэромодельная фиеста
57 Заочная школа СУНЦ НГУ
59 Ответы, указания, решения

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье П.Крюкова*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Физики и математики на монетах мира*



$$e^{i\pi} = -1$$



Леонард Эйлер

(к 300-летию со дня рождения)

В. ТИХОМИРОВ

Жизненный путь

15 апреля 1707 года в городе Базеле (Швейцария) у Пауля Эйлера и его жены Маргариты Брюкнер родился мальчик, которого назвали Леонардом. В следующем году семья переехала в деревню Рюген, неподалеку от Базеля, где Пауль Эйлер стал пастором евангелической реформистской церкви. В молодые годы Пауль Эйлер занимался математикой под руководством Якоба Бернулли, старшего из математиков знаменитого бернуллиевского семейства. Пауль и младший брат Якоба – Иоганн Бернулли, сыгравший большую роль в жизни Леонарда, – некоторое время даже жили вместе в доме Якоба. Фамилия Бернулли еще не раз появится в данной статье, и чуть позже о ней будет рассказано подробнее.

В раннем детстве Леонард получил начальные сведения о математике от своего отца, а затем его отправили в латинскую школу в Базеле. Математику там не преподавали. В 1720 году тринадцатилетнего мальчика принимают на философский факультет Базельского университета. Эйлер получает диплом об окончании университета и затем некоторое время пытается (без успеха) занять там должность профессора логики и права. Потом он становится студентом теологического факультета, выполняя желание отца, который мечтал направить сына по своему пути. В параллель с богословием юноша стал серьезно заниматься математикой.

Вот что он писал в своем автобиографическом очерке: «Вскоре я нашел возможность быть представленным знаменитому профессору Иоганну Бернулли. Он был действительно очень занят, поэтому наотрез отказался давать мне частные уроки, но зато он преподавал мне весьма ценный совет – начать самостоятельно читать более сложные математические книги, изучая их как можно более прилежно; в случае же препятствий или затруднений я получил разрешение свободно посещать его каждую субботу в послеобеденное время, и он

благожелательно разъяснял мне все, чего я не мог понять».

В 1724 году Эйлер защищает диссертацию, в которой сравнивает концепции естествознания Декарта и Ньютона, и получает степень магистра искусств. В это же время он знакомится с двумя членами клана Бернулли более молодого поколения – Николаем и Даниилом.

Здесь, пожалуй, уместно дать краткую справку о семействе Бернулли. Корни этого семейства лежали в Голландии, но вследствие религиозных преследований часть семейства переехала в Германию, а затем в Швейцарию. Там основатель рода знаменитых ученых – Николай Бернулли (1623–1708) – был членом базельского Высочайшего Совета и Суда. У Николая было четверо сыновей: Якоб (1654–1705), ставший профессором в Базеле, Иоганн (1667–1748), профессорствовавший в Гронингене и затем в Базеле, и еще двое, наукой не занимавшиеся. У Иоганна было трое сыновей, двое из которых, Николай (1695–1726) и Даниил (1700–1782), стали друзьями Эйлера.

Иоганн Бернулли убедил отца Эйлера в том, что истинное призвание Леонарда – математика и что не следует препятствовать его стремлению стать ученым, и отец согласился с этим. В 1726 году появляется первая

публикация Леонарда Эйлера, посвященная теории звука. С того момента разумно исчислять начало его беспримечной творческой биографии.

Список трудов Эйлера, составленный в 1910 году, насчитывает 886 наименований различных книг, статей и заметок. В 1909 году Швейцарское общество естествоиспытателей задумало издать полное собрание сочинений Эйлера. Первоначально предполагалось, что собрание будет состоять из 75 томов, и было намерение закончить издание к середине века, потом планировалось завершить работу к трехсотлетнему юбилею Эйлера. Сейчас представляется возможным закончить этот огромный труд к 2009 году – столетию с его начала. Уже вышли из печати 72 тома научных трудов (29 по математике, 33 по механике и астрономии и 10 по физике) и часть из заключительных восьми



томов, посвященных переписке и разного рода заметкам. Собрание будет включать в себя порядка 160000 страниц! Немыслимо даже вообразить, как все это могло быть создано за полвека одним человеком, который последние 17 лет был почти слепым (подсчитано, что, для того чтобы просто переписать труды Эйлера при ежедневной работе в течение восьми часов, потребуется 50 лет). Мне представляется, что если собрать все опубликованное величайшими творцами нашей науки, начиная с Архимеда и кончая Пуанкаре (исключив, впрочем, Коши), то получится собрание трудов, лишь сопоставимое по масштабу с тем, что было содеяно одним Эйлером.

Начало развития математического естествознания пришлось на семнадцатый век, век истинных гигантов. Достаточно назвать имена Галилея, Кеплера, Декарта, Ферма, Ньютона, Лейбница и Гюйгенса. Восемнадцатый век – век двух титанов: Эйлера и Лагранжа. В этом веке математика была как никогда едина и развивалась в теснейших связях с естествознанием.

В 1727 году Эйлер получает приз Парижской Академии наук. Эта академия ежегодно объявляла конкурсы на работы по прикладному естествознанию. В тот год надо было найти наилучший способ расположения мачты на корабле. Великий кораблестроитель Алексей Николаевич Крылов, мастер яркого и запоминающегося слова, преклоняясь перед гением Эйлера, так выразил свое восхищение этой инженерной работой Эйлера (она была опубликована в 1728 году): «В гористой Швейцарии, из которой до того времени Эйлер не выезжал, он, конечно, имел случай видеть корабль не иначе как на картинках» (но с поставленной задачей справился). Эйлер не получил тогда первого приза, который достался Пьеру Бугезу, чье имя сохранилось в истории как имя «отца морской архитектуры». В дальнейшем Эйлер 12 раз принимал участие в конкурсах Парижской Академии наук и неизменно брал первые призы.

В 1725 году братья Бернуллы – Николай и Даниил – прибыли в Санкт-Петербург и заняли должности: Николай – профессора физики, а Даниил – профессора математики. Эйлер писал Даниилу, что у него возникло желание также отправиться в российскую столицу. Даниил через некоторое время по прибытии сообщил Эйлеру, что открылась вакансия адъюнкта по физиологии. Эйлер соглашается приехать. Иоганн Бернуллы в связи с отъездом трех молодых людей в Россию писал: «Лучше несколько потерпеть от сурового климата в стране льдов, где приветствуют муз, чем умереть от голода в стране с умеренным климатом, в которой муз презирают и обижают».

Эйлер прибыл в Россию 17 мая 1727 года и пробыл там до 1741 года, когда переехал в Германию, чтобы снова вернуться в 1766 году.

Было бы неплохо, если бы кто-нибудь из историков составил реестр содеянного Эйлером на благо России. Он едва ли не в одиночку обрабатывает данные переписи населения России; пишет учебники для гимназий; упорядочивает российскую картографию (он писал, что его трудами российская география приве-

дена «гораздо в наилучшее состояние, нежели география немецкой земли» – кому из нас не понятно, каких фантастических усилий это могло потребовать); помогает организовать службу мер и весов; занимается преподаванием в морских училищах математики, астрономии, основ кораблестроения и управления кораблями; дает заключения по проектам мостов через Неву, в том числе о кулибинском одноарочном мосте; постоянно выступает с докладами; пишет популярные статьи. Эйлер подготовил к научной и педагогической деятельности многих крупных русских ученых, таких как академики С.К.Котельников, С.Я.Румовский, М.Е.Головин; Эйлер оказывал большую поддержку М.В.Ломоносову. Этот список нескончаем, и не так легко сообразить, с деятельностью кого из наших ученых за всю историю российской науки можно сравнить тот исполинский труд, который был совершен Эйлером во благо нашей страны.

Эйлер никогда не отказывался ни от какой работы и ни от каких поручений. Первоначально он занял вакансию по медицине и добросовестно исполнял свои обязанности. По поручению Академии наук Эйлер написал «Руководство к арифметике» (1738), сыгравшее выдающуюся роль в математическом просвещении в нашей стране, а также двухтомную монографию «Морская наука», изданную в Петербурге в 1749 году.

Что же касается поручений, то трудно удержаться и не процитировать А.С.Пушкина, который писал, что в 1740 году, «когда родился Иоанн Антонович, императрица Анна Иоанновна послала к Эйлеру приказание составить гороскоп новорожденному. Эйлер сначала отказывался, но потом вынужден был повиноваться. Он занялся гороскопом вместе с другим академиком. Они составили его по всем правилам астрологии, как добросовестные немцы, хотя и не верили ей. Заключение, выведенное ими, испугало обоих математиков – и они послали императрице другой гороскоп, в котором предсказывали новорожденному всякие благополучия. Эйлер сохранил, однако ж, первый и показывал его К.Г.Разумовскому, когда судьба несчастного Иоанна Антоновича свершилась».

В Петербурге Эйлер создал свою семью. В 1733 году он женился на Екатерине Гзель. Она была дочерью живописца родом из Швейцарии. Екатерина родила Эйлеру тринадцать детей, но лишь пятеро – три сына и две дочери – пережили ранние годы. Эйлер очень любил детей, играл с ними, учил их. И работал не прерываясь. Современники вспоминают, как он писал свои труды, держа на коленях ребенка, когда другие дети резвились вокруг него. Потомки детей Эйлера играли заметную роль в российской культуре XIX века.

В 1733 году Даниил Бернуллы вернулся в Базель, и Эйлер занял положение ведущего математика в Петербургской Академии наук.

В 1735 году у Эйлера начались проблемы со здоровьем: он едва не умер от лихорадки и начал слепнуть.

В 1736 году был завершен его труд по механике, в которой впервые Эйлер выразил ньютоновскую динамику средствами математического анализа. С той поры,

собственно, и началась современная эра этой естественно-научной дисциплины.

К концу десятилетия положение в России осложнилось, и Эйлер принял предложение переехать в Берлин. 29 мая 1741 года Эйлер увольняется со службы в России и переезжает в Потсдам. Известен рассказ о том, что первое время в Германии Эйлер был необычно молчалив. Когда он был спрошен о причинах этого, ученый ответил: «Я приехал из страны, где вешают тех, кто много разговаривает».

По поводу того, как жилось Эйлеру в Германии, пишут разное. Одни – что сам Эйлер считал эти годы лучшими в своей жизни, иные рассказывают о трудностях, которые он испытывал там (отношения Эйлера с королем Фридрихом II были непростыми). Но так или иначе, великий ученый написал в эти годы 380 книг и статей о дифференциальном исчислении, вариационном исчислении, расчетах планетарных орбит и траектории Луны, о баллистике, строении судов и о многом еще.

Отметим три великих труда Эйлера, выполненных в Германии, – они до нынешнего времени сохранили свое значение. Это знаменитый мемуар «Метод нахождения кривых линий...», изданный в 1744 году, в котором были заложены начала вариационного исчисления, и два его знаменитых труда по анализу: «Введение в анализ» (1748) и «Дифференциальное исчисление» (1755). В сороковые годы Эйлер становится членом Лондонского Королевского общества и Парижской Академии наук. В эти же годы он получает свою знаменитую формулу, связывающую число вершин, ребер и граней выпуклого полиэдра, – один из наиболее известных его результатов. В период между 1760 и 1762 годами он пишет свои «Письма к немецкой принцессе...» (их число равняется 234), в которых преподает уроки математики принцессе Ангальт-Дессауской – племяннице короля Фридриха II. Вне всякого сомнения, это наиболее успешное в восемнадцатом веке популярное издание, посвященное изложению основ математики и естествознания.

В Германии Эйлер прожил 24 года. И вернулся в Россию. Последний период его жизни был также необычайно продуктивен. Он издал два тома «Алгебры» (1768–1769), три тома «Интегрального исчисления» (1768–1770), три тома «Диоптрики» (1760–1771), три тома «Писем к немецкой принцессе...» (1768–1774), огромную «Новую теорию Луны» (1772).

Но в эти же годы ему довелось перенести тяжелые испытания. В 1771 году в доме Эйлера случился пожар. Ему удалось спастись только благодаря героизму его слуги и сохранить лишь математические рукописи. Екатерина II возполнила материальный ущерб. В 1776 году умерла жена. И в том же году он полностью лишился зрения. Но он работал до последней минуты. 18 сентября 1783 года Эйлер провел перед обедом трудные вычисления. Пообедал, потом попросил принести ему внука. Внезапно он почувствовал себя дурно. Сказал: «Я умираю», и, как написал Ж.Кондорсе в некрологе, «...il cessa de calculer et de vivre» – он перестал вычислять и жить.

Научное творчество

Нам предстоит дать краткий обзор эйлерова творчества, которое, по словам А.Н.Крылова, «изумительно и в науке беспримерно».

Скажу сначала несколько общих слов. Эйлеру довелось разработать планировку здания и из отдельных кирпичей и блоков, созданных его предшественниками, начать строительство грандиозного строения, в котором объединены естествознание и математика. Большинство ветвей математической науки были лишь только обозначены – алгебра, аналитическая геометрия, тригонометрия, дифференциальное и интегральное исчисления, дифференциальные уравнения, механика и многое другое, и ничто не имело систематического описания. Эйлер научил всех нас пониманию сути этих разделов математики и создал язык, на котором мы и поныне все разговариваем. Как не привести здесь слова Лапласа: «Читайте Эйлера – он учитель всех нас». Сейчас мы уже не читаем Эйлера, но если взглянуть на его труды, то убеждаешься, что учебники, по которым учились наши учителя в первой половине XX века, – это переработка эйлеровских текстов. Сейчас на это наслонилось многое, связанное с влиянием идей Г.Кантора, но истинная суть осталась в нашей науке после трудов Эйлера фактически без изменений.

Начать хотя бы с символики. Для обозначения функциональной зависимости Эйлер стал употреблять символ $f(x)$ (с 1755 года); он ввел букву Σ для обозначения суммирования (1755); ему же принадлежат символы \cos (1748) и tg (1753) для тригонометрических функций. Три основных числа – e , π и i – получили свои имена после того, как их стал употреблять Эйлер: e – с 1736 года; π раньше (в 1706 году) впервые употребил Джонс, но символ закрепился в литературе после того, как начиная с 1736 года его постоянно стал использовать Эйлер; символ i Эйлер ввел в 1777 году.

Впервые с творчеством Эйлера мы встречаемся в школьные годы на уроках геометрии и на кружках. Мы узнаем, что точка пересечения высот, точка пересечения медиан и центр описанной окружности треугольника (рис.1) лежат на одной прямой, называемой

прямой Эйлера (впервые она появилась у Эйлера в 1765 году), а также, что середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков от вершин до точки пересечения высот лежат на одной окружности, называемой

окружностью Эйлера (рис.2). Решая многие красивейшие геометрические задачи, нередко мы не догадываемся, что они впервые появились в сочинениях Эйлера. Например, Эйлер нашел связь между расстоянием ρ между центрами вписанной и описанной окружностей и их радиусами r и R : $\rho^2 = R^2 - 2Rr$, откуда следует **неравенство Эйлера**: $R \geq 2r$.

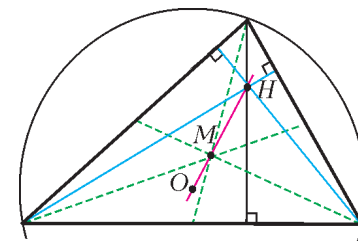


Рис. 1

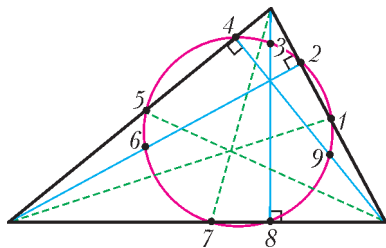


Рис. 2

В школьных кружках много времени уделяют теории чисел. Теория делимости началась с исследований Ферма, с его «малой теоремы», согласно которой если число a не делится на простое число p , то число $a^{p-1} - 1$ всегда делится на p . Эйлер нашел для этой теоремы несколько различных доказательств и обобщил ее на случай, когда p взаимно просто с a . Достижения Эйлера в области теории чисел трудно переоценить. Помимо множества доказанных им теорем, он оставил будущим поколениям большое число «экспериментальных наблюдений», которые потом превратились в строго доказанные теоремы. Так было, например, с разложением в простую дробь корня квадратного из натурального числа, не являющегося квадратом. На численных примерах Эйлер обнаруживает периодичность непрерывных дробей, представляющих такие числа. Факт периодичности был доказан Лагранжем. Эйлер экспериментально пришел к квадратичному закону взаимности. Доказательство его – одно из высших достижений Гаусса. В переписке Эйлера с Христианом Гольдбахом можно найти обсуждение трех замечательных проблем теории чисел: всякое нечетное число есть сумма трех простых, четное – сумма двух простых, нечетное – сумма простого и удвоенного квадрата целого числа (Эйлер проверил эту гипотезу до 2500). Эйлер развенчивает гипотезу Ферма, согласно которой числа вида $2^{2^n} + 1$ – простые, обнаружив, что $2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$.

Если просматривать любые математические энциклопедии, никто не сравнится с Эйлером по числу задач, формул, понятий, которые носят имя их первооткрывателя. Приведем примеры.

Эйлер явился основоположником теории графов, решив в 1736 году задачу о кенигсбергских мостах (в математической энциклопедии она идет под рубрикой **Эйлера задача**). На реке Прегель, протекающей через

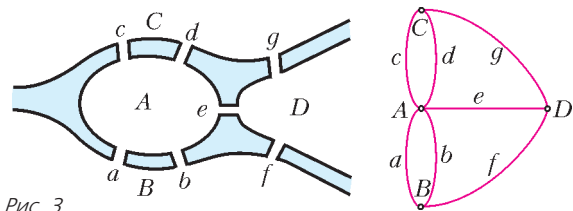


Рис. 3

город Кенигсберг и омывающей два острова, было построено семь мостов (рис. 3). Эйлер задумался над вопросом: можно ли обойти все мосты, пройдя по каждому из них только один раз, и вернуться в исходную точку? Это – один из очень многих вопросов, на первый взгляд не имеющих никакой практической пользы, которые вызвали любопытство Эйлера. Ему принадлежат замечательные слова: «Математика никогда не достигла бы такой степени совершенства, если бы древние не посвятили столько сил развитию вопро-

сов, которыми сегодня многие пренебрегают из-за их мнимой бесполезности». Ныне теория графов – одна из актуальных областей науки. (Эйлер доказал, что граф, связанный с кенигсбергскими мостами, нельзя-таки обойти и вернуться в исходную точку, пройдя по каждому ребру лишь однажды.)

В 1740 году Эйлер доказал существование предела последовательности

$$x_n = \sum_{k=1}^n k^{-1} - \ln(n+1).$$

Для этого предела, часто обозначаемого буквой C и называемого **постоянной Эйлера**, был придуман алгоритм, позволяющий вычислять его с любым числом знаков. Все константы Эйлер вычислял обычно с большим числом знаков. Например,

$$C = 0,577215664901532\dots$$

В 1743 году Эйлер установил равенства, связывающие тригонометрические функции с показательной функцией, и, в частности, получил формулу $e^{i\pi} = -1$. Эта **формула Эйлера** многократно признавалась красивейшей формулой во всей математике. Помню, какое потрясающее впечатление она произвела на меня, когда я увидел ее впервые. А.Н.Крылов видел в этой формуле символ единства всей математики, ибо в ней « -1 представляет арифметику, i – алгебру, π – геометрию и e – анализ». Формула Эйлера базируется на следующем фундаментальном равенстве, также принадлежащем ему: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Эйлер доказал равенство

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1},$$

где произведение берется по всем простым числам p . Это тождество, верное при вещественной части s большей единицы, было найдено Эйлером в 1737 году. По сути дела, Эйлер тем самым ввел функцию, впоследствии получившую название **дзета-функции Римана**; произведение, представляющее дзета-функцию, называют **произведением Эйлера**.

Эйлер подходил к математическим проблемам простодушно, как бы играючи. Ему было известно разложение в ряд синуса, откуда следует, что $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \dots$ С другой стороны, у этой функции нули в точках $k\pi$, и Эйлер бесхитроно представляет ту же функцию в виде произведения, как будто это многочлен:

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \dots$$

Раскрывая скобки, он получает формулы для $\zeta(2k)$, $k \geq 1$. В частности,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

И вообще, число последовательностей, исследованных Эйлером, необычайно велико. Например, он рассмотрел последовательность чисел z_n , названных впоследствии, в честь известного математика XIX века,

числами Каталана. Эти числа $- 2, 5, 14, 42\dots$ – возникают во многих задачах. В частности, n -е число Каталана равно числу способов соединить на окружности $2n$ точек непересекающимися хордами. Эйлер нашел формулу для них: $z_n = \frac{(4n-2)!!!!}{(n+1)!}$, где $(4n-2)!!!! = 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4n-2)$ (умножение чисел от 2 до $4n-2$ «через четыре»). Он очень гордился этой формулой.

Огромен вклад Эйлера в широко понимаемый математический анализ, куда включаются вещественный и комплексный анализ, теория дифференциальных уравнений, вариационное исчисление, дифференциальная геометрия, уравнения математической физики. Число фундаментальных понятий и фактов анализа, которые впервые появились в сочинениях Эйлера, исчисляются сотнями. Вот некоторые из них:

эйлеровы интегралы – это так называемые бета- и гамма-функции, обобщающие понятие биномиальных коэффициентов;

подстановки Эйлера в интегральном исчислении – подстановки, приводящие к возможности проинтегрировать выражения вида $\int R(x, y) dx$, где $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, а $R(x, y)$ – отношение двух полиномов;

уравнение Эйлера – важнейшее необходимое условие экстремума в вариационном исчислении;

числа Эйлера E_n – коэффициенты при $\frac{t^n}{n!}$ при разложении в степенной ряд функции $\frac{1}{\operatorname{ch} t}$ ($\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ – гиперболический косинус), они играют важную роль в прикладном анализе;

формулы Эйлера – формулы для радиусов кривизны нормальных сечений.

Все сказанное и многое другое, связанное с именем Эйлера, составляют существеннейшую долю современного математического образования.

Личность

Эйлер был необыкновенно светлой, благородной личностью. Душевная красота его отразилась во множестве его поступков. Так, Эйлеру удалось доказать одну красивейшую теорему из теории чисел, формулировка которой принадлежала Ферма. Эта теорема гласит: *простое число представимо в виде суммы квадратов двух натуральных чисел тогда и только тогда, когда при делении на четыре оно дает единицу* (как 5 или 17). Ферма не опубликовал доказательства, написав лишь в одном из писем, что основная идея его доказательства состоит в методе спуска, позволяющем из допущения, что для некоторого простого числа вида $4n+1$ заключение теоремы неверно, доказать, что оно неверно и для меньшего числа того же вида. Поступая аналогично, мы приходим к тому, что заключение теоремы неверно для числа 5, а значит, приходим к противоречию, потому что оно-то представимо в виде суммы двух квадратов. Эйлер, желая утвердить приоритет Ферма, к которому он испытывал глубочайшее уважение, придумал доказательство, соответствующее

описанному только что замыслу Ферма. Эйлер передоказал результат Ферма, что уравнение $x^4 + y^4 = z^4$ в целых числах неразрешимо, а потом доказал эту теорему для третьих степеней и тем самым повлиял на интерес математиков к великой теореме Ферма.

Переписка Эйлера составляет несколько тысяч писем. Почти все современники Эйлера, интересовавшиеся математикой и естествознанием, делились с ним плодами своих размышлений, просили высказать свое суждение по интересующим их проблемам и всегда находили отклик и поддержку.

Когда Лагранж в 1759 году (ему было тогда 23 года) посвятил Эйлера в свои исследования в новой области анализа, которую позже Эйлер назовет *вариационным исчислением*, Эйлер сразу же ответил своему молодому коллеге. «Твое аналитическое решение изопериметрической проблемы, – писал он, – содержит, насколько я вижу, все, что только можно желать в этой области, и я чрезвычайно рад, что эта теория, которой после моих первых попыток я занимался едва ли не один, доведена до величайшего совершенства. Важность вопроса побудила меня к тому, что я с помощью твоего освещения сам вывел аналитическое решение; я, однако, решил скрывать это, пока ты не опубликуешь свои результаты, так как я никоим образом не хочу отнимать часть заслуженной тобою славы». Не устаю восхищаться таким поразительным и почти беспрецедентным благородством великого ученого.

Необыкновенная щедрость и благородство Эйлера отразились в известной шутке, касающейся самого определения – кого следует считать математиком. Определение математика, согласно этой шутке, индуктивно. Основание индукции составляет утверждение: «Эйлер – математик». И далее: математиком называется человек, которого математик называет математиком. При этом можно быть почти уверенным, что человек, сделавший в математике что-то содержательное, будет математиком в смысле этого определения. Но если в начальной позиции взять другого математика, список может оказаться далеко не полным.

В замечательной книге С.Г.Гиндикина «Рассказы о физиках и математиках» в главе об Эйлере (которую я очень рекомендую читателю) рассказывается о том, что в 1899 году на общем собрании Петербургской Академии наук обсуждался вопрос о сооружении памятника Эйлеру в Петербурге. Против этого решительно выступил академик Н.Я.Сонин. Не буду повторять его аргументы, мне даже трудно представить себе, что такое было возможно. Я считаю, что памятник Эйлеру нужен прежде всего нам самим. В нашей истории было так много случаев, когда происходило глумление над великими учеными, столько раз их травили, гнали из страны, а то и просто уничтожали, что памятник одному из величайших гениев человечества, благороднейшей и светлой личности, который избрал нашу страну и наш великий город, чтобы в нем жить и где ему было суждено умереть, просто необходим. Пусть этот памятник станет предметом нашей гордости.



Лазер – замечательное достижение XX века

П. КРЮКОВ

Введение

В XX веке успехи физики и наукоемких технологий привели к достижениям, радикально повлиявшим на жизнь человеческого общества. Это – создание атомной бомбы, овладение атомной энергией с помощью ядерных реакторов и изобретение транзистора. Сюда же можно добавить создание в 1960 году принципиально нового источника света – лазера, обладающего удивительными свойствами.

Лазер способен испускать свет с очень узким спектром (монохроматическое излучение) в виде направленного пучка. Высокая направленность пучка лазерного излучения, т.е. малое увеличение площади сечения пучка при увеличении дистанции, на которое он распространяется, означает, что энергию излучения можно передавать на значительные расстояния и концентрировать ее с помощью фокусирования подходящей оптической системой. Успехи в разработке лазеров разных типов позволили получить значительные энергии и мощности лазерного излучения.

Становятся реальностью и предание об Архимеде, сжигающем римский флот сфокусированными солнечными лучами, и фантастические описания Г.Уэллса и А.Толстого. Действительно, в настоящее время в США создается мощный химический лазер, размещаемый на самолете «Боинг-747». С помощью этой системы предполагается уничтожать баллистические ракеты на взлете на расстоянии около 100 миль. В обычной жизни лазеры также получают широкое распространение. Они применяются в медицине, в промышленности (прецизионная резка и сварка), в новейших устройствах электроники (DVD проигрыватели, компьютеры), в системах волоконно-оптической связи и в лазерном шоу.

Но, пожалуй, главные применения – это научные исследования. Высокие научные результаты отмечаются Нобелевскими премиями, и их присуждение является определенным показателем важности работы. В 1964 году Ч.Таунс, Н.Г.Басов и А.М.Прохоров были награждены Нобелевской премией по физике за вклад в создание лазера. С тех пор почти треть Нобелевских премий по физике присуждалась за работы, связанные с использованием лазеров.

Научное применение лазеров в значительной степени связано с тем, что излучение может быть сосредоточено в весьма узком диапазоне длин волн, иными словами, оно высоко монохроматично и представляет

собой чрезвычайно узкую спектральную линию. Это обеспечивает исключительно высокую точность спектральных измерений, что, в свою очередь, очень важно для изучения строения вещества.

С другой стороны, лазерное излучение может быть сосредоточено в весьма короткой вспышке – импульсе. Это позволяет получить высокую пиковую мощность излучения (энергия, деленная на интервал времени, в котором она сосредоточена).

За счет высокой направленности светового пучка можно сфокусировать излучение в пятне, размеры которого близки к длине волны лазерного излучения. В результате удается сосредоточить огромную мощность излучения в малом объеме вещества и получить очень высокие температуры – порядка миллионов градусов.

Таким образом, на короткий промежуток времени лазерного импульса можно реализовать в лабораторных условиях состояния вещества, близкие к тем, что имеют место при ядерном взрыве или вблизи астрофизических объектов (звезды, черные дыры).

Можно задать вопрос: где самое холодное место в мире? Возможный ответ – в глубинах космоса – будет неверен. Самые низкие температуры (отличающиеся на миллионные доли градуса от абсолютного нуля) получаются, как это не удивительно, тоже с помощью лазеров.

Дело в том, что лазерный свет способен сообщать движение атомам. Можно так подобрать взаимодействие лазерного света с атомом, что его движение замедлится и он остановится. Удается создать целую систему таких «остановленных» атомов. Поскольку температура определяется скоростями движения, такая система будет обладать сверхнизкой температурой. Вещество при столь низких температурах переходит в особое состояние – так называемый *бозе-эйнштейновский конденсат*. Отметим, что исследования в этой области тоже были удостоены Нобелевской премии.

В предлагаемой вниманию читателей статье, излагается краткая история создания лазера, обсуждаются принцип действия и особенности лазера, перечисляются некоторые типы лазеров с указанием их области применения. Особое внимание уделяется лазерам, способным генерировать импульсы ультракороткой длительности, и применениям, связанным с этой особенностью лазеров.

Принцип действия лазера

История создания лазера тесно связана с историей радио. С момента появления генераторов радиоволн было ясно, что они принципиально отличаются от источников света не только длиной волны. Дело в том, что излучаемый свет обычных источников света – таких как Солнце, газонаполненные лампы и лампы накаливания – обусловлен совокупностью независимых, т.е. несогласованных между собой, процессов испускания света каждым атомом (молекулой) излучающего тела. Напротив, радиоволны обусловлены единообразным, стройным движением электронов в виде электрических токов. Иными словами, излучение, испускаемое передатчиком радиоволн, является в высшей степени *когерентным*, что означает согласованность в пространстве и во времени амплитуды и фазы колебаний в волне. Высокая степень когерентности обусловлена тем, что для получения радиоволн используются генераторы, которые способны создавать непрерывные (на протяжении работы генератора) колебания в виде синусоиды. Очевидно, что все периоды синусоиды согласованы между собой. Принципиальная особенность лазера состоит в том, что он также является генератором, в котором испускание света отдельными атомами (молекулами) происходит, в отличие от обычных источников света, строго согласованно. Образно излучение обычного источника света можно представить себе как ревущую толпу на стадионе, а излучение лазера – как ту же толпу, но поющую в унисон.

Генератор электромагнитных волн включает колебательную систему с источником энергии для своего возбуждения, которая определяет период и частоту, и *положительную обратную связь*. Известно, что в любой колебательной системе, предоставленной самой себе, колебания затухают из-за неизбежных потерь. Для получения непрерывных колебаний необходимо скомпенсировать эти потери. Положительная обратная связь означает, что некоторая часть энергии колебаний выводится наружу, усиливается и вновь возвращается в колебательную систему в нужной фазе. Если эта возвращенная энергия равна сумме энергии, теряемой в колебательной системе, и энергии, выведенной наружу, то в колебательной системе будут поддерживаться непрерывные, незатухающие колебания. Итак, для работы генератора требуется усиление и положительная обратная связь.

Развитие физики XX века привело к осознанию факта, что атомы и молекулы являются системами колебаний с определенными частотами, характерными для каждого вида атомов и молекул, и способны поглощать или испускать электромагнитные волны с этими частотами. Согласно модели Бора, эти частоты соответствуют переходам между определенными энергетическими состояниями (уровнями) атома с испусканием или поглощением порции (кванта) излучения, причем частота и, соответственно, длина волны определяются разностью энергий этих состояний. Такие кванты излучения получили название *фотонов*. А.Эйнштейн описал взаимодействие фотона с атомом. Для

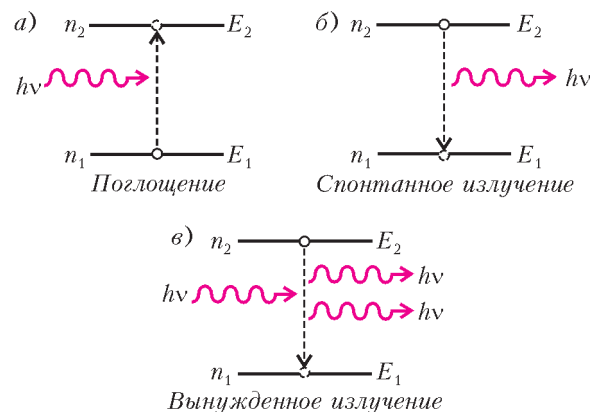


Рис. 1. Двухуровневая квантовая система

простоты рассматривались два уровня с энергиями E_1 , соответствующей основному состоянию, и E_2 , соответствующей возбужденному состоянию (рис.1). При взаимодействии с фотоном с энергией $h\nu = E_2 - E_1$, где h – постоянная Планка, а ν – частота света, атом переходит из основного состояния в возбужденное с поглощением фотона (см. рис. 1, а). Из возбужденного состояния атом может возвратиться в основное состояние с испусканием фотона. Такой процесс Эйнштейн назвал *спонтанным излучением* (см. рис. 1, б), поскольку он происходит сам по себе с определенной вероятностью. Но Эйнштейн предположил, что в основное состояние атом может перейти и под действием внешнего фотона. Этот процесс Эйнштейн назвал *вынужденным излучением* (см. рис. 1, в). Причем испускаемый фотон в точности идентичен тому, который его вызывает (частота, направление, поляризация). Таким образом, вместо одного фотона получаются два точно таких же. В случае многих атомов возникает принципиальная возможность «размножения» фотонов, т.е. усиления света, взаимодействующего с соответствующей системой атомов. Это – ключевой момент для реализации лазера.

Однако, фотоны вынужденного излучения также поглощаются атомами, находящимися в основном состоянии. Для работы генератора необходимо, чтобы усиление превышало потери (поглощение и уход фотонов за пределы излучаемой среды). Но в обычных условиях поглощение превосходит усиление. Причина в том, что число фотонов, испускаемых в результате вынужденного излучения, и число поглощаемых фотонов определяются числом атомов, находящихся на соответствующих уровнях, т.е. населенностью уровней. В условиях теплового равновесия зависимость населенностей от температуры описывается формулой Больцмана

$$n_2 = n_1 e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}},$$

где n_2 и n_1 – населенности верхнего и нижнего уровней с энергиями E_2 и E_1 соответственно, T – абсолютная температура, k – постоянная Больцмана. Из этой формулы видно, что при повышении температуры растет населенность верхнего уровня, хотя она тем меньше, чем больше его энергия, т.е. чем выше он расположен над основным уровнем. Однако

населенность верхнего уровня остается меньше населенности нижнего. Соответственно, при тепловом равновесии поглощение фотонов с энергией $h\nu = E_2 - E_1$ будет превалировать над вынужденным излучением. Отметим, что помимо атомов, указанные процессы могут также происходить в молекулах, ионах, полупроводниках.

Для того чтобы получить усиление за счет вынужденного излучения, необходимо, чтобы населенность верхнего уровня превосходила населенность нижнего. Требуется вывести систему из теплового равновесия путем некоторого внешнего воздействия так, чтобы населенность верхнего уровня оказалась выше населенности нижнего. Такое состояние называется *инверсной населенностью*, а вещество, в котором она получается, – *активной средой*.

Впервые инверсная населенность в молекулах аммиака и генерация электромагнитных волн с помощью вынужденного излучения были получены в радиодиапазоне частот Ч.Таунсом (США), Н.Г.Басовым и А.М.Прохоровым (СССР). Созданный ими прибор получил название *мазера*, или *молекулярного генератора*. Вскоре после этого Т.Майман (США) создал прибор, работающий в видимом диапазоне, – *лазер*.

Рассмотрим на примере первого лазера, использующего кристалл рубина, как можно осуществить инверсную населенность. При этом отметим, что в реальных веществах энергетические уровни обычно имеют некоторую ширину, т.е. им соответствует некоторый разброс энергии. Соответственно, переходы между такими широкими уровнями происходят не на фиксированной частоте ν , а с некоторым разбросом частоты $\Delta\nu$, т.е. в виде спектральных линий. Более того, многие уширенные уровни могут сливаться, образуя широкие зоны энергии. Это проявляется в широких полосах спектров излучения и поглощения.

Кристалл рубина представляет собой кристаллическую окись алюминия (Al_2O_3 корунд) с малой примесью ионов хрома (не более 5%), которые и придают рубину розовый цвет. Спектроскопические исследования показали, что эти ионы имеют систему энергетических состояний, упрощенная схема которой показана на рисунке 2. Рубин поглощает свет в очень широкой полосе сине-зеленой области спектра и испускает свет (люминесценция) в виде довольно узкой спектральной линии с максимумом на длине волны 694,3 нм. При этом эффективность процесса переда-

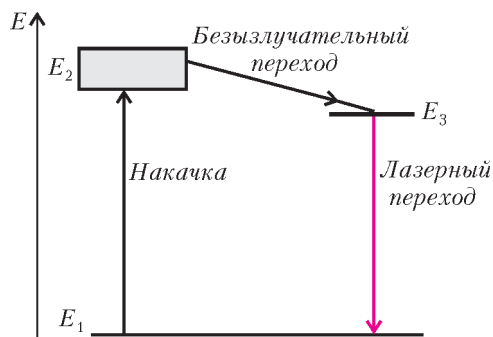


Рис. 2. Упрощенная схема уровней рубина

чи энергии поглощенного света свету люминесценции оказалась очень высокой – практически каждый фотон поглощенного света превращается в фотон люминесценции. Этот процесс происходит следующим образом (см. рис.2). После поглощения света происходит переход из основного состояния 1 в широкую область энергий возбуждения 2, из которой эта энергия быстро передается на довольно узкий уровень 3. Это так называемый безызлучательный переход, поскольку он не сопровождается испусканием света. Возбужденные ионы хрома могут находиться (жить) в состоянии 3 довольно долго, около 3 мс, прежде чем возвратятся в основное состояние с испусканием фотона люминесценции. Это так называемый метастабильный переход.

Таким образом, при освещении кристалла рубина сине-зеленым светом происходит обеднение основного уровня 1 с накоплением возбужденных ионов на уровне 3. Если интенсивность возбуждающего света достаточно высока, то населенность уровня 3 может оказаться большей, чем населенность уровня 1. Возникнет инверсная населенность, нужная для получения усиления. Эта схема получения инверсной населенности называется трехуровневой системой. Ее недостатком является необходимость перевода с основного уровня более половины частиц, что требует высокой интенсивности возбуждающего излучения (рубин освещался с помощью мощной импульсной лампы).

Более эффективной является четырехуровневая система создания инверсной населенности, изображенная на рисунке 3. Между основным и метастабильным уровнями находится дополнительный уровень 4,

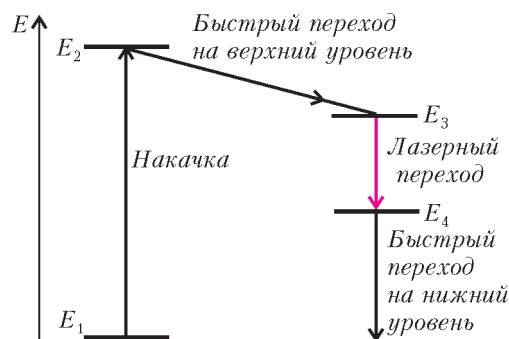


Рис. 3. Четырехуровневая система создания инверсной населенности

с которого происходит быстрый переход на основной уровень. Если этот дополнительный уровень расположен достаточно высоко над основным, то, согласно формуле Больцмана, его населенность будет невысока и для получения инверсной населенности по отношению к нему потребуются меньшая населенность метастабильного уровня. Это, в свою очередь, приведет к уменьшению мощности возбуждающего света (накачки). Современные лазеры работают, как правило, по такой четырехуровневой схеме накачки.

Итак, мы имеем инверсную населенность, необходимую для получения усиления за счет вынужденного излучения. Но для генерации требуется еще положительная обратная связь. Для ее осуществления необхо-

димому возвратит в активную среду излучение в нужной фазе. Это можно сделать с помощью зеркал. Пусть среда с инверсной населенностью (активная среда) имеет длину l , тогда при прохождении через нее света с интенсивностью I_0 интенсивность будет расти в геометрической прогрессии: $I = I_0 e^{\alpha l}$, где α – коэффициент, характеризующий рост интенсивности за счет усиления. Поместим теперь активную среду между двумя параллельными зеркалами с коэффициентами отражения R_1 и R_2 (рис. 4, а). Посмотрим,

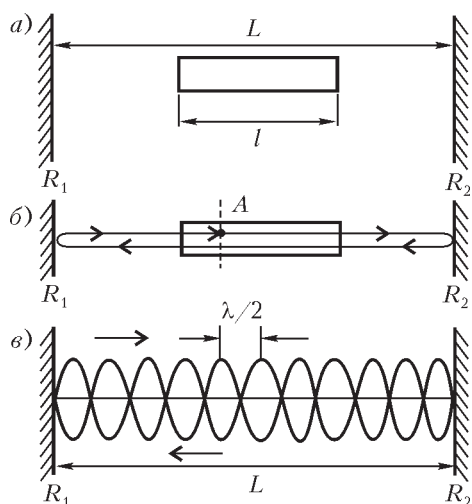


Рис. 4. Схема создания положительной обратной связи с помощью двух параллельных зеркал: а) расположение зеркал и активной среды; б) схема обхода светом пути между зеркалами; в) стоячие волны в резонаторе

как изменится интенсивность света I_0 после полного обхода пути между зеркалами (рис.4,б) из точки А. После двух отражений и двойного прохождения слоя активной среды интенсивность станет $I_0 R_1 R_2 e^{2\alpha l}$. Генерация получается при условии, что интенсивность возвращенного света не меньше начальной интенсивности, т.е. если $I_0 R_1 R_2 e^{2\alpha l} \geq I_0$, где знак равенства означает условие порога генерации. Обычно величина $\alpha l \ll 1$, следовательно, $e^{\alpha l} \approx 1 - \alpha$, тогда условие порога генерации принимает вид $R_1 R_2 (1 - 2\alpha l) = 1$.

