журнал© Квант

МАРТ АПРЕЛЬ 2007 №2

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

Бюро Квантум

Этюд о формуле Эйлера

В.РЫЖИК, Б.СОТНИЧЕНКО

Инварианты скольжения многоугольника

Простейший инвариант скольжения многоугольника Эйлера – векторная сумма его сторон: $\sum\limits_{k=1}^{n}\vec{a}_k=\vec{0}$.

Используя это равенство, найдем еще один инвариант скольжения многоугольника Эйлера. Проведем из центра O_2 окружности, вписанной в многоугольник Эйлера, радиусы-векторы $\vec{r}_k$ во все точки касания (рис. 13; на нем $n = 6$). Теперь рассмотрим сумму $\vec{S}=\sum\limits_{k=1}^{n}\vec{r}_k$ и покажем, что эта сумма при скольжении многоугольника не меняется. Для этого возьмем производную от этой суммы по времени:

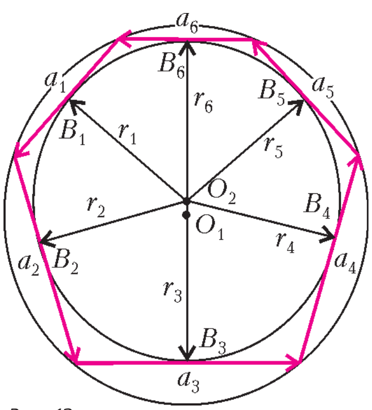


Рис. 13

$\dot{\vec{S}}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dot{\vec{r}}_k=\sum\limits_{k=1}^{n}\vec{V}_{B_k}$. Здесь $\vec{V}_{B_k}$ – скорость точки B_k конца вектора $\vec{r}_k$. При скольжении эти векторы остаются постоянными по модулю, $|\vec{r}_k|=r$, и вращаются в плоскости рисунка вокруг точки O_2. Поэтому

$$V_{B_k}=\omega_{r_k}r_k=\omega_{r_k}r, \qquad (24)$$

где $\omega_{r_k}=\dot{\varphi}_{r_k}$ – угловая скорость радиуса r_k. Направление скорости $\vec{V}_{B_k}$ совпадает с направлением вектора $\vec{a}_k$, так как оба эти вектора перпендикулярны вектору $\vec{r}_k$ (рис.14). Таким образом,

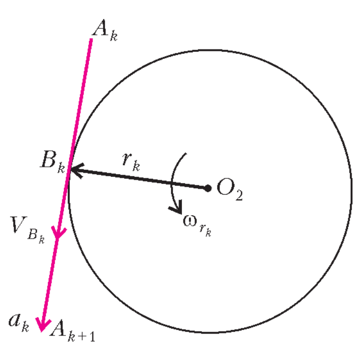


Рис. 14

$$\vec{V}_{B_k}=V_{B_k}\vec{e}_{a_k}=\omega_{r_k}r\vec{e}_{a_k},$$

где $\vec{e}_{a_k}$ – единичный вектор вектора $\vec{a}_k$. Поскольку $\vec{a}_k=a_k\vec{e}_{a_k}$, то $\vec{e}_{a_k}=\dfrac{\vec{a}_k}{a_k}$. Кроме этого, угловые скорости ω_{r_k} и ω_{a_k} равны $\dot{\varphi}_{a_k}$, так как при скольжении угол между радиусом $\vec{r}_k$ и стороной $\vec{a}_k$ не меняется и всегда прямой. Следовательно, $\vec{V}_{B_k}=\dot{\varphi}_{a_k}r\dfrac{\vec{a}_k}{a_k}$. Тогда

$$\dot{\vec{S}}=\sum_{k=1}^{n}\vec{V}_{B_k}=r\sum_{k=1}^{n}\frac{\dot{\varphi}_{a_k}}{a_k}\vec{a}_k=r\frac{c}{2}\sum_{k=1}^{n}\vec{a}_k=\vec{0}.$$

(Из равенства (8) в первой части статьи следует, что $\dfrac{\dot{\varphi}_{a_k}}{a_k}=\dfrac{c}{2}$, т.е. это отношение не зависит от индекса k и потому может быть вынесено за знак суммы.) Отсюда следует, что сумма $\vec{S}$ не меняется со временем при скольжении многоугольника Эйлера, т.е. является инвариантом скольжения: $\vec{S}=\sum\limits_{k=1}^{n}\vec{r}_k=\vec{I}$. Мы будем называть ее векторным инвариантом скольжения. Для каждого многоугольника Эйлера он свой и зависит от величин, которые не меняются при скольжении, т.е. от обоих радиусов и расстояния между центрами данных окружностей. Но тогда инвариантом скольжения является и проекция вектора $\vec{I}$ на любую неподвижную ось. В качестве таковых естественно выбрать линию центров O_1O_2 и ось, перпендикулярную к ней.

При получении формул (11) мы использовали то обстоятельство, что вектор $\vec{r}_1=\overrightarrow{O_2B_1}$ (см. рис.4 в первой части статьи) параллелен вектору $\overrightarrow{O_1C_1}$, так как они оба перпендикулярны вектору $\vec{a}_1=\overrightarrow{A_1A_2}$. Следовательно, вектор $\vec{r}_1$ образует с линией центров тот же угол, что и вектор $\overrightarrow{O_1C_1}$, равный $\dfrac{\varphi_2+\varphi_1}{2}$. Точно так же вектор $\vec{r}_k$ образует с линией центров угол $\dfrac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2}$. Поэтому инвариантами скольжения являются величины

$$\sum_{k=1}^{n}|\vec{r}_k|\cos\frac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2}=r\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2}$$

и

$$\sum_{k=1}^{n}|\vec{r}_k|\sin\frac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2}=r\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2}.$$

Иначе говоря, поскольку радиус r при скольжении постоянен, инвариантами являются суммы косинусов и синусов углов $\dfrac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2}$. Назовем их, соответственно, первым и вторым инвариантами скольжения:

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2}=I_1,\quad \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2}=I_2. \qquad (25)$$

Второй инвариант равен нулю, так как в те моменты, когда многоугольник Эйлера симметричен относитель-

Продолжение. Начало см. в «Кванте» №1.

но линии центров, для угла $\frac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2}$ найдется в пару угол, равный $-\frac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2}$. Если же такой пары не найдется, то этот угол равен 0° или 180°. (Эта ситуация показана на рисунке 15. На нем векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_5$, а также $\vec{r}_2$ и $\vec{r}_4$, образуют с линией центров равные по величине и противоположные по знаку углы. Вектор $\vec{r}_6$ образует с этой линией нулевой угол, а вектор $\vec{r}_3$ – угол 180°.) Поэтому сумма синусов равна нулю: $I_2=0$.

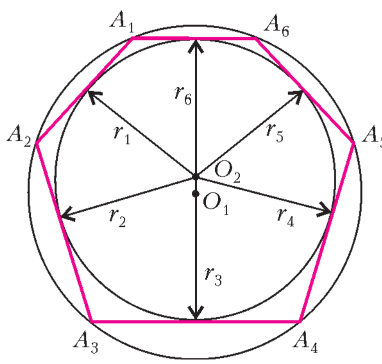


Рис. 15

Отсюда следует, что векторный инвариант скольжения $\vec{I}$ направлен по линии центров и его величина равна rI_1. Пусть $\vec{d}=\overrightarrow{O_1O_2}$ и $\vec{e}_d$ – орт вектора $\vec{d}$, т.е. $\vec{e}_d=\frac{\vec{d}}{d}$. Тогда

$$\vec{I}=rI_1\vec{e}_d=\frac{r}{d}I_1\vec{d}=\frac{\rho}{\delta}I_1\vec{d}. \qquad (26)$$

Еще один инвариант скольжения мы получим, просуммировав равенства (11):

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\varphi_{k+1}-\varphi_k}{2}=n\rho+\delta\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2}=n\rho+\delta I_1.$$

Разность углов $\varphi_{k+1}-\varphi_k$ равна углу α_k: $\alpha_k=\varphi_{k+1}-\varphi_k$. А так как справа в последнем равенстве стоит величина, не меняющаяся при скольжении многоугольника Эйлера, то мы получаем третий инвариант скольжения:

$$I_3=\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha_k}{2}=n\rho+\delta I_1. \qquad (27)$$

Поскольку

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\varphi_{k+1}-\varphi_k}{2}=\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\varphi_{k+1}}{2}\cos\frac{\varphi_k}{2}+\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\varphi_{k+1}}{2}\sin\frac{\varphi_k}{2},$$

а

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2}=\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\varphi_{k+1}}{2}\cos\frac{\varphi_k}{2}-\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\varphi_{k+1}}{2}\sin\frac{\varphi_k}{2},$$

то инвариантами являются также и суммы произведений косинусов и синусов:

$$I_4=\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\varphi_{k+1}}{2}\cos\frac{\varphi_k}{2}=0,5\left(I_3+I_1\right)$$

и

$$I_5=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\varphi_{k+1}}{2}\sin\frac{\varphi_k}{2}=0,5\left(I_3-I_1\right).$$

Из всех полученных инвариантов, очевидно, «главным» является третий инвариант I_3, так как в него входят углы $\alpha_k\,(=\varphi_{k+1}-\varphi_k)$ и не входят «внешние» углы φ_{k+1} и φ_k.

Задачи (продолжение)

Перейдем теперь к решению задач, в которых будем использовать полученные результаты, связанные с инвариантами скольжения многоугольника Эйлера.

Задача 9. *В многоугольнике Эйлера даны углы, которые образуют радиусы описанной окружности, проведенные в его вершины, с линией центров. Найдите отношение* δ.

Решение. Умножим каждое из равенств (11) на $\sin\frac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2}$ и просуммируем полученные равенства. Получим

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2}\cos\frac{\varphi_{k+1}-\varphi_k}{2}=\rho\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2}+$$
$$+\delta\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2}\cos\frac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2}.$$

Первое слагаемое в правой части равенства – инвариант скольжения $I_2=0$. Поэтому равенство можно переписать в таком виде:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\varphi_{k+1}+\sin\varphi_k\right)=\frac{1}{2}\delta\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\varphi_{k+1}+\varphi_k\right).$$

Учитывая, что $\varphi_{n+1}=360°+\varphi_1$, найдем: $\sin\varphi_{n+1}=\sin\varphi_1$. Поэтому в сумме, стоящей слева, каждое слагаемое повторяется два раза, но тогда выражение в левой части равенства имеет вид $\sum_{k=1}^{n}\sin\varphi_k$. Теперь приходим к ответу:

$$\delta=2\frac{\sum_{k=1}^{n}\sin\varphi_k}{\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\varphi_{k+1}+\varphi_k\right)}.$$

Задача 10. *Вычислите инварианты скольжения* $\vec{I}$, I_1, I_3 *треугольника Эйлера, если известно* δ *(и тем самым* ρ*).*

Решение. Сначала вычислим $I_1=\sum_{k=1}^{3}\cos\frac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2}$. Воспользуемся рисунком 5. На нем $\varphi_1=0°$ и

$$\cos\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}=\cos\frac{\varphi_2}{2}=\cos\frac{\alpha_1}{2}=\frac{O_2B_1}{O_2A_1}=\frac{r}{R-d}=\frac{\rho}{1-\delta}.$$

Угол $\frac{\varphi_3+\varphi_2}{2}$ равен 180°, поэтому $\cos\frac{\varphi_3+\varphi_2}{2}=-1$. Третий косинус в сумме равен

$$\cos\frac{\varphi_4+\varphi_3}{2}=\cos\angle A_1O_2B_3=$$
$$=\cos\angle B_1O_2A_1=\cos\frac{\alpha_1}{2}=\frac{\rho}{1-\delta}.$$

Тогда (учитывая формулу (12))

$$I_1=2\frac{\rho}{1-\delta}-1=1+\delta-1=\delta.$$

Итак,

$$I_1=\delta. \qquad (28)$$

Векторный инвариант $\vec{I}$ найдем, используя формулу (26):

$$\vec{I} = I_1 \frac{\rho}{\delta} \vec{d} = \rho \vec{d}.$$

Инвариант I_3 можно найти либо непосредственно из рисунка 5, либо с помощью формулы (27). Используем второй путь:

$$I_3 = 3\rho + \delta I_1 = 3\rho + \delta^2 = 3\rho + 1 - 2\rho = 1 + \rho. \quad (29)$$

(Здесь мы воспользовались равенством $\delta^2 = 1 - 2\rho$.)

Так как $I_3 = \sum_{k=1}^{3} \cos\frac{\alpha_k}{2} = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$, то формула (29) позволяет нам получить еще одно выражение для отношения $\rho = \frac{r}{R}$ через углы треугольника:

$$\rho = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1. \quad (30)$$

Замечание. Формулу (30) можно получить также из равенства (23) или из известного равенства $\rho = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$. Сделайте это самостоятельно.

Задача 11. *Пусть известны угол треугольника Эйлера и ρ. Чему равны остальные углы треугольника?*

Решение. Обозначим известный угол треугольника через α. Запишем уравнение (30) в виде $\cos\beta + \cos\gamma = 1 - \cos\alpha + \rho$, или

$$2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \rho.$$

Но $\cos\frac{\beta+\gamma}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}$, поэтому

$$\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} + \frac{\rho}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Для определения углов β и γ имеем два уравнения:

$$\frac{\beta-\gamma}{2} = \arccos\left(\frac{\rho}{2\sin\frac{\alpha}{2}} + \sin\frac{\alpha}{2}\right) \text{ и } \frac{\beta+\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда несложно найти β и γ.

Задача 12. *Вычислите инварианты скольжения $\vec{I}$, I_1, I_3 четырехугольника Эйлера, если известно δ (и тем самым ρ).*

Решение. Эти инварианты проще всего найти, когда четырехугольник Эйлера является дельтоидом (см. рис.6). В этом случае $\varphi_1 = 0^\circ$, $\varphi_3 = 180^\circ$. В силу симметрии,

$$\cos\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2} = \cos\frac{\varphi_5+\varphi_4}{2} = \cos\frac{\alpha_1}{2} = \frac{r}{R-d} = \frac{\rho}{1-\delta}.$$

Точно так же,

$$\cos\frac{\varphi_3+\varphi_2}{2} = \cos\frac{\varphi_4+\varphi_3}{2} = -\frac{\rho}{1+\delta}.$$

Отсюда

$$I_1 = \sum_{k=1}^{4} \cos\frac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2} = 2\left(\frac{\rho}{1-\delta} - \frac{\rho}{1+\delta}\right) = \frac{4\rho\delta}{1-\delta^2} = \frac{2\sqrt{2}\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}. \quad (31)$$

По формуле (26) векторный инвариант выглядит так:

$$\vec{I} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+\delta^2}}\vec{d}.$$

Третий инвариант получим из рисунка 6. Значения косинусов таковы:

$$\cos\frac{\alpha_1}{2} = \cos\frac{\alpha_4}{2} = \frac{\rho}{1-\delta}, \quad \cos\frac{\alpha_2}{2} = \cos\frac{\alpha_3}{2} = \frac{\rho}{1+\delta}.$$

Поэтому

$$I_3 = \sum_{k=1}^{4} \cos\frac{\alpha_k}{2} = 2\left(\frac{\rho}{1-\delta} + \frac{\rho}{1+\delta}\right) = \frac{4\rho}{1-\delta^2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+\delta^2}}. \quad (32)$$

Тот же результат при вычислении I_3 можно получить с помощью формулы (27), в чем вы можете убедиться самостоятельно.

Инварианту $I_3 = \sum_{k=1}^{4} \cos\frac{\alpha_k}{2}$ можно придать геометрический смысл. Пусть центр O_1 описанной окружности лежит внутри многоугольника и h_k – перпендикуляр, опущенный из центра O_1 на сторону a_k многоугольника. Тогда $h_k = R\cos\frac{\alpha_k}{2}$ и, умножив предыдущее равенство на R, найдем $\sum_{k=1}^{n} h_k = RI_3$. Отсюда получаем, что сумма длин этих перпендикуляров также является инвариантом скольжения. Эта формула в случае треугольника является формулой Карно: $h_1 + h_2 + h_3 = R(1+\rho) = R\left(1 + \frac{r}{R}\right) = R + r$. Поэтому формулу $\sum_{k=1}^{n} h_k = RI_3$ можно назвать формулой Карно для n-угольника Эйлера. Для четырехугольника Эйлера формула Карно выглядит так:

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = \frac{4R^2 r}{R^2 - d^2} = \frac{2\sqrt{2}R^2}{\sqrt{R^2+d^2}}$$

(здесь использована формула (32)).

Задача 13. *Пусть известны δ (и тем самым ρ) четырехугольника Эйлера и один из четырех его углов. Вычислите остальные углы.*

Решение. На рисунке 16 изображен четырехугольник Эйлера $A_1A_2A_3A_4$. Обо-

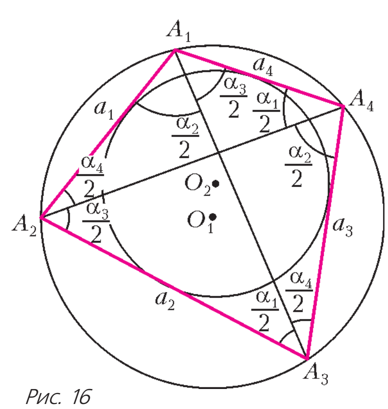


Рис. 16

значим соответствующие углы при вершинах $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$, причем известный нам угол – это α. Пусть далее $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ – центральные углы, опирающиеся на стороны a_1, a_2, a_3, a_4 соответственно.

Очевидны такие равенства:

$$\alpha = 0{,}5(\alpha_2 + \alpha_3), \ \beta = 0{,}5(\alpha_3 + \alpha_4),$$

$$\gamma = 0{,}5(\alpha_4 + \alpha_1), \ \varepsilon = 0{,}5(\alpha_1 + \alpha_2).$$

Так как четырехугольник Эйлера – вписанный, то $\alpha + \gamma = 180°$, $\beta + \varepsilon = 180°$. Отсюда ясно, что для ответа на вопрос задачи достаточно найти только угол β. Поскольку четырехугольник Эйлера – описанный, то $a_1 + a_3 = a_2 + a_4$. Из этого равенства получаем

$$2R\left(\sin\frac{\alpha_1}{2} + \sin\frac{\alpha_3}{2}\right) = 2R\left(\sin\frac{\alpha_2}{2} + \sin\frac{\alpha_4}{2}\right),$$

откуда

$$\sin\frac{\alpha_1}{2} - \sin\frac{\alpha_2}{2} + \sin\frac{\alpha_3}{2} - \sin\frac{\alpha_4}{2} = 0. \qquad (33)$$

Инвариант

$$I_3 = \sum_{k=1}^{4}\cos\frac{\alpha_k}{2} = \cos\frac{\alpha_1}{2} + \cos\frac{\alpha_2}{2} + \cos\frac{\alpha_3}{2} + \cos\frac{\alpha_4}{2}. \qquad (34)$$

После возведения в квадрат уравнений (33) и (34) и последующего их сложения получаем равенство

$$I_3^2 = 4 + 2\left(\cos\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \cos\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{2} + \cos\frac{\alpha_1 + \alpha_4}{2} + \right.$$

$$\left. + \cos\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} + \cos\frac{\alpha_2 - \alpha_4}{2} + \cos\frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}\right),$$

или

$$I_3^2 = 4 + 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\varepsilon) +$$

$$+ 2\left(\cos\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{2} + \cos\frac{\alpha_2 - \alpha_4}{2}\right).$$

Так как суммы противоположных углов вписанного четырехугольника равны 180°, то $\cos\alpha + \cos\gamma = 0$ и $\cos\beta + \cos\varepsilon = 0$. Поэтому $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\varepsilon = 0$. Далее,

$$2\left(\cos\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{2} + \cos\frac{\alpha_2 - \alpha_4}{2}\right) =$$

$$= 4\cos\frac{\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_2 - \alpha_4}{4}\cos\frac{\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_2 + \alpha_4}{4} =$$

$$= 4\cos\frac{\varepsilon - \beta}{2}\cos\frac{\gamma - \alpha}{2}.$$

Поскольку суммы противоположных углов вписанного четырехугольника равны 180°, то

$$\cos\frac{\varepsilon - \beta}{2}\cos\frac{\gamma - \alpha}{2} = \sin\beta\sin\alpha =$$

$$= \sin\beta\sin\gamma = \sin\varepsilon\sin\alpha = \sin\varepsilon\sin\gamma.$$

Для нахождения угла β, учитывая (32), имеем уравнение

$$4 + 4\sin\alpha\sin\beta = I_3^2 = \frac{8}{1 + \delta^2}.$$

Из этого уравнения получаем

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1 - \delta^2}{1 + \delta^2}. \qquad (35)$$

Отсюда и ответ: $\beta = \arcsin\dfrac{1 - \delta^2}{(1 + \delta^2)\sin\alpha}$.

Задача 14. *В четырехугольнике Эйлера известны его углы. Вычислите* ρ.

Решение. Очевидно, достаточно задать два соседних угла α и β (в обозначениях предыдущей задачи). Воспользуемся формулой (35), получим из нее значение δ^2:

$$\delta^2 = \frac{1 - \sin\alpha\sin\beta}{1 + \sin\alpha\sin\beta}. \qquad (36)$$

Подставив это значение в формулу (14), после преобразований получаем ответ:

$$\rho = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{1 + \sin\alpha\sin\beta}}. \qquad (37)$$

Эта формула аналогична формуле (30) для треугольника.

Задача 15. *Радиус описанной около четырехугольника Эйлера окружности равен R, а его диагонали равны a и b. Найдите: 1) радиус вписанной окружности r; 2) расстояние d между центрами описанной и вписанной окружностей.*

Решение. Пусть $a = A_2A_4$ и $b = A_1A_3$ (см. рис.16). Тогда $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, и $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{ab}{4R^2}$.

Подставив это значение $\sin\alpha\sin\beta$ в формулу (37), получим ответ на первый вопрос:

$$r = \frac{ab}{2\sqrt{4R^2 + ab}}.$$

Подставив это же значение в формулу (36), получим ответ на второй вопрос:

$$d = R\sqrt{\frac{4R^2 - ab}{4R^2 + ab}}.$$

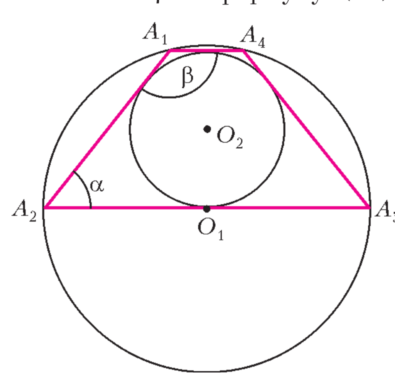


Рис. 17

Задача 16. *Четырехугольник Эйлера является трапецией. Ее большим основанием является диаметр описанной окружности (рис. 17). Чему равен острый угол трапеции?*

Решение. Поскольку в этом случае $\beta = 180° - \alpha$, то формулы (36) и (37) запишутся так:

$$\delta^2 = \frac{1 - \sin^2\alpha}{1 + \sin^2\alpha} \ \text{ и } \ \rho = \frac{\sin^2\alpha}{\sqrt{1 + \sin^2\alpha}}.$$

В этой ситуации $\rho = \delta$, поэтому, приравняв значения δ^2 и ρ^2, получим биквадратное уравнение:

(Продолжение см. на с. 13)

Логарифмические шкалы

В.СУРДИН

В быту, как правило, для измерения различных величин мы используем *линейные* шкалы: метры, мили, футы – для измерения длины, граммы, тонны, фунты – для веса, градусы Цельсия или Фаренгейта – для температуры. В науке диапазон измерений значительно шире, чем в быту, поэтому ученые часто оперируют порядками величин, записывая числа в так называемой научной символике. Например, вместо 56000 пишут $5{,}6\cdot 10^4$. По существу, это *логарифмическая* запись, хотя в показателе степени обычно оставляют только целую часть логарифма, а мантиссу – дробную часть логарифма – записывают в виде десятичной дроби. Это удобно: целый показатель степени сразу указывает область измерения, т.е. порядок величины, а десятичная дробь уточняет значение числа, причем количество цифр в ней обычно соответствует точности измерения. В нашем примере запись «10^4» говорит о том, что речь идет о десятках тысяч, а запись «5,6» содержит две значащие цифры и указывает, что точность измерения составляет около 1%.

Большинству людей логарифмическая форма записи чисел кажется слишком научной, хотя неосознанно мы довольно часто используем ее и в обычной жизни. Такая неявная склонность к логарифмическому представлению чисел имеет глубокое физиологическое обоснование: оказывается, органы чувств в нашем теле «пользуются» логарифмическими шкалами. По-видимому, впервые это заметил французский физик Пьер Бугер (1698–1758), обнаруживший в опытах по фотометрии, что глаз фиксирует *относительное* различие яркости поверхностей. В виде правила это сформулировал немецкий физиолог Эрнст Вебер (1795–1878), изучавший мышечную и кожную чувствительность. Он установил, что мы воспринимаем не абсолютное, а относительное изменение силы раздражителя. Например, если в руке у вас гирька массой в 10 г, то вы уверенно ощущаете добавку к ней еще такой же массы; но если вы держите в руках массу в 10 кг, то добавление к ней 10-граммовой гирьки вы не ощутите. Позже это подтвердилось и для других органов чувств – зрения, слуха, вкуса. Выяснилось, что наша чувствительность относительна и разрешающая способность органов чувств обычно составляет несколько процентов. Немецкий физик и психолог Густав Фехнер (1801–1887) сформулировал это математически:

$$S = a\ln I + b\,,$$

где S – интенсивность воспринимаемого нами ощущения, I – сила раздражителя, a и b – константы. Таким образом, ощущение пропорционально логарифму раздражения. Это соотношение называется *законом Вебера–Фехнера*, или *основным психофизическим законом*.

Естественно, логарифм в формуле Фехнера не обязательно должен быть натуральным, можно выбрать и любое другое основание логарифма, заменив при этом константу a. Нередко закон Вебера–Фехнера формулируют так: «При изменении силы раздражителя в геометрической прогрессии интенсивность ощущения меняется в арифметической прогрессии». Разумеется, область справедливости этого правила не безгранична; оно остается верным для раздражителей не слишком слабых (выше порога чувствительности) и не слишком сильных (ниже болевого порога). Биологические механизмы реализации закона Вебера–Фехнера пока еще не до конца ясны. Поэтому мы лишь отметим, как эта особенность нашего восприятия проявляется в науке и технике.

Некоторые общепринятые логарифмические шкалы приведены в таблице 1. Взаимное соответствие между

Таблица 1

Логарифмические шкалы

Шкала	Интервал	Запись	Выражение
exp	степень	n exp	e^n
dex	степень	n dex	10^n
B	бел	n B	10^n
dB	децибел	n dB	$10^{0,1n}$
mag	звездная	n mag или n^m	$10^{-0,4n}$

ними такое: 1 dex = 1 B = 10 dB = –2,5 mag ≈ 2,303 exp. Заметим, что во всех этих шкалах значок после числа указывает не физическую размерность величины, а тип шкалы. Во всех логарифмических шкалах выражается отношение двух одноименных физических величин. Поэтому запись «0,5 dex» может означать как то, что годовой доход компании возрос в 3,16… раза (скажем, с 86 до 272 млн руб.), так и то, что средний удой коров в хозяйстве поднялся в 3,16… раза (скажем, с 1500 до 4750 литров в год).

Впрочем, в некоторых логарифмических шкалах единица измерения имеет свое название. Например, в шкале натуральных логарифмов единица называется *непер* и обозначается Нп или Np (в старых книгах можно встретить «неп» или «нп»): 1 Нп = $\ln(F_1/F_2)$ при $F_1/F_2 = e$, где F_1 и F_2 – физические величины одной и той же размерности, а $e \approx 2{,}718$ – основание натуральных логарифмов. Разумеется, эта единица названа в честь шотландского математика, изобретателя логарифмов Джона Непера (1550–1617). В его же честь и число e называют *неперовым числом*. Правда, на практике применяют неперы нечасто, в основном в электротехнике – при измерениях затухания электрических сигналов в линиях связи.

Громкость и высота звука – белы, децибелы, октавы

В шкале обычных десятичных логарифмов единица измерения называется «бел» – в честь американского изобретателя телефона Александера Белла (1847–1922). Чаще применяется ее десятая часть – децибел. Обе единицы в основном используются в акустике для измерения уровня интенсивности звука и звукового давления, а также в электротехнике. Разность уровней в 1 дБ означает отношение в $10^{0,1} = 1{,}2589\ldots$ раз. Три децибела почти точно означают удвоение. В акустике за ноль принимают еле слышимый звук (давление около $2 \cdot 10^{-5}$ Н/м^2), так что уровень громкости в 90 дБ означает миллиарднократное превышение интенсивности звука над едва уловимым шепотом.

Однако у единиц «бел» и «децибел» есть особенность, затрудняющая их применение за пределами акустики и электротехники. Дело в том, что эти логарифмические шкалы определяются по-разному для разных физических величин. Введенное выше определение ($\lg(I_1/I_2)$) используется только для энергетических величин, к которым относятся мощность, энергия, поток энергии и т.д. А для силовых величин – напряжение, сила тока, давление, напряженность поля, ... – используется иное определение:

1 Б = $2\lg(p_1/p_2)$ и

1 дБ = $20\lg(p_1/p_2)$,

поскольку, к примеру, интенсивность звука (поток энергии) и звуковое давление связаны соотношением $I \sim p^2$. Иногда это приводит к путанице: если в акустике 1 дБ = 0,2303 Нп, то в электротехнике 1 дБ = 0,1151 Нп. Неоднозначность белов и децибелов делает более удобной единицу «dex», которая все чаще применяется в математике, астрономии и многих областях физики.

Если амплитуду звуковой волны мы воспринимаем как громкость, то ее частота характеризует высоту звука. И в этом случае справедлив закон Вебера–Фехнера: разные звуки воспринимаются нами как равноотстоящие по высоте, если равны отношения их частот. Для измерения интервалов высоты звука применяются логарифмические единицы. Основная среди них – октава, ограниченная частотами, отношение которых равно двум. Понятие октавы становится все более популярным за пределами музыкальной сферы, поскольку числа вида 2^n широко используются в импульсной электронике, в частности в вычислительной технике. Правда, в этих областях слово «октава»

На этой фотографии, сделанной иранским любителем астрономии Б.Тафреши, мы видим весь диапазон звезд, доступных невооруженному глазу человека. Участок неба охватывает созвездия Ориона (вверху справа), Единорога (вверху слева) и Большого Пса (левее центра). Самая яркая звезда здесь – Сириус (альфа Б. Пса), ярчайшая звезда нашего небосвода; она имеет звездную величину −1,5. А самые слабые звезды на снимке имеют величину 6,5; поток света от них в 1600 раз слабее, чем от Сириуса.

обычно заменяют словом «бит» (двоичный разряд), но по сути они близки.

Яркость источников света – шкала звездных величин

Астрономы измеряют блеск небесных светил в звездных величинах (рис.1). Это безразмерная величина, характеризующая освещенность, создаваемую небесным объектом вблизи наблюдателя. Как видим, словом «блеск» астрономы характеризуют зрительное восприятие, не совсем совпадающее с тем, что принято в быту. Блеск одного источника указывают путем его сравнения с блеском другого, принятого за эталон. Такими эталонами являются специально подобранные звезды.

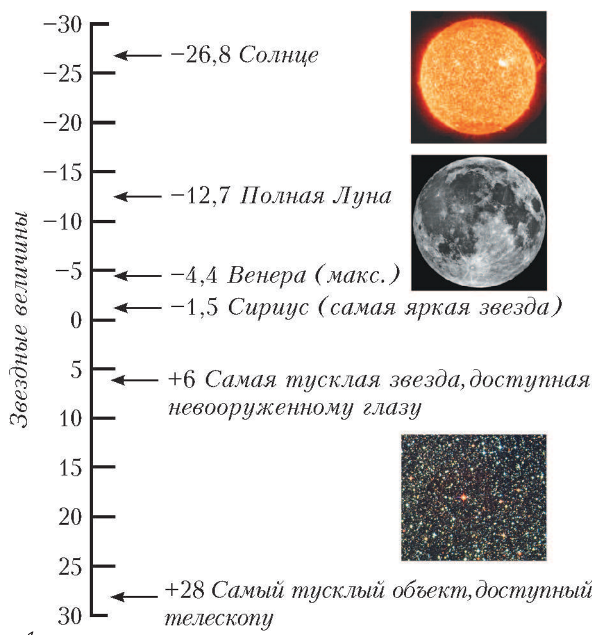


Рис. 1

Основанием шкалы звездных величин служит число $\sqrt[5]{100} \approx 2{,}512$. Это дань исторической традиции, не имеющая какого-либо рационального оправдания. Для целей астрономической фотометрии вполне хватило бы неперов или белов, но звездные величины родились гораздо раньше, и теперь от них трудно отказаться. Обозначают звездную величину латинской буквой m (от лат. magnitudo – величина). Среди странностей этой шкалы есть еще одна – ее направление обратное: чем больше значение звездной величины, тем слабее блеск объекта. Например, звезда 2-й звездной величины (2^m) в 2,512 раза ярче звезды 3-й величины (3^m) и в $2{,}512 \cdot 2{,}512 = 6{,}310$ раза ярче звезды 4-й величины (4^m) и так далее.

Химическая чувствительность – шкала кислотности

Очень близка к шкале звездных величин и химическая шкала реакции среды – так называемая шкала кислотности (рис.2). Напомним, что известный школьникам и всем, кто пользуется косметикой, водородный показатель pH определяется таким соотношением:

$$\mathrm{pH} = -\lg\left[\mathrm{H}^+\right],$$

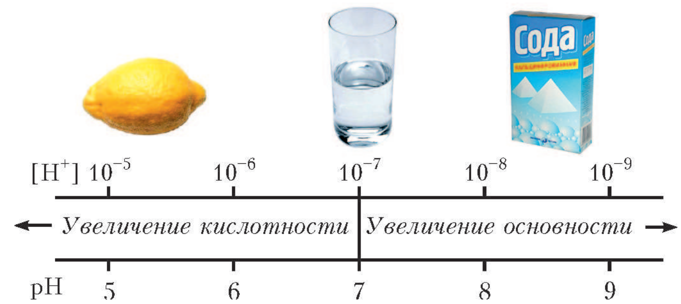


Рис. 2

где $\left[\mathrm{H}^+\right]$ – концентрация положительных водородных ионов в растворе. При этом за ноль принимают чистую воду при комнатной температуре (нейтральная среда), имеющую $\left[\mathrm{H}^+\right] = 10^{-7}$. Далее при повышении кислотности значение pH уменьшается – чем не шкала звездных величин? Чем выше кислотность, тем ниже значение индекса, только основанием логарифма служит не 2,512 (как у звездных величин), а 10.

Как известно, первыми химическими индикаторами были наши вкусовые рецепторы, которыми сегодня пользуются только повара, а раньше использовали и химики. Поэтому неудивительно, что в химии появилась логарифмическая шкала концентрации: сработал закон Вебера–Фехнера, которому подчиняются все наши чувства.

Сила землетрясения – шкала Рихтера

Какие еще остались у нас чувства? Ну, скажем, чувство равновесия и вертикального направления – назовем его для краткости «вестибулярное чувство». Его типичным раздражителем служат... землетрясения. Оказывается, их силу тоже измеряют в логарифмической шкале.

Степень сотрясения почвы на поверхности Земли называют интенсивностью землетрясения (или же силой землетрясения) и выражают в баллах – например, по международной 12-бальной сейсмической шкале, или шкале Меркалли (см. таблицу 2). Однако это весьма относительная характеристика, выводимая по ощущениям и произведенным разрушениям, которые зависят не только от энергии, выделившейся в очаге землетрясения, но и от положения очага относительно наблюдателя. Даже точно в эпицентре землетрясения его балл зависит от глубины очага. Поэтому более объективной величиной служит *магнитуда* землетрясения M, пропорциональная логарифму максимальной амплитуды смещения частиц почвы (эта величина измеряется сейсмометрами.) Магнитуда характеризует общую энергию сейсмических волн, возбужденных подземным толчком. Такая шкала называется шкалой Рихтера – в честь известного сейсмолога из Калифорнийского технологического института Ч.Рихтера.

В эпицентре при фиксированной глубине очага магнитуда и балл (по 12-бальной шкале) практически взаимно пропорциональны: 1 балл ~ $1{,}5M$. Сама же магнитуда M связана с энергией подземного толчка E

Таблица 2

Сейсмическая шкала Меркалли

Балл	Название землетрясения	Краткая характеристика
1	Незаметное	Отмечается только сейсмическими приборами
2	Очень слабое	Ощущается отдельными людьми, находящимися в состоянии полного покоя
3	Слабое	Ощущается лишь небольшой частью населения
4	Умеренное	Распознается по легкому дребезжанию и колебанию предметов, посуды и оконных стекол, скрипу дверей и стен
5	Довольно сильное	Общее сотрясение зданий, колебание мебели. Трещины в оконных стеклах и штукатурке. Пробуждение спящих
6	Сильное	Ощущается всеми. Картины падают со стен. Откалываются куски штукатурки. Легкое повреждение зданий
7	Очень сильное	Трещины в стенах каменных домов. Антисейсмические, а также деревянные постройки остаются невредимыми
8	Разрушительное	Трещины на крутых склонах и на сырой почве. Памятники сдвигаются с места или опрокидываются. Дома сильно повреждаются
9	Опустошительное	Сильное повреждение и разрушение каменных домов
10	Уничтожающее	Крупные трещины в почве. Оползни и обвалы. Разрушение каменных построек. Искривление железнодорожных рельсов
11	Катастрофа	Широкие трещины в земле. Многочисленные оползни и обвалы. Каменные дома совершенно разрушаются
12	Сильная катастрофа	Изменения в почве достигают огромных размеров. Многочисленные трещины, обвалы, оползни. Возникновение водопадов, подпруд на озерах, отклонение течения рек. Ни одно сооружение не выдерживает

(в джоулях) логарифмически:

$$M = -2{,}5 + \frac{5}{8}\lg E\,.$$

Например, катастрофическое 9-бальное землетрясение 1948 года, разрушившее город Ашхабад, имело магнитуду $M = 7$. Следовательно, в очаге этого землетрясения (на глубине около 20 км) выделилась энергия порядка 10^{15} Дж, что эквивалентно взрыву 250-килотонной бомбы. Сильнейшие из зарегистрированных землетрясений имели магнитуду 8,9. Таких землетрясений с начала инструментальных наблюдений зарегистрировано два, оба под океаном. Одно произошло в 1933 году у берегов Японии, другое – в 1906 году у берегов Эквадора.

Как видим, балл землетрясения практически изменяется как десятичный логарифм его энергии (1 балл ~ ~ $0{,}94\lg E$). Разность уровней в 1 балл по сейсмической шкале весьма близка к 1 белу. Если сравнить это с основанием шкалы звездных величин (2,512) или громкости звука в децибелах (1,259), то можно заключить, что у шкалы нашего вестибулярного чувства весьма грубый шаг (10).

Сила ветра – шкала Бофорта

Ветер интересует не только моряков и летчиков, он также весьма сильно влияет на качество астрономических наблюдений. Его интенсивность воспринимается сразу несколькими органами чувств – глазами, кожей, ушами, а также объективно измеряется анемометром как скорость воздушного потока (которую метеорологи предпочитают называть силой ветра).

Для визуальной оценки силы ветра существует особая 13-бальная шкала, разработанная английским адмиралом Ф.Бофортом в 1806 году. Балл Бофорта имеет словесное определение силы ветра – штиль, свежий ветер, шторм, ураган и т.п. и визуальное, описательное проявление его действия на суше и на море – характер качания деревьев, характер и высота волн. Сначала эта шкала применялась только самим ее автором. Но в 1874 году Постоянный комитет Первого метеорологического конгресса принял шкалу Бофорта для использования в международной синоптической практике. Позже шкала менялась и уточнялась, а в 1963 году была принята Всемирной метеорологической организацией в том виде, как она приведена в таблице 3 (на стандартной высоте 10 м над открытой ровной поверхностью).