Однако надо иметь в виду, что при последовательных обходах волны станут интерферировать. Результат интерференции зависит от разности фаз после отражений, которая определяется расстоянием между зеркалами. Для тех волн, длины которых целое число раз укладываются на длине между зеркалами, интерференция приведет к сложению амплитуд волн, т.е. к конструктивной интерференции (рис.4,в). Именно для этих волн сможет выполняться условие порога генерации. Напротив, волны с другой длиной будут ослабляться. Таким образом, система двух параллельных зеркал является *резонатором*, причем резонансные длины волн $\lambda_{\text{рез}}$ определяются расстоянием между зеркалами: $n\lambda_{\text{рез}}/2 = L$, где L – расстояние между зеркалами, а n – целое число. Соответствующие частоты $\nu_n = nc/(2L)$ называются *модами оптического резонатора*. Поскольку $\lambda \ll L$, существует множество мод, причем частотный интервал между соседни-

ми модами равен $\Delta\nu = c/(2L)$. Отметим, что использовать систему двух параллельных зеркал в качестве резонатора электромагнитных волн предложил и продемонстрировал А.М.Прохоров. В оптике система двух зеркал известна как интерферометр Фабри–Перо. Он используется в качестве прибора с высоким спектральным разрешением – за счет многолучевой интерференции лишь узкие линии проходят через него. Резонатор лазера часто называют резонатором Фабри–Перо.

Обычно в лазерах расстояние между зеркалами составляет около 1 м, и межмодовый интервал оказывается значительно меньше ширины линии усиления активной среды. Поэтому условие генерации выполняется для многих мод, частоты которых попадают в линию усиления, как показано на рисунке 5. Важно,

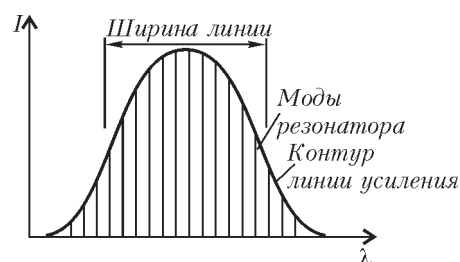


Рис. 5. Линия усиления активной среды и моды резонатора, которые умещаются в пределах ширины линии

что волны всех мод распространяются в одном направлении – перпендикулярном плоскости зеркал. Это объясняет высокую направленность пучка излучения лазера.

Итак, с помощью резонатора можно осуществить положительную обратную связь и получить генерацию на оптических частотах. Поскольку условие самовозбуждения может выполняться для многих мод, лазер дает излучение на многих эквидистантно расположенных, т.е. находящихся на одинаковых расстояниях друг от друга, частотах. Такой режим работы лазера называется *многомодовой генерацией*. Ширина линии спектра в одной моде чрезвычайно мала, потому что при многолучевой интерференции и усилении происходит обострение зависимости результирующей амплитуды от длины волны. Для того чтобы получить лазерное излучение высокой монохроматичности, надо заставить лазер генерировать излучение лишь на одной моде. Такой режим работы лазера называется *одномодовой генерацией*. С целью достижения этого режима в резонатор вводят специальное устройство – еще два зеркала с малыми коэффициентами отражения и расстоянием между ними, меньшим L . Получается дополнительный резонатор с большим интервалом между его модами. Их резонансы накладываются друг на друга, и генерация происходит лишь на совпадающих резонансах. Частотный интервал между ними может быть сравнимым с шириной линии усиления. Это устройство называют *селектором мод*. Оно позволяет получить генерацию лишь на одной моде с высокой монохроматичностью лазерного излучения.

Однако способность лазера испускать излучение на многих эквидистантных частотах позволяет получать

лазерное излучение в виде чрезвычайно коротких импульсов, а также создавать исключительно точные часы. Но об этом будет рассказано дальше.

Типы лазеров

После создания первых лазеров на рубине началась интенсивная и весьма плодотворная работа по созданию и исследованию новых типов лазеров. Укажем некоторые из них, получившие широкое распространение.

Лазеры на люминесцентных кристаллах, стеклах и растворах красителей. Наряду с рубином используются и другие кристаллы, например сапфир (кристаллическая окись алюминия с ионами титана). Отличительной особенностью этого лазера является исключительно широкая полоса усиления. Эта особенность крайне важна для генерации предельно коротких импульсов лазерного излучения.

Используются также стекла с примесью некоторых элементов в виде ионов, например некоторых редкоземельных элементов. Достоинством этих материалов является то, что они обладают высоким оптическим качеством (отсутствие всяких включений, часто присутствующих в кристаллах), из них можно изготавливать детали лазера практически любых размеров.

Также оказалось возможным использовать растворы некоторых люминесцирующих красителей. Элементом лазера в этом случае является не стержень с отполированными торцами, а кювета – цилиндрическая трубка с плоскопараллельными окошками, заполненная раствором красителя. Важной особенностью этих красителей является очень большая ширина полосы усиления (так же, как и у сапфира). Благодаря этому удалось создать новый тип лазера с плавной перестройкой длины волны излучения. В современных лазерах резонатор часто представляет собой не только два зеркала, но и довольно сложную оптическую систему между ними. Выше говорилось о селекторе мод. Так вот, если в резонатор помещается еще устройство, основанное на явлении *дисперсии* (призма или дифракционная решетка) и отклоняющее лучи в зависимости от длины волны, то параллельность зеркал обеспечивается лишь для узкой области длин волн, причем ее можно плавно менять наклоном одного из зеркал. Получается так называемый *селективный резонатор*. В результате лазер становится источником излучения с очень узкой спектральной линией, длину волны которой можно плавно регулировать. Такие лазеры играют важную роль в спектроскопии.

Полупроводниковые лазеры. Инверсную населенность можно также получать в зонах полупроводников с помощью электрического тока. В результате возникает вынужденное излучение на *излучательных переходах* полупроводника. Появились *полупроводниковые лазеры*, или, как их теперь называют, *лазерные диоды*. Эти лазеры непосредственно преобразуют электрический ток в лазерное излучение с очень высоким КПД, превышающим 50%. Кроме того, их отличают весьма малые размеры (порядка миллиметра).

Благодаря этим особенностям они нашли широкое применение (лазерные принтеры, CD и DVD системы, указки и др.). За работы по созданию лазеров этого типа российский физик Ж.И.Алферов в 2000 году был награжден Нобелевской премией. В настоящее время эти лазеры часто используются как источники накачки других твердотельных лазеров, в частности волоконных лазеров. В результате были созданы достаточно компактные и эффективные лазерные установки с мощностью лазерного излучения до десятков киловатт. Они начинают находить все большее применение в автомобильной и авиационной промышленности.

Волоконные лазеры. Важно отметить, что развитие современной оптики привело к появлению нового устройства, а именно *волоконных световодов (оптических волокон)*, основанных на явлении полного внутреннего отражения. На рисунке 6 поясняются

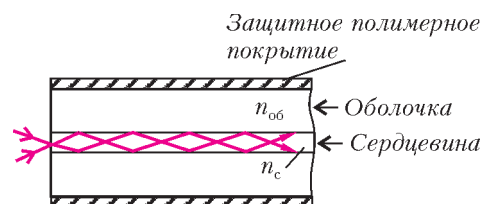


Рис. 6. Оптическое волокно

особенности оптического волокна. Оно представляет собой тонкую нить (сердцевина) из одного сорта стекла, окруженную стеклом другого сорта. Показатель преломления стекла сердцевинки несколько больше показателя преломления оболочки. В результате свет, распространяющийся в сердцевине, испытывает полное внутреннее отражение на границе сердцевина-оболочка и практически без потерь может проходить огромные расстояния до десятков и сотен километров. На этом основана волоконно-оптическая связь, линии которой уже покрыли весь земной шар.

Если в стекло сердцевинки вводятся люминесцирующие добавки (ионы редкоземельных элементов), то при соответствующем возбуждении источником накачки в сердцевине может получиться активная среда. Таким источником накачки обычно является излучение лазерного диода. Получается волоконный лазер, который имеет ряд очень важных преимуществ. Поскольку излучение распространяется по световоду, его изгиб не влияет на работу лазера. Не требуется точная настройка зеркал на параллельность, и лазер практически не чувствителен к внешним механическим воздействиям. Можно свернуть волокно в катушку, что делает лазер весьма компактным. По существу, активная среда волоконного лазера представляет собой цилиндр диаметром в несколько микрометров и длиной до нескольких метров. Это означает, что тепло, которое выделяется в активной среде при ее накачке, передается в материал внешней оболочки через большую поверхность и в значительный объем (диаметр оболочки в десятки раз больше диаметра сердцевинки). Таким образом, существенно облегчается теплоотвод. Волоконные лазеры, в отличие от

традиционных твердотельных лазеров, не требуют водяного охлаждения.

Газовые лазеры. В этих лазерах активная среда получается при электрическом разряде в газах низкого давления. Главная особенность этих лазеров – в узких линиях лазерного перехода, что способствует получению чрезвычайно высокой монохроматичности лазерного излучения. Удаётся получать линии лазерного излучения шириной лишь в несколько герц. Поскольку частота лазерного излучения составляет $\nu = 10^{14} - 10^{15}$ Гц, степень монохроматичности достигает величины $\Delta\nu/\nu \approx 10^{-14}$. Благодаря этой особенности газовые лазеры находят применение в прецизионной метрологии и системах контроля, в лазерных гироскопах и сверхточных оптических часах.

Особым типом лазеров являются лазеры ультракоротких импульсов (УКИ). Их описание заслуживает отдельного рассказа.

Лазеры ультракоротких импульсов

Замечательным достижением лазерной науки стала генерация излучения в виде импульсов ультракороткой длительности, близкой к фундаментальному пределу – периоду световой волны. Иными словами, удаётся сосредоточить свет в интервале времени порядка лишь нескольких фемтосекунд ($1 \text{ фс} = 10^{-15} \text{ с}$). Трудно представить себе краткость фемтосекунды – одна фемтосекунда относится к секунде, как одна секунда относится к 32 миллионам лет. Свет, скорость распространения которого, как известно, максимально возможная в природе, проходит за 1 фс расстояние в 0,3 мкм (заметим, что толщина человеческого волоса около 40 мкм).

Зачем же нужны столь короткие импульсы лазерного излучения? Одной из причин стремления сокращать длительность световых вспышек является их использование для изучения быстро протекающих явлений. Такая вспышка позволяет «заморозить» движение объекта в интервале, равном продолжительности вспышки, и произвести «мгновенное» фотографирование. В обычных условиях даже самые быстрые объекты не могут заметно сместиться за столь короткие времена. Но в микромире атомов, молекул и электронов в твердых телах существенную роль играют перемещения в масштабах микро- и нанометров. Поэтому для исследований движений в микромире нужно временное разрешение в диапазоне пико- и фемтосекунд. Лазеры УКИ как раз и дают такую возможность. Недаром изобретение лазеров фемтосекундных импульсов сравнили с изобретением микроскопа. В частности, использование таких лазеров позволило непосредственно «наблюдать» процессы образования и разрушения молекул. Эти процессы протекают за времена десятков и сотен фемтосекунд, и до появления лазеров УКИ сведения об этих процессах получались только по результатам косвенных экспериментов.

Исследования быстро протекающих явлений с помощью лазеров УКИ проводятся по следующей методике. Достаточно интенсивный лазерный импульс с

определенной длиной волны вызывает в исследуемом образце какие-то изменения в состоянии молекул. Этим изменениям соответствуют измененные спектры поглощения, которые можно зарегистрировать с помощью другого импульса на другой длине волны (в области спектра поглощения). Изменяя задержку между этими импульсами (возбуждающего и зондирующего), можно проследить, как происходит возвращение молекул в первоначальное состояние или в другое конечное состояние. Так были исследованы, в частности, реакции в растворах вроде перегруппировки молекул растворителя вокруг реагирующих молекул, переходы электрона или протона из одной части большой молекулы в другую.

Удалось изучить детали очень важных процессов взаимодействия света с биологическими объектами. Прежде всего, это фотосинтез – основа жизни на земле и работа светочувствительных клеток глаза. Благодаря ультракороткой длительности импульсов было установлено, как происходят самые первые этапы химических реакций, следующих за поглощением фотонов. Аналогично были изучены многие тонкие явления, исследовать которые иными способами затруднительно или попросту невозможно.

Более того, фемтосекундная длительность импульса излучения дает возможность воздействовать извне на быстротекающие процессы фотохимии и, тем самым, изменять ход этих химических реакций. Если второй импульс имеет достаточно высокую интенсивность и нужную длину волны, то его воздействие в определенный момент может привести к образованию других продуктов химической реакции. Иными словами, таким способом можно заставить химическую реакцию протекать по другому каналу. Эта и аналогичные операции получили название «фемтохимии». Отметим, что за работы в области исследований химических реакций с помощью фемтосекундных лазеров американский ученый египетского происхождения А.Зевейл в 1999 году получил Нобелевскую премию по химии.

Была также изучена динамика электронов в полупроводниковых материалах. Это дает возможность разрабатывать более совершенные оптоэлектронные устройства для быстрого управления сигналами, что требуется для компьютеров и телекоммуникаций.

Короткая длительность импульса лазерного излучения проявляется и в другой области. При сокращении временного интервала, в котором сосредоточена энергия, получается возрастание мощности, а при фокусировании излучения – интенсивности. Высокая интенсивность фундаментально изменяет оптику. Оптика является, по существу, учением о том, как электроны откликаются на свет. Все оптические свойства веществ являются следствием взаимодействия света с электронами в материале. В световой волне электрические и магнитные поля совершают колебания перпендикулярно друг другу и к направлению распространения. Сила со стороны электрического поля заставляет электрон колебаться с той же частотой, но не обязательно с фазой световой волны. В зависимости

от того как электрон связан с атомами материала, его колебания могут отставать или опережать колебания в световой волне. Колеблющиеся электроны, в свою очередь, испускают электромагнитные волны на той же частоте, но с измененной фазой. Их сложение и определяет то, как световая волна распространяется через материал и, тем самым, сообщает соответствующие ему оптические свойства (например, показатель преломления). В классической оптике амплитуды колебаний достаточно малы, и оптические свойства материалов практически не зависят от интенсивности света. Но при высоких интенсивностях, присущих лазерному свету, такая зависимость начинает проявляться – получается *нелинейная оптика*.

Сравнительно небольшая энергия лазерного излучения в несколько джоулей, «сосредоточенная» в нескольких фемтосекундах, дает импульсную мощность порядка петаватта ($1 \text{ ПВт} = 10^{15} \text{ Вт}$). В настоящее время созданы лазерные установки с такой мощностью. Их излучение можно сфокусировать и получить интенсивность около 10^{21} Вт/см^2 . Огромная величина интенсивности проявляется в уникальных свойствах излучения. Хорошо известно, что свет оказывает давление на отражающую или поглощающую поверхность. Величина этого давления определяется интенсивностью и обычно крайне мала. В начале XX века А.Н.Лебедев провел исключительно тонкие эксперименты, чтобы обнаружить это давление от самых ярких в то время обычных источников. Но при интенсивности 10^{21} Вт/см^2 давление света достигает 300 Гбар, что превосходит давление в центре Солнца! Такое давление наряду с другими эффектами взаимодействия света с веществом в принципе дают возможность ускорять вещество до $10^{22} g$. Разумеется, вещество при этом превращается в плазму, а само взаимодействие продолжается менее длительности импульса, т.е. нескольких фемтосекунд.

Таким образом, лазеры УКИ позволяют создавать экстремальные физические условия, подобные тем, что могут быть в недрах звезд или вблизи «черных дыр», а также при ядерных взрывах. Известно, что конкретной величине интенсивности света соответствуют определенные значения электрического и магнитного полей в электромагнитной волне. При интенсивности 10^{21} Вт/см^2 напряженность электрического поля в световой волне достигает 10^{12} В/см , что намного превосходит величину атомной напряженности поля, т.е. напряженности кулоновского поля на орбите электрона в атоме водорода, равной $5 \cdot 10^9 \text{ В/см}$. Это означает, что с атомов срываются и ускоряются внешние электроны. Этот процесс лежит в основе генерации импульсов уже аттосекундной длительности ($1 \text{ ас} = 10^{-18} \text{ с}$) с длинами волн в рентгеновском диапазоне (несколько нанометров).

При интенсивностях света свыше 10^{18} Вт/см^2 отклик электронов на свет кардинально изменяется. Скорости электронов

приближаются к скорости света, и магнитное поле начинает играть существенную роль (действует сила Лоренца). Становятся значительными релятивистские эффекты, например увеличение массы в зависимости от скорости. Оно влияет и на фазу, и на амплитуду колебаний. Электрон уже переизлучает не только на частоте света, но и на многих гармониках этой частоты. Под действием силы магнитного поля на электрон происходит такое искривление его траектории, что он получает значительный импульс в направлении светового пучка. Режим взаимодействия столь интенсивного света с веществом называется *релятивистской оптикой*. Ее следствиями является возможность генерации высших гармоник лазерного излучения вплоть до мягкого рентгена и возможность ускорения электронов до энергий в десятки мегаэлектронвольт.

Принцип действия лазера ультракоротких импульсов

Как же удастся получать столь короткие и мощные импульсы лазерного излучения? Оказывается, предельно короткую длительность импульса света, приближающуюся к периоду световой волны, можно получить благодаря волновой природе света. Известно, что сложение двух волн с близкими частотами приводит к явлению, которое называется биением колебаний (рис.7). Период биений определяется разностью частот. В оптике световые волны характеризуются не амплитудой, а *интенсивностью*, которая определяется квадратом амплитуды, усредненным по периоду волны. В случае световых волн их сложение приводит к периодическому изменению интенсивности. При сложении трех и более волн с одинаковой разностью частот между соседними волнами результат уже будет зависеть от соотношения фаз. Если амплитуды всех волн совпадают, сложение приведет к образованию ярко выраженного максимума. На рисунке 8 показан результат сложения пяти волн с частотами $f_0, 2f_0, 3f_0, 4f_0, 5f_0$ и фазами, обеспечивающими совпадение их амплитуд.

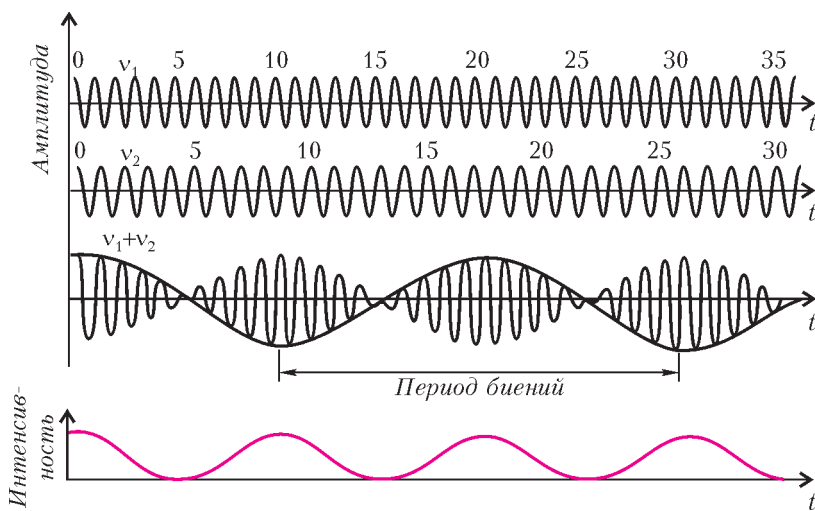


Рис. 7. Биения двух волн

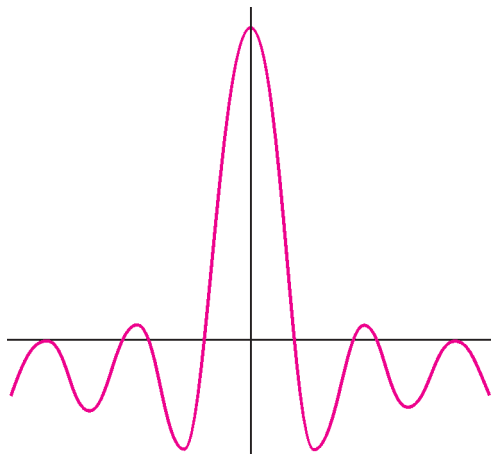


Рис. 8. Результат сложения пяти волн

Из математики известно, что периодическую функцию произвольной формы можно представить в виде ряда Фурье, т.е. суммой синусоид с эквидистантными частотами. Сама математическая операция (анализ Фурье) заключается в вычислении амплитуд синусоид, на которые раскладывается периодическая функция. Отсюда следует, что можно провести обратную операцию, т.е. сложить волны с соответствующими амплитудами и частотами (синтез) и получить периодическую последовательность импульсов, причем их форма, а значит, и длительность будут определяться числом сложенных волн. Иными словами, можно провести синтез периодической последовательности импульсов путем сложения многих непрерывных волн.

Как было сказано выше, резонатор лазера обладает набором мод с равноудаленными частотами. Генерация происходит на модах, попадающих в полосу усиления активной среды, и лазер способен излучать много волн на этих частотах. Это обстоятельство является ключевым для получения импульсов ультракороткой длительности. Лазер УКИ по существу является синтезатором, в котором получается достаточно много волн с нужными частотами, фазами и амплитудами. Из формул преобразования Фурье следует, что для получения импульса длительностью τ требуется, чтобы разность между максимальной и минимальной частотами (ширина спектра) $\Delta\nu$ отвечала соотношению $\tau \cdot \Delta\nu \approx 1$. Это означает, например, что для получения импульса длительностью 10 фс требуется ширина спектра излучения порядка 100 нм. В настоящее время имеются активные среды с огромными ширинами полосы усиления. Так, кристалл сапфира имеет полосу усиления от 650 нм до 1000 нм, что в принципе позволяет получать длительность импульса короче 4 фс.

Мы видели, что с помощью селектора мод можно заставить лазер работать лишь на одной моде. Но теперь, напротив, его нужно заставить работать на множестве мод, попадающих в полосу усиления. При длине резонатора около 1 м в полосу усиления сапфира попадают около миллиона мод. Таким образом, лазер, работающий с активной средой с достаточно большой шириной полосы усиления, способен испус-

кать большое число волн с эквидистантными частотами, сложение которых может дать импульс с длительностью, определяемым соотношением $\tau \cdot \Delta\nu \approx 1$.

Давайте рассмотрим излучение, которое получается в результате сложения большого числа волн. Это удобно сделать с помощью компьютера. Пусть каждая волна описывается выражением $A(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi)$, где A_0 – амплитуда, ω – частота, φ – фаза (точнее – начальная фаза). Сложим 100 волн с равными амплитудами и с частотами, отличающимися на определенный интервал $\Delta\omega$, получим $A(t) = \sum A_0 \sin((\omega + n\Delta\omega) + \varphi_n)$ (здесь n пробегает значения от 1 до 100). Фаза каждой из волн пусть будет определенной, но случайной величиной в интервале $(0; \pi)$. Поскольку свет характеризуется интенсивностью, которая пропорциональна квадрату амплитуды волны, результат сложения возведем в квадрат. Таким образом, мы получим изменение интенсивности во времени. На рисунке 9,а приведен пример такого сложения. Он, по существу, моделирует многомодовое излучение при условии, что в резонаторе отсутствует какое-либо устройство, регулирующее фазы мод (режим свободной генерации). Мы видим, что изменение интенсивности со временем представляет собой набор случайных выбросов интенсивности от нуля до некоторой максимальной величины, причем это изменение повторяется с периодом $T = 2\pi/\Delta\omega$. Это так называемые *флуктуационные импульсы* многомодового лазерного излучения. Отметим, что их длительность определяется шириной спектра, охватывающего все моды, т.е. может быть очень малой.

Теперь подобным образом сложим те же волны, но с вполне определенными фазами, например равными нулю (рис.9,б). Вместо хаотического изменения интенсивности во времени теперь получается периоди-

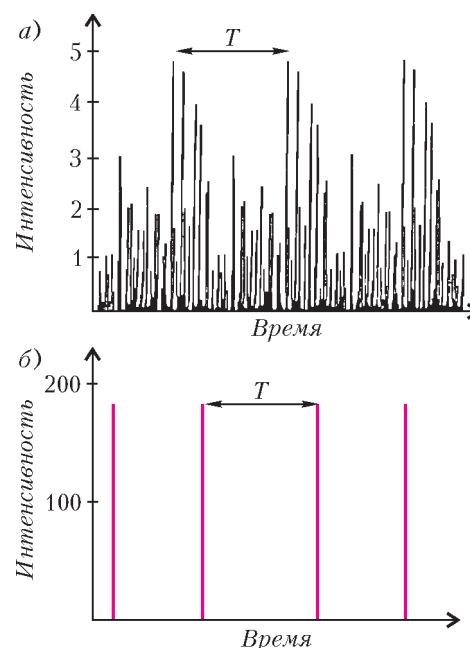


Рис. 9. Примеры сложения ста волн с равными амплитудами и частотами, отличающимися на постоянный интервал: а) фазы распределены случайным образом; б) фазы полностью согласованы

ческая последовательность одиночных на периоде импульсов, длительность которых определяется шириной спектра.

Значит, чтобы получить генерацию УКИ в результате сложения многих мод, необходимо, чтобы их фазы были согласованы. Это удается сделать в режиме работы лазера, который называется *синхронизацией мод*. Для его успешной реализации потребовались многолетние и настойчивые исследования лазеров. Здесь мы дадим упрощенное объяснение основного принципа синхронизации мод.

Обратите внимание на то, что рисунки 9,а и 9,б имеют разные масштабы по оси ординат. При согласованных фазах интенсивность получающегося одиночного импульса в огромное число раз превосходит интенсивность флуктуационных импульсов.

Теперь снова обратимся к схеме взаимодействия излучения с фотонами (см. рис.1). Из нее следует, что при поглощении света происходит обеднение нижнего уровня. Значит, поглощение станет уменьшаться по мере увеличения интенсивности света (числа фотонов). В случае обычных источников света их интенсивность слишком мала, чтобы такой эффект проявлялся. Для лазерного излучения изменение коэффициента пропускания в зависимости от интенсивности – обычный эффект нелинейной оптики. Вещества, способные изменять свой коэффициент поглощения в зависимости от интенсивности, называются *просветляющимися поглотителями*. Вот с их помощью и удается осуществить согласование фаз, которое называют *синхронизацией мод*, и получить генерацию УКИ.

Если слой такого поглотителя введен в резонатор лазера, то усиление в нем будет равно усилению в активной среде минус поглощение в просветляющемся поглотителе. При выполнении условия самовозбуждения (полный коэффициент усиления больше 1) начнется генерация на многих модах с образованием флуктуационных импульсов. Поскольку поглощение уменьшается с ростом интенсивности, наиболее интенсивные флуктуационные импульсы будут усиливаться сильнее менее интенсивных, и этот процесс будет развиваться по экспоненте. На рисунке 10 показан процесс такого развития, полученный путем компьютерного моделирования. Излучение, состоящее из флуктуационных импульсов, последовательно пропускается через активную среду. Видно, как происходит формирование одиночного на периоде следования импульса, что и свидетельствует о синхронизации мод. По существу, лазер «предпочитает» концентрировать энергию в таком импульсе, и тем самым достигается *самосинхронизация мод*.

Свойствами просветляющихся поглотителей обладают растворы некоторых красителей, которые и были использованы в лазерах УКИ. Но у них имеются

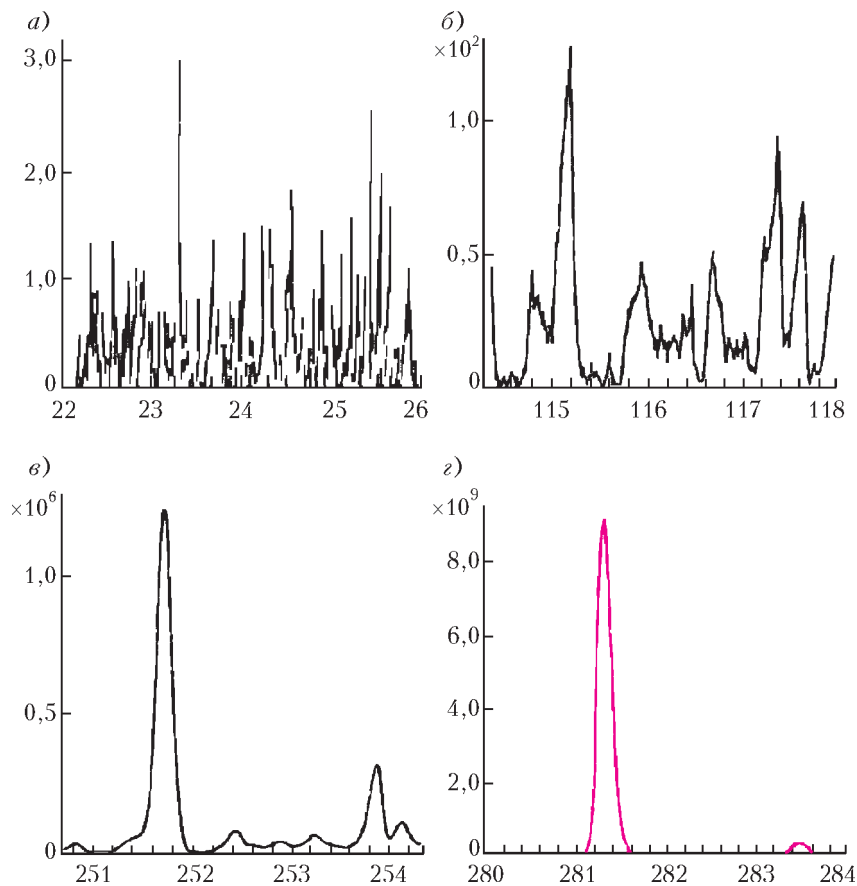


Рис. 10. Компьютерное моделирование процесса формирования УКИ в лазере с просветляющимся поглотителем

определенные недостатки. А именно, после воздействия интенсивным импульсом это состояние остается в течение некоторого времени после прохождения импульса (это время требуется для того, чтобы снова восстановилась первоначальная населенность основного уровня). Это означает, что после прохождения интенсивного импульса за ним может «проскочить» менее интенсивный, и стройная картина выделения одиночного УКИ нарушится. Для преодоления этого недостатка был изобретен искусственный просветляющийся поглотитель, основанный на другом явлении нелинейной оптики – эффекте *самофокусировки*. Он основан на зависимости показателя преломления прозрачного вещества от интенсивности проходящего через него света: $n = n_0 + n_2 I$, где n_0 – показатель преломления для слабых интенсивностей, а n_2 – коэффициент для определенного вещества. Этот эффект проявляется лишь при больших интенсивностях, характерных для излучения лазеров.

Пусть через слой вещества распространяется, как показано на рисунке 11,а, пучок лазерного излучения, интенсивность которого максимальна в центре и спадает до нуля на краях. Тогда, если $n_2 > 0$, получится искривление волнового фронта, и лучи станут отклоняться к оси пучка. Иными словами, при достаточной интенсивности плоскопараллельный слой прозрачного вещества превратится в собирающую линзу, причем ее оптическая сила будет зависеть от макси-

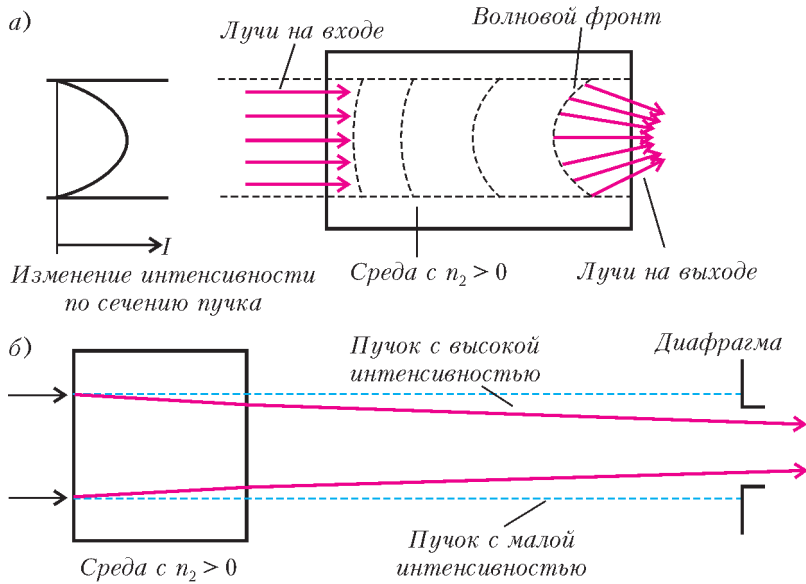


Рис. 11. а) Эффект самофокусировки; б) самофокусировка в сочетании с диафрагмой

мальной интенсивности в пучке. Пусть теперь за этим слоем располагается диафрагма (рис.11,б). Легко видеть, что при высокой интенсивности в пучке свет целиком пройдет через диафрагму, а при низкой интенсивности будет частично задержан ею. Таким образом, эффект самофокусировки в сочетании с диафрагмой действует подобно просветляющемуся поглотителю.

Однако получению предельно коротких импульсов препятствует еще одно обстоятельство. Дело в том, что вещества, через которые распространяется свет, обладают *дисперсией*, т.е. зависимостью показателя преломления от длины волны (частоты). Это приводит к разной скорости распространения света с разной частотой. При прохождении света через вещество скорость определяется как *фазовая скорость*: $v_{\text{фаз}} = c/n$. Поскольку показатель преломления n за-

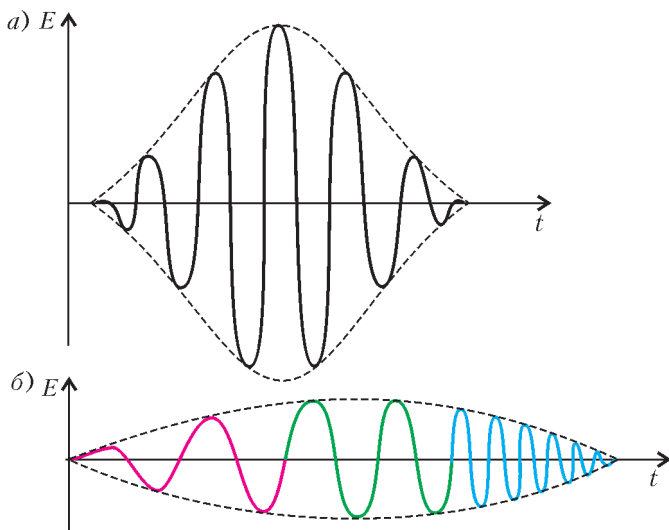


Рис. 12. Эффект дисперсии: а) начальная форма импульса; б) импульс после прохождения слоя вещества, обладающего дисперсией

висит от частоты, волны разных мод будут распространяться с разными скоростями, и согласование фаз нарушится. Как уже указывалось, длительность импульса связана с шириной спектра: $\tau \cdot \Delta\nu \approx 1$. Пусть теперь такой импульс широким спектром распространяется в среде, обладающей дисперсией. За счет различия в скоростях распространения форма импульса изменяется. Различные частоты как бы «идут не в ногу». Те волны, для которых показатель преломления больше, начинают отставать от тех, для которых он меньше. В результате происходит увеличение длительности импульса – он «расплывается». Кроме того, на переднем фронте импульса окажутся те частоты, для которых скорость распространения выше, а на хвосте импульса – для которых она ниже. Поэтому в пределах увеличенной длительности получается линейное изменение частоты от времени, т.е. частотная модуляция. Рисунок 12 иллюстрирует такое изменение формы импульса, причем оно будет тем больше, чем больше длина пути в диспергирующей среде.

Таким образом, при многократных проходах импульса через активную среду в резонаторе будет получаться увеличение длительности импульса. Для компенсации этого следовало бы пропустить такой удлиненный импульс через слой вещества с дисперсией противоположного знака. Тогда отставшие частоты смогли бы нагнать ушедшие вперед, и импульс снова принял бы первоначальную форму с минимальной длительностью. Однако в природе нет веществ с нужной отрицательной дисперсией. Замечательным достижением в разработке лазеров УКИ явилось создание специального устройства, обладающего отрицательной дисперсией. Оно основано на распространении света с разными длинами волн по разным путям, что можно сделать с помощью призм или дифракционных решеток. На рисунке 13 показано, как пара призм может скомпенсировать дисперсию активной среды. Подбором расстояния между призмами, а также перемещением одной из них вдоль биссектрисы

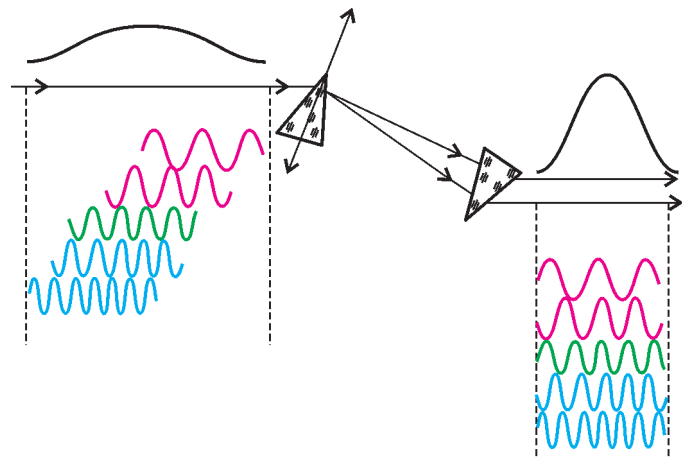


Рис. 13. Система пары призм для компенсации дисперсии

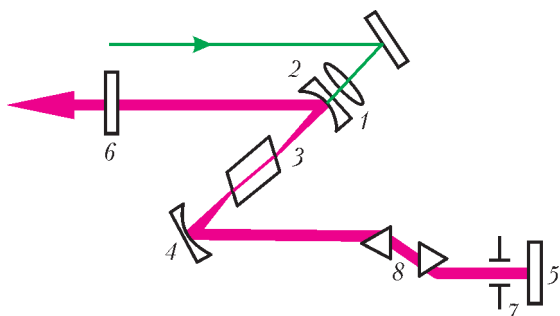


Рис. 14. Схема лазера УКИ

угла отклонения можно подобрать нужное для компенсации значение дисперсии.

В результате лазер, генерирующий фемтосекундные импульсы за счет синхронизации мод, принимает вид, показанный на рисунке 14. Пучок зеленого света лазера накачки, работающего в непрерывном режиме, фокусируется линзой (1) через зеркало (2) в кристалл сапфира (3) для достижения нужного уровня

инверсной населенности и усиления. Резонатор образован четырьмя зеркалами – двумя плоскими (5 и 6) на концах резонатора и двумя вогнутыми (2 и 4), фокусирующими лазерный свет в кристалл сапфира. Для обеспечения эффекта самофокусировки в самом кристалле сапфира вводится диафрагма (7), а для компенсации дисперсии – пара призм (8).

При тщательном подборе элементов лазера и оптимальной настройке удастся получать импульсы длительностью до 5 фс. Частота следования импульсов определяется оптической длиной между зеркалами резонатора и обычно составляет около 80 МГц. Длина волны максимума спектра приходится на 750 нм (красный свет). Надо сказать, что нужный для работы лазера эффект получается лишь при ограниченной средней выходной мощности, которая обычно менее 1 Вт. Это означает, что энергия в одиночном импульсе не превосходит 10 нДж.

(Продолжение следует)

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

Бугенвилль

А. ВАСИЛЬЕВ

ЛУИ АНТУАН ДЕ БУГЕНВИЛЛЬ (1729 – 1811) ПРОСЛАВИЛСЯ не математикой, хотя под влиянием Д'Аламбера он в 1752 году и написал трактат по интегральному исчислению, непревзойденный по ясности и глубине изложения. В этой работе были развиты идеи Лопиталя, сформулированные полувеком ранее. Здесь также были изложены новейшие представления дифференциального исчисления, что привело к признанию Бугенвилля не только Национальной академией наук Франции, но и Королевским обществом Англии. В 1756 году Бугенвилль опубликовал второй том своих математических изысканий, однако на этом его карьера математика завершилась.

Бугенвилль прожил необычайно яркую жизнь. В 1754 году он поступил на службу в армию и сражался за независимость французских колоний в Канаде. Через семь лет он перешел на флотскую службу и в 1764 году основал французскую колонию на Мальдивах.

В 1766 году правительство Франции поручило Бугенвиллю организацию первого французского кругосветного путешествия. Целью путешествия был поиск новых земель, однако у самого Бугенвилля не было какого-то определенного мнения о существовании неизвестного континента. С одной стороны, как он писал, трудно предположить такое обилие малых остро-

вов в южной части Тихого океана без наличия южного континента. С другой стороны, он полагал, что если бы такая земля существовала, то она уже была бы открыта. В ноябре 1766 года Бугенвилль отправился в путь и через некоторое время встретился в Рио-де-Жанейро со своим вспомогательным судном, на котором находился ботаник Коммерсон. Этот ботаник открыл растение с ярко-красными плотными листьями. В честь встречи с начальником экспедиции он назвал это растение бугенвиллеей. В южной части Тихого океана Бугенвилль открыл целый ряд географических объектов, включая пролив и остров, впоследствии названные его именем.

Кругосветное путешествие сделано Бугенвилля знаменитым, он стал первым французом, обогнувшим земной шар. По возвращении на родину он был назначен личным секретарем Людовика XV. С 1779 по 1782 год Бугенвилль участвовал в операциях французского флота против англичан в Северной Америке. Во время Великой французской революции он бежал из Парижа и обосновался на своей усадьбе в Нормандии. Несмотря на свою широко известную приверженность роялизму, Бугенвилль избежал репрессий, а с приходом к власти Наполеона был удостоен сенаторства и членства в ордене Почетного Легиона.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 2007 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3-2007» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2041» или «Ф2048». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2042 и М2045 предлагались на III этапе XXXIII Всероссийской олимпиады школьников по математике, задачи М2041, М2044, М2047, М2049 – на XXVIII Турнире городов.

Задачи Ф2050, Ф2053– Ф2056 предлагались на Московской физической олимпиаде этого года.

Задачи М2041–М2050, Ф2048–Ф2057

М2041. Какое наименьшее число ладей нужно поставить на шахматной доске 8×8 , чтобы все белые клетки оказались под боем этих ладей?