Легко видеть, что баллы по шкале Бофорта – назовем их *ББ* – функционально связаны со скоростью ветра (v). Но вот что любопытно – математическая зависимость оказалась не логарифмической, а степенно́й:

$$ББ \approx 1{,}25v^{5/8}\,,$$

Таблица 3

Сила ветра у земной поверхности по шкале Бофорта

Баллы Бофорта	Словесное определение силы ветра	Скорость ветра, м/с	Действие ветра	
			на суше	на море
0	Штиль	0–0,2	Штиль. Дым поднимается вертикально	Зеркально гладкое море
1	Тихий	0,3–1,5	Направление ветра заметно по относу дыма, но не по флюгеру	Рябь, пены на гребнях нет
2	Легкий	1,6–3,3	Движение ветра ощущается лицом, шелестят листья, приводится в движение флюгер	Короткие волны, гребни не опрокидываются и кажутся стекловидными
3	Слабый	3,4–5,4	Листья и тонкие ветви деревьев все время колышутся, ветер развевает верхние флаги	Короткие, хорошо выраженные волны. Гребни, опрокидываясь, образуют стекловидную пену, изредка образуются маленькие белые барашки
4	Умеренный	5,5–7,9	Ветер поднимает пыль и бумажки, приводит в движение тонкие ветви деревьев	Волны удлиненные, белые барашки видны во многих местах
5	Свежий	8,0–10,7	Качаются тонкие стволы деревьев, на воде появляются волны с гребнями	Хорошо развитые в длину, но не очень крупные волны, повсюду видны белые барашки (в отдельных случаях образуются брызги)
6	Сильный	10,8–13,8	Качаются толстые сучья деревьев, гудят телеграфные провода	Начинают образовываться крупные волны. Белые пенистые гребни занимают значительные площади (вероятны брызги)
7	Крепкий	13,9–17,1	Качаются стволы деревьев, идти против ветра трудно	Волны громоздятся, гребни срываются, пена ложится полосами по ветру
8	Очень крепкий	17,2–20,7	Ветер ломает сучья деревьев, идти против ветра очень трудно	Умеренно высокие длинные волны. По краям гребней начинают взлетать брызги. Полосы пены ложатся рядами по направлению ветра
9	Шторм	20,8–24,4	Небольшие повреждения, ветер срывает дымовые колпаки и черепицу	Высокие волны. Пена широкими плотными полосами ложится по ветру. Гребни волн начинают опрокидываться и рассыпаться в брызги, которые ухудшают видимость
10	Сильный шторм	24,5–28,4	Значительные разрушения строений, деревья вырываются с корнем. На суше бывает редко	Очень высокие волны с длинными загибающимися вниз гребнями. Образующаяся пена выдувается ветром большими хлопьями в виде густых белых полос. Поверхность моря белая от пены. Сильный грохот волн подобен ударам. Видимость плохая
11	Жестокий шторм	28,5–32,6	Большие разрушения на значительном пространстве. На суше наблюдается очень редко	Исключительно высокие волны. Суда небольшого и среднего размера временами скрываются из вида. Море все покрыто длинными белыми хлопьями пены, располагающимися по ветру. Края волн повсюду сдуваются в пену. Видимость плохая
12	Ураган	32,7 и более		Воздух наполнен пеной и брызгами. Море все покрыто полосами пены. Очень плохая видимость

где скорость выражена в м/с. Интересно было бы понять причину этого исключения. Почему весьма общий закон Вебера–Фехнера не проявил себя в этом случае? Можно предположить, что рецепторы человека прямо не участвуют в определении силы ветра, что это оценка скорее эмоциональная, чем физиологическая. Действительно, оценивая силу ветра, мы обычно думаем об ущербе, который он может причинить. Однако, как мы увидим далее, наши эмоции также – и это поистине удивительно! – подчиняются психофизическому закону.

Таблица 4

Туринская шкала опасности столкновения Земли с астероидами и кометами

Оценка опасности объекта	Балл	Краткая характеристика
Безопасен	0	Вероятность столкновения в ближайшие десятилетия равна нулю. К этой же категории относят столкновения Земли с объектами, которые сгорят в атмосфере, не достигнув поверхности
Заслуживает внимательного слежения	1	Вероятность столкновения крайне низка. Скорее всего, подобные тела в ближайшие десятилетия с Землей не встретятся
Вызывает беспокойство	2	Вероятность столкновения низка, хотя тело пролетит довольно близко. Подобные события происходят нередко
	3	Вероятность столкновения с телом, способным вызвать локальные разрушения, составляет не менее 1%
	4	Вероятность столкновения с телом, способным привести к региональным разрушениям, составляет свыше 1%
Явно угрожает	5	Вероятность столкновения с телом, способным вызвать катастрофу регионального масштаба, очень велика
	6	То же – с вероятными глобальными последствиями
	7	То же – с неизбежными глобальными последствиями
Столкновение неизбежно	8	Вероятность катастрофических локальных событий – одно в 50–1000 лет
	9	Вероятность катастрофических региональных событий – одно в 1000–100000 лет
	10	Вероятность глобальной катастрофы (с изменением климата на планете) – не менее одного события в 100000 лет

Восприятие психических явлений – шкала эмоций

На нескольких примерах мы убедимся, что не только физиологические, но и психические шкалы, определяющие силу наших эмоций, также имеют логарифмический характер – для своих субъективных оценок произведенного на нас впечатления мы подсознательно выбираем «ступеньки» в виде геометрической прогрессии.

В качестве общеизвестного примера начнем со шкалы Ландау, по которой знаменитый физик оценивал заслуги своих коллег. Вот как об этом вспоминает академик В.Л.Гинзбург: «... Ландау имел “шкалу заслуг” в области физики. Шкала была логарифмическая (классу 2 отвечали достижения в 10 раз меньше, чем для класса 1). Из физиков нашего века класс 0,5 имел только Эйнштейн, к классу 1 относились Бор, Дирак, Гейзенберг и ряд других...»

Другие источники рассказывают о шкале Ландау немного иначе: «Ландау присваивал великим ученым-физикам всего мира “звездные” номера. Вы знаете, что звезда первой величины – это очень яркая звезда, звезда второй величины – менее яркая и т. д. Эйнштейну, Бору и Ньютону Ландау присвоил половинную величину – 0,5. Дирак, Гейзенберг – это звезды первой величины. Себе он присваивал вторую величину».

Остается неясным, логарифм по какому основанию – 10 или 2,512 – использовал Лев Ландау для определения уровня гениальности физиков-теоретиков. Несомненно лишь одно: для этих сугубо эмоциональных, субъективных оценок он использовал логарифмическую шкалу.

Уже отмечалось, что в быту мы тоже нередко используем шкалу логарифмов. Примеры можно было бы продолжать долго. Так, богатых людей мы делим на миллионеров и миллиардеров. Города делим по населению на миллионные и стотысячные. Покупая продукты в магазине, стараемся экономить рубли, а задумываясь о покупке нового холодильника или телевизора, обращаем внимание лишь на сотни рублей. Как и в случае физиологических шкал, в бытовых эмоциональных вопросах мы воспринимаем не абсолютное, а относительное различие. При этом оно становится для нас заметным и значимым, когда превышает несколько процентов от измеряемой величины. Похоже, что чувствительность нашего «измерителя эмоций» близка к чувствительности глаза, уха и прочих физиологических рецепторов.

Рассмотрим примеры нескольких эмоциональных шкал, предложенных в последние годы.

Туринская и палермская шкалы астероидной опасности

В 1999 году на конференции ООН по мирному использованию космического пространства Международный астрономический союз представил систему оценки угрозы возможных столкновений Земли с астероидами и кометами. Степень угрозы указывается по 11-бальной шкале, разработанной американским астрономом Ричардом Бинзелом. Поскольку автор впервые представил эту шкалу своим коллегам на симпозиуме в Турине, за ней закрепилось название «Туринская шкала астероидной опасности».

В целом шкала Бинзела подобна шкале Рихтера, используемой сейсмологами для указания разрушительной силы землетрясений. Обе они вполне доступны пониманию неспециалистов, в чем и заключается их несомненная польза. Туринская шкала позволяет классифицировать астероиды и другие небесные тела (с учетом их размера и скорости относительно нашей планеты) по 11 уровням степени их опасности для землян. Она учитывает не только вероятность столкновения астероида с Землей, но и потенциальные разрушения, к которым может привести катастрофа.

Как видно из таблицы 4, к нулевой категории отнесены те объекты, о которых с уверенностью можно сказать, что они не достигнут поверхности Земли, к первой категории – те, что все же заслуживают внимательного слежения, ко второй, третьей и четвертой отнесены малые планеты, вызывающие оправданное беспокойство. В пятую–седьмую категории включены тела, явно угрожающие Земле, а объекты из последних трех несомненно столкнутся с нашей планетой, причем последствия для ее биосферы могут быть локальными, региональными или глобальными. Туринская шкала оказалась полезной для классификации и объяснения публике возможных последствий космических столкновений. Хотя она не содержит четких количественных критериев, все же можно заметить, что с переходом к следующему баллу, эмоциональное напряжение возрастает на порядок.

Количественно это подтвердилось в недавно опубликованной профессиональной версии Туринской шкалы, названной Палермской шкалой опасности столкновения. Вместо баллов в ней используется непрерывный индекс PS (от Palermo Scale), определенный в виде логарифма отношения ожидаемой вероятности столкновения с конкретным объектом на интервале расчетного времени к фоновой вероятности столкновения с подобными объектами за это же время:

$$PS = \lg \frac{P_i}{f \Delta t},$$

где P_i – вероятность столкновения в момент сближения объекта с Землей, Δt – время, оставшееся до вероятного столкновения (в годах), f – фоновая частота столкновения с подобными или более опасными объектами. Последняя величина оценена как функция от энергии удара E (в мегатоннах ТНТ) в таком виде:

$$f = \frac{0,03}{E^{4/5}} \text{ событий в год.}$$

Таким образом, степень страха метеоритной опасности также имеет логарифмический характер.

Статистика военных потерь – шкала Ричардсона

А теперь мы обратимся к измерениям, связанным не с гипотетическими, а с реальными катастрофами нашей цивилизации – с войнами. Они происходят регулярно и порой кажутся неизбежными. Главный, а часто и единственный, результат войны – убийство людей. Кажущаяся неизбежность и трудность прогнозирования сближают войны с природными катаклизмами. Возможно, именно поэтому количественным изучением войн заинтересовался английский метеоролог Луис Ричардсон, написавший в результате своих исследований книгу «Статистика смертельной вражды» (1960 г.).

Чтобы разгадать логику войны, нужно непредвзято изучить явление и создать его обобщенный портрет. Ричардсон собрал массив данных о сотнях войн, происшедших в период между 1820 и 1945 годами. В качестве важнейшей характеристики войны, ее смертоносности, он предложил использовать индекс M – «магнитуду войны», определенную как десятичный логарифм числа погибших N:

$$M = \lg N .$$

Диапазон значений M – от локальных конфликтов до мировых войн – оказался такой же, как у землетрясений по шкале Рихтера: $3 < M < 8$. Задавшись вопросом о том, как часто случаются войны с определенным числом жертв, Ричардсон обнаружил, что чем больше людей гибнет на войне, тем меньше ее вероятность, т.е. тем реже происходят такие конфликты. Это соответствует и природным катастрофам: разрушительные штормы случаются реже сильных ливней.

Любопытно, что Ричардсон попытался экстраполировать полученную им зависимость в область глобальной катастрофы, способной уничтожить человечество ($M = 10$). Для этого печального события он получил характерное время ожидания около 1000 лет. Однако Карл Саган, обсуждая работу Ричардсона в своей книге «Космос» (1980 г.), предположил, что появление после 1945 года ядерного оружия должно изменить ход кривой Ричардсона: «последняя война», по мнению Сагана, может вспыхнуть в ближайшие 100 лет. События последних десятилетий, ослабившие военное противостояние супердержав, позволяют надеяться, что оценка Ричардсона ближе к истине.

Не менее интересной оказалась экстраполяция кривой Ричардсона в область малых значений M, вплоть до $M = 0$. Ричардсон предположил, что таким образом можно получить грубую оценку частоты происходящих в мире убийств. У него получилось, что где-то на Земле каждые пять минут убивают человека. В психологическом смысле это оправдано: убийство и война – это синонимы, даже если речь идет об одном человеке.

Как видим, свойственный человеческой физиологии и психике логарифмический закон расширяет динамический диапазон наших органов чувств, притупляя их реакцию на сильные раздражители и тем самым отодвигая болевой порог. Очевидно, в течение миллионов лет это способствовало выживанию вида *Homo sapiens*. Вопрос в том, не окажется ли это свойство нашей психики роковым для человечества в современную эпоху.

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

Руджер Божкович

А.ВАСИЛЬЕВ

На политической карте Европы нет в настоящее время государства «Далмация», подарившего миру одного из крупнейших астрономов и математиков своего времени – Руджера Божковича (1711–1787).

Божкович родился в Рагузе, на территории современной Хорватии, и получил начальное образование в иезуитском колледже своего родного города. С 1725 года он продолжил занятия в Риме, где поразил своими способностями профессоров математики Римского иезуитского колледжа, в частности он предложил свой собственный вывод теоремы Пифагора, а сразу по окончании колледжа был назначен преподавателем математики в этом колледже. Тогда же он обнаружил интерес к астрономическим проблемам, публикуя каждый год трактаты, названия которых говорят сами за себя: «Солнечные пятна» (1736 г.), «Траектория Меркурия» (1737 г.), «Северное сияние» (1738 г.), «Форма Земли» (1739 г.), «Движение небесных тел в безвоздушной среде» (1740 г.), «Различные эффекты гравитации» (1741 г.), «Аберрация неподвижных звезд» (1742 г.).

Проблемы чистой математики и разнообразные физические проблемы также привлекали его внимание. Божкович принимал участие во всех актуальных диспутах того времени, включая обсуждение отклонения формы Земли от идеальной сферы, расчет орбиты кометы из ограниченного числа наблюдений и так далее. Его участие в этих дискуссиях привлекло внимание ряда итальянских и иностранных академий, членом которых он был избран. Со знаменитым математиком Эйлером Божкович разделил приз за решение одной из задач, поставленных Французской академией.

В ряде научных трудов Божкович изложил концепцию, согласно которой все тела состоят из точечных структур, не имеющих геометрических размеров и не подверженных делению, причем между этими точками существует отталкивание на малых расстояниях и притяжение на больших расстояниях. В концепции Божковича впервые были введены частицы, движущиеся со скоростью света. Все это удивительным образом предвосхитило многие позднейшие открытия физики элементарных частиц.

Деятельность Божковича, разумеется, не ограничивалась написанием трактатов и участием в дискуссиях. Он был советником папы римского по многим техническим проблемам. В частности, благодаря Божковичу купол собора Св. Петра был укреплен железными дугами. Папа Бенедикт XIV поручил ему точный расчет длины меридиана, а влияние Божковича на папу, в свою очередь, привело к отмене в 1757 году запрета церкви на учение Коперника.

В 1764 году Божкович принял приглашение университета Павии занять пост профессора математики и примерно в то же время совместно с Лагранжем участвовал в организации обсерватории Брера в Милане. В 1772 году Божкович предполагал перебраться в университет Пизы, однако король Франции Луи XV переманил его на должность главного оптика военно-морского флота. В этой должности Божкович оставался до 1783 года, когда он вернулся в Италию для издания своих ранее неопубликованных книг. Последние годы жизни этот деятельный человек и гениальный провидец современной физики провел в одном из удаленных монастырей.

Любопытную оценку Божковичу дал великий французский математик Даламбер: «...Свои работы Божкович излагает скорее как гуру, которому известна абсолютная истина, нежели как исследователь, способный запутаться в собственных рассуждениях».

Этюд о формуле Эйлера

(Начало см. на с. 2)

$\sin^4\alpha + \sin^2\alpha - 1 = 0$. Нужный нам корень этого уравнения равен $\sin\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Замечание. В некоторых наших задачах «волшебным» образом появляется число из «золотого сечения»: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Причина этого нам неизвестна.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 17. Для данных двух окружностей рассматриваются два четырехугольника Эйлера – трапеция и дельтоид. Острый угол трапеции равен x, а острый угол дельтоида равен y. Найдите соотношение между этими углами.

(*Ответ*: $\sin y = \sin^2 x$.)

Задача 18. Четырехугольник Эйлера – дельтоид. Центр описанной окружности лежит на вписанной окружности. Найдите острый угол дельтоида.

(*Ответ*: $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.)

Задача 19. Решите задачу 4, используя формулу (35).

Задача 20. У двух дельтоидов Эйлера сумма острых углов равна 90°. Докажите, что если $\delta_1 = p/q$, где p и q положительны, то $\delta_2 = (q-p)/(q+p)$.

Задача 21. Найдите углы трапеции Эйлера, если радиус вписанной в нее окружности в полтора раза больше расстояния между центрами вписанной в нее окружности и описанной около нее окружности.

(*Ответ*: 60°, 120°.)

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июня 2007 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №2–2007» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2036» или «Ф2043». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2040 предлагалась на XXVIII Турнире городов.

Задачи М2036 – М2040, Ф2043–Ф2047

М2036. Андрей, Боря и Саша поделили 20 монет так, что не все монеты достались одному из них. После этого каждую минуту один из ребят отдает по одной монете двум другим. Через некоторое время у Андрея, Бори и Саши оказалось a, b и c монет соответственно. Найдите количество возможных троек (a, b, c).

К.Каибханов

М2037. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E; точки K и M – середины сторон AB и CD; точки L и N – проекции точки E на стороны BC и AD. Докажите, что прямые KM и LN перпендикулярны.

Фольклор

М2038. Фома и Ерема делят кучу из кусков сыра. Сначала Фома, если хочет, выбирает один кусок и режет его на два. Затем он раскладывает сыр на две тарелки. После этого Ерема выбирает одну тарелку, и они делят сыр на ней, беря себе по очереди по куску; начинает Ерема. Точно так же они делят сыр со второй тарелки, только первым начинает Фома. Докажите, что Фома всегда может действовать так, чтобы получить не менее половины сыра (по весу).

А.Шаповалов

М2039. Докажите, что для каждого натурального $n > 1$ найдется натуральное z, не представимое в виде $x^n - y!$, где x и y – натуральные.

Н.Агаханов

М2040. Положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$ удовлетворяют неравенствам

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 < \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{2},$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k < \frac{x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_k^3}{2}.$$

а) Докажите, что $k > 50$.

б) Укажите пример таких чисел для какого-нибудь k.

в*) Найдите наименьшее k, для которого такой пример возможен.

А.Толпыго

Ф2043. Груз массой 3 кг поднимают и опускают при помощи легкой нити и блока, ось которого закреплена неподвижно. Однажды блок «заело» – он перестал вращаться вокруг своей оси. При этом удается поднимать груз силой 40 Н, приложенной к свободному концу нити, и груз в этом случае движется вверх с постоянной скоростью. Какой груз нужно подвесить к свободному концу нити, вместо того чтобы тянуть нить, чтобы груз массой 3 кг двигался с той же скоростью вниз? Трение между нитью и блоком – сухое, коэффициент трения не зависит от прижимающего усилия.

А.Блоков

Ф2044. Гантелька состоит из тонкого легкого стержня длиной L и двух одинаковых маленьких шариков массой M каждый на концах стержня. В начальный момент гантелька стоит в углу комнаты вертикально, опираясь на пол и вертикальную стену. От очень малого толчка гантелька начинает двигаться, при этом один из концов скользит по полу, а другой продолжает касаться стены. Найдите силы, с которыми гантелька действует на пол и стену в тот момент, когда она составляет угол 45° с вертикалью. Трения нет.

А.Зильберман

Ф2045. Массивный клин с углом 60° при основании может двигаться по гладкому горизонтальному столу. На наклонной поверхности клина находится маленькая тележка. Когда тележка едет по неподвижному клину – мы его удерживаем, приложив к нему горизонтальную силу, – она давит на его поверхность силой f. Увеличим горизонтальную силу, действующую на клин, так, чтобы он двигался по горизонтали с постоянным ускорением. Найдите величину этой силы, если известно, что сила, с которой тележка давит на поверхность клина, стала вчетверо больше по величине. Масса клина в 5 раз больше массы тележки.

З.Рафаилов

Ф2046. В двух одинаковых сосудах находятся одинаковые массы кислорода и гелия. Давление кислорода 1 атм, давление гелия 2 атм. Сосуды соединяют тонкой трубкой, и газы перемешиваются. Каким станет давление в системе после установления равновесия? Теплообмен с окружающей средой пренебрежимо мал. Молярная масса кислорода 32 г/моль, гелия 4 г/моль.

А.Повторов

Ф2047. Многопредельный ампер-вольтметр для измерений в цепях постоянного тока сделан на основе точного микроамперметра с током полного отклонения 100 мкА и сопротивлением 850 Ом. При помощи многопозиционного переключателя к нему подключаются точно подобранные резисторы — добавочные сопротивления для измерения напряжений и шунты для измерения токов. Пределы измерения напряжений 1 В, 10 В и 100 В, пределы измерения токов 1 мА, 10 мА и 100 мА. Хотелось бы иметь более «подробные» пределы измерений, но кардинально переделывать точный и удобный прибор совсем не хочется. На передней панели прибора есть отдельный, не используемый для его работы переключатель на два положения – у переключателя три контакта. В одном его положении соединены между собой контакты *1* и *2*, а контакт *3* отключен, при другом положении отключен контакт *2*, а соединены контакты *1* и *3*. Придумайте и рассчитайте простую схему, которая позволяла бы «растянуть» шкалы прибора ровно в три раза на всех пределах измерения (шкала измерения напряжений 10 В превращается в 30 В, шкала измерения тока 1 мА – в 3 мА и т.д.) в одном из положений этого переключателя, а в другом положении все должно оставаться «как было». Кстати, эти положения переключателя можно обозначить *x1* и *x2*.

Р.Александров

Решения задач М2011–М2020, Ф2028–Ф2032

М2011. *Натуральные числа от 1 до 200 разбили на 50 множеств. Докажите, что в одном из них найдутся три числа, являющиеся длинами сторон некоторого треугольника.*

Рассмотрим числа 100, 101, ..., 200. Так как их всего 101, то какие-то три из них попадут в одно множество. Сумма любых двух из этих трех чисел больше 200, и, следовательно, больше третьего числа. Значит, существует треугольник с соответствующими длинами сторон, что и требовалось доказать.

М.Мурашкин

М2012. *В тетраэдре ABCD из вершины A опустили перпендикуляры AB', AC', AD' на плоскости, делящие двугранные углы при ребрах CD, BD, BC пополам. Докажите, что плоскость $B'C'D'$ параллельна плоскости BCD.*

Продолжим отрезок AB' до пересечения с плоскостью BCD в точке B''. Так как плоскости BCD и ACD симметричны относительно биссекторной плоскости, то $AB' = B'B''$. Аналогично по точкам C' и D' строим точки C'' и D''.

При гомотетии с центром A и коэффициентом $\frac{1}{2}$ плоскость $B''C''D'' = BCD$ переходит в плоскость $B'C'D'$, поэтому $B'C'D' \parallel BCD$, что и требовалось доказать.

А.Бадзян

М2013. *При каких натуральных n найдутся такие положительные рациональные, но не целые числа a и b, что оба числа a + b и $a^n + b^n$ целые?*

Ответ: при всех нечетных n.

Если n нечетно, то положим $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{2^n - 1}{2}$. Тогда $a + b$ целое, и

$$a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}\right) =$$

$$= 2^{n-1}\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}\right);$$

знаменатели слагаемых в скобках равны 2^{n-1}, поэтому число $a^n + b^n$ также целое.

Пусть n четное, $n = 2k$ для некоторого натурального k. Предположим, что требуемые числа a, b нашлись. Так как их сумма целая, то знаменатели в их несократимой записи равны, т.е. $a = \frac{p}{d}$, $b = \frac{q}{d}$, где $d > 1$, $\text{НОД}(p,d) = \text{НОД}(q,d) = 1$; при этом $p + q$ кратно d. Тогда

$$p^n + q^n = \left(p^{2k} - q^{2k}\right) + 2q^{2k} =$$

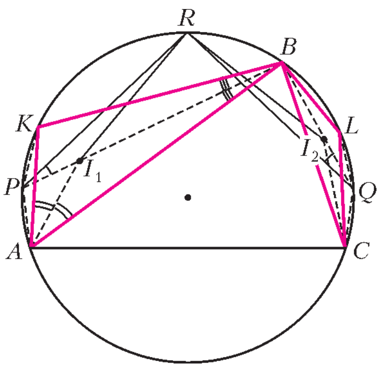
$$= \left(p^2 - q^2\right)\left(p^{2k-2} + p^{2k-4}q^2 + \ldots + q^{2k-2}\right) + 2q^{2k} =$$

$$= (p+q)K + 2q^{2k},$$

где $K = (p-q)\left(p^{2k-2} + p^{2k-4}q^2 + \ldots + q^{2k-2}\right)$ – целое число. Поскольку $a^n + b^n = \frac{p^n + q^n}{d^n}$ целое, то $p^n + q^n$ делится на d^n. В частности, $p^n + q^n$ делится на d, а так как $p + q$ делится на d, то и $2q^{2k}$ делится на d. Так как $\text{НОД}(q,d) = 1$, то 2 делится на d, и возможно лишь $d = 2$. Если $d = 2$, то p^n и q^n – квадраты нечетных чисел, следовательно, дают остаток 1 при делении на 4. Поэтому $p^n + q^n$ не делится на 4, а должно делиться на 2^{2k}. Противоречие.

В.Сендеров

М2014. *На дугах AB и BC окружности, описанной около треугольника ABC, выбраны точки K и L соответственно так, что прямые KL и AC параллельны. Докажите, что центры вписанных окружно-*



стей треугольников ABK и CBL равноудалены от середины дуги ABC.

Если $AB = BC$, то утверждение задачи очевидно. Пусть для определенности $AB > BC$ (см. рисунок).

Обозначим через I_1, I_2 центры вписанных окружностей треугольников AKB и CLB соответственно, через P, Q – вторые точки пересечения прямых BI_1, BI_2 с описанной окружностью треугольника ABC, а через R – середину дуги ABC этой окружности. Тогда $PA = QC$ как хорды, стягивающие половины равных дуг AK и CL. Так как $\angle PAI_1 = \angle PAK + \angle KAI_1 = \angle PBK + \angle BAI_1 = \angle ABI_1 + \angle BAI_1 = \angle AI_1P$, то треугольник AI_1P равнобедренный, и $PA = PI_1$. Аналогично, $QC = QI_2$; следовательно, $PI_1 = QI_2$. Далее, $PR = QR$ как хорды, стягивающие равные дуги, а $\angle I_2QR = \angle I_1PR$ как углы, опирающиеся на одну дугу. Тогда треугольники RI_1P и RI_2Q равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $RI_1 = RI_2$, что и требовалось.

С.Берлов

M2015. *Можно ли спаять проволочный каркас куба $2\times2\times2$, разбитого на кубики $1\times1\times1$ (рис.1), из восемнадцати деталей конструктора, в котором каждая деталь имеет вид:*

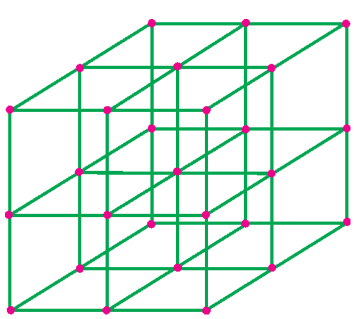


Рис. 1

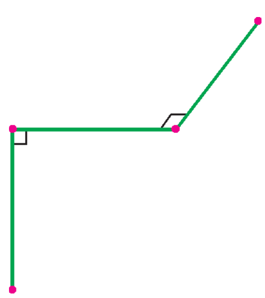


Рис. 2

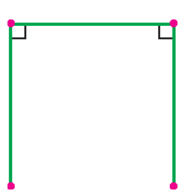


Рис. 3

а) скобки из трех попарно перпендикулярных спиц длины 1 (рис.2);
б) скобки из трех спиц длины 1 в виде буквы «П» (рис.3)?

Ответ: а) нельзя; б) нельзя.

Предположим, что каркас спаять удалось.

а) Так как каркас состоит из 54 единичных отрезков, то каждый единичный отрезок между узлами должен быть спицей ровно для одной детали. Из вершины куба выходят три отрезка (нечетное число), поэтому хотя бы одна деталь начинается в этой вершине. Если в одной из восьми вершин куба $2\times2\times2$ начинается деталь, то заканчивается она в центре куба. Отсюда следует, что центр является концом для 8 или более деталей. Но из центра куба выходят только 6 отрезков. Противоречие.

б) Из вершины куба выходят 3 отрезка, которые должны принадлежать не менее чем двум деталям. Из центра куба выходят 6 отрезков, которые должны принадлежать не менее чем трем деталям. Так как одна и та же деталь не может примыкать к двум вершинам или к вершине куба и к его центру, то необходимо не менее $2\cdot8+3=19$ деталей – противоречие.

Л.Емельянов

M2016. *У выпуклого многогранника 2n граней ($n \ge 3$), и все грани являются треугольниками. Какое наибольшее число вершин, в которых сходятся ровно 3 ребра, может быть у такого многогранника?*

Ответ: $\left[\dfrac{2n}{3}\right]$.

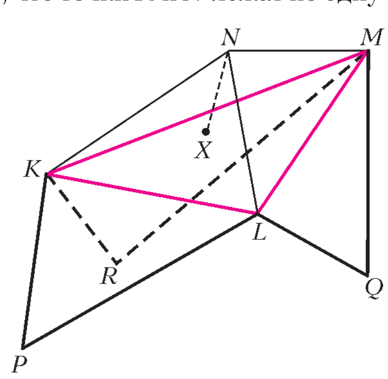
Назовем вершину, в которой сходятся ровно 3 ребра, *хорошей*.

Докажем, что никакие две хорошие вершины не лежат в одной грани. Предположим противное – пусть хорошие вершины A и B лежат в одной грани ABC. Ребро AB принадлежит еще одной грани – ABD. Поскольку вершина A хорошая, то кроме AB, AC, AD нет других ребер, выходящих из A. В вершине A сходятся ровно 3 грани – ABC, ABD и грань, содержащая ребра AC и AD, т.е. грань ACD. Аналогично получаем, что BCD является гранью многогранника. Получается, что многогранник является тетраэдром $ABCD$, что противоречит условию $n \ge 3$.

Из доказанного следует, что каждой хорошей вершине можно сопоставить три грани, сходящиеся в ней, причем различным хорошим вершинам сопоставлены разные грани. Отсюда следует, что количество хороших вершин не превосходит $\dfrac{2n}{3}$.

Остается описать построение выпуклого $2n$-гранника, для которого количество хороших вершин равно $\left[\dfrac{2n}{3}\right]$.

Определим вначале процедуру *наращивания грани* многогранника T с треугольными гранями. Пусть KLM – одна из граней (см. рисунок), KLP, LMQ, MKR – грани, отличные от KLM, содержащие ребра KL, LM, MK соответственно (точки P, Q, R не обязательно различны). Пусть X – некоторая внутренняя точка треугольника KLM. На перпендикуляре к плоскости KLM, восставленном в точке X, вне многогранника T выберем такую точку N, что точки K и N лежат по одну сторону от плоскости LMQ, L и N – по одну сторону от MKR, M и N – по одну сторону от KLP (этого можно добиться, выбирая длину XN достаточно малой). Рассмотрим многогранник T', получаемый добавлением к T пирамиды $KLMN$. По построе-



нию многогранник T' выпуклый. Будем говорить, что T' получен из T наращиванием грани KLM.

Если $n = 3$, то, нарастив одну из граней тетраэдра, получим пример шестигранника с двумя хорошими вершинами.

Пусть $n \geq 4$. В зависимости от остатка при делении на 3 представим n в виде $n = 3k$, $n = 3k - 1$ или $n = 3k - 2$ для некоторого натурального $k \geq 2$. Рассмотрим тетраэдр и нарастим некоторую его грань, у полученного многогранника нарастим еще одну грань и т.д. Повторим эту операцию $(k - 2)$ раз. При каждой операции количество граней увеличивается на 2, поэтому через $(k - 2)$ операции мы получим выпуклый $2k$-гранник, все грани которого треугольные. Отметим $n - k$ граней этого многогранника и последовательно их нарастим. При этом образуется выпуклый $2n$-гранник с $n - k = \left[\frac{2n}{3}\right]$ новыми вершинами, каждая из которых является хорошей.

А.Гарбер

M2017. *Квадрат 3000×3000 произвольным образом разбит на доминошки (т.е. прямоугольники 1×2 клетки).*

а) Докажите, что доминошки можно раскрасить в 3 цвета так, чтобы доминошек каждого цвета было поровну и у каждой доминошки было не более двух соседей ее цвета (доминошки считаются соседними, если они содержат клетки, соседние по стороне).

б) Докажите, что доминошки можно раскрасить в 4 цвета так, чтобы доминошек каждого цвета было поровну и ни у какой доминошки не было соседей ее цвета.

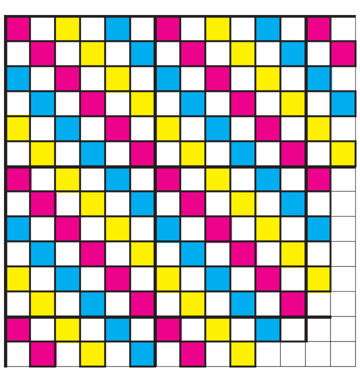


Рис. 1

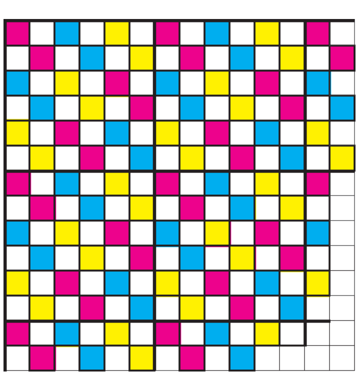


Рис. 2

Раскрасим клетки квадрата в черный и белый цвета в шахматном порядке. Каждая доминошка покрывает ровно одну черную клетку.

а) Разобьем квадрат 3000×3000 на квадраты 6×6 и в каждом квадрате перекрасим черные клетки в 3 цвета, как показано на рисунках 1 или 2. Окрасим доминошки в красный, синий и желтый цвета так, чтобы доминошка накрывала клетку своего цвета. В квадрате 6×6 поровну клеток каждого цвета, значит, и в квадрате 3000×3000 тоже. Следовательно, доминошек каждого цвета поровну. Пусть две клетки одного цвета покрыты соседними доминошками. Легко видеть, что для наших раскрасок это возможно только если эти две клетки имеют общую вершину. На рисунке 1 для фиксированной клетки имеется не более двух клеток того же цвета, имеющих с ней общую вершину, а на рисунок 2 – не более одной такой клетки.

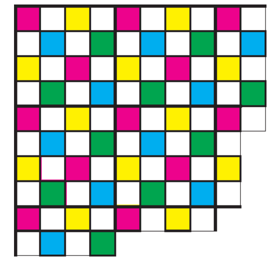


Рис. 3

Отсюда следует, что если использовать раскраску рисунка 1, то для любой доминошки имеется не более двух соседних доминошек того же цвета, а если использовать раскраску рисунка 2, то даже не более одной соседней доминошки того же цвета.

б) Разобьем квадрат 3000×3000 на квадраты 4×4 и в каждом квадрате перекрасим черные клетки в 4 цвета, как показано на рисунке 3. Окрасим доминошки в красный, синий, желтый и зеленый цвета так, чтобы доминошка накрывала клетку своего цвета. В квадрате 4×4 поровну клеток каждого цвета, значит, и в квадрате 3000×3000 тоже. Легко видеть, что две клетки одного цвета не могут быть покрыты соседними доминошками. Следовательно, при такой раскраске нет одноцветных соседних доминошек.

П.Кожевников

M2018. *Докажите, что если натуральное число N представляется в виде суммы трех квадратов целых чисел, делящихся на 3, то оно также представляется в виде суммы трех квадратов целых чисел, не делящихся на 3.*

Из условия следует, что число N можно представить в виде

$$9^n\left(a^2 + b^2 + c^2\right), \qquad (*)$$

где $n \in \boldsymbol{N}$, $a,b,c \in \boldsymbol{Z}$, a не делится на 3.

Лемма. *Всякое число вида $(*)$ можно представить в виде $9^{n-1}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$, где $x,y,z \in \boldsymbol{Z}$, x, y, z не делятся на 3.*

Без ограничения общности будем считать, что $a + b + c$ не делится на 3 (иначе число a можно заменить на $-a$). Имеем

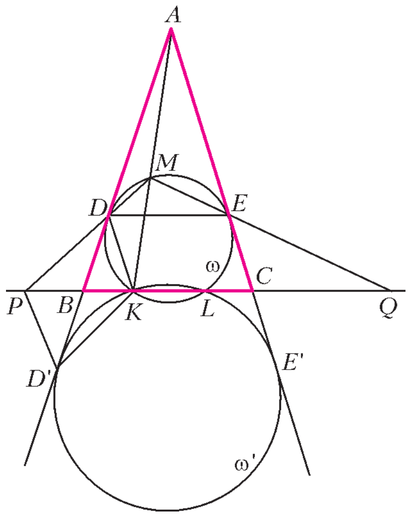
$$9\left(a^2 + b^2 + c^2\right) =$$
$$= \left(4a^2 + 4b^2 + c^2\right) + \left(4b^2 + 4c^2 + a^2\right) + \left(4c^2 + 4a^2 + b^2\right) =$$
$$= (2a + 2b - c)^2 + (2b + 2c - a)^2 + (2c + 2a - b)^2 .$$

Каждое из чисел $2a + 2b - c = 2(a + b + c) - 3c$, $2b + 2c - a = 2(a + b + c) - 3a$, $2c + 2a - b = 2(a + b + c) - 3b$ не делится на 3, так как $2(a + b + c)$ не делится на 3. Лемма доказана.

Для завершения решения осталось применить эту лемму n раз.

П.Козлов

M2019. *Окружность ω касается равных сторон AB и AC равнобедренного треугольника ABC и пересекает сторону BC в точках K и L. Отрезок AK пересе-*



кает ω второй раз в точке M. Точки P и Q симметричны точке K относительно точек B и C соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника PMQ касается окружности ω.

Обозначим через D и E точки касания ω со сторонами AB и AC. Из симметрии относительно биссектрисы угла BAC следует, что $DE \parallel BC$ (см. рисунок). Пусть при гомотетии с центром A и коэффициентом $\frac{AK}{AM}$ окружность ω переходит в окружность ω′. Окружность ω′ проходит через точку K, а следовательно, и через L (из симметрии относительно биссектрисы угла BAC), а также ω′ касается лучей AB и AC в некоторых точках D' и E'.

Из свойств гомотетии следует, что $MD \parallel KD'$. Далее, по теореме о произведении отрезков касательных $BD^2 = BK \cdot BL = BD'^2$, откуда $BD = BD'$. По построению $BK = BP$, поэтому $DKD'P$ – параллелограмм, а значит, $PD \parallel KD'$. Отсюда вытекает, что точки M, D, P лежат на одной прямой. Аналогично, точки M, E и Q лежат на одной прямой. Треугольники MDE и MPQ гомотетичны с центром M, следовательно, их описанные окружности также гомотетичны, т.е. касаются в точке M.

В.Филимонов

М2020*. *Известно, что многочлен $(x+1)^n - 1$ делится на некоторый многочлен $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + c_{k-2}x^{k-2} + \ldots + c_1x + c_0$ четной степени k, у которого все коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ – целые нечетные числа. Докажите, что n делится на k + 1.*

Из условия следует, что $(x+1)^n - 1 = P(x)Q(x)$, где $Q(x)$ – некоторый многочлен. Степень $Q(x)$ равна $n - k$, и все его коэффициенты целые (это вытекает, например, из алгоритма деления многочленов «столбиком»).