Р. Женодаров

М2042. Докажите, что при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ выполнено неравенство

$$(\operatorname{tg} x)^{\sin x} + (\operatorname{ctg} x)^{\cos x} \geq 2.$$

Н. Агаханов

М2043. Можно ли сконструировать такой набор «Юный паркетчик» из четырех одинаковых многоугольников и квадрата, чтобы из всех пяти деталей можно было сложить квадрат, а из трех одинаковых деталей – равносторонний треугольник?

О. Нечаева

М2044. Пусть $f(x)$ – некоторый многочлен ненулевой степени. Может ли оказаться, что уравнение $f(x) = a$ при любом значении a имеет четное число решений?

П. Кожевников

М2045. На доске записано число $\underbrace{111\dots 11}_{99 \text{ единиц}}$. Двое играют в следующую игру. Игроки ходят по очереди, причем за ход разрешается либо записать ноль вместо одной из единиц, кроме первой и последней, либо стереть один из нулей. Проигрывает тот, после хода которого число будет делиться на 11. Кто выигрывает при правильной игре?

М. Мурашкин

М2046. Муха села в полдень на секундную стрелку часов и решила ездить, придерживаясь следующего

правила: если одна стрелка обгоняет другую и муха сидит на одной из этих стрелок, то она пересаживается на другую. Сколько оборотов сделает муха к полуночи?

Фольклор

М2047. Из точки T , лежащей внутри треугольника ABC , стороны AB , BC , CA видны под углом 120° каждая. Докажите, что прямые, симметричные прямым AT , BT , CT относительно прямых BC , CA , AB соответственно, пересекаются в одной точке.

А. Заславский

М2048. Найдите такое наибольшее натуральное k , что найдется натуральное $n > 1$, для которого каждое из чисел n, n^2, \dots, n^k представимо в виде $x^2 + y^2 + 1$, где x, y – целые числа.

В. Сендеров

М2049. От правильного октаэдра с ребром 1 отрезали 6 углов – пирамидок с квадратным основанием и ребром $1/3$. Получился многогранник, грани которого – квадраты и правильные шестиугольники. Можно ли копиями такого многогранника замостить пространство?

А. Канель

М2050. В однокруговом турнире по волейболу (без ничьих) участвовало 2^n команд, причем команда «Чемпион» заняла первое место. Назовем команду *плохой*, если она выиграла у «Чемпиона». Оргкомитет планирует провести турнир по олимпийской системе и предполагает, что все встречи закончатся так же, как в предыдущем турнире. Докажите, что можно так составить расписание, что «Чемпион» опять победит, при-

чем все плохие команды проиграют (и прекратят участие) уже в первых двух турах.

Б.Френкин, Л.Остроумова

Ф2048. Материальная точка движется с постоянным ускорением. Ее координаты в начальный момент (0, 0, 0), через 1 секунду после начала движения (1, 1, 2), еще через секунду (2, 3, 4). Какой угол составляет вектор начальной скорости точки с вектором ее ускорения?

А.Зильберман

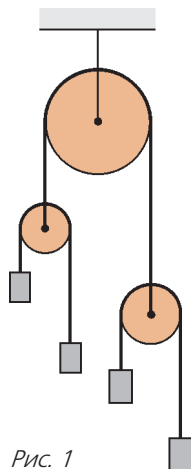


Рис. 1

Ф2049. В системе (рис.1) трения нет. Массы грузов на левом блоке M и $2M$, на правом блоке – $2M$ и $4M$. Найдите ускорение самого легкого груза при движении.

А.Блоков

Ф2050. Снаряд, летевший вертикально, взорвался в верхней точки своей траектории, распавшись на три осколка с массами $m_1 = 2m$, $m_2 = 3m$ и $m_3 = 4m$, которые полетели в разные стороны с одинаковыми начальными скоростями. Через некоторое время после взрыва расстояние между осколками с массами m_1 и m_2 оказалось равным L . Чему было равно в этот момент расстояние между осколками с массами m_1 и m_3 , если ни один из осколков еще не достиг земли? Влиянием воздуха и массой взрывчатого вещества снаряда пренебречь.

А.Якута

Ф2051. По горизонтальному столу катится без проскальзывания велосипедное колесо. Его диаметр 1 м, масса 1 кг, скорость центра 1 м/с. В некоторый момент к колесу приклеился маленький кусочек жвачки массой 2 г, лежавший на столе. Скорость центра колеса теперь меняется. Оцените отличие минимальной скорости колеса от его начальной скорости.

Р.Колесов

Ф2052. Однородное плоское тело вращается относительно вертикально оси, лежащей в плоскости тела (рис.2). Тело раскрутили до угловой скорости ω_0 и отпустили. На тело действует сила сопротивления воздуха такая, что избыточное давление пропорционально скорости v участка поверхности с коэффициентом k (т.е. $\Delta F = k\Delta S v$). Масса тела M , его «поперечная» площадь S . Сколько оборотов совершит тело до полной остановки?

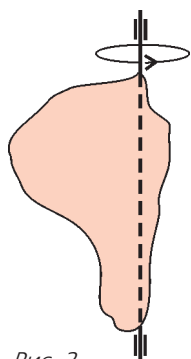


Рис. 2

А.Киселев

Ф2053. На столе стоит вертикальный теплоизолированный цилиндрический сосуд, в который вставлены два поршня (рис.3). Верхний поршень – тяжелый, теплонепроницаемый и может двигаться в цилиндре без трения. Нижний поршень – легкий и теплопроводящий, но между ним и стенками

сосуда существует трение. В каждой из частей сосуда находится по ν молей идеального одноатомного газа. Вначале система находилась в тепловом равновесии, а обе части сосуда имели высоту L . Потом систему медленно нагрели, сообщив ей количество теплоты ΔQ . На какую величину ΔT изменилась температура газов, если нижний поршень при этом не сдвинулся с места? При каком наименьшем значении силы трения F между нижним поршнем и стенками это возможно? Какова теплоемкость системы C в этом процессе? Теплоемкостью стенок сосуда и поршней пренебречь.

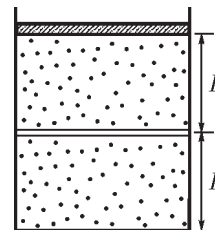


Рис. 3

Д.Вагин, М.Семенов

Ф2054. Над ν молями идеального одноатомного газа проводят циклический процесс, график которого изображен на pV -диаграмме (рис.4). Цикл состоит из вертикального (1–2) и горизонтального (3–1) участков и “лестницы” (2–3) из n ступенек, на каждой из которых давление и объем газа изменяются в одно и то же число раз.

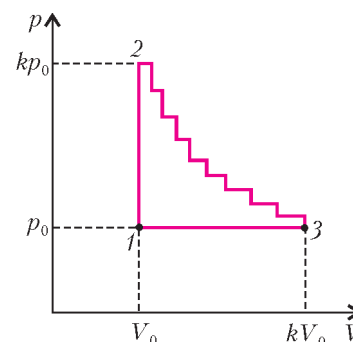


Рис. 4

Отношение максимального давления газа к минимальному равно k , отношение максимального объема к минимальному также равно k . Найдите КПД тепловой машины, работающей по данному циклу.

О.Шведов

Ф2055. Электрическая цепь (рис.5) состоит из идеальной батарейки с ЭДС U_0 , идеального амперметра и четырех одинаковых нелинейных элементов, для каждого из которых, в отличие от закона Ома, связь силы тока I и напряжения U имеет вид $I = \alpha U^2$. Какой ток I_0 показывает амперметр?

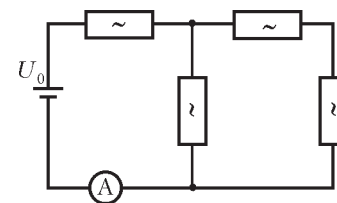


Рис. 5

Д.Харабадзе

Ф2056. Тридцать одинаковых резисторов сопротивлением R каждый соединены между собой в пространстве так, что они являются ребрами выпуклого правильного многогранника (рис.6): а) двадцатигранника (икосаэдра); б) двенадцатигранника (додекаэдра). Какое со-

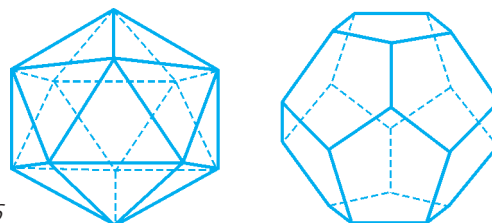


Рис. 6

противление будет представлять описанная выше система а) или б), если подключиться к паре ее наиболее удаленных вершин? Сколько разных значений сопротивления можно будет получить в случае а) и в случае б), если подключиться к всевозможным парам вершин этих многогранников?

Справка: грани икосаэдра – это 20 правильных треугольников, в каждой из 12 вершин сходятся по 5 треугольников; грани додекаэдра – это 12 правильных пятиугольников, в каждой из 20 вершин сходятся по 3 пятиугольника.

С.Кротов

Ф2057. Конденсатор емкостью C и две одинаковые катушки индуктивностью L каждая соединены параллельно и подключены к внешней цепи. В некоторый момент конденсатор не заряжен, а токи катушек равны I и $2I$. В этот момент очень быстро параллельно подключают еще пять таких же катушек, а внешнюю цепь отключают. Найдите максимальное значение заряда конденсатора и максимальное значение силы тока через катушку номер 7 (последняя из подключенных катушек). Элементы цепи считайте идеальными.

З.Рафаилов

**Решения задач M2021–M2025,
Ф2033–Ф2042**

M2021. В зале находится компания из n человек, среди которых есть пары знакомых. Известно, что если в зале останется 98 человек, то их всегда можно будет разбить на 49 пар знакомых. Какое наименьшее число пар знакомых могло быть в такой компании, если: а) $n = 99$; б) $n = 100$?

Ответ: а) 99; б) 150.

Если для некоторого человека A в компании найдется 97 не знакомых с ним людей, то A и эти 97 человек образуют группу из 98 человек, которую нельзя разбить на 49 пар знакомых, – противоречие. Таким образом, у каждого человека в компании не более 96 не знакомых с ним людей, и следовательно, не менее $n - 97$ знакомых. Поэтому количество пар знакомых не менее $n(n - 97)/2$, что при $n = 99$ и $n = 100$ равно 99 и 150 соответственно.

Остается привести примеры. Рассадим людей по кругу на равном расстоянии друг от друга.

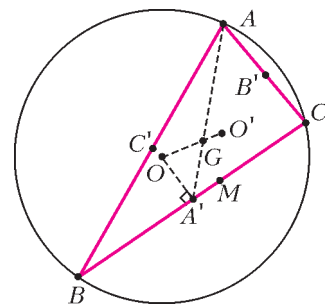
Для 99 человек пусть двое знакомы, если они соседи (т.е. сидят рядом за столом). Если зал покинул один человек, то оставшихся можно разбить на пары соседей.

Для 100 человек A_1, A_2, \dots, A_{100} пусть знакомы сидящие рядом и кроме того пусть имеются пары «диаметрально противоположных» знакомых $A_1 - A_{51}, A_2 - A_{52}, \dots, A_{50} - A_{100}$. Если зал покинули два человека с номерами разной четности, то оставшихся можно разбить на пары соседей. Пусть зал покинули два человека с номерами одной четности, для определенности A_1 и A_{2k+1} , где $k \leq 25$. Тогда выберем пару знакомых $A_2 - A_{52}$, а оставшихся 96 человек можно разбить на пары соседей.

П.Кожевников

M2022. Дана окружность, точка A на ней и точка M внутри нее. Рассматриваются хорды BC , проходящие через M . Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон всевозможных треугольников ABC , касаются фиксированной окружности.

Пусть O – центр данной окружности ω , O' – центр окружности ω' , проходящей через середины A', B', C' сторон треугольника ABC , G – точка пересечения медиан треугольника ABC (см. рисунок). Обозначим через R и R' радиусы окружностей ω и ω' соответственно. Так как $OA' \perp BC$, то A' лежит на (фиксированной) окружности γ с диаметром OM . При гомотетии h с центром в A и коэффициентом $2/3$ точка A' переходит в G , поэтому G лежит на фиксированной окружности γ_1 – образе γ при гомотетии h .



Треугольник $A'B'C'$ получается из треугольника ABC гомотетией с центром G и коэффициентом $-1/2$, поэтому $R' = R/2$, а точка O' такова, что $\overline{OG} = 2\overline{GO'}$. Это означает, что при гомотетии h_1 с центром в O и коэффициентом $3/2$ точка G переходит в O' , поэтому O' лежит на фиксированной окружности γ_2 – образе γ_1 при гомотетии h_1 .

Итак, радиусы всевозможных окружностей ω' равны $R/2$, а их центры лежат на фиксированной окружности γ_2 с центром O_2 и радиусом r . Значит, окружности ω' касаются окружности с центром O_2 и радиусом $R/2 + r$ (а также при $R/2 \neq r$ касаются окружности с центром O_2 и радиусом $|R/2 - r|$).

П.Кожевников

M2023. Пусть a, b, c – отличные от нуля целые числа, сумма которых равна нулю. Докажите, что:

- а) $(ab)^5 + (bc)^5 + (ca)^5$ делится на $(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2$;
- б) $a^n + b^n + c^n$ делится на $a^4 + b^4 + c^4$ при любом натуральном n , дающем при делении на 3 остаток 1;
- в) $(ab)^n + (bc)^n + (ca)^n$ делится на $(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2$ при любом натуральном n , дающем при делении на 3 остаток 2.

Введем обозначения: $A_n = a^n + b^n + c^n$, $B_n = (ab)^n + (bc)^n + (ca)^n$, $s_n = (x + y)^n + (-x)^n + (-y)^n$, где $n \in \mathbf{N}$.

Лемма 1. Многочлен s_n делится на $x^2 + xy + y^2$ (делимость s_n на многочлен $P(x, y)$ здесь и ниже означает, что при любых $x, y \in \mathbf{Z}$ имеем $s_n = P(x, y)l(x, y)$, где $l \in \mathbf{Z}$) в точности если n не делится на 3.

Доказательство. Имеем $s_1 : x^2 + xy + y^2$, $s_2 : x^2 + xy + y^2$. Отсюда вследствие легко доказываемого тождества

$$s_{n+3} = (x^2 + xy + y^2)s_{n+1} + xy(x + y)s_n, \text{ где } n \in \mathbf{N}, \quad (*)$$

следует, что $s_n : x^2 + xy + y^2$ при любом n , не делящем

ся на 3.

Предположим, что существует такое n , что n делится на 3 и s_n делится на $x^2 + xy + y^2$. Тогда вследствие (*) $s_3 = 3xy(x + y)$ делится на $x^2 + xy + y^2$. Полагая $x = 1, y = 2$, получаем противоречие.

Лемма 2. Если n при делении на 3 дает в остатке единицу, то s_n делится на $(x^2 + xy + y^2)^2$.

Доказательство проводится с помощью тождества (*) и леммы 1.

(Заметим, что лемма 2 дает точное условие. Это легко доказать с помощью производной и комплексных чисел. Таким же образом доказывается, что s_n делится на $(x^2 + xy + y^2)^3$ лишь при $n = 1$.)

б) Положим в лемме 2 $x = a, y = b$. Так как $A_4 = \frac{A_2^2}{2}$, а $A_2^2 = 4(a^2 + ab + b^2)^2$, то A_n делится на $\frac{A_4}{2}$. Обозначим $d = \text{НОД}(|a|, |b|, |c|) \equiv (|a|, |b|, |c|)$, и пусть число 2 входит в разложение d в степени α . Тогда в A_4 двойка входит в степени $4\alpha + 1$, а в A_n при $n \geq 4$ – в степени $\beta \geq n\alpha + 1 \geq 4\alpha + 1$. Окончательно: A_n делится на A_4 .

в) Из леммы 1 следует, что при любом $k \geq 0$ число A_{3k+2} делится на A_2 , откуда $A_{3k+2}^2 = A_{6k+4} + 2B_{3k+2}$ делится на $A_2^2 = 2A_4$. Из пункта б) следует, что A_{6k+4} делится на A_4 . Значит, $2B_{3k+2}$ делится на $A_4 = 2B_2$, откуда B_{3k+2} делится на B_2 .

а) Дадим непосредственное доказательство этого частного случая утверждения пункта в). Имеем

$$\begin{aligned} & ((ab)^2 + \dots)((ab)^3 + \dots) = \\ & = ((ab)^5 + \dots) + a^2b^2c^2(a(b^3 + c^3) + \dots). \end{aligned}$$

Далее,

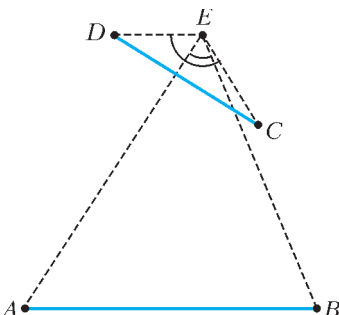
$$\begin{aligned} a(b^3 + c^3) + \dots & = a(-a)(b^2 - bc + c^2) + \dots = \\ & = (-a^2(b^2 + c^2) - \dots) + abc(a + \dots). \end{aligned}$$

Поскольку сумма в последних скобках равна нулю, делимость доказана.

Из этого простого рассуждения и родились постепенно все пункты задачи M2023.

В.Произволов, В.Сендеров

M2024. Существует ли выпуклый многоугольник, в котором каждая сторона равна какой-то диагонали, а каждая диагональ равна какой-то стороне?



Ответ: нет.

Предположим противное, и пусть AB – наибольшая сторона многоугольника, CD – наименьшая диагональ, E – такая вершина, что точка E и отрезок AB лежат по разные стороны от прямой CD (см. рисунок). Так как $AE \leq AB$ и $BE \leq AB$,

то $\angle AEB \geq 60^\circ$. С другой стороны, так как $DE \geq CD$ и $CE \geq CD$, то $\angle CED \leq 60^\circ$. Противоречие.

Б.Френкин

M2025*. *Натуральные числа a, b, c, d образуют возрастающую арифметическую прогрессию.*

а) *Докажите, что для любого нечетного n произведение $abcd$ может оказаться n -й степенью натурального числа.*

б) *Докажите, что произведение $abcd$ не может быть квадратом натурального числа.*

а) Пусть t нечетно. Будем искать прогрессию в виде $1 \cdot 2^x \cdot 3^y, 2 \cdot 2^x \cdot 3^y, 3 \cdot 2^x \cdot 3^y, 4 \cdot 2^x \cdot 3^y$. Найдем $y \geq 0$ такое, что $4y + 1 \vdots t$. Для этого достаточно положить $y = \frac{1}{4}(t - 1)$ при $t \equiv 1 \pmod{4}$ и $y = \frac{1}{4}(3t - 1)$ при $t \equiv 3 \pmod{4}$.

Далее можно взять $x = 3y$.

б) Без ограничения общности будем считать, что члены прогрессии взаимно просты в совокупности: $\text{НОД}(a, b, c, d) \equiv (a, b, c, d) = 1$.

Нетрудно показать, что каждую арифметическую прогрессию, удовлетворяющую условиям пункта б), можно представить в одном из следующих видов:

$$\begin{aligned} & \div x^2, y^2, z^2, t^2 \\ & \div 3x^2, 2y^2, z^2, 6t^2 \\ & \div 6x^2, y^2, 2z^2, 3t^2, \end{aligned}$$

где $x, y, z, t \in \mathbf{N}$.

Рассмотрим первый случай. Из системы

$$\begin{cases} 2y^2 = x^2 + z^2, \\ 2z^2 = y^2 + t^2 \end{cases}$$

имеем

$$2(yt)^2 - 2(xz)^2 = z^2t^2 - x^2y^2,$$

откуда

$$\left(2(u^2 - v^2)\right)^2 + 4u^2v^2 = (z^2t^2 + x^2y^2)^2,$$

где $u = yt, v = xz$. Получаем

$$u^4 - u^2v^2 + v^4 = B^2, \text{ где } u, v, B \in \mathbf{N}, u \neq v. \quad (1)$$

Рассмотрим второй случай. Из системы

$$\begin{cases} 3x^2 + z^2 = 4y^2, \\ y^2 + 3t^2 = z^2 \end{cases}$$

имеем $x^2 + t^2 = y^2$. Так как $(a, b, c, d) = 1$, то число x нечетно, $(x, y) = 1$. Отсюда

$$(y + t, y - t) = 1, \quad y + t = u^2, \quad y - t = v^2,$$

где $u, v \in \mathbf{N}$. Переписав второе равенство системы в виде

$$(y + t)^2 - (y + t)(y - t) + (y - t)^2 = z^2$$

и сделав замену, мы опять приходим к (1).

Третий случай аналогичен второму.

Докажем, что (1) невозможно.

Латинскими буквами мы будем обозначать в доказательстве натуральные числа.

Без ограничения общности будем считать $u > v$, $(u, v) = 1$. Перепишем (1) в виде

$$(u^2 - v^2)^2 + (uv)^2 = B^2. \quad (2)$$

Пусть u, v – нечетные числа. Поскольку $(u^2 - v^2, uv) = 1$, существуют m и n такие, что $(m, n) = 1$, m и n – разной четности, $u^2 - v^2 = 2mn$, $uv = m^2 - n^2$. Получаем

$$\begin{aligned} m^4 - m^2n^2 + n^4 &= (m^2 - n^2)^2 + (mn)^2 = \\ &= (uv)^2 + \frac{(u^2 - v^2)^2}{4} = \left(\frac{u^2 + v^2}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Мы получили равенство вида (2), в левой части которого стоят числа разной четности m и n .

Пусть u, v – числа разной четности. Будем считать, что u нечетно (случай нечетного v аналогичен). Существуют m и n такие, что $(m, n) = 1$, m и n – разной четности, $u^2 - v^2 = m^2 - n^2$, $uv = 2mn$. При этом m нечетно, поскольку в противном случае было бы $1 \equiv u^2 \equiv -n^2 \equiv -1 \pmod{4}$. Обозначив $v_0 = \frac{v}{2}$, получаем $uv_0 = mn$. Из этого равенства легко вывести, что существуют a, b, c, d такие, что $u = ac$, $v_0 = bd$, $m = ad$, $n = bc$. Поскольку $(u, v_0) = 1$, то $(a, b) = (c, d) = 1$. Из нечетности чисел u, m следует, что a, c, d нечетны. Значит, вследствие четности n , число b четно. Подставляя $u = ac$, $v = 2v_0 = 2bd$, $m = ad$, $n = bc$ в равенство $u^2 - v^2 = m^2 - n^2$, получаем

$$(a^2 + b^2)c^2 = (a^2 + 4b^2)d^2.$$

Обозначим $l = (a^2 + b^2, a^2 + 4b^2)$. Поскольку $3a^2 : l$, $3b^2 : l$, $(a, b) = 1$, то $3 : l$. При $l = 3$ было бы $a^2 + b^2 : 3$, откуда $a : 3$, $b : 3$ – в противоречии с $(a, b) = 1$. Получили $l = 1$. Отсюда $d^2 : a^2 + b^2$, $c^2 : a^2 + 4b^2$. Далее, поскольку $(c, d) = 1$, то $a^2 + b^2 : d^2$, $a^2 + 4b^2 : c^2$. Следовательно, $a^2 + b^2 = d^2$, $a^2 + (2b)^2 = c^2$. Поскольку $(a, b) = 1$, a нечетно, то $(a, 2b) = 1$. Значит, существуют u_1 и v_1 такие, что $(u_1, v_1) = 1$, u_1 и v_1 – числа разной четности, $a = u_1^2 - v_1^2$, $b = u_1v_1$. Подставляя последние два равенства в $a^2 + b^2 = d^2$, получаем $u_1^4 - u_1^2v_1^2 + v_1^4 = d^2$. При этом $u_1v_1 = b < 2bd = v \leq uv$, откуда $u_1v_1 < uv$.

Таким образом, утверждение доказано методом спуска.

Замечания

1. Ясно, что утверждение пункта б) справедливо и для прогрессий с рациональными (но уже не обязательно целыми) положительными членами. Однако на прогрессии с произвольными целыми (не обязательно положительными) членами это утверждение распространить нельзя. Это показывает пример прогрессий вида $-m, -n, n, m$, где $n \in \mathbf{N}$.

2. Результат пункта б) – обобщение теоремы Ферма, по

которой не существует четырех различных квадратов натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию.

Рассмотрим вопрос о непостоянных арифметических прогрессиях вида a^2, b^2, c^2 , где $a, b, c \in \mathbf{N}$, $(a, b, c) = 1$. Легко показать, что таких прогрессий (и даже прогрессий вида a^2, b^4, c^2) бесконечно много (оба утверждения доказываются почти одинаково). Бесконечно много и прогрессий вида a^4, b^2, c^2 , уже в случае $a = 1$.

Существует и прогрессия a^4, b^4, c^2 : при $a = 1, b = 13, c = 239$. Можно доказать, что и таких прогрессий бесконечно много (по этому поводу см., например, книгу В.Серпинского «О решении уравнений в целых числах», с.69–71, www.math.ru). Однако прогрессий вида a^4, b^2, c^4 не существует, это тоже доказывается методом спуска. В частности, не существует прогрессий a^4, b^4, c^4 .

3. Рассмотрим арифметическую прогрессию a, b, c из различных натуральных чисел. Тем же способом, что и выше, легко доказать, что произведение abc может оказаться любой натуральной степенью, не кратной 3. Наметим доказательство того, что равенство $abc = e^3$ выполняться не может.

Пусть оно выполняется. Представим прогрессию в одном из трех видов:

$$\begin{aligned} &\div x^3, y^3, z^3 \\ &\div 2x^3, y^3, 4z^3 \\ &\div 4x^3, y^3, 2z^3, \end{aligned}$$

где $x, y, z \in \mathbf{N}$.

В первом случае имеем $x^3 + z^3 = 2y^3$, во втором $x^3 + 2z^3 = y^3$ (третий случай аналогичен второму). Однако доказано, что первое равенство выполняется лишь при $x = y = z$, второе – выполняться вообще не может. Это утверждение эквивалентно следующему.

Теорема. $2 = 1^3 + 1^3$ – единственное представление числа 2 в виде суммы кубов двух рациональных чисел. Из этого глубокого и важного предложения легко получаются такие утверждения.

Следствие 1. Уравнение $x^3 + 1 = y^2$ имеет в натуральных числах единственное решение: $(2, 3)$.

Следствие 2. Ни при каком $n > 1$ сумма $1^3 + \dots + n^3$ не является кубом натурального числа.

Следствие 3. Ни при каком $n > 1$ сумма $1^2 + \dots + n^2$ не является кубом натурального числа.

Легко показать, что следствия 1 и 2 эквивалентны, и вывести следствие 3 из следствия 2.

Утверждение следствия 1 было хорошо известно школьникам уже в математических кружках около полувека назад. Широко распространено убеждение, что это утверждение не имеет элементарного доказательства. (Это убеждение отразилось, например, в российском издании ценной и содержательной книги Чарльза Тригга «Задачи с изюминкой».) Однако в действительности даже приведенная выше теорема имеет абсолютно элементарное (хотя достаточно сложное и весьма длинное) доказательство.

Отметим, что справедливо гораздо более общее, нежели следствие 1,

Предложение. Система чисел (3, 2, 2, 3) – единственное решение уравнения $x^y - z^t = 1$ в натуральных числах, больших 1.

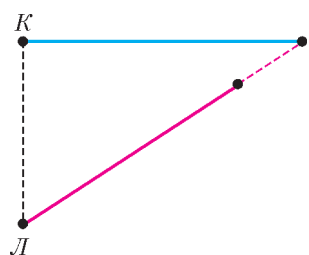
К обсуждению этой глубоко нетривиальной теоремы мы намерены вскоре вернуться в нашем журнале.

Возвращаясь к следствиям 2 и 3, отметим, что уравнение в натуральных числах $1^2 + \dots + x^2 = y^2$ имеет ровно два решения: (1, 1) и (24, 70). Известны различные доказательства этого факта. Однако все они неэлементарны.

С суммами же $1^3 + \dots + n^3$ дело обстоит по-другому. Легко доказать, что любая такая сумма – точный квадрат; несколько сложнее – что среди таких сумм бесконечно много четвертых степеней. Если же вы докажете, что при $n > 1$ восьмых степеней среди таких сумм нет, – значит, вы хорошо поняли решение этой задачи (по-видимому, самой трудной задачи в «Задачнике «Кванта» по математике в 2006 году).

В. Сендеров

Ф2033. По прямой дороге бежит кролик, его скорость постоянна и равна $v = 2$ м/с. Кролика замечает лиса – она находится в этот момент на расстоянии $L = 40$ м от дороги (кролик в этот момент также находится на расстоянии L от лисы). Лиса бросается в погоню, ее скорость равна по величине скорости кролика. На каком минимальном расстоянии от кролика лиса сможет оказаться через время $t = 40$ с после начала погони? Считать лису и кролика материальными точками.



Кролик за 40 секунд убежит на 80 метров, именно в эту точку и должна бежать лиса (см. рисунок). Найдем расстояние между участниками забега:

$$l = \sqrt{40^2 + 80^2} \text{ м} - 80 \text{ м} \approx 9,44 \text{ м}.$$

Ясно, что если у лисы времени будет побольше, то она сможет подобраться к кролику сколь угодно близко...

З. Рафаилов

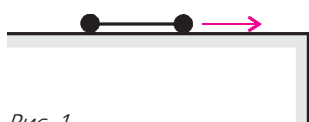


Рис. 1

Ф2034. По гладкой горизонтальной поверхности подставки скользит маленькая гантелька, состоящая из очень тонкого легкого стерженька длиной 5 см и двух маленьких массивных шариков на концах (рис. 1). Скорость гантельки направлена вдоль стержня и составляет 2 м/с. Соскользнув с края подставки, гантелька продолжает движение. Оцените число оборотов, которое она совершит, падая с высоты 30 м.

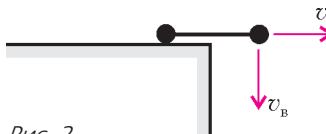


Рис. 2

«Передний» шарик гантельки проскочит край

подставки и сразу начнет набирать вертикальную скорость, направленную вниз, под действием силы тяжести (рис. 2). За то малое время, пока к краю подбедет второй шарик, гантелька не успеет заметно повернуться, поэтому

$$v_b = g\tau = g \frac{L}{v_r} = 10 \cdot \frac{0,05}{2} \text{ м/с} = 0,25 \text{ м/с}$$

(кстати, можно оценить и угол поворота гантельки за это время: $\alpha = 0,5v_b (L/v_r)/L = 1/16$ рад $\approx 4^\circ$). Угловая скорость вращения далее не изменяется, она составляет $\omega = v_b/L$, и за время падения с высоты $H = 30$ м гантелька повернется на угол

$$\varphi = \omega t = \frac{v_b}{L} \sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 12,3 \text{ рад}.$$

Это почти 2 полных оборота.

А. Повторов

Ф2035. Проводится расчет броска камня через тонкую вертикальную стенку. Расчет показал, что при бросании под углом 30° к горизонту минимальная скорость составляет 100 м/с, а при броске под углом 60° достаточно 40 м/с. Какой скорости может хватить, если разрешено подойти к стенке поближе? Бросок производят с поверхности земли.

Запишем уравнение траектории, проходящей через верхнюю точку стены:

$$H = L \operatorname{tg} \alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

где H – высота стены, L – расстояние от точки броска до нижней точки стены, v_0 – начальная скорость камня, α – угол броска. Мы бросаем оба раза из одной точки, находящейся на уровне поверхности земли, скорости и углы для этих случаев даны в условии задачи. Подставляя заданные значения, получаем простую систему уравнений

$$H = L \operatorname{tg} 30^\circ - \frac{10L^2}{2 \cdot 100^2 \cos^2 30^\circ},$$

$$H = L \operatorname{tg} 60^\circ - \frac{10L^2}{2 \cdot 40^2 \cos^2 60^\circ}.$$

Отсюда легко найти высоту стены: $H \approx 45$ м. Для такой стены скорость «ближнего» броска составляет примерно 30 м/с. Нет смысла считать точнее – данные в условии явно округлены.

З. Простов

Ф2036. На гладкой горизонтальной поверхности находится узкая коробка длиной $L = 0,2$ м и массой $M = 100$ г, посередине коробки покоится маленький шарик массой $m = 10$ г. Коробке ударом придать скорость $v = 10$ см/с параллельно ее длинной стороне. Шарик может двигаться только вдоль коробки, ударяясь абсолютно упруго о ее торцы. Сколько ударов произойдет за первую минуту после начала движения коробки? Найдите смещение коробки за это время.

Первый удар произойдет через 1 секунду. Заметим, что при абсолютно упругом лобовом ударе двух тел оста-

ется неизменной их относительная скорость (это легко доказать, а знать этот факт полезно, многие задачи становятся проще...). Тогда каждый следующий удар будет происходить через 2 секунды после предыдущего. За оставшиеся 59 секунд произойдет 29 ударов, и еще секунду будет «безударное» движение. Найдем скорость коробки после первого удара, воспользовавшись законами сохранения импульса и энергии

$$mv = mu_1 + Mu_2 \text{ и } \frac{mv^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{Mu_2^2}{2}.$$

Учтем, что $M = 10m$, тогда одно возможное значение скорости коробки будет $u_{21} = 2v/11$, второе – $u_{22} = 0$. После первого удара получается первое значение, после второго скорость должна измениться, но суммарные импульс и энергия системы остаются прежними, а возможные решения уравнений мы уже перечислили, поэтому коробка после второго удара остановится. Затем все снова повторится. За две секунды коробка проедет расстояние $u_2L/v = 2L/11 = 2/55$ м, следующие две секунды она не двигается. Тогда смещение коробки за минуту составит

$$l = \frac{2L}{11} \cdot 14 + \frac{L}{11} = \frac{29L}{11} \approx 0,5 \text{ м}.$$

А.Шариков

Ф2037. В сосуде постоянного объема находится смесь гелия и кислорода. Смесь нагревают от 300 К до 400 К, при этом половина атомов гелия покидают сосуд через очень мелкие трещины в стенках, а давление газа остается прежним. Во сколько раз изменяется при этом плотность смеси? Моль кислорода имеет массу 32 г, моль гелия – 4 г.

Это совсем простая задача. Пусть количества гелия и кислорода вначале равны v_1 и v_2 соответственно. Общее количество вещества в системе после нагрева должно составлять $0,5v_1 + v_2$. Поскольку давление газа не изменяется,

$$(v_1 + v_2)T_1 = (0,5v_1 + v_2)T_2,$$

откуда $v_1 = v_2$. Итак, количество атомов гелия вначале было равно количеству молекул кислорода. Объем смеси при нагревании не изменился, тогда отношение плотностей будет равно

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{0,5M_1 + M_2}{M_1 + M_2} = \frac{0,5 \cdot 4 + 32}{4 + 32} = \frac{17}{18}.$$

Г.Азов

Ф2038. С порцией гелия производят циклический процесс – расширение газа при постоянном давлении, затем охлаждение газа при неизменном его объеме и, наконец, сжатие газа без подвода тепла снаружи до начального давления. Может ли термодинамический КПД такого цикла оказаться больше 50%?

Работа в цикле равна (см. рисунок)

$$A = p_1(V_2 - V_1) - A_1,$$

где A_1 – работа газа при адиабатическом расширении

от V_1 до V_2 (газ в данном процессе адиабатически сжимается, поэтому соответствующее слагаемое берется со знаком «минус»).

Тепло газ получает только на участке изобарического расширения. Гелий – одноатомный газ, поэтому полученное на изобаре количество теплоты составляет

$$Q = \nu C_p \Delta T = \frac{C_p p_1 \Delta V}{R} = 2,5 p_1 (V_2 - V_1),$$

где $C_p = 2,5R$ – молярная теплоемкость одноатомного газа при постоянном давлении.

Термодинамический КПД данного цикла

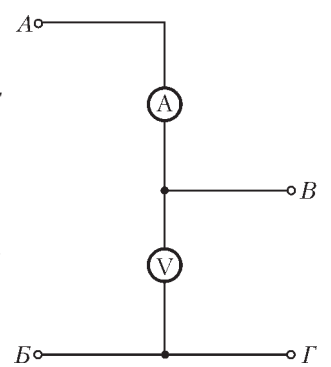
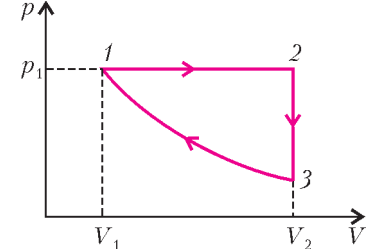
$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{p_1(V_2 - V_1) - A_1}{2,5 p_1 (V_2 - V_1)} \leq \frac{1}{2,5} = 0,4$$

и, тем более, меньше 50%.

А.Зильберман

Ф2039. Стрелочные вольтметры высокого класса точности имеют, как правило, очень низкое сопротивление, и включать их в цепь для измерения напряжения во многих случаях просто недопустимо – слишком сильно при этом изменится режим схемы (напряжение между исследуемыми точками при подключенном вольтметре станет совсем другим). Для измерения напряжений порядка 5 В предлагается использовать схему, состоящую из точного вольтметра V – предел измерений 10 В, сопротивление прибора 1000 Ом, класс точности 0,2, т.е. погрешность не превосходит 0,2% от максимального значения шкалы, и микроамперметра A – ток полного отклонения 100 мкА, сопротивление прибора 1000 Ом, класс точности 2,5, т.е. погрешность не превышает 2,5% от максимального значения его шкалы. К точкам А и Б схемы (см. рисунок) подключают измеряемое напряжение – лабораторный блок питания, напряжение которого можно очень плавно изменять в широких пределах. При измерении напряжение источника плавно изменяют, добиваясь минимального тока через микроамперметр. За результат принимают показание вольтметра при «нулевом» токе через микроамперметр. Будем считать, что минимальный ток, уверенно фиксируемый микроамперметром, составляет 2 мкА. Определите погрешность измерений получившегося «вольтметра» и его сопротивление.

Погрешность измерения напряжения складывается из неточности вольтметра и неточности определения «ба-

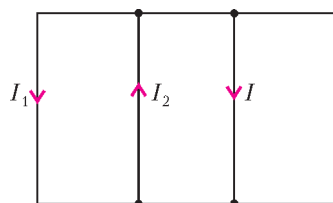


ланса» напряжений. Первая погрешность составляет 0,2% от максимального значения шкалы вольтметра, т.е. 0,02 В, вторая равна произведению сопротивления микроамперметра и минимального тока через него, который мы можем зафиксировать, т.е. $10^3 \text{ Ом} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ А} = 0,002 \text{ В}$, что на порядок меньше первого вклада в погрешность измерений. Погрешность микроамперметра на результат не влияет – микроамперметр вообще мог бы иметь только одно «нулевое» значение на шкале. Всего получается погрешность не более 0,022 В, что составляет примерно 0,2% от максимального значения шкалы прибора, – в результате мы практически реализуем класс точности нашего вольтметра, т.е. 0,2%. «Входной» ток нашего вольтметра не превышает 2 мкА, поэтому сопротивление получается равным $5 \text{ В} / (2 \cdot 10^{-6} \text{ А}) = 2,5 \cdot 10^6 \text{ Ом}$, что во много раз превышает сопротивление обычных «стрелочных» вольтметров на данное значение измеряемого напряжения! При таком способе измерений удастся объединить точность прибора (вольтметра) и высокую чувствительность микроамперметра.

З.Хитров

Ф2040. Параллельно включены катушки с индуктивностями 1 Гн и 2 Гн, резистор сопротивлением 100 Ом и конденсатор емкостью 100 мкФ. К цепи подключают внешний источник напряжения, и после нескольких переключений элементов в некоторый момент через катушки протекают равные по величине токи 0,2 А, а через резистор в этот момент течет ток 0,1 А. Затем внешний источник отключают, предоставляя параллельную цепь самой себе. Найдите полный заряд, который после этого протечет через резистор, а также полное количество теплоты, которое выделится в резисторе. Элементы цепи считать идеальными.

Обозначим направления и величины токов на «скелете» цепи в начальный момент (см. рисунок): I_1 – через катушку индуктивностью



катушку индуктивностью $2L = 2 \text{ Гн}$, I_2 – через катушку индуктивностью L и I – через резистор сопротивлением $R = 100 \text{ Ом}$. Начиная с этого момента ЭДС индукции катушек все время

одинаковы, а значит, и изменения магнитного потока катушек равны друг другу. Тогда при токе J через катушку индуктивностью $2L$ ток через катушку индуктивностью L будет равен (направления токов-стрелок оставим прежними) $2I_1 + I_2 = 2J$, и через большое время этот ток станет равным J (к этому времени конденсатор будет окончательно разряжен и ток через резистор упадет до нуля). Отсюда $J = (2I_1 + I_2)/3$.

В условии задачи не сказано, куда текут начальные токи. Очевидно, что нужно рассмотреть два случая – токи направлены в одну сторону ($I_1 = -I_2$) и в разные стороны ($I_1 = I_2$). При этом направление тока через резистор для нас несущественно. Тогда в первом случае $J = I_1/3$, во втором случае $J = I_1$, т.е. токи через

катушки после длительных изменений вернуться к начальным значениям.

Теперь можно закончить решение задачи. В любой момент времени ЭДС индукции любой из катушек равна напряжению на резисторе, т.е.

$$2L\Delta I_1 = RI\Delta t = R\Delta q_R.$$

При суммировании получится в левой части $2L(J - I_1)$, в правой части Rq_R . Окончательно, для первого случая прошедший через резистор заряд будет равен

$$|q_R| = \frac{4LI_1}{3R} = 2,67 \cdot 10^{-3} \text{ Кл},$$

для второго случая заряд получится нулевым.

Баланс энергий для первого случая дает количество теплоты

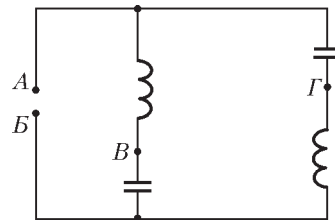
$$W_1 = \frac{4LI_1^2}{3} + \frac{CI^2R^2}{2} = 0,0583 \text{ Дж}.$$

Для второго случая энергии катушек в начальный момент и в конце одинаковы, остается только второе слагаемое, т.е.

$$W_2 = \frac{CI^2R^2}{2} = 0,005 \text{ Дж}.$$

А.Старов

Ф2041. Источник переменного напряжения включен между точками А и В цепи (см. рисунок). При какой частоте источника амплитуда напряжения, измеренного между точками В и Г, будет ровно в 10 раз больше амплитуды напряжения источника? Конденсаторы имеют емкости $C = 10 \text{ мкФ}$, катушки – индуктивности $L = 1 \text{ Гн}$.