Будем называть два многочлена $f(x)$ и $g(x)$ *похожими* и обозначать $f(x) \equiv g(x)$, если коэффициенты при одинаковых степенях у многочленов $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковую четность. Тогда $P(x) \equiv x^k + x^{k-1} + \ldots + 1$ и

$$(x+1)^n - 1 \equiv \left(x^k + x^{k-1} + \ldots + 1\right)Q(x). \qquad (1)$$

Заменив в (1) переменную x на $\frac{1}{x}$ и домножив обе части на x^n, получаем

$$(x+1)^n - x^n \equiv \left(x^k + x^{k-1} + \ldots + 1\right)x^{n-k}Q\left(\frac{1}{x}\right). \qquad (2)$$

При этом $x^{n-k}Q\left(\frac{1}{x}\right)$ – это некоторый многочлен от x с целыми коэффициентами степени, не превосходящей $n - k$. Вычитая (2) из (1), имеем

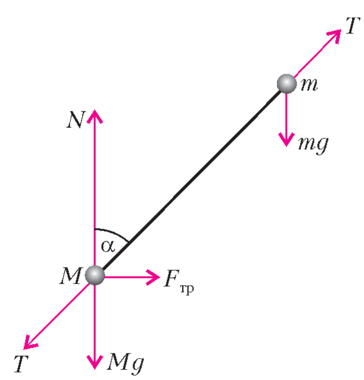
$$x^n - 1 \equiv \left(x^k + x^{k-1} + \ldots + 1\right)R(x)$$

для некоторого многочлена $R(x)$ с целыми коэффициентами. Пусть n не делится на $k+1$ и $n = q(k+1) + r$, $0 < r < k+1$. Тогда многочлен $x^n - x^r = x^r\left(x^{q(k+1)} - 1\right)$ делится на $x^{k+1} - 1 = \left(x^k + \ldots + 1\right)(x-1)$, а значит, $x^r - 1 = \left(x^n - 1\right) - \left(x^n - x^r\right) \equiv \left(x^k + \ldots + 1\right)R_1(x)$ для некоторого многочлена $R_1(x)$ с целыми коэффициентами. Это невозможно, ибо степень многочлена $x^r - 1$ не больше степени многочлена $x^k + \ldots + 1$, и они непохожи.

И.Богданов

Ф2028. *Легкий жесткий стержень длиной L с двумя маленькими массивными шариками на концах – масса нижнего шарика M, верхнего m – поставили на шероховатую горизонтальную поверхность под углом α к вертикали и отпустили. При каких значениях коэффициента трения μ между стержнем и столом проскальзывание начнется сразу после того, как мы отпустим стержень? Найдите ускорения шариков сразу после отпускания для конкретного случая: $M = m$, $\alpha = 30°$, $\mu = 0,2$.*

Рассмотрим «граничное» значение коэффициента трения: уже при чуть меньшем значении проскальзывание начнется сразу после того, как мы отпустим стержень. В этом случае (см. рисунок) $F_{тр} = \mu N$, и ускорение нижнего шарика массой M равно нулю. Тогда для этого шарика можно записать уравнение движения по горизонтали:



$$T \sin\alpha = \mu N$$

и по вертикали:

$$Mg + T\cos\alpha - N = 0.$$

Для верхнего шарика можно сказать следующее: его начальная скорость равна нулю, поэтому нормальная составляющая его ускорения (направленная вдоль стержня) также равна нулю, т.е.

$$mg\cos\alpha - T = 0.$$

Из этих уравнений легко найти «граничное» значение коэффициента трения μ:

$$\mu = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha + M/m}.$$

Для частного случая $M = m$ и $\alpha = 30°$ это значение равно $\sqrt{3}/7 \approx 0,25 > 0,2$ – это значит, что проскальзывание начинается сразу. Тогда ускорение верхнего шарика равно

$$a_1 = g\sin\alpha = \frac{g}{2} \approx 5 м/с^2$$

и направлено перпендикулярно стержню (это – касательная составляющая, нормальная же составляющая равна нулю). Для нижнего шарика ускорение направлено горизонтально и составляет

$$a_2 = \frac{mg\cos\alpha\sin\alpha - \mu\left(Mg + mg\cos^2\alpha\right)}{M} =$$
$$= g\left(\cos 30°\sin 30° - 0,2\left(1+\cos^2 30°\right)\right) \approx$$
$$\approx 0,084g \approx 0,84\ м/с^2.$$

А.Стержнев

Ф2029. *В глубоком космосе летает сосуд, содержащий кислород при температуре 300 К и давлении 1 атм. Непонятно откуда взявшаяся пуля пробивает в стенке сосуда небольшое отверстие, и газ начинает вытекать из сосуда. Рассмотрим момент, когда масса газа в сосуде уменьшилась на 1%. Оцените среднюю кинетическую энергию вылетевших наружу молекул.*

При такой концентрации частиц длина свободного пробега в сосуде очень мала, частицы двигаются к дырке практически не обгоняя друг друга. Это позволяет выделить в сосуде около дырки некоторую область, в которой находятся те частицы, которые вылетят наружу. Пусть объем этой части ΔV, тогда «окружающий» газ совершит работу $A = p\Delta V$, вытеснив эту часть наружу (мы учли, что наружу вышла небольшая часть газа – давление в сосуде при этом можно считать неизменным). Пренебрежем теплообменом выходящей порции газа с остальными частицами. В таком случае внутренняя энергия этой порции увеличится на $A = p\Delta V = \nu RT$ (где ν – количество газа в выходящей порции) и составит

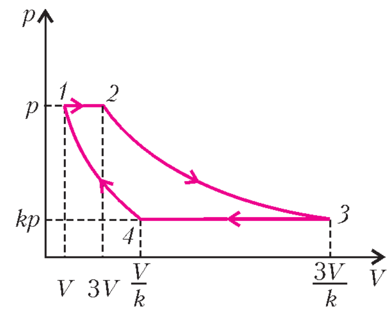
$$U = 1,5\nu RT + A = 1,5\nu RT + \nu RT = 2,5\nu RT.$$

Ясно, что средняя кинетическая энергия вылетевших наружу частиц составит $2,5\,kT \approx 10^{-20}$ Дж, т.е. она в $5/3$ раза больше средней кинетической энергии частиц в сосуде. Мы видим, что эта энергия соответствует большей температуре, хотя говорить о температуре вылетевших молекул было бы неправильно.

Р.Сложнов

Ф2030. *Цикл тепловой машины состоит из двух изотермических участков – сжатия при температуре T и расширения при температуре 3T, а также двух изобарических участков. Известно, что на участке изотермического расширения газ, а именно гелий, получает вдвое больше тепла, чем на участке изобарического расширения. Определите термодинамический КПД этого цикла.*

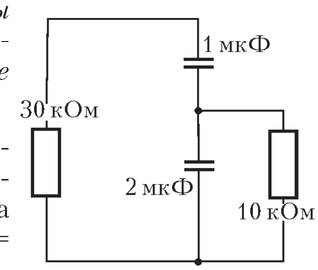
Обозначим (см. рисунок) давление в точке *1* буквой p, объем газа в этом состоянии – буквой V. Ясно, что в точке *2* объем увеличился в три раза. Пусть нижняя изобара соответствует давлению kp, тогда объем в точке *4* равен V/k, а в точке *3* он составит $3V/k$. На изобаре *1–2* газ совершает некоторую работу, такую же по модулю работу он совершает, сжимаясь по изобаре *3–4*, значит, сумма работ на обеих изобарах в сумме равна нулю. Если обозначить количество теплоты, полученное на изобаре *1–2*, буквой Q, то по условию задачи на изотерме *2–3* газ получит количество теплоты $2Q$. Именно такую работу он совершит, расширяясь от состояния *2* до состояния *3*. Теперь найдем работу, совершенную над газом при изотермическом сжатии *3–4*. Для этого заметим, что при равных давлениях на изотермах объемы всюду относятся как 3:1 – ясно, что работа $A_{41} = -A_{23}/3 = -2Q/3$. Окончательно получим, что термодинамический КПД цикла равен



$$\eta = \frac{A_{общ}}{Q_{получ}} = \frac{A_{12} + A_{41}}{Q + 2Q} = \frac{2Q - 2Q/3}{3Q} = \frac{4}{9} \approx 44\%.$$

Р.Простов

Ф2031. *Конденсаторы с емкостями 1 мкФ и 2 мкФ соединили последовательно и подключили к источнику напряжения 300 В. После этого источник отключили, а вместо него включили резистор сопротивлением 30 кОм. Одновременно резистор сопротивлением 10 кОм подключили параллельно выводам конденсатора большей емкости. Найдите заряды, протекшие через каждый из резисторов за большое время. Какое количество теплоты выделилось в меньшем из резисторов? Сопротивление проводов мало.*



Сразу после отключения батарейки напряжения конденсаторов составляют 100 В на конденсаторе емкостью $2C$ = = 2 мкФ и 200 В на конденсаторе емкостью C = 1 мкФ. Тогда при подключении резисторов (см. рисунок) по ним потекут токи I_1 = = 300 В/30 кОм = 10мА и I_2 = 100 В/10 кОм = 10мА. Видно, что конденсатор емкостью $2C$ разряжается током $I_1 + I_2 = 20$ мА, его заряд убывает вдвое быстрее, чем у конденсатора емкостью C, и напряжения на конденсаторах изменяются одинаково.

Заряды, протекшие через резисторы, можно найти, анализируя начальные и конечные заряды конденсаторов. В конце концов оба конденсатора окажутся полностью разряжеными. Тогда заряд, протекший через резистор сопротивлением 30 кОм, равен начальному заряду верхней обкладки верхнего конденсатора, т.е. $2CU/3 = 2 \cdot 10^{-4}$ Кл. Суммарный заряд изолированных вначале обкладок конденсаторов был равен нулю, и в конце он тоже нулевой. Значит, через резистор сопротивлением 1 кОм протек в сумме нулевой заряд, т.е. сначала ток через этот резистор тек в одну сторону, а потом – в другую.

Полная энергия системы сразу после отключения источника составляет

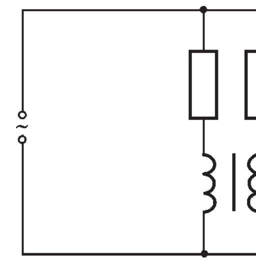
$$(2C/3)U^2/2 = \left(2 \cdot 10^{-6}/3\right)300^2/2 \text{ Дж} = 30 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

Именно это количество теплоты в сумме выделится на двух резисторах, а нам нужно посчитать долю этого тепла, выделившуюся в резисторе сопротивлением 10 кОм. Если бы токи так и оставались одинаковыми до полного разряда конденсаторов, то в этом резисторе выделилась бы втрое меньшая энергия – общее количество теплоты распределилось бы в отношении 3:1. Но так не получится, поскольку по мере разряда конденсаторов токи перестают быть одинаковыми (вот если бы отношения напряжений конденсаторов не изменялись, токи оставались бы равными друг другу). Равенство нарушится сразу, как только напряжения конденсаторов уменьшатся *на одну и ту же величину.* Сделаем еще одно приближение: если изменения напряжения одинаковы, то при уменьшении каждого напряжения на 100 В ток через резистор сопротивлением 10 кОм вообще прекратится,а вся оставшаяся энергия достанется резистору сопротивлением 30 кОм. Считая токи до этого момента одинаковыми, получим следующее: остаток энергии составит $\left(1 \cdot 10^{-6}/3\right)100^2/2$ Дж $= 5 \cdot 10^{-3}$ Дж, рассеявшиеся к этому моменту $25 \cdot 10^{-3}$ Дж поделятся в отношении 3:1, при этом резистору сопротивлением 10 кОм достанется примерно $6 \cdot 10^{-3}$ Дж, остальные $24 \cdot 10^{-3}$ Дж рассеются в резисторе сопротивлением 30 кОм.

Можно было бы ограничиться этим приближенным расчетом, но числа в условии явно округленные. В таком случае нужно либо считать все точно, аналитически (конечно, если получится), либо ограничиться приблизительной оценкой. Но аналитически считать в этой задаче получается с трудом (вот курсе на втором, да на Физтехе...) – посчитаем приближенно. Нашу оценку можно уточнить, если взять не сразу изменение на 100 В, а вначале, скажем, на 20 В, посчитать новые напряжения на конденсаторах и новые значения токов, потом еще на 20 В для конденсатора емкостью C, посчитать изменение на конденсаторе емкостью $2C$, найти новые токи и так далее. У меня такой расчет с помощью обычного инженерного калькулятора занял примерно 20 минут, получилось для резистора сопротивлением 10 кОм примерно $4 \cdot 10^{-3}$ Дж, а для второго резистора – $26 \cdot 10^{-3}$ Дж соответственно. Точное решение дает практически тот же результат.

А.Зильберман

Ф2032. *Трансформатор (см. рисунок) имеет две одинаковые обмотки, каждая обмотка содержит большое количество витков, тороидальный сердечник трансформатора сделан из материала с большой магнитной проницаемостью. Сопротивления резисторов 1 кОм и 3 кОм, индуктивность одной обмотки 10 Гн. Цепь подключена к источнику переменного напряжения 220 В, 50 Гц. Найдите токи через резисторы.*



Обмотки могут быть включены любым из двух способов – магнитные поля, создаваемые каждой обмоткой, либо суммируются, либо вычитаются. В таких схемах обычно показывают «начала» и «концы» обмоток, чтобы можно было с этим суммированием-вычитанием разобраться, на практике же часто действуют наугад, при необходимости переключая потом одну из обмоток. Пусть для определенности «начала» обмоток будут наверху, т.е. рассмотрим суммирование магнитных полей – это намного проще. В таком случае потенциалы точек соединения катушек с резисторами одинаковы (в другом случае они были бы противоположны), эти точки можно просто соединить между собой – для расчета токов резисторов. Магнитный поток создается суммарным полем:

$$\Phi = L\left(I_1 + I_2\right),$$

при этом можно считать, что

$$R_{\text{общ}}\left(I_1 + I_2\right) = U - \mathscr{E}_{\text{инд}} = U - \Phi'.$$

Получается обычная последовательная цепь из катушки индуктивностью $L = 10$ Гн и резистора сопротивлением $R = 750$ Ом. В этой цепи полный ток равен

$$I_1 + I_2 = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} =$$

$$= \frac{220 \text{ В}}{\sqrt{750^2 + 314^2 \cdot 10^2} \text{ Ом}} \approx 68 \text{ мА}.$$

Отношение токов резисторов равно 1:3, т.е. через резистор сопротивлением 3 кОм течет ток 17 мА, а сопротивлением 1 кОм – ток 51 мА.

Второй случай намного сложнее, без векторных диаграмм (или эквивалентного расчета при помощи комплексных чисел) там не обойтись. Остановимся на первом случае.

З.Рафаилов

Задачи

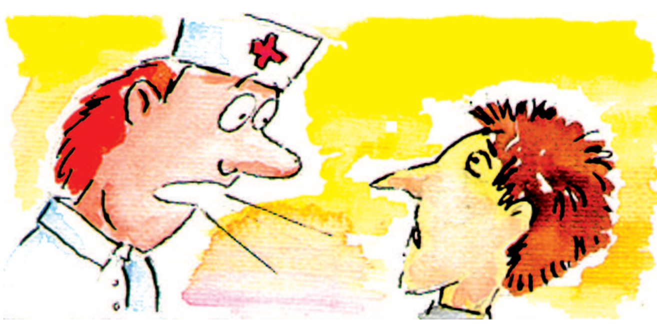
1. Три человека со стиральной машиной хотят переправиться через реку. Катер вмещает либо двух человек и стиральную машину, либо трех человек. Беда в том, что стиральная машина тяжелая, поэтому погрузить ее в катер или вытащить из него можно только втроем. Смогут ли они переправиться?

А.Шаповалов

2. «... Старший военный врач Бауце из *aabbb* граждан выловил *abccc* симулянтов и поймал бы на удочку последнего, если бы этого счастливчика не хватил удар в тот самый момент, когда доктор на него заорал: "Кругом!"...»

В этом отрывке из «Похождений бравого солдата Швейка» мы заменили все цифры латинскими буквами (одинаковые – одинаковыми, разные – разными). Сумеете определить, сколько симулянтов разоблачил бдительный доктор Бауце?

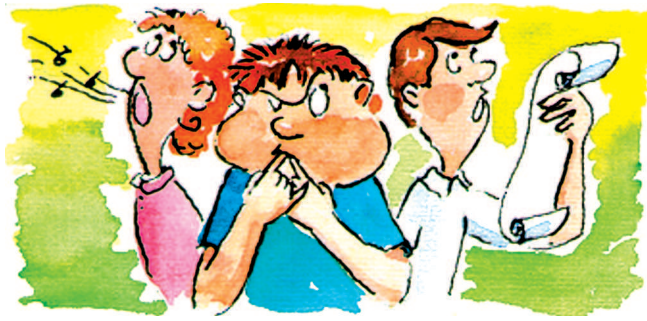
И.Акулич



3. В 8А классе учатся 27 школьников. Им предложили посещать кружки по пению, свистению и чтению стихов. Каждый хочет посещать один или несколько из этих кружков. Оказалось, что в каждый кружок желает ходить более трети класса. Можно ли составить такие списки кружков, что каждый будет ходить ровно в один кружок, в который хочет, и во всех кружках будет поровну школьников?

Д.Калинин

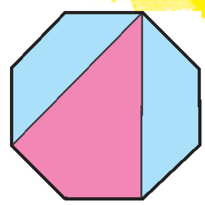
Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.



4. Щит короля Артура имеет форму восьмиугольника, который образовался из квадрата после отрезания одинаковых равнобедренных треугольников.

Красный цвет, символ мужества, занимает на щите ту же площадь, что и синий – символ справедливости. Как это показать, не прибегая к вычислениям?

В. Произволов



5. Клетчатая таблица 3×3 называется магическим квадратом, если все числа в ней различны и суммы чисел во всех строках, во всех столбцах, а также в диагоналях одинаковы (например, так, как показано на рисунке).

Существует ли магический квадрат, заполненный числами, обратными натуральным?

А.Шаповалов

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Иллюстрация Д.Гришуковой

Заключительный этап конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8»

База отдыха «Берендеевы поляны» под Судиславлем Костромской области уже стала традиционным местом проведения финальных соревнований конкурса имени А.П.Савина. Летом 2006 года здесь состоялся XII финальный летний турнир математических боев, который в очередной раз побил рекорд по количеству команд-участниц: тридцать шесть. На турнире присутствовали школьники из пятнадцати городов. Приехали отдельные команды из Иванова, Кирова, Костромы, Магнитогорска, Перми, Троицка, Харькова. Ну и, конечно же, больше всего команд представила Москва. Примечательная особенность последних турниров – соревнования стали привлекательными для девятиклассников.

В организации турнира, кроме журнала «Квант», приняли участие Московский городской дворец детского (юношеского) творчества (председатель оргкомитета турнира Г.Кондаков), образовательная программа «Большая перемена» (руководитель программы депутат областной думы и председатель Федерации профсоюзов Костромской области М.А.Батин), Департамент общего и профессионального образования администрации Костромской области, Фонд математического образования и просвещения. Спонсорскую помощь командам оказали также некоторые организации на местах. Так, школьники Черноголовки выражают свою благодарность Объединенной профсоюзной организации Научного центра «Черноголовка» РАН (зам. председателя Л.А.Ковалева).

Работу методической комиссии возглавил А.Шаповалов. В составе комиссии работали опытные члены жюри, не раз принимавшие участие в подобного рода мероприятиях: А.Акопян, М.Берштейн, А.Блинков (зам. председателя оргкомитета), Ю.Блинков, А.Горская, В.Гуровиц, А.Жуков, Д.Калинин, Т.Караваева, И.Раскина, В.Сендеров, А. Скопенков, А.Спивак, С.Токарев (организатор первых летних турниров), В.Трушков, Б.Френкин, Е.Чернышева, В.Шарич. Руководители команд также принимали активное участие в работе жюри: помогали судить отдельные бои, организовывать и проводить дополнительные интеллектуальные игры («Математическая регата», «Завалинка»). С лекциями перед школьниками выступили А.Скопенков («Найди количество раскрасок»), Н.Нетрусова («Узлы и косы»), А.Шаповалов («Принцип узких мест»).

Турнир проводился по традиционной схеме: командная олимпиада в первый день, по результатам которой команды были ранжированы по лигам, затем ежедневные математические бои, между которыми в один из дней прошла личная устная олимпиада.

Призеры личной олимпиады:

6 класс

Кадец Борис – Харьков, УВК 45 «Академическая гимназия»,
Матвеевский Дмитрий – Харьков, ФМЛ 27 (5 класс),
Лисичкин Сергей – Харьков, гимназия 47,
Коротов Денис – Москва, школа 936;

7 класс

Ивлев Федор – Москва, гимназия 1543,
Деревицкий Иван – Магнитогорск, школа 5,
Малых Софья – Киров, ФМЛ,
Николаев Семен – Москва, школа 1189,
Садовников Сергей – Волгореченск, школа 2,
Южанин Денис – Киров, ФМЛ,
Артемьева Галина – Москва, гимназия 1543,
Баева Светлана – Киров, ФМЛ,
Голицын Владимир – Харьков, ФМЛ 27,
Дудкин Александр – Харьков, ФМЛ 27,
Криволапов Владислав – Иваново, лицей 67,
Макаров Николай – Москва, школа 179,
Ноздрин Михаил – Магнитогорск, школа 5,
Панфилов Данила – Москва, ФМШ 2007,
Пожарский Богдан – Харьков, ФМЛ 27,
Редёга Владимир – Москва, гимназия 1543,
Тарасов Артем – Киров, ФМЛ,
Троицкий Алексей – Москва, школа 1189;

8 класс

Соболев Евгений – Харьков, гимназия 47,
Маянцев Кирилл – Волгореченск, школа 3,
Бочкарев Михаил – Пермь, школа 9 им. А.С. Пушкина,
Ефремов Дмитрий – Магнитогорск, школа 5,
Таранникова Екатерина – Москва, ФМШ 2007,
Турбина Наталья – Ангарск, школа 10,
Паламарчук Игорь – Москва, лицей «Вторая школа»,
Акопян Эмма – Москва, гимназия 1543,
Соболев Дмитрий – Харьков, гимназия 47,
Смирнова Алена – Москва, лицей «Вторая школа»,
Гавричев Егор – Москва, лицей «Вторая школа»;

9 класс

Андреев Михаил – Москва, школа 57 ,
Кисловская Анна – Кострома, лицей 32,

Ромаскевич Елена – Москва, гимназия 1543,
Бакаев Егор – Кострома, лицей 32,
Погребнов Алексей – Москва, гимназия 1543,
Марченко Евгений – Москва, гимназия 1543.

Команды-призеры

7 класс

гимназия 1543, 7 Б кл., Москва (руководитель М.М.Букина),
гимназия 1543, 7 А кл., Москва (руководитель Б.П.Гейдман),
«Квантик», Москва (руководитель И.А.Николаева),
ФМШ 2007, 7 кл., Москва (руководитель В.В.Ховрина),
школа 936, Москва (руководитель Т.П.Зорина);

7–8 классы

школа 17, Москва (руководитель Д.А.Коробицын),
ФМЛ, 7 кл., Киров (руководитель Л.А.Смирнова),
«Большая перемена», 7 кл., Кострома (руководитель Д.А.Калинин),
школа 5, Магнитогорск (руководители Н.С.Никифорова, А.В.Устинов),
«Эврика», 7 кл., Харьков (руководители Е.Л.Аринкина, А.Л.Берштейн);

8 класс, первая лига

школа 5, Магнитогорск (руководители А.В.Христева, А.С.Великих),
гимназия 1543, 8 А, Москва (руководитель Т.С.Гейдер);

8 класс, высшая лига

«Эврика», 8 кл., Харьков (руководитель Е.Л.Аринкина),
Московский городской дворец детского (юношеского) творчества (руководитель С.Е.Дубов),
школа 82, 8 кл., Черноголовка (руководитель Л.Н.Головко),
школа 9 им. А.С.Пушкина, Пермь (руководитель О.Н.Вязьмина),
гимназия 1543, 8 Б кл., Москва (руководитель А.В.Спивак);

9 класс

гимназия 1543, 9 кл., 9-3, Москва (руководитель А.В.Спивак),
гимназия 1543, 9 кл., 9-1, Москва (руководитель И.В.Раскина),
гимназия 1543, 9 кл., 9-2, Москва (руководитель А.В.Спивак),
«Большая перемена», 9 кл., Кострома (руководитель Д.А.Калинин).

Все победители награждены дипломами и призами, предоставленными журналом «Квант», а также Фондом математического образования и просвещения.

Подробные итоги турнира представлены на сайте www.lmsh.ru

Некоторые задачи турнира

(цифры в скобках указывают классы, для которых предлагалась соответствующая задача)

1 (6–7). Кеша вырезал из бумаги треугольник ABC с наибольшей стороной AB и перегнул его по прямой так, что вершина C попала на сторону AB и образовался четырехугольник. Укажите множество точек на стороне AB, куда могла попасть вершина C.

А.Шаповалов, В.Гуровиц

2 (8). Бумажный треугольник со сторонами a, b, c перегнули по прямой так, что вершина, противолежащая стороне c, попала на эту сторону. Известно, что в получившемся четырехугольнике равны два угла, примыкающих к линии сгиба. Найдите длины отрезков, на которые делит сторону c попавшая туда вершина.

А.Шаповалов

3 (7–8). На клетчатой бумаге закрасили многоугольник, периметр которого проходит по линиям сетки. Всегда ли можно вырезать по линиям сетки содержащий его прямоугольник того же периметра?

В.Сендеров

4 (7–9). Художник-абстракционист хочет раскрасить клетки доски 8×8 в $m > 1$ цветов так, чтобы выполнялось условие: если одинаково окрашенные клетки A и B граничат с клеткой C, то с C граничат еще две клетки, окрашенные одинаково, причем в цвет, отличный от цветов A и B. (Граничащими называем клетки, имеющие общую сторону.) При каких m он сможет это сделать?

Е.Барабанов, И.Акулич

5 (7–8). На числовой прямой отмечены все целые точки. Точки x и y соединяются дугой, если $|x - y|$ простое число. В какое наименьшее количество цветов можно покрасить все целые точки, чтобы любые две соединенные точки были разного цвета?

В.Гуровиц

6 (7–8). Найдите все тройки простых чисел, удовлетворяющие равенству

$$x^3 + y^3 = 2z^3.$$

В.Сендеров

7 (7–9). В однокруговом футбольном турнире участвовало 20 команд. Оказалось, что если какие-то две команды сыграли между собой вничью, то хотя бы одна из них завершила вничью не больше трех игр. Каково наибольшее возможное число ничьих в таком турнире?

И.Акулич

8 (8). Некоторые из сторон и диагоналей выпуклого n угольника ($n > 3$), никакие три диагонали которого не пересекаются в одной точке, покрасили в красный или синий цвет. Известно, что синие отрезки не пересекаются и между любыми вершинами есть единственный синий путь. То же верно для красных отрезков.

Найдите для каждого n наименьшее количество пересечений между красными и синими отрезками.

Б.Френкин

9 (8). Докажите, что существует бесконечно много приведенных квадратных уравнений с целыми коэффициентами, у которых один из корней равен дискриминанту.

А.Хачатурян

10 (8). Пусть x и y – неотрицательные числа, сумма которых не превосходит 1. Докажите, что $x^2+8x^2y^2+y^2 \le 1$.

В.Сендеров

11 (8). В треугольнике ABC на сторонах BC, CA и AB соответственно отмечены точки A_1, B_1 и C_1 так, что $\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{C_1A}{C_1B}=\frac{B_1C}{B_1A}=\alpha$, где $\alpha \in (0,1)$. На сторонах B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ отмечены точки A_2, B_2, C_2 так, что $\frac{A_2B_1}{A_2C_1}=\frac{C_2A_1}{C_2B_1}=\frac{B_2C_1}{B_2A_1}=\frac{1}{\alpha}$. Докажите, что треугольник $A_2B_2C_2$ подобен треугольнику ABC.

И.Рудаков

12 (8–9). Известно, что p и q – простые числа, причем p^2+q и p^2-q тоже простые. Найдите p и q.

Б.Френкин

13 (8–9). Найдите все положительные числа x, для которых число $\{x\}(x+[x])$ – целое. (Здесь $[x]$ – *целая часть числа* x, т.е. наибольшее целое число, не превышающее x, а $\{x\}=x-[x]$ – *дробная часть* числа x.)

Л.Радзиviловский

14 (8-9). Клетки доски $m \times n$ раскрашены в шахматном порядке в черный и белый цвета. Разрешается выбрать любые две соседние по стороне клетки и перекрасить их: белые клетки – в черный цвет, черные – в красный, а красные – в белый. При каких m и n можно добиться того, чтобы все белые клетки доски были покрашены в черный цвет, а черные – в белый?

М.Ахмеджанова, К.Кохась

15 (8–9). На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1, B_1 соответственно так, что $BC_1=C_1A_1=A_1B_1=B_1C$. Докажите, что точки пересечения высот треугольника $C_1A_1B_1$ лежат на биссектрисе угла A.

А.Мякишев

16 (8–9). Дан произвольный треугольник. На каждой стороне треугольника отмечено 14 точек, делящих ее на 15 равных отрезков. Каждая вершина треугольника соединена отрезками со всеми отмеченными точками противолежащей стороны. На сколько частей отрезки разделили треугольник?

В.Брагин

17 (8–9). Найдите наибольшее натуральное число n, которое делится на все натуральные числа, не превосходящие $\frac{n}{10}$.

И.Акулич

18 (9). Докажите неравенство

$$\left||x+y|^3+|x-y|^3 \ge 2\left(|x|^3+|y|^3\right).$$

В.Сендеров

19 (9). Назовем треугольники сходными, если у них равны как минимум две из трех сторон. Докажите, что найдется квадрат, который можно разбить на треугольники, сходные данному остроугольному треугольнику.

А.Шаповалов

20 (9). Каких чисел больше в первой тысяче: представимых или не представимых в виде $x^3-y!$, где x, y – натуральные?

Н.Агаханов, В.Сендеров

21 (9). Можно ли в клетках таблицы 100×100 расставить натуральные числа от 1 до 10000 так, чтобы суммы чисел во всех вертикалях, всех горизонталях и обеих диагоналях были нечетными?

В.Берник, И.Акулич

22 (9). Сумма положительных чисел x, y, z равна 1. Докажите неравенство $\frac{1}{1+4x^2}+\frac{1}{1+4y^2}+\frac{1}{1+4z^2} \ge 2$.

В.Шарич, В.Сендеров

23 (9). Пусть P – произведение некоторых восьми последовательных натуральных чисел, а Q – наименьший точный квадрат, для которого $Q>P$. Докажите, что разность $Q-P$ является точным квадратом.

С.Токарев

24 (9). В треугольнике ABC h_1, h_2, h_3 – высоты, d_1, d_2, d_3 – расстояния от некоторой внутренней точки до прямых AB, BC, CA. Докажите неравенство

$$\left(h_1^4+h_2^4+h_3^4\right)^3 \ge 3^{15}\left(d_1d_2d_3\right)^4.$$

В.Сендеров

Публикацию подготовили А.Жуков, Т.Караваева
Фотографии предоставил Д.Калинин

МАТЕМАТИКА ТУРНИРОВ

А.ЗАСЛАВСКИЙ, Б.ФРЕНКИН

Коэффициенты и определение победителя

В спортивных соревнованиях победителем считается участник турнира, набравший наибольшее число очков. Однако при этом никак не учитывается, против кого были набраны эти очки. Поэтому в методе парных сравнений иногда применяются более сложные способы упорядочения. Например, для турнира без ничьих можно определить коэффициент каждого участника, равный сумме очков, набранных теми, кого победил данный спортсмен.

Задача 22. *Оказалось, что у всех участников коэффициент одинаков. Число участников турнира больше двух. Докажите, что все спортсмены набрали одинаковое количество очков.*

Решение. Пусть не все набрали одинаковое число очков. Пусть, далее, занявшие первое место набрали K очков, а последнее – L очков. Коэффициент занявших первое место – это сумма K чисел, каждое из которых не меньше L. Значит, этот коэффициент не меньше KL. Аналогично, коэффициент занявших последнее место – это сумма L чисел, каждое из которых не больше K. Поэтому коэффициент занявших последнее место не превосходит KL. Если коэффициенты первых и последних равны, то они равняются KL. Это возможно только в том случае, если занявшие первое место выиграли только у (некоторых) набравших L очков, т.е. занявших последнее место, и обратно.

Если первое место заняли несколько спортсменов, то один из них выиграл у другого, что противоречит предыдущему. Значит, на первом месте один спортсмен – аналогично и на последнем. По условию в турнире есть третий участник. Из предыдущего следует, что он выиграл и у первого, и у последнего. Но тогда он набрал больше очков, чем первый, так как первый мог выиграть только у последнего. Получено искомое противоречие.

Задача 23. *Докажите, что определенный в предыдущей задаче коэффициент у участников с максимальной суммой очков не ниже среднего.*

Решение. Пусть N обозначает число участников турнира минус 1 (т.е. число встреч, сыгранных каждым участником). Одного из набравших наибольшее число очков назовем чемпионом. Тех, кто ему проиграл (соответственно, выиграл у него), для краткости будем называть просто «проигравшими» («выигравшими»). Пусть, далее, $M = \left[\left(N^2-1\right)/4\right]$. Покажем, что коэффициент чемпиона не ниже M. Допустим, чемпион набрал K очков. Число «выигравших» равно $N-K$, и каждый из них набрал не больше чемпиона, поэтому в сумме «выигравшие» набрали не больше $(N-K)K$. Общая сумма очков во всех матчах равна $N(N+1)/2$. Поэтому сумма очков «проигравших», т.е. коэффициент чемпиона, не меньше чем

$$N\cdot(N+1)/2-K-(N-K)\cdot K =$$
$$= N\cdot(N+1)/2-K\cdot(N+1-K) \geq N\cdot(N+1)/2-(N+1)^2/4 =$$
$$= (N+1)/2\cdot(N-1)/2 = \left(N^2-1\right)/4 .$$

Так как коэффициент чемпиона – целое число, то он не меньше M.

Теперь покажем, что средний коэффициент участников не больше M, откуда и следует утверждение задачи. Если спортсмен набрал X очков, то эти очки внесут вклад в коэффициенты тех $N-X$ участников, которые у него выиграли. В общей сумме коэффициентов появится слагаемое $X(N-X)$. Оно не превосходит $N^2/4$, но так как обязано быть целым, то при нечетном N не превосходит и $\left(N^2-1\right)/4$. Таким образом, оно не больше M.

Сумма коэффициентов равна сумме $(N+1)$ таких слагаемых. Чтобы получить средний коэффициент, нужно эту сумму разделить на $N+1$. Поэтому средний коэффициент участника турнира не выше M, что и требовалось.

Аналогично коэффициенту, введенному выше, определим для каждого участника второй коэффициент, равный сумме коэффициентов побежденных им участников, третий коэффициент, равный сумме их вторых коэффициентов, и так далее.

Задача 24. *Пусть k-е коэффициенты всех участников для некоторого k оказались равны. Верно ли, что все участники набрали поровну очков?*

Вообще говоря, ответ на вопрос задачи отрицателен: если 1-й участник выиграл у всех, 2-й – у всех, кроме 1-го, и т.д., то все $(n-1)$-е коэффициенты равны нулю. Попробуйте доказать, что этот пример единственный.

Задача 25. *Будем упорядочивать участников по их первым, вторым и т.д. коэффициентам. Верно ли, что, начиная с некоторого момента, порядок участников перестанет изменяться?*

В некоторых книгах по методу парных сравнений утверждается, что этот факт верен. Однако приводимое там доказательство, во-первых, не элементарно, а во-вторых, проходит не во всех случаях. Точный ответ на вопрос задачи нам неизвестен.

В турнирах с ничьими учитывать только результаты побежденных данным игроком противников, очевидно, нельзя. Поэтому для каждого участника i турнира подсчитаем его бергеровский коэффициент B_i, который определяется по такой формуле: сумма очков тех участников, у кого i выиграл, минус сумма очков тех, кому он проиграл. Отметим, что в шахматных соревнованиях бергеровский коэффициент применяется для определения мест тех участников, которые набрали поровну очков.

Задача 26 (А.Толпыго).

а) Может ли быть, что все $B_i > 0$?

б) Может ли быть, что все $B_i < 0$?

в) Известно, что $B_i \geq 0$ для всех i. Верно ли, что $B_i = 0$ для всех i?

г) Известно, что $B_i \leq 0$ для всех i. Верно ли, что $B_i = 0$ для всех i?

Указание к решению. Пункты а), б) этой задачи предлагались на Московской математической олимпиаде 2001 года. Для их решения достаточно рассмотреть сумму $\sum s_i B_i$, где s_i – сумма очков i-го участника. Она состоит из слагаемых вида $s_i s_j$, где партия между игроками i и j не завершилась вничью, причем каждое такое произведение входит в сумму один раз с плюсом и один раз с минусом. Следовательно,

---

Окончание. Начало см. в «Кванте» №1.

сумма равна нулю, и ответ на вопросы а), б) отрицательный. Более того, из проведенного рассуждения следует, что ответ на вопрос в) положительный. Напротив, в пункте г) ответ отрицательный: если один игрок проиграл все встречи, а остальные сыграли между собой вничью, то коэффициент последнего игрока отрицателен, а все остальные равны нулю.

Проигравший вылетает

Как известно, круговые турниры – не единственная существующая форма соревнований. В противоположность им, при кубковой (олимпийской) системе проигравший «вылетает», и ничьи невозможны. В таких соревнованиях роль случайности гораздо выше, но зато борьба протекает острее. Если круговому турниру отвечает полный граф (вершины – игроки, ребра – поединки, любые две вершины соединены ребром), то граф олимпийского турнира представляет собой бинарное дерево (циклов нет, и на пути, ведущем от висячей вершины к корню, в каждую промежуточную вершину входят два ребра и выходит одно).

Задача 27. *Турнир по боксу проходил по олимпийской системе (в каждом круге проигравшие выбывают, отдыхающих нет). Сколько боксеров участвовало в турнире, если по окончании турнира выяснилось, что 32 человека выиграли боев больше, чем проиграли?*

Решение. При олимпийской системе большинство боев выиграно у тех и только тех боксеров, которые вышли хотя бы в третий тур. Участники третьего тура составляют четверть от общего числа участников. Следовательно, в турнире участвовало 128 боксеров.

Интересно сравнить результаты возможных турниров с одними и теми же участниками, но проводимых по разным системам. Приведем две задачи на эту тему (автор К.Фельдман, см. статью Б.Френкина «Жеребьевка для чемпиона» в «Кванте» № 5 за 2000 год). Чтобы выделить то, что зависит от формы проведения, а не от игроков, примем «предположение о стабильной игре»: в каждой паре игроков победитель всегда один и тот же. Ничьи в круговом турнире между такими игроками исключены, поскольку их не бывает в кубковом турнире. Однако мы допускаем, что один игрок выигрывает у другого, другой – у третьего, а при этом третий выигрывает у первого.

Задача 28. *Прошел чемпионат по круговой системе с участием 2^N игроков. Теперь тем же спортсменам предстоит разыграть кубок. Выполнено предположение о стабильной игре. Докажите, что существует жеребьевка розыгрыша кубка, при которой чемпион кругового турнира выйдет в финал.*

Решение. Занумеруем игроков следующим образом. В начало списка поставим тех, кто победил чемпиона, т.е. «опасных». Далее – проигравших ему, т.е.«неопасных». Последний номер дадим чемпиону. В каждом туре розыгрыша кубка составим пары по порядку номеров.

Чемпион выступил не хуже «среднестатистического» участника, который выиграл столько же, сколько и проиграл. Значит, число «опасных» не больше числа «неопасных» . Все «опасные» попадут в первую половину списка, тогда как чемпион – во вторую. Поэтому чемпион не встретится с «опасным» игроком раньше финала, что и требовалось.

Задача 29. *В условиях предыдущей задачи докажите, что существует жеребьевка, при которой чемпион кругового турнира получит кубок.*

Решение. Каждый из «опасных» (выигрывающих у чемпиона) проиграл в чемпионате кому-то из «неопасных» (иначе он бы выиграл больше матчей, чем чемпион, что невозможно). Составим первую пару розыгрыша кубка из «опасного» и такого «неопасного», которому он проиграл. Следующие пары составляем таким же образом, пока это возможно. Допустим, остались «опасные», которых нельзя включить в такие пары (они проиграли в чемпионате тем «неопасным», которые уже вошли в предыдущие пары). Тогда пусть эти «опасные» играют между собой. Если один из них останется без пары, то поступим следующим образом.