Токи через первую и вторую LC-цепочки одинаковы, напряжения конденсатора и катушки в каждой цепочке противофазны. Отсюда следует, что напряжение между точками В и Г равно сумме модулей напряжений катушки и конденсатора, а между точками А и В – их разности. Тогда

$$U_1 + U_2 = 10(U_1 - U_2), \text{ или } 9U_1 = 11U_2.$$

Если напряжение на катушке больше, чем на конденсаторе, то

$$9\omega L = \frac{11}{\omega C},$$

и для частоты получаем

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{11}{9LC}} = 349,6 \text{ с}^{-1}, \text{ или } f_1 = \frac{\omega}{2\pi} = 55,6 \text{ Гц}.$$

Но есть и вторая возможность, когда напряжение конденсатора больше по величине, чем напряжение катушки. В этом случае частота равна

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{9}{11LC}} = 286 \text{ с}^{-1}, \text{ или } f_2 = 45,5 \text{ Гц}.$$

В первом случае частота выше резонансной частоты

последовательного LC-контура (она равна примерно 50,3 Гц), во втором случае – ниже.

Ф.Азов

Ф2042. На гладкой горизонтальной поверхности находится груз массой $M = 2$ кг, к его боковым стенкам приклеены две одинаковые пружины жесткостью

$k = 100$ Н/м каждая (рис.1). Одна из пружин прикреплена концом к стене, конец другой пружины мы перемещаем по горизонтали. Координата точки А при этом изменя-

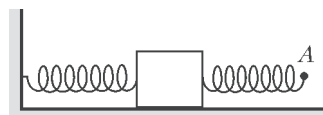


Рис. 1

ется по закону $x = 0,02 \cos 20t$ (в этой формуле время t измеряется в секундах, координата x – в метрах). Найдите амплитуду колебаний груза на этой частоте.

Установившиеся колебания груза происходят с частотой вынуждающей силы $\omega = 20$ с⁻¹, на груз действует сила $k(x - y) - ky$

(рис.2), ускорение груза определяется этой силой. Для упрощения вычислений полагаем длины пружин в недеформированном

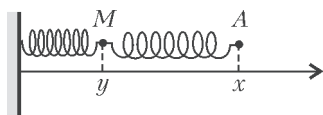


Рис. 2

положении равными нулю – выражения получаются попроще, а дополнительные силы, постоянные по величине, на колебания с частотой ω влияния не оказывают. Координата груза $y(t)$ определяется из уравнения

$$My'' = -2ky + kx.$$

Если записать $y = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$, то получим

$$-MA_0\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) + 2kA_0 \cos(\omega t + \varphi) = 0,02k \cos \omega t.$$

Для нахождения сдвига фаз – угла φ – рассмотрим момент времени t_1 , для которого $\omega t_1 = \pi/2$. Если частота отлична от резонансной, то получаем $\sin \varphi = 0$. Возьмем $\varphi = 0$. Тогда амплитуда колебаний груза будет равна

$$A_0 = \frac{0,02k}{2k - M\omega^2} = -0,0033 \text{ м.}$$

Амплитуда на данной частоте получилась отрицательной – колебания груза противофазны колебаниям точки А. Можно получить «нормальную», положительную амплитуду колебаний, если немного вернуться назад и взять значение $\varphi = \pi$. Для меньшей частоты (ниже резонансной) колебания груза будут происходить в фазе с вынуждающими колебаниями конца пружины.

М.Учительев



Победители конкурса

«Задачник «Кванта»

2006 года

Первое место заняли

по математике

Нижибицкий Евгений – г. Краснодар, школа 73;

по физике

Пех Павел – г. Красноярск, школа 145,

Пастухов Владимир –

п. Красное-на-Волге Костромской обл., школа.

Второе место заняли

по математике

Балай Евгений – Киргизия, г. Бишкек, ФМЛ;

по физике

Фея Олег – Украина, г. Днепропетровск, лицей 1,

Абдрахманов Владимир – г. Волгоград, лицей 3.

Третье место заняли

по математике

Есин Алексей – ст. Старонижестеблиевская Краснодарского кр., школа 55,

Каровски Сергей – Старый Оскол, школа 22;

по физике

Василевич Владимир – г. Армавир, школа 9,

Трегубов Илья – г. Армавир, школа 9.



Победители, занявшие первые места по математике и физике, награждаются комплектами журнала «Квант» за второе полугодие 2007 года.

Задачи

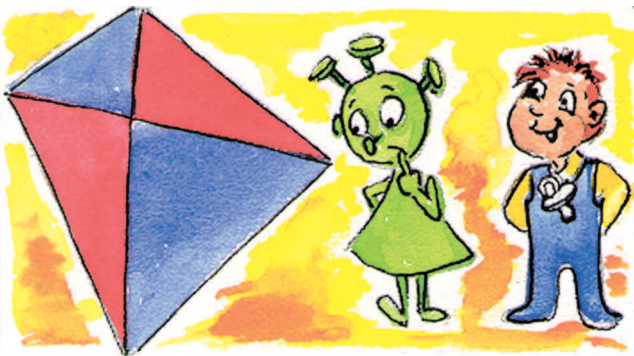
1. Профессор Мумбум-Плюмбум заподозрил, что некоторые студенты спят на его лекции. Чтобы установить число безобразников, он незадолго до начала лекции скрытно установил храпометры во всех углах аудитории, представляющей собой правильный шестиугольник с длиной стороны a . Каждый храпометр улавливает количество спящих на расстоянии, не превышающем a . После лекции оказалось, что все храпометры в сумме зафиксировали 7 спящих. Сколько студентов спало на лекции?

К. Каибханов



2. Диагонали разрезали четырехугольник на треугольники, которые попеременно окрашены в красный и синий цвета. Известно, что сумма площадей красных треугольников равна сумме площадей синих. Докажите, что какая-то диагональ четырехугольника делит его площадь пополам.

В. Произволов



3. Верно ли, что любое натуральное число, делящееся на 9, отличается от некоторого натурального числа n на сумму цифр этого числа n ?

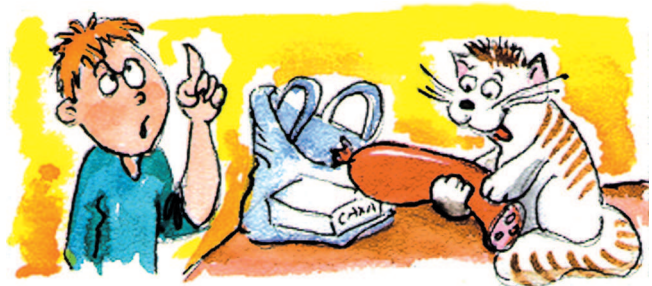
И. Акулич

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.



4. Однажды физик, купив сахар и колбасу, решил проверить их вес на чашечных весах, случайно обнаруженных в магазине. Сахар на левой чашке весов он уравновесил гирей 8 кг на правой чашке, а колбасу на правой чашке уравновесил гирей 2 кг на левой чашке. Каково же было его удивление, когда, придя домой и проверив вес каждого товара на высокоточных электронных весах, он обнаружил, что общий вес его покупки больше 10 килограммов. При этом колбаса оказалась тяжелее сахара. «Ага, весы были неравноплечные!» — решил физик. Сколько в таком случае весят колбаса и сахар, если вес каждого товара выражается целым количеством килограммов?

Г. Гальперин



5. В отчете Французской Академии наук за 1733 год среди прочих результатов и достижений указывается, что когда некое тело подносится близко к лицу, оно «вызывает такие же ощущения, как если бы натолкнуться на невидимую паутину». О каком физическом эффекте идет здесь речь?

С. Кротов



Иллюстрация Д. Гришуковой

Случай с Толей Клюквинным

С. ДВОРЯНИНОВ

Учился мой друг Толя как все. Неплохо. Нормально. Были, конечно, и проблемы. Его из начальной школы в пятый класс не хотели переводить. Вернее, все хотели, а учитель математики не хотел. Из-за таблицы умножения это было. Никак она Толику не давалась. Все он мог по математике, а умножать — ну не получалось.

И вот в самый последний день учебного года, когда годовые оценки все получили, а Толик не получил, наш Иван Петрович вызвал Клюквина в опустевшую учительскую, чтобы дать ему задание на лето.

Мы с ребятами не спешили расходиться по домам и ждали Толика в нашем классе. Вот, наконец, Толя показался на пороге.

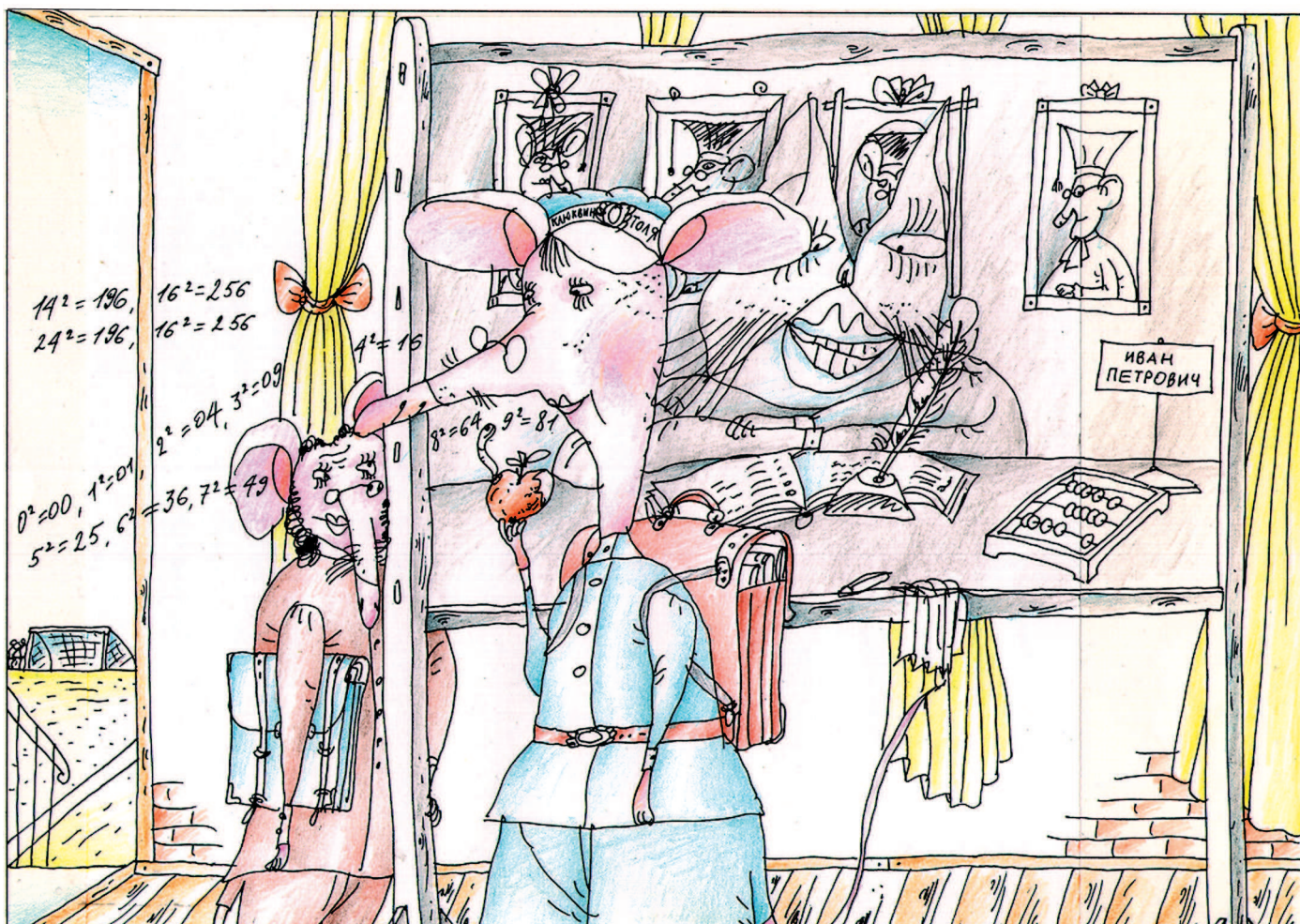
— Ну, что там? Как вопрос решился? — почти хором

мы обратились к нему.

— Да пока не решился... Вернее, мне надо решить одну задачу...

— Какую? Рассказывай! Какую задачу учитель тебе задал?

— Смотрел-смотрел на меня Иван Петрович, — начал Толик, — вздыхал-вздыхал, а потом говорит: «Вот есть интересная задача. Возьми-ка ты, Толя, 2000 идущих подряд натуральных чисел 1, 2, ..., 2000. Каждое из них можно на себя умножить. Это называется — вычислить квадрат. Так вот, рассмотри все эти 2000 квадратов. А сказать ты мне должен, у скольких полученных квадратов цифра десятков нечетная. Лето не только для того, чтобы мяч гонять! Справишься с работой — пойдешь в пятый класс. А нет — на второй год».



— Я тут же в уме прикинул, — горестно заключил Толя, — каникулы длятся почти сто дней, так что мне каждый день надо будет находить двадцать произведений!

Мы все молчали: число 2000 впечатляло. Две тысячи квадратов! Сколько бумаги уйдет! И от этого зависело будущее нашего друга! Ясное дело, никто из нас этому не обрадовался. Ребята в классе были дружные, у нас такая была классная футбольная команда — чемпион района (среди нашего возраста, конечно), Толик — вратарь. Нельзя нам такого друга терять. Толика надо было спасать. Конечно, проще всего каждому взять на себя 200 чисел и найти их квадраты. Но и это работа немалая.

— А компьютер на что? — подал голос Жора-Ноутбук. У нашего полузащитника кроме футбола была еще страсть — компьютер и все, что с ним связано. — Напишем программу, и компьютер нам все посчитает.

— Кто много считает, тот мало думает, — отозвался Ваня-Теоретик. Он тоже всегда с нами в нашей команде. Только запасной.

— На самом деле все просто! — зазвенел его голос в классе. — Если взять все числа от 1 до 2000, то среди них 1000 нечетных. Квадрат нечетного числа оканчивается нечетной цифрой, значит, среди всех квадратов 1000 будут оканчиваться нечетной цифрой. Все!

— Причем тут последняя цифра! — набросились мы на Ваню. — Вечно ты все перепутаешь! Иван Петрович спрашивает о предпоследней цифре!

— Да, — сконфузился наш теоретик, — я поспешил. Обычно в задачах спрашивают о последней цифре, а тут речь идет о предпоследней, о цифре десятков. Это посложнее... — Он вышел к доске и взял мел.

— Пусть p — последняя цифра в десятичной записи натурального числа n . Тогда $n \pm p$ четное число, а число $n - p$ оканчивается нулем и поэтому делится на 10. Следовательно, произведение этих двух чисел $(n + p)(n - p) = n^2 - p^2$ делится на 20. Отсюда следует, что, во-первых, последние цифры чисел n^2 и p^2 совпадают и, во вторых, предпоследние цифры (т.е. количество десятков) либо обе четные, либо обе нечетные. Нас интересует нечетное количество десятков числа n^2 . Значит, надо посмотреть, у квадратов каких цифр количество десятков нечетно.

Тут наш полузащитник Петя не удержался, и на доске мгновенно (так он порой выстреливал мяч на половину футбольного поля противника) появилась такая запись:

$$0^2 = 00, \quad 1^2 = 01, \quad 2^2 = 04, \quad 3^2 = 09, \quad 4^2 = 16, \\ 5^2 = 25, \quad 6^2 = 36, \quad 7^2 = 49, \quad 8^2 = 64, \quad 9^2 = 81.$$

После этого мел перешел к нашему правому крайнему Коле:

— Среди этих десяти чисел число десятков нечетно лишь у $4^2 = 16$ и $6^2 = 36$. Последняя цифра в каждом из этих двух случаев равна 6. Следовательно, следовательно... — он задумался, но тут на помощь пришел наш центральный нападающий Вася, поставивший

последнюю точку в логической комбинации, начатой Ваней-Теоретиком:

— ...Следовательно, число десятков в записи квадрата любого числа n^2 нечетно лишь тогда, когда число n оканчивается цифрой $p = 4$ или $p = 6$. Таких чисел в каждом десятке два. Следовательно, среди квадратов $1^2, 2^2, \dots, 2000^2$ пятая часть, т.е. четыреста, имеют нечетную цифру десятков. Ура! Задача решена! Ответ в твоей, Толик, задаче (или нашей задаче?) такой: из 2000 квадратов идущих подряд натуральных чисел 400 имеют в своей записи нечетную цифру десятков.

Толя Клюквин сперва обрадовался, а потом приуныл:

— Уж больно сложное решение, начну рассказывать, запутаюсь. А проще есть решение?

Тут настал черед нашего невозмутимого Паши-Прагматика. Не в его правилах было увлекаться разными футбольными трюками, он отдавал предпочтение силовым приемам. Обычно он бил у нас одиннадцатиметровые.

— Да что тут рассуждать, для всяких там n и p уравнения составлять! Проще решаем задачу! Практически! Видите, на стене висит таблица? — он показал на пожелтевший лист ватмана. — В ней приведены квадраты ста целых чисел от 1 до 100. У скольких среди этих квадратов цифра десятков нечетная? В первом десятке два таких квадрата, во втором тоже два: $14^2 = 196$ и $16^2 = 256$, в третьем десятке тоже два: $24^2 = 576$ и $26^2 = 676$, и так далее. Всего 20 нужных нам квадратов среди первых ста. И так в каждой следующей сотне, потому что цифра десятков квадрата натурального числа зависит только от последних двух цифр этого натурального числа. Всего в двадцати сотнях имеем $20 \times 20 = 400$ нужных нам квадратов с нечетной цифрой десятков.

Помните, Иван Петрович говорил, что математика — это искусство избегать вычислений? Так что твое летнее задание, Толя, — Паша повернулся к Клюквину, — не на таблицу умножения, не на вычисления двух тысяч квадратов, а на... в общем, на математику!

Толя Клюквин благополучно перешел в пятый класс. Летом у него, как и у всех нас, было много времени для футбола. Да, обязательно надо еще сказать, что после этого случая Толя Клюквин увлекся не только футболом, но и алгеброй с геометрией, и теорией чисел. Таблицу умножения, конечно, выучил-таки, про это и говорить нечего. А кроме того, стал читать всякие математические книжки, в олимпиадах участвовать и даже подписался на физико-математический журнал. Про футбол мы тоже не забывали. Так что со временем нашу ФМШ — физико-математическую школу — люди знающие и понимающие толк в науке и спорте стали называть футбольно-математической школой.

С полюса — на полюс

А. СТАСЕНКО

— Нет никаких сомнений! — воскликнул Гленарван.
— ...мы нашли ключ к решению почти всей загадки, и
единственным неизвестным теперь является долгота...

Жюль Верн

КАКИЗВЕСТНО, ДЕТИ КАПИТАНА ГРАНТА РЕШИЛИ ПРОЙТИ, проплыть, проскакать вокруг Земли вдоль тридцать седьмой параллели южной широты ($\theta = -37^\circ$). А вот был случай, когда Общество по распространению пингвинов (Penguin Distribution Society) распорядилось, наоборот, *вдоль меридиана* доставить партию своих любимых существ с южного полюса на северный «в течение сорока восьми часов» (как полагается при всяком серьезном распоряжении). Конечно, такое требование можно было выполнить только при помощи летательного аппарата. Кстати, требуемая при этом скорость полета v_θ не так уж велика — разделим длину меридиана (или полуокружности Земли) на время, равное двум суткам:

$$v_\theta = \frac{\pi R}{2T} \approx \frac{3,14 \cdot 6400 \cdot 10^3 \text{ м}}{2 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ с}} \approx 116 \text{ м/с} \approx 420 \text{ км/ч}.$$

Заметим, что в сказанном выше уже содержится намек на систему координат (рис.1): географическая широта θ отсчитывается от экватора (где $\theta_e = 0$) и достигает на полюсах значений $\theta_N = 90^\circ$ и $\theta_S = -90^\circ$. А индекс « θ » у скорости указывает на то, что эта скорость направлена строго по меридиану, вдоль которого изменяется только угол θ , а

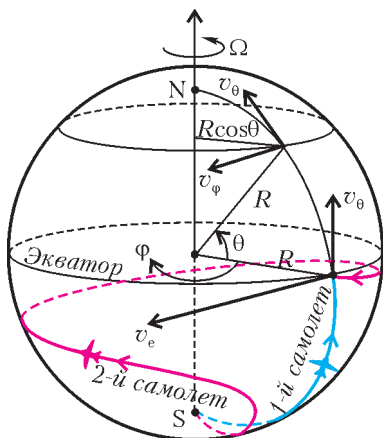


Рис. 1

долгота φ остается постоянной. Это значит, что нет составляющей скорости, направленной вдоль параллели, т.е. $v_\varphi = 0$. Таким образом, первый самолет все время находится в плоскости, вращающейся вместе с Землей.

Но почему «первый»? А дело в том, что потребовалось переместить и вторую партию пингвинов с южного на северный полюс за те же 48 часов, но в плоскости, неподвижной относительно звезд, — в качестве контрольного образца: мало ли что думают пингвины о звездах и о Солнце!

Поскольку Земля вращается «с запада на восток», относительно Земли второй самолет должен все время лететь на запад, так что по прибытии на другой полюс угол φ изменится на $2 \cdot 360^\circ = 720^\circ$ (вспомним — за двое суток). Но это значит, что на второй самолет атмосфера (которая вращается вместе с Землей) будет «дуть» все сильнее по мере приближения к экватору, где линейная скорость достигает

значения

$$v_\varphi = v_e = \frac{2\pi R}{T} \approx \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 6400 \cdot 10^3 \text{ м}}{24 \cdot 3600 \text{ с}} \approx 460 \text{ м/с}$$

— в полтора раза больше скорости звука! Тут уж не обойтись без истребителя или сверхзвукового авиалайнера.

Итак, два самолета одновременно отправились с южного полюса на северный вдоль, например, нулевого меридиана, где $\varphi = 0$ (что может быть фундаментальнее нуля!). Взглянув на карту или глобус, можно сразу предсказать, границы каких стран пересечет первый самолет. А вот штурману второго самолета придется подумать о предстоящей траектории полета, чтобы сообщить об этом заранее наземным диспетчерам (во избежание международных конфликтов). Подумаем и мы.

Если меридиональная скорость самолета v_θ постоянна, то широта его местонахождения пропорциональна времени (рис. 2, а):

$$\theta = -90^\circ + \frac{v_\theta t}{R} = 90^\circ \left(\frac{2t}{t_N} - 1 \right), \quad (*)$$

где $t_N = 2$ суток — время прибытия на северный полюс. Можно убедиться, что при $t = 0$ имеем $\theta_S = -90^\circ$, а при

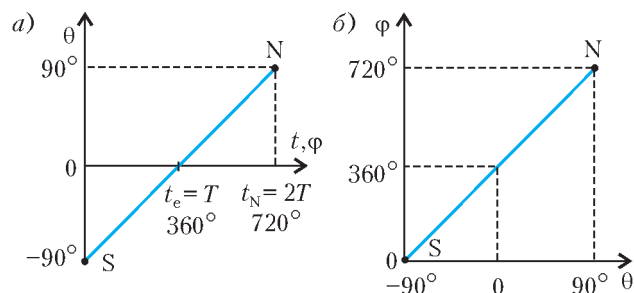


Рис. 2

$t = t_N$ получаем $\theta_N = +90^\circ$. Естественно, что через сутки оба самолета должны одновременно пересечь экватор ($\theta_e = 0$) в одной и той же точке (тут важно не столкнуться), но под разными углами: первый под углом 90° , а второй под углом $\arctg \frac{v_\theta}{v_e} = \arctg \frac{1}{4} = 14^\circ$. Так что если стартовать с южного полюса вдоль нулевого меридиана, то указанное событие произойдет над Гвинейским заливом (см. карту или глобус). И при этом скорость второго самолета относительно Земли будет равна

$$\sqrt{v_e^2 + v_\theta^2} = v_e \sqrt{1 + \left(\frac{v_\theta}{v_e} \right)^2} = v_e \sqrt{1 + \frac{1}{16}}.$$

А для любого значения широты, как легко показать, скорость второго самолета равна

$$v = v_\theta \sqrt{1 + 16 \cos^2 \theta} = v_e \sqrt{\cos^2 \theta + \frac{1}{16}}.$$

Но чтобы найти траекторию полета, нужно связать долготу с широтой, т.е. установить зависимость $\theta(\varphi)$, или, как говорят ученые, «исключить время» в формуле (*). В данном случае это очень просто: Земля вращается с постоянной угловой скоростью Ω , значит, угол φ должен быть пропорционален времени:

$$\varphi = \Omega t = \frac{2\pi}{T} t.$$

Найдем отсюда t и подставим в формулу (*):

$$\theta = 90^\circ \left(\frac{2T}{t_N} \frac{\varphi}{2\pi} - 1 \right) = 90^\circ \left(\frac{\varphi}{360^\circ} - 1 \right) = \frac{\varphi}{4} - 90^\circ.$$

(Продолжение см. на с.34)

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

...я надеялся, что путем использования электрической индукции земного магнетизма мне удастся сконструировать электрическую машину.

Майкл Фарадей

В любой точке цепи я включаю индуктирующую катушку, через которую проходит ток от источника тока. Далее я помещаю надлежащим образом вторую катушку, в которой первая индуктирует ток. Оба конца этой второй катушки соединяются проводом, образуя цепь, совершенно отдельную от первой.

Павел Яблочков

...переменный ток — это вздор, не имеющий будущего. Я не только не хочу осматривать двигатель переменного тока, но и слышать о нем.

Томас Эдисон

Я ожидаю... нового возобновления борьбы между переменным и постоянным током. Я вижу возможность реванша для постоянного тока, который многому научится у техники переменного тока.

Михаил Доливо-Добровольский

А так ли хорошо знаком вам переменный ток?

Разумеется, да — ведь в каждом доме есть розетки, в которые мы включаем всю нашу домашнюю технику и осветительные приборы, «питающиеся» переменным током напряжением 220 вольт. В школьных мастерских имеются станки — к ним тоже подведен переменный ток, только более высокого напряжения. Во всех микрорайонах стоят будки с надписями «Тр-р», в которых находятся трансформаторы, преобразующие переменный ток; вдоль дорог и по лесным просекам протянулись линии электропередачи опять же переменного тока. Миллионы и миллионы генераторов, трансформаторов, электродвигателей во всем мире производят, передают и используют электрическую энергию благодаря особенностям этого вида тока, обнаруженным без малого двести лет назад.

Крупнейший ученый XIX века Герман Гельмгольц говорил, что до тех пор пока люди пользуются благами электричества, они всегда будут с благодарностью вспоминать имя Фарадея. Явление электромагнитной индукции — фундаментальное научное открытие, совершенное английским физиком Майклом Фарадеем, — легло в основу современной технической цивилизации и кардинально преобразило окружающий нас мир.

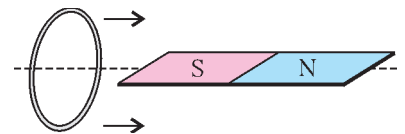
Долгие десятилетия шли активные поиски наилучшей реализации этого открытия — вплоть до отчаянной борьбы между сторонниками постоянного и приверженцами переменного тока. Правда, начавшаяся более ста лет назад «война» давно закончилась тесным и плодотворным взаимодействием, когда недостатки одного из видов тока компенсируются достоинствами другого.

Не следует, однако, думать, что все решения физических вопросов электроэнергетики и электросвязи состоялись в прошлом, а ныне осталось лишь техническое их усовершенствование. Масштабы производства и распределения энергии, переход к альтернативным ее источникам, современные средства коммуникации достигли такого рубежа, что появились новые проблемы, связанные с надежностью и безопасностью работы гигантских, охватывающих целые континенты систем. А это требует нетрадиционных способов управления ими, привлечения нестандартных научных подходов, например теории хаоса или теории сетей.

Но пока попробуем выяснить, что нам известно о самых простых свойствах переменного тока.

Вопросы и задачи

1. Проводник в виде кольца движется от одного конца полюсового магнита, расположенного вдоль его оси симметрии, к другому. Что происходит с индукционным током в кольце?



2. Будет ли проходить ток через электролитическую ванну с медным купоросом, если ее подключить к источнику переменного напряжения? Станет ли выделяться на электродах медь?

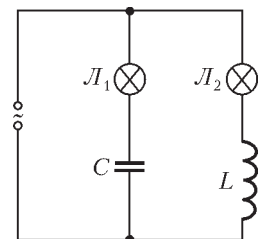
3. Почему короткое замыкание конденсатора в цепи переменного тока равносильно тому, что его емкость становится бесконечно большой?

4. Что подразумевается под переменным током нулевой частоты?

5. Проводник размещен между полюсами сильного дугообразного магнита. Что будет происходить с проводником, если пропустить через него переменный ток промышленной частоты?

6. Для чего серебрят провод, идущий на изготовление коротковолновых и ультракоротковолновых контурных катушек?

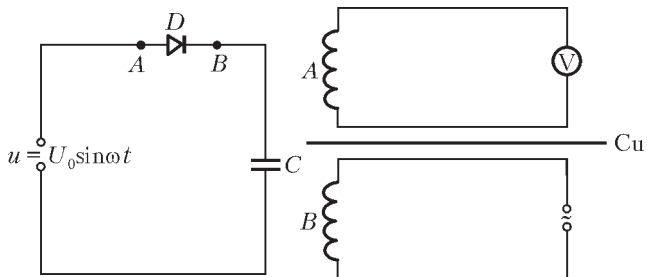
7. В колебательный контур последовательно включен источник синусоидальной ЭДС постоянной амплитуды. Пренебрегая внутренним сопротивлением источника, оцените напряжения на катушке индуктивности и на конденсаторе при очень малых и очень больших частотах по сравнению с собственной частотой контура.



8. Две одинаковые лампы питаются от источника переменного тока, как показано на схеме. При некоторой частоте накал ламп одинаков. Как изменится накал, если частоту: а) увеличить; б) уменьшить?

9. На какое напряжение надо рассчитывать изоляторы линии передачи, если действующее напряжение 430 кВ?

10. Схема с идеальным диодом, изображенная на рисунке, включена в сеть переменного тока. В каких



пределах изменяется напряжение между точками A и B ?

11. Катушка индуктивности A замкнута на вольтметр, а катушка B подключена к источнику переменного тока, как показано на рисунке. Изменится ли напряжение, индуцируемое в катушке A током, идущим в катушке B , если между ними проложить большой медный лист?

12. При ремонте понижающего трансформатора разматывали его первичную обмотку и включили ее концы в сетевую розетку. В результате перегорели предохранители, хотя трансформатор был рассчитан на сетевое напряжение. Как это объяснить?

13. Отчего наличие очень высокого напряжения во вторичной обмотке повышающего трансформатора не приводит к большим потерям энергии на выделение тепла в самой обмотке?

14. Почему трансформатор выходит из строя, если хотя бы один виток обмотки замкнется накоротко?

15. В чем причина гудения нагруженного трансформатора? Какова частота этого звука, если трансформатор включен в сеть промышленной частоты?

16. Квадратная рамка равномерно вращается с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле, перпендикулярном оси вращения. Концы рамки все время остаются присоединенными к катушке индуктивностью L . Омическим сопротивлением цепи можно пренебречь. В каком положении рамки: а) ЭДС индукции в ней максимальна; б) сила тока в ней максимальна?

Микроопыт

Вам наверняка приходилось наблюдать, как в театрах и кинозалах постепенно включают освещение, чтобы не слепить зрителей резким переходом от темноты к свету. Это можно сделать с помощью либо реостата, либо дросселя – катушки индуктивности с очень малым сопротивлением. Какой из способов вы бы выбрали?

Любопытно, что...

...в 1831 году Фарадей создал первый образец отличного от батареи генератора электрического тока, правда его постоянное напряжение было очень низким, а эффективность прибора – весьма малой. Но уже через год французский изобретатель Пикси сконструировал машину, в которой ток возбуждался вращением проволочной петли в поле постоянного магнита, т.е. генератор переменного тока. О силе получаемого с его помощью тока свидетельствовали опыты с химическим разложением вещества и образованием искр.

...русские ученые Ленц и Якоби еще в середине XIX века доказали обратимость магнитоэлектрических машин: генератор может быть обращен в электродвигатель и наоборот. Этой «взаимозаменяемостью» пользуются, например, в гидроаккумулирующих станциях, накачивая воду двигателями насосов в бассейны при избытке

производства энергии и «срабатывая» воду через те же устройства, но уже в качестве генераторов, в часы пиковых нагрузок.

...медный диск, помещенный в поле вращающегося постоянного магнита, сам приходит во вращение. Это явление, открытое Араго в 1824 году и объясненное затем Фарадеем как следствие появления индукционных токов в диске, взял на вооружение электротехник Доливо-Добровольский, создавший на его основе асинхронный двигатель трехфазного тока, произведший подлинную техническую революцию и широко используемый и по сей день.

...первые практически применявшиеся трансформаторы были предложены «отцом русского света» Яблочковым, перешедшим с постоянного на переменный ток для обеспечения равномерного сгорания угольных электродов в своих дуговых «свечах». Яблочков же впервые использовал в цепях переменного тока конденсатор.

...к концу XIX века Эдисоном была одержана победа над сторонниками газового освещения, всеми силами пытавшимися не допустить внедрения электрического освещения. Но вскоре сам Эдисон занял непримиримую позицию по отношению к использованию переменного тока, пугая всевозможными опасностями его применения, и даже предложил принять закон о его запрещении.

...до 1891 года строились электростанции только постоянного тока. Однако преимущества переменного тока при производстве и передаче электроэнергии привели к тому, что уже в 1896 году на Ниагарском водопаде в США вступила в строй гидроэлектростанция с тремя турбинами переменного тока по 5 тысяч лошадиных сил каждая.

...силы взаимодействия токов в природе редко достигают большой величины, однако в технике играют основную роль – как, например, в генераторах тока или электромоторах. В отличие от этих сил, более мощные кулоновские силы почти никак не проявляются в технике из-за невозможности создания достаточно больших электростатических зарядов.

...при протекании по проводам переменный ток не распределяется равномерно по их сечению, а сосредоточен в основном вблизи поверхности – это явление носит название скин-эффекта (от англ. skin – кожа). Так, при частоте 50 герц в медном проводнике глубина проникновения тока составляет примерно 9 миллиметров; при увеличении частоты эта глубина уменьшается, что приводит к возрастанию сопротивления.

Что читать в «Кванте» о переменном токе

(публикации последних лет)

1. «Эффективное напряжение в цепи переменного тока» – 2001, №3, с. 40;
2. «Простые опыты с переменным током» – 2002, Приложение №4, с. 72;
3. «Два кольца в одном магнитном поле» – 2003, №3, с. 38;
4. «В цепи переменного тока» – 2004, №1, с. 29;
5. «Катушка, вращающаяся в магнитном поле» – 2004, №4, с. 17;
6. «Магнитный поток сверхпроводника» – 2004, №4, с. 38;
7. «Калейдоскоп «Кванта» – 2005, №1, с. 32;
8. «Катушки индуктивности в электрических цепях» – 2005, №4, с. 42;
9. «Закон электромагнитной индукции» – 2006, №5, с. 36.

Материал подготовил А.Леонович

(Начало см. на с.31)

Мы учли здесь, что полное время полета равно двум суткам, т.е. $t_N = 2T$, а $2\pi = 180^\circ$. А можно, наоборот, φ выразить через θ (рис.2,б) – кому что нравится:

$$\varphi = 360^\circ + 4\theta.$$

Осталось взять карту или глобус, нанести на них (карандашом, на всякий случай) траектории обоих самолетов и срочно сообщить в соответствующие диспетчерские службы о своих намерениях – не только о координатах θ и φ , но и о времени полета t над их странами (из формулы (*)).

Таким образом, траектория второго самолета в системе

координат, связанной с Землей, похожа на «спираль, навигую на сферу». Любопытно, что в прямоугольной картографической проекции Меркатора (об этом замечательном учебном рассказывалось в «Кванте» №6 за 2006 г.) эта прямая пропорциональность между широтой и долготой давала бы прямую линию, что очень удобно для навигации.

И тут штурман второго самолета подумал: интересно, над какими странами мы пролетели бы, если бы (в нарушение инструкции) все время держали постоянную скорость полета относительно Земли? Но решение этой задачи он предоставил бортовому компьютеру, а мы – читателю.

От простого — к сложному

В.ЭПШТЕЙН

ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ ПРЕДЛАГАЮТСЯ ДВЕ, КАЗАЛОСЬ бы стандартные, задачи к теме «Идеальный газ». В задачах используются обычные элементы «конструктора»: вертикальная трубка, запаянная с одной стороны; столбик жидкости, отделяющий воздух в трубке от окружающей среды; открытый сосуд с жидкостью. Предлагается исследовать поведение такого «конструктора» при нагревании. И выясняется, что при определенных условиях ситуация выходит за рамки стандартной и наблюдается качественное изменение характера физического процесса.

Задача 1. В вертикальной трубке, запаянной сверху (рис.1), столбик ртути высотой h отделяет область трубки высотой H , заполненную воздухом, от окружающей среды при температуре T_0 . Внешнее давление составляет H_0 мм рт.ст. Определите смещение столбика ртути x при повышении температуры до T .

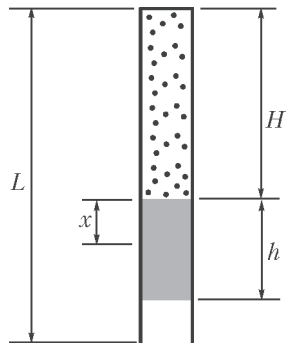


Рис. 1

процесса,

Введем безразмерные координату и температуру:

$$\xi = \frac{x}{H} \text{ и } \tau = \frac{T}{T_0}.$$

Рассмотрим два случая.

а) Если $H + h < L$, то при изменении температуры давление внутри трубки не меняется. По уравнению изобарического

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V}{T},$$

или, поскольку сечение трубки постоянно,

$$\frac{H}{T_0} = \frac{H+x}{T}.$$

В безразмерных переменных это уравнение примет вид

$$\tau = 1 + \xi, \text{ где } -1 < \xi < 0.$$

б) Если $H + h = L$, то часть ртути при повышении температуры выливается из трубки, и давление там изменя-

ется. Из уравнения состояния идеального газа следует

$$\frac{V_0 p_0}{T_0} = \frac{V p}{T}, \text{ или } \frac{H(H_0 - h)}{T_0} = \frac{(H+x)(H_0 - (h-x))}{T}.$$

В безразмерном виде это выглядит так:

$$\tau = \frac{1}{\xi_0} (1 + \xi)(\xi_0 + \xi), \text{ где } \xi_0 = \frac{H_0 - h}{H}.$$

Поскольку в состоянии равновесия $h < H_0$, то $\xi_0 > 0$.

На графике на рисунке 2 представлены результаты расчетов. В случае б) (давление в трубке меняется) зависимость $\tau(\xi)$ – квадратичная функция, график которой –

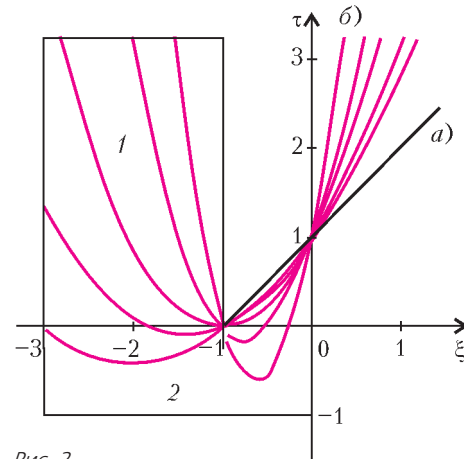


Рис. 2

парабола, пересекающая ось безразмерных координат в точках $\xi = -\xi_0$ и $\xi = -1$. При этом можно выделить две группы парабол, отвечающих условиям $\xi_0 > 1$ и $\xi_0 < 1$.

Значениям $\xi < 0$ соответствует повышение уровня ртути при понижении температуры газа в трубке. Для этого необходим контакт ртути в трубке с ртутью в сосуде с открытой поверхностью (рис.3).

Из графиков видно, что при $\xi_0 < 1$ изобарическая (случай а)) и неизобарическая (случай б)) зависимости различаются существенно. Между тем, качественное различие ситуаций, связанное с возможностью неоднозначной зависимости положения поверхности ртути от температуры, не наблюдается. Область неоднозначности (1 и 2) находится вне области допустимых значений безразмерных параметров ($\tau > 0, \xi > -1$).

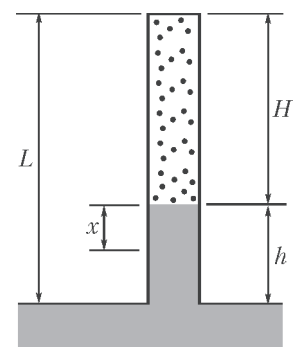


Рис. 3

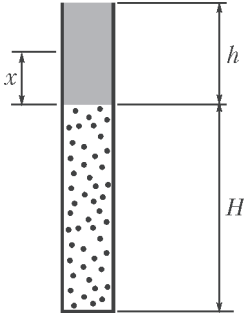


Рис. 4

Задача 2. В вертикальной трубке, запаянной снизу (рис.4), столбик ртути высотой h отделяет область трубки высотой H , заполненную воздухом, от окружающей среды при температуре T_0 . Внешнее давление составляет H_0 мм рт.ст. Определите смещение столбика ртути x при повышении температуры до T .

При нагревании часть ртути выливается из трубки. Из уравнения состояния идеального газа следует

$$\frac{V_0 p_0}{T_0} = \frac{V p}{T}, \text{ или } \frac{H(H_0 + h)}{T_0} = \frac{(H+x)(H_0 + (h-x))}{T}.$$

В безразмерном виде получаем

$$\tau = \frac{1}{\xi_0} (1 + \xi)(\xi_0 - \xi), \text{ где } \xi_0 = \frac{H_0 + h}{H}.$$

На рисунке 5 представлены графики зависимости $\tau(\xi)$ для случаев $\xi_0 = 2$, $\xi_0 = 2,5$ и $\xi_0 = 3$.