Общее число «опасных» не больше числа «неопасных» (поскольку чемпион выступил не хуже «среднестатистического» игрока, который выиграл и проиграл поровну). В составленных парах не больше «неопасных» игроков, чем «опасных», и еще один «опасный» остался без пары. Значит, кто-то из «неопасных» не был еще включен в пару – пусть с ним и играет оставшийся «опасный».

Остальные игроки объединяются в пары произвольно. Чемпион выйдет в следующий тур, поскольку играет с «неопасным». Если в остальных турах пары строятся по тому же правилу, то чемпион получит кубок. Это заведомо возможно, если в каждом туре «опасные» составляют менее половины участников. Допустим, что вплоть до некоторого тура мы обеспечили выполнение этого условия. Покажем, что и в следующем туре можно этого добиться.

Поскольку в следующий тур выходит половина участников предыдущего, то достаточно показать, что отсеивается не меньше половины «опасных». Но в матчах между ними выбывает каждый второй участник. Только один «опасный» может выиграть у «неопасного». Поэтому достаточно, чтобы в том же туре хотя бы один «опасный» проиграл «неопасному». Как мы видели, в первом туре это выполнено. В последующие туры выходили только такие «опасные», которые проигрывают кому-то из «неопасных», также вышедших в этот тур. И первая же пара составлялась из «опасного» и такого «неопасного», которому он проигрывает. Наше утверждение доказано.

В заключение этого параграфа приведем задачу, в которой рассматривается еще одна форма соревнований – игра на вылет. Несмотря на простоту формулировки и решения, задача оказалась трудной для участников отбора на Российскую олимпиаду 1998 года.

Задача 30. *Группа школьников играет в пинг-понг на вылет. Они установили очередь, вначале играют первый и второй, а в дальнейшем каждый очередной участник играет с победителем предыдущей пары. На следующий день те же школьники снова играют на вылет, но очередь идет в обратную сторону – от последнего к первому. Докажите, что найдутся два школьника, которые играли между собой и в первый день, и во второй.*

Решение. Соперник последнего игрока в первый день играет со всеми, кто стоит позже него в очереди. С одним из них он играет свою первую партию во второй день.

Еще несколько задач

В приведенных ниже задачах, как правило, требуется выяснить, можно ли выбрать из данного турнира подмножество игроков, обладающее некоторым свойством. Часть этих задач не решены.

Задача 31.

а) Докажите, что в турнире без ничьих из n участников можно занумеровать их так, что 1-й выиграл у 2-го, 2-й у 3-го,…, $(n-1)$-й у n-го и 1-й у n-го.

б) Докажите, что в турнире без ничьих либо существует цикл, включающий всех участников, либо можно разбить участников на две группы так, что любой игрок из первой группы победил любого из второй.

Задача 32. *В круговом турнире с 2^N участниками не было ничьих. Докажите, что существует цепочка из $N+1$ участника, каждый из которых победил всех последующих.*

Утверждение задачи легко доказать по индукции. Однако вопрос о том, насколько можно уменьшить число 2^N, значительно сложнее. Можно привести пример турнира 7 участников, никакие 4 из которых не образуют транзитивного подтурнира. Но в любом турнире с 15 участниками найдутся 5, каждый из которых победил всех последующих. При каком максимальном числе участников существует турнир без таких цепочек длины k, неизвестно.

Задача 33. *В круговом турнире участвовали n спортсменов, имевших номера от 1 до n. Участник с номером 1 сделал 1 ничью, с номером 2 сделал 2 ничьих, …, участник с номером n − 1 сделал n − 1 ничью. Сколько ничьих сделал участник с номером n?*

Ответ. $[n/2]$.

Решение. Участник с номером $n-1$ сыграл вничью со всеми остальными спортсменами. Так как 1-й сделал лишь одну ничью, то он не сыграл вничью ни с кем, кроме $(n-1)$-го. Участник $n-2$ не сделал ничью лишь с одним спортсменом, и по доказанному это 1-й. Значит, 2-й сыграл вничью и с $(n-1)$-м, и с $(n-2)$-м (если только он не совпадает с одним из них, т.е. если $n > 4$; случай малых n легко разбирается, и ответ будет аналогичным). Так как у 2-го участника всего 2 ничьи, то больше он ни с кем не сыграл вничью. Из сказанного видно, что $(n-1)$-й и $(n-2)$-й участники сделали ничью с n-м, а 2-й не сделал. Продолжая в том же духе, получаем, что при $i \le (n-1)/2$ участник i сыграл вничью с участниками $n-1, \ldots, n-i$, а участник $n-i$ сыграл вничью с участниками от i до n (разумеется, не считая себя). Этим решена задача для нечетного n: с n-м участником сделали ничьи $(n-1)/2 = [n/2]$ спортсменов. При четном n осталось рассмотреть участника $n/2$. В силу сказанного выше, меньшие номера не сделали с ним ничьих. Так как всего он сделал $n/2$ ничьих, то он сыграл вничью со всеми последующими номерами, включая n. Это означает, что участник n сделал $n/2 = [n/2]$ ничьих.

Будем говорить, что турнир обладает свойством P_k, если для любых k участников найдется участник, победивший их всех.

Задача 34 (А.Толпыго).

а) Докажите, что если в любом турнире, обладающем свойством P_k, участвуют не менее n игроков, то в любом турнире, обладающем свойством P_{k+1}, участвуют не менее 2n + 1 игроков.

б) При каком наименьшем n существует турнир n игроков со свойством P_2? (**Ответ.** $n = 7$.)

в) Постройте турнир 19 игроков со свойством P_3. (**Ответ.** Занумеруем игроков числами от 0 до 18, и пусть игрок i выигрывает у игрока j тогда и только тогда, когда $i - j \equiv l^2 \pmod{19}$.)

г) Докажите, что турниры со свойством P_k существуют для любого k. (Указание. Оцените вероятность того, что в турнире n участников данные k не имеют общего победителя.)

Ответ на вопрос, при каком минимальном n существует турнир n участников со свойством P_k, неизвестен даже при $k = 3$. Из пунктов а), б), очевидно, следует, что $n \ge 15$, а из пункта в) – что $n \le 19$. Для больших значений k неизвестны даже приблизительные оценки.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Энергетический метод исследования колебаний

А.ЧЕРНОУЦАН

Одна из важных задач теории колебаний – найти период малых колебаний механической системы около положения равновесия. В школьном курсе физики количественно рассматриваются колебания систем только с одной степенью свободы (положение которых задается одним параметром – смещением, углом отклонения и т.д.) и происходящие без потерь энергии. Простейшие примеры таких систем – груз на пружине и математический маятник.

Обычно колебания таких систем изучаются *динамическим* методом. Этот метод состоит в приведении уравнения движения системы (второго закона Ньютона) к виду, соответствующему *уравнению гармонических колебаний*

$$x'' + \omega^2 x = 0, \qquad (1)$$

где x'' – вторая производная от параметра x по времени. Однако в некоторых случаях школьнику оказывается сложно записать уравнение движения. Это относится в первую очередь к системам с распределенной массой. Например, для получения уравнения колебаний протяженного твердого тела – *физического маятника* – нужно записать уравнение динамики вращательного движения, но его в школе не изучают. И тут, как всегда, на помощь приходит закон сохранения энергии, который позволяет существенно расширить круг задач, доступных для решения школьными методами.

В чем же заключается *энергетический* метод исследования колебаний? Можно сказать, что он состоит в сопоставлении энергии колебательной системы с энергией простейшего маятника – груза массой m на пружине жесткостью k. Если выражение для механической энергии системы, отклонение которой от положения равновесия определяется параметром x, удалось привести к виду

$$E = \frac{m_{эф} x'^2}{2} + \frac{k_{эф} x^2}{2}, \qquad (2)$$

то система совершает гармонические колебания

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

циклическая частота которых равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{эф}}{m_{эф}}}. \qquad (3)$$

Коэффициент $m_{эф}$ в выражении для кинетической энергии называют *эффективной массой* (часто она совпадает с массой системы), а коэффициент $k_{эф}$ в выражении для потенциальной энергии – *эффективной жесткостью*. Действительно, поскольку механическая энергия сохраняется, производная от нее по времени равна нулю:

$$E'(t) = 0 = m_{эф}x'x'' + k_{эф}xx'$$

и выполняется уравнение гармонических колебаний (1):

$$x'' + \frac{k_{эф}}{m_{эф}}x = 0 .$$

Для примера того, как работает энергетический метод, покажем, как с его помощью найти циклическую частоту колебаний математического маятника с массой груза m и длиной нити l. В качестве параметра x выберем смещение груза маятника вдоль дуги окружности из положения равновесия. Кинетическая энергия маятника равна $mx'^2/2$, т.е. эффективная масса равна массе груза. Потенциальная энергия для малых отклонений ($x \ll l$) равна

$$E_п = mgh = mgl(1-\cos\alpha) = 2mgl\sin^2\frac{\alpha}{2} = mgl\frac{\alpha^2}{2} = \frac{mg}{l}\frac{x^2}{2}, \tag{4}$$

где $\alpha = x/l$ – угол отклонения маятника. Таким образом, эффективная жесткость равна mg/l, а циклическая частота колебаний составляет $\omega = \sqrt{\frac{k_{эф}}{m_{эф}}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Теперь перейдем к рассмотрению задач с протяженными телами.

Задача 1. *Стержень длиной l = 40 см изогнули по дуге окружности в виде полукольца и с помощью невесомых спиц прикрепили к горизонтальной оси, проходящей через центр окружности. Найдите циклическую частоту малых колебаний полукольца около положения равновесия, если ось вращения перпендикулярна его плоскости. Ускорение свободного падения g = 9,8 м/с^2.*

В качестве параметра x, определяющего положение системы, выберем смещение точек стержня вдоль дуги окружности из положения равновесия (рис.1). Тогда кинетическая энергия маятника равна $mx'^2/2$, т.е. эффективная масса равна массе стержня. Расчет потенциальной энергии стержня на первый взгляд кажется сложной задачей – ведь мы не знаем положение центра тяжести. Однако существует простое рассуждение, основанное на симметрии стержня. При повороте стержня на угол $\alpha = x/R$ (здесь R – радиус кольца) бóльшая его часть перейдет сама в себя, и для подсчета потенциальной энергии можно будет считать, что мы перенесли кусочек длиной x и массой mx/l с одного конца стержня на другой (это хорошо видно на рисунке 1). При этом центр кусочка сместится вверх на x, т.е. изменение потенциальной энергии стержня составит

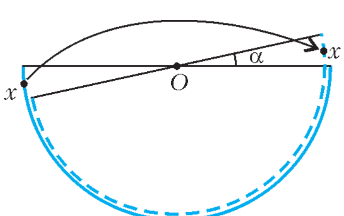


Рис. 1

$$E_п = \frac{mx}{l}gx = \frac{2mg}{l}\frac{x^2}{2} \tag{5}$$

(потенциальная энергия колебательной системы в положении равновесия всегда принимается равной нулю). Значит, эффективная жесткость системы составляет $k_{эф} = 2mg/l$, а циклическая частота малых колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{эф}}{m_{эф}}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} = 7\ с^{-1} .$$

Задача 2. *В U-образную трубку сечением S = 10 см^2 налили m = 400 г воды. Пренебрегая трением, найдите циклическую частоту вертикальных колебаний жидкости в трубке. Ускорение свободного падения g = 9,8 м/с^2.*

Поскольку вода в разных коленах трубки движется в разных направлениях, не очень ясно, как корректно записать уравнение движения жидкости. Проще найти энергию жидкости. Если вода сместилась на x из положения равновесия, то, как и в предыдущей задаче, можно считать, что столбик воды длиной x и массой ρSx переместился из одного колена в другое (рис.2). Изменение потенциальной энергии воды равно

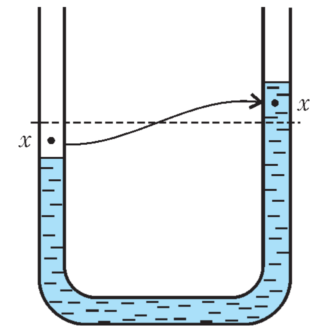


Рис. 2

$$E_п = (\rho Sx)gx = 2\rho gS\frac{x^2}{2},$$

где $\rho = 1$ г/см^3 – плотность воды. Итак, эффективная жесткость равна $k_{эф} = 2\rho gS$, эффективная масса равна массе воды, а циклическая частота колебаний составляет

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{эф}}{m_{эф}}} = \sqrt{\frac{2\rho gS}{m}} = 7\ с^{-1} .$$

Задача 3. *Невесомый стержень изогнули в виде дуги, составляющей 1/3 длины окружности радиусом R = 5 см, и с помощью невесомых спиц прикрепили к горизонтальной оси, проходящей через центр окружности перпендикулярно ее плоскости. К концам стержня прикрепили два одинаковых груза. Найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.*

В качестве параметра, определяющего отклонение системы от положения равновесия, примем (для разнообразия) малый угол отклонения α. Кинетическая энергия системы равна

$$E_к = 2\frac{mv^2}{2} = \frac{2mR^2\omega^2}{2} = 2mR^2\frac{\alpha'^2}{2},$$

т.е. эффективная масса равна $m_{эф} = 2mR^2$ (здесь m – масса груза). Потенциальную энергию удобно выразить через изменение высоты центра тяжести, который расположен посередине между грузами на расстоянии $l = R\cos 60^\circ = R/2$ под точкой подвеса:

$$E_п = 2mgl(1-\cos\alpha) = 2mgl\frac{\alpha^2}{2} = mgR\frac{\alpha^2}{2} .$$

Следовательно, эффективная жесткость равна $k_{эф} = mgR$, и циклическая частота малых колебаний составляет

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{эф}}{m_{эф}}} = \sqrt{\frac{g}{2R}} = 10\ с^{-1} .$$

Попробуйте для упражнения получить этот ответ, выбрав в качестве параметра не угол α, а более привычное смещение грузов $x = R\alpha$.

Задача 4. *Стержень массой M = 20 г и длиной l = = 118 см изогнули в форме полукольца и с помощью невесомых спиц прикрепили к горизонтальной оси, проходящей* *через центр кольца перпендикулярно его плоскости. К середине стержня прикрепили груз массой $m = 100$ г. Найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2; число $\pi = 3{,}14$.*

Эту задачу можно считать объединением примера с математическим маятником и задачи 1 с полукольцом. Соответственно, для вычисления потенциальной энергии надо применять и метод вычисления высоты при малом угле отклонения (формула (4)), и метод «перемещения кусочка» из задачи 1 (формула (5)):

$$E_{\text{п}} = mgR(1-\cos\alpha) + \frac{Mx}{l}gx = \frac{mg}{R}\frac{x^2}{2} + \frac{2Mg}{l}\frac{x^2}{2} = \frac{(\pi m + 2M)\,g}{l}\frac{x^2}{2}.$$

Поскольку кинетическая энергия системы равна

$$E_{\text{к}} = (m+M)\frac{x'^2}{2},$$

для циклической частоты малых колебаний получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{эф}}}{m_{\text{эф}}}} = \sqrt{\frac{\pi m + 2M}{m+M}\frac{g}{l}} = 5\ \text{с}^{-1}.$$

Задача 5. *Невесомый стержень длиной $l = 3{,}5$ м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. К свободному концу стержня прикрепили груз массой m, а к середине стержня – груз массой $3m$. Найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.*

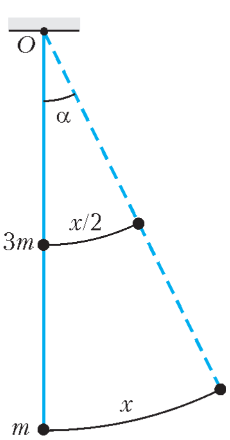


Рис. 3

В качестве параметра отклонения выбираем смещение x нижнего груза вдоль дуги окружности (рис.3). Смещение верхнего груза при этом составляет $x/2$, а кинетическая энергия системы равна

$$E_{\text{к}} = \frac{mx'^2}{2} + \frac{3m(x'/2)^2}{2} = 1{,}75m\frac{x'^2}{2},$$

т.е. эффективная масса системы для этого параметра отклонения составляет $m_{\text{эф}} = 1{,}75m$. Потенциальная энергия системы равна

$$E_{\text{п}} = mgl(1-\cos\alpha) + 3mg\frac{l}{2}(1-\cos\alpha) = \frac{2{,}5mg}{l}\frac{x^2}{2},$$

т.е. $k_{\text{эф}} = 2{,}5mg/l$. Для циклической частоты малых колебаний получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{эф}}}{m_{\text{эф}}}} = \sqrt{\frac{10}{7}\frac{g}{l}} = 2\ \text{с}^{-1}.$$

В качестве упражнения попробуйте получить этот же ответ, выбрав в качестве параметра отклонения угол $\alpha = x/l$.

Задача 6. *Невесомый стержень длиной $l = 50$ см может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. К свободному концу стержня прикрепили груз массой $m = 0{,}5$ кг, а середину стержня с помощью горизонтальной пружины жесткостью $k = 32$ Н/м соединили с вертикальной опорой. При вертикальном расположении стержня пружина не деформирована. Найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.*

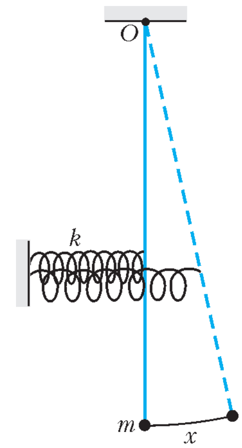


Рис. 4

За параметр отклонения возьмем смещение груза x из положения равновесия вдоль дуги окружности (рис. 4). При таком смещении деформация пружины равна $x/2$, и потенциальная энергия системы имеет вид

$$E_{\text{п}} = \frac{mg}{l}\frac{x^2}{2} + k\frac{(x/2)^2}{2} = \left(\frac{mg}{l} + \frac{k}{4}\right)\frac{x^2}{2}.$$

Очевидно, что эффективная масса равна массе груза. Тогда циклическая частота малых колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{эф}}}{m_{\text{эф}}}} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{4m}} = 6\ \text{с}^{-1}.$$

Задача 7. *Около дна горизонтального полого цилиндра катается взад-вперед маленькое тонкое колечко, оставаясь все время в вертикальной плоскости, перпендикулярной оси цилиндра. Найдите циклическую частоту такого колебательного движения. Внутренний радиус цилиндра $R = 1{,}25$ м, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.*

При качении без проскальзывания трение покоя работу не совершает, и механическая энергия сохраняется. Для решения этой задачи надо знать, что кинетическая энергия катящегося со скоростью v колечка (обруча, тонкостенного цилиндра) массой m равна

$$E_{\text{к}} = mv^2.$$

Это утверждение является следствием общей теоремы о том, что кинетическая энергия любой системы может быть представлена в виде суммы двух слагаемых: кинетической энергии поступательного движения системы как целого со скоростью центра масс и кинетической энергии в системе отсчета, связанной с центром масс:

$$E_{\text{к}} = \frac{mv_{\text{ц}}^2}{2} + E_{\text{отн}}.$$

В случае катящегося колечка относительное движение представляет собой чистое вращение колечка вокруг своей оси. Из условия отсутствия проскальзывания следует, что линейная скорость вращения равна $v_{\text{ц}}$, т.е. кинетическая энергия такого вращения есть $E_{\text{отн}} = mv_{\text{ц}}^2/2$.

Впрочем, можно вывести исходное утверждение специально для колечка, не опираясь ни на какие дополнительные теоремы. Для этого надо рассмотреть два маленьких диаметрально противоположных элемента кольца массой Δm каждый, вычислить их скорости по закону сложения скоростей (с помощью теоремы косинусов) и убедиться, что их полная кинетическая энергия равна $2\Delta m v_{\text{ц}}^2$.

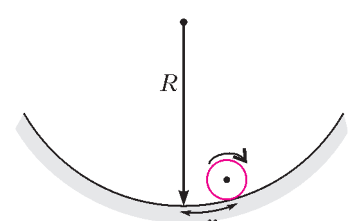


Рис. 5

Если в качестве параметра отклонения выбрать смещение x колечка от нижней точки по дуге окружности (рис.5), то энергия колечка записывается в виде

$$E = 2m\frac{x'^2}{2} + \frac{mg}{R}\frac{x^2}{2}$$

(см. формулу (4)). Циклическая частота колебательного движения колечка равна

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{2R}} = 2\ \text{с}^{-1}.$$

Следующие три задачи показывают, как работает энергетический метод в том случае, когда взаимодействие осуществляется электростатическими силами.

Задача 8. *Стержень массой $m = 30$ г изогнули в форме дуги, составляющей 1/6 длины окружности радиусом $R = 0{,}1$ м, и с помощью невесомых спиц прикрепили к оси, проходящей через центр окружности перпендикулярно ее плоскости. На концах стержня закрепили одинаковые положительные точечные заряды величиной $q = 0{,}1$ мкКл каждый. Стержень находится в поле неподвижного точечного заряда $Q = 0{,}2$ мкКл, расположенного посередине между концами стержня. Найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. Силу тяжести не учитывать.*

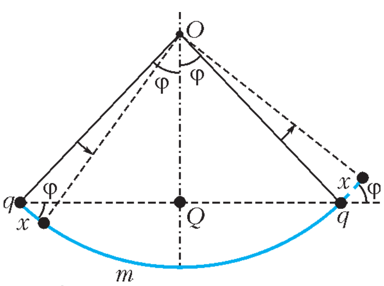


Рис. 6

В качестве параметра отклонения выберем смещение x каждого из зарядов q вдоль дуги окружности (рис.6; здесь $\varphi = 30°$). Кинетическая энергия системы сводится к кинетической энергии стержня:

$$E_к = \frac{mx'^2}{2}.$$

Изменение потенциальной энергии системы при малом смещении стержня с зарядами равно

$$E_п = k\frac{qQ}{R\sin\varphi + x\cos\varphi} + k\frac{qQ}{R\sin\varphi - x\cos\varphi} - 2k\frac{qQ}{R\sin\varphi} =$$

$$= 2k\frac{qQR\sin\varphi}{(R\sin\varphi)^2 - (x\cos\varphi)^2} - 2k\frac{qQ}{R\sin\varphi} =$$

$$= 2k\frac{qQR\sin\varphi\left((R\sin\varphi)^2 + (x\cos\varphi)^2\right)}{(R\sin\varphi)^4 - (x\cos\varphi)^4} - 2k\frac{qQ}{R\sin\varphi} =$$

$$= 4k\frac{qQ\cos^2\varphi}{R^3\sin^3\varphi}\frac{x^2}{2} = 24k\frac{qQ}{R^3}\frac{x^2}{2},$$

где $k = 9\cdot10^9$ Н·м/Кл^2 – электрическая постоянная. Для циклической частоты колебаний получаем

$$\omega = \sqrt{24k\frac{qQ}{mR^3}} = 12\ \text{с}^{-1}.$$

Задача 9. *Стержень массой $m = 25$ г изогнули в виде дуги, составляющей 1/3 длины окружности радиусом $R = 60$ см, и с помощью невесомых спиц прикрепили к оси, проходящей через центр окружности перпендикулярно ее плоскости. Стержень равномерно заряжен положительным зарядом с линейной плотностью $\lambda = 2$ мкКл/м и находится в поле неподвижного отрицательного точечного заряда $Q = -6$ мкКл, расположенного посередине между концами стержня. Найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. Силу тяжести не учитывать.*

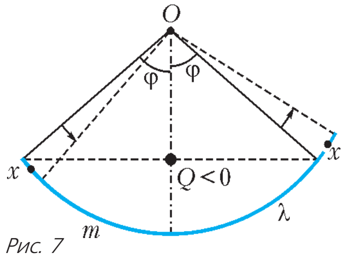


Рис. 7

В качестве отклоняющего параметра x выберем смещение точек стержня из положения равновесия вдоль дуги окружности (рис.7; здесь $\varphi = 60°$). Кинетическая энергия стержня равна $mx'^2/2$. Для вычисления потенциальной энергии применим метод «перемещения малого кусочка», который мы использовали в задачах 1 и 2:

$$E_п = k\frac{\lambda x\cdot Q}{R\sin\varphi + \frac{x}{2}\cos\varphi} - k\frac{\lambda x\cdot Q}{R\sin\varphi - \frac{x}{2}\cos\varphi} =$$

$$= -k\frac{\lambda x\cdot Q\cdot x\cos\varphi}{(R\sin\varphi)^2 - \left(\frac{x}{2}\cos\varphi\right)^2} = -\frac{2k\lambda Q\cos\varphi}{(R\sin\varphi)^2}\frac{x^2}{2} = \frac{4}{3}\frac{k\lambda|Q|}{R^2}\frac{x^2}{2}.$$

Циклическая частота малых колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{4k\lambda|Q|}{3mR^2}} = 4\ \text{с}^{-1}.$$

Задача 10. *На концах невесомого стержня длиной $l = 10$ см закреплены маленькие шарики массой $m = 9$ г каждый. На шарики наносят разноименные заряды одинаковой величины $q = 3$ мкКл и помещают эту систему в однородное электрическое поле напряженностью $E = 600$ В/м. Найдите циклическую частоту малых колебаний системы около положения равновесия. Силу тяжести не учитывать.*

Поскольку сумма сил, действующих на систему, равна нулю, система отсчета центра масс инерциальная, и можно считать, что середина стержня неподвижна. За параметр, характеризующий отклонение системы от положения равновесия, примем угол поворота стержня α (рис.8). Кинетическая энергия системы имеет вид

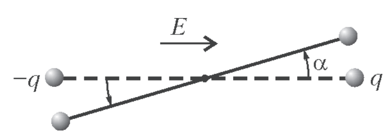


Рис. 8

$$E_к = 2\frac{m(\alpha' l/2)^2}{2} = \frac{ml^2}{2}\frac{\alpha'^2}{2},$$

т.е. эффективная масса равна $m_{эф} = ml^2/2$. Изменение потенциальной энергии при повороте на малый угол α равно работе поля, взятой с обратным знаком:

$$E_п = 2qE\frac{l}{2}(1-\cos\alpha) = qEl\frac{\alpha^2}{2},$$

т.е. эффективная жесткость равна $k_{эф} = qEl$. Для циклической частоты малых колебаний получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{эф}}{m_{эф}}} = \sqrt{\frac{2qE}{ml}} = 2\ \text{с}^{-1}.$$

В последней задаче рассматривается ситуация, когда колебания как таковые отсутствуют, поскольку движение происходит в одном направлении, без возврата назад. Однако оказывается, что это движение происходит по такому же закону гармонических колебаний, как и движение маятника (в фазе разгона или торможения).

Задача 11. *Длинную трубку согнули под прямым углом и установили так, что одно из колен смотрит вертикально вверх. В вертикальном колене удерживают веревку длиной $l = 90$ см таким образом, что она доходит до места сгиба. Через какое время (в мс) после того, как веревку*

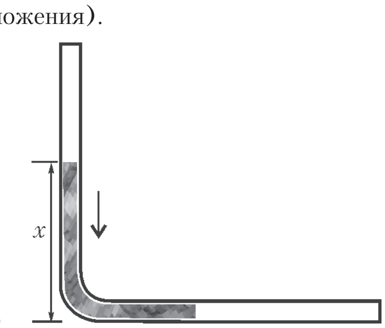


Рис. 9

отпустят, она наполовину соскользнет в горизонтальное колено? Трением пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2; число $\pi = 3{,}14$.

Если в момент времени t длина веревки, оставшейся в вертикальном колене, равна x (рис.9), то энергия системы имеет вид

$$E = \frac{mx'^2}{2} + \frac{mx}{l} g \frac{x}{2} = \frac{mx'^2}{2} + \frac{mg}{l}\frac{x^2}{2},$$

где mx/l – масса куска веревки в вертикальном колене, $x/2$ – высота центра тяжести этого куска. Поскольку это выражение идентично выражению для энергии гармонических колебаний с частотой $\omega = \sqrt{g/l}$, а начальная скорость равна нулю, то движение происходит по закону

$$x = l \cos \omega t$$

(в начальный момент $x_0 = l$). Эта формула действует только в течение четверти периода, пока x не обратится в ноль, т.е. пока вся веревка не соскользнет в горизонтальное колено. Чтобы найти искомое время, надо подставить $x = l/2$. Решив уравнение, получим

$$t = \frac{\pi}{3\omega} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{l}{g}} = 314 \text{ мс.}$$

Упражнения

1. Стержень длиной $l = 20$ см изогнули в форме дуги, составляющей $1/6$ длины окружности, и с помощью невесомых спиц прикрепили к горизонтальной оси, проходящей через центр окружности перпендикулярно ее плоскости. Найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. ($g = 9{,}8$ м/с^2.)

2. Тонкое колесо массой $M = 400$ г с невесомыми спицами может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси. На колесе закрепили маленький груз массой $m = 100$ г. Найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. Радиус колеса $R = 50$ см. ($g = 10$ м/с^2.)

3. Невесомый стержень длиной $l = 2{,}5$ м согнули посередине под углом 120°, прикрепили к его концам одинаковые грузы и повесили местом сгиба на тонкий гвоздь, вбитый в стену. Пренебрегая трением, найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. ($g = 10$ м/с^2.)

4. Невесомый стержень длиной $l = 40$ см может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. К середине стержня прикрепили груз массой $m = 0{,}5$ кг, а нижний конец стержня с помощью горизонтальной пружины жесткостью $k = 30$ Н/м соединили с вертикальной опорой. При вертикальном расположении стержня пружина не деформирована. Найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. ($g = 9{,}8$ м/с^2.)

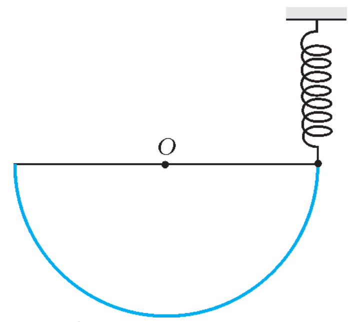


Рис. 10

5. Стержень массой $m = 0{,}5$ кг и длиной $l = 40$ см изогнули по дуге окружности в виде полукольца и с помощью невесомых спиц прикрепили к горизонтальной оси, проходящей через центр окружности (рис.10). К одному из концов стержня прикрепили вертикальную недеформированную пружину жесткостью $k = 16$ Н/м, верхний конец которой закреплен. Найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия, если ось вращения перпендикулярна плоскости полукольца. ($g = 9{,}8$ м/с^2.)

6. Тонкое кольцо радиусом $R = 0{,}1$ м может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через одну из точек кольца перпендикулярно его плоскости. Найдите циклическую частоту малых колебаний около положения равновесия. ($g = 9{,}8$ м/с^2.)

Указание. Используйте тот факт, что кинетическая энергия кольца с одной неподвижной точкой равна $mv_ц^2$, где $v_ц$ – скорость центра кольца.

7. Невесомый стержень изогнули в виде дуги, составляющей $1/3$ длины окружности радиусом $R = 5$ см, и с помощью невесомых спиц прикрепили к горизонтальной оси, проходящей через центр окружности перпендикулярно ее плоскости. К концам стержня прикрепили два одинаковых груза массой $m = 40$ г каждый. Стержень равномерно заряжен с линейной плотностью $\lambda = 1$ мкКл/м и находится в поле неподвижного точечного заряда $Q = 5$ мкКл, расположенного под осью вращения на одном уровне с концами стержня. Найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. ($g = 10$ м/с^2.)

8. Тонкую цепочку длиной $l = 45$ см удерживают за верхний конец на гладкой наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом. Через какое время (в мс) после освобождения цепочки она полностью покинет наклонную плоскость, если вначале ее нижний конец находился у края наклонной плоскости? ($g = 10$ м/с^2; $\pi = 3{,}14$.)

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

Колечко на ветке

(Начало см. на 2-й с. обложки)

На каждой встрече изобретателей головоломок обязательно звучит фраза: «Сложную головоломку придумать легко, вы попробуйте изобрести простую...» Парадокс этих слов лишь кажущийся – изобретатели говорят не о трудности решения задачи, она подразумевается обязательной, а про сложность конструкции.

Именно такую головоломку придумал москвич Кирилл Гребнев, недавний выпускник Российского химико-технологического университета им. Д.И.Менделеева. Его изобретение состоит всего из двух веточек.

Для изготовления головоломки подойдут сучки любого дерева или кустарника, но лучше взять их от дуба – его ветки сильно кустятся и причудливо изогнуты. Головоломки получаются непохожими друг на друга, более запутанными и трудными в решении.

На съезде любителей головоломок в Хельсинки, где Кирилл впервые показал свое изобретение, оно было признано самым оригинальным и интересным. Даже знатоки крутили веточки в руках по нескольку минут, не понимая, как можно отцепить колечко. Любопытно, что эту же головоломку, но сделанную из проволоки, они решали мгновенно. На обложке приведена также схема проволочной модели, но не для того, чтобы вы ее изготовили, а с целью помочь выбрать ветки правильной конфигурации.

Желаем успеха и сообщаем, что другие головоломки Кирилла Гребнева (не менее интересные) опубликованы в «Кванте» №1 за 2007 год и №3 за 2005 год.

А.Калинин

О величии Эйлера как математика можно судить хотя бы по тому, что при изучении теории чисел создается впечатление, что Эйлер в основном интересовался теорией чисел; если же изучаешь расходящиеся ряды или дифференциальные уравнения, то кажется, что именно расходящиеся ряды или дифференциальные уравнения были для Эйлера любимым предметом исследования, и т.д.

Г.Эдвардс

Эйлер вычислял так свободно, как люди дышат, как орлы парят в воздухе.

Ф.Араго

Его имя может исчезнуть только вместе с наукой.

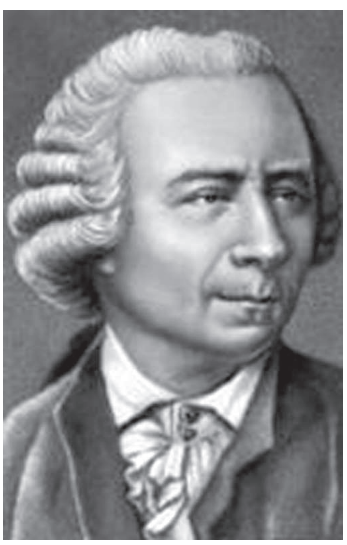
Н.Фусс

Эйлер разведывал в математике все, что было возможно.

А.Шпайзер

«ЗНАМЕНИТЕЙШИЙ УЧЕНЫЙ МУЖ»

Так уважительно обращался к своему бывшему ученику один из видных математиков XVIII столетия профессор Базельского университета Иоганн Бернулли. В этом почтительном обращении нет преувеличения – оно адресовалось Леонарду Эйлеру (1707–1783).



Эйлер явил пример самозабвенного служения науке. Потеряв в 1738 году один глаз, а в 1766 году ослепнув на оба глаза, он, тем не менее, продолжал продуктивно работать, диктуя результаты своих многочисленных исследований секретарям и ученикам. Половина его работ была создана именно в этот период.

Свои результаты Эйлер излагал с поразительной ясностью, раскрывая ведущие к ним пути и снабжая выкладки ценными примерами. «Читайте, читайте Эйлера, он – наш общий учитель», – советовал известный французский математик П.Лаплас. С ним солидарен другой известный математик, К.Гаусс: «Изучение работ Эйлера остается наилучшей школой в различных областях математики, и ничто другое не может это заменить».

Ученые многих стран признавали Эйлера не только «знаменитейшим», но и «сверхостроумным», «несравненным», «главой математиков». Широта научных интересов, глубина полученных результатов, а главное – неимоверная творческая продуктивность Эйлера и в наше время вызывает восхищение. Эйлер написал около 750 статей, 40 книг, а 15 его работ были подготовлены для различных конкурсов. К этому следует добавить несколько тысяч писем в различные страны Европы, нередко представляющих собой подлинные научные труды. Список его работ охватывает все современные ему разделы математики, механики, оптики, астрономии, техники и других отраслей знания.

Статистические подсчеты показывают, что Эйлер в среднем делал одно открытие в неделю.

Вот некоторые находки Эйлера:

• В любом треугольнике точка пересечения высот H (ортоцентр), точка пересечения медиан M и центр O описанной окружности лежат на одной прямой – *прямой Эйлера*. Точка M лежит между точками O и H, при этом $OM : MH = 1 : 2$ (рис.1).

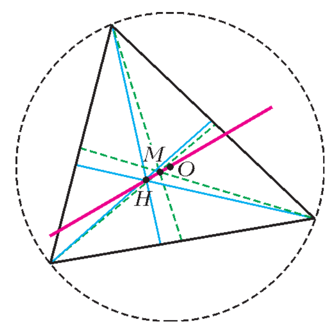


Рис. 1

• В любом треугольнике середины сторон (точки 1, 2, 3 на рисунке 2), основания его высот (точки 4, 5, 6) и середины отрезков от вершин до ортоцентра (точки 7, 8, 9) лежат на одной окружности – *окружности Эйлера*. Радиус этой окружности равен половине радиуса описанной вокруг треугольника окружности, а ее центр F совпадает с серединой отрезка, который соединяет ортоцентр H с центром O описанной окружности.

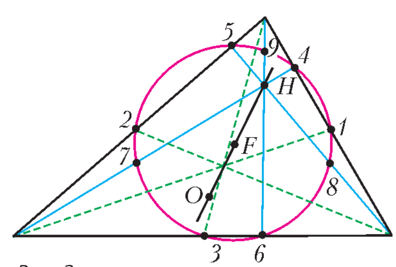


Рис. 2

• Центр I вписанной в треугольник окружности ра-

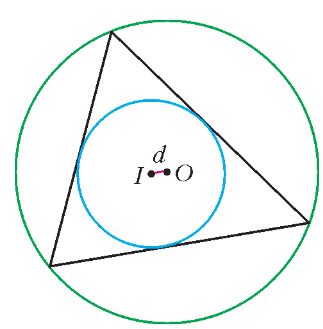


Рис. 3

диуса r и центр O описанной окружности радиуса R (рис.3) удалены друг от друга на расстояние d такое, что $d^2 = R^2 - 2Rr$.

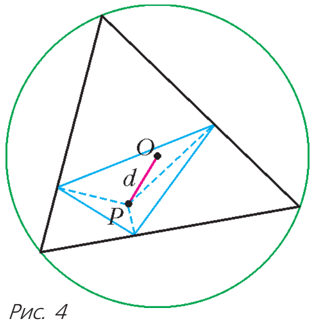


Рис. 4

• Пусть S – площадь треугольника, R – радиус описанного около него круга, S' – площадь треугольника, образованного основаниями перпендикуляров, опущенных на стороны данного треугольника из точки P, удаленной от центра O описанного круга на расстояние d (рис.4). Тогда

$$S' = \frac{S}{4}\left|1 - \frac{d^2}{R^2}\right|.$$

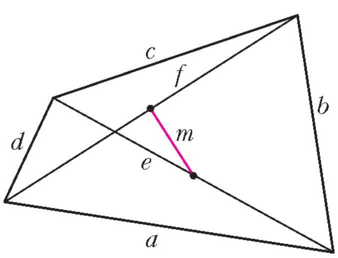


Рис. 5

• Для каждого четырехугольника стороны a, b, c, d, диагонали e и f, а также расстояние m между серединами диагоналей (рис. 5) удовлетворяют соотношению

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \\ = e^2 + f^2 + 4m^2.$$

• На реке Прегель, проходящей через город Кенигсберг и омывающей два острова, имеется семь мостов (рис.6). Обойти все мосты, пройдя по каждому из них только один раз, и вернуться в исходную точку невозможно.

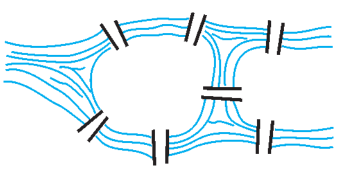


Рис. 6

• Число вершин B, ребер P и граней $\varGamma$ выпуклого многогранника связаны формулой

$$B - P + \varGamma = 2.$$

• Тождество Эйлера о четырех квадратах:

$$\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)\left(p^2 + q^2 + r^2 + s^2\right) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

где $x = ap + bq + cr + ds$, $y = aq - bp \pm cs \mp dr$, $z = ar \mp bs - cp \pm dq$, $t = as \pm br \mp cq - dp$.