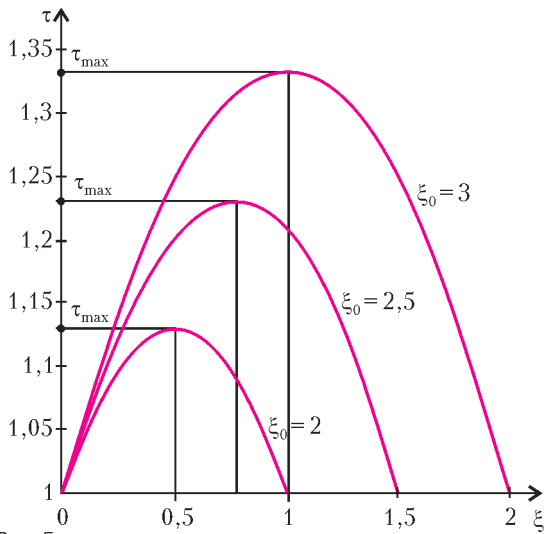


Рис. 5

Расчет и графические представления демонстрируют важное обстоятельство: наличие максимальной температуры газа. Таким образом, появляется возможность сформулировать задачу поиска минимальной температуры, при которой жидкость выльется из трубки. Задачу с таким содержанием (несомненно, «олимпиадного» уровня) можно найти в ряде задачников, а также в журнале «Квант» (см., например, статью Д.Александрова «Газовые законы и механическое равновесие» в «Кванте» №8 за 1990 г.).

Точкам параболы $\tau(\xi)$ отвечают состояния равновесия. Наличие максимальной температуры означает, что при больших значениях τ равновесия быть не может. При нагревании газа уровень ртути повышается. Если остановить нагрев при температуре, которая не достигла указанного максимального значения, прекратится и движение уровня ртути. Максимальному значению равновесной температуры соответствует определенное значение уровня ртути. При сколь угодно малом повышении температуры после достижения максимального значения ртуть выливается сама.

Возникает, однако, такой вопрос. Состояниям равновесия отвечают все точки кривой механического равновесия, а мы говорим только о той ее части, которая соответствует повышению температуры до достижения максимального значения. Почему? Парадоксальность ситуации состоит в том, что

другой ветви параболы соответствует понижение уровня ртути при повышении температуры. Вообще, как это следует из рисунка 5, любому значению температуры, не превышающему максимальное, соответствует не одно, а два положения уровня ртути.

Для того чтобы разобраться в этой странной ситуации, построим график зависимости давления на границе жидкости и газа от положения этой границы. Давление со стороны жидкости (ртути) равно

$$p_{\text{рт}} = H_0 + (h - x).$$

Давление со стороны газа определяется газовым законом

$$\frac{(H_0 + h)H}{T_0} = \frac{p_{\text{г}}(H + x)}{T}.$$

Вводя, как и раньше, безразмерные параметры τ и ξ , а также безразмерное давление $\delta = \frac{p}{H}$ (напомним, что давление измеряется в мм рт.ст.), получим

$$\delta_{\text{г}} = \frac{\xi_0 \tau}{1 + \xi} \text{ и } \delta_{\text{рт}} = \xi_0 - \xi.$$

Графики этих зависимостей для различных фиксированных температур представлены на рисунке 6 (здесь $\xi_0 = 2$, $\tau_3 = 1,05$, $\tau_2 = 1,1$, $\tau_1 = 1,15$). Изотермам 1, 2 и 3 соответствуют температуры ниже и выше максимальной соответственно: $\tau_1 > \tau_{\text{max}} > \tau_2 > \tau_3$. Состояния равновесия определяются точками пересечения графиков. При повышении

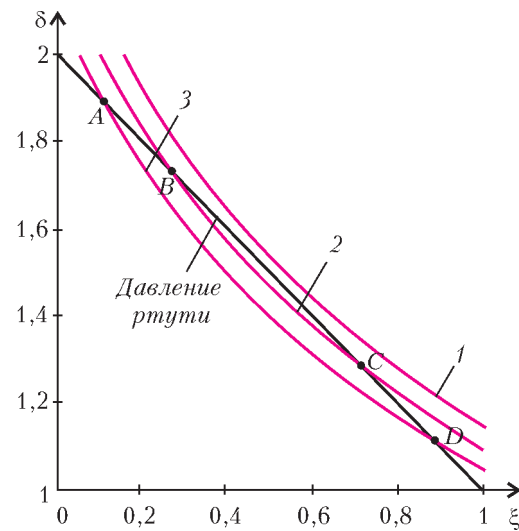


Рис. 6

температуры точки сближаются. Кривая 1 не имеет точек пересечения. Это значит, что при температуре τ_1 равновесие недостижимо. Наличие двух точек пересечения при $\tau < \tau_{\text{max}}$ означает, что существуют две точки равновесия. Повышению координаты границы жидкость – газ при заданной температуре соответствует снижение давления как со стороны жидкости, так и со стороны газа. Однако характер снижения давления при переходе через «нижнюю» (точки A и B) и «верхнюю» (C и D) точки равновесия различен: при прохождении «нижних» точек давление в жидкости становится больше давления газа, а при прохождении «верхних» точек – наоборот. Это означает, что «нижним» точкам соответствует устойчивое, а «верхним» – неустойчивое положение равновесия.

Положение неустойчивого равновесия вполне достижимо. Если между жидкостью и газом вставить тонкий поршень и измерять усилие, которым необходимо удерживать поршень,

то окажется, что как в устойчивом, так и в неустойчивом положении это усилие прикладывать не нужно. Однако добиться того, чтобы ртуть при повышении температуры *сама опускалась* (в соответствии со второй ветвью параболы), невозможно. Находясь в «верхнем» положении равно-

весия, ртуть либо самопроизвольно выльется из трубки при повышении температуры, либо перейдет в положение устойчивого равновесия (для чего необходимо соединение с резервуаром жидкости, расположенным сверху).

Размерности и... правило квантования Бора

Г. БАКУНИН

Н И ДЛЯ КОГО НЕ СЕКРЕТ, ЧТО НЕ ЛЮБУЮ КОНЦЕПЦИЮ современной физики можно корректно объяснить в школьных терминах. Иногда ситуация складывается еще сложнее – вычисления носят элементарный характер, однако понять мотивацию классиков совсем непросто. Так, например, обстоит дело с формулой Бора для квантования энергетических уровней в атоме водорода. Эта формула безусловно достойна того, чтобы обратить на нее внимание, поскольку позволяет установить связь между законами классической механики и квантовыми идеями. Более того, она является прекрасным примером того, как нетривиальный экспериментальный результат наглядно объясняется с помощью теории.

Еще в 1885 году швейцарский учитель физики И. Бальмер установил, что частоты (или длины волн) всех спектральных линий водорода в области видимого света (серия Бальмера) можно описать одной довольно простой формулой. Несколько позже в спектре водорода были обнаружены серии линий в области ультрафиолета (серия Лаймана) и в области инфракрасного излучения (серия Пашена и др. серии), описываемые аналогичными формулами. Оказалось, что для всех этих линий пригодна общая формула, называемая формулой Бальмера – Ридберга:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_k^2} \right),$$

где λ – длина волны излучения, $R = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ – постоянная Ридберга, а n_l и n_k – целые числа. Эта формула являлась в то время научной загадкой.

Включить в теоретическую модель квантовые (целые) числа, опираясь на «планетарную» модель Резерфорда, удалось Нильсу Бору в 1913 году. С формальной точки зрения, новые квантовые вычисления просты, так как в них используются только алгебраические преобразования базовых законов. Однако все не так просто с квантованием момента импульса, использованным Бором для объяснения формулы Бальмера – Ридберга. Выбор этой физической величины для квантования далеко не тривиален. Более того, момент импульса не изучают в школе (разве что факультативно), и во многом это создает методические трудности. Здесь мы рассмотрим, как гипотезу Бора можно обосновать с размерностной точки зрения, которая является полезной и при решении других задач.

Начнем с введения основных величин. Энергию излучаемых фотонов можно рассматривать как результат перехода электрона с одного энергетического уровня на другой:

$$\epsilon_\phi = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = E_{n_l} - E_{n_k},$$

где h – постоянная Планка, ν – частота излучения, c – скорость света, а E_n – энергия n -го уровня. В нашем случае энергия E электрона, движущегося по круговой орбите, складывается из кинетической энергии, равной $\frac{mv^2}{2}$, и потенциальной энергии притяжения электрона к ядру, равной $-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Это уравнение содержит две неизвестные величины: скорость электрона v и радиус орбиты r . Одну из них можно исключить при помощи уравнения движения электрона по орбите

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Тогда получаем

$$E(r) = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}.$$

Сравним разность энергий электрона на орбитах с радиусами r_l и r_k :

$$E_l - E_k = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_l} - \frac{1}{r_k} \right)$$

с энергией фотона, записанной с помощью формулы Бальмера – Ридберга:

$$\epsilon_\phi = h\nu = h \frac{c}{\lambda} = hcR \left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_k^2} \right).$$

Видим, что необходимо введение новой гипотезы для того, чтобы установить связь квантовых чисел n_l и n_k с соответствующими радиусами орбит r_l и r_k .

Гипотеза, предложенная Бором в 1913 году, заключается в квантовании момента импульса вращающегося по круговой орбите электрона:

$$mvr = n \frac{h}{2\pi}.$$

Исторической справедливости ради, отметим, что и до Бора предпринимались попытки квантования физических величин, связанных с орбитальным движением. Тем не менее, гениальная интуиция Бора сыграла решающую роль.

Рассмотрим вопрос с размерностной точки зрения, не выбирая заранее, какую величину нужно квантовать. Запишем более общее условие квантования в виде

$$v^\alpha r^\beta = n C_0,$$

где α, β, C_0 – некоторые постоянные. Заметим, что случай $\alpha = 2$ и $\beta = 0$ ведет к квантованию энергии, выбор $\alpha = 1$ и $\beta = 0$ характеризует импульс, а комбинация $\alpha = 1$ и $\beta = 1$ соответствует моменту импульса.

Итак, мы получили систему трех уравнений с тремя неизвестными v, r, n и тремя постоянными α, β, C_0 :

$$\begin{aligned} E(r) &= -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}, \\ \frac{mv^2}{r} &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \\ v^\alpha r^\beta &= nC_0. \end{aligned}$$

Исключая переменные v и r , найдем зависимость энергии электрона $E(r(n)) = E_n$ от квантового числа n :

$$E_n = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m (C_0 n)^\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{2\beta-\alpha}} \sim \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{2}{2\beta-\alpha}}.$$

Для получения зависимости $E_n \sim \frac{1}{n^2}$, необходимо предположить, что

$$2\beta - \alpha = 1, \text{ или } \beta(\alpha) = \frac{1 + \alpha}{2}.$$

Очевидно, в рамках размерностного подхода мы ожидаем увидеть целые значения α и β , что обеспечивается нечетны-

ми значениями числа α : $\alpha = 1, 3, 5, \dots$. Однако выбор $\alpha = \beta = 1$ можно интерпретировать в терминах сохранения момента импульса электрона. Это важный аргумент, поскольку сохранение момента импульса орбитального движения в поле ньютоновских или кулоновских сил является основой описания некруговых траекторий. Сам Бор затронул этот вопрос только косвенно, указав на возможность сопоставления круговой и эллиптической орбит электрона с заданной энергией посредством выбора радиуса круговой орбиты. С другой стороны, момент импульса имеет размерность постоянной Планка h :

$$rp = rmv = C_* n,$$

где $C_* = mC_0 = \frac{h}{2\pi}$ — постоянная, которая соответствует уравнению, описывающему гипотезу Бора.

Естественно, универсальная постоянная h должна участвовать в уравнении, описывающем излучение в соответствии с фундаментальными идеями Планка. Важно, что во времена Планка и Бора постоянная h все еще оставалась магической величиной, требующей интерпретации, и модель квантования Бора стала еще одним шагом в этом направлении.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Эйлер и геометрия

А.ЗАСЛАВСКИЙ

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР БЫЛ ОДНИМ ИЗ САМЫХ РАЗНОСТОРОННИХ МАТЕМАТИКОВ ВСЕХ ВРЕМЕН. Разумеется, не осталась обделенной вниманием Эйлера и элементарная геометрия. В этой статье будут описаны основные результаты, связанные с именем Эйлера, и приведены примеры использующих эти результаты задач, которые предлагались на геометрической олимпиаде имени И.Ф.Шарыгина. Следует, впрочем, сказать, что нельзя достоверно утверждать ни того, что указанные результаты принадлежат целиком Эйлеру, ни того, что достижения Эйлера в геометрии этими результатами ограничиваются.

Прямая Эйлера

Теорема 1. Пусть ABC — произвольный треугольник, M — его центр тяжести (точка пересечения медиан), O — центр описанной окружности, H — ортоцентр (точка пересечения высот). Точка M лежит на отрезке OH и $OM : MH = 1 : 2$.

Доказательство. Пусть A_0, B_0, C_0 — середины отрезков BC, CA, AB (рис.1). Тогда треугольник $A_0B_0C_0$ гомотетичен треугольнику ABC с центром M и коэффициентом $-\frac{1}{2}$. При этой гомотетии точка H переходит в ортоцентр треугольника $A_0B_0C_0$ — точку O .

Прямая, на которой лежат точки O, M, H , называется *прямой Эйлера* треугольника.

Задача 1. В остроугольном неравностороннем треугольнике отметили 4 точки: центры вписанной и описанной окружностей, центр тяжести (точка пересечения медиан) и ортоцентр (точка пересечения высот). Затем сам треугольник стерли. Оказалось, что невозможно установить, какому центру соответствует каждая из отмеченных точек. Найдите углы треугольника.

Ответ. Треугольник, удовлетворяющий условию задачи, равнобедренный с углами при основании, равными $\arccos \frac{1}{4}$.

Решение. Пусть ABC — исходный треугольник. Если точка I (центр вписанной окружности) не лежит на его прямой Эйлера, то можно однозначно установить роль каждой из точек в треугольнике ABC . Отметим, что эта прямая проходит не более чем через одну вершину треугольника, так что можно считать, например, что точки A и B не лежат на ней.

Так как $\angle OBA = \angle HBC = \frac{\pi}{2} - \angle C$, то BI является биссектрисой угла HBO . Значит, точка I лежит на отрезке OH , причем $OI = 2IH$ (иначе роль точек устанавливается однозначно). По свойству биссектрисы получаем, что $BO = 2BH$. Рассуждая аналогично, находим, что $AO = 2AH$. Таким образом, $AH = BH = R/2$, где R — радиус описанной около треугольника окружности. Заметим теперь, что из гомотетии, указанной в доказательстве теоремы 1, следует также, что $AH = 2OA_0$ (и эти отрезки параллельны). Понятно так-

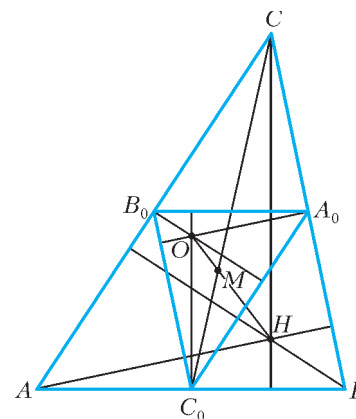


Рис. 1

же, что $OA_0 = R \cos \angle A$. Поэтому $AH = 2R \cos \angle A$, и $\cos \angle A = \frac{1}{4}$. Точно так же доказывается, что $\cos \angle B = \frac{1}{4}$.

Окружность Эйлера

Теорема 2. *Средины сторон треугольника, основания его высот и средины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности.*

Доказательство. Пусть A_0, B_0, C_0 – средины сторон треугольника, A_1, B_1, C_1 – основания его высот, A_2, B_2, C_2 – средины отрезков AH, BH, CH (рис.2). Поскольку $A_0B_0, A_2B_2, A_2B_0, A_0B_2$ – средние линии треугольников ABC, ABH, AHC, BHC соответственно, $A_0B_0A_2B_2$ – прямоугольник, т.е. точки A_0, B_0, A_2, B_2 лежат на окружности, диаметрами которой являются отрезки A_0A_2 и B_0B_2 . Так как $\angle A_0A_1A_2 = \angle B_0B_1B_2 = 90^\circ$, точки A_1, B_1 также лежат на этой окружности. Таким образом, окружности $A_0A_1A_2$ и $B_0B_1B_2$ совпадают. Аналогично доказывается, что окружность $C_0C_1C_2$ также совпадает с ними.

Указанная окружность называется *окружностью Эйлера* или *окружностью девяти точек* треугольника.

Из теоремы 2 сразу следует, что окружность Эйлера, гомотетична описанной окружности треугольника относительно точек M и H с коэффициентами $-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$ соответственно.

Задача 2. *На плоскости даны три прямые l_1, l_2, l_3 , образующие треугольник, и отмечена точка O – центр описанной окружности этого треугольника. Для произвольной точки X плоскости обозначим через X_i точку, симметричную точке X относительно прямой l_i .*

а) Докажите, что для произвольной точки M прямые, соединяющие средины отрезков O_1O_2 и M_1M_2, O_2O_3 и M_2M_3, O_3O_1 и M_3M_1 , пересекаются в одной точке.

б) Где может лежать эта точка пересечения?

Решение. Покажем, что эти прямые пересекаются в точке, лежащей на окружности Эйлера. Пусть ABC – треугольник, образованный прямыми l_i, H – его ортоцентр. Тогда средины отрезков O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1 совпадают с серединами

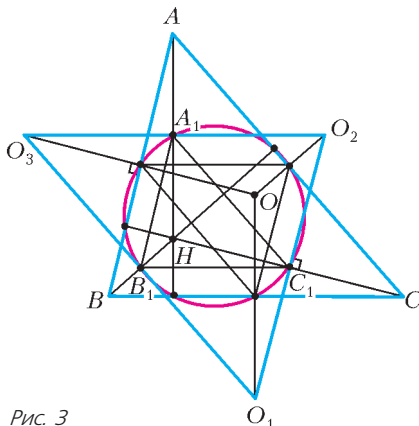


Рис. 3

отрезков AH, BH, CH (в дальнейшем будем обозначать их A_1, B_1, C_1) и, стало быть, лежат на окружности Эйлера треугольника ABC . Действительно, стороны треугольника $O_1O_2O_3$ параллельны средним линиям треугольника ABC и вдвое больше их, поскольку переводятся друг в друга гомотетией с центром в O и коэффициентом 2. Следовательно, треугольник $O_1O_2O_3$ центрально симметричен треугольнику ABC . Значит, прямая, проходящая через C и середину O_1O_2 , параллельна прямой, проходящей через O_3 и середину AB , т.е. совпадает с высотой треугольника ABC , а H является центром гомотетии треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (рис.3).

Пусть, далее, M – произвольная точка, D – середина M_1M_2 (рис. 4). Тогда $\overline{DC_1} = (\overline{DO_1} + \overline{DO_2})/2$ и, так как $\overline{M_1O_1}$ и $\overline{M_2O_2}$ получаются друг из друга поворотом вокруг точки C на два угла C , вектор $\overline{DC_1}$ образует с каждым из них угол, равный углу C . Кроме того, $\overline{M_1O_1}$ и $\overline{M_2O_2}$ переходят в \overline{MO} при симметрии относительно AB и AC соответственно, поэтому $\overline{DC_1}$ и \overline{MO} образуют равные углы с биссектрисой угла C (а значит, равные углы и с биссектрисой угла C_1 в треугольнике $A_1B_1C_1$).

Проведя аналогичные рассуждения для двух других средних, приходим к выводу, что прямые, соединяющие A_1, B_1, C_1 с серединами сторон треугольника $M_1M_2M_3$, симметричны относительно биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$ прямым, проходящим через A_1, B_1, C_1 и параллельным OM . В заключение воспользуемся следующей известной теоремой планиметрии: тройка прямых, выходящих из вершин треугольника, пересекается в одной точке, расположенной на описанной около этого треугольника окружности, тогда и только тогда, когда прямые, симметричные данным относительно биссектрис соответствующих углов, параллельны. (Несложное доказательство использует простой подсчет углов.)

Согласно этой теореме, тройка прямых в нашей задаче пересекается на описанной около треугольника $A_1B_1C_1$ окружности, т.е. на окружности Эйлера исходного треугольника.

Окружность Эйлера обладает также рядом весьма красивых, в том числе и неэлементарных свойств. Например, все описанные около треугольника равносторонние гиперболы проходят через его ортоцентр, а их центры лежат на окружности Эйлера. Это позволяет мгновенно решить следующую задачу.

Задача 3. *Даны четыре точки A, B, C, D . Точки A_1, B_1, C_1, D_1 – ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB, ABC . Точки A_2, B_2, C_2, D_2 – ортоцентры треугольников $B_1C_1D_1, C_1D_1A_1, D_1A_1B_1, A_1B_1C_1$, и т.д. Докажите, что все окружности, проходящие через средины сторон таких треугольников, пересекаются в одной точке.*

Решение. Проведя равностороннюю гиперболу через точки A, B, C, D , получим, что все указанные в задаче точки лежат на этой гиперболе, а все окружности проходят через ее центр.

Отметим, что задача допускает и элементарное решение. Найдите его самостоятельно.

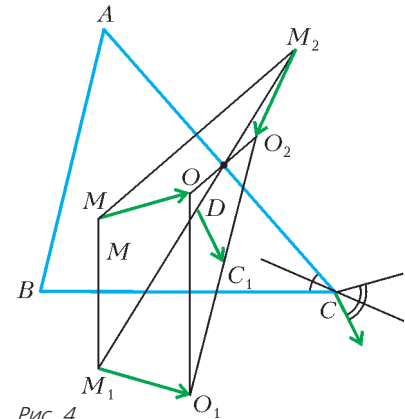


Рис. 4

Формулы Эйлера

Теорема 3. Пусть O, I – центры описанной и вписанной окружностей треугольника, R, r – их радиусы. Тогда

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

Это равенство называется формулой Эйлера.

Доказательство. Проведем прямую через I и вершину C треугольника ABC и найдем вторую точку C' пересечения этой прямой с описанной около ABC окружностью (рис.5).

Так как $C'A = C'B$, $\angle AIB = \pi - (\angle A + \angle B)/2 = (\pi + \angle C)/2$ и $\angle AC'B = \pi - \angle C$, C' – центр окружности, описанной

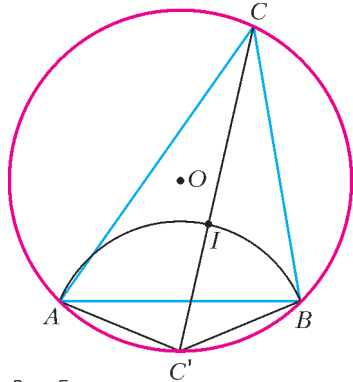


Рис. 5

около треугольника AIB . Значит, $IC' = C'B = 2R \sin \frac{\angle C}{2}$. С другой стороны, $IC = r / \sin \frac{\angle C}{2}$. Следовательно,

$$R^2 - OI^2 = CI \cdot C'I = 2Rr.$$

Пользуясь формулой Эйлера, можно доказать **теорему Понселе** для треугольника.

Теорема 4. Пусть дан треугольник ABC . Из произвольной точки C' на его описанной окружности проведем касательные к вписанной окружности треугольника и найдем вторые точки A', B' их пересечения с описанной окружностью. Тогда прямая $A'B'$ также касается вписанной окружности.

Доказательство. Предположим противное. Например, пусть $A'B'$ не пересекает вписанную окружность треугольника ABC . Будем увеличивать угол $A'C'B'$ так, чтобы прямая $C'I$ оставалась его биссектрисой. Тогда расстояние от I до прямых $C'A'$ и $C'B'$ будет увеличиваться, а до прямой $A'B'$ – уменьшаться, и в какой-то момент окружность с центром I и радиусом $r' > r$ окажется вписанной в треугольник $A'B'C'$. Но из формулы Эйлера следует, что радиусы вписанных окружностей треугольника ABC и $A'B'C'$ равны. Противоречие. Случай, когда $A'B'$ пересекает вписанную окружность, рассматривается аналогично.

Аналоги формулы Эйлера верны и для внеписанных окружностей, касающихся одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон. Например, если окружность с центром I_c и радиусом r_c касается стороны AB и продолжений сторон AC, BC , то

$$OI_c^2 = R^2 + 2Rr_c.$$

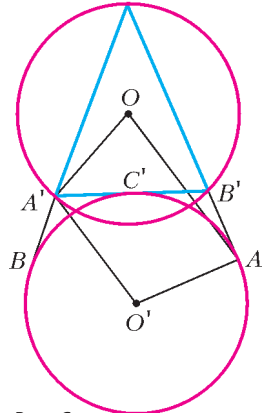


Рис. 6

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 3 (проведите его самостоятельно). Разумеется, для внеписанных окружностей верен и аналог теоремы Понселе.

Задача 4. Две окружности радиуса 1 пересекаются в точках X, Y , расстояние между которыми также равно 1. Из точки C одной окружности проведены касательные CA, CB к другой. Прямая CB вторично пересекает первую окружность в точке A' . Найдите расстояние AA' .

Решение. Пусть O – центр окружности, на которой лежит точка

C, O' – центр другой окружности (рис.6). Поскольку $OO' = \sqrt{3}$, данные окружности являются описанной и внеписанной для треугольника $CA'B'$, где B' – вторая точка пересечения прямой CA с первой окружностью. Пусть прямая $A'B'$ касается второй окружности в точке C' . Тогда

$$\begin{aligned} \angle A'OA &= \angle AO'C' + \frac{1}{2} \angle C'O'B = \\ &= 2\angle ABC' + \angle C'AB = \angle CB'A' + \frac{1}{2} \angle CA'B', \\ \angle O'A'O &= \angle O'A'B' + \angle B'A'O = \frac{\pi}{2} - \angle C'O'A' + \frac{\pi}{2} - \angle B'CA = \\ &= \pi - \angle B'CA - \frac{1}{2} \angle CA'B' = \angle CB'A' + \frac{1}{2} \angle CA'B'. \end{aligned}$$

Так как $O'A = OA'$, то $AO'A'O$ – равнобедренная трапеция, и $AA' = OO' = \sqrt{3}$.

Задача 5. Пусть I – центр сферы, вписанной в тетраэдр $ABCD$, A', B', C', D' – центры сфер, описанных около тетраэдров $IBCD, ICDA, IDBA, IABC$ соответственно. Докажите, что сфера, описанная около $ABCD$, целиком лежит внутри сферы, описанной около $A'B'C'D'$.

Решение. Пусть R, r – радиусы описанной и вписанной сфер тетраэдра $ABCD$, O – центр описанной сферы $ABCD$, L – центр описанной окружности треугольника ABC , H – проекция I на плоскость ABC . Из условия следует, что точки O и D' лежат на перпендикуляре к плоскости ABC , проходящем через L , поэтому прямые OD' и IH параллельны. Кроме того, $D'A = D'I$ (как радиусы сферы, описанной около $IABC$), $OA = R, IH = r$.

Дважды применим теорему косинусов – к треугольникам $AD'O$ и $OD'I$:

$$\begin{aligned} R^2 &= D'A^2 + D'O^2 - 2D'A \cdot D'O \cos \angle AD'O, \\ OI^2 &= D'I^2 + D'O^2 - 2D'I \cdot D'O \cos \angle ID'O. \end{aligned}$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$R^2 - OI^2 = 2D'O(D'A \cos \angle AD'O - D'I \cos \angle ID'O).$$

Следовательно, $D'O = (R^2 - OI^2)/(2r)$. Аналогично доказывается, что и точки A', B', C' удалены от точки O на такое же расстояние. Таким образом, сферы $ABCD$ и $A'B'C'D'$ концентричны (т.е. их центры совпадают) и $D'O = \rho$ – радиус сферы, описанной около $A'B'C'D'$.

Докажем, что $\rho > R$. Для этого проведем плоскость DOI . Она пересекает описанную и вписанную сферы по окружностям с центрами O, I и радиусами R, r , а тетраэдр – по некоторому треугольнику. Вершина D этого треугольника лежит на большей окружности, а из двух других вершин по крайней мере одна лежит внутри этой окружности. Кроме того, меньшая окружность целиком лежит внутри этого треугольника и внутри большей окружности. Поэтому, если провести через D хорды DX_1 и DY_1 большей окружности, касающейся меньшей, то меньшая окружность окажется строго внутри треугольника DX_1Y_1 . Аналогично доказательству теоремы Понселе получаем, что существует треугольник $DX'Y'$, вписанный в большую окружность и описанный около некоторой окружности с центром I и радиусом $r' > r$, для которого по формуле Эйлера $OI' = R^2 - 2Rr'$. Следовательно, $r' = (R^2 - OI^2)/(2R) > r$.

Понятно также, что $\rho > r'$.

Теорема 5. Пусть O, R – центр и радиус описанной около треугольника ABC окружности; P – произвольная точка внутри треугольника; A_1, B_1, C_1 – проекции P на прямые BC, CA, AB ; S, S_1 – площади треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Тогда

$$\frac{S_1}{S} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{OP^2}{R^2} \right).$$

Это соотношение также называется *формулой Эйлера*.

Доказательство. Пусть A_2, B_2, C_2 – вторые точки пересечения прямых AP, BP, CP с описанной окружностью треугольника ABC (рис.7).

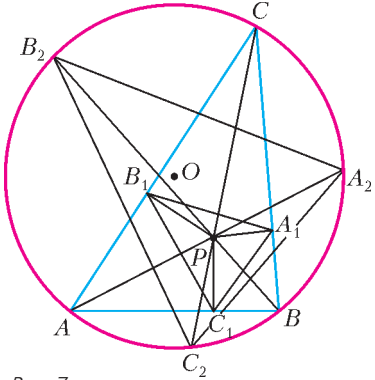


Рис. 7

Так как четырехугольник BC_1PA_1 – вписанный, $\angle PC_1A_1 = \angle CBP = \angle CC_2B_2$. Аналогично, $\angle PC_1B_1 = \angle CC_2A_2$, а значит, $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_2B_2C_2$. Таким образом, соответствующие углы треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны, т.е. эти треугольники подобны, и для их площадей S_1, S_2 выполняется равенство

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{A_1C_1 \cdot B_1C_1}{A_2C_2 \cdot B_2C_2}.$$

С другой стороны, так как треугольники ABC и $A_2B_2C_2$

вписаны в одну окружность, то

$$\frac{S_2}{S} = \frac{A_2B_2 \cdot A_2C_2 \cdot B_2C_2}{AB \cdot AC \cdot BC}.$$

Кроме того, из вписанности четырехугольников BC_1PA_1, AC_1PB_1 получаем $A_1C_1 = PB \sin \angle B = PB \cdot AC / (2R)$, $B_1C_1 = PA \cdot BC / (2R)$, а из подобия треугольников PA_2B_2 и PBA –

$$\frac{A_2B_2}{AB} = \frac{PB_2}{PA}.$$

В результате имеем

$$\frac{S_1}{S} = \frac{A_1C_1}{AC} \frac{B_1C_1}{BC} \frac{A_2B_2}{AB} = \frac{PB}{2R} \frac{PA}{2R} \frac{PB_2}{PA} = \frac{PB \cdot PB_2}{4R^2} = \frac{R^2 - OP^2}{4R^2}.$$

Отметим, что если считать площадь треугольника положительной или отрицательной, в зависимости от его ориентации, то формула Эйлера будет верна для любой точки плоскости. В частности, если точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC , то площадь треугольника, образованного ее проекциями, будет равна нулю, т.е. эти проекции лежат на одной прямой. Эта прямая называется *прямой Симсона*.

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

Карандашам тесно

(Начало см. на 2-й с. обложки)

Эди Нагата впервые заинтересовался предметными головоломками в 1990 году и никогда не был на всемирных встречах изобретателей головоломок. Поэтому он никак не мог предполагать, что среди сотен новых игрушек его «Pencil Case» будет назван лучшей головоломкой 2001 года. У других изобретателей он видел игрушки, сделанные гораздо изящнее и красивее, труднее в решении или оригинальнее в постановке задачи. Тем не менее, победа Эди была заслуженной.

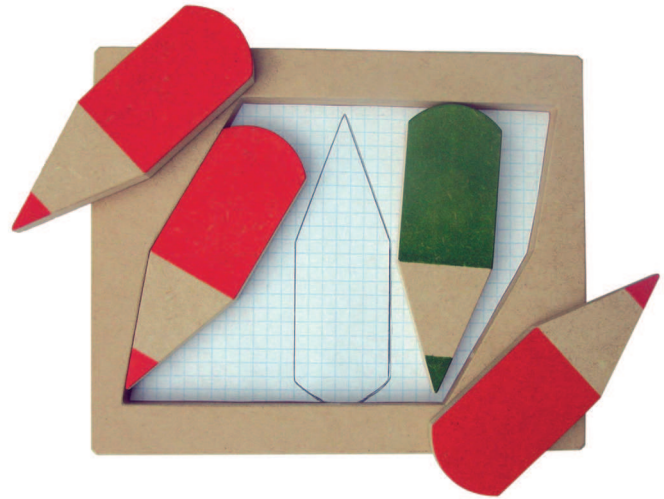
Международное жюри присудило ему главный приз за лучшее сочетание качеств, которые ценятся в этом необычном жанре изобретательства.

Эди Нагата придумал простую задачу, понятную даже ребенку, хотя решить ее может не каждый взрослый. В то же время она по силам и детям. Игрушка состоит из четырех одинаковых деталей и очень проста по устройству.

Напомним, что задача состоит в том, чтобы переложить четыре карандаша из одной коробочки в другую, приклеенную к первой доньшком. Площади обеих коробочек одинаковы, а формы – разные. В этом и состоит особенность и трудность решения головоломки.

Чтобы вам было проще изготовить игрушку по фотографии в журнале, на дно второй коробочки положен листок клетчатой бумаги, повторяющий форму дна и контур карандаша (все карандаши одинаковые). По шаблону вы легко вырежете детали удобного для вас размера, а затем раскрасите их. «Pencil Case», показанный на фотографиях, сделан самим изобретателем Эди Нагата из древесно-волоконистой плиты толщиной 9 мм. Размеры его головоломки $180 \times 45 \times 20$ мм.

На первый взгляд может показаться, что при укладке в



коробочку четырех карандашей не обязательно думать, как это сделать. Достаточно разными способами случайным образом укладывать карандаши как можно теснее друг к другу. Запаситесь терпением, и задача будет решена!

За что же тогда наградили игрушку? Один из членов жюри запасся этим самым терпением и уложил карандаши в коробочку за час. Другой же обратил внимание на то, что все карандаши одинаковые и симметричные и коробочка тоже обладает симметрией (центральной). Значит, решение, скорее всего, должно быть симметричным – точнее, центрально-симметричным. Следуя этой логике, он решил задачу за... минуту.

А.Калинин

Резонанс против резонанса

В. МАЙЕР

ИЗУЧЕНИЕ РЕЗОНАНСА ВСЕГДА СОПРОВОЖДАЕТСЯ ЯРКИМИ историческими примерами, показывающими, насколько опасно это явление. Почему-то чаще всего вспоминают мосты и марширующих по ним солдат: «Обычно даже небольшой отряд солдат, подходя к мосту, прекращает маршировку и идет не в ногу. Если ритм солдатских шагов совпадает с собственной частотой моста, то возможно даже его разрушение. Такой случай в действительности имел место в 1831 г. в Манчестере, когда 60 человек разрушили Браутонский подвесной мост через реку Ирвель. Аналогичный случай имел место также в 1868 г., когда в Чатаме рухнул мост на опорах при прохождении отряда Британской морской пехоты. Но наиболее трагическая катастрофа произошла в 1850 г., когда Анжерский подвесной мост был разрушен батальоном французской пехоты численностью 500 человек. Разрушенный мост увлек людей за собой в ущелье, и погибло 226 человек» (из книги Р. Бишоп «Колебания»). Кроме того, на уроках физики нередко показывают эффектные демонстрационные опыты по резонансному возбуждению колебаний. Поэтому каждый из вас хорошо знает, что такое резонанс, и твердо помнит, что при совпадении частоты внешней силы с частотой собственных колебаний системы амплитуда вынужденных колебаний возрастает настолько, что это может привести к катастрофическим последствиям. А вот мысль о том, что эффективным средством борьбы с нежелательным резонансом является само явление резонанса, многим представляется неожиданной и в значительной мере парадоксальной.

Попробуем разобраться с теорией и поставить простые опыты по резонансной борьбе с резонансом.

Резонансное демпфирование колебаний. Пусть на пружине жесткостью K подвешено тело 1 массой M , а к нему на пружине жесткостью k подвешено тело 2 меньшей массы m (рис.1). Параллельно пружинам введем координатную ось x , на которой точками O и O' обозначим положения равновесия этих тел. Допустим, что на более массивное тело действует гармоническая вынуждающая сила \vec{f} , проекция

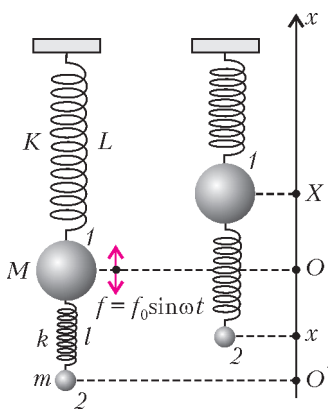


Рис. 1

которой на ось x изменяется по закону $f = f_0 \sin \omega t$. Тогда оба тела совершают вынужденные колебания.

Если в некоторый момент первое тело сместилось из положения равновесия на величину X , то второе тело сместится на величину x так, что длина l пружины между телами изменится на $X - x$. При этом по закону Гука на второе тело со стороны первого действует сила \vec{f}_{21} , проекция которой на ось x равна

$f_{21} = k(X - x)$. На первое тело со стороны верхней пружины действует сила \vec{f}_1 , а со стороны нижней – направленная в ту же сторону сила \vec{f}_{12} , причем проекции этих сил равны $f_1 = -KX$ и $f_{12} = -k(X - x)$ соответственно. В результате второй закон Ньютона для первого и второго тел в проекциях на ось x можно записать следующим образом:

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} = -KX - k(X - x) + f_0 \sin \omega t,$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = k(X - x).$$

Так как оба тела совершают вынужденные колебания, т.е. колеблются с частотой вынуждающей силы ω , решение этой системы уравнений будем искать в виде

$$X = A \sin \omega t \quad \text{и} \quad x = a \sin \omega t.$$

Подставляя вторые производные этих выражений по времени

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -\omega^2 A \sin \omega t \quad \text{и} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 a \sin \omega t$$

в уравнения движения, после сокращения на $\sin \omega t$ получаем

$$-M\omega^2 A + KA + k(A - a) - f_0 = 0,$$

$$-m\omega^2 a - k(A - a) = 0.$$

Из второго уравнения следует, что амплитуда колебаний первого тела $A = (1 - m\omega^2/k)a$ обращается в ноль, когда частота ω вынужденных колебаний равна частоте собственных колебаний второго тела, т.е. $\omega = \sqrt{k/m} = \omega_0$. Из первого уравнения получаем, что в случае $A = 0$ амплитуда колебаний второго тела равна $a = -f_0/k$, причем колебания этого тела происходят по гармоническому закону

$$x = -\frac{f_0}{k} \sin \omega t = \frac{f_0}{k} \sin(\omega t + \pi).$$

Таким образом, при $A = 0$, т.е. при $X = A \sin \omega t = 0$, действующая со стороны второго тела на первое сила

$$f_{12} = -k(X - x) = kx = -f_0 \sin \omega t = f_0 \sin(\omega t + \pi)$$

равна по величине и противоположна по фазе вынуждающей силе f , поэтому первое тело вообще не колеблется!

Прибор для экспериментальной проверки теории. Начнем с конструкции прибора. Оказывается, в нем вовсе не обязательно использовать обычные цилиндрические пружины. Гораздо проще построить прибор на основе плоских пружин – пружинящих полосок, работающих на изгиб. Далее, для возбуждения вынужденных колебаний предлагается воспользоваться электродвигателем с дисбалансом, подключенным к регулируемому источнику тока. Это позволит плавно менять скорость вращения вала и, следовательно, частоту вынуждающей силы, создаваемой несбалансированной нагрузкой на валу.

Внешний вид рекомендуемого прибора схематически изображен на рисунке 2. Один из концов упругой полоски 1 зажат в лапке штатива, а на другом конце расположен микроэлектродвигатель 2. На валу двигателя находится шкив 3, который соединен пассиком 4 со шкивом 5. На шкиве 5 на некотором расстоянии от оси вращения закреплен дисбаланс 6. В направляющих полоски с возможностью перемещения расположен пружинный маятник 7, на конце которого закреплен легкий груз 8.

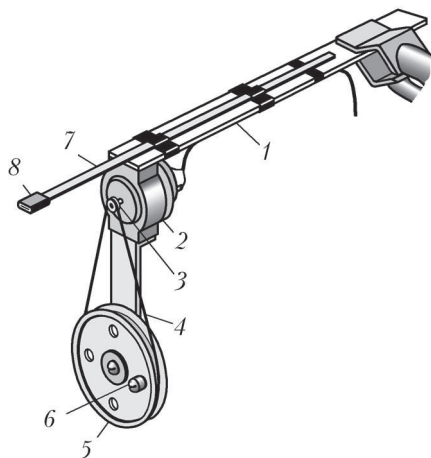


Рис. 2

Упругую полоску размером $4 \times 20 \times 300$ мм лучше всего изготовить из винипласта. Микроэлектродвигатель можно взять любого типа, лишь бы напряжение питания его было 4,5 В или 9 В. К упругой полоске микродвигатель прикрепите жестяным хомутиком или изолейтой. Шкив, расположенный на валу двигателя, должен иметь диаметр порядка 10 мм. Второй шкив диаметром 50 мм закрепите на дюралевой стойке так, чтобы расстояние между осями вращения шкивов составляло примерно 75 мм. На этом шкиве на расстоянии 15 мм от его оси расположите дисбаланс, в качестве которого можно использовать винт подходящей длины с гайкой и контргайкой. Пружинный маятник размером $0,28 \times 5 \times 380$ мм, выполняющий роль резонансного демпфера, нетрудно изготовить из стальной пружины от механического будильника. На конце пружины расплющите отрезок дюралевой трубки так, чтобы получился грузик размером $2 \times 6 \times 6$ мм. Пружину маятника пропустите через две дюралевые направляющие, которые выполнены в форме обжимок и расположены на упругой полоске. Для питания электродвигателя можно использовать имеющийся в любом школьном кабинете физики регулируемый по напряжению источник постоянного тока.