• Еще Якоб Бернулли поставил задачу поиска суммы ряда чисел, обратных квадратам: $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$ Эйлер установил, что эта сумма равна $\frac{\pi^2}{6}$, попутно найдя суммы других аналогичных рядов, например

$$1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \frac{1}{256} + \frac{1}{625} + \ldots = \frac{\pi^4}{90}.$$

• В 1734 году Эйлер доказал, что сумма n членов гармонического ряда $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$ с ростом n приближается к величине $C + \ln(n+1)$, где C – константа, впоследствии получившая название *константы Эйлера*. Эйлер нашел 15 ее верных знаков: $C = 0{,}577215664901532\ldots$ В настоящее время неизвестно, является ли константа Эйлера рациональным числом или нет.

• В 1737 году Эйлер получил другое замечательное тождество:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}},$$

играющее центральную роль в современной теории чисел. Произведение в правой части распространено на все простые числа $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$, s – натуральный параметр. Используя это тождество, Эйлер в том же году впервые доказал расходимость ряда величин, обратных простым числам. Несмотря на то, что с ростом n простые числа в натуральном ряду встречаются все реже, сумма ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \ldots$$

превосходит любую наперед заданную величину.

• В 1743 году Эйлер нашел формулу, устанавливающую связь тригонометрических функций с показательной функцией: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, где i – мнимая единица, $i^2 = -1$. При $x = \pi$ отсюда получается тождество, которое Феликс Клейн назвал «самым удивительным равенством в математике», поскольку оно связывает пять наиболее известных математических величин: $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Эйлер занимался изучением работы механических пил, электростатических машин, ветряных мельниц, турбин, насосов, оптических и музыкальных механизмов; составлением географических карт; организацией страхования и лотерей; расчетами каналов и шлюзов, печей, зубчатых колес, оптимального расположения мачт на корабле, колебаний детской колыбели.

Черпая задачи из практики, Эйлер развивал математику как органическое целое, «ведя за собой других исследователей, обучая их думать и писать так, как думал и писал сам» (М.В.Остроградский).

Нет науки, которая не была бы связана с математикой.

Leonh: Euler

Материалы вступительных экзаменов 2006 года

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ РФ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Найдите наибольшее значение параметра a, при котором неравенство $2x^2 - 6x - 1{,}5 \ge a$ верно для любого действительного x.

2. Решите неравенство

$$\left|\sqrt{17 - x} - x\right| \le x + 2 .$$

3. Решите уравнение

$$\frac{2\sin 4x - \sqrt{3} - 2\sin 2x + 2\sqrt{3}\cos 2x}{2\sin 4x + \sqrt{3}} = 0 .$$

4. Груз вначале погрузили в вагоны вместимостью по 80 тонн, но один вагон остался загружен не полностью. Тогда весь груз переложили в вагоны вместимостью по 60 тонн. При этом понадобилось на 8 вагонов больше, и все равно один вагон остался загружен не полностью. Наконец, груз переложили в вагоны вместимостью по 50 тонн. При этом понадобилось еще на 5 вагонов больше, и все вагоны оказались полностью загруженными. Сколько было тонн груза?

5. Отрезок AD является биссектрисой прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = \pi/2$). Окружность радиуса $\sqrt{15}$ проходит через точки A, C, D и пересекает гипотенузу AB в точке E так, что $AE : AB = 3 : 5$. Найдите площадь треугольника ABC.

6. Какую фигуру на координатной плоскости определяет система неравенств

$$\begin{cases} y \ge |x + 2| - 1, \\ y \le 8 - |x - 1| ? \end{cases}$$

Ответ обоснуйте. Найдите площадь данной фигуры.

Вариант 2

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} -x + ay = 2, \\ ax - y = 3a - 5 \end{cases}$$

при различных значениях параметра a?

2. Решите уравнение

$$3\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 2} = 7 .$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{8 + \frac{1}{\log_x 3}} - \sqrt{10\log_9 x + 20} + 2 = 0 .$$

4. Решите уравнение

$$\sin 2x + \sin 6x = \sqrt{3}\cos 2x .$$

5. В ромбе $ABCD$ из вершины тупого угла B на сторону AD опущен перпендикуляр BE. Найдите углы ромба, если $2\sqrt{3}CE = \sqrt{7}AC$.

6. Три бригады, работая одновременно, выполняют дневную норму цеха за 5 часов. Вторая бригада, работая отдельно, выполняет норму цеха на 5 часов быстрее, чем одна третья бригада. За какое время вторая бригада выполнит норму цеха, если известно, что третья бригада выполнила бы ее вдвое быстрее, чем первая?

Вариант 3

(олимпиада-2006, все факультеты)

1. В арифметической прогрессии, все члены которой являются целыми числами, второй член равен 4, а сумма квадратов третьего и четвертого членов меньше 16. Чему может быть равен первый член прогрессии?

2. Можно ли расположить числа от 1 до 7 в вершинах фигуры, показанной на рисунке 1, так, что все числа в вершинах попарно различны, а сумма чисел в вершинах каждого из трех четырехугольников равна 14?

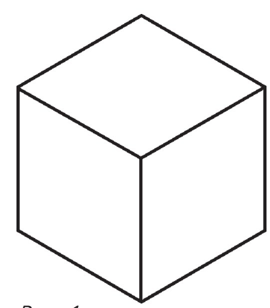


Рис. 1

3. Решите неравенство

$$\frac{8}{9} \cdot \frac{3^x}{3^x - 2^x} \le 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x .$$

4. Четырехугольник $PQRT$ вписан в окружность. Длины его сторон PQ и RT равны 9 и 6 соответственно, а длины диагоналей PR и QT равны 8 и 10 соответственно. Найдите отношение площадей треугольника PQR и четырехугольника $PQRT$.

5. Решите уравнение

$$x - \left|x - |x + 1|\right| = \sqrt{5 - \left|2 - |6 - x|\right|} .$$

6. Решите уравнение

$$\frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{2 - \cos^{-2} x} = \frac{4 + 2\cos\dfrac{6x}{5}}{\cos 3x + \cos x} .$$

7. Решите уравнение

$$x^5 + (x - 1)^5 + \ldots + (x - 2006)^5 = 0 .$$

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Камень, брошенный с поверхности земли под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, дважды побывал на одной и той же высоте h спустя время $t_1 = 3$ с и $t_2 = 5$ с после начала движения. Найдите начальную скорость камня v_0. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

2. Брусок массой $M = 2$ кг движется вдоль горизонтальной плоскости под действием силы $F = 20$ Н, направленной вверх под углом $\alpha = 30°$ к горизонту (рис.2). Коэффициент трения скольжении бруска о плоскость $\mu = 0,1$. Найдите ускорение бруска a. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

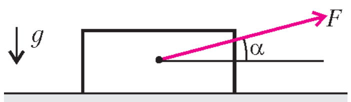


Рис. 2

3. Электроплитка имеет три секции с одинаковыми сопротивлениями. При параллельном их соединении вода закипает через $t_0 = 6$ мин. Через какое время t закипит вода такой же массы и такой же начальной температуры при соединении секций, показанном на рисунке 3?

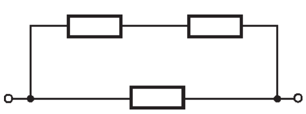


Рис. 3

4. Температура нагревателя идеальной тепловой машины Карно $T_1 = 390$ К, а температура холодильника $T_2 = 300$ К. Количество теплоты, получаемое машиной от нагревателя в каждом цикле, равно $Q_1 = 60$ кДж. Вычислите количество теплоты Q_2, отдаваемое холодильнику в каждом цикле.

5. В водоем на одну и ту же глубину помещены два точечных источника: первый источник красного света, второй – фиолетового. Абсолютный показатель преломления воды для красных лучей $n_1 = 1,328$, для фиолетовых – $n_2 = 1,335$. Найдите отношение радиусов кругов R_1 и R_2 на поверхности воды, в пределах которых возможен выход в воздух лучей от первого и второго источников соответственно. Абсолютный показатель преломления воздуха считать равным единице.

Вариант 2

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. В течение времени $t_1 = 5$ ч поезд двигался со скоростью $v_1 = 60$ км/ч, а затем в течение времени $t_2 = 4$ ч – со скоростью $v_2 = 15$ км/ч. Найдите среднюю скорость поезда $v_{ср}$ за все время движения.

2. Призма находится на горизонтальном шероховатом столе (рис.4). На поверхность призмы, составляющую угол α с горизонтом, положили брусок массой m и отпустили. Он стал соскальзывать, а призма осталась в покое. Коэффициент трения скольжения между бруском и призмой μ. Найдите силу трения $F_{тр}$ между призмой и столом.

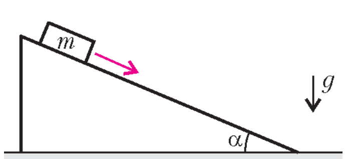


Рис. 4

3. Два резистора с сопротивлениями $R_1 = 10$ Ом и $R_2 = 20$ Ом, соединенные друг с другом параллельно, подключены к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 6$ В и внутренним сопротивлением $r = 2$ Ом. Найдите тепловую мощность P, выделяющуюся на сопротивлении R_1. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

4. В цилиндре под поршнем находится воздух при температуре $T_1 = 300$ К и давлении $p_1 = 100$ кПа. Воздух сжимают так, что его объем уменьшается в 20 раз, а давление возрастает до $p_2 = 6000$ кПа. Найдите конечную температуру воздуха T_2.

5. Оптическая система состоит из двух линз – рассеивающей с фокусным расстоянием, равным по модулю $|F_1| = 10$ см, и собирающей с фокусным расстоянием $F_2 = 15$ см, расположенных вдоль общей главной оптической оси на расстоянии $a = 30$ см друг от друга. Перед системой со стороны рассеивающей линзы на расстоянии $d_1 = 12$ см от нее на главной оптической оси помещен точечный источник света. На каком расстоянии f_2 от второй линзы получится изображение источника, даваемое системой этих линз?

Вариант 3

(олимпиада-2006, все факультеты)

1. Ведущая шестерня радиусом R вращается с постоянной угловой скоростью Ω и приводит во вращение шестерню радиусом r. В некоторый момент времени метки A и B, выбитые на шестернях, совпадают (рис.5). Через какой наименьший промежуток времени t_0 относительная скорость меток станет равной нулю? Оси вращения шестерен неподвижны.

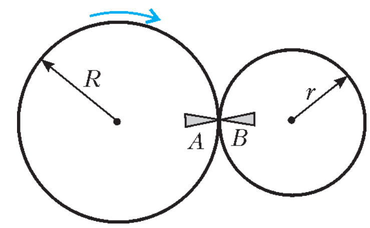


Рис. 5

2. Упругая шайба падает плашмя на горизонтальную абсолютно твердую поверхность таким образом, что в момент падения ее скорость равна $v_0 = 4,5$ м/с и направлена под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Коэффициент трения скольжения между шайбой и поверхностью $\mu = 0,25$. Чему равно расстояние s между местом второго и местом третьего удара шайбы о поверхность? Влиянием силы тяжести за время удара можно пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

3. Сосуд квадратного сечения со стороной a заполнен водой до высоты $h = 40$ см. Силы давления воды на боковую стенку сосуда и на его дно равны друг другу. Найдите сторону квадрата a.

4. Два баллона одного и того же объема $V = 1$ л соединены тонкой трубкой с закрытым краном В первом баллоне находится сухой воздух под давлением $p_в = 750$ мм рт.ст., а в другой баллон после откачки до глубокого вакуума помещена капелька воды массой $m = 0,1$ г. Какое давление p будет в баллонах после открытия крана и установления равновесия, если температура баллонов постоянна и равна $t = 22$ °С, а давление насыщенного водяного пара при этой температуре составляет $p_{нас} = 20$ мм рт.ст.? Молярная масса воды $M_{воды} = 0,018$ кг/моль.

Для справки: 1 атм $\approx 10^5$ Па $\approx$ 760 мм рт.ст.

5. В коробке собрана некоторая электрическая цепь и сделаны два вывода A и B (рис.6). При подключении к ним идеального амперметра и гальванического элемента с ЭДС $\mathcal{E} = 1,5$ В и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением сила тока оказалась равной $I_1 = 1$ А. Когда полярность элемента изменили на противоположную, ток уменьшился в два раза, не меняя своего направления. Предложите схему какой-нибудь одной, по возможности простой, цепи, находящейся внутри коробки, и рассчитайте ее параметры.

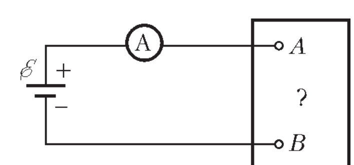


Рис. 6

6. Протон движется по окружности радиусом $R = 80$ см в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,3$ Тл. Найдите скорость протона v. Масса протона $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг, его заряд $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

7. В линзе с фокусным расстоянием $F = 6,7$ см получено прямое изображение предмета с поперечным увеличением

$\Gamma = 3$. Чему равно расстояние L от предмета до изображения?

Публикацию подготовили А.Леденев, А.Пичкур

Московский государственный институт электронной техники (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin(\pi+\alpha) = -\frac{5}{7}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

2. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{5x-1}{x+5} - 1}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_2\left(x^2 - 3x\right) \le -\log_{0,5}(6-4x).$$

4. Решите уравнение

$$\sin 2006x = \cos 1003x.$$

5. Центр круга, описанного около равнобедренной трапеции, принадлежит ее большему основанию. Найдите основания трапеции, если известно, что площадь круга равна 169π, а высота трапеции равна 12.

6. При каких значениях x числа 3, 3^{x+1}, $4 - 11\cdot 3^x$ являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии?

7. Через сторону квадрата проведена плоскость, составляющая с плоскостью квадрата угол $60°$. Под каким углом наклонены к этой плоскости диагонали квадрата?

8. Постройте график функции

$$y = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}.$$

9. Решите уравнение

$$\sqrt{x^4 + x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 4x + 2} = x^2 - 2.$$

10. От пристани A одновременно отправились вниз по течению реки катер и плот. Катер спустился вниз по течению на 96 км, затем повернул обратно и вернулся в A, потратив на весь путь 14 часов. Найдите скорость катера в стоячей воде и скорость течения реки, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 км от A.

11. При каких значениях параметра a имеет ровно один экстремум на промежутке $(-2; 0)$ функция

$$f(x) = \frac{a}{3}x^3 - \frac{a-6}{2}x^2 + 2x + a^3?$$

Вариант 2

1. Найдите $\log_2 18$, если $\log_2 3 = a$.

2. Решите уравнение

$$2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} = 5^{x+1} - 5^{x+2}.$$

3. Решите уравнение

$$x\cdot|x+1| + |x|\cdot(x+1) = 4.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{x^2}{x^2+3x-4} \le 1.$$

5. Решите уравнение

$$2\sin 3x\cdot\cos x + 2\cos 3x\cdot\sin(\pi + x) = 1.$$

6. Цилиндр с площадью основания, равной 5π, вписан в шар. Найдите объем цилиндра, если объем шара равен 36π.

7. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Найдите длину этой окружности, если известно, что боковая сторона и меньшее основание трапеции равны 5 и 2 соответственно.

8. Два спортсмена бегают с постоянными скоростями по замкнутой дорожке. На пробег всей дорожки первый спортсмен тратит на 25 секунд меньше второго. Если они стартуют из одной точки в одном и том же направлении, то первый спортсмен впервые догоняет второго через 150 секунд после старта. Через какое время произойдет их первая встреча, если они будут стартовать из одной точки в противоположных направлениях?

9. Решите неравенство

$$\log_{1/2}\left(\sqrt{5-x} - x + 1\right) > -3.$$

10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 8xy - 9y^2 = 14, \\ 10y - x^2 = 13. \end{cases}$$

11. При каких значениях параметра a найдутся числа x и y, удовлетворяющие уравнению $\sqrt{2xy + a} = x + y + 1$?

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Стержень AB, ориентированный вдоль оси x, движется с постоянной скоростью $v = 0{,}1$ м/с в положительном направлении оси. Передним концом стержня является точка A, задним – точка B. Найдите длину стержня, если в момент времени $t_A = 10$ с координата точки A равна $x_A = 3$ м, а в момент $t_B = 30$ с координата точки B равна $x_B = 4{,}5$ м.

2. Двумя нитями, одна из которых горизонтальная, а другая составляет с горизонтом угол $\alpha = 60°$, груз закреплен на тележке (рис.1). С каким ускорением движется тележка по горизонтальной поверхности, если силы натяжения нитей одинаковы по величине? Груз покоится относительно тележки. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

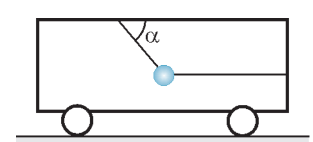


Рис. 1

3. В результате центрального столкновения двух одинаковых частиц, двигавшихся навстречу друг другу со скоростями v и $2v$, скорость более быстрой частицы изменила направление на противоположное и уменьшилась по величине в 2 раза. а) Во сколько раз изменилась величина скорости другой частицы? б) Является ли столкновение частиц абсолютно упругим? Ответ следует обосновать.

4. В одном из двух баллонов содержится углекислый газ, а в другом – водород. Объемы, температуры и давления газов одинаковые. а) Во сколько раз отличаются массы газов в баллонах? б) В каком баллоне масса газа увеличится и во сколько раз, если баллоны соединить тонкой трубкой? Молярные массы водорода и углекислого газа равны $M_{\text{вод}} = 2$ г/моль и $M_{\text{угл}} = 44$ г/моль соответственно.

5. В сосуде под поршнем находится идеальный одноатомный газ, занимая объем $V = 4$ л при давлении $p = 200$ кПа. Во сколько раз увеличится абсолютная температура газа, если его адиабатически сжать, совершив работу $A = 3$ кДж?

6. Точечный заряд q_1, расположенный в вершине A квадрата $ABCD$, создает в вершине D электрическое поле, модуль вектора напряженности которого $E_1 = 4000$ В/м, а точечный заряд q_2, расположенный в вершине B, создает в той же точке D поле $E_2 = 1000$ В/м. Определите отношение зарядов q_1/q_2.

7. Какой заряд q пройдет через резистор сопротивлением $R = 1$ Ом за время $\tau = 5$ мин, если напряжение на резисторе в течение этого времени равномерно возрастает от нуля до $U = 2$ В?

8. Лампочка, на которой написано $U = 110$ В, $P = 100$ Вт, и катушка индуктивностью $L = 0{,}5$ Гн соединены последовательно и подключены к генератору переменного напряжения частотой $\nu = 50$ Гц. При этом лампочка горит нормальным накалом. Определите действующие значения тока I через лампочку и напряжения U_L на катушке. Сопротивлением провода, которым намотана катушка, пренебречь.

9. Луч света падает на тонкую рассеивающую линзу с оптической силой $D = -10$ дптр под углом α к главной оптической оси и преломляется в линзе на расстоянии $h = 1$ см от ее оптического центра, как показано на рисунке 2. При каком минимальном значении угла α этот луч после преломления в линзе пересечет ее главную оптическую ось?

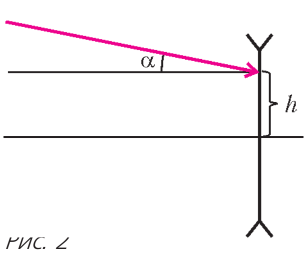


Рис. 2

10. Во сколько раз максимальная скорость электронов, выбиваемых светом из металла при фотоэффекте, меньше скорости света в вакууме? Длина волны света $\lambda = 0{,}6$ мкм. Работа выхода электронов из металла в 2 раза меньше энергии фотона. Ответ выразите через величину $\lambda_C = h/(mc) = 2{,}4\cdot10^{-12}$ м, где h – постоянная Планка, m – масса электрона, c – скорость света в вакууме.

11. Через катушку индуктивностью $L = 100$ мГн протекает постоянный ток. В некоторый момент времени ток через катушку начинают равномерно уменьшать, и через $\tau = 10$ мс после этого он оказывается равным нулю. Через какое время t после начала уменьшения тока напряжение на катушке станет равным нулю? Сопротивление провода, которым намотана катушка, равно $R = 20$ Ом.

Вариант 2

(олимпиада-2006)

1. Камень, брошенный с поверхности земли вертикально вверх, упал на землю через $T = 2$ с. Определите путь s, пройденный камнем за время $\tau = 1{,}5$ с после броска. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

2. Однородный шар радиусом R и массой m расположен на гладком горизонтальном столе и прикреплен к точке O поверхности стола нерастяжимой нитью (рис.3). Центру шара сообщили горизонтальную скорость, после чего он стал равномерно двигаться по окружности вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O. С какой силой шар действует на стол, если период его обращения равен T? Ускорение свободного падения равно g.

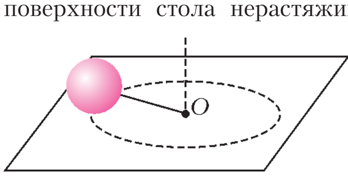


Рис. 3

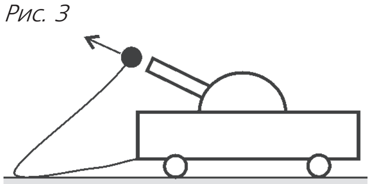


Рис. 4

3. Игрушечная пушка на колесиках (рис.4), первоначально покоившаяся на горизонтальном полу, выстреливает шарик, привязанный к пушке легкой ниткой (чтобы не потерялся). При выстреле нитка обрывается, и шарик падает на пол со скоростью v под углом α к горизонту. Определите скорость пушки V после обрыва нити, если масса пушки в k раз больше массы шарика. Трением и сопротивлением воздуха пренебречь. Векторы скорости шарика и пушки лежат в одной плоскости.

4. В вертикальном цилиндре под легким поршнем площадью $S = 20$ см^2 находится идеальный газ при температуре $t = 30$ °C. Какую вертикальную силу нужно приложить к поршню, чтобы удерживать его в исходном положении после нагрева газа на $\Delta t = 20$ °C? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Трением пренебречь.

5. Определите работу газа в круговом процессе, изображенном на рисунке 5 (здесь p – давление газа, V – занимаемый им объем). При выбранном масштабе график представляет собой окружность.

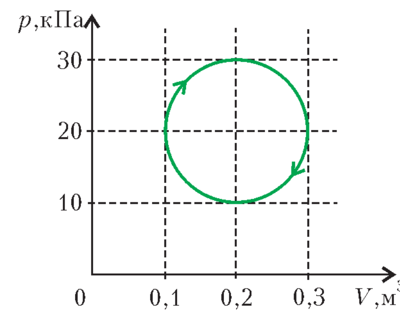


Рис. 5

6. Плоский воздушный конденсатор поместили в постоянное однородное электрическое поле напряженностью E_0, перпендикулярное его обкладкам. Обкладки конденсатора на некоторое время замкнули тонкой проволочкой, затем проволочку убрали, а конденсатор медленно извлекли из электрического поля. Какая работа против сил электрического поля при этом была совершена? Емкость конденсатора C, расстояние между обкладками d.

7. На лампочке написано 220 В, 100 Вт. Чему равно сопротивление спирали лампочки в нормальном рабочем режиме?

8. При равномерном изменении силы тока через катушку за время $\tau = 0{,}05$ с в ней возникает ЭДС самоиндукции $\mathcal{E} = 0{,}1$ В. Катушка содержит $N = 1000$ витков. Какой заряд q пройдет за это время через замкнутый виток сопротивлением $R = 20$ Ом, плотно надетый на катушку? Магнитное поле, созданное током в витке, считать пренебрежимо малым. Катушка длинная, намотка однослойная.

9. Определите показатель преломления среды, если известно, что свет с частотой $\nu = 4\cdot10^{14}$ Гц имеет в ней длину волны $\lambda = 0{,}5$ мкм. Скорость света в вакууме $c = 3\cdot10^8$ м/с.

Публикацию подготовили А.Берестов, И.Горбатый, В.Гундырев, С.Кальней, С.Куклин, А.Прокофьев, Т.Соколова, И.Федоренко

Московский государственный текстильный университет им. А.Н.Косыгина

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультет информационных технологий, автоматики и энергетики)

1. Решите уравнение

$$1{,}5 - \frac{2x}{15} = \frac{1}{3} + 0{,}8x.$$

2. Книга-двухтомник стоит 360 рублей, при этом первый том дешевле второго на 20%. Сколько рублей стоит первый том?

3. Найдите сумму корней уравнения

$$4|x-1|+|x+3|=10 .$$

4. Вычислите

$$1,5\log_8 18-\log_2\left(12\sqrt{2}\right).$$

5. Найдите сумму квадратов корней уравнения

$$x^2-x=9 .$$

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}5x+y=0,95,\\2x+3y=0,9.\end{cases}$$

В ответ запишите $2x+y$.

7. Пусть

$$f(x)=\frac{2x^2}{3}+\frac{36}{x}+2\sin(x-3)+6\cos(x-3)+9\ln(3x) .$$

Тогда $f'(3)=\ldots$

8. Если $\cos\alpha=1/3$ и $0<\alpha<\pi/2$, то $\sqrt{50}\,\mathrm{tg}(\alpha/2)=\ldots$

9. Вычислите

$$\sqrt[3]{10\sqrt{15}}\cdot\sqrt{0,6}\cdot(1,5)^{-2/3} .$$

10. Диагонали трапеции равны 40 и 26, средняя линия равна 21. Найдите площадь трапеции.

11. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$x-3<\sqrt{x+17} .$$

12. Третий член арифметической прогрессии равен 5, а сумма членов с десятого по двадцатый равна 22. Найдите пятый член прогрессии.

13. Решите неравенство

$$2\log_2(x/12)+5\log_{(x/6)}(x/12)\le 6 .$$

В ответ запишите количество целых решений.

14. Найдите наименьшее положительное решение (в градусах) уравнения

$$\cos 5^\circ\cos x+\cos 95^\circ\sin x=\cos 35^\circ .$$

15. Развертка боковой поверхности конуса дает сектор площади 54π и угловой меры $2\pi/3$ радиан. Пусть V – объем конуса, тогда $V/\pi=?$

Вариант 2

(факультет экономики и менеджмента)

1. Решите уравнение

$$1,25+\frac{x}{15}=1,2x-\frac{1}{6}.$$

2. Костюм (пиджак и брюки) стоит 5400 рублей, причем пиджак на 25% дороже, чем брюки. Сколько рублей стоит пиджак?

3. Найдите сумму корней уравнения

$$|x+1|=3x+7 .$$

4. Вычислите $0,5\log_{0,8}5-\log_{0,8}2$.

5. Найдите сумму квадратов корней уравнения

$$2x^2-3x=5 .$$

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}4y+x=2,4,\\2x+3y=3,8.\end{cases}$$

В ответ запишите $2x-y$.

7. Пусть

$$f(x)=x^{2\log_x 5}+\frac{3x^2+2x+8}{x}+8\sqrt{2x} .$$

Тогда $f'(2)=\ldots$

8. Если $\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha=3,125$, то $\sin 2\alpha=\ldots$

9. Вычислите

$$\sqrt[5]{9,8\sqrt{3,5}}\cdot\sqrt{0,56}\cdot(1,25)^{-0,8} .$$

10. Диагонали граней прямоугольного параллелепипеда равны $\sqrt{52}$, $\sqrt{116}$, $\sqrt{136}$. Найдите объем параллелепипеда.

11. Найдите сумму целых решений неравенства

$$\frac{5x+1}{x^2+7x+10}\ge\frac{x-1}{x+2}.$$

12. Из пунктов A и B навстречу друг другу одновременно вышли пассажирский поезд и товарный состав. Через 4 часа они встретились. Поезд дошел до пункта B, простоял там 24 минуты и отправился обратно. Через 4 часа после выхода из B он догнал товарный состав. Найдите скорость поезда (км/ч), если $AB=280$ км.

13. Решите неравенство

$$\log_4\left(9-6x+x^2\right)+\log_{0,5}(x+3)\le -1 .$$

В ответ запишите сумму целочисленных решений.

14. Найдите сумму целых чисел, принадлежащих области значений функции

$$f(x)=1,5\cdot 0,2^{\sqrt{0,2}\sin 3x}\cdot 25^{\sqrt{0,2}\cos 3x}-3 .$$

15. В окружность радиуса $3\sqrt{6}$ вписан остроугольный треугольник ABC. Найдите AC, если $AB=8\sqrt{3}$, $BC=12$.

Публикацию подготовил Е.Матвеев

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. За три часа один лыжник прошел на 2,5 км больше другого, так как один километр он проходил на одну минуту быстрее. За сколько минут каждый лыжник проходил один километр?

2. Решите уравнение $\sin 6x=2\sin 2x$. Найдите его корни, принадлежащие промежутку $[0;\pi/2]$.

3. Решите уравнение

$$2^{3+\sqrt{x}}+4=33\sqrt{2^{\sqrt{x}}} .$$

4. Решите неравенство

$$\log_x\left(49x^2-84x+36\right)>2 .$$

5. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, координаты вершин которого удовлетворяют уравнению $|y|=(x-1)(4-x)$, $1<x<4$, а стороны параллельны координатным осям?

6. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$3(x-a)^2 = x - y - a + 2\,, \quad \frac{1-\log_2 y}{1-\log_2 x} = 1$$

имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

7. Найдите площадь сечения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, параллельной диагонали BA_1 боковой грани ABB_1A_1 и проходящей через центр описанного около призмы шара и вершину основания A, если стороны основания призмы равны 2, а расстояние от центра основания призмы до секущей плоскости равно $1/5$.

Вариант 2

1. За вторую половину шестичасовой смены рабочий изготовил на 6 деталей больше, чем за первую, так как на обработку одной детали во второй половине смены тратил на 1 мин меньше, чем в первую. Сколько деталей изготовил рабочий за смену?

2. Решите уравнение $\cos 4x = 3 + 5\sin 2x$ и укажите его корни, лежащие в промежутке $[-3\pi/2;\, \pi/2]$.

3. Решите уравнение

$$\log_4(10x - 54) = 1 + \log_2(x - 12)\,.$$

4. Решите неравенство

$$\log_2 \frac{x-2}{x-3} + \log_2 x < 3\,.$$

5. Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, гипотенуза которого лежит на касательной к графику функции $y = 6 + 2x^2$, катет лежит на оси x, а одна из вершин совпадает с точкой касания?

6. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$(x-a)^2 = 25(y + a - 6)\,, \quad y^2 + \left(\frac{x-6}{|x|-6}\right)^2 = 1$$

имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

7. Основанием пирамиды $TABC$ служит равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами AC и BC, равными 6, а ее высота совпадает с боковым ребром TC. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, которая проходит через середину бокового ребра TA, пересекает высоту TC в точке P, так что $PC = 4PT$, и параллельна медиане основания AD, если расстояние от вершины пирамиды T до секущей плоскости равно $\sqrt{3/5}$.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Непроводящее кольцо, имеющее равномерно распределенный заряд, может свободно вращаться вокруг своей оси (рис.1). Кольцо помещено в перпендикулярное плоскости кольца магнитное поле, индукция которого равномерно уменьшается до нуля. При этом кольцо начинает вращаться. Объясните, какие силы приводят кольцо в движение.

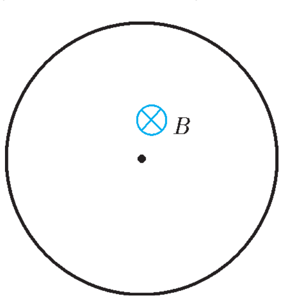


Рис. 1

2. На рисунке 2 показан ход светового луча при переходе из среды *1* в среду *2*. В какой среде скорость света больше? Ответ обоснуйте.

3. Точка начинает двигаться по оси x по закону $x = 5 + 4t - 2t^2$ (м). На каком расстоянии от начала координат скорость точки будет равна нулю?

4. Число радиоактивных ядер некоторого элемента уменьшилось в 8 раз за 6 дней. Чему равен период полураспада этого элемента (в днях)?

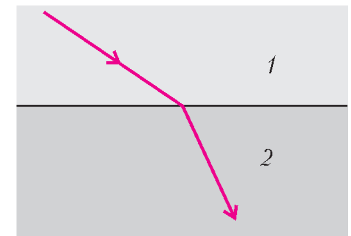


Рис. 2

5. Один моль идеального одноатомного газа участвует в процессе, для которого абсолютная температура газа прямо пропорциональна квадрату его давления: $T = \alpha p^2$, где α – постоянная. Определите молярную теплоемкость газа в этом процессе.

6. В системе, состоящей из двух концентрических проводящих сфер радиусами R и $3R$ (рис.3), внутренняя сфера соединена с землей через источник с ЭДС $\mathcal{E}$. Заряд внешней сферы $+2q$. На расстоянии $2R$ от центра системы находится точечный заряд $-q$. Зная величины q, $\mathcal{E}$, R, определите заряд внутренней сферы. Потенциал земли принять равным нулю.

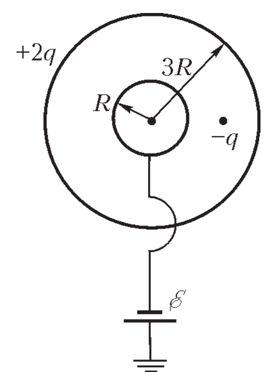


Рис. 3

7. Два одинаковых гладких упругих шарика A и B движутся во встречных направлениях со скоростями v и $2v$, причем прямые, проходящие через центры каждого из шариков в направлении их движения, касаются другого шарика (рис.4). Найдите, под каким углом к первоначальному направлению будет двигаться шарик A после соударения.

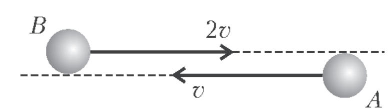


Рис. 4

Вариант 2

1. Тело массой $m = 1$ кг брошено под углом к горизонту. За все время полета его импульс изменился на $\Delta p = 20$ кг · м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите наибольшую высоту подъема тела.

2. Найдите разность потенциалов на клеммах источника постоянного тока, если внешнее сопротивление замкнутой цепи в 5 раз больше внутреннего сопротивления источника. ЭДС источника тока $\mathcal{E} = 6$ В.

3. Стержень движется в продольном направлении с постоянной скоростью относительно некоторой инерциальной системы отсчета. При каком значении скорости (в долях скорости света) длина стержня в этой системе отсчета будет в 1,66 раза меньше его собственной длины?

4. В опыте по фотоэффекту на металлическую пластину падает свет с длиной волны $\lambda = 420$ нм. Фототок прекращается при задерживающей разности потенциалов $U_з = 0{,}95$ В. Определите работу выхода электрона из металла.

5. Два груза массами $3m$ и m связаны невесомой нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижный блок (рис.5). В начальный момент груз массой m удерживают, прижимая его к столу, затем отпускают. На какую максимальную высоту подни-

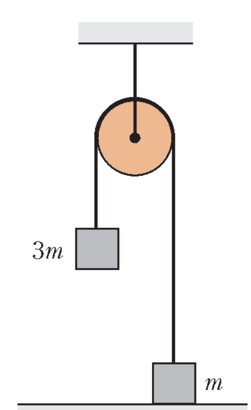


Рис. 5

мется этот груз над столом, если при ударе груза массой $3m$ о стол выделяется количество теплоты Q? Удар абсолютно неупругий. Массой блока и силами трения в блоке пренебречь.

6. В горизонтальном закрепленном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем массой $M = 1$ кг, находится идеальный одноатомный газ. Газ нагревают. При этом поршень, двигаясь равноускоренно, приобретает скорость $v = 4$ м/с. Найдите количество теплоты, сообщенное газу. Теплоемкостью сосуда и поршня, а также внешним давлением и трением пренебречь.

7. Горизонтальный контур образован двумя замкнутыми на катушку индуктивностью L параллельными проводами, находящимися на расстоянии h друг от друга (рис.6). По проводам без трения может скользить перемычка массой m. Контур помещен в вертикальное однородное магнитное поле с индукцией B. В начальный момент времени неподвижной перемычке сообщают скорость v_0. Определите расстояние, которое пройдет перемычка до первой остановки, если сопротивлением всех элементов можно пренебречь.

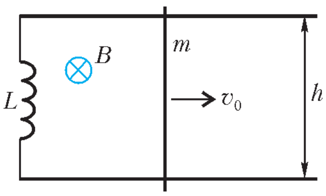


Рис. 6

Публикацию подготовили Л.Паршев, Ю.Струков

Московский инженерно-физический институт

(олимпиада Федерального агенства по атомной энергии РФ)

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. Куплены апельсины на сумму 300 рублей и яблоки на сумму 400 рублей. Яблок куплено на 2 кг меньше, чем апельсинов, и по цене (за 1 кг) на 20 рублей больше. Сколько куплено яблок?

2. Решите уравнение

$$\sqrt{1+11\cos x} = 2\sin x\,.$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{16^x - 2}\cdot\frac{25^x - 5\cdot 15^x + 6\cdot 9^x}{2x-1} \ge 0\,.$$

4. а) На плоскости xOy укажите геометрическое место точек, удовлетворяющих неравенству $|x-\pi| + |y-2\pi| \le \pi$. Чему равно наименьшее значение суммы $x + y$?

б) При каждом значении $a \in \boldsymbol{R}$ решите систему неравенств

$$\begin{cases} |x-\pi| + |a-2\pi| \le \pi, \\ \cos^2 x + \sin^2\dfrac{a}{2} < 1. \end{cases}$$

5. Точки K и L лежат, соответственно, на смежных ребрах B_1C_1 и C_1D_1 верхнего основания $A_1B_1C_1D_1$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$), а точки M и N лежат, соответственно, на смежных ребрах AD и AB нижнего основания $ABCD$. Известно, что $AB = AD$, $CC_1 = 4\sqrt{2}$. Отрезки KL и MN параллельны диагонали основания $BD = 14$. Расстояние от MN до точки A равно 6, а расстояние от KL до точки C_1 равно a. Точка $P \in CC_1$, $C_1P = 3$. Найдите:

а) площадь полной поверхности пирамиды C_1KLP в случае $a = 4$;

б) площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через прямые KL и MN, в случае $a = 4$;

в) тангенс угла наклона плоскости сечения к плоскости основания при условии, что площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через прямые KL и MN, максимальна.

Вариант 2

1. Сумма цифр натурального трехзначного числа равна 18, а цифра сотен этого числа на единицу меньше цифры десятков. Если в этом числе поменять местами цифры сотен и единиц, то разность между полученным и исходным числом будет равна 495. Найдите исходное число.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{2-x} = -x-3\,.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{\log_3^2 x - (\log_3 10)\cdot\log_3 x + (\log_3 2)\cdot\log_3 5}{x-7} \le 0\,.$$

4. Найдите производную и критические точки функции

$$f(x) = -\frac{5}{2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x} \quad (x \in \boldsymbol{R})\,.$$

При каждом значении $a \in \boldsymbol{R}$ найдите x, при котором функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на отрезке $\left[a; a + \dfrac{3\pi}{8}\right]$, если известно, что $f(x)$ определена во всех его точках.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной $6\sqrt{6}$, проекция вершины S на плоскость основания пирамиды есть середина ребра AB, а $SA = 3\sqrt{22}$. На ребре BC взята точка E так, что $CE : EB = 5 : 1$. Через точку E параллельно ребру AB проводится сечение пирамиды. а) Найдите объем пирамиды. б) Какие фигуры получаются в указанном сечении? в) Найдите минимально возможную площадь сечения.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. Одну пятую часть пути автомобиль ехал со скоростью $v_1 = 40$ км/ч, а оставшийся путь – со скоростью $v_2 = 60$ км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всем пути.

2. Баллон, содержащий некоторое количество кислорода, разрывается при испытаниях при температуре $t_1 = 727$ °C. Такой же баллон, содержащий смесь вдвое меньшего количества кислорода и вчетверо меньшего (по массе) количества неизвестного газа, разрывается при температуре $t_2 = 127$ °C. Найти молярную массу неизвестного газа. Молярная масса кислорода $M_{O_2} = 32$ г/моль.

3. Три воздушных конденсатора с емкостями C, $2C$ и $3C$ соединили последовательно и подключили к источнику напряжения U. Затем источник отключили, а конденсаторы с емкостями $2C$ и $3C$ опустили в жидкий диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε. Найдите напряжение на батарее конденсаторов после этого.

4. На передний край тележки массой M, движущейся со скоростью v_0 по гладкой горизонтальной поверхности, кладут брусок массой m. Начальная скорость бруска относительно земли равна нулю. Какой должна быть длина тележки, чтобы брусок в дальнейшем не упал с нее? Коэффициент трения между бруском и тележкой равен μ.

5. Равномерно заряженная положительным зарядом q тонкая палочка движется так, что ее нижний конец скользит по горизонтальной опоре с постоянной скоростью v, а верхний конец скользит по вертикальной стенке (рис.1). Палочка находится в однородном магнитном поле с индукцией, равной B и направленной горизонтально параллельно границе между стенкой и опорой. С какой силой поле действует на палочку в тот момент, когда угол между ней и опорой равен α?

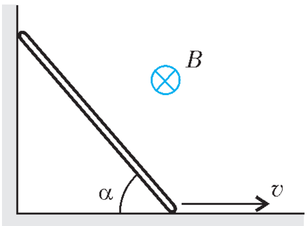


Рис. 1

Вариант 2

1. Предмет AB длиной l расположен перпендикулярно главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F. Расстояние от предмета до линзы d больше фокусного расстояния линзы. Постройте изображение предмета в линзе. Найдите размер изображения.

2. Тело, двигаясь равноускоренно из состояния покоя, прошло расстояние s за время τ. Какую скорость имело тело в тот момент времени, когда оно прошло расстояние s/n?

3. Одноатомный идеальный газ в количестве ν молей, имеющий абсолютную температуру T, сначала охлаждается изохорически так, что давление газа уменьшается в 2 раза. Затем газ нагревается изобарически до температуры, в 3 раза превосходящей первоначальную. Определите количество теплоты, полученное газом во всем процессе.

4. Три параллельно расположенные пластины заряжены зарядами Q, $-2Q$ и $3Q$, расстояния между пластинами равны d и $2d$ (рис.2). Крайние пластины соединяют проводником. Какой заряд протечет по проводнику в процессе установления равновесия? Размеры пластин много больше расстояний между ними.

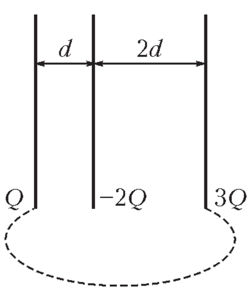


Рис. 2

5. К горизонтально расположенной пружине жесткостью k привязано тело массой m, находящееся на шероховатой горизонтальной поверхности (рис.3). Коэффициент трения между телом и поверхностью μ. В начальный момент времени тело находится в положении, в котором пружина не деформирована. Затем телу толчком сообщают скорость $v_0 = 11\mu g\sqrt{m/k}$, где g – ускорение свободного падения. Через какое время после начала движения тело окончательно остановится?

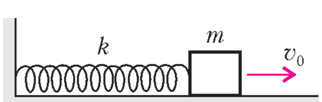


Рис. 3

Публикацию подготовили С.Муравьев, О.Нагорнов

Новосибирский государственный университет

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из задач трех типов. Первые три задачи – расчетные, различной степени трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения ориентироваться в непривычной или усложненной ситуации.

Четвертая задача – задача-оценка. Для ее решения необходимо разобраться в рассматриваемом физическом явлении, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивается, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача – задача-демонстрация, при решении которой необходимо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Среди различных факторов, влияющих на процесс, необходимо выделить главный.

Вариант 1

1. Тело массой m тянут за нить так, что оно летит по горизонтали с ускорением a (рис.1). Найдите силу натяжения нити. Ускорение свободного падения равно g.

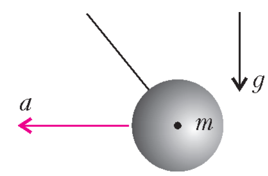


Рис. 1

2. Вертикальный цилиндр разделен поршнем массой m. Над поршнем вакуум, а ниже поршня газообразный гелий. К газу подводится тепловая мощность N, при этом поршень поднимается с постоянной скоростью. Найдите эту скорость. Трения нет, ускорение свободного падения равно g.

3. Пластины плоского конденсатора, площадью S каждая, соединены проводником (рис.2). Зазор между ними H значительно меньше размеров пластин. Внутри находится второй конденсатор с пластинами той же площади, на которых имеются заряды Q и $-Q$. Определите, какую работу следует совершить, чтобы вытащить внутренний конденсатор, не меняя зазор h между его пластинами.

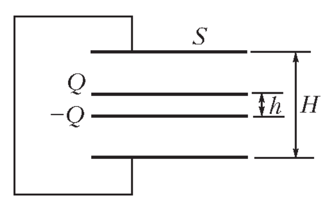


Рис. 2

4. Оцените максимальную скорость движения тени высотного здания в полдень.

5. Из провода свернуты две катушки, лежащие одна на другой. По одному выводу от обеих катушек соединили вместе, а к двум другим подключили гальванометр. Над катушками двигают плоский магнит. Затем верхнюю катушку переворачивают, и вновь двигают над катушками магнит. Показания гальванометра в этих двух случаях различаются. Объясните демонстрируемое явление.

Вариант 2

1. Пробирка массой m и сечением S плавает вертикально в воде так, что верхний конец пробирки выше уровня воды на h_0. Когда пробирку опустили в неизвестную жидкость, она плавает так, что ее верхний конец выше уровня жидкости на h. Какова плотность жидкости ρ, если плотность воды ρ_0?

2. В проводящей рамке с перемычкой включены резисторы с указанными на рисунке 3 сопротивлениями, сопротивления проводов и перемычки пренебрежимо малы. Рамка вращается с угловой скоростью ω вок-

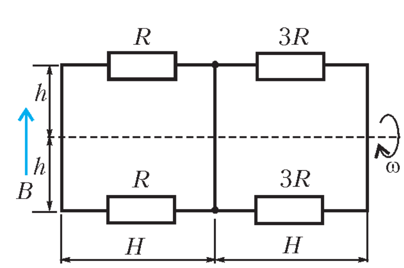


Рис. 3

руг горизонтальной оси симметрии в вертикальном магнитном поле с индукцией B. Найдите наибольшее значение тока в перемычке. Размеры рамки приведены на рисунке.

3. Конденсатор емкостью C_0 зарядили до напряжения U_0. После этого конденсатор отсоединили от источника напряжения и отпустили его нижнюю пластину. Она начала падать и, пролетев расстояние h по вертикали, приобрела скорость v. Найдите емкость конденсатора C в этот момент, если масса пластины m, а ускорение свободного падения g.

4. Оболочку воздушного шара наполняют нагретым воздухом. Оцените количество теплоты, которое должно пойти на нагрев воздуха, чтобы воздушный шар мог поднять вас. Удельная теплоемкость воздуха при атмосферном давлении равна $1{,}0$ кДж/(кг·К).

5. Массивное колесо надето на согнутый стержень как на ось. Его ставят на наклонную доску так, что стержень упирается в нее. Колесо отпускают – оно стоит. Теперь вставляют другой стержень, с большей длиной от оси до доски. Отпущенное колесо скатывается по доске. Объясните демонстрируемое явление.

Вариант 3

1. На дне коробки стоит брусок массой M, на котором находится кубик массой m (рис.4). Кубик привязан к правой стенке коробки нитью, параллельной дну. Коэффициент трения между бруском и дном равен μ, трения между бруском и кубиком нет. При каком угле наклона коробки α брусок начнет выскальзывать из под кубика?

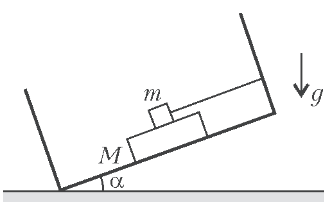


Рис. 4

2. При температуре T_0 тонкостенный стакан сечением S плавает в воде вверх дном, выступая из воды на высоту h_0 (рис. 5). Найдите начальный объем воздуха в стакане, если при повышении температуры до T стакан начал выступать из воды на высоту h. Изменением атмосферного давления и плотности воды пренебречь.

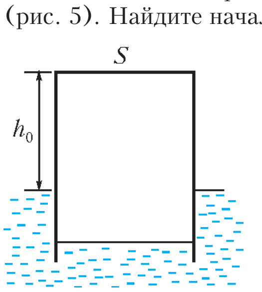


Рис. 5

3. Незаряженный конденсатор емкостью C подсоединен к параллельным проводам, сопротивление которых равно ρ на единицу длины, а расстояние между проводами H (рис. 6). Перпендикулярно плоскости проводов имеется магнитное поле с индукцией B. Равномерно движущаяся проводящая перемычка в некоторый момент времени начинает замыкать эти провода. При какой скорости перемычки ток в контуре будет оставаться неизменным? Найдите величину этого тока, если в момент соприкосновения перемычки с проводами сопротивление контура было равно R_0.

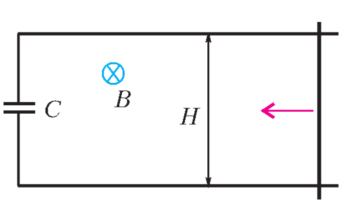


Рис. 6

4. Представьте, что вы плывете на лодке, в дне которой появилась пробоина. Оцените, при какой ее площади вы будете успевать отчерпывать набирающуюся воду литровой банкой.

5. Поплавки, один с воткнутым сверху тонким стержнем, второй – с толстым, плавают в солевом растворе, как показано на рисунке 7. Если их опустить в пресную воду, то первый поплавок погружается почти на всю длину стержня, а второй остается практически на прежнем уровне погружения. Объясните наблюдаемое явление.

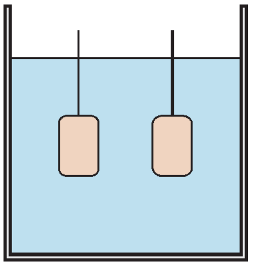


Рис. 7

Публикацию подготовили И.Воробьев, Г.Меледин, Г.Федотович, М.Блинов

Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Математический факультет

Вариант 1

1. Найдите область определения функции

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\log_3\left(2x^2-7x+6\right)}.$$

2. Определите сумму всех трехзначных чисел, делящихся на 4.

3. Решите неравенство

$$\left|\frac{7-x}{5x-2}\right|\le 3.$$

4. Два завода по плану должны были выпустить за месяц 360 станков. Первый завод выполнил план на 112%, а второй на 110%, вместе заводы выпустили за месяц 400 станков. Сколько станков сверх плана выпустил за месяц каждый завод в отдельности?

5. Определите координаты точек пересечения графиков функций $f(x)=4^{x+\sqrt{x^2-2}}-6$ и $g(x)=5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}$.

6. Определите в уравнении $x^2-(2k+1)x+k^2+2=0$ значение k такое, что один из корней уравнения равен половине другого. Найдите эти корни.

7. Решите уравнение $\sqrt{3}\sin x=(1-\cos x)$. Определите сумму корней этого уравнения из промежутка $[0;2\pi]$.

8. Докажите, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными из этого угла.

9. В тетраэдр, все ребра которого равны, вписан конус. Радиус основания конуса равен 5. Определите объем пирамиды.

Вариант 2

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}2^x\cdot 4^y=32,\\ \lg(x-y)^2-2\lg 2=0.\end{cases}$$

2. Решите неравенство $\log\left(64\sqrt[24]{2^{x^2-40x}}\right)\ge 0$.

3. Решите уравнение $\sin x\left(\operatorname{ctg}^2 x-1\right)=0$. Укажите число корней на промежутке $[0;2\pi]$.

4. Найдите все значения m, при которых неравенство $mx^2-4x+3m+1>0$ верно для всех действительных x.

5. Решите уравнение $4^{|2x-1|} - 3 \cdot 2^{1+|2x-1|} + 8 = 0$.

6. Решите неравенство $\sqrt{x+6} > \sqrt{2x-5} + \sqrt{x+1}$.

7. Какое двузначное число в 4 раза больше суммы своих цифр и в три раза больше произведения цифр?

8. В равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, а средняя линия равна m. Вычислите площадь трапеции.

9. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 12 и образует с основанием цилиндра угол 60°. Определите объем правильной треугольной призмы, вписанной в этот цилиндр.

Публикацию подготовили Г.Хамов, О.Корсакова

Российский государственный технологический университет им. К.Э.Циолковского (МАТИ)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение $\sqrt{2x^2 - 13x + 12} = 2 - x$.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} |x+y| = 7, \\ x^2 - y^2 = 21. \end{cases}$$

3. Найдите сумму решений уравнения

$$1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 2\sqrt{2}\sin x = 0$$

на отрезке $[-\pi; \pi]$.

4. Решите неравенство $\log_{1-x} 16 \le 2$.

5. При каких значениях параметра a уравнение $7^t + (a+1)7^{-t} = 4$ имеет одно решение?

6. В четырехугольнике $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O, диагональ BD – это биссектриса угла ABC. Найдите отношение $OD : AD$, если около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность и $\angle ABC = 120^\circ$, $BC : AB = 1 : 4$.

7. Решите уравнение

$$3^{\frac{\cos x - \cos^2 x}{\sin x}} \cdot 3^{\frac{1}{\sin x}} - 3^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \cdot 3^{\sin x} + 3^{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}} = 3^{\frac{1}{\sqrt{2}} + \operatorname{ctg} x}.$$

Вариант 2

(олимпиада-2006)

1. В книжный магазин привезли несколько одинаковых коробок с книгами, которые переложили на полки. Получилось девять полных полок и еще две книги осталось. Когда книги продали, привезли другое количество таких же коробок с книгами, которые переложили на полки. Получилось шесть полных полок, а на седьмой полке осталось место для одной книги. Сколько книг было в одной коробке?

2. Найдите углы треугольника α, β и γ, удовлетворяющие уравнению

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{3}{2}.$$

3. При каких значениях b неравенство

$$x^2 + b \le \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

выполняется для всех допустимых значений x?

4. Найдите наименьшее натуральное число n, при котором уравнение

$$\frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \ldots + \frac{1}{(x+2(n-1))(x+2n)} = \frac{1}{40}$$

разрешимо в целых числах.

5. Из районных команд была создана сборная команда города по гандболу из 7 игроков. Будем считать, что два спортсмена сборной знакомы друг с другом, если они ранее какое-то время выступали за одну команду. На первом тренировочном сборе выяснилось, что среди этих семи игроков двое знакомы с пятью игроками, двое знакомы с тремя игроками, один знаком с двумя игроками и двое знакомы с одним игроком. Найдите наибольшее количество спортсменов сборной города, любые два из которых не являются знакомыми.

6. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает его стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите отношение площади треугольника MBN к площади четырехугольника $AMNC$, если в $AMNC$ можно вписать окружность и его диагональ AN – диаметр этой окружности, а диагональ MC видна из центра описанной окружности под углом 120°.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

Выберите правильный ответ

1. Тело падает без начальной скорости и достигает поверхности земли через 4 с. С какой высоты падало тело? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1) 20 м; 2) 40 м; 3) 80 м; 4) 120 м; 5) 160 м.

2. За снегоходом на тросе тянут груз массой 500 кг. Найдите наибольшую силу натяжения троса, если максимальное ускорение снегохода 2 м/с^2. Коэффициент трения груза о снег 0,1. Трос натянут горизонтально.

1) 500 Н; 2) 750 Н; 3) 1000 Н; 4) 1250 Н; 5) 1500 Н.

3. Два шара движутся навстречу друг другу по одной прямой. Кинетическая энергия первого шара 1 Дж. Какой должна быть кинетическая энергия второго шара, чтобы после удара шары остановились? Массы шаров 1 кг и 2 кг.

1) 0,25 Дж; 2) 0,5 Дж; 3) 1 Дж; 4) 2 Дж; 5) 2,5 Дж.

4. Один моль кислорода занимает объем 10 л, два моля азота занимают объем 20 л. Сравните давления газов, если их температуры одинаковы.

1) Давления одинаковы; 2) давление кислорода в 2 раза больше; 3) давление азота в 2 раза больше; 4) давление азота в 4 раза больше; 5) необходимо знать молярные массы газов.

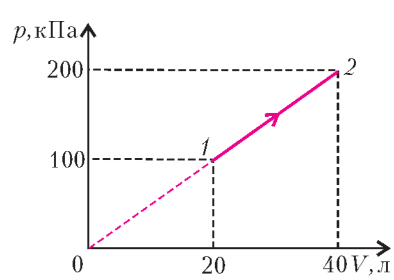


Рис. 1

5. Найдите работу, которую совершила постоянная масса идеального газа в процессе *1–2* (рис.1). На графике изображена зависимость давления газа от объема в этом процессе.

1) 1000 Дж; 2) 2000 Дж; 3) 3000 Дж; 4) 4000 Дж; 5) 8300 Дж.

6. Три резистора соединены последовательно. Общее напряжение на этом участке цепи 20 В, при этом напряжение на третьем резисторе 8 В. Найдите силу тока в цепи, если сопротивление первого резистора 4 Ом, второго резистора 6 Ом.

1) 0,8 А; 2) 1,2 А; 3) 1,33 А; 4) 2 А; 5) 5 А.

7. Электрическое поле создано заряженным металлическим шаром, радиус шара 5 см. Во сколько раз отличаются напряженности электрического поля в точках, находящихся на расстояниях 5 см и 10 см от поверхности шара снаружи от него?

1) В 1,5 раза; 2) в 2 раза; 3) в 2,25 раза; 4) в 4 раза; 5) в 9 раз.

8. Частица массой 10^{-25} кг движется в однородном магнитном поле по окружности, скорость частицы $2 \cdot 10^5$ м/с. Найдите модуль изменения импульса частицы за половину оборота.

1) 10^{-20} кг · м/с; 2) $2 \cdot 10^{-20}$ кг · м/с; 3) $3 \cdot 10^{-20}$ кг · м/с; 4) $4 \cdot 10^{-20}$ кг · м/с; 5) 0.

9. В контуре происходят гармонические колебания. Сравните энергию электрического поля конденсатора W_C с энергией магнитного поля катушки W_L в тот момент, когда напряжение на конденсаторе равно половине максимального значения.

1) $W_L > W_C$ в 2 раза;
2) $W_L > W_C$ в 3 раза;
3) $W_L > W_C$ в 4 раза;
4) $W_L > W_C$ в 8 раз;
5) $W_L = W_C$.

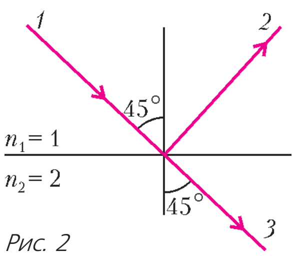


Рис. 2

10. Луч *1* падает на границу раздела двух сред под углом 45° (рис.2). Что неверно на чертеже?

1) Не будет луча *2*;
2) не будет луча *3*;
3) угол преломления луча *3* больше 45°;
4) угол преломления луча *3* меньше 45°;
5) на чертеже все правильно.

Вариант 2

Выберите правильный ответ

1. Первый час пути поезд проехал со скоростью 50 км/ч, следующие 2 часа он ехал со скоростью 80 км/ч. Найдите среднюю скорость поезда за эти 3 часа.

1) 60 км/ч; 2) 65 км/ч; 3) 70 км/ч; 4) 72 км/ч; 5) 75 км/ч.

2. Массы тел на рисунке 3 равны $m_1 = 3$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 1$ кг; нити невесомые и нерастяжимые. К первому телу приложена горизонтальная сила $F = 12$ Н. Найдите силу натяжения нити, которая связывает тела массами m_1 и m_2. Трения нет.

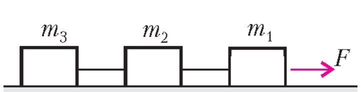


Рис. 3

1) 6 Н; 2) 8 Н; 3) 10 Н; 4) 11 Н; 5) 12 Н.

3. Тело массой 1 кг бросают с горизонтальной начальной скоростью 4 м/с с высоты 5 м над землей. Какой будет кинетическая энергия тела на высоте 2 м над землей? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1) 8 Дж; 2) 26 Дж; 3) 38 Дж; 4) 46 Дж; 5) 58 Дж.

4. Идеальный газ нагревается с 7 °С до 35 °С при постоянном давлении. Объем газа при этом увеличивается на 20 л. Найдите первоначальный объем.

1) 4 л; 2) 5 л; 3) 16 л; 4) 25 л; 5) 200 л.

5. При сжатии идеального газа внешние силы совершают над газом работу 600 Дж, при этом внутренняя энергия газа уменьшается на 600 Дж. Получал или отдавал тепло газ в ходе этого процесса?

1) Отдал 1200 Дж тепла; 2) отдал 600 Дж тепла; 3) получил 1200 Дж тепла; 4) получил 600 Дж тепла; 5) не получал и не отдавал тепло.

6. Два одинаковых резистора подключают к источнику постоянного напряжения, соединив их параллельно. На каждом резисторе выделяется мощность 16 Вт. Какая мощность будет выделяться на каждом резисторе, если их подключить к тому же источнику, соединив последовательно? Сопротивлением проводов пренебречь.

1) 2 Вт; 2) 4 Вт; 3) 8 Вт; 4) 12 Вт; 5) 16 Вт.

7. Плоский воздушный конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения. Расстояние между пластинами конденсатора увеличивают в 2 раза, а пространство между пластинами заполняют диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon = 2$. Как изменится заряд на пластинах конденсатора?

1) Увеличится в 2 раза; 2) увеличится в 4 раза; 3) уменьшится в 2 раза; 4) уменьшится в 4 раза; 5) не изменится.

8. Электрон влетает в однородное магнитное поле, как показано на рисунке 4. Укажите направление силы Лоренца, которая действует на частицу в этот момент.

1) $\uparrow$; 2) $\downarrow$; 3) $\leftarrow$; 4) $\rightarrow$; 5) сила действует перпендикулярно плоскости чертежа.

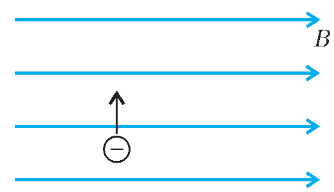


Рис. 4

9. Зависимость смещения математического маятника от времени описывается уравнением $x(t) = 0{,}05 \sin 2{,}5t$, где x измеряется в метрах. Найдите длину маятника.

1) 0,5 м; 2) 1,6 м; 3) 2,5 м; 4) 4 м; 5) 5 м.

10. Фотон с энергией 1,5 эВ падает на зеркало по нормали к нему. Какой импульс передает фотон зеркалу при отражении? Известно, что $1 \text{ эВ} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

1) $4 \cdot 10^{-28}$ кг · м/с; 2) $8 \cdot 10^{-28}$ кг · м/с; 3) 10^{-27} кг · м/с; 4) $1{,}6 \cdot 10^{-27}$ кг · м/с; 5) необходимо знать массу фотона.

Публикацию подготовили А.Браун, М.Кузьмин, А.Миронов, Л.Муравей, Г.Никулин, А.Покровский, П.Селин

Российский государственный университет нефти и газа им. И.М.Губкина

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите

$$\frac{7\sqrt{7} + 27b^3}{\sqrt{7} + 3b} + 3\sqrt{7}b - 9b^2 .$$

2. Найдите наибольшее целое число из области определения функции

$$y = \sqrt{5 + 8x - 4x^2} .$$

3. Дана арифметическая прогрессия, у которой 6-й член равен 16, а 12-й член равен (–20). Найдите первый член прогрессии.

4. Решите уравнение

$$(x + 6)|x + 6| = -36 .$$

5. Решите уравнение

$$4^{x+0,5} \cdot 2^{3x+1} = 32 .$$

6. Дано: $\log_a b = -2{,}3$. Найдите $\log_a\left(b\sqrt{a^3}\right)$.

7. Вычислите $\sin 40° - \cos 40° \operatorname{ctg} 115°$.

8. Найдите в градусах наибольший отрицательный корень уравнения

$$\cos 16^\circ \cos 2x - \sin 16^\circ \sin 2x = \frac{1}{2}.$$

9. Найдите наибольшее целое значение параметра a, при котором через точку $M(0;6)$ можно провести три различные прямые, касающиеся графика функции

$$y = x^3 + 7x^2 + 17x + a.$$

10. Сколько целых чисел входит в область решений неравенства

$$\log_7 \sqrt{5x+204} \cdot \log_x 7 \ge 1\ ?$$

11. $ABCD$ – прямоугольная трапеция с острым углом ADC. В трапецию вписана окружность, она касается стороны AB в точке M, а стороны BC – в точке N. Известно, что $CD = 1$, $\angle MND = \pi/2$. Найдите площадь трапеции.

12. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ боковая грань составляет с плоскостью основания $ABCD$ угол, косинус которого равен $2/3$. Площадь поверхности сферы, проходящей через вершины S, B, C и середину стороны AD, равна 63. Найдите площадь поверхности сферы, вписанной в пирамиду $SABCD$.

Вариант 2

1. Упростите

$$\frac{0,064 - 125b^3}{0,16 + 2b + 25b^2} + 5b.$$

2. Решите уравнение

$$\left(\sqrt{-x-1} - 2\right)\left(\sqrt{-x-1} + 12\right) = 15.$$

3. Найдите второй член геометрической прогрессии, если известно, что ее пятый член равен $1/49$, а знаменатель прогрессии равен $1/7$.

4. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$|x - 5,5| < 10.$$

5. Сколько целых решений имеет неравенство

$$0,7^{4x^2 - 34,04} > 17,27^{x^2 - 8,51}\ ?$$

6. Вычислите

$$\log_{1,3} \sqrt[7]{8} : \log_{1,3} \sqrt[14]{8}.$$

7. Найдите наименьшее положительное число x, не входящее в область определения функции

$$y = \operatorname{tg}(10\pi x + 0,7\pi).$$

8. Найдите в градусах наибольший отрицательный корень уравнения

$$\sin x + \sin 11x = 6 \sin 6x.$$

9. Прямая касается графика функции $y = x^4 - 20x^3 - 3x + 21$ в двух различных точках M и N. Найдите абсциссу середины промежутка $[M; N]$.

10. Сколько целых чисел входит в область решений неравенства

$$\log_{25}\left(\frac{9x+15}{3x-5} + 2,5\right) \le 0,5\ ?$$

11. $ABCD$ – параллелограмм с острым углом BAD. Окружность, проходящая через вершины A, B и D, пересекает сторону BC в ее середине, а сторону CD – в точке N. Известно, что $DN : NC = 7 : 18$. Найдите $\cos\angle BAD$.

12. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ боковая грань образует с плоскостью основания угол, косинус которого равен 0,4. Радиус сферы, центр которой лежит на ребре SB и которая касается плоскости основания пирамиды и плоскости грани ASC, равен 21. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Внимание! Если единицы измерения не указаны, выразите ответ в единицах СИ. Ускорение свободного падения g считайте равным 10 м/с^2.

Вариант 1

1. Тел брошено горизонтально. Через 3 с после броска угол между направлением полной скорости и направлением полного ускорения стал равным 60°. Определите величину полной скорости тела в этот момент времени.

2. Груз массой 3 кг подвешен к потолку лифта с помощью двух нитей, каждая из которых образует с вертикалью угол 60°. Каким будет натяжение каждой нити, если лифт будет опускаться с ускорением, направленным вниз и равным 2 м/с^2 ?

3. Человек догоняет катящуюся по инерции тележку, вскакивает на нее и остается на ней, в результате чего скорость тележки увеличивается на 50%. Во сколько раз масса тележки больше, чем масса человека? Вначале скорость человека была в 3 раза больше скорости тележки.

4. К гладкой вертикальной стене на нити подвешен шар массой 0,6 кг. Определите силу натяжения нити, если нить составляет угол 60° с вертикалью.

5. Открытую пробирку с воздухом при атмосферном давлении нагрели, затем герметически закрыли и охладили до 7 °C. Давление в пробирке уменьшилось при этом вдвое по сравнению с атмосферным. До какой температуры (в °C) была нагрета пробирка?

6. Найдите величину ускорения, которое приобретает частица массой 0,2 г с зарядом 4 мкКл под действием однородного электрического поля с напряженностью 1500 В/м.

7. Десять ламп сопротивлением 24 Ом каждая, рассчитанные на напряжение 16 В, соединены последовательно и подключены к сети постоянного напряжения 220 В последовательно с резистором. Каково должно быть сопротивление этого резистора, чтобы лампы горели полным накалом?

8. Расстояние от изображения до рассеивающей линзы составляет 0,8 от фокусного расстояния. Во сколько раз расстояние от предмета до линзы больше фокусного расстояния?

9. В шар массой 240 г попадает пуля массой 10 г, летящая со скоростью 200 м/с по линии, проходящей через центр шара. После удара пуля отскакивает назад, причем в тепло при ударе переходит 189 Дж. Найдите конечную скорость шара.

10. В теплоизолированном цилиндре под невесомым поршнем находится идеальный одноатомный газ. Вначале поршень закреплен и соединен с дном цилиндра недеформированной пружиной. После того как поршень освободили и система пришла в равновесие, объем газа увеличился в 1,25 раза. На сколько процентов при этом уменьшилось давление? Над поршнем газа нет.

11. По П-образной рамке, наклоненной под углом 30° к горизонту и помещенной в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости рамки, начинает соскальзывать без трения перемычка массой 30 г. Длина перемычки 10 см, ее сопротивление 2 мОм, индукция поля 0,1 Тл. Найдите установившуюся скорость движения перемычки. Сопротивлением рамки пренебречь.

12. Во сколько раз увеличилась кинетическая энергия электрона в атоме водорода при переходе из одного стационарного состояния в другое, если угловая скорость вращения по орбите увеличилась в 27 раз?

Вариант 2

1. Камень, брошенный под углом к горизонту, достиг наибольшей высоты 5 м. Найдите полное время полета камня.

2. К невесомой нити длиной 1 м прикреплен шарик массой 200 г, который равномерно вращается в вертикальной плоскости. При какой минимальной угловой скорости вращения произойдет обрыв нити, если она выдерживает максимальную нагрузку 3,8 Н?

3. Из орудия массой 2 т вылетает в горизонтальном направлении снаряд массой 20 кг со скоростью 250 м/с. Какую скорость (по абсолютной величине) получит орудие при отдаче? Ответ дайте в см/с.

4. Два человека несут металлическую трубу, положив ее себе на плечи. Первый человек поддерживает трубу на расстоянии 1,5 м от ее конца, второй держит противоположный конец трубы. Во сколько раз нагрузка на первого человека больше, чем на второго, если длина трубы 3,5 м?

5. При какой температуре (в кельвинах) находился газ, если при его нагревании до 177 °С средняя квадратичная скорость его молекул увеличилась в 1,5 раза?

6. Два конденсатора, емкости которых 1 мкФ и 4 мкФ, соединены последовательно и подключены к источнику тока с ЭДС 75 В. Найдите разность потенциалов на обкладках конденсатора с меньшей емкостью.

7. Медная проволока обладает электрическим сопротивлением 10 Ом. Каким электрическим сопротивлением обладает медная проволока, у которой в 6 раз больше длина и в 4 раза больше площадь поперечного сечения?

8. Рассеивающая линза с фокусным расстоянием 5 см дает уменьшенное в 5 раз изображение предмета. Найдите расстояние от предмета до изображения (в см).

9. В шар массой 100 г попадает пуля массой 2 г, летящая со скоростью 100 м/с по линии, проходящей через центр шара. Считая, что сила сопротивления движению пули в материале шара постоянна и равна 149 Н, найдите конечную скорость шара. Диаметр шара 5 см.

10. В теплоизолированном цилиндре под невесомым поршнем находится идеальный одноатомный газ при температуре 300 К. Вначале поршень закреплен и соединен с дном цилиндра недеформированной пружиной. После того как поршень освободили и система пришла в равновесие, температура понизилась до 270 К. На сколько процентов увеличился объем газа? Над поршнем газа нет.

11. Протон влетает со скоростью 30 км/с в пространство с электрическим и магнитным полями, линии которых совпадают по направлению, перпендикулярно к этим линиям. Определите напряженность электрического поля (в кВ/м), если индукция магнитного поля 0,4 Тл, а ускорение протона, вызванное действием этих полей, равно $2\cdot10^{12}$ м/с^2. Отношение заряда протона к его массе принять равным 10^8 Кл/кг.

12. Заряженный конденсатор емкостью 0,4 мФ подключили к катушке с индуктивностью 0,1 мГн. Через какое время (в мкс) от момента подключения энергия электрического поля конденсатора станет в первый раз равна энергии магнитного поля катушки? (Считать $\pi = 3{,}14$.)

Публикацию подготовили
Б.Писаревский, А.Черноуцан

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(физико-механический факультет)

1. Упростите выражение $\dfrac{x^3-8}{x^2+2x+4}-\dfrac{x^4-1}{x^3+x^2+x+1}$.

2. Решите уравнение $x^2-\dfrac{4}{x^2}=3$.

3. Вычислите 3^z, где $z=\log_3^2 15-\log_9^2 25$.

4. Найдите производную функции $y=\ln\dfrac{x-2}{x-4}$ в точке $x=5$.

5. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, для которой сумма второго и третьего членов составляет 264% от ее первого члена.

6. Какое число больше: $a=\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{31}$ или $b=2\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{4}$?

7. Решите уравнение $\sqrt{\sqrt{3}\sin x-\cos^2 x}=-\sqrt{5}\cos x$.

8. Вычислите $\sin(4\operatorname{arctg}2)$.

9. Решите неравенство $\sqrt{x^2+2x-3}\le x+3$.

10. При каких целых n число $\sqrt[4]{n^2-88}$ является целым?

11. Найдите область определения функции $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{x-1}{x-5}}$.

12. Найдите множество значений функции $y=\dfrac{9\cos^2 x-9\sin x-15}{3\sin x+2}$.

13. Найдите сумму всех двузначных чисел, которые делятся хотя бы на одно из чисел 3 или 5.

14. Какой должна быть абсцисса точки, лежащей на прямой с уравнением $y=5x-9$, чтобы через нее не проходила ни одна касательная к графику функции $y=\dfrac{x+3}{x-2}$?

15. Покажите, что число $\sin 40°\cos 70°+\sin^2 10°$ является рациональным числом.

16. При каком значении α вектор $(1+\alpha; 3-\alpha)$ имеет наименьшую длину?

17. Решите систему уравнений $\begin{cases}x^2+2xy+4=0,\\ |x+y|=4-y^2.\end{cases}$

18. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ точки M и N – середины сторон AB и CD соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около шестиугольника, если периметр трапеции $BCNM$ равен 14.

19. Правильная треугольная пирамида $SABC$ со стороной основания $AB=3\sqrt{7}$ вписана в шар радиуса $2\sqrt{7}$. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды $TABC$, где T – середина бокового ребра AS пирамиды.

20. При каких a уравнение

$$(x+a)^2-3x-a=3+3\frac{x}{|x|}$$

имеет единственное решение?

Вариант 2

(физико-технический факультет)

1. Упростите выражение $\dfrac{a^3-1}{a^2-a}+\dfrac{a^2-1}{a^2+a}$.

2. Определите, сколько двузначных натуральных чисел делится на 4, но не делится на 3.

3. Найдите рациональное число, которое является значением выражения $\frac{\sqrt[4]{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt[4]{3}+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}+1}$.

4. Сколько процентов составляет произведение корней уравнения $x^2-5x+1=0$ от их суммы?

5. Решите уравнение $\sqrt{1-x^2}+x=-1$.

6. Решите неравенство $\left|x^2-6x+8\right|\le(x-2)^2$.

7. Решите уравнение $\cos 2x+3\cos x=1$.

8. Решите уравнение $\operatorname{arctg}^2 x+\operatorname{arcctg}^2 x=\frac{5\pi^2}{36}$.

9. Найдите область определения функции

$$y=\arcsin\sqrt{\log_{1/2}(x-1)}.$$

10. Найдите множество значений функции $y=\frac{4x-1}{4x^2}$.

11. Найдите целое число, которое является значением выражения $5^{\log_3 a}$, если $a=2^{\log_5 3}$.

12. Решите уравнение $3^{x^2-1}=2^{x+1}$.

13. Решите неравенство $\lg\left(3+2x-x^2\right)\le\lg(1+x)$.

14. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^2=4x-3,\\ x^2=4y-3.\end{cases}$$

15. Найдите все целые значения, которые может принимать разность арифметической прогрессии, если ее элементами являются числа 1; 13; 9.

16. Сумма всех элементов с нечетными номерами бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\{b_n\}$ равна 243, а сумма элементов с четными номерами равна 162. Найдите четвертый элемент прогрессии b_4.

17. На гиперболе с уравнением $xy=-1$ найдите точку, ближайшую к прямой с уравнением $y=4x+1$.

18. Две окружности касаются внешним образом. Прямая, соединяющая их центры, и общая касательная образуют угол, синус которого равен $3/5$. Найдите отношение радиуса меньшей окружности к радиусу большей.

19. У треугольной пирамиды $SABC$ грани ABC и SAB – равносторонние треугольники с общей стороной AB фиксированной длины, а точка D – середина этой стороны. Найдите значение синуса угла SDC, при котором боковая поверхность пирамиды имеет наибольшую площадь.

20. Определите, при каких значениях параметра a уравнения $\cos x+|\cos x|=2a$ и $\cos x=a$ равносильны.

Публикацию подготовили А.Басов, А.Моисеев, С.Преображенский

Санкт-Петербургский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(математико-механический факультет)

1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\log_{x-a}\left(a^2+(a+1)x-x^2\right)=2$ имеет единственное решение.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x}}=1+x.$$

3. Решите неравенство $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}(3-2x)>\frac{\pi}{4}$.

4. К окружности проведены три различные касательные AB, BC и AC. Расстояние от точки A до прямой BC равно 1, расстояние от точки касания прямой BC с окружностью до проекции точки A на эту прямую равно $\sqrt{5}$, $BC=\frac{4\sqrt{2}}{3}$. Найдите радиус окружности.

5. В прямую треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ вписана сфера. Известно, что $AB=15$, $BC=7$, $AC=20$. Найдите радиус сечения сферы плоскостью A_1BC.

Вариант 2

(факультет психологии)

1. В конечной арифметической прогрессии сумма положительных членов равна $\frac{3}{2}$, и их на четыре меньше, чем отрицательных членов. Первый член прогрессии равен −1. Найдите ее последний член.

2. Решите уравнение $\sin 2x-\cos 2x=\frac{1}{2}\operatorname{tg} x-\frac{1}{2}$.

3. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{4}}\frac{7x-12-x^2}{x^2+x-6}\ge\log_{x^2}\frac{1}{x}$.

4. Точки M и N лежат на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC. Найдите площадь треугольника CMN, если известно, что $AM=BN=3$, $AN=7$, $CM=6$.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $4\sqrt{2a-2^x}=a^2-2^x$ имеет единственное решение.

Вариант 3

(филологический факультет)

1. По двум взаимно перпендикулярным дорогам в сторону перекрестка выехали два велосипедиста. Расстояние между ними в этот момент было 13 км. Затем в течение получаса расстояние между велосипедистами уменьшалось, а потом стало увеличиваться. Скорость одного из велосипедистов равна 18 км/ч. Найдите скорость другого, если известно, что в момент старта он находился на расстоянии 12 км от перекрестка.

2. Решите неравенство

$$\log_{3x}\log_{4x^2} 8x\ge 0.$$

3. Решите уравнение

$$(2\cos x-1)\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}=\sin 2x.$$

4. Прямая l является внешней касательной к двум окружностям. Радиус одной из них равен 3. Расстояние между точками касания равно 6, а расстояние между центрами окружностей равно $3\sqrt{13}$. Найдите радиус окружности, касающейся прямой l и каждой из двух данных окружностей.

5. Изобразите на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству

$$y^2-x+1=\left|x^2-x+2y\right|.$$

Публикацию подготовили А.Громов, Ю.Чурин

XLVII Международная математическая олимпиада

XLVII Международная математическая олимпиада (ММО) прошла с 6 по 18 июля 2006 года. в столице Словении – городе Любляне. Словения – небольшая, но очень красивая страна с разнообразным природным ландшафтом. После двух туров соревнований 498 участников олимпиады из 90 стран познакомились с самыми живописными местами Словении – побывали в пещере близ города Постойна, полюбовались живописным озером и замком Блед, побывали в альпийских предгорьях, искупались в Адриатическом море.