Экспериментальное исследование. Упругую полоску с микроэлектродвигателем закрепите в лапке штатива так, чтобы длина ее рабочей части составляла примерно 210 мм. Длину демпфера сделайте минимальной. Двигатель подключите к регулируемому по напряжению источнику.

Постепенно увеличивайте напряжение питания. Обратите внимание на то, что плохо сбалансированный двигатель начинает заметно колебаться. Продолжая повышать напряжение питания, добейтесь резонанса. При этом амплитуда колебаний двигателя на упругом основании резко возрастает так, что размах колебаний составляет около 40 мм (рис.3,а).

Затем плавно выдвигайте демпфер до длины 150–160 мм.

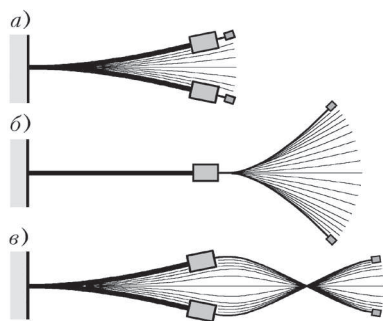


Рис. 3

Вы увидите, что колебания двигателя практически прекращаются, а размах колебаний демпфера достигает 100–120 мм (рис.3,б).

Дальнейшее выдвигание демпфера до длины 210–220 мм приводит к возобновлению колебаний двигателя, причем их размах составляет 20–30 мм, а размах ко-

лебаний демпфера уменьшается примерно до 40 мм (рис.3,в).

Приведенные здесь экспериментальные результаты даны для указанных выше параметров колебательной системы. Сделано это для того, чтобы вам легче было продумать конструкцию собственного прибора и сопоставить получаемые результаты с условиями эксперимента.

Обсуждение результатов. Главным элементом исследуемой колебательной системы является упругая винипластовая полоска. Параметры ее отнюдь не критичны: мы изготовили до десятка приборов, подобных описанному, и хотя в каждом из них использовались разные двигатели и разные упругие элементы, все они прекрасно работали. Поэтому в отсутствие винипласта в качестве пружинного маятника вы можете использовать, например, пластмассовую учебную линейку, если она обладает достаточной гибкостью и упругостью, закрепив ее изолейтой на подставке из деревянных брусков.

Сделав рекомендованный прибор, детально исследуйте наблюдаемые явления. В небольшой статье невозможно дать подробное описание всего интересного. Укажем только, что помимо изгибных колебаний упругой полоски двигатель с дисбалансом легко возбуждает еще и крутильные колебания, которые, кстати, также можно демпфировать. Для этого нужно демпфирующий маятник закрепить с возможностью изменения его длины перпендикулярно упругой полоске возле ее конца. При достижении резонанса крутильных колебаний брусок с двигателем весьма интенсивно прыгает по столу, а при достаточно хорошем демпфировании их — останавливается и стоит как вкопанный.

И последнее. Можно ли *заранее* подобрать легкий маятник так, чтобы он демпфировал колебания массивного? Для ответа на этот вопрос будем рассуждать так.

Пусть на конце закрепленной горизонтально упругой полоски висит груз массой m , при этом максимальный изгиб полоски равен h (рис.4).

Тогда действующая на груз сила тяжести по модулю равна силе упругости, которую в первом приближении можно считать пропорциональной изгибу полоски: $mg = kh$,

где k — жесткость плоской пружины. Частота собственных колебаний обсуждаемой системы задается известной формулой $\omega = \sqrt{k/m}$. Подставляя сюда значение жесткости k из предыдущего равенства, получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}.$$

Таким образом, частота собственных колебаний груза, висящего на конце расположенной горизонтально плоской пружины, обратно пропорциональна корню квадратному из величины максимального изгиба пружины.

Теперь понятно, как подобрать требуемый по параметрам демпфер. Для этого нужно измерить, на сколько изгибается широкая плоская пружина под действием силы тяжести электродвигателя. Затем сделать узкую тонкую пружинку произвольной длины — хотя бы из бронзовой или латунной фольги. Наконечник, закрепить на конце демпфирующей пружинки такой груз, чтобы она изгибалась ровно настолько, насколько изогнута основная пружина, колебания которой нужно демпфировать.

Красиво, изящно и... неожиданно.

Работа газа при переходе из начального состояния в конечное

В.МОЖАЕВ

БЕСКОНЕЧНО МАЛАЯ РАБОТА δA , СОВЕРШАЕМАЯ ГАЗОМ при бесконечно малом квазистатическом расширении, в котором его объем увеличивается на dV , равна

$$\delta A = p dV, \quad (1)$$

где p – внутренне давление газа. В случае квазистатических процессов, когда любое состояние газа является равновесным, внутреннее давление p равно внешнему давлению. Только тогда состояние газа может быть описано двумя параметрами p и V , и только тогда имеет смысл формула (1).

Квазистатические процессы, в строгом смысле этого слова, никогда не реализуются в природе, но к ним возможно подойти сколь угодно близко. Многие реальные процессы можно считать приблизительно квазистатическими с той или иной степенью приближения.

Чтобы от элементарной работы δA перейти к работе A для конечного процесса, например при переходе из начального состояния газа с объемом V_1 в конечное состояние с объемом V_2 , надо просуммировать элементарные работы, или вычислить интеграл:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (2)$$

Такое вычисление возможно только тогда, когда давление является определенной функцией объема. Между тем, согласно уравнению состояния идеального газа, давление p зависит не только от V , но и от температуры T . Меняя в ходе процесса различным образом температуру газа, можно перевести его из начального состояния в конечное бесчисленным количеством способов. Каждому из этих способов соответствует своя функция $p = p(V)$ и свое значение интеграла в формуле (2). Таким образом, работа газа A не определяется заданием его начального и конечного состояний. Ее величина зависит от способа (или пути) перехода газа из начального состояния в конечное.

Для графического представления работы обычно используется координатная плоскость pV . Состояние газа на такой плоскости задается точкой, причем по горизонтальной оси откладывается объем V , а по вертикальной – давление p . Когда газ совершает квазистатический процесс, точка, изображающая его состояние, описывает на плоскости pV непрерывную линию.

Пусть газ квазистатически переходит из состояния 1 в

состояние 2 вдоль кривой 1М2 (рис. 1). Эта кривая соответствует определенной зависимости давления от объема и однозначно определяет работу газа – она численно равна площади криволинейной трапеции 1М2V₂V₁. Если газ заставить переходить из того же начального в то же конечное состояние вдоль другой кривой, например 1N2, то соответствующая работа изобразится другой площадью, а именно 1N2V₂V₁.

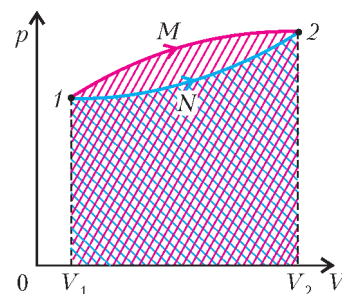


Рис. 1

Если газ обратимым путем переходит из состояния 2 в состояние 1 вдоль кривой 2М1 или 2N1, то, очевидно, работа численно равна тем же площадям, но со знаком минус. На математическом языке это означает, что в этом случае газ совершил отрицательную работу, а с физической точки зрения – что не газ совершил работу, а над газом была совершена работа некоторыми

внешними силами. А теперь перейдем к разбору конкретных задач.

Задача 1. Моль идеального газа совершает круговой процесс (замкнутый цикл), изображенный на рисунке 2. Участок 1–2 – изотерма при температуре T_1 , процесс 2–3 – изобара, переход 3–1 – изохора. Отношение объемов $V_2/V_1 = \alpha$. Определите: 1) работу газа на каждом участке; 2) работу, совершенную газом в круговом процессе.

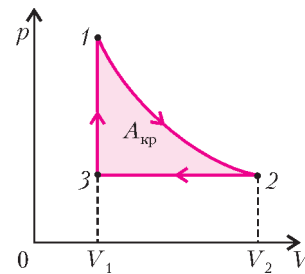


Рис. 2

На участке 1–2 связь между давлением газа p и объемом V имеет вид

$$p = \frac{RT_1}{V},$$

где R – универсальная газовая постоянная. Работа газа в этом процессе, согласно формуле (2), равна

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = RT_1 \ln \alpha.$$

Поскольку $\alpha > 1$, то $A_{12} > 0$, т.е. газ совершает работу.

На изобаре 2–3 давление газа остается неизменным:

$$p = \frac{RT_1}{V_2},$$

а работа равна

$$A_{23} = \frac{RT_1}{V_2} \int_{V_1}^{V_2} dV = RT_1 \left(\frac{V_1 - V_2}{V_2} \right) = -RT_1 \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \right).$$

Получается, что $A_{23} < 0$, т.е. над газом совершается работа.

На изохоре 3–1 объем газа не изменяется, т.е. $dV = 0$, поэтому работа равна нулю:

$$A_{31} = 0.$$

В этом случае ни газом, ни над газом работа не совершается.

Очевидно, что работа газа в данном круговом процессе будет равна

$$A_{кр} = A_{12} + A_{23} + A_{31} = RT_1 \left(\ln \alpha - \frac{\alpha - 1}{\alpha} \right).$$

На рисунке 2 эта работа численно равна площади выделенной фигуры 1-2-3.

Задача 2. Моль гелия расширяется из начального состояния 1 до конечного состояния 3 в двух процессах (рис.3). Сначала расширение идет в процессе 1-2 с постоянной теплоемкостью $C = \frac{3}{4}R$ (R – универсальная газовая постоянная). Затем газ расширяется в процессе 2-3, когда его давление p прямо пропорционально объему V . Найдите работу, совершенную газом в процессе 1-2, если в процессе 2-3 он совершил работу A . Температуры начального (1) и конечного (3) состояний равны.

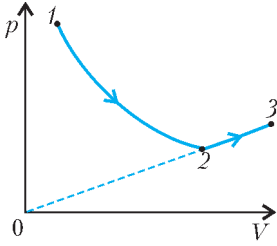


Рис. 3

Поскольку температуры газа в начальном и конечном состояниях одинаковы, переход из состояния 1 в состояние 3 происходит с сохранением внутренней энергии газа. По первому началу термодинамики, в этом случае суммарное подведенное к газу количество теплоты полностью идет на работу, совершенную газом. Воспользуемся этим обстоятельством и найдем количество теплоты, подведенное к газу на участках 1-2 и 2-3.

Обозначим состояние газа в точке 3 через p_3, V_3 и T_3 , а в точке 2 – через p_2, V_2 и T_2 . Работу газа A на участке 2-3 выразим через площадь трапеции $23V_3V_2$ (рис.4):

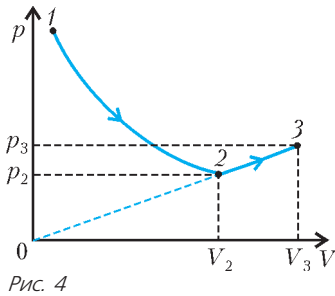


Рис. 4

$$A = \frac{1}{2}(p_3 + p_2)(V_3 - V_2).$$

Из подобия треугольников $03V_3$ и $02V_2$ запишем

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{V_3}{V_2}.$$

Учитывая, что $p_3V_3 = RT_3$ и $p_2V_2 = RT_2$, из совместного решения предыдущих двух уравнений найдем

$$T_3 - T_2 = \frac{2A}{R}.$$

Теперь мы можем записать подведенное к газу количество теплоты на участке 1-2:

$$Q_{12} = C(T_2 - T_3) = -\frac{2CA}{R}$$

и на участке 2-3:

$$Q_{23} = C_V(T_3 - T_2) + A = \frac{2C_V A}{R} + A,$$

где $C_V = \frac{3}{2}R$ – молярная теплоемкость гелия при постоянном объеме.

В соответствии с первым началом термодинамики,

$$Q_{12} + Q_{23} = A_{12} + A,$$

где A_{12} – искомая работа газа на участке 1-2. Тогда окончательно получим

$$A_{12} = Q_{12} + Q_{23} - A = \frac{2(C_V - C)A}{R} = \frac{3}{2}A.$$

Задача 3. На рисунке 5 показан круговой процесс для ν молей гелия, состоящий из двух участков линейной зависимости давления p от объема V и одной изобары. Известно, что на изобаре 3-1 над газом была совершена работа A ($A > 0$), а температура газа уменьшилась в $\alpha = 4$ раза.

Состояния 2 и 3 принадлежат одной изотерме. Точки 1 и 2 на диаграмме pV лежат на прямой, проходящей через начало координат. Определите: 1) температуру газа в точке 1; 2) работу газа за цикл.

Обозначим температуру гелия в точке 1 через T_1 , тогда температура гелия в точке 3 будет $T_3 = \alpha T_1$. Работа над газом на изобаре равна

$$A = p_1(V_3 - V_1) = \nu R(T_3 - T_1) = \nu R(\alpha - 1)T_1.$$

Отсюда

$$T_1 = \frac{A}{\nu R(\alpha - 1)} = \frac{A}{3\nu R}.$$

Перейдем ко второму вопросу. Работу за цикл $A_{ц}$ будем искать через площадь треугольника 123:

$$A_{ц} = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_3 - V_1).$$

Для изобарического процесса $V \sim T$, поэтому

$$V_3 - V_1 = V_1(\alpha - 1).$$

Поскольку точки 1 и 2 лежат на прямой, проходящей через начало координат, то

$$p_2 = \frac{V_2}{V_1} p_1.$$

С другой стороны, точки 2 и 3 лежат на изотерме, поэтому

$$p_2 V_2 = p_3 V_3.$$

Учитывая, что $p_1 = p_3$, находим

$$p_2 = \sqrt{\frac{V_3}{V_1}} p_1 = \sqrt{\alpha} p_1.$$

После подстановки в выражение для работы за цикл получим

$$A_{ц} = \frac{1}{2} p_1 V_1 (\sqrt{\alpha} - 1)(\alpha - 1) = \frac{1}{2} \nu R T_1 (\sqrt{\alpha} - 1)(\alpha - 1) = \frac{(\sqrt{\alpha} - 1)A}{2} = \frac{A}{2}.$$

Задача 4. Моль гелия совершает работу A в замкнутом цикле (рис.6), состоящем из адиабаты 1-2, изотермы 2-3 и изобары 3-1. Найдите работу, совершенную гелием в изотермическом процессе, если разность температур между максимальной и минимальной в цикле равна ΔT .

Очевидно, что максимальная температура гелия в цикле будет в точке 1. Обозначим эту температуру через T_1 . Минимальная температура газа будет на изотерме 2-3, обозначим ее через T_{23} . Согласно условию задачи,

$$T_1 - T_{23} = \Delta T.$$

Для кругового процесса, в соответствии с первым началом термодинамики, суммарное подведенное к газу количество теплоты равно работе газа, совершенной им в данном замк-

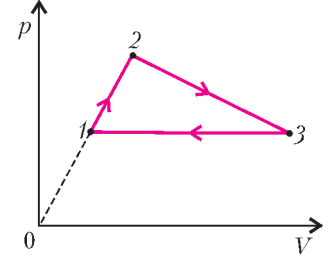


Рис. 5

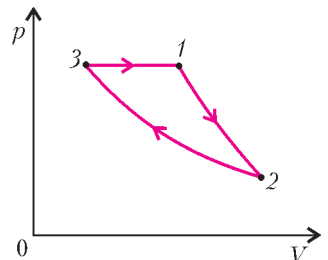


Рис. 6

нутом цикле:

$$Q_{12} + Q_{23} + Q_{31} = A.$$

Тепло, подведенное на адиабате 1–2, равно нулю:

$$Q_{12} = 0.$$

На изотерме 2–3 внутренняя энергия гелия остается неизменной, и подведенное тепло равно работе газа:

$$Q_{23} = A_{23}.$$

При изобарическом процессе 3–1 подведенное к газу тепло идет на увеличение его внутренней энергии и на работу газа:

$$Q_{31} = C_V (T_1 - T_{23}) + p_{31} (V_1 - V_3) = (C_V + R) \Delta T.$$

Окончательно получим

$$A_{23} + (C_V + R) \Delta T = A.$$

Отсюда найдем работу гелия на изотерме 2–3:

$$A_{23} = A - (C_V + R) \Delta T = A - \frac{5}{2} R \Delta T.$$

Задача 5. Подвижный поршень массой m , подвешенный на пружине, делит объем откачанного вертикального цилиндра на две части (рис. 7). В положении равновесия высота нижней части цилиндра равна H_0 , а удлинение пружины при этом составляет x_0 . В нижнюю часть цилиндра впрыскивают ν молей воды. После того как вся вода испарилась, поршень переместился вверх на величину $x_1 = \alpha x_0$ ($\alpha = 3/2$). Найдите: 1) установившуюся температуру пара; 2) работу, совершенную паром. Теплоотводом через стенки цилиндра пренебречь.

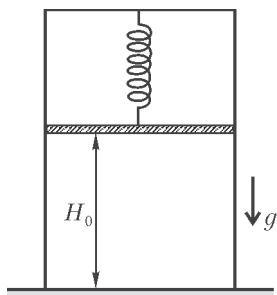


Рис. 7

Запишем условие механического равновесия поршня до впрыскивания воды:

$$mg = kx_0,$$

где k – жесткость пружины. После испарения воды и установления нового равновесия поршня объем пара будет

$$V_{\text{п}} = (H_0 + \alpha x_0) S,$$

где S – площадь внутреннего поперечного сечения цилиндра. Давление пара при этом будет равно

$$p_{\text{п}} = \frac{mg + kx_0(\alpha - 1)}{S} = \frac{\alpha mg}{S}.$$

Рассматривая пар как идеальный газ, из уравнения состояния найдем температуру пара:

$$T_{\text{п}} = \frac{p_{\text{п}} V_{\text{п}}}{\nu R} = \frac{\alpha mg (H_0 + \alpha x_0)}{\nu R}.$$

Работа, совершенная паром, пойдет на приращение потенциальной энергии поршня и пружины. Если отсчитывать потенциальную энергию поршня от его положения при отсутствии воды в цилиндре, то суммарная потенциальная энергия поршня и пружины в начальный момент равна

$$W_1 = \frac{kx_0^2}{2} = \frac{mgx_0}{2}.$$

Потенциальная энергия в конечном состоянии составляет

$$W_2 = \frac{kx_0^2(\alpha - 1)^2}{2} + mg\alpha x_0 = \frac{mgx_0(\alpha^2 + 1)}{2}.$$

Работа пара равна изменению потенциальной энергии:

$$A_{\text{п}} = W_2 - W_1 = \frac{\alpha^2 mgx_0}{2} = \frac{9}{8} mgx_0.$$

Задача 6. Какую максимальную работу можно получить от периодически действующей тепловой машины, нагревателем которой служит $m_1 = 1$ кг воды при начальной температуре $T_1 = 373$ К, а холодильником – $m_2 = 1$ кг льда при температуре $T_2 = 273$ К, к моменту, когда растает весь лед? Чему будет равна температура воды нагревателя в этот момент? Удельная теплота плавления льда $q = 80$ ккал/кг. Зависимостью теплоемкости воды от температуры пренебречь.

Работа, совершаемая любой тепловой машиной в замкнутом цикле, по первому началу термодинамики равна

$$A = Q_1 - Q_2,$$

где Q_1 – количество теплоты, подведенное к рабочему телу за цикл, а Q_2 – отведенное количество теплоты. Коэффициент полезного действия (КПД) тепловой машины равен

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Максимальную работу можно получить (теоретически), если тепловая машина будет работать по циклу Карно. КПД цикла Карно зависит только от температур T_1 и T_2 нагревателя и холодильника:

$$\eta_{\text{К}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Сравнивая два выражения для КПД, найдем, что для цикла Карно

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}.$$

В нашем случае количество теплоты Q_2 , отведенное от рабочего тела и переданное холодильнику, будет идти на плавление льда, и температура холодильника T_2 будет оставаться постоянной (пока не растает весь лед) и равной 273 К. А вот температура нагревателя (горячая вода) будет уменьшаться после каждого цикла, и к моменту, когда лед растает, температура воды нагревателя будет заметно меньше начальной, равной 373 К. Следовательно, температура нагревателя будет переменной величиной.

Пусть в некоторый произвольный момент времени температура нагревателя была T , а за бесконечно малое время работы тепловой машины она уменьшилась на dT . Количество теплоты, переданное рабочему телу за это время, равно

$$dQ_1 = -c_{\text{в}} m_1 dT,$$

где $c_{\text{в}}$ – удельная теплоемкость воды. Количество теплоты, переданное холодильнику, составляет

$$dQ_2 = q dm_2,$$

где dm_2 – бесконечно малое количество растаявшего льда. Воспользовавшись соотношением между Q и T для цикла Карно, получим

$$-\frac{q dm_2}{c_{\text{в}} m_1 dT} = \frac{T_2}{T}.$$

После разделения переменных T и m_2 это уравнение будет иметь вид

$$\frac{dT}{T} = -\frac{q dm_2}{c_{\text{в}} m_1 T_2}.$$

Проинтегрируем обе части данного уравнения:

$$\int_{T_1}^{T_k} \frac{dT}{T} = -\frac{q}{c_B m_1 T_2} \int_0^{m_2} dm_2,$$

где T_k – конечная температура воды в нагревателе к моменту, когда весь лед растает. После интегрирования получим

$$\ln \frac{T_k}{T_1} = -\frac{qm_2}{c_B m_1 T_2},$$

откуда найдем

$$T_k = T_1 \exp\left(-\frac{qm_2}{c_B m_1 T_2}\right) = 278,3 \text{ К}.$$

Теперь мы можем определить суммарное количество теплоты, полученное от нагревателя к моменту полного таяния льда:

$$Q_1 = c_B m_1 (T_1 - T_k).$$

Суммарное количество теплоты, переданное при этом холодильнику, равно

$$Q_2 = qm_2.$$

Следовательно, от тепловой машины можно получить максимальную работу

$$A_{\max} = Q_1 - Q_2 = c_B m_1 (T_1 - T_k) - qm_2 = 61,5 \text{ кДж}.$$

Упражнения

1. Моль гелия, расширяясь в процессе 1–2 (рис.8), где его давление p меняется прямо пропорционально его объему V , совершает работу A . Из состояния 2 гелий расширяется в процессе 2–3, в котором его теплоемкость остается постоянной и равной $C = R/2$. Какую работу совершит гелий в процессе

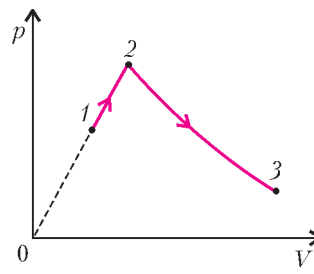


Рис. 8

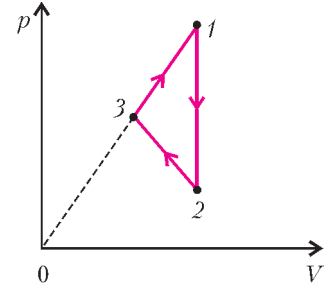


Рис. 9

2–3, если температуры начального (1) и конечного (3) состояний равны?

2. Цикл для ν молей гелия состоит из двух участков линейной зависимости давления p от объема V и одной изохоры (рис.9). В изохорическом процессе 1–2 от газа было отведено количество теплоты Q ($Q > 0$), и его температура уменьшилась в 4 раза. Температуры в состояниях 2 и 3 равны. Точки 1 и 3 на диаграмме pV лежат на прямой, проходящей через начало координат. 1) Найдите температуру T_1 в точке 1. 2) Найдите работу газа за цикл.

3. Моль гелия совершает работу A в замкнутом цикле, состоящем из изобары 1–2, изохоры 2–3 и адиабатического процесса 3–1 (рис.10). Сколько тепла было подведено к газу в изобарическом процессе, если разность максимальной и минимальной температур гелия в цикле равна ΔT ?

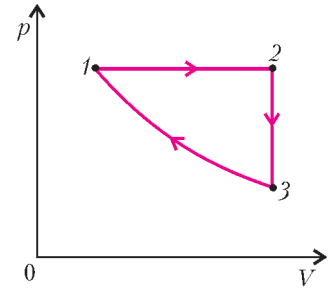


Рис. 10

Формулы геометрии помогают алгебре

В.МИРОШИН

В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ПРИВОДЯТСЯ ТРИ формулы, позволяющие находить:

а) расстояние между точками с координатами x_1 и x_2 на числовой прямой: это модуль их разности, т.е. $d = |x_2 - x_1|$;

б) расстояние между точками $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ числовой плоскости: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$;

в) расстояние от точки $(x_0; y_0)$ до прямой, заданной

уравнением $ax + by + c = 0$: $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Довольно часто удается использовать эти формулы при решении алгебраических задач. Для этого, как правило, нужно истолковать данное алгебраическое выражение как расстояние или сумму расстояний до некоторых точек или прямых. С такими задачами мы и собираемся вас познакомиться.

Сумма расстояний

Задача 1. Найдите минимум выражения

$$f(x, y) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Решение. Данное выражение представляет сумму расстояний от некоторой точки $M(x; y)$ координатной плоскости до двух точек: $K(3; 4)$ и начала координат $O(0; 0)$.

Используя известное «неравенство треугольника», получим, что сумма расстояний $MK + MO$ не может быть меньше расстояния KO , причем минимум достигается для любой точки M , лежащей на отрезке KO . Итак, $MK + MO \geq OK = 5$.

Ответ: 5.

Замечание. Для точек, лежащих на координатной оси, неравенство может быть записано в виде $|x-a| + |x-b| = |a-b| \Leftrightarrow (x-a)(x-b) \leq 0$.

Задача 2 (МГУ, мехмат). Найдите минимум выражения

$$f(x, y) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} + |x-y|.$$

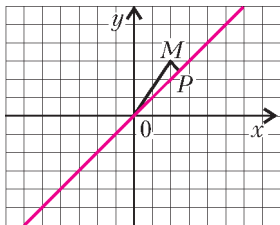


Рис. 1

Решение. Минимальное значение второго слагаемого достигается на прямой, заданной уравнением $y = x$. В этом случае второе слагаемое равно нулю. Осталось минимизировать первое слагаемое, которое есть расстояние от некоторой точки $(x; y)$ до точки $M(2; 3)$ (рис. 1).

Найдем на прямой $y = x$ точку, наименее удаленную от точки $M(2; 3)$. Это будет основание P перпендикуляра, проведенного из точки M на прямую. И расстояние будет равно расстоянию от точки M до прямой:

$$\frac{|2 - 3|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Сумма двух слагаемых будет такой же.

Докажем, что найденное значение будет действительно наименьшим. Пусть $|x - y| = a, a > 0$. Имеем

$$|x - y| = a \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = a \\ y - x = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + a \\ y = x - a, \end{cases} \quad a > 0.$$

Данная совокупность задает пару прямых, параллельных прямой $y = x$, пересекающих ось ординат в точках $(0; a)$ и $(0; -a)$. В этом случае минимум первого слагаемого есть

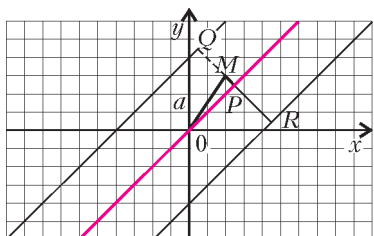


Рис. 2

расстояние от точки $(2; 3)$ до ближайшей из прямых $y = x + a$ или $y = x - a$. Это расстояние равно длине отрезка MQ (рис. 2).

Очевидно, что выполнено неравенство $a > MP + MQ$, откуда $MP < a - MQ < a + MQ$.

Если же точка Q лежит между точками M и P , то в этом случае и вовсе $a > MP - MQ \Leftrightarrow MP < a + MQ$, что и требовалось доказать.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Задача 3 (МГУ, мехмат). Найдите наименьшее значение выражения $\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2} + |x| + |y|$.

Решение. Решим эту задачу подобно предыдущей. Обозначим сначала $f(x, y) = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2} + |x| + |y|$. Рассмотрим два последних слагаемых. Пусть $|x| + |y| = a, a \geq 0$.

Если $a = 0$, то

$$|x| + |y| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Осталось найти значение данного выражения:

$$f(0, 0) = \sqrt{13}.$$

Если $a > 0$, то уравнение $|x| + |y| = a$ задает на координатной плоскости квадрат с вершинами в точках $(0; a), (0; -a),$

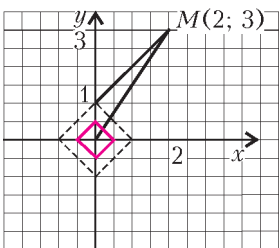


Рис. 3

$(a; 0), (-a; 0)$. Найдем на указанном квадрате точку, наименее удаленную от точки $M(2; 3)$.

Если $0 < a \leq 1$, то такой точкой будет вершина квадрата $(0; a)$ (рис. 3). Но по неравенству треугольника сумма $f(x, y) = \sqrt{(2)^2 + (a - 3)^2} + a$ в этом случае будет больше, чем расстояние

от точки $M(2; 3)$ до начала координат, т.е. больше $\sqrt{13}$.

Если $a > 1$, то ближайшей к точке $M(2; 3)$ будет точка, являющаяся основанием перпендикуляра, опущенного из точки $M(2; 3)$ на отрезок прямой $x + y = a$, содержащий сторону квадрата (рис. 4). В этом случае имеем

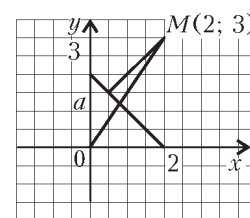


Рис. 4

$$f(a) = \frac{|2 + 3 - a|}{\sqrt{2}} + a = \frac{|5 - a|}{\sqrt{2}} + a.$$

Если $1 < a \leq 5$, то

$$f(a) = a \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{5}{\sqrt{2}},$$

$$a \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{5}{\sqrt{2}} > 1 + 2\sqrt{2} > \sqrt{13}.$$

Если $a > 5$, то

$$f(a) = a \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{5}{\sqrt{2}},$$

$$a \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{5}{\sqrt{2}} > 5 > \sqrt{13}.$$

Таким образом, $\min \left(\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2} + |x| + |y| \right) = \sqrt{13}$.

Ответ: $\sqrt{13}$.

Задача 4 (XIV Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»). Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{x^2 - 14x + 58}$.

Решение. Запишем функцию в виде $f(x) = \sqrt{(x - 3)^2 + 4} + \sqrt{(x - 7)^2 + 9}$. Дадим геометрическую трактовку полученному выражению. Правая часть есть сумма расстояний от точки $(x; 0)$ до точек $(3; 2)$ и $(7; -3)$. Точка $(x; 0)$ лежит на оси абсцисс, а две другие точки – в разных полуплоскостях от нее. Минимум суммы расстояний, как легко видеть, будет достигаться тогда, когда точка $(x; 0)$ будет лежать на отрезке, соединяющем точки $(3; 2)$ и $(7; -3)$, и будет равен длине этого отрезка.

$$\text{Итак, } \min f(x) = \sqrt{(7 - 3)^2 + (-3 - 2)^2} = \sqrt{41}.$$

Ответ: $\sqrt{41}$.

Задача 5 (РГУ). Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} + \sqrt{2x^2 - 2x + 5} + \sqrt{2x^2 - 6x + 9} + \sqrt{2x^2 - 10x + 13}.$$

Решение. Вид функции свидетельствует о том, что «лобовое» решение с помощью производной приведет к вычислительным трудностям. На мысль использовать формулу для расстояния наводят одинаковые старшие коэффициенты квадратных трехчленов, а также вид первого из них.

Преобразуем подкоренные выражения, представив их в «узнаваемом» виде:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + (x + 1)^2} + \sqrt{(x - 2)^2 + (x + 1)^2} + \sqrt{x^2 + (x - 3)^2} + \sqrt{(x - 2)^2 + (x - 3)^2}.$$

Осталось заметить, что правая часть равенства есть сумма расстояний от точки $M(x; x)$ до четырех точек

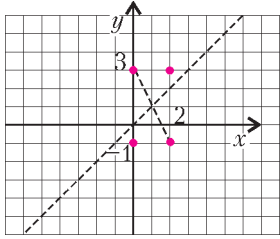


Рис. 5

(0; -1), (2; -1), (0;3), (2;3) координатной плоскости (рис.5).

Указанные точки – вершины прямоугольника, а точка, сумма расстояний от которой до его вершин минимальна, – это точка пересечения его диагоналей. Сумма расстояний от любой другой точки плоскости до вершин прямоугольника будет больше. Это следует из неравенства треугольника.

Осталось заметить, что прямая $y = x$ проходит через точку пересечения диагоналей, имеющую координаты (1;1). Следовательно, $\min f(x) = f(1) = 4\sqrt{5}$.

Ответ: $4\sqrt{5}$.

Задача 6. Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + (y-4)^2} + \frac{1}{\sqrt{5}}|x-2y-2| = 2\sqrt{5}, \\ x \geq 2. \end{cases}$$

Решение. Пусть $(x; y)$ – координаты некоторой точки плоскости. Тогда уравнение системы – это сумма расстояний от этой точки до точки $M(0;4)$ и до прямой, заданной уравнением $x-2y-2=0$.

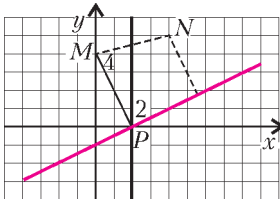


Рис. 6

Заметим еще, что правая часть уравнения равна расстоянию от точки M до указанной прямой. Множество точек плоскости, обладающих данным свойством, – перпендикуляр, опущенный из точки M на прямую (рис.6). Очевидно, что для любой точки N , не принадлежащей этому перпендикуляру, сумма расстояний до точки M и до прямой будет больше.

Проведем перпендикуляр MP . Точка P – основание перпендикуляра – будет иметь координаты (2;0). Учитывая неравенство системы, получим, что только ее координаты будут являться искомыми решениями всей системы.

Ответ: (2;0).

Задача 7 (МГУ, ВМК). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 16x - 12y + 100} + \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 20y + 104} = 2\sqrt{29}, \\ (x-7)^2 + (y-5)^2 = 16. \end{cases}$$

Решение. Представляя подкоренные выражения в виде суммы двух квадратов, получим

$$\sqrt{(x-8)^2 + (y-6)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (y-10)^2} = 2\sqrt{29}.$$

Левая часть равенства есть сумма расстояний от точки $M(x; y)$ координатной плоскости до точек с координатами (8;6) и (-2;10). Правая часть равенства – расстояние между этими точками.

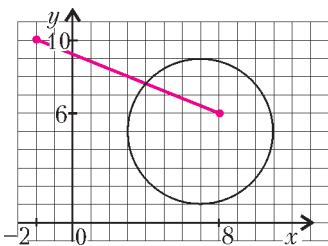


Рис. 7

Геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек есть расстояние между этими точками, – это отрезок, соединяющий данные точки (рис.7). Поэтому первое уравнение системы задает отрезок, соединяющий точки (8;6) и (-2;10). Составим

уравнение этой прямой:

$$\frac{x+2}{8+2} = \frac{y-10}{6-10} \Leftrightarrow \frac{1}{5}(x+2) = -\frac{1}{2}(y-10) \Leftrightarrow 5y+2x-46=0.$$

Найдем точку пересечения этой прямой с окружностью, заданной вторым уравнением, принадлежащую указанному отрезку. Запишем систему

$$\begin{cases} 2x+5y-46=0, \\ (x-7)^2 + (y-5)^2 = 16, \\ 6 \leq y \leq 10. \end{cases}$$

Выразив из первого уравнения переменную $x = 23 - \frac{5}{2}y$ и подставив во второе уравнение, получим

$$\begin{aligned} \left(16 - \frac{5}{2}y\right)^2 + (y-5)^2 &= \\ &= 16 \Leftrightarrow \frac{29}{4}y^2 - 90y + 265 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{180 - 2\sqrt{415}}{29} \\ y = \frac{180 + 2\sqrt{415}}{29} \end{cases}. \end{aligned}$$

Учитывая ограничения системы, получим, что

$$y = \frac{180 + 2\sqrt{415}}{29}.$$

Теперь найдем абсциссу точки пересечения: $x = 23 - \frac{5(90 + \sqrt{415})}{29} = \frac{217 - 5\sqrt{415}}{29}$.

Ответ: $\left(\frac{217 - 5\sqrt{415}}{29}; \frac{180 + 2\sqrt{415}}{29}\right)$.

Разность расстояний

До сих пор мы рассматривали задачи, в которых присутствовали суммы расстояний. Но есть задачи, в которых рассматривается и разность расстояний между точками.

Очень часто при решении алгебраических уравнений можно встретить уравнения, содержащие следующие комбинации:

- 1) $|x-a| - |x-b| = b-a, \quad b > a;$
- 2) $|x-a| - |x-b| = a-b, \quad b > a;$
- 3) $|x-a| - |x-b| = |b-a|, \quad b > a.$

В этих случаях разность расстояний от некоторой точки x числовой прямой до точек a и b в указанном порядке либо равна расстоянию между ними, либо противоположна ему.

Имеем

1) $|x-a| - |x-b| = b-a \Leftrightarrow x \geq b;$

2) $|x-a| - |x-b| = a-b \Leftrightarrow x \leq a;$

3) $|x-a| - |x-b| = |b-a| \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq b \\ x \leq a \end{cases} \Leftrightarrow (x-a)(x-b) \geq 0.$

В первых двух случаях геометрическое место точек – луч прямой, в третьем – два луча.

В случае точек на плоскости картина не меняется.

Задача 8 (ГФА). Среди решений неравенства

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq 13 + \sqrt{(x-5)^2 + (y-12)^2}$$

найдите те, при которых сумма $x+y$ принимает наименьшее значение.

Решение. Запишем неравенство следующим образом:

$$\sqrt{x^2 + y^2} - 13 \geq \sqrt{(x-5)^2 + (y-12)^2}.$$

Заметим, что $13 = \sqrt{5^2 + 12^2}$. Тогда левая часть неравенства

есть разность расстояний от начала координат до некоторой точки $M(x; y)$ и до точки $(5; 12)$. Причем это расстояние не меньше расстояния между точкой M и точкой $(5; 12)$.

Найдем ГМТ, заданное неравенством. Имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} - 13 &\geq \sqrt{(x-5)^2 + (y-12)^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - 13 \geq 0, \\ x^2 + y^2 - 26\sqrt{x^2 + y^2} + 169 \geq x^2 - 10x + y^2 - 24y + 169 \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 169, \\ 5x + 12y \geq 0, \\ 25x^2 + 120xy + 144y^2 \geq 169x^2 + 169y^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 169, \\ y \geq -\frac{5}{12}x, \\ 144x^2 - 120xy + 25y^2 \leq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 169, \\ y \geq -\frac{5}{12}x, \\ (12x - 5y)^2 \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Последнее неравенство системы может быть верным только тогда, когда выражение, стоящее в его левой части, равно нулю. Получим

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} - 13 &\geq \sqrt{(x-5)^2 + (y-12)^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 169, \\ y \geq -\frac{5}{12}x, \\ 12x - 5y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 169, \\ y \geq -\frac{5}{12}x, \\ y = \frac{12}{5}x. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, геометрическое место точек, заданных неравенством, – это луч прямой $y = \frac{12}{5}x$, лежащий вне внутренней части круга радиуса 13 с центром в начале координат, а также в полуплоскости, заданной неравенством $y \geq -\frac{5}{12}x$.

Прямая $x + y = c$ пересекает луч при $c \geq 17$ (рис.8), так что наименьшее значение c , при котором прямая указанного вида будет иметь общую точку с лучом, будет равно 17.

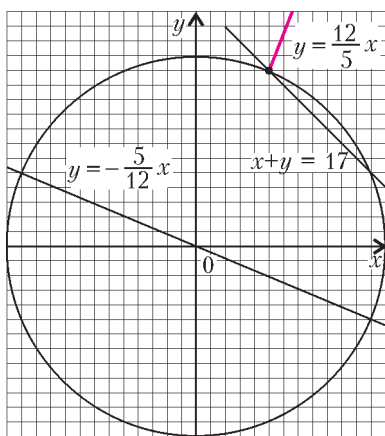


Рис. 8

Ответ: (5; 12).

Задача 9. Найдите значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x-a)^2 + (y-a^2)^2} = |a|\sqrt{1+a^2}, \\ (x-4)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Записав первое уравнение системы в виде

$$\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x-a)^2 + (y-a^2)^2} = \sqrt{a^2 + a^4},$$

видим, что разность расстояний от точки $M(x; y)$ до начала координат, точки O , и точки $A(a; a^2)$ равна AO , отсюда следует, что точка $(x; y)$ лежит на луче прямой $y = ax$ с началом в точке A .

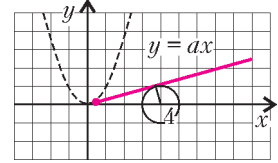


Рис. 9

Так как система описывает пересечение окружности и луча, начало которого лежит вне окружности, то система будет иметь единственное решение только в том случае, когда указанный луч прямой $y = ax$ будет касаться окружности (рис.9). Имеем

$$a = \operatorname{tg} \alpha, \text{ где } \sin \alpha = \frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$a = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{4^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{15}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{15}}$.

Сумма расстояний до вершин треугольника

Задача 10. Найдите наименьшее значение выражения

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{(x+5)^2 + (y-3)^2}.$$

Решение. В этой задаче нужно найти минимум суммы расстояний от точки $(x; y)$ до вершин треугольника с координатами $(0; 0)$, $(3; 0)$, $(-5; 3)$ (рис. 10). Мы имеем дело с частным случаем одной из наиболее известных геометрических задач на нахождение наибольших и наименьших значений.

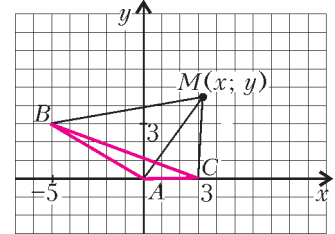


Рис. 10

Общая формулировка этой задачи такова: Дан треугольник ABC . Найти в его плоскости точку P , сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна.