В команду России вошли шесть выпускников, многократных победителей Всероссийских олимпиад:

Александр Магазинов –Ярославль, лицей 33,
Ростислав Девятов – Москва, лицей «Вторая школа»,
Тимофей Образцов – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Павел Затицкий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Алексей Катышев – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Александр Глазман – Санкт-Петербург, ФМЛ 239.

Команда России получила 3 золотые и 3 серебряные медали. Вот результаты выступления наших участников (правильное решение каждой из шести задач оценивалось в 7 баллов):

Участник	Баллы за задачи						Сумма баллов	Медаль
	1	2	3	4	5	6		
А. Магазинов	7	7	7	7	7	7	42	золотая
Р. Девятов	7	7	0	7	7	7	35	золотая
Т. Образцов	7	7	0	7	7	0	28	золотая
П. Затицкий	7	1	2	7	7	1	25	серебряная
А. Катышев	7	7	2	7	0	0	23	серебряная
А. Глазман	7	7	0	7	0	0	21	серебряная

В неофициальном командном зачете наша команда заняла почетное второе место. Вот результаты первых двадцати команд:

№	Страна	Общее число баллов	Количество медалей золото	серебро	бронза
1.	Китай	214	6	0	0
2.	Россия	174	3	3	0
3.	Корея	170	4	2	0
4.	Германия	157	4	0	2
5.	США	154	2	4	0
6.	Румыния	152	3	1	2
7.	Япония	146	2	3	1
8.	Иран	145	3	3	0
9.	Молдавия	140	2	1	3
10.	Тайвань	136	1	5	0
11.	Польша	133	1	2	3
12.	Италия	132	2	2	0
13.	Вьетнам	131	2	2	2
14.	Гонконг	129	1	3	2
15.	Таиланд	123	1	3	2
16.	Канада	123	0	5	1
17.	Венгрия	122	0	5	1
18.	Словакия	118	1	2	3
19.	Турция	117	0	4	1
20.	Великобритания	117	0	4	1

Особо отметим успехи ярославца Саши Магазинова. В прошлом году он получил на международной олимпиаде золотую медаль, отстав лишь на один балл от абсолютных победителей, а в этом году, несмотря на сложность задач, показал стопроцентный результат – набрал 42 балла.

Кроме Александра, такого же результата смогли добиться лишь двое участников олимпиады: Юрий Борейко из Молдавии и Джию Лию из Китая. Все шесть задач больше не удалось решить никому.

Благодарим всех, кто так или иначе содействовал подготовке и успешному выступлению сборной России. Мы благодарны тренерскому совету сборной в составе: А.Бадзян, С.Берлов, И.Богданов, А.Гарбер, А.Глазырин, В.Дольников, Р.Карасев, Д.Карпов, М.Пратусевич, Г.Челноков, работавшему с командой на летних учебно-тренировочных сборах. Мы также признательны Федеральному агентству по образованию, Российской академии повышения квалификации работников образования, Стипендиальному фонду Владимира Потанина, компании «Спортмастер», оказывавшим содействие в работе по подготовке национальной команды России по математике.

В заключение приводим условия задач олимпиады и их решения, придуманные нашими школьниками во время олимпиады.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC. Внутри треугольника выбрана точка P такая, что

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB .$$

Докажите, что $AP \geq AI$, причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда P совпадает с I.

(Корея)

2. Диагональ правильного 2006-угольника P называется *хорошей*, если ее концы делят границу P на две части, каждая из которых содержит нечетное число сторон. Стороны P также называются *хорошими*. Пусть P разбивается на треугольники 2003 диагоналями, никакие две из которых не имеют общих точек внутри P. Какое наибольшее число равнобедренных треугольников, каждый из которых имеет две хорошие стороны, может иметь такое разбиение?

(Сербия)

3. Определите наименьшее действительное число M такое, что неравенство

$$\left|ab\left(a^2-b^2\right)+bc\left(b^2-c^2\right)+ca\left(c^2-a^2\right)\right| \leq M\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

выполняется для любых действительных чисел a, b, c.

(Ирландия)

4. Найдите все пары (x, y) целых чисел такие, что

$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2 .$$

(США)

5. Пусть $P(x)$ – многочлен степени $n>1$ с целыми коэффициентами, k – произвольное натуральное число. Рассмотрим многочлен

$$Q(x)=P\left(P\left(\ldots P\left(P(x)\right)\ldots\right)\right)$$

(здесь P применен k раз). Докажите, что существует не более n целых чисел t таких, что $Q(t) = t$.

(Румыния)

6. Каждой стороне b выпуклого многоугольника P поставлена в соответствие наибольшая из площадей треугольников, содержащихся в P, одна из сторон которых совпадает с b. Докажите, что сумма площадей, соответствующих всем сторонам P, не меньше удвоенной площади многоугольника P.

(Сербия)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1 (А.Катышев). Из условия вытекает, что

$$\angle ABC + \angle ACB =$$

$$= \angle PBA + \angle PCA + \angle PBC + \angle PCB = 2(\angle PBC + \angle PCB),$$

откуда

$$\angle BPC = 180° - (\angle PBC + \angle PCB) =$$

$$= 180° - \frac{\angle ABC + \angle ACB}{2} =$$

$$= 180° - (\angle IBC + \angle ICB) = \angle BIC.$$

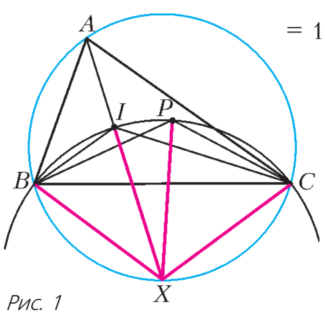


Рис. 1

Поскольку P и I лежат в одной полуплоскости относительно BC, точки B, I, P, C лежат на одной окружности (рис.1). Пусть X – точка пересечения AI с описанной окружностью треугольника ABC. Как известно, $XI = XB = XC$. Действительно,

$$\angle IBX = \angle IBC + \angle CBX = \angle IBC + \angle CAX =$$

$$= \frac{\angle ABC}{2} + \frac{\angle BAC}{2} = \angle IBA + \angle IAB = \angle BIX,$$

следовательно, в треугольнике BIX стороны XI и XB равны. Аналогично, $XI = XC$. Значит, X – центр окружности, проходящей через B, I, C. На этой окружности также лежит точка P. Так как AI проходит через центр этой окружности, то AI – минимальное из расстояний от A до точек этой окружности, причем $AP > AI$ в случае, если точка P не совпадает с точкой I.

2 (А. Глазман). *Ответ*: 1003.

Пусть концы некоторой диагонали D разбивают границу P на две части, содержащие k и $2006 - k$ сторон соответственно, $k \le 1003$. Число k назовем *длиной* диагонали D (сторону многоугольника P считаем диагональю длины 1). Таким образом, хорошие диагонали (или стороны) – это диагонали нечетной длины.

Рассмотрим разбиение многоугольника P на треугольники 2003 диагоналями. Треугольник из разбиения назовем *хорошим*, если он равнобедренный и имеет две стороны нечетной длины. В хорошем треугольнике есть две равные боковые стороны, каждая длины l, и основание, длина которого равна $2l$ или $2006 - 2l$, т.е. четна. Итак, в хорошем треугольнике боковые стороны имеют нечетную длину, а основание – четную длину.

Оценим число хороших треугольников.

Докажем следующую лемму: *Пусть диагональ D длины k из рассматриваемого разбиения делит P на две части. Тогда в меньшей из частей имеется не более $\left[\frac{k}{2}\right]$ хороших треугольников.* (Меньшей назовем часть, не содержащую центр многоугольника P. Если $k = 1003$, т.е. D проходит через центр, то меньшей объявим любую из двух частей. Если $k = 1$, то меньшая часть – отрезок.)

При $k = 1$ утверждение леммы очевидно – в меньшей части вообще нет треугольников. Применим индукцию по k, т.е. предположим, что лемма верна для диагоналей длины 1, 2, …, $k - 1$, и рассмотрим меньшую часть Q для некоторой диагонали AB длины $k \ge 2$. В разбиении имеется треугольник ABC, лежащий в Q. Часть Q разбивается на треугольник ABC и меньшие части R и S для диагоналей AC и BC (рис.2). Так как часть Q меньшая, то длины диагоналей AC и BC меньше k и дают в сумме k. Пусть длины диагоналей AC и BC равны a и b, $a + b = k$. По предположению

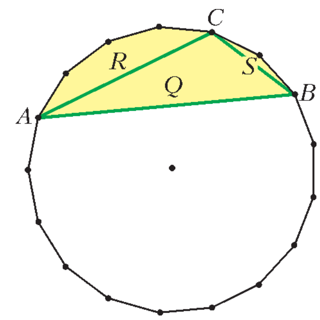


Рис. 2

индукции, в частях R и S не более $\left[\frac{a}{2}\right]$ и $\left[\frac{b}{2}\right]$ хороших треугольников соответственно. Если треугольник ABC не является хорошим, то в части Q не больше чем $\left[\frac{a}{2}\right] + \left[\frac{b}{2}\right] \le \left[\frac{a+b}{2}\right] = \left[\frac{k}{2}\right]$ хороших треугольников. Если же треугольник ABC хороший, то его равными сторонами могут быть только AC и BC. Тогда $a = b = \frac{k}{2}$ нечетно, и в части Q хороших треугольников не больше чем $1 + \left[\frac{a}{2}\right] + \left[\frac{b}{2}\right] = 1 + \frac{a-1}{2} + \frac{b-1}{2} = \frac{k}{2} = \left[\frac{k}{2}\right]$. Переход обоснован, и лемма доказана.

Рассмотрим в разбиении треугольник KLM, внутри или на границе которого содержится центр многоугольника P. Многоугольник разбит на треугольник KLM и меньшие части для диагоналей KL, LM, MK (рис.3). Пусть длины диагоналей KL, LM, MK равны x, y, z соответственно, $x + y + z = 2006$. Воспользуемся леммой. Если треугольник KLM не является хорошим, то в разбиении P не больше чем

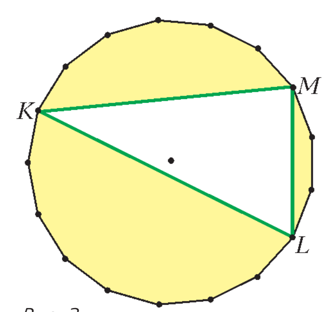


Рис. 3

$\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{y}{2}\right] + \left[\frac{z}{2}\right] \le \left[\frac{x+y+z}{2}\right] = 1003$ хороших треугольников. Если же треугольник KLM хороший, то два из чисел x, y, z нечетны (пусть, скажем, x и y нечетны). Тогда в разбиении P хороших треугольников не больше чем

$$1 + \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{y}{2}\right] + \left[\frac{z}{2}\right] = 1 + \frac{x-1}{2} + \frac{y-1}{2} + \frac{z}{2} = \frac{x+y+z}{2} = 1003.$$

Приведем пример с 1003 хорошими треугольниками. Занумеруем вершины (подряд по часовой стрелке) числами 1, 2, …, 2006 и соединим диагоналями вершины 1 и 3, 3 и 5, … …, 2005 и 1. Эти диагонали отрезают 1003 хороших треугольника, а оставшийся 1003-угольник можно разбить на треугольники произвольно.

3 (А. Магазинов). *Ответ*: $\frac{9\sqrt{2}}{32}$.

Заметим, что левая часть неравенства раскладывается на множители как $\left|(b-a)(c-b)(a-c)(a+b+c)\right|$. Это выражение симметрично относительно переменных a, b, c, поэтому положим для определенности $a \le b \le c$. Обозначим $s_1=(b-a)^2$, $s_2=(c-b)^2$, $s_3=(a-c)^2$, $s=(a+b+c)^2$, $k=a^2+b^2+c^2$. Легко видеть, что $s_1+s_2+s_3+s=3k$.

Заменим b на середину отрезка между a и c, т.е. рассмотрим тройку a',b',c', где $a'=a$, $b'=\dfrac{a+c}{2}$, $c'=c$. Очевидно, $s_3'=(a'-c')^2=s_3$. Кроме того, $s_1s_2 \le s_1's_2'$, поскольку

$$(b-a)(c-b) \le \left[\frac{(b-a)+(c-b)}{2}\right]^2 = \left[\frac{c-a}{2}\right]^2=(b'-a')(c'-b'),$$

а также $s_1+s_2 \ge s_1'+s_2'$, поскольку

$$(b-a)^2+(c-b)^2=(c-a)^2-2(b-a)(c-b)=$$
$$=(c'-a')^2-2(b-a)(c-b)\ge$$
$$\ge (c'-a')^2-2(b'-a')(c'-b')=(b'-a')^2+(c'-b')^2.$$

Теперь тройку чисел a',b',c' сдвинем на некоторое число x, т.е. рассмотрим тройку $a''=a'+x$, $b''=b'+x$, $c''=c'+x$. Ясно, что $s_1''=(b''-a'')^2=s_1'$, $s_2''=(c''-b'')^2=s_2'$, $s_3''=(c''-a'')^2=s_3'$. При фиксированных a',b',c' квадратичная функция $(a'+b'+c'+3x)^2$ принимает все неотрицательные значения, поэтому за счет выбора x добьемся, чтобы $s''=(a''+b''+c'')^2=(a'+b'+c'+3x)^2$ стало равным числу $3k-(s_1''+s_2''+s_3'')$. (Число $3k-(s_1''+s_2''+s_3'')$ неотрицательно, и даже не меньше s, так как

$$3k-(s_1''+s_2''+s_3'')=(s_1+s_2+s_3+s)-(s_1'+s_2'+s_3')= s+\left[(s_1+s_2)-(s_1'+s_2')\right].)$$

У троек a, b, c и a'',b'',c'' совпадают суммы квадратов, так как $3\left(a^2+b^2+c^2\right)=3k=s_1''+s_2''+s_3''+s''=3\left(a''^2+b''^2+c''^2\right)$. Но $s_1s_2 \le s_1''s_2''$, $s_3=s_3''$, $s\le s''$, значит, $s_1s_2s_3s_4 \le s_1''s_2''s_3''s_4''$, т.е. квадрат левой части исходного неравенства для тройки a, b, c не меньше, чем для тройки a'',b'',c''. Это означает, что для поиска минимального M достаточно рассматривать только тройки $a\le b\le c$ с условием $b-a=c-b$.

Зафиксируем $k=a^2+b^2+c^2 \ge 0$. Пусть $s_1=(b-a)^2=s_2=(c-b)^2=t$, тогда $s_3=(c-a)^2=4t$, $s=(a+b+c)^2=3k-(s_1+s_2+s_3)=3k-6t$, отсюда квадрат левой части $F(t)=\left[(b-a)(c-b)(a-c)(a+b+c)\right]^2=12\left(kt^3-2t^4\right)$. Вычислив производную $F'(t)=12\left(3kt^2-8t^3\right)=12t^2(3k-8t)$, видим, что $F(t)$ возрастает при $t<\dfrac{3k}{8}$, убывает при $t>\dfrac{3k}{8}$ и имеет максимум при $t=\dfrac{3k}{8}$. Отсюда $F(t)\le F\left(\dfrac{3k}{8}\right)=\dfrac{81}{512}k^4$, поэтому при $M=\sqrt{\dfrac{81}{512}}=\dfrac{9\sqrt2}{32}$ исходное неравенство верно. С другой стороны, при $a=\sqrt2-3$, $b=\sqrt2$, $c=\sqrt2+3$ имеем $k=24$, $t=9=\dfrac{3k}{8}$, и при $M=\dfrac{9\sqrt2}{32}$ исходное неравенство превращается в равенство.

4 (Т.Образцов). *Ответ*: (0; –2), (0; 2), (4; –23), (4; 23).

Если $x<0$, то $1<1+2^x+2^{2x+1}<1+1+2=4$, поэтому решений нет.

При $x=0$, 1, 2 левая часть уравнения равна 4, 11, 37 соответственно. Точный квадрат получается только при $x=0$, что дает пары $(0;\pm2)$.

Пусть $x\ge3$. Положим $y\ge0$ (пары (x,y) и $(x,-y)$ входят в множество решений одновременно). Если $y\le 2^x$, то $y^2\le 2^{2x}<1+2^x+2^{2x+1}$, если же $y\ge 2^{x+1}$, то $y^2\ge 2^{2x+2}=2^{2x+1}+2^{2x}+2^{2x}>1+2^x+2^{2x+1}$, поэтому возможно только $2^x<y<2^{x+1}$. Преобразуем уравнение к виду $(y-1)(y+1)=2^x\left(2^{x+1}+1\right)$. Числа $y-1$ и $y+1$ оба четные, причем одно из них не делится на 4, значит, другое делится на 2^{x-1} и не делится на 2^x, т.е. имеет вид $2^{x-1}(2k-1)$ для натурального k. При $k=1$ имеем $2^{x-1}(2k-1)=2^{x-1}<2^x$, а если $k\ge3$, то $2^{x-1}(2k-1)>4\cdot2^{x-1}=2^{x+1}$. Но по доказанному $2^x\le y\pm1\le 2^{x+1}$, значит, возможно только $k=2$. Остаются две возможности: либо $y-1=3\cdot2^{x-1}$, либо $y+1=3\cdot2^{x-1}$. Подставляя в исходное уравнение $y=3\cdot2^{x-1}\pm1$, получаем $1+2^x+2^{2x+1}=9\cdot2^{2x-2}\pm6\cdot2^{x-1}+1$, $2^x+2^{2x+1}=8\cdot2^{2x-2}+2^{2x-2}\pm3\cdot2^x$, $2^x=2^{2x-2}\pm3\cdot2^x$. В одном случае получаем $2^{2x-2}+2\cdot2^x=0$, что невозможно, в другом случае $4\cdot2^x=2^{2x-2}$, $2^{x+2}=2^{2x-2}$, $x+2=2x-2$, $x=4$ и $y=\pm23$.

5 (П.Затицкий). Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Если $T(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, y и z – различные целые числа, то $T(y)-T(z)$ делится на $y-z$.*

Действительно, если $T(x)=a_lx^l+a_{l-1}x^{l-1}+\ldots+a_1x+a_0$, то $T(y)-T(z)=a_l\left(y^l-z^l\right)+a_{l-1}\left(y^{l-1}-z^{l-1}\right)+\ldots+a_1(y-z)$, и каждое из слагаемых делится на $y-z$.

Лемма 2. *Пусть $a_1,a_2,\ldots,a_l$ – различные числа, $l\ge2$, и пусть $b_1,b_2,\ldots,b_l$ таковы, что для всех $1\le i<j\le l$ выполнено $\left|a_i-a_j\right|=\left|b_i-b_j\right|$. Тогда найдется такая линейная функция $f(x)=\pm x+c$, что $f(a_i)=b_i$ для всех i = 1, …, l.*

Предположим, что в равенстве $\left|a_i-a_j\right|=\left|b_i-b_j\right|$ для двух пар индексов (r,s) и (s,t) модуль раскрывается с разными знаками, т.е. пусть $a_r-a_s=b_r-b_s$ и $a_s-a_t=b_t-b_s$. Складывая, получаем $a_r-a_t=b_r+b_t-2b_s$. Но $a_r-a_t=\pm\left(b_r-b_t\right)$, откуда $b_s=b_r$ или $b_s=b_t$ – противоречие. Из доказанного вытекает, что если $a_1-a_2=b_1-b_2$, то для i = 3, 4, …, l выполнено $a_1-a_i=b_1-b_i$, и, далее, для всех $1\le i<j\le l$ выполнено $a_i-a_j=b_i-b_j$, значит, можно взять $f(x)=x+(b_1-a_1)$. Если же $a_1-a_2=b_2-b_1$, то для i = 3, 4, …, l выполнено $a_1-a_i=b_i-b_1$, и, далее, для всех $1\le i<j\le l$ выполнено $a_i-a_j=b_j-b_i$, и можно положить $f(x)=x+(b_1-a_1)$.

Леммы доказаны.

Перейдем к решению задачи. Обозначим $Q_l(x)=P\left(P\left(\ldots P\left(P(x)\right)\ldots\right)\right)$, где P применен l раз. Предположим, что для некоторого k найдутся $n+1$ таких различных целых чисел $t_1,t_2,\ldots,t_{n+1}$, что $Q_k(t_i)=t_i$ для i = 1, 2, …, $n+1$. Согласно лемме 1,

$$t_i-t_j=Q_k(t_i)-Q_k\left(t_j\right)\vdots\, Q_{k-1}(t_i)-Q_{k-1}\left(t_j\right)\vdots\ldots$$
$$\ldots\vdots\, P(t_i)-P\left(t_j\right)\vdots\, t_i-t_j.$$

Отсюда

$$\left|t_i-t_j\right|=\left|P(t_i)-P\left(t_j\right)\right|,$$

значит, по лемме 2, найдется такая линейная функция $f(x)$, что $f(t_i) = P(t_i)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n + 1$. Но отсюда следует, что многочлен $P(x) - f(x)$ степени n имеет $n + 1$ корней $t_1, t_2, \ldots t_{n+1}$ – противоречие.

6 (Р.Девятов). В решении будет использовано понятие *суммы Минковского* двух выпуклых многоугольников и *неравенство Брунна–Минковского* (см., например, статью Н.Васильева «Сложение фигур» в «Кванте» № 4 за 1976 г.).

Пусть граница многоугольника P (при обходе против часовой стрелки) составлена из векторов $\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_n}$. Допустим, что при проектировании на прямую l_1, перпендикулярную $\overrightarrow{p_1}$, многоугольник P перейдет в отрезок длины h_1. Ясно, что h_1 равно полусумме длин проекций векторов $\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_n}$ на прямую l_1 (рис.4) и $\frac{p_1 h_1}{2}$ – площадь, сопоставленная стороне p_1.

Пусть P' – многоугольник, полученный из P центральной симметрией; его граница (при обходе против часовой стрелки) составлена из векторов $\overrightarrow{p_1'} = -\overrightarrow{p_1}$, $\overrightarrow{p_2'} = -\overrightarrow{p_2}$, …, $\overrightarrow{p_n'} = -\overrightarrow{p_n}$. Рассмотрим сумму Минковского Q многоугольников P и P', т.е. многоугольник, граница которого составлена из векторов $\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_1'}, \overrightarrow{p_2}, \overrightarrow{p_2'}, \ldots, \overrightarrow{p_n}, \overrightarrow{p_n'}$, взятых в таком порядке, чтобы Q оказался выпуклым. В многоугольнике Q стороне $\overrightarrow{p_1}$ (или стороне $\overrightarrow{p_1'}$) сопоставлена площадь $\frac{p_1 H_1}{2}$, где H_1 равно полусумме длин проекций векторов $\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_1'}, \overrightarrow{p_2}, \overrightarrow{p_2'}, \ldots, \overrightarrow{p_n}, \overrightarrow{p_n'}$ на прямую l_1, т.е. $H_1 = 2h_1$. Аналогично рассматривая все стороны, получаем, что сумма $A(P)$ площадей, соответствующих сторонам в многоугольнике P, вчетверо меньше, чем сумма $A(Q)$ площадей, соответствующих сторонам в многоугольнике Q:

$$A(Q) = \frac{p_1 H_1}{2} + \frac{p_1' H_1}{2} + \frac{p_2 H_2}{2} + \frac{p_2' H_2}{2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{p_n H_n}{2} + \frac{p_n' H_n}{2} = 2p_1 h_1 + 2p_2 h_2 + \ldots + 2p_n h_n = 4A(P).$$

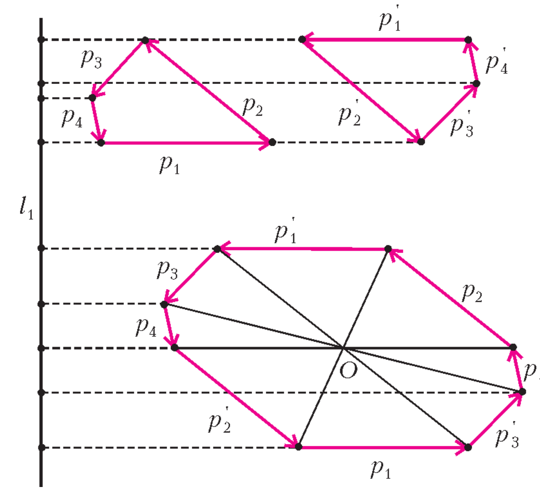


Рис. 4

Многоугольник Q имеет центр симметрии O. Соединив O с вершинами, разобьем Q на треугольники. Из симметрии следует, что высота в треугольнике, отвечающем стороне p_1 (или p_1'), равна $\frac{H_1}{2}$. Складывая площади всех треугольников, получаем, что площадь $S(Q)$ многоугольника Q равна

$$\frac{p_1 H_1}{2} + \frac{p_1' H_1}{2} + \frac{p_2 H_2}{2} + \frac{p_2' H_2}{2} + \ldots + \frac{p_n H_n}{2} + \frac{p_n' H_n}{2} = \frac{A(Q)}{2}.$$

Для завершения решения достаточно установить, что $S(Q) \ge 4S(P)$. Но это неравенство получается из применения к P и P' неравенства Брунна–Минковского: если два выпуклых многоугольника имеют площади S_1 и S_2, а их сумма Минковского имеет площадь S, то $\sqrt{S} \ge \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$.

Публикацию подготовили
Н.Агаханов, П.Кожевников, Д.Терёшин

XXXVII Международная физическая олимпиада

Очередная международная олимпиада школьников по физике проходила в Сингапуре с 8 по 17 июля 2006 года. Основные события разворачивались на территории Наньянгского университета, точнее сказать – целого комплекса университетов и колледжей, по площади соответствующего небольшому городу. В олимпиаде участвовали 388 школьников из 85 стран, и еще 3 страны прислали своих представителей.

В сборную России вошли:

Евгений Богер – Киров, ФМЛ (учителя физики: П.Е.Канин – Кировский ФМЛ и М.В.Гырдымов – Центр дополнительного образования «Одаренный школьник»),

Сергей Зоркин – Иркутск, лицей ИрГУ (учитель физики – Э.Г.Аман),

Павел Мостовых – Санкт-Петербург, школа 306 (учителя физики: И.А.Барыгин – ФТИ им. А.Ф.Иоффе и Е.М.Степаненко – школа 306),

Антон Попов – Челябинск, лицей 31 (учитель физики – И.А.Иоголевич),

Александр Киселев – Москва, школа 1189 им. И.В. Курчатова (учитель физики – С.В.Толоконников).

Команду России возглавили профессор МФТИ С.М.Козел и доцент МФТИ В.П.Слободянин. В качестве наблюдателя от России (прибывшего на олимпиаду за счет поддержки спонсоров) присутствовал учитель физики Челябинского лицея 31 И.А.Иоголевич. Как и в предыдущие годы, подготовка сборной команды России проводилась на базе Московского физико-технического института.

Состязающимся на олимпиаде были предложены три теоретических задания, каждое из которых оценивалось в 10 баллов, и одно экспериментальное – 20 баллов. Как теоретические, так и экспериментальное задания были достаточно трудными и громоздкими.

По итогам соревнований золотые медали получили 37 участников, серебряные — 49 и бронзовые — 82 участника олимпиады.

Сравнительные результаты выступления на олимпиаде 14 лучших команд (по количеству и «качеству» медалей) приведены в таблице:

N	Страна	Золотых медалей	Серебряных медалей	Бронзовых медалей
1.	Китай	5		
2.	США	4	1	
3.	Индонезия	4	1	
4.	Корея	4	1	
5.	Россия	2	3	
6.	Венгрия	1	4	
7.	Иран	1	4	
8.	Таиланд	1	4	
9.	Тайвань	3	1	1
10.	Германия	2	1	2
11.	Индия	2		3
12.	Азербайджан	1	3	1
13.	Румыния	1	2	2
14.	Сингапур	1	1	3

Члены сборной команды России показали следующие результаты:

Участник	Теория (30 баллов)	Эксперимент (20 баллов)	Сумма баллов (50)	Медаль
Зоркин Сергей	22,90	15,25	38,15	золото
Киселев Александр	27,30	10,15	37,45	золото
Богер Евгений	23,60	10,40	34,00	серебро
Попов Антон	19,50	12,00	31,50	серебро
Мостовых Павел	20,80	9,80	30,60	серебро

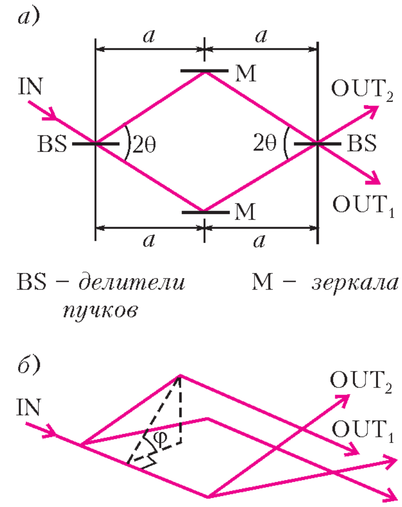
Условия теоретических заданий олимпиады приведены ниже. Здесь же кратко расскажем об экспериментальном туре, на котором за 5 часов участникам предлагалось выполнить комплексное задание, состоящее из четырех частей, объединенных общей тематикой. Используя оборудование СВЧ диапазона радиоволн с длиной волны порядка 3 см, необходимо было выполнить следующие упражнения: измерить длину волны с помощью радиоинтерферометра, аналогичного оптическому интерферометру Майкельсона; определить показатель преломления диэлектрика для радиоволн, используя явление интерференции в толстой плоскопараллельной диэлектрической пластине; исследовать явление туннелирования радиоволн через узкий зазор между двумя парафиновыми призмами при полном внутреннем отражении; исследовать явление интерференционного отражения радиоволн от пространственной решетки, состоящей из системы металлических проволок, образующих двумерную решетку, и определить постоянную решетки.

Физическое содержание предложенного эксперимента заслуживает самой высокой оценки, однако объем экспериментального задания оказался запредельным. Каждая из четырех частей эксперимента могла бы служить основой для хорошего самостоятельного экспериментального задания. В результате ни один участник олимпиады не смог выполнить эксперимент до конца.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

Задача 1. Гравитация в нейтронном интерферометре

Описание явления. Мы рассматриваем известный эксперимент с нейтронным интерферометром в идеализированном упрощенном варианте, в рамках которого обсуждаются идеальные делители пучков нейтронов и нейтронные зеркала, расположенные внутри интерферометра. В этом эксперименте изучается влияние гравитации на волны де Бройля нейтронов.



BS – *делители пучков* M – *зеркала*

Рис. 1

Схема нейтронного интерферометра, который аналогичен оптическому интерферометру, показана на рисунке 1,*а*. Нейтроны попадают в интерферометр через вход «IN», следуют по двум возможным путям и регистрируются в одном из двух выходных каналов «OUT_1» или «OUT_2». Два плеча интерфорометра ограничивают область в форме ромба, площадь которого составляет несколько квадратных сантиметров.

Нейтронные волны де Бройля (с длиной волны порядка 10^{-10} м) интерферируют так, что при горизонтальном расположении интерферометра все нейтроны попадают в выходной канал «OUT_1». Интерферометр может поворачиваться на произвольный угол φ вокруг горизонтальной оси, совпадающей с направлением входного пучка (рис.1,*б*). При повороте интерферометра наблюдается перераспределение нейтронов между выходными каналами «OUT_1» и «OUT_2», которое периодически зависит от угла поворота φ.

Геометрия опыта. При $\varphi = 0$ плоскость интерферометра расположена горизонтально; при $\varphi = 90°$ эта плоскость вертикальна, и выходы расположены над осью поворота.

1) Чему равна площадь ромба A, ограниченная плечами интерферометра? (1 балл)

2) Чему равна высота H выходного канала «OUT_1» над горизонтальной плоскостью, содержащей ось вращения? (1 б.)

Выразите A и H через величины a, θ и φ.

Относительная оптическая длина пути. Относительная оптическая длина пути $N_{опт}$ (число) определяется как отношение геометрической длины пути (расстояния) к длине волны λ. Если λ изменяется вдоль пути, то $N_{опт}$ получается интегрированием величины λ^{-1} по пути.

3) Найдите разность $\Delta N_{опт}$ относительных оптических длин путей плеч интерферометра при его повороте на угол φ. Выразите ответ через величины a, θ и φ, массу нейтрона M, де-бройлевскую длину волны нейтронов λ_0, ускорение свободного падения g и постоянную Планка h. (3б.)

4) Введите объемный параметр $V = \dfrac{h^2}{gM^2}$ и выразите $\Delta N_{опт}$ через величины A, V, λ_0 и φ. Приведите численное значение параметра V при $M = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг, $g = 9{,}800$ м · с$^{-2}$ и $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж · с. (1б.)

5) Сколько периодов изменения интенсивности потока нейтронов в выходном канале «OUT_1» – от максимальной до минимальной и обратно к максимальной – произойдет при изменении угла поворота φ от $-90°$ до $90°$? (2б.)

Экспериментальные данные. В эксперименте использовался интерферометр со следующими параметрами: $a = 3{,}600$ см и $\theta = 22{,}10°$, при этом наблюдалось 19,00 полных периодов изменения интенсивности при изменении угла поворота в указанных выше пределах.

6) Чему равнялась величина λ_0 в этом эксперименте? (1б.)

7) В другом аналогичном эксперименте с использованием нейтронов с де-бройлевской длиной волны $\lambda_0 = 0{,}2000$ нм наблюдалось 30,00 полных периодов. Чему равнялась площадь ромба A в этом случае? (1б.)

Подсказка: если $|\alpha x| \ll 1$, то $(1+x)^\alpha$ можно заменить на $1+\alpha x$.

Задача 2. Наблюдение за движущимся стержнем

Физическая модель. Отверстие камеры-обскуры находится в точке $x = 0$ на расстоянии D от оси x (рис.2). С помощью этой камеры получается изображение стержня путем открытия отверстия на очень маленький промежуток времени. Вдоль оси x на одинаковых расстояниях друг от друга нанесены метки. По ним на снимках, полученных с помощью камеры-обскуры, можно определить кажущуюся (видимую на снимке) длину стержня. На снимке длина покоящегося стержня равна L. Однако стержень не покоится, а движется с постоянной скоростью v вдоль оси x.

Общие соотношения. Пусть на изображении, полученном с помощью камеры-обскуры, бесконечно малый отрезок стержня находится в точке $\tilde{x}$.

1) Каково *реальное положение* данного отрезка на оси x в момент получения снимка? Ответ необходимо выразить через $\tilde{x}$, D, L, v и скорость света $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ м/с. Воспользуйтесь обозначениями $\beta = \dfrac{v}{c}$ и $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, если это позволяет упростить окончательный результат. (0,6 балла)

2) Найдите также обратное соотношение, т.е. выразите $\tilde{x}$ через x, D, L, v и c. (0,9 б.)

Примечание: реальное положение – это положение в системе отсчета, в которой камера покоится.

Кажущаяся длина стержня. Камера-обскура фиксирует изображение в момент, когда реальное положение середины стержня на оси x соответствует точке x_0.

3) Выразите кажущуюся (видимую на снимке) длину стержня через заданные в условии величины. (1,5 б.)

4) Как зависит кажущаяся длина стержня от времени? (1,5 б.)

Симметричный снимок. На одном из снимков, полученных с помощью камеры-обскуры, оба конца стержня расположены на одном и том же расстоянии от отверстия камеры.

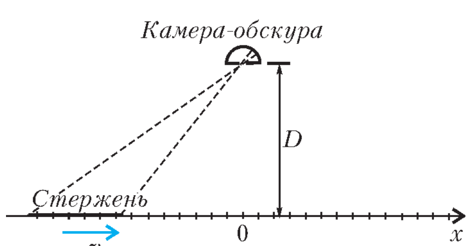


Рис. 2

5) Чему равна кажущаяся длина стержня на этом снимке? (0,8 б.)

6) Каково реальное положение середины стержня в момент, когда сделан этот снимок? (1 б.)

7) Где на этом снимке находится изображение середины стержня? (1,2 б.)

Очень ранний и очень поздний снимки. Один из снимков получен в ранний момент времени, когда стержень был очень далеко от камеры и приближался к ней. Второй снимок получен в поздний момент времени, когда стержень уже удалился на большое расстояние от камеры. На одном из этих снимков длина стержня равна 1,00 м, на другом – 3,00 м.

8) Какая длина соответствует раннему и позднему снимкам? (0,5 б.)

9) Определите скорость стержня v. (1 б.)

10) Определите длину покоящегося стержня L. (0,6 б.)

11) Численно определите кажущуюся длину стержня на симметричном снимке (вопрос 5). (0,4 б.)

Задача 3

Это задание состоит из пяти независимых частей. Каждая из них требует не точного ответа, а только оценки по порядку величины.

Цифровая камера. Рассмотрим цифровую фотокамеру с квадратной матрицей со стороной $L = 35$ мм и разрешением $N_\text{р} = 5$ мегапикселей. Фокусное расстояние объектива камеры $f = 38$ мм. На объективе указывается одно из так называемых F-чисел (2; 2,8; 4; 5,6; 8; 11; 16; 22), которое обозначается $F_\#$ и определяется как отношение фокусного расстояния объектива к диаметру D его апертуры, т.е. $F_\# = f/D$.

1) Какое наилучшее пространственное разрешение Δx на матрице может быть достигнуто оптической системой данной камеры? Выразите ваш результат через длину волны света λ и число $F_\#$. Найдите числовое значение Δx для $\lambda = 500$ нм. (1 балл)

2) Для заданного размера матрицы найдите число мегапикселей матрицы, необходимое для достижения полученного значения наилучшего пространственного разрешения. (0,5 б.)

3) Иногда фотографы стараются использовать камеры с уменьшенным размером апертуры. Предположим, что мы располагаем камерой с $N_0 = 16$ мегапикселей и вышеуказанными размерами матрицы и фокусного расстояния объектива. Какое значение $F_\#$ следует выбрать, чтобы качество изображения не было ограничено оптикой камеры? (0,5 б.)

4) Известно, что человеческий глаз обладает угловым разрешением φ, приблизительно равным 2 угловым секундам, и что минимальное разрешение обычного принтера составляет 300 точек на дюйм. На каком минимальном расстоянии от глаза следует держать распечатанную на таком принтере фотографию, чтобы не различать отдельных точек? (0,5 б.)

Данные: 1 дюйм = 25,4 мм; 1 угловая секунда = $= 2{,}91 \cdot 10^{-4}$ рад.

Яйцо вкрутую. Яйцо, взятое непосредственно из холодильника при температуре $T_0 = 4$ °C, кладут в кастрюлю с кипящей водой с температурой T_1. Температура воды все время поддерживается постоянной.

5) Какое количество энергии U необходимо затратить для того, чтобы яйцо сварилось? (0,5 б.)

6) Найдите поток тепла J, который протекает через поверхность яйца. (0,5 б.)

7) Найдите тепловую мощность P, передаваемую яйцу. (0,5 б.)

8) Как долго нужно варить яйцо для того, чтобы оно сварилось вкрутую? (0,5 б.)

Подсказка: вы можете использовать упрощенную форму закона Фурье: $J = \kappa \Delta T/\Delta r$, где ΔT – разность температур на расстоянии Δr, которое можно принять равным характерному линейному размеру в данной задаче; поток тепла J имеет размерность $\text{Вт} \cdot \text{м}^{-2}$.

Данные: плотность $\rho = 10^3\,\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$; удельная теплоемкость яйца $c = 4{,}2$ $\text{Дж} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{г}^{-1}$; радиус яйца $R = 2{,}5$ см; температура свертывания альбумена (яичного белка) $T_\text{c} = 65$ °C; коэффициент передачи тепла $\kappa = 0{,}64$ $\text{Вт} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ (предполагается одинаковым для жидкой и твердой фаз альбумена).

Молния. Предлагается рассмотреть простейшую модель молнии. Молния возникает за счет накопления электрических зарядов в облаках. При этом нижняя часть облака обычно заряжается положительно, а верхняя часть – отрицательно. Земля под облаком также заряжается отрицательно. Когда возникающее электрическое поле превышает значение, при котором происходит пробой воздуха, возникает электрический разряд, который и представляет собой молнию.