Такая точка называется *точкой Торричелли*.

Теорема. Если больший угол треугольника меньше 120° , то точка Торричелли – точка, лежащая внутри треугольника, из которой все его стороны видны под углом 120° . Если больший угол треугольника не менее 120° , то точка Торричелли – вершина тупого угла.

Существует несколько способов доказательства данной теоремы. Приведем то, которое не использует методов исследования функций.

Лемма 1. Точка, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна, не может лежать вне этого треугольника.

Доказательство. Пусть некоторая точка M , обладающая указанными свойствами, лежит вне треугольника (рис. 11). Соединим ее с вершиной B треугольника. Точку пересечения отрезков AC и BM обозначим M_1 . Очевидно, что выполнено неравенство $MA + MB + MC >$

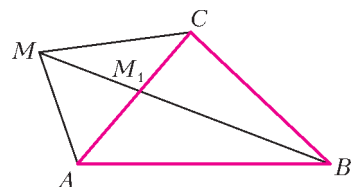


Рис. 11

$$> M_1A + M_1B + M_1C.$$

Лемма доказана.

Таким образом, точка, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна, лежит либо в плоскости треугольника, либо на одной из его сторон.

Лемма 2. Если наибольший угол треугольника менее 120° , то искомая точка – точка, лежащая внутри треугольника, из которой все вершины треугольника видны под углом 120° .

Доказательство. Выберем внутри треугольника ABC произвольную точку P и найдем сумму расстояний от нее до вершин треугольника, т.е. $PA + PB + PC$ (рис.12). По-

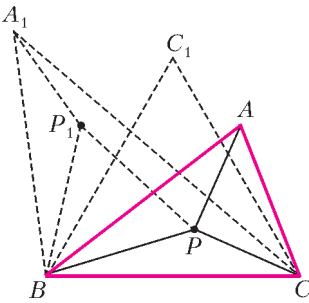


Рис. 12

вернем треугольник вокруг, например, вершины B на угол 60° . При этом вершина A перейдет в точку A_1 , вершина C , соответственно, в точку C_1 , а сама точка P – в точку P_1 . Треугольник PBP_1 – равносторонний, и поэтому $PB = P_1B = PP_1$. Получим $PA + PB + PC = P_1A_1 + P_1P + PC$. Равенство длин отрезков $PA = P_1A_1$ следует из того, что поворот – это движение

плоскости. По свойству ломаной получаем, что сумма расстояний будет наименьшей, если точка P будет лежать на отрезке A_1C . Аналогично рассуждая, получим, что искомая точка должна лежать и на отрезке BC_1 . Таким образом, точка P – пересечение отрезков A_1C и BC_1 .

Итак, если точка P лежит на прямой A_1C , то $\angle BP_1P + \angle A_1P_1B = 180^\circ$, откуда следует, что $\angle A_1P_1B = \angle APB = 120^\circ$. Аналогично, $\angle APC = 120^\circ$. Так как наибольший угол треугольника меньше 120° , то точка P лежит внутри треугольника.

Лемма доказана.

Лемма 3. Если больший угол треугольника не менее 120° , то точка, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна, – вершина тупого угла.

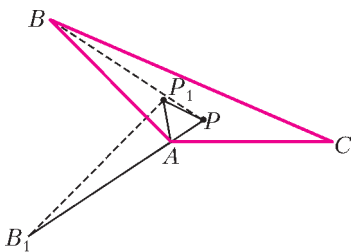


Рис. 13

Доказательство. Пусть $\angle BAC > 120^\circ$ и P – произвольная точка внутри треугольника (рис.13). Построим равносторонний треугольник PAP_1 . Рассуждая как в предыдущем случае, получим, что $\triangle APB = \triangle AP_1B_1$, $PA + PB + PC = PC + PP_1 + PB_1$. Так как $PA + PB + PC \geq AC + AB_1$

и $AB = AB_1$, то $PA + PB + PC \geq AB + AC$.

Лемма доказана.

Доказательство лемм завершает доказательство теоремы.

Решим поставленную выше задачу: найдем минимум суммы расстояний от точки $(x; y)$ до вершин треугольника с координатами $(0; 0)$, $(3; 0)$, $(-5; 3)$.

Решение. Вычислим косинус большего угла треугольника:

$$\cos \angle A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{34 + 9 - 73}{6\sqrt{34}} = -\frac{5}{\sqrt{34}} < -\frac{1}{2}.$$

Тупой угол данного треугольника более 120° , поэтому точка, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна, – вершина тупого угла. Искомая сумма равна $\sqrt{34} + 3$.

Ответ: $\sqrt{34} + 3$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} + 0,2|4y - 3x + 12| = 5, \\ 4x - y \leq 0. \end{cases}$$

2. Решите систему

$$\begin{cases} |y - 2x| + \left| \frac{x-2}{x-2} - 1 \right| = 0, \\ \sqrt{x^2 + (y-10)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2} \leq 10. \end{cases}$$

3. Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} + 0,2|4y - 3x + 12| = 5, \\ x^2 + (y+3)^2 \leq 25. \end{cases}$$

4. Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} \geq 2\sqrt{5}, \\ \sqrt{x^2 + (y-8)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + (y-4)^2} \leq 2\sqrt{13}. \end{cases}$$

5. Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} \geq 5, \\ |y - x - 2| + |(x-4)(x-8)| + (x-4)(x-8) = 0. \end{cases}$$

6. Найдите наибольшее значение y , для которого существуют значения x и z , удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} yz + x\sqrt{1-z^2} = 1, \\ \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{(x-0,6)^2 + (y+0,8)^2} + 1. \end{cases}$$

7. Найдите наименьшее значение x , для которого существуют значения y и z , удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} yz + x\sqrt{1-z^2} = 1, \\ \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{(x-0,6)^2 + (y-0,8)^2} + 1. \end{cases}$$

8. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x-a)^2 + (y-a^2)^2} = |a|\sqrt{1+a^2}, \\ (x-10)^2 + y^2 = 36 \end{cases}$$

имеет решение.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»

kvant.info

Московский центр непрерывного математического образования

kvant.mccme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»

math.child.ru

Костромской центр дополнительного образования «Эврика»

seemat.ru

ОЛИМПИАДЫ

XV Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» в рамках международной программы «Дети. Интеллект. Творчество» при участии Института физики высоких энергий, МГУ им. М.В.Ломоносова, Фонда некоммерческих программ «Династия» и при поддержке компаний «Физикон» и «1С», Издательского дома «Первое сентября» и журналов «Квант» и «Физика в школе» провел юбилейную тест-рейтинговую олимпиаду «Интеллектуальный марафон». Олимпиада проходила с 8 по 15 октября 2006 года в городе Протвино Московской области на базе Института физики высоких энергий.

На олимпиаду приехали участники из разных регионов России и из Казахстана. Одаренные школьники, проявившие интерес к фундаментальным наукам, соревновались в командных и индивидуальных турах по математике, физике и истории научных идей и открытий. В четвертый раз в олимпиаде участвовали школьники, интересующиеся экологией и биологией, и в третий раз – интересующиеся историей и культурологией.

Абсолютным победителем олимпиады «Интеллектуальный марафон-2006» по фундаментальным наукам в командном зачете стала команда лицея 1511 при МИФИ (Москва). Ей был вручен главный приз соревнований – Суперкубок – и призы от спонсоров. Команда была также второй по истории научных идей и открытий и третьей по математике и физике.

Второе место в общем зачете заняла команда Классического лицея 1 при РГУ (Ростов-на-Дону). Она заняла также третье место по истории научных идей и открытий. Команде был вручен большой кубок за второе место в общем зачете и соответствующие дипломы за успехи в командных соревнованиях. На третье место вышла команда ФМЛ 1580 при



Команда Классического лицея 1 при РГУ

МГТУ им. Н.Э.Баумана (Москва), которая стала также первой по истории научных идей и открытий и второй по физике. Ей был вручен кубок и дипломы за успехи в командных соревнованиях.

В индивидуальных соревнованиях по фундаментальным наукам абсолютным победителем олимпиады стал Юрий Цимбалов, ученик 11 класса ФМЛ 1580 при МГТУ им. Н.Э.Баумана. Ему были вручены большая золотая медаль и малая бронзовая медаль за третье место по физике. Вторым призером в общем зачете стал Фарит Шакиров, ученик 11 класса ФМЛ 2 Елабуги. Большую бронзовую медаль в общем зачете завоевал Зине Жумон, представляющий Казахстан, он получил также малую золотую медаль за победу по математике. В индивидуальном зачете по физике лучшим стал Владимир Турбин (11 кл., Центр «Дарын», Казахстан), ему была вручена малая золотая медаль. Вторым стал Никита Агеев (11 кл., Классический лицей 1 при РГУ), он удостоился малой серебряной медали. Мират Каденов (Центр «Дарын») получил бронзовую медаль за третье место по физике. Арман Дияров и Дайана Тумарбекова (Казахстан) за второе и третье места по математике были награждены малыми серебряной и бронзовой медалями соответственно.

Все победители и призеры получили различные подарки и призы от организаторов и спонсоров олимпиады.

Международный интеллект-клуб «Глюон» приглашает региональные центры, школы, лицеи и гимназии, работающие с одаренными детьми, принять участие в XVI Международной олимпиаде «Интеллектуальный марафон», которая пройдет в октябре 2007 года в Греции на острове Крит.

Заявки на участие присылайте по адресу: 115522 Москва, Пролетарский проспект, д.15/6, корп.2, МИК «Глюон».

Телефон: (495)517-8014, факс: (495)396-8227,

e-mail:gluon@yandex.ru

(см.также сайт: [http:// gluon.informika.ru](http://gluon.informika.ru)).



Идет жеребьевка капитанов команд

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ
ПО ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ НАУКАМ

Письменный индивидуальный тур

Математика

1. Замените звездочку цифрой так, чтобы число $\frac{99\dots 9}{100} * \frac{00\dots 09}{100}$ оказалось полным квадратом.
2. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если точка касания вписанной в него окружности делит гипотенузу на отрезки с длинами a и b .
3. Найдите наименьше из чисел вида $|11^k - 5^l|$, где k и l – натуральные числа.
4. Таблица $m \times n$ заполнена числами так, что числа каждой строки и каждого столбца образуют арифметическую прогрессию. Найдите сумму всех чисел таблицы, если сумма четырех чисел, стоящих в ее углах, равна s .
5. На стороне AC треугольника ABC взята точка E такая, что $EC = AB$. Пусть K – середина BC , M – середина AE . Найдите угол BAC , если $\angle KME = \alpha$.
6. Пусть $a > 1$ – единственный корень уравнения $x^3 - x - 3 = 0$. Что больше: a или $\sqrt[3]{13}$?
7. Можно ли так познакомить некоторых из N попарно незнакомых людей, чтобы никакие трое из них не имели одинакового количества знакомых?

Физика

1. Два одинаковых маленьких шарика, соединенных между собой нерастяжимой невесомой нитью длиной l , лежат на гладкой горизонтальной плоскости. Какую минимальную вертикальную скорость нужно сообщить одному из шариков, чтобы и второй оторвался от плоскости?
2. Математический маятник – длина подвеса l , масса груза m – расположен вблизи горизонтальной проводящей плоскости. Определите период малых колебаний маятника около положения равновесия. Заряд маятника q . При вертикальном положении маятника расстояние от груза до проводящей плоскости равно a .
3. Известно, что сила притяжения Луны к Солнцу примерно в два раза больше, чем сила притяжения Луны к Земле. Покажите, что несмотря на это Луна удерживается полем тяготения Земли и вращается вокруг нее. Масса Солнца $M_C = 2 \cdot 10^{30}$ кг, масса Земли $M = 5 \cdot 10^{24}$ кг, масса Луны $m = 7 \cdot 10^{22}$ кг, расстояние от Земли до Солнца $R_0 = 1,5 \cdot 10^{11}$ м, расстояние от Земли до Луны $r_0 = 3,8 \cdot 10^8$ м.
4. Оцените время испарения лужи воды глубиной h и поперечным размером R . Температура воды и окружающего воздуха T . Сделайте оценку для $T = 20^\circ\text{C}$, $R = 1$ м, $h = 3$ мм. Удельная теплота испарения воды $L = 2,26 \cdot 10^6$ Дж/кг.
5. В твердом теле потенциальная энергия межатомного взаимодействия в зависимости от расстояния между атомами R определяется выражением $U(R) = D(1 - \exp(-\alpha(R - R_0)))^2$. Определите коэффициент теплового линейного расширения тела. Сделайте численную оценку для $D = 4$ эВ, $R_0 = 2 \text{ \AA}$, $\alpha = 10^7 \text{ см}^{-1}$.

6. Пучок света частотой ω при прохождении через две щели, расстояние между которыми d , создает дифракционную картину на экране, удаленном на расстояние L , $L \gg d$. При открытой одной щели на экране наблюдается распределение интенсивности $I_0(\theta)$, где θ – угол наблюдения.

Каково будет распределение интенсивности при двух открытых щелях? Как изменится распределение интенсивности, если одну из щелей закрыть прозрачной пластиной толщиной l с показателем преломления n ?

7. Свет частотой ω_0 испущен с поверхности звезды радиусом R и массой M . Какова будет частота света, зарегистрированная удаленным неподвижным наблюдателем? Как и с какой скоростью должен двигаться наблюдатель, чтобы он не зарегистрировал изменение частоты света? Сделайте численную оценку для Солнца ($R = 7 \cdot 10^8$ м, $M = 2 \cdot 10^{30}$ кг). Гравитационная постоянная $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$. Указание: свет можно рассматривать как поток частиц, фотонов, имеющих массу $m = \hbar\omega_0/c^2$.

Устный командный тур

Математика

1. Поезд проходит мост длиной 450 метров за 45 секунд и 15 секунд идет мимо телеграфного столба. Найдите длину поезда и его скорость.
2. Дан правильный шестиугольник со стороной 1. Постройте одной линейкой отрезок длиной $\sqrt{7}$.
3. Можно ли переставить цифры в десятичной записи числа 2^{35} так, чтобы получился куб целого числа?
4. Существует ли четырехугольник, каждая сторона которого перпендикулярна противоположной стороне?
5. Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней. Найдите знак числа c , если $a + 2b + 4c < 0$.
6. В четырехугольнике $ABCD$ точки M и N – середины сторон BC и AD соответственно. Отрезок MN делит площадь четырехугольника пополам, а его диагонали пересекаются в точке O . Найдите отношение OM к ON , если $AD = 2BC$.
7. У ромашки m лепестков. Двое играющих отрывают по очереди либо один, либо два соседних лепестка. Выигрывает оторвавший последний лепесток. Кто выигрывает при правильной игре?
8. В школе 2007 учеников. Одни из них знакомы, другие не знакомы друг с другом. Есть ли среди них ученик, имеющий четное число знакомых среди остальных учеников школы?
9. Выясните, при каких значениях n гири с массами 1 г, 2 г, 3 г, ..., n г можно разложить на три равные по массе кучки.
10. Пусть x, y, z – положительные числа, а s – наименьшее из чисел $x, y + \frac{1}{x}, \frac{1}{y}$. Найдите наибольшее возможное значение s .
11. Может ли хотя бы одно из чисел $p - 1$ и $p + 1$ быть полным квадратом, если p – произведение первых n простых чисел ($n > 1$)?
12. В квадрате со стороной 1 нарисованы несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Можно ли провести прямую, пересекающую не менее четырех из этих окружностей?

Физика

1. Ракета стартует с Земли и разгоняется до нужной для выполнения ее задачи скорости. Нагревается ли при разгоне воздух внутри ракеты? Стенки ракеты нетеплопроводны.
2. В фильме «Морозко» главный герой, спасаясь от разбойников, бросил вверх разбойничьи пудовые дубинки (1 пуд ≈ 16 кг), которые упали через семь дней на то же место. Оцените параметры богатырского броска.
3. Мировой рекорд в беге на 100 м составляет время, чуть

меньшее 10 секунд. Оцените мировой (или уже межпланетный?) рекорд в прыжке в длину на Луне (пренебрегите влиянием сопротивления воздуха, наличием скафандра и пр.).

4. Из бесконечной незаряженной проводящей плоскости перпендикулярно ей в вакуум вылетает электрон. В полупространстве, в которое он попадает, создано однородное ускоряющее электростатическое поле напряженностью E . На каком расстоянии от плоскости электрон будет иметь минимальную скорость?

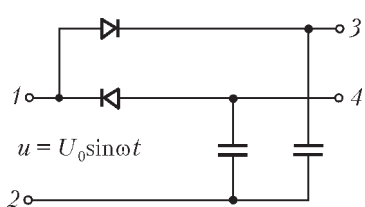
5. В некоторых северных странах (например, в Канаде) пространство между стеклами в оконных стеклопакетах заполняется не воздухом, а тяжелым инертным газом (криптоном). Зачем это делается? Можете ли вы оценить выигрыш от такого решения?

6. «Пылевое облако и ракета». Ракета массой m , летящая в космическом пространстве с выключенным двигателем со скоростью v_0 , попадает в пылевое облако со средней плотностью ρ_0 , имеющее протяженность L в направлении движения ракеты. Пылинки в облаке неподвижны и прилипают к ракете при столкновении с ней. Площадь поперечного сечения ракеты S . Какую скорость v_1 будет иметь ракета при вылете из облака пыли, и сколько времени займет пролет через это облако?

7. «Нагревание воды». В стакан с водой, имеющей температуру $t_1 = 20^\circ\text{C}$, поместили электронагреватель и включили его в сеть. Вода стала нагреваться со скоростью $\mu_1 = 0,03^\circ\text{C}/\text{мин}$, однако с течением времени скорость нагревания уменьшилась, и вода нагрелась только до температуры $t_2 = 80^\circ\text{C}$. Нагреватель выключили. Вода начала остывать со скоростью $\mu_2 = -0,04^\circ\text{C}/\text{мин}$. Чему равна температура окружающей среды? Считайте, что теплоотдача в окружающую среду пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.

8. Почему для ускорения протонов до больших энергий обычно используют кольцевые ускорители (например, протонный синхротрон), а для ускорения электронов – линейные?

9. В цепи, схема которой показана на рисунке, между точками 1 и 2 от внешнего источника создано переменное



синусоидальное напряжение $u = U_0 \sin \omega t$. Какое напряжение установится между точками 3 и 4? Диоды считайте идеальными.

10. На полированный до «зеркального блеска» металлический шар слева падает однородный параллельный пучок света. Куда отразится больше света: влево или вправо?

История научных идей и открытий

Математика

1. В 2007 году математическое сообщество будет отмечать 300-летие со дня рождения одного из величайших математиков всех времен. Трудно найти область математики, где не было бы теорем, понятий, формул, связанных с его именем. Назовите этого математика. Какие понятия, теоремы, формулы, открытые им, вам известны?

2. Итальянский математик Лоренцо Маскерони (1750–1800) в работе «Геометрия циркуля» доказал, что всякая задача на построение, которая может быть решена с помощью циркуля и линейки, может быть решена и с помощью одного лишь циркуля. В его рассуждениях важную роль сыграла лемма об удвоении отрезка, т.е. следующая задача:

Дан отрезок AB . С помощью одного только циркуля постройте отрезок $AE = 2AB$ (считается, что отрезок задается своими концами).

Решите эту задачу.

3. В одном средневековом индийском трактате приведена задача, стихотворный перевод которой звучит так:

На две партии разбившись,

Забавлялись обезьяны:

Часть восьмая их в квадрате

В роще весело резвилась,

Криком радостным двенадцать

Воздух свежий оглашали.

Вместе сколько, ты мне скажешь,

Обезьян там было в роще?

Решите эту задачу.

4. Занимаясь проблемой разрешимости в целых числах уравнений вида $ax^2 + b = y^2$, где a и b – натуральные числа, причем число a не является полным квадратом, Пьер Ферма, в частности, решал задачи, сходные со следующей:

Если уравнения $x^2 - 2y^2 = a$ и $x^2 - 2y^2 = b$ разрешимы в целых числах, то разрешимо ли в натуральных числах уравнение $x^2 - 2y^2 = ab$?

Решите эту задачу.

5. В 1703 году был издан необычно большим для тех времен тиражом – 2400 экземпляров – первый русский учебник по математике «Арифметика сиречь наука числительная». Автором его был замечательный педагог-математик Леонтий Филиппович Магницкий. Предлагаем вам решить такую задачу из этой книги:

Один человек выпивает бочонок кваса за 14 дней, а вместе с женой он выпивает такой же бочонок кваса за 10 дней. За сколько дней жена одна выпивает такой же бочонок кваса?

Физика

1. Два выдающихся ученых – отец и сын – лауреаты Нобелевской премии. Один удостоен этой награды за открытие и исследование корпускулярных свойств элементарной частицы, другой – за доказательство ее волновых свойств. Одна из этих премий получена 100 лет назад, в 1906 году.

а) Кто эти ученые?

б) О какой элементарной частице идет речь?

в) Какую лабораторию возглавлял старший из ученых? Кто были его предшественники? Кто сменил его на этом посту?

г) Чем еще знамениты эти ученые?

2. В 2006 году в составе Солнечной системы произошли изменения.

а) Назовите эти изменения.

б) Приведите аргументы сторонников этих изменений.

в) Назовите ученых, результаты исследований которых легли в основу произведенных изменений.

3. 245 лет назад при наблюдении редкого интересного астрономического явления в России было сделано выдающееся открытие в области планетной астрономии. Через восемь лет для наблюдения такого же явления была организована морская кругосветная экспедиция в Тихий океан под командованием известного путешественника, военного моряка, ученого. Следующие два раза это явление наблюдалось в XIX веке, а последний раз – летом 2004 года.

а) Назовите это явление.

б) Какое открытие было сделано?

в) Кто наблюдал это явление в России? Кто командовал кругосветной экспедицией?

4. 175 лет назад родился великий английский физик. Он

работал в различных областях физики, и в каждой из этих областей обязательно найдется результат, названный его именем. Все его достижения значительны, но одно из них связало в единое целое три раздела физики, которые до этого считались обособленными. Ряд предсказаний его теории довольно быстро подтвердились экспериментально, а некоторые стали широко использоваться в технике. Теория стала фундаментом как для классических разделов физики, так и для ряда новых направлений. Особенностью его взглядов было отрицание необходимости использования векторов в физических соотношениях, поэтому для изложения нескольких дифференциальных уравнений, которые составляют сущность упомянутой теории, ему пришлось написать двухтомный труд.

- а) Назовите этого ученого.
- б) О какой теории идет речь?
- в) Назовите как минимум два эксперимента, подтвердивших предсказания теории.

г) Назовите разделы науки, в которых работал этот ученый, и результаты, носящие его имя.

5. В первой четверти XIX века на одном из заседаний Французской Академии наук был сделан доклад о дифракции света. Один из членов Академии, известный ученый, усомнился в правомерности считать свет волновым процессом. Председатель заседания предложил провести опыт и предсказал парадоксальный результат, который однозначно свидетельствовал бы в пользу волновой теории света. Опыт был поставлен. Была получена предсказанная дифракционная картина, которую в дальнейшем назвали именем усомнившегося оппонента.

- а) Кто был докладчик?
- б) Какой результат опыта был получен?
- в) Чьим именем был назван результат?
- г) Кто председательствовал на собрании Академии?

Публикацию подготовили В.Альминдеров, А.Егоров, А.Кравцов, А.Попов, Ж.Работ

Всероссийская студенческая олимпиада по физике

По результатам очередной Всероссийской олимпиады среди студентов технических вузов, которая состоялась в ноябре 2006 года, в командном зачете первое место заняла команда Санкт-Петербургского государственного политехнического университета (106 баллов), второе место – команда Московского института стали и сплавов (78 б.), третье место – команда Российского государственного университета нефти и газа им. И.М.Губкина (73 б.).

В личном зачете первое место завоевал Н.Богословский (СПГПУ, 47 б.), на втором месте оказался К.Корнишин (РГУ нефти и газа им. И.М.Губкина, 44 б.), третье место разделили И.Ковтунов (МИСиС, 43 б.) и Ю.Кропотина (СПГПУ, 43 б.).

Задачи олимпиады

1. Определите угол наклона плоскости низкой орбиты космического аппарата, движущегося вокруг Земли, к плоскости экватора, если он оказался над одной и той же точкой, находящейся на широте Москвы, с интервалом менее 2 часов. Известно, что период вращения аппарата 90 минут, а широта Москвы 57° .

2. Маховик в форме коленчатого вала массой m , ось которого горизонтальна, покоится, опираясь своими цилиндрическими концами радиусом R каждый на два гладких горизонтальных ребра. Центр масс маховика смещен на расстояние R от геометрической оси маховика и в начальный момент занимает наиболее высокое положение. Определите зависимость углового ускорения маховика в случае потери им равновесия от времени, если момент инерции относительно горизонтальной оси, проходящей через центр масс, равен mR^2 .

3. К планете радиусом R с ускорением на поверхности g , имеющей спутник с радиусом орбиты $81R$, подлетает с большого удаления космический аппарат со скоростью $v = (1/9)\sqrt{7Rg}$. Оцените, возможен ли захват гравитационным полем планеты космического аппарата, если топливо у него на исходе, а угол поворота вектора скорости аппарата при облете спутника в системе отсчета спутника равен 120° .

4. Шайба радиусом R скользит по льду со скоростью v_0 , вращаясь вокруг собственной оси с угловой скоростью ω_0 ($v_0 \ll R\omega_0$). Определите закон изменения ускорения шайбы со временем, если коэффициент трения шайбы о лед μ .

5. Кондиционер, работая в режиме «теплого насоса», закачал в помещение количество теплоты Q . Определите изменение энтропии, если все процессы внутри кондиционера обратимые, а термодинамический КПД цикла Карно, по которому работает кондиционер, равен η . Температура воздуха на улице T_0 , в помещении T_{II} .

6. Сфера радиусом R из диэлектрика разделена диаметральной плоскостью на две одинаковые части, заряженные равномерно разноименными зарядами Q и $-q$. Работа по разведению полусфер на бесконечность равна A . Определите энергию заряда q , равномерно распределенного по поверхности полусферы радиусом r .

7. Очень длинный соленоид радиусом r с плотностью намотки n помещен в бесконечно длинную трубку из сверхпроводника радиусом $R > r$. Определите магнитное поле внутри соленоида и вне его, если по его обмотке протекает ток I .

8. Источник, напряжение которого равно U_0 , подключен к цепи, состоящей из последовательно соединенных резистора сопротивлением R_1 и конденсатора емкостью C . Параллельно конденсатору подключена цепь из последовательно соединенных резистора с неизвестным сопротивлением $R_2 > R_1$ и ключа K . Определите максимальную мощность, выделяющуюся в резисторе сопротивлением R_2 . Считать, что ключ K замыкается-размыкается с частотой $\nu \gg (R_1 + R_2)/(CR_1R_2)$.

9. На пути плоскополяризованного светового потока поместили поляризационную пластинку, плоскость поляризации которой медленно вращается при переходе от одной зоны Френеля к другой. Определите интенсивность света в точке наблюдения, если вначале она равна I_0 и на оси системы плоскости поляризации света и пластинки взаимно перпендикулярны.

Публикацию подготовили В.Голубев, М.Яковлев

ИНФОРМАЦИЯ

Рождественская аэромодельная фиеста

Радиоуправляемая модель теплового аэростата (воздушного шара, монгольфьера) практически не отличается от пилотируемого теплового аэростата. Разве что тем, что пилот управляет аэростатом не из гондолы (корзины), а находясь на земле, с помощью дистанционного управления. Пилотирование такого мини-аэростата доступно даже ребенку, хотя по масштабности и зрелищности его полет полностью идентичен полету полноразмерного аэростата.

Модели аэростатов имеют массу до 50 кг и объем не более 200 м^3 . Практика показала, что для участия в соревнованиях наиболее удобен объем $50\text{--}80 \text{ м}^3$. Такие аэростаты в среднем имеют высоту 6–8 м и диаметр 4–6 м. Они снабжены горелками с тепловой мощностью 100–120 кВт. Управление подачей топлива – сжиженного пропана-бутана – в горелку выполняется дистанционно с использованием электромагнитного клапана, с его помощью также гасят пилотский огонь перед посадкой. Большинство модельеров использует двойные горелки. Специальный механизм отцепки позволяет пилоту сбрасывать с модели маркер (для этой цели обычно выделяют отдельный радиоканал). Большинство моделей последних лет снабжены особым устройством для смягчения посадки аэростата.

Радиоуправляемые модели летают на высотах до 150 метров, и пилоты, как правило, сопровождают их полет пешком. Поэтому для проведения соревнований выбирают спокойную, почти безветренную погоду. Правилами пре-



дусмотрено, что скорость ветра при этом не должна превышать 2 м/с.

Выполнение полетов на соревнованиях моделей не менее сложно, чем на соревнованиях пилотируемых аэростатов, и имеет свои особенности. Во-первых, пилот видит свой аппарат со стороны, нередко издалека, поэтому ему сложно определить момент сброса маркера. Во-вторых, полеты моделей выполняются на небольших высотах, в течение ко-



роткого времени, что ограничивает использование благоприятных воздушных потоков для выхода на цель.

Наиболее известные международные соревнования радиоуправляемых аэростатов проводятся ежегодно в Бригхатале – небольшом деревне на юго-востоке Германии. На Королевской воздухоплавательной фиесте в Швейцарии радиоуправляемые аэростаты выделены в самостоятельную программу. В таких соревнованиях, собирающих сотни зрителей, принимает участие до сорока и более моделей. Но чаще всего по 5–7 моделей участвуют в небольших товарищеских встречах воздухоплателей, которых в Европе каждый год проводится несколько десятков.

Впервые в России соревнования радиоуправляемых моделей тепловых аэростатов прошли 30 января 2007 года в московской школе-интернате «Интеллектуал» (школа 1128) на Кубок школы. Название соревнований «Рождественская фиеста» соответствовало назначенной дате проведения – 12 января, но по погодным условиям фиесту несколько раз переносили. Идея проведения фиесты принадлежала директору школы Е.В.Маркелову, а претворена в жизнь была благодаря усилиям директора Клуба воздухоплавания города Жуковского В.Д.Бокши и руководителей аэромодельных кружков московских школ В.И.Белякова-Бодина (школа 1071) и А.В.Ефимова (школа 1128).

Первым шагом к задуманному стал двухчасовой урок, проведенный в школе «Интеллектуал» Клубом воздухоплавания города Жуковского для учащихся старших классов. Обычный урок физики, посвященный закону Архимеда, превратился в интересный, познавательный урок, широко выходящий за рамки школьной программы, с иллюстрацией основных положений закона на примере полета воздушного шара.

В соревнованиях приняли участие три команды: команды московских школ «Интеллектуал» и «Школа здоровья» (школа 1071), а также команда школьников из Сергиевого Посада. Восторгу участников и многочисленных зрителей не было предела. Жаль, что по техническим причинам в фиесте не смогли участвовать команды из Сыктывкара и гимназии 33 города Удельная.

Финансовые проблемы фиесты были решены благодаря спонсорской помощи благотворительного Фонда «Династия».



Капитаны (слева направо) Максимов Егор, Кондратьев Михаил, Кузин Сергей



В процессе соревнований команды выполняли два упражнения: «Круг» и «Неподвижность и цель». Задача в упражнении «Круг» – не позднее пяти минут после старта приземлить аэростат возможно ближе к центру круга радиусом 10 метров, заступать в который пилот не имеет права. Пилот управляет высотой полета с использованием горелки, по радиоканалу, а положением аэростата – посредством фала длиной 15 метров, привязанного к гондole. В упражнении «Неподвижность и цель» нужно как можно дольше удерживать аэростат в интервале высот от 0 до 2 метров, а затем приземлить его как можно ближе к цели. На каждое упражнение давалось две попытки. Победители определялись по сумме баллов в двух упражнениях.

По итогам соревнований первое место заняла команда школы «Интеллектуал», капитан Михаил Кондратьев, 492 очка; второе место – «Школа здоровья», капитан Егор Максимов, 392 очка; третье место – команда из Сергиевого Посада, капитан Сергей Кузин, 340 очков.

После окончания соревнований пилоты Клуба воздухоплавания города Жуковского устроили катание участников и зрителей на больших шарах, которые поднимались на привязи на высоту пусть и небольшую, но вызывающую восторг у юных пассажиров.

Более подробно о Рождественской аэромодельной фиесте можно узнать на сайте Клуба воздухоплавания города Жуковского (<http://www.a-club.airshow.ru>) и на сайте проектов массового аэромоделирования (<http://aerostat4all.narod.ru>).

Публикацию подготовили
В.Бокша, В.Беляков-Бодин

Заочная школа СУНЦ НГУ

Заочная школа (ЗШ) Специализированного учебно-научного центра (СУНЦ) Новосибирского государственного университета (НГУ) приглашает школьников 7–11 классов и абитуриентов расширить и углубить свои знания по школьным предметам и подготовиться к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения.

Кроме отдельных учащихся, в ЗШ принимаются факультативные группы, организованные в общеобразовательных школах. Лучшие учащиеся ЗШ ежегодно приглашаются в Летнюю школу для участия в конкурсе СУНЦ НГУ. Учащиеся, успешно выполнившие все задания, по окончании одиннадцатого класса получают удостоверение ЗШ.

Зачисление в Заочную школу СУНЦ НГУ производится круглогодично. Чтобы туда поступить, необходимо прислать в адрес ЗШ выполненное первое задание и заявление о приеме. Работа должна быть выполнена в ученической тетради в клетку. Обязательно запишите краткое условие каждой задачи. Номера задач должны совпадать с теми, которые указаны в задании. Пишите четко, разборчиво, оставляя поля для замечаний преподавателя.

На обложке тетради нужно указать:

- 1) Отделение (математическое или физическое)
- 2) Номер задания
- 3) Фамилию, имя, отчество
- 4) Класс, в котором Вы учитесь в своей школе
- 5) Ваш подробный домашний адрес, с указанием индекса почтового отделения, телефона (с кодом города), e-mail
- 6) Адрес Вашей школы и телефон/факс (с кодом города), e-mail
- 7) Фамилию, имя, отчество преподавателя в Вашей школе по математике и по физике

Работу отсылайте только простой бандеролью. В тетрадь вложите листок бумаги размером 6×10 см с написанным на нем Вашим адресом.

Выполненное задание и заявление о приеме высылайте по адресу: 630090 Новосибирск-90, ул. Ляпунова, 3, Заочная школа СУНЦ НГУ.

E-mail: distant@sesc.nsu.ru

Телефон: (383) 339-78-89

Адрес в интернете: <http://sesc.nsu.ru>

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

Математическое отделение

7 класс

1. Из пункта *A* в пункт *B* вышел товарный поезд. Спустя 3 ч вслед за ним вышел пассажирский поезд, скорость которого на 30 км/ч больше скорости товарного. Через 15 ч после своего выхода пассажирский поезд оказался впереди товарного на 300 км. Определите скорость товарного поезда.

2. На соревнованиях по подледному лову рыбы приняли участие Саша, Митя и Вова. Один из них поймал 12 окуней, другой – 14, а третий – 22 окуня (но у кого сколько – неизвестно). Саша отдал Мите столько окуней, сколько было у Мити, затем Митя отдал Вове столько окуней, сколько было у Вовы, а Вова отдал Саше столько окуней, сколько оставалось у Саши. В результате у всех ребят окуней стало поровну. Можно ли определить, сколько окуней поймал каждый из ребят?

3. После выстрела барона Мюнхгаузена в оленя (известно из уст самого барона) у оленя на голове выросло роскошное вишневое дерево со 120 прекрасными ветками. На самой верхней ветке выросла одна вишенка, а на каждой последу-

ющей ветке ниже выросло на одну вишенку больше, чем на предыдущей ветке выше. Сколько всего вишенок выросло на вишневом дереве?

4. За первый час езды мотоциклист проехал $\frac{1}{5}$ всего пути и еще 25 км, за второй час он проехал 30% всего пути и еще 10 км и за третий час – оставшиеся 40 км. Сколько километров мотоциклист проехал за второй час?

5. Когда Коля был молод, как Оля, годом меньше было тетушке Поле, чем Коле теперь вместе с Олей. Сколько лет было Коле, когда тетушка Поля была в возрасте Коли?

6. Разрежьте квадрат на 20 равных треугольников.

7. Заполните пустые клетки квадрата 5×5 буквами Ц, И, Ф, Р, А так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и по обоим диагоналям стояли разные буквы.

8 класс

1. Буратино хочет купить букварь с цветными картинками, но ему не хватает 18 сольдо. На этот же букварь Мальвине не хватает 7 сольдо, а Пьеро – 10 сольдо. Смогут ли Пьеро и Мальвина вместе купить один букварь на двоих?

2. Из пунктов *A* и *B* навстречу друг другу выехали одновременно два автобуса. Первый, имея вдвое большую скорость, проехал весь путь на 1 час быстрее второго. На сколько минут раньше произошла бы их встреча, если бы скорость второго увеличилась до скорости первого?

3. Пусть *P* – точка пересечения высот в треугольнике *ABC*. Известно, что $AB = CP$. Найдите величину угла *ACB*.

4. Найдите все пятизначные числа $2m57n$ (*m*, *n* – цифры), которые делятся на 15.

5. Коммерсант Ильин купил ручные часы и ремешок к ним. Через три дня он продал обе вещи за 2060 рублей, получив 3% прибыли. За сколько рублей были куплены часы и ремешок к ним первоначально, если на часах коммерсант заработал 20%, а на ремешке потерял 20%?

6. Можно ли построить 11 домиков и провести тропинки к ним так, чтобы от каждого домика выходило ровно 5 тропинок?

7. Пусть *x* и *y* – целые числа такие, что $3x + 7y$ делится на 19. Докажите, что $43x + 75y$ тоже делится на 19.

9 класс

1. Из молока жирности 5% делают творог жирности 15,5%, при этом остается сыворотка жирности 0,5%. Сколько творога получится из одной тонны молока?

2. Найдите сумму всех четырехзначных натуральных чисел, не делящихся на 11.

3. Внутри полосы, образованной двумя параллельными прямыми, расположены две окружности, касающиеся друг друга внешним образом. При этом первая из них касается одной прямой, а вторая – другой. Докажите, что точки касания окружностей с прямыми и друг с другом лежат на одной прямой.

4. В треугольнике *ABC* на стороне *BC* взята точка *N*. Медиана *CM* делит отрезок *AN* в отношении 2:3. Найдите отношение $BN:NC$.

5. Решите систему уравнений

$$1 - x_1x_2x_3 = 0, \quad 1 + x_2x_3x_4 = 0, \quad 1 - x_3x_4x_5 = 0,$$

$$1 + x_4x_5x_6 = 0, \quad \dots, \quad 1 - x_{49}x_{50}x_1 = 0, \quad 1 + x_{50}x_1x_2 = 0.$$

6. Камни лежат в трех кучках: в одной – 51 камень, в другой – 49, в третьей – 5 камней. Разрешается объединять любые две кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из четного количества камней, на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

10 класс

1. В каждом из двух сосудов находится по A литров воды. Из первого сосуда во второй переливают половину имеющейся в нем воды, затем из второго переливают треть имеющейся в нем воды в первый, потом из первого переливают четверть имеющейся в нем воды во второй и т.д. Сколько воды окажется в каждом из сосудов после 2006 переливаний?

2. Найдите все прямоугольники с целочисленными сторонами, площадь которых численно равна периметру.

3. Точка D – середина стороны AC треугольника ABC , отрезки DE и DF – биссектрисы углов ADB и CDB . Отрезки BD и EF пересекаются в точке M . Докажите, что EF вдвое длиннее MD .

4. Две окружности пересекаются в точках M и N . Через точку N проведена прямая, вторично пересекающая эти окружности в точках A и B . Касательные к окружностям, проведенные в точках A и B , пересекаются в точке D . Докажите, что сумма углов AMB и ADB равна 180° .

5. Решите уравнение $(x^2 - x - 1)^2 - x^3 = 5$.

6. На клетчатой доске 4×4 играют двое. Ходят по очереди, и каждый играющий своим ходом закрашивает одну клетку. Проигрывает тот, после хода которого образуется закрашенный квадрат 2×2 . Кто победит при правильной игре: тот, кто начинает игру, или его партнер?

11 класс

1. Ученик не заметил знак умножения между двумя трехзначными числами и написал одно шестизначное число, которое оказалось в семь раз больше произведения этих чисел. Найдите эти числа.

2. Мальчик и девочка, вместе войдя в парк, отправились по двум различным дорожкам к фонтану и достигли его одновременно. Девочка прошла весь путь длиной 160 метров с постоянной скоростью. Мальчик преодолел путь длиной 294 метра, причем в течение первой минуты он бежал по прямолинейному участку дорожки со скоростью, в 2,4 раза большей, чем скорость девочки, а оставшуюся часть пути до фонтана он прошел со скоростью 90 метров в минуту. Найдите скорость девочки.

3. Вычислите без калькулятора значение выражения

$$\sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} + \sin^4 \frac{7\pi}{16}.$$

4. Пусть A и B – фиксированные точки данной окружности, X – переменная точка той же окружности. На каждой ломаной, состоящей из двух отрезков AX и XB , отметим ее середину M . Если AX больше XB , то M – такая точка отрезка AX , что $AM = MX + XB$. Найдите множество точек M .

5. Сколько различных решений, удовлетворяющих условию $1 < x < 2007$, имеет уравнение $\{x[x]\} = 0,5$? (Здесь $\{x\}$ – дробная часть числа, $[x]$ – целая часть числа.)

6. Докажите, что в круге радиуса 1 нельзя выбрать более пяти точек, попарные расстояния между которыми больше 1.

Физическое отделение

9 класс

1. Из пункта A одновременно в разные стороны начали движение два пешехода. Через время t_0 один из пешеходов, желая что-то сообщить второму, повернулся, побежал и через время t_0 догнал его. Определите скорость v бегущего, если скорость пешеходов u .

2. Длина кольцевой дороги, имеющей форму правильной окружности, равна 100 км. Из одной точки дороги одновременно стартовали два автомобиля: один со скоростью

40 км/ч, другой со скоростью 60 км/ч. Через какое время расстояние между ними (по прямой) будет максимально? Чему оно равно?

3. Шарик, плавающий в сосуде, оказывается погруженным в жидкость на $3/4$ своего объема. После того как аккуратно долили в сосуд жидкость, плотность которой в 2 раза меньше плотности первой жидкости, шарик скрылся полностью. На какую часть объема шарик оказался погружен в тяжелую жидкость в этом случае?

4. Из проволоки, сопротивление которой R , сделали кольцо. Чему равно сопротивление, измеренное между точками A и B кольца, если угол между радиусами, приведенными в эти точки, равен 90° ?

10 класс

1. Решите задачу 2 для 9 класса.

2. От вертолета, летящего горизонтально с ускорением a , на высоте H оторвался прикрепленный груз. Скорость вертолета в этот момент равнялась v_0 . На каком расстоянии x от вертолета будет находиться груз в момент приземления? Сопротивлением воздуха пренебречь.

3. Груз свободно вращается на нити длиной L вокруг горизонтальной оси в поле тяжести. Найдите массу груза m , если в процессе движения максимальное натяжение нити в два раза больше минимального и равно T_0 .

4. В системе, изображенной на рисунке 1, тело касается правой стенки, когда пружина не деформирована. В начальный момент пружину сжали на x_0 и отпустили. При ударе тела о правую стенку теряется 50% его кинетической энергии. Найдите, на каком максимальном расстоянии от правой стенки окажется тело после удара. Трения нет.

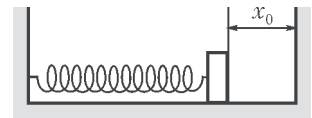


Рис. 1

5. Тело массой M начинает съезжать по гладкой плоскости, наклоненной под углом α к горизонту. После того как оно опустилось на h , в него попадает летящая горизонтально пуля массой m . Найдите скорость пули v , если после абсолютно неупругого удара тело с пулей поднялось на $h/4$.

11 класс

1. Решите задачу 2 для 10 класса.

2. Решите задачу 4 для 10 класса.

3. В вертикально стоящем цилиндрическом сосуде под массивным поршнем находится газ. После того как на поршень положили груз, объем газа под поршнем уменьшился в 1,5 раза. Каков будет объем газа после того как на поршень положат еще один такой же груз? Начальный объем газа V_0 , температура газа остается неизменной.

4. Найдите напряженность электрического поля в центре равностороннего треугольника со стороной a , в вершинах которого находятся точечные заряды q , q и $3q$.

5. На середине дна прямоугольной ямки шириной $2h$ закреплено небольшое заряженное тело (рис.2). Силы трения удерживают на стенках ямки на одинаковой высоте h два других заряженных тела. При каком минимальном значении коэффициента трения между телами и стенками это возможно? Заряды всех тел одинаковы. Силой тяжести пренебречь.

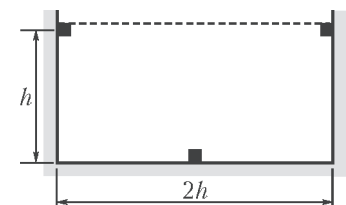


Рис. 2

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №2)

1. Смогут переправиться. Можно поступить так: сначала переправляются два человека и стиральная машина, один человек остается на другом берегу реки, а второй (вместе со стиральной машиной) возвращается за третьим. Затем второй и третий переправляются вместе с машиной.
2. Из условия следует, что доктор признал симулянтами всех граждан, кроме одного (который умер вследствие удара). Поэтому мы можем записать следующее равенство-ребус:

$$abccc + 1 = aabbb.$$

При сложении из разряда единиц в разряд десятков была перенесена единица (иначе разряд десятков не изменился бы). Заметим, что разряд сотен также изменился, т.е. туда из разряда десятков была перенесена единица. Но в разряде десятков производилось сложение c и 1 , т.е. $c + 1$ оказалось не меньше 10 , откуда следует, что $c = 9$, $c + 1 = 10$, поэтому $b = 0$. Ребус приобрел вид $a0999 + 1 = aa000$. Так как $0999 + 1 = 1000$, то $a = 1$ (ибо это четвертая справа цифра суммы). Итак, $10999 + 1 = 11000$, т.е. доктор Баутце выловил 10999 симулянтов.

3. Это можно сделать не всегда. Если, например, 13 человек желают посещать первый кружок, а остальные – второй и третий кружки одновременно, то распределить школьников поровну по всем кружкам не удастся.

4. После разрезания восьмиугольника так, как показано на рисунках 1 или 2, восьмиугольник распадается на пары разноцветных, но равных геометрических фигур. Значит, площадь

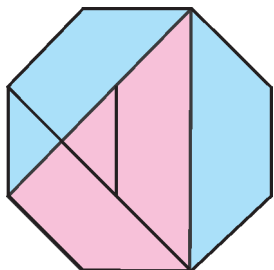


Рис. 1

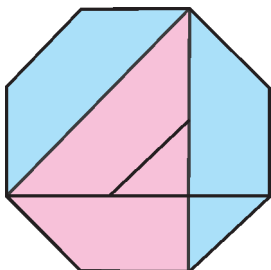


Рис. 2

красного четырехугольника равна сумме площадей двух синих трапеций.

5. Такой квадрат существует. Рассмотрим магический квадрат, приведенный в условии задачи. Каждое число таблицы поделим на произведение всех чисел таблицы. Тогда в клетках таблицы получим числа

$$\frac{8}{8 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 2} = \frac{1}{1 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 2} = \frac{1}{45360},$$

$$\frac{1}{8 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 2} = \frac{1}{362880},$$

$$\frac{6}{8 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 2} = \frac{1}{8 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 2} = \frac{1}{60480}$$

и так далее, т.е. числа вида $\frac{1}{n}$. Заметим, что суммы этих дробей отличаются от сумм соответствующих им первоначальных чисел ровно в $8 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 2 = 362880$ раз, поэтому если первоначально суммы по столбцам, строкам и диагоналям были равны между собой, то новые суммы тоже будут равны между собой. Таким образом, мы снова получаем магический квадрат.

Примечание. Можно делить все числа исходного квадрата не только на их произведение, но и на любое общее кратное, в частности наименьшее.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» № 6 за 2006 г.)

11. При $n = 3$. Рассмотрим в случае $n = 2$ сумму чисел \overline{ABC} и \overline{DEF} . Чтобы последняя цифра суммы стала меньше предпоследней, при сложении цифр C и F должен произойти перенос разряда, а при сложении цифр B и E – нет. Но тогда вторая цифра суммы будет больше первой. Значит, $n \neq 2$. При $n = 3$ указанная в условии ситуация возможна: $125 + 237 + 248 = 610$.

12. а) Несложно проверить, что исходному уравнению удовлетворяют все числа вида $x = 10k + \frac{1}{2}$, где k – любое натуральное число.

б) Предположим, что существует некоторое положительное рациональное число x такое, что $\{x\} + \{x^2\} = 0,5$. Пусть $t = [x]$, так что $t \leq x < t + 1$, $t^2 \leq x^2 < t^2 + 2t + 1$, $\{x^2\} = x^2 - t^2 - p$, где p – некоторое целое число из набора $\{0, 1, \dots, 2t\}$. В этих обозначениях исходное уравнение запишется так: $x - t + x^2 - t^2 - p = 0,5$, или $x^2 + x - t^2 - t - p - 0,5 = 0$. По предположению, полученное квадратное уравнение относительно x должно иметь положительный рациональный корень. Это возможно лишь в том случае, если его дискриминант $D = 4t^2 + 4t + 4p + 3$ – квадрат целого числа. Поскольку D – число нечетное, то $D = (2m + 1)^2$. Тогда $4t^2 + 4t + 4p + 3 = (2m + 1)^2$, или, после преобразований, $t^2 + t - m^2 - m = -\frac{1}{2} - p$. Последнее равенство невозможно, поскольку в левой его части стоит целое число, а в правой – не целое. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

13. Не могут. Для доказательства воспользуемся следующим вспомогательным фактом: если у двух треугольников ABC и $A'B'C'$ равны две стороны: $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ и угол HE между ними: $\angle A = \angle A'$, то либо эти треугольники равны, либо сумма двух других углов этих треугольников, лежащих HE между равными сторонами, равна 180° :

$\angle C + \angle C' = 180^\circ$ (с доказательством этого утверждения можно познакомиться, например, в статье А. Егорова «Четвертый признак равенства треугольников» – см. «Квант» №4 за 2004 г.). Предположим, что описанная в условии задачи ситуация возможна. Тогда у треугольников AQB и AQC (рис. 3)

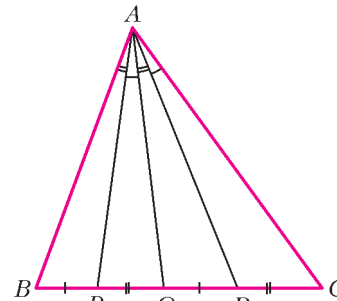


Рис. 3

имеются две равные стороны $QB = QC$, AQ – общая, и равные углы $\angle BAQ = \angle CAQ$. Из вспомогательного факта следует, что либо $\angle ABQ + \angle ACQ = 180^\circ$ – в данном случае это невозможно, либо $\triangle ABQ = \triangle ACQ$. В последнем случае $\angle BQA = \angle CQA = 90^\circ$. Рассмотрим этот вариант.

Осуществим параллельный перенос треугольника BAQ так, чтобы точка B совместилась с точкой Q . При этом точка Q совместится с точкой C , точка P – с точкой R , точка A займет положение

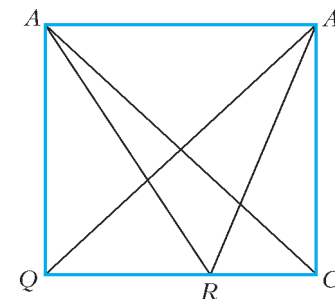


Рис. 4

вершины A_1 прямоугольника AA_1CQ (рис.4). Отрезок RC виден из вершин A и A_1 под одним и тем же углом, значит, точки A, A_1, C, R лежат на одной окружности. По свойству четырехугольника, вписанного в окружность,

$\angle AA_1C + \angle ARC = \angle RAA_1 + \angle RCA_1$, но это невозможно, так как углы A_1 и C прямоугольника прямые, а углы RAA_1 и ARC не равны друг другу.

14. Случай $n = 1$ тривиальный, в дальнейшем полагаем $n > 2$. Заметим, что любые n последовательных целых чисел дают полную систему остатков $0, 1, 2, \dots, n - 1$, получающихся при делении этих чисел на n . Заменяя каждое из данных последовательных чисел его остатком, приходим к равносильному условию утверждению: число $1^k + 2^k + \dots + (n - 1)^k$ делится на n . Для доказательства последнего утверждения разобьем слагаемые на пары (это возможно, поскольку число $n - 1$ четно) и заметим, что

$$1^k + (n - 1)^k \text{ делится на } n,$$

$$2^k + (n - 2)^k \text{ делится на } n,$$

.....

$$\left(\frac{n - 1}{2}\right)^k + \left(\frac{n + 1}{2}\right)^k \text{ делится на } n.$$

Действительно, привлекая известную формулу

$$a^k + b^k = (a + b)(a^{k-1} - a^{k-2}b + \dots - ab^{k-2} + b^{k-1}),$$

справедливую для всех нечетных показателей степеней k , при разложении каждой суммы на множители один из множителей получаем равным n .

15. Это можно сделать при любом n , кроме $n = 2$.

Невозможность случая $n = 2$ проверяется непосредственно. Для $n \neq 2$ опишем способ расстановки чисел в таблице. Рассмотрим три случая (которые, очевидно, охватывают все возможности).

1) Пусть n – нечетное число, т.е. $n = 2m - 1$ (m – натуральное). Здесь мы имеем дело с числами от 1 до $(2m - 1)^2 = 4m^2 - 4m + 1$, причем нечетных чисел имеется ровно $2m^2 - 2m + 1$. Расставим нечетные числа в таблице в виде

			Н			
		Н	Н	Н		
	Н	Н	Н	Н	Н	
Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н
		Н	Н	Н	Н	
			Н			

Рис. 5

«повернутого квадрата», как показано на рисунке 5 для случая $n = 7$ (клетки с нечетными числами обозначим буквами «Н»). Во все остальные клетки запишем четные числа. Несложно убедиться, что при такой расстановке количество нечетных чисел равно в точности $2m^2 - 2m + 1$. Поскольку во всех вертикалях и горизонталях имеется нечетное количество нечетных чисел, сумма чисел в каждой горизонтали и вертикали будет нечетной. На каждой из двух диагоналей также расположено нечетное количество нечетных чисел (это следует из симметричности расположения нечетных чисел в таблице относительно центральной клетки). Поэтому и для диагоналей условие задачи тоже выполняется.

2) Пусть n – четное число, не делящееся на 4, т.е. $n = 4m + 2$ (m – натуральное). Здесь четных и нечетных чисел поровну. Для необходимого размещения чисел предварительно разобьем таблицу на 4 равных квадрата $(2m + 1) \times (2m + 1)$. Затем возьмем два центрально-симметричных из них (скажем, левый верхний и правый нижний) и заполним их нечетными числами (а остальные клетки заполним четными числами). Очевидно, ровно половина клеток будет содержать нечетные числа, что и требуется. Пример заполнения для $n = 6$ показан на рисунке 6. В каждой горизонтали и каждой верти-

Н	Н	Н			
Н	Н	Н			
Н	Н	Н			
			Н	Н	Н
			Н	Н	Н
			Н	Н	Н

Рис. 6

	Н	Н	Н		
Н	Н	Н			
Н	Н	Н			
			Н	Н	Н
			Н	Н	Н
Н				Н	Н

Рис. 7

кали имеется по $2m + 1$ нечетных чисел, поэтому сумма чисел в каждой горизонтали и вертикали будет нечетной. Правда, в каждой диагонали содержится, наоборот, четное количество нечетных чисел (в одной $4m + 2$, в другой – ни одной), поэтому такая расстановка не может нас удовлетворить.

Давайте ее чуть «пошевелим», т.е. нечетное число из левой верхней клетки перенесем в $(2m + 1)$ -ю клетку той же строки, зато нечетное число из $(2m + 1)$ -й клетки самой нижней строки перенесем в 1-ю клетку той же строки (пример для $n = 6$ приведен на рисунке 7). Ясно, что от такой перестановки количества нечетных чисел в горизонталях и вертикалях не изменятся, а в диагоналях – изменятся: в одной это количество уменьшится на 1 и станет равным $4m + 1$, а в другой увеличится на 1 и станет равным 1. Поэтому и в каждой диагонали станет нечетное количество нечетных чисел, что и требуется.

3) Пусть n – четное число, делящееся на 4, т.е. $n = 4m$ (m – натуральное). См. решение задачи 21 в статье «Заключительный этап конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8» в «Кванте» № 2.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

- Магнитный поток, пронизывающий кольцо, увеличивается по мере продвижения кольца к середине магнита, затем уменьшается. Соответственно, индукционный ток, уменьшаясь, достигает нуля при прохождении кольцом середины магнита, потом растет, поменяв направление.
- Да, будет. При этом переменный ток проходит через электродлит, не вызывая выделения вещества на электродах.
- В случае короткого замыкания при любом заряде на пластинах конденсатора разность потенциалов между ними равна нулю, значит, равно нулю и емкостное сопротивление, что равносильно бесконечно большой емкости.
- Постоянный ток.
- Проводник будет колебаться с частотой переменного тока.
- Для уменьшения электрического сопротивления, так как серебро – хороший проводник, а высокочастотные токи идут по поверхности проводников.
- При малых частотах напряжение на катушке близко к нулю, а напряжение на конденсаторе почти равно ЭДС; при больших частотах – наоборот.
- В случае а) накал первой лампы увеличится, второй уменьшится; в случае б) – наоборот.
- Напряжение $430\sqrt{2}$ кВ ≈ 610 кВ.
- Напряжение между точками A и B изменяется в пределах от 0 до $-2U_0$.
- В медном листе возникнут индукционные токи Фуко, магнитное поле которых будет практически полностью экранировать поле катушки B . Показания вольтметра, на который замкнута катушка A , будут близки к нулю.
- У трансформаторной обмотки велико только индуктивное сопротивление, которое после разматывания становится ничтожно малым.

13. Мала сила тока и мало активное сопротивление вторичной обмотки.
 14. Замкнутый виток трансформатора – это фактически еще одна вторичная обмотка, работающая в режиме короткого замыкания. Поскольку ее сопротивление очень мало, в ней индуцируется очень большой ток, который может расплавить этот виток или разрушить изоляцию.
 15. Трансформаторная сталь вибрирует при перемагничивании в местах неплотного соединения. Частота звука в два раза выше частоты тока, т.е. составляет 100 Гц.
 16. а) Когда плоскость рамки параллельна полю; б) когда плоскость рамки перпендикулярна полю.

МИКРООПЫТ

Второй, поскольку при использовании дросселя практически нет потерь на тепло.

РАБОТА ГАЗА ПРИ ПЕРЕХОДЕ ИЗ НАЧАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ В КОНЕЧНОЕ

1. $A_{23} = 2A$. 2. 1) $T_1 = \frac{8}{9} \frac{Q}{\sqrt{R}}$; 2) $A = \frac{Q}{6}$.
 3. $Q = A + \frac{3}{2} \nu R \Delta T$.

ФОРМУЛЫ ГЕОМЕТРИИ ПОМОГАЮТ АЛГЕБРЕ

1. (1;4). 2. (3;5). 3. (4;0). 4. (3;6).
 5. (4;6). 6. $-\frac{4}{5}$. 7. $\frac{3}{5}$. 8. $\left(0; \frac{3}{4}\right)$.

XV МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ МАРАФОН»

Письменный индивидуальный тур

Математика

1. Вместо * нужно поставить 4. Заменяем звездочку неизвестной нам пока цифрой a . Поскольку $\underbrace{99\dots9}_{100} = 10^{100} - 1$, наше число равно

$$(10^{100} - 1)10^{102} + a \cdot 10^{101} + 9 = 10^{202} - (10 - a)10^{101} + 9.$$

Нетрудно видеть, что при $a = 4$ полученное выражение равно $(10^{101} - 3)^2$. А так как ближайшие к этому числу квадраты $(10^{n+1} - 7)^2$ и $(10^n + 3)^2$, оканчивающиеся цифрой 9, заведомо

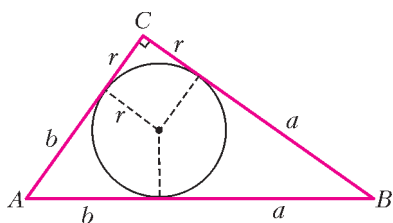


Рис. 8

отличны от данного числа, то $a = 4$ – единственно возможная цифра.
 2. ab . Пусть r – радиус окружности, вписанной в данный прямоугольный треугольник (рис.8). Тогда $AC = b + r$, $BC = a + r$ и по те-

ореме Пифагора

$$(a+r)^2 + (b+r)^2 = (a+b)^2, \text{ откуда } r(a+b+r) = ab.$$

Однако произведение $r(a+b+r)$ равно площади треугольника ABC (по формуле $S = rp$).

3. 4. Заметим, что последняя цифра в десятичной записи числа $|11^k - 5^l|$ – это 4 или 6, значит, число $|11^k - 5^l|$ не меньше 4.
 4. При $k = 2$ и $l = 3$ получаем $|11^2 - 5^3| = 4$.
 4. $\frac{mns}{4}$. Пусть в углах таблицы стоят числа a, b, c, d

(рис.9). Просуммируем числа таблицы по строчкам. Сумма чисел первой строки равна $\frac{(a+b)n}{2}$, а последней $\frac{(c+d)n}{2}$. При этом сами суммы чисел по строкам образуют арифметическую прогрессию из m членов, так что их сумма (т.е. сумма всех чисел таблицы) равна

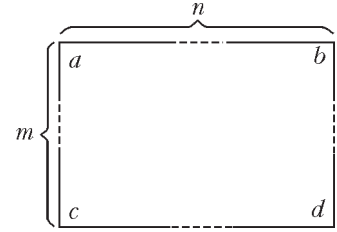


Рис. 9

$$\frac{m \left(\frac{a+b}{2}n + \frac{c+d}{2}n \right)}{2} = \frac{mn(a+b+c+d)}{4}.$$

5. 2α . Продлим отрезок KE до точки L так, чтобы $KL = KE$ (рис. 10). Четырехугольник $ECLB$ – параллелограмм,

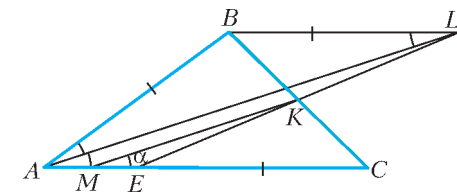


Рис. 10

поэтому $BL = EC = AB$. При этом MK – средняя линия треугольника ALE , так что $KM \parallel AL$. Следовательно, $\angle LAC = \angle KME = \angle ALB = \angle BAL = \alpha$, и $\angle BAC = 2\alpha$.

6. Число a больше. Пусть $f(x) = x^3 - x - 3$. Заметим сначала, что $a > \frac{5}{3}$ (это следует из того, что $f\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{1}{27} < 0$).

Число $a^5 = a^2 \cdot a^3 = a^2(a+3) = a^3 + 3a^2 = 3a^2 + a + 3$. Поскольку $a > \frac{5}{3}$, имеем $a^5 > 3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \frac{5}{3} + 3 = 13$, т.е. $a > \sqrt[5]{13}$.

7. Можно. *Первое решение.* Пусть N людей попарно незнакомы. Занумеруем их числами $1, 2, \dots, N$. Человека с номером k знакомим со всеми, номера которых l удовлетворяют неравенству $|k - l| \leq \frac{N}{2}$. Тогда люди с номерами k и $N - k$ имеют по одинаковому числу знакомых, причем никакие 3 не имеют одинакового количества знакомых (убедитесь в этом).

Второе решение. Воспользуемся методом математической индукции. Начало индукции очевидно. Пусть N человек удовлетворяют условию. Если среди них все с кем-нибудь знакомы, то присоединяем $(N + 1)$ -го человека и не знакомим его ни с кем. Если же среди N людей есть ни с кем не знакомый, то с $(N + 1)$ -ым человеком знакомим всех N людей. В обоих случаях получаем группу из $N + 1$ человека, удовлетворяющую условию.

Замечание. При первом способе решения каждый оказывается знаком с довольно большим количеством людей. При втором способе допускаются люди, ни с кем не знакомые. Впрочем, в условии задачи нет требования, чтобы каждый был с кем-нибудь знаком.

Физика

1. $v = \sqrt{3gl}$. 2. $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 m a^2 l}}}$.

3. *Указание.* Луна обращается вокруг Земли, а система Земля – Луна обращается вокруг Солнца.

4. Несколько дней. 5. $\beta \approx 4,1 \cdot 10^{-4}$ град $^{-1}$.

$$6. I(\theta) = 4I_0(\theta) \cos^2\left(\frac{\omega d \sin \theta}{c}\right);$$

$$I_1(\theta) = 4I_0(\theta) \cos^2\left(\frac{\omega}{c}\left(d \sin \theta + \frac{l(n-1)}{2}\right)\right).$$

7. $\omega = \omega_0 \cdot \exp\left(-\frac{GM}{c^2 R}\right)$; наблюдатель должен двигаться навстречу звезде со скоростью $v \approx \frac{GM}{cR} \approx 1,5$ км/с.

Устный командный тур

Математика

1. 225 м; 15 м/с.

2. Пусть $ABCDEF$ – правильный шестиугольник со стороной 1 (рис. 11). Продлим стороны AB и CD до пересечения в точке M , проведем прямую FM . Отрезок FM равен $\sqrt{7}$.

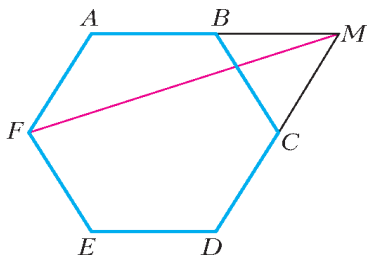


Рис. 11

3. Нельзя. При перестановке цифр любого числа не меняется остаток от деления этого числа на 9. Остаток от деления на 9 числа 2^{35} равен 5. Однако кубы целых чисел при делении на 9 такой остаток

не дают (ибо $(3n \pm 1)^3 = 27n^3 \pm 9n^2 + 9n \pm 1$).

4. Существует. Возьмем остроугольный треугольник ABD и проведем его высоты из вершин B и D (рис. 12). Пусть C – точка их пересечения. Четырехугольник $ABCD$ удовлетворяет условию.

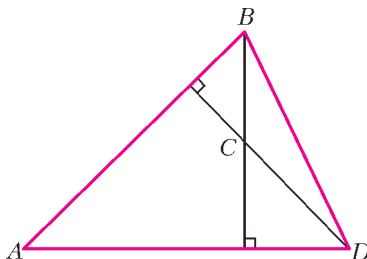


Рис. 12

5. $c < 0$. Указание. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда $a + 2b + 4c = 4f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, т.е. $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$. Но это значит, что $f(x) < 0$ при всех x . Следовательно, $c = f(0) < 0$.

6. $\frac{OM}{ON} = \frac{1}{2}$. Площади треугольников AMN и DMN (рис. 13)

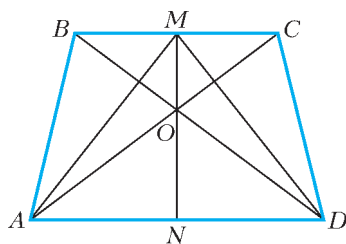


Рис. 13

равны. Поэтому равны и площади треугольников BAM и CDM . Но тогда равны расстояния от точек A и D до прямой BC , т.е. $AD \parallel BC$. Значит, $ABCD$ – трапеция. Из подобия треугольников BOC и AOD сразу следует, что $\frac{OM}{ON} = \frac{1}{2}$.

Замечание. Точки M , O , N в трапеции всегда лежат на одной прямой. Но в нашем случае доказывать это даже не нужно, так как OM и ON – сходственные медианы в подобных треугольниках.

7. Выигрывает второй игрок. Будем считать, что лепестки ромашки расположены в вершинах правильного m -угольника. Если m – четно, то второй игрок отрывает лепестки симметричные оторванным первым игроком относительно центра m -угольника. При нечетном m если вначале первый игрок отрывает один лепесток, второй отрывает два лепестка, расположенные в концах стороны, противоположной этому лепестку. Если первый отрывает 2 лепестка, второй отрывает один ле-

песток в вершине, противоположной стороне, выбранной первым. Далее второй отрывает лепестки, симметричные оторванным первым игроком относительно оси симметрии многоугольника.

8. Есть. Пусть $k_1, k_2, \dots, k_{2007}$ – количества знакомых с 1, 2, ..., ..., 2007 учеником. Тогда $k_1 + k_2 + \dots + k_{2007} = 2K$, где K – общее количество знакомств. Если все числа k_i нечетны, то и их сумма нечетна.

9. $n = 3k$, $k \geq 2$; $n = 3k + 2$, $k \in \mathbf{N}$. Поскольку сумма масс всех гирь равна $\frac{n(n+1)}{2}$, то либо n , либо $n + 1$ делится на 3,

т.е. либо $n = 3k$, либо $n = 3k + 2$. Заметим, что 6 гирь с массами $a, a + 1, \dots, a + 5$, очевидно, можно разложить на 3 равные по массе кучки: $(a; a + 5)$, $(a + 1; a + 4)$, $(a + 2; a + 3)$.

Гири с массами 1, 2, 3, ..., 9 тоже можно разложить на 3 равные по массе кучки, например: $(9, 1, 5)$, $(8, 3, 4)$, $(6, 7, 2)$. Иными словами, можно разложить на равные по массе кучки при $n = 6k$ и при $n = 6k + 9$, т.е. при $n = 3k$, где $k \geq 2$.

Далее, 5 гирек тоже можно разложить на 3 кучки: (5) , $(2, 3)$, $(1; 4)$, 8 гирек тоже можно: $(8; 4)$, $(7; 5)$, $(1, 2, 3, 6)$. Следовательно, можно разложить на 3 кучки равной массы и любые $3k + 2$ гирек при $k \in \mathbf{N}$.

10. $\sqrt{2}$. Справедливы неравенства $x \geq s$, $\frac{1}{y} \geq s$, $y + \frac{1}{x} \geq s$. Следовательно, $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{s}$, $y \leq \frac{1}{s}$, но тогда $y + \frac{1}{x} \leq \frac{2}{s}$, т.е. $\frac{2}{s} \geq s$, или $s \leq \sqrt{2}$.

Значение $s = \sqrt{2}$ достигается при $x = \sqrt{2}$ и $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

11. Нет. Число $p - 1$ при делении на 3 дает остаток 2 и, следовательно, не является квадратом. Число $p + 1$ при делении на 4 дает остаток 3 и тоже квадратом не является.

12. Можно. Проекция окружности на сторону квадрата – отрезок, длина которого равна диаметру. Сумма длин диаметров равна $\frac{10}{\pi} > 3$. Однако если внутри отрезка длины 1 расположить несколько отрезков с суммой длин, большей 3, найдется точка, принадлежащая по крайней мере четырем отрезкам. Прямая, перпендикулярная стороне квадрата, пересекает не меньше четырех окружностей.

Физика

1. Нет, не нагревается. 2. $v_0 \approx \sqrt{2gR_3} \approx 11,2$ км/с.

3. $s \approx 65$ м. 4. $x = \sqrt{\frac{e}{16\pi\epsilon_0 E}}$.

5. Из-за большей атомной массы криптона по сравнению с воздухом тепловой поток через стеклопакет окажется примерно в 1,7 раза меньше.

6. $v_1 = \frac{mv_0}{m + \rho_0 LS}$; $t = \frac{L}{v_0} + \frac{\rho_0 L^2 S}{2m}$.

7. $t = \frac{\mu_1 t_2 + \mu_2 (t_1 + t_2)}{\mu_1 + 2\mu_2} = 32$ °С.

8. Излучение энергии заряженной частицей, движущейся по круговой траектории, у электрона примерно в 200 раз больше, чем у протона.

9. $U_{34} = 2U_0$. 10. Одинаково.

История научных идей и открытий

Математика

1. Это Леонард Эйлер. Школьникам могут быть известны прямая Эйлера, окружность Эйлера, формула Эйлера $d^2 = R^2 - 2Rr$, выражающая расстояние d между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника через ра-

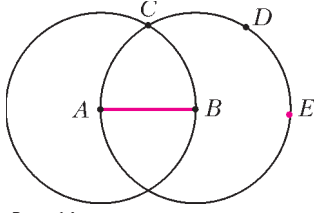


Рис. 14

диусы R и r этих окружностей, теорема Эйлера о многогранниках, задача о кенигсбергских мостах, теоремы Эйлера из теории чисел, функция Эйлера $\varphi(m)$ и т.д.

2. Проводим окружности с центрами в точках A и B и радиусом AB . Пусть C – одна

из точек пересечения этих окружностей (рис.14). Далее тем же раствором циркуля на окружности с центром B откладываем дуги CD и DE . Тогда E – искомая точка.

3. 16 икв 48. Пусть x – количество обезьян. Тогда

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x.$$

4. Да. Если $x_1^2 - 2y_1^2 = a$, а $x_2^2 - 2y_2^2 = b$, то

$$(x_1 - y_1\sqrt{2})(x_1 + y_1\sqrt{2}) = a, \quad (x_2 - y_2\sqrt{2})(x_2 + y_2\sqrt{2}) = b.$$

Но тогда

$$(x_1 - y_1\sqrt{2})(x_2 - y_2\sqrt{2})(x_1 + y_1\sqrt{2})(x_2 + y_2\sqrt{2}) = ab,$$

и

$$(x_1x_2 + 2y_1y_2)^2 - 2(x_1y_2 + x_2y_1)^2 = ab.$$

5. За 35 дней. За 140 дней один человек выпивает 10 бочонков кваса, а вместе с женой – 14 бочонков. Следовательно, жена за 140 дней выпивает 4 бочонка.

Физика

1. а) Джон Джозеф Томсон и Джордж Паджет Томсон. б) Электрон. в) Кавендишская лаборатория; Э.Резерфорд. г) Дж.Дж.Томсон изучил особенности электрических разрядов в газах, предложил одну из первых моделей атома, сформулировал принцип действия масс-спектрометра. Дж.П.Томсон осуществил исследования по теории рассеяния, электрическим разрядам в газах, аэродинамике.
2. а) Планет Солнечной системы стало восемь, Плутон перешел в группу карликовых планет. б) Солнечная система стала более гармоничной. в) Ловелл, Томбо, Клайд, Койпер и другие.
3. а) Прохождение Венеры по диску Солнца. б) Наличие атмосферы на Венере. в) М.В.Ломоносов; Дж.Кук.
4. а) Джеймс Клерк Максвелл. б) Теория электромагнитного поля. в) Опыты Г.Герца по излучению и приему электромагнитных волн; опыт П.Н.Лебедева по измерению давления света. г) Статистическая физика – «демон Максвелла», распределение Максвелла; электродинамика – уравнения Максвелла.
5. а) Огюстен Френель. б) При дифракции света на круглом отверстии, при определенном расстоянии от отверстия до экрана, в центре экрана образуется темное тепло. в) С.Пуассон («пятно Пуассона»). г) Д.Араго.

ВСЕРОССИЙСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКЕ

1. $\operatorname{ctg} \alpha = \left(1 - \frac{\gamma^2}{2}\right) \operatorname{ctg} 57^\circ$, где $\gamma = \frac{2\pi}{31}$.
2. $\varepsilon = \frac{2g(2 - 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi) \sin \varphi}{R(\sin^2 \varphi + 1)^2}$, где φ – угол между вертикалью и радиусом-вектором, проведенным из центра цилиндра к центру масс.

3. Да, возможен. 4. $a = \operatorname{const} = -\frac{2g\mu v_0}{\omega_0 R}$.
5. $\Delta S = Q\left(\frac{1}{(1-\eta)T_0} - \frac{1}{T_n}\right)$. 6. $W = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{qAR}{2rQ}$.
7. $B_1 = \mu_0 n I \frac{r^2}{R^2}$, $B_2 = \mu_0 n I \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$. 8. $P = \frac{U_0^2}{4R_1}$. 9. $I = 0$.

ОКРУЖНОСТИ НА РЕШЕТКАХ

(см. «Квант» №6 за 2006 г.)

1. См. рис.15.
2. а) Окружность радиуса 5 с центром в центре единичной клетки, как нетрудно проверить непосредственно, содержит ровно 65 единичных клеток. Плитки со стороной 10 мож-

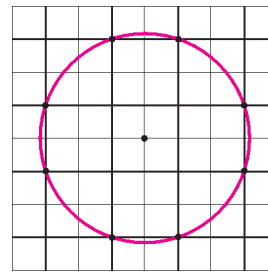


Рис. 15

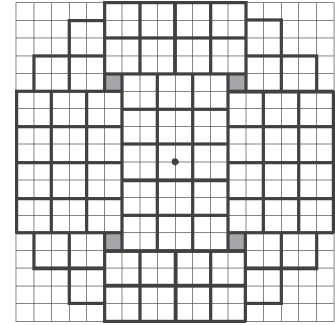


Рис. 16

но уложить аналогичным образом, тогда все они будут расположены внутри окружности радиуса 50. Указанная окружность, следовательно, не является окружностью наименьшего радиуса, содержащей 64 плитки. Внутри круга радиуса 50 можно уложить 67 плиток со стороной 10 (рис.16).

б) 8; см. рисунок 17, на котором $AB = 10$ – диаметр окружности и $CD = 20\sqrt{6\sqrt{3} - 8} \approx 30,9$.

3. Указание. Узел $(a; b)$ невидим тогда и только тогда, когда числа a и b взаимно просты. Кроме того, квадрат расстояния между любыми узлами решетки – целое число.

4. Указание. Сфера $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{3})^2 + (z - 1/3)^2 = R^2$

не может содержать двух узлов ни при каком фиксированном $R > 0$. Это следует из того, что если $(x_0; y_0; z_0)$ и $(x_1; y_1; z_1)$ два различных узла на сфере, то из равенства

$$\begin{aligned} (x_0 - \sqrt{2})^2 + (y_0 - \sqrt{3})^2 + (z_0 - 1/3)^2 &= \\ &= (x_1 - \sqrt{2})^2 + (y_1 - \sqrt{3})^2 + (z_1 - 1/3)^2 \end{aligned}$$

после небольших упрощений мы получили бы, что $\sqrt{3/2}$ – рациональное число.

5. Заметим, что все n узлов данной окружности Шинцеля лежат на сфере, так как сама окружность на ней расположена (при $z = 0$ из уравнения сферы получаем уравнение окружности Шинцеля). Если $z \neq 0$ и $(x; y; z)$ – узел решетки на сфере, то из равенства $(x - x_0)^2 + y^2 - R^2 = z(2\sqrt{2} - z)$ следует, что $z = 2\sqrt{2}$, так как число $(x - x_0)^2 + y^2 - R^2$, как легко заметить, рационально. А это противоречит тому, что z – целое число.

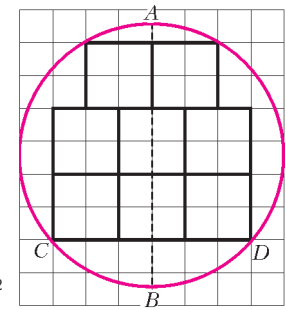


Рис. 17

6. а) Во-первых, заметим, что наша решетка состоит из точек

с координатами $\left(\frac{t}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3}s\right)$, $t, s \in \mathbf{Z}$. Поэтому нужно показать, что при любом n найдется окружность, содержащая n точек указанного вида. В основе доказательства лежит следующая **лемма**: уравнение $x^2 + 3y^2 = 7^k$ имеет $2(k+1)$ решений $(x; y)$ и таких, что у $2(k-1)$ из них оба числа делятся на 7 и у 4-х оба числа не делятся на 7.

Используя эту лемму (которая доказывается по аналогии с тем, как это делается при анализе аналогичной задачи на клетчатой бумаге), нетрудно показать, что окружность

$$\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{7^{\frac{3n-1}{2}}}{6}$$

содержит ровно n точек нужного вида.

б) Шестиугольная решетка состоит из точек с координатами

$$\left(\frac{t}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3}s\right), \quad t, s \in \mathbf{Z} \quad \text{и} \quad t \text{ не делится на } 3.$$

Здесь также используется отмеченная в пункте а) лемма.

При четном n нужная окружность имеет уравнение

$$x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{7^{\frac{n-2}{4}}}{2}.$$

При $n = 4k + 1$ подходит окружность

$$\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 + y^2 = \frac{7^{6k+1}}{10},$$

а при $n = 4k + 3$ – окружность

$$\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 + y^2 = \frac{7^{6k+3}}{10}.$$

7. Если на некоторой окружности существуют три рациональные точки, то это означает, что обе координаты центра такой окружности есть рациональные числа. Это следует, например, из того, что центр окружности, описанной около треугольника (с вершинами в трех рациональных точках), лежит на пересечении двух серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, коэффициентами уравнений которых являются рациональные числа.

8. а) Окружность $x^2 + y^2 = 3$ не содержит ни одной рациональной точки. Действительно, если $(x; y)$ – рациональная точка на этой окружности, то ее координаты можно записать в виде дробей с наименьшим общим знаменателем $x = a/d$ и $y = b/d$ и тогда получим, что $a^2 + b^2 = 3d^2$. Отсюда вытекает, что если бы числа a и b делились на 3, то правая часть делилась бы на 9, отсюда и m делилось бы на три, и наши дроби можно было бы сократить на 3, вопреки нашему предположению, что m – их наименьший общий знаменатель. Следовательно, по крайней мере одно из чисел a и b не делится на 3. Но, как известно, квадрат целого числа, не делящегося на 3, дает при делении на три остаток 1. Если и другое из чисел a и b не делится на 3, то сумма $a^2 + b^2$ при делении на 3 дает в остатке 2, что невозможно, так как эта сумма равна $3d^2$ и поэтому делится на 3. Если же другое из чисел a и b делится на 3, то сумма $a^2 + b^2$ при делении на 3 дала бы остаток 1, что тоже невозможно.

б) Легко проверить, что окружность $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 4$ содержит только одну рациональную точку с координатами $(0; 0)$.

в) Нетрудно убедиться, что окружность $x^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 3$ содержит ровно две точки с рациональными координатами: $(1; 0)$, $(-1; 0)$.

г) Это следует из того, что если a и b – рациональные числа

такие, что $a^2 + b^2 = R^2$, то, как легко проверить, при всяком рациональном числе r точка $(x; y)$ с координатами

$$x = \frac{2ar + b(1-r^2)}{1+r^2} \quad \text{и} \quad y = \frac{a(1-r^2) - 2br}{1+r^2}$$

будет рациональной и будет удовлетворять равенству

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

9. Без ограничения общности можно считать, что центр окружности находится в начале координат. Если узел решетки $(x; y)$ лежит на окружности, но не на координатных осях и биссектрисах координатных углов, то вместе с таким узлом на окружности будут находиться еще 7 узлов: $(y; x)$, $(x; -y)$, $(-x; y)$, $(-y; x)$, $(y; -x)$, $(-y; -x)$, $(-x; -y)$.

Но при делении на 8 число 1988 дает в остатке 4, поэтому кроме узлов указанных типов должны быть 4 узла на осях или биссектрисах. В первом случае $0^2 + x^2 = R^2$ для некоторого целого x , поэтому R – целое число. Во втором случае для некоторого целого x имеем $x^2 + x^2 = R^2$ и, тем самым, $R = \sqrt{2}x$. Следовательно, $R\sqrt{2}$ – целое число.

10. Указание. Рассмотрим окружность

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{5^{n-1}}{9}, \quad \text{т.е.} \quad (3x-1)^2 + (3y)^2 = 5^{n-1}.$$

По теореме о представлении натурального числа в виде суммы двух квадратов заключаем, что уравнение $a^2 + b^2 = 5^{n-1}$ имеет $4n$ решений. Если же число b делится на 3 и число a при делении на 3 дает в остатке 1, то это уравнение имеет только n решений.

журнал © Квант

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**А.А.Егоров, С.П.Коновалов,
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.Е.Пацхверия,
З.М.Сулова, В.М.Хлебникова**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

**Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ
по печати. Рег. св-во №0110473**

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: 930-56-48

**E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info,
phys@kvant.info**

**Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени
«Чеховский полиграфический комбинат»**

142300 г.Чехов Московской области,

Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru

Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00

Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59