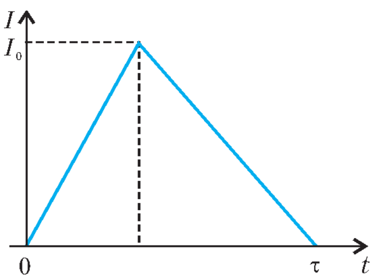


Рис. 3

Ответьте на следующие вопросы, используя данную упрощенную зависимость силы тока I от времени t (рис.3; здесь $I_0 = 100$ кА, $\tau = 0{,}1$ мс). Расстояние между нижней частью облака и земной поверхностью $h = 1$ км; напряженность электрического поля, приводящая к пробою влажного воздуха, $E_0 = 300\ \text{кВ} \cdot \text{м}^{-1}$; полное число молний на Земле за год $32 \cdot 10^6$; население Земли $6{,}5 \cdot 10^9$ человек.

9) Какова величина полного заряда Q, протекающего при разряде молнии? (0,5 б.)

10) Какова средняя сила тока I, протекающего между нижней частью облака и земной поверхностью во время молнии? (0,5 б.)

11) Вообразим, что энергию всех молний, происходящих в год, можно накопить и равномерно распределить между всеми людьми, населяющими Землю. Сколько времени будет гореть лампочка мощностью 100 Вт, которую Вы включили, используя Вашу долю энергии? (1 б.)

Капиллярные сосуды. Будем считать кровь несжимаемой вязкой жидкостью с плотностью ρ, близкой к плотности воды, и динамической вязкостью $\eta = 4{,}5\ \text{г} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$. Смоделируем кровеносные сосуды прямыми цилиндрическими трубками радиусом r и длиной L. Течение крови по сосудам описывается законом Пуазейля $\Delta p = RD$ – гидродинамическим аналогом закона Ома в электричестве. Здесь Δp – разность давлений на входе и на выходе кровеносного сосуда, $D = Sv$ – объем крови, протекающей за одну секунду через поперечное сечение кровеносного сосуда площадью S при скорости потока крови v, R – гидравлическое сопротивление, которое определяется формулой $R = \dfrac{8\eta L}{\pi r^4}$. Во время соматической фазы циркуляции крови (от левого желудочка к правому предсердию) величина кровяного потока для спокойного состояния организма составляет $D \approx 100\ \text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$.

Ответьте на следующие вопросы, предполагая, что все капиллярные сосуды соединены параллельно, каждый из них имеет радиус $r = 4$ мкм и длину $L = 1$ мм, а приложенная разность давлений составляет $\Delta p = 1$ кПа.

12) Оцените количество капиллярных сосудов в теле человека. (1 б.)

13) С какой скоростью v кровь протекает через капилляры? (0,5 б.)

Небоскреб. У основания небоскреба высотой 1 км температура уличного воздуха равна $T_{\text{н}} = 30\ ^\circ\text{C}$. Задача состоит в оценке температуры воздуха $T_{\text{в}}$ у шпиля небоскреба. Рассмотрите тонкий слой воздуха (идеальный газ азот с показателем адиабаты $\gamma = 7/5$), который медленно поднимается до высоты z, где давление меньше, чем внизу. Предположите, что слой при подъеме расширяется адиабатически так, что его температура падает до температуры окружающего воздуха.

14) Как относительное изменение температуры dT/T зависит от относительного изменения давления dp/p? (0,5 б.)

15) Выразите изменение давления dp через изменение высоты dz. (0,5 б.)

16) Какова температура у шпиля небоскреба? (1 б.)

Данные: постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \text{Дж} \cdot \text{К}^{-1}$; масса молекулы азота $m = 4{,}65 \cdot 10^{-26}$ кг; ускорение свободного падения $g = 9{,}80\ \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$.

Публикацию подготовили С.Козел, В.Слободянин

Московская городская олимпиада студентов по физике

II тур Всероссийской физической олимпиады среди студентов технических вузов прошел 21 мая 2006 года в Московском государственной техническом университете (МГТУ) им. Н.Э.Баумана.

По результатам соревнований первые пять команд приглашены для участия в III туре олимпиады. Это команда Московского института стали и сплавов (МИСиС), набравшая 80 баллов; команда МГТУ им. Н.Э.Баумана, набравшая 72 балла; команда Московского института электронной техники – 62 балла; команда Московского авиационного института – 51 балл; команда Российского университета нефти и газа им. И.М.Губкина – 50 баллов.

Победители в личном зачете: И.Ковтунов (МИСиС) – первое место; А.Бурцев (МГТУ им. Н.Э.Баумана) – второе место; А.Шатанов (МИСиС) – третье место.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Автомобиль движется змейкой вдоль оси x, при этом период змейки равен L, а амплитуда колебаний равна A. Определите максимальную среднюю скорость вдоль оси x, которую может достичь автомобиль, если коэффициент трения между дорогой и колесами автомобиля μ.

2. Цилиндрическое тело радиусом R и массой m стоит на гладкой горизонтальной поверхности, касаясь гладкой стенки таким образом, что ось цилиндра горизонтальна и параллельна стенке. В начальный момент времени центр тяжести тела, смещенный от оси цилиндра на расстояние $R/2$, находится в верхнем положении. Определите собственный момент инерции тела, если известно, что после потери равновесия и последующего абсолютно упругого удара о стенку тело начало двигаться строго поступательно.

3. Вокруг Земли по стационарной круговой орбите радиусом R движется космический корабль со скоростью v. Определите минимальную характеристическую скорость, необходимую для изменения плоскости орбиты на 90°. Характеристическая скорость – это скорость, которую приобретет корабль в свободном пространстве, затратив такое же количество топлива.

4. Цилиндр радиусом R скатывается по наклонному уголку, касаясь цилиндрической поверхностью одной полки уголка и скользя всей торцевой поверхностью по другой полке. Определите ускорение цилиндра, если угол между горизонтальной плоскостью и образующей уголка равен 30°, а углы между горизонтальной плоскостью и полками уголка одинаковы. Коэффициент трения между торцевой поверхностью и уголком равен μ, а проскальзывание между цилиндрической поверхностью и уголком отсутствует.

5. Термодинамический цикл состоит из двух изобар и двух изохор. В качестве рабочего тела используются насыщенный водяной пар и вода, объемом которой можно пренебречь. Максимальная и минимальная температуры равны T_2 и T_1, а давление в цикле изменяется в пять раз. Определите КПД цикла, если удельная теплоемкость воды c, удельная теплота парообразования r, вода за цикл полностью испаряется, а насыщенный пар затем полностью конденсируется.

6. Точечный заряд q перенесли из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии l от металлического незаряженного шара радиусом R. После того как распределение зарядов на поверхности шара «заморозили», заряд q удалили на бесконечность. Определите энергию системы зарядов на поверхности шара.

7. Магнитный дипольный момент p_m ориентирован по оси длинного соленоида длиной L с числом витков N. Магнитный диполь начинает вращаться относительно оси, перпендикулярной оси соленоида, с угловой скоростью ω. Определите максимальное значение ЭДС индукции, наводимой в соленоиде.

8. Какое количество электрических цепей, имеющих различное эквивалентное сопротивление, можно собрать, имея в своем распоряжении три резистора с сопротивлениями $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом?

9. Плоская световая волна с интенсивностью I_0 падает на круглое отверстие, в котором помещается 5 зон Френеля для точки наблюдения, отстоящей от отверстия на L. Какова интенсивность в точке наблюдения, если отверстие закрыто зонной пластинкой, в которой зачернены нечетные зоны, полученные для точки наблюдения, удаленной от отверстия на $1{,}5L$?

Публикацию подготовили М.Яковлев, В.Голубев

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

Задачи

(см. «Квант» №1)

1. Обозначим через O точку на капитанском мостике, а через $K_1, K_2, \ldots, K_n$ – корабли противника. Вы находитесь в окружении тогда и только тогда, когда сумма углов $\angle K_1OK_2 + \angle K_2OK_3 + \ldots + K_{n-1}OK_n$ больше 180°.

2. Не существуют. Обозначим $k = ad = bc$. Из условия задачи следует, что $abc + b = abd + a$, или $k(a-b) = a-b$. Так как $a \ne b$, то $k = 1$. Но этого не может быть, поскольку целые числа a, b, c, d – попарно неравные.

3. Всегда можно убрать три гирьки так, чтобы равновесие не нарушилось. Укажем, как это сделать.

Если на одной чашке с гирькой массой 1 г окажется гирька с некоторой массой k граммов, а на другой чашке – гирька с массой $k + 1$ граммов, то уберем именно эти три гирьки.

Если предыдущая ситуация не имеет места, то на чашке весов вместе с гирькой 1 г отметим наименьшую гирьку массой k граммов. Заметим, что $k \ne n$, иначе при данных задачи остальные гирьки перевесят эти две гирьки (1 г и n г). Значит, кроме гирьки k граммов на этой же чашке весов имеется гирька $k + 1$ граммов, здесь же находятся и все более тяжелые гирьки с массой вплоть до n граммов (иначе возникнет первая рассмотренная выше ситуация). Соответственно, на другой чашке весов окажутся все гирьки с промежуточной массой между 1 г и k г (исключая 1 и k). Заметим, что $k > 3$, иначе совокупная масса гирек на чашке с гирькой 1 г окажется больше массы гирек на другой чашке. Выберем на этой другой чашке две гирьки с массой 2, и $k - 1$ граммов, а на первой чашке – третью гирьку массой $k + 1$ граммов.

4. Да, верно. Обозначим углы остроугольного треугольника $\alpha \ge \beta \ge \gamma$. Если этот треугольник не является почти прямоугольным, то $\alpha < 75°$. Если он к тому же не является почти равнобедренным, то $\beta < 60°$, $\gamma < 45°$. Но тогда $\alpha + \beta + \gamma < 180°$, чего не может быть.

5. Пусть у команды «Рубильник» было m удачных реализаций. Так как удачные реализации у нее имели место в половине случаев, то неудачных реализаций было столько же, т.е. m. Всего же команда «Рубильник» заработала за игру $5m + 7m = 12m$ очков.

Пусть у команды «Дробильник» было n удачных реализаций. Так как они составили лишь четвертую часть всех случаев, то неудачных реализаций было втрое больше, т.е. $3n$. Всего же команда «Дробильник» заработала $5 \cdot 3n + 7n = 22n$ очков.

Так как в сумме команды набрали 100 очков, то можно составить уравнение

$$12m + 22n = 100,$$

или, поделив обе части на 2:

$$6m + 11n = 50.$$

Осталось решить это уравнение в натуральных числах. Сразу видно, что $n \le 4$ (иначе левая часть превысит правую). Кроме того, n – четное число (иначе левая часть была бы нечетной и не могла бы равняться 50). Поэтому есть лишь две возможности: $n = 2$ или $n = 4$. В первом случае получаем $6m + 22 = 50$, и $6m = 28$, что невозможно (ибо левая часть делится на 6, а правая – нет). Во втором случае получаем $6m + 44 = 50$, и $6m = 6$, откуда $m = 1$.

Итак, команда «Рубильник» заработала $12m = 12 \cdot 1 = 12$ очков, а команда «Дробильник» набрала $22n = 22 \cdot 4 = 88$ очков. Победа «Дробильника» более чем убедительная!

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №5 за 2006 г.)

6. Верно. В ряду 1, 2, …, 100 числа, соответствующие гирькам на левой чашке весов, напишем красными чернилами, а соответствующие гирькам на правой чашке весов – синими чернилами. Без ограничения общности предположим, что единица написана красными чернилами. Двигаясь слева направо в указанном ряду, зафиксируем первое красное число k такое, что число $k + 1$ синее. Продолжая двигаться дальше, зафиксируем последнее синее число m такое, что число $m + 1$ красное. Если с левой чашки снять гирьки k и $m + 1$, а с правой – гирьки $k + 1$ и m, то весы сохранят равновесие.

7. Условие задачи допускает тривиальное решение – например, в качестве первой прогрессии можно взять последовательность квадратов 4, 4, 4, …, а в качестве другой – последовательность кубов 8, 8, 8, …

Многие участники конкурса совершенно справедливо заметили, что в условии задачи следует ограничить арифметические последовательности такими, которые имеют ненулевую разность. Приведем авторское решение в этом, более содержательном, случае.

В последовательности чисел вида $7n + 6$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, нет квадратов, а в последовательности чисел вида $7n + 4$ нет кубов. В этом легко убедиться, рассмотрев всевозможные остатки квадратов и кубов целых чисел при делении на 7.

С другой стороны, куб числа вида $7n + 6$ сам является числом такого же вида, а четвертая степень числа вида $7n + 4$ является квадратом числа такого же вида.

8. Отметим в плоскости данного 400-угольника произвольную точку M и проведем через нее прямые, параллельные сторонам 400-угольника – всего 400 прямых. Поскольку существует не более 179 несовпадающих прямых, образующих друг с другом углы в целое количество градусов, а $400 = 2\times179 + 42$, то по обобщенному принципу Дирихле из проведенных 400 прямых найдутся три совпадающие. А это и означает, что данный 400-угольник имеет три параллельные стороны.

9. Поскольку $\frac{1}{1+t^2} = \frac{\left(1+t^2\right)-t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{t^2}{1+t^2}$, то исходное неравенство можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{y^2}{1+y^2} + \frac{z^2}{1+z^2} \le \frac{1}{2}. \qquad (*)$$

Докажем его. При $t > 0$ имеем $\frac{t^2}{1+t^2} \le \frac{t^2}{2t}$, откуда следует неравенство $\frac{t^2}{1+t^2} \le \frac{t}{2}$, справедливое не только для $t > 0$, но и для $t = 0$. Сложив вместе неравенства $\frac{x^2}{1+x^2} \le \frac{x}{2}$, $\frac{y^2}{1+y^2} \le \frac{y}{2}$, $\frac{z^2}{1+z^2} \le \frac{z}{2}$ и учитывая, что $x + y + z = 1$, получаем $(*)$. Заметим, что равенство в $(*)$ достигается при двух нулевых и одном единичном значениях аргументов.

10. Покрасив доску в шахматном порядке, мы получим $\frac{101^2+1}{2} = 5101$ одноцветных клеток. Если мы поставим на эти клетки коней, то они не будут бить друг друга.

Докажем, что большее количество коней поставить не удастся. Назовем две клетки *парой*, если из одной клетки можно попасть в другую одним ходом коня. Разобьем все клетки доски, кроме одной, на пары. Для этого разрежем доску вертикальной и горизонтальной линиями на 4 части: квадрат 96×96, два прямоугольника 96×5 и квадрат 5×5. Квадрат 96×96 разобьем на прямоугольники 2×4, каждый из которых разделим на пары следующим образом:

1	3	2	4
2	4	1	3

Два прямоугольника 96×5 разобьем на прямоугольники 5×8, каждый из которых разделим на пары таким образом:

1	2	9	12	10	11	14	13
3	4	10	11	9	12	15	16
2	1	8	7	20	19	13	14
4	3	5	6	18	17	16	15
5	6	7	8	19	20	18	17

Клетки квадрата 5×5, кроме одной, разобьем на пары так:

11	10	8	7	9
12		9	6	8
10	11	12	5	7
2	4	1	3	6
1	3	2	4	5

Итак, все клетки доски, кроме одной, мы разбили на $\frac{101^2-1}{2}$ пары. Если на доске поставлены кони так, что они не бьют друг друга, то в каждой паре клеток стоит не более одного коня. В свободной клетке также не более одного коня. Поэтому на доске не более $\frac{101^2-1}{2} + 1 = \frac{101^2+1}{2}$ коней.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП КОНКУРСА ИМЕНИ А.П.САВИНА «МАТЕМАТИКА 6–8»

1. Искомым множеством являются точки отрезка C_1C_2 на стороне AB, где C_1 и C_2 – точки, симметричные вершине C относительно биссектрис углов A и B соответственно (рис.1).

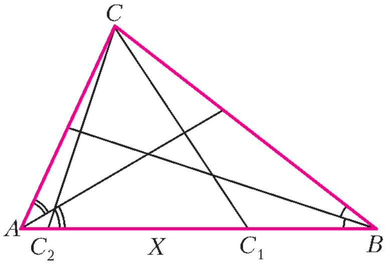


Рис. 1

2. Обозначим вершины треугольника A, B, C так, что $AC = b$, $AB = c$ и $BC = a$. Если после сгиба точка C попала в точку C_1, то $AC_1 = \frac{bc}{a+b}$, $C_1B = \frac{ac}{a+b}$.

3. Всегда.

4. Раскраска таблицы требуемым образом возможна только для $4 \le m \le 64$. Случай $m = 4$ показан на рисунке 2.

5. Все целые точки можно покрасить в четыре цвета, например: 1 – красный, 2 – синий, 3 – желтый, 4 – зеленый, далее периодически повторяя эту цветовую последовательность. Меньшим количеством цветов обойтись невозможно: числа 0, 2, 5, 7 надо окрасить по-разному, так как их попарные разности – простые числа.

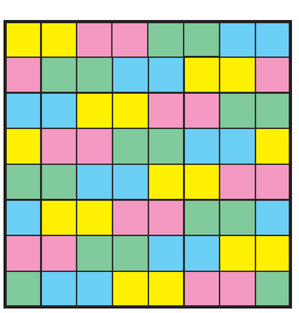


Рис. 2

6. Исходному равенству удовлетворяют все тройки чисел (p, p, p), где p – простое, и только они.

7. Наибольшее возможное число ничьих равно 51.

8. Одно пересечение.

9. Пусть x, y – корни квадратного уравнения. Тогда $(x-y)^2 = D$, где D – дискриминант. Если один из корней равен D, то получаем $(D-y)^2 = D$. Обозначим $n = D - y$.

Тогда $D = n^2$, $y = n^2 - n$. Следовательно, уравнение $\left(x - n^2\right)\left(x - n^2 + n\right) = 0$ удовлетворяет условию задачи.

10. Поскольку $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ и $1 \geq x + y$, то $1 \geq 2\sqrt{xy}$ и $1 \geq 4xy$. Таким образом, $2xy \geq (2xy)(4xy) = 8x^2y^2$, поэтому $x^2 + 8x^2y^2 + y^2 \leq x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 \leq 1$.

12. *Ответ*: $p = 3$, $q = 2$.

13. Число $\{x\}(x + [x]) = (x - [x])(x + [x]) = x^2 - [x]^2$ целое тогда и только тогда, когда x^2 – целое число. Следовательно, x – квадратный корень из любого натурального числа.

14. Рассмотрим 2 случая.

1) По крайней мере одно из чисел m или n кратно 3. Тогда исходный прямоугольник доски можно разбить на триплеты – прямоугольники 1×3. Способ перекраски триплетов двух возможных видов показан на рисунке 3,*а*,*б*. Применив соответствующий способ к каждому триплету доски, получим требуемое.

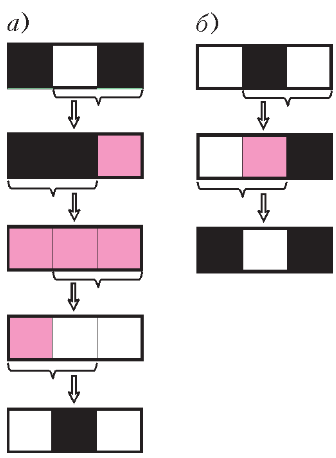


Рис. 3

2) Ни одно из чисел m или n не кратно 3. Обозначим количество черных клеток через a, а белых клеток – через b, тогда $a + b = mn$, причем либо $a = b$, если хотя бы одно из чисел m или n четное, либо $a = b \pm 1$, если оба числа m и n нечетные.

Заметим, что черная клетка перекрашивается в белую клетку за количество шагов, дающее остаток 2 при делении на 3, это мы будем записывать так: $2(\mathrm{mod}\,3)$. Соответственно, белая клетка перекрашивается в черную за количество шагов, сравнимое с 1 по модулю 3: $1(\mathrm{mod}\,3)$. Поскольку в каждом акте перекрашивания участвуют две соседние клетки, то суммарное количество перекрашиваний, которым подвергаются все белые клетки, равно общему количеству перекрашиваний, которым подвергаются все черные клетки. Отсюда

$$2a \equiv b(\mathrm{mod}\,3). \qquad (*)$$

Если хотя бы одно из чисел m или n четное, то $a = b$, и сравнение $(*)$ равносильно $a \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$. Но тогда $mn = 2a \equiv$ $\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$, что противоречит нашему допущению.

Если оба числа m и n нечетны, то $n = 6p \pm 1$, $m = 6q \pm 1$, и тогда либо число a, либо число b кратно 3, а другое число не делится на 3. В этом случае сравнение $(*)$ не выполняется.

Итак, исходный прямоугольник можно перекрасить только в том случае, когда по крайней мере одно из чисел m или n кратно 3.

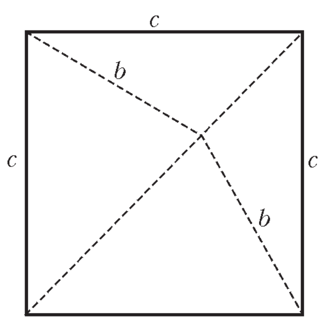


Рис. 4

16. *Ответ*: на 625.

17. *Ответ*: 60.

19. Пусть данный остроугольный треугольник имеет стороны a, b, c, $a \leq b \leq c$. Из теоремы косинусов для этого треугольника следует $a^2 + b^2 > c^2$, откуда $2b^2 > c^2$, или $b > \frac{c}{\sqrt{2}}$.

Проведем в квадрате со стороной c диагональ так, как показано на рисунке 4, и от двух противоположных вершин отложим отрезки длины b с концевыми точками на диагонали. Это всегда можно сделать, поскольку отрезок длины b длиннее половины диагонали квадрата. В результате квадрат разбивается на 4 треугольника, сходных данному.

20. Непредставимых чисел больше.

21. Приведем требуемую расстановку чисел. Сначала расставим нечетные числа по центрально-симметричной схеме «сдвинутых песочных часов», показанной на рисунке 5 для случая доски 8×8. Суммарное количество расставленных нечетных чисел при этом равно 5000, т.е. совпадает с половиной всех чисел таблицы. Количество нечетных чисел в каждой строке и каждом столбце – нечетное, а вот в диагоналях – четное (в одной 100, в другой ни одного).

Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н	
	Н	Н	Н	Н	Н		
		Н	Н	Н			
			Н				
				Н			
			Н	Н	Н		
		Н	Н	Н	Н	Н	
	Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н

Рис. 5

Н	Н	Н	Н	Н	Н		Н
Н	Н	Н	Н	Н			
	Н	Н	Н				
		Н					
			Н				
		Н	Н	Н			
	Н	Н	Н	Н	Н		
Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н	

Рис. 6

«Отрежем» самый левый столбец таблицы и «приклеим» его справа (на рисунке 6 показан случай доски 8×8). В результате количество нечетных чисел в горизонталях и вертикалях не изменится, а в каждой диагонали станет нечетным: в одной 49, а в другой 51. Что и требовалось.

23. Пусть $P = n(n+1)(n+2)\ldots(n+7)$, где $n > 1$. Обозначим $m = n(n+7)$, тогда $P = (n(n+7))((n+1)(n+6))\ldots$ $\ldots((n+3)(n+4)) = m(m+6)(m+10)(m+12) =$ $= m^4 + 28m^3 + 252m^2 + 720m$. Несложно проверить, что при условии $m > 30$ (являющемся следствием случая $n > 3$) ближайшим к P и бóльшим P точным квадратом служит число $Q = \left(m^2 + 14m + 28\right)^2$, что больше P на $64m + 784 =$ $= (4 \cdot (2n+7))^2$ – точный квадрат.

Осталось проверить утверждение задачи для n = 1, 2, 3. В этих случаях разность будет равняться, соответственно, $81 = 9^2$, $729 = 27^2$, $9 = 3^2$.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ

1. $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = 7\ \text{с}^{-1}$. **2.** $\omega = \sqrt{\frac{m}{m+M}\frac{g}{R}} = 2\ \text{с}^{-1}$.

3. $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = 2\ \text{с}^{-1}$. **4.** $\omega = \sqrt{\frac{2g}{l} + \frac{k}{4m}} = 8\ \text{с}^{-1}$.

5. $\omega = \sqrt{\frac{2g}{l} + \frac{k}{m}} = 9\ \text{с}^{-1}$. **6.** $\omega = \sqrt{\frac{g}{2R}} = 7\ \text{с}^{-1}$.

7. $\omega = \sqrt{\frac{2g}{R} - \frac{2k\lambda Q}{3mR^2}} = 10\ \text{с}^{-1}$ (здесь $k = 9 \cdot 10^9\ \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2$ – электрическая постоянная).

8. $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g \sin\alpha}} = 471$ мс.

ИНСТИТУТ КРИПТОГРАФИИ, СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ АКАДЕМИИ ФСБ РФ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. -6. **2.** $[1;\,17]$. **3.** $\frac{2\pi}{3}+\pi m$, $\frac{\pi}{6}+\pi k$, $m,k\in\boldsymbol{Z}$.
4. 1750 т. **5.** 32.
6. Фигура – прямоугольник площади 36.

Вариант 2

1. Если $a\neq\pm1$, то система имеет единственное решение; если $a=-1$, то система не имеет решений; если $a=1$, то система имеет бесконечное множество решений.

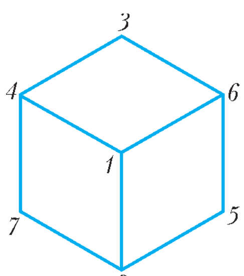


Рис. 7

2. 6. **3.** 3.
4. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^m\frac{\pi}{12}+\frac{\pi m}{4}$, $m,n\in\boldsymbol{Z}$.
5. $\pi/3$, $2\pi/3$. **6.** 10 ч.

Вариант 3

1. 7, 6, 5. **2.** См. рис.7.
3. $x<0$, $x\geq\log_{2/3}1/3$. **4.** $\frac{21}{25}$. **5.** 3.
6. $\frac{5\pi}{6}+\frac{10\pi t}{3}$, $t\neq3k+2$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **7.** 1003.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $v_0=\frac{g(t_1+t_2)}{2\sin\alpha}=80$ м/с.
2. $a=\frac{F(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}{M}-\mu g\approx8{,}2$ м/с^2. **3.** $t=2t_0=12$ мин.
4. $Q_2=Q_1\frac{T_2}{T_1}=46{,}2$ кДж. **5.** $\frac{R_1}{R_2}=\sqrt{\frac{n_2^2-1}{n_1^2-1}}\approx1{,}012$.

Вариант 2

1. $v_{\text{ср}}=\frac{v_1t_1+v_2t_2}{t_1+t_2}=40$ км/ч.
2. $F_{\text{тр}}=mg\cos\alpha(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$.
3. $P=\frac{\mathscr{E}^2R_1R_2^2}{\left((R_1+R_2)r+R_1R_2\right)^2}\approx2{,}13$ Вт.
4. $T_2=T_1\frac{p_2}{20p_1}=900$ К.
5. $f_2=\frac{F_2\left(a\left(d_1+|F_1|\right)+d_1|F_1|\right)}{(a-F_2)\left(d_1+|F_1|\right)+d_1|F_1|}=26$ см.

Вариант 3

1. $t_0=\frac{2\pi r}{\Omega(R+r)}$. **2.** $s=\frac{2v_0^2\sin\alpha}{g}(\cos\alpha-4\mu\sin\alpha)=0{,}75$ м.
3. $a=\frac{h}{2}=20$ см. **4.** $p=\frac{p_{\text{в}}}{2}+p_{\text{нас}}=395$ мм рт.ст. ≈53 кПа.
5. См. рис.8; здесь $\mathscr{E}_1=3\mathscr{E}=4{,}5$ В и $r=\frac{4\mathscr{E}}{I_1}=6$ Ом.

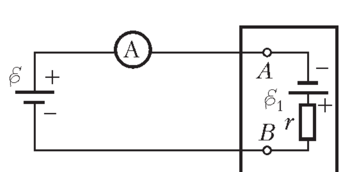


Рис. 8

6. $v=\frac{eBR}{m}=2{,}3\cdot10^7$ м/с.
7. $L=F\frac{(\Gamma-1)^2}{\Gamma}\approx8{,}9$ см.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕХНИКИ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $-\frac{5\sqrt6}{12}$. **2.** $(-\infty;-5)\cup[1{,}5;+\infty)$. **3.** $[-3;\,0)$.
4. $(-1)^k\frac{\pi}{6018}+\frac{\pi k}{1003}$, $\frac{\pi}{2006}+\frac{\pi k}{1003}$, $k\in\boldsymbol{Z}$.
5. 10; 26. **6.** -1. **7.** $\arccos\frac{\sqrt5}{2\sqrt2}$.
8. $2\sqrt{x-1}$ при $1\leq x<2$; 2 при $x\geq2$. **9.** -2; 2.
10. 14 км/ч, 2 км/ч. **11.** $(-\infty;\,5/3]$.

Вариант 2

1. $1+2a$. **2.** 0. **3.** 1. **4.** $(-4;\,1)[4/3;\,+\infty)$.
5. $(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **6.** 20π. **7.** 4π. **8.** 30 с.
9. $\left(-4;\,\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$. **10.** $\left(5\pm\sqrt2;\,4\pm\sqrt2\right)$. **11.** $[-0{,}5;\,+\infty)$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $l=v(t_B-t_A)+x_A-x_B=0{,}5$ м.
2. $a=g\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\approx5{,}8$ м/с^2.
3. а) Увеличилась в 2 раза; б) является.
4. а) $\frac{m_{\text{угл}}}{m_{\text{вод}}}=\frac{\mathrm{M}_{\text{угл}}}{\mathrm{M}_{\text{вод}}}=22$; б) в баллоне, где был водород, масса увеличится в $\frac12\left(1+\frac{\mathrm{M}_{\text{угл}}}{\mathrm{M}_{\text{вод}}}\right)=11{,}5$ раза.
5. $\frac{T_2}{T_1}=1+\frac{2A}{3pV}=3{,}5$. **6.** $\frac{q_1}{q_2}=\pm\frac{E_1}{2E_2}=\pm2$.
7. $q=\frac{U\tau}{2R}=300$ Кл.
8. $I=\frac{P}{U}\approx0{,}91$ А; $U_L=\frac{2\pi\nu LP}{U}\approx143$ В.
9. $\alpha_{\min}=\mathrm{arctg}(-hD)=\mathrm{arctg}\,0{,}1\approx5{,}7^\circ$.
10. $\frac{c}{v_{\max}}=\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_C}}=500$. **11.** $t=\tau-\frac{L}{R}=5$ мс.

Вариант 2

1. $s=\frac{g}{8}\left(T^2+(2\tau-T)^2\right)=6{,}25$ м. **2.** $F=m\left(g+\frac{4\pi^2R}{T^2}\right)$.
3. $V=\frac{v\cos\alpha}{k}$. **4.** $F=\frac{p_0S\Delta T}{T}\approx13$ Н.
5. $A\approx3{,}14$ кДж. **6.** $A=CE_0^2d^2$. **7.** $R=\frac{U^2}{P}=484$ Ом.
8. $q=\frac{\mathscr{E}\tau}{NR}=0{,}25$ мкКл. **9.** $n=\frac{c}{\lambda\nu}=1{,}5$.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕКСТИЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. А.Н.КОСЫГИНА

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 1,25. **2.** 160. **3.** 1,2. **4.** -2. **5.** 19. **6.** 0,5. **7.** 5. **8.** 5. **9.** 2.
10. 504. **11.** 25. **12.** 4,5. **13.** 30. **14.** 30. **15.** 72.

Вариант 2

1. 1,25. **2.** 3000. **3.** −2. **4.** −0,5. **5.** 7,25. **6.** 3. **7.** 5. **8.** 0,64.
9. 1,12. **10.** 240. **11.** −2. **12.** 50. **13.** 42. **14.** 7. **15.** 12.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.Э.БАУМАНА

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 8 мин и 9 мин.
2. $\frac{n\pi}{2}$, $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$, $n,k\in \mathbf{Z}$; $\left\{0;\ \frac{\pi}{12};\ \frac{5\pi}{12};\ \frac{\pi}{2}\right\}$. **3.** 16.
4. $\left(\frac{3}{4};\ \frac{6}{7}\right)\cup\left(\frac{6}{7};\ 1\right)\cup(1;\ +\infty)$.
Указание. Неравенство равносильно такому:

$$\log_x(7x-6)^2>2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left((7x-6)^2-x^2\right)(x-1)>0, \\ x\neq\frac{6}{7}. \end{cases}$$

5. $3\sqrt{3}$. *Указание.* Если $1<x<4$, то $S(x)=2\left(2x^3-15x^2+\right.$ $\left.+33x-20\right)$. Исследуйте $S(x)$ с помощью производной.
6. $a\in(-1;\ 2/3]$, $x=y=\left(3a+\sqrt{6-3a}\right)/3$;
$a\in(2/3;\ 5/3)\cup(5/3;\ 2)$, $x_{1,2}=y_{1,2}=\left(3a\pm\sqrt{6-3a}/3\right)$;
$a=5/3$, $x=y=4/3$.
Указание. Исходная система равносильна такой:

$$\begin{cases} x>0,\ x\neq 2, \\ y=x, \\ 3(x-a)^2=a-2, \end{cases}$$

и количество ее решений зависит от количества корней, не равных 2, последнего уравнения системы.
7. Проведем $OL \parallel BA_1$, L лежит в плоскости основания; $SL \parallel MB$, $SL = MB$; $F = AL\cap BC$ (рис.9). Продолжим AO до пересечения с боковой гранью BCC_1B_1 в точке H; $E = (FH)\cap B_1C_1$, $T=(FH)\cap(CC_1)$, $D = AT\cap A_1C_1$, очевидно, $ED\parallel AF$. Трапеция $AFED$ − искомое сечение. Проведем $SK\perp AF$, $K\in AF$; $SP\perp OK$, $P\in OK$; длина SP равна заданному в условии расстоянию от центра основания до секущей плоскости.

Пусть $a=AB$, $h=AA_1$, $d=SP$. Так как $SR=RM=\frac{a}{4\sqrt{3}}$, $CR=\frac{5a}{4\sqrt{3}}$. Из подобия $\Delta CRF\sim\Delta BLF$ следует $\frac{CF}{FB}=\frac{CR}{BL}=\frac{5}{2}$, отсюда $BF=\frac{2}{7}a$, $CF=\frac{5}{7}a$, $NF=\frac{3}{14}a$.
Из подобия $\Delta AOS\sim\Delta AHN$ следует $NH=\frac{3}{4}h$, а из $\Delta FNH\sim\Delta EGH$ − $EG=\frac{FN\cdot GH}{HN}=\frac{a}{14}$. Тогда $C_1E=\frac{1}{2}a-\frac{1}{14}a=\frac{3}{7}a$. Так как $\frac{TE}{TF}=\frac{C_1E}{CF}=\frac{ED}{AF}=\frac{3}{5}$, имеем $DE=\frac{3}{5}AF$. Площадь трапеции равна $S_{ADEF}=\frac{1}{2}\cdot 2OK(AF+$ $+DE)=\frac{8}{5}OK\cdot AF$. Из треугольника RSL находим $RL=\frac{a\sqrt{13}}{4\sqrt{3}}$ и $SK=\frac{SR\cdot SL}{RL}=\frac{a}{2\sqrt{13}}$. При заданном расстоянии d $OK=\frac{SK^2}{PK}=\frac{SK^2}{\sqrt{SK^2-SP^2}}=\frac{a^2}{2\sqrt{13}\sqrt{a^2-52d^2}}$.

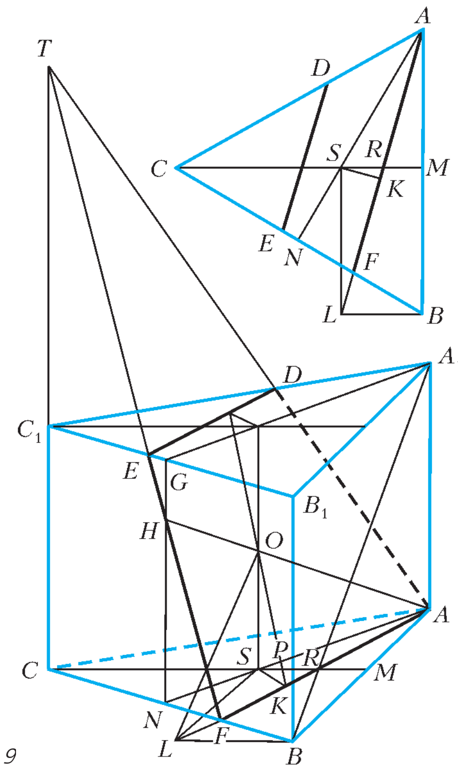


Рис. 9

По теореме косинусов

$$AF=\sqrt{AB^2+BF^2-2AB\cdot BF\cdot\cos 60^\circ}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{13}a}{7}.$$

Следовательно, $S_{ADEF}=\frac{8}{7}$.

Вариант 2

1. 66 деталей.
2. $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; $\left\{-\frac{17\pi}{12};\ -\frac{13\pi}{12};\ -\frac{5\pi}{12};\ -\frac{\pi}{12}\right\}$.
3. 17,5. **4.** $(0;\ 2)\cup(4;\ 6)$. **5.** 8.
6. $a\in(6;\ 10]\cup[15;\ 31)\cup(31;\ +\infty)$, $x_{1,2}=a\pm5\sqrt{a-6}$, $y=0$;
$a\in(10;\ 15)\cup\{31\}$, $x=a+5\sqrt{a-6}$, $y=0$. **7.** 22.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. Вращение кольца происходит за счет электрических сил, порождаемых вихревым электрическим полем, которое возникает при изменении магнитного поля.
2. Скорость света больше в первой среде.
3. $x = 7$ м. **4.** $T = 2$ дня.
5. $C = 2R$. *Указание.* Запишите уравнение состояния газа в параметрах p, V и воспользуйтесь первым началом термодинамики.
6. Согласно принципу суперпозиции, потенциал внутренней сферы равен

$$\varphi=-\mathcal{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\cdot 2R}+\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0\cdot 3R},$$

откуда находим искомый заряд внутренней сферы:

$$Q=-\left(4\pi\varepsilon_0 R\mathcal{E}+\frac{1}{6}q\right).$$

7. $\gamma=\frac{\pi}{3}+\mathrm{arctg}\,2\sqrt{3}\approx 134^\circ$. *Указание.* Проведите ось x через центры шаров, а ось y – через точку их соприкосновения по касательной и воспользуйтесь законом сохранения импульса в проекциях на эти оси.

Вариант 2

1. $h_{\max} = \dfrac{\Delta p^2}{8gm^2} = 5{,}1$ м. **2.** $U = 5$ В.

3. $v = 0{,}8c = 2{,}4 \cdot 10^8$ м/с. **4.** $A = \dfrac{hc}{\lambda} - eU_з = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Дж.

5. $H = \dfrac{Q}{mg}$. *Указание*. Используйте закон сохранения энергии и уравнение равнопеременного движения.

6. $Q = \dfrac{5}{4}Mv^2 = 20$ Дж.

7. Так как сопротивление отсутствует, суммарная ЭДС в контуре должна быть равна нулю. Значит, суммарный магнитный поток через контур не должен изменяться. Если перемычка сдвинулась на величину x и в ней появился ток I, то изменение суммарного магнитного потока равно

$$\Delta\Phi = Bhx + LI = 0\text{, откуда } I = -\frac{Bh}{L}x.$$

На перемычку с током действует сила

$$F_x = IBh = -\frac{B^2h^2}{L}x,$$

которая сообщает перемычное ускорение

$$a_x = \frac{F_x}{m} = -\frac{B^2h^2}{mL}x = -\omega^2 x.$$

Видно, то движение перемычки – колебательное с круговой частотой $\omega = \dfrac{Bh}{\sqrt{mL}}$. При колебательном движении максимальная скорость связана с амплитудой смещения соотношением $v_m = A\omega$. В нашем случае $v_m = v_0$, а амплитуда есть искомое расстояние s до остановки. Следовательно,

$$s = \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0\sqrt{mL}}{Bh}.$$

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 8. **2.** $\arccos(1/4) + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

3. $\{1/4\} \cup \left(1/2;\ \log_{5/3} 2\right] \cup \left[\log_{5/3} 3;\ +\infty\right)$.

4. а) ГМТ: квадрат (рис.10). Наименьшее значение $x + y = 2\pi$ достигается на левой нижней границе квадрата.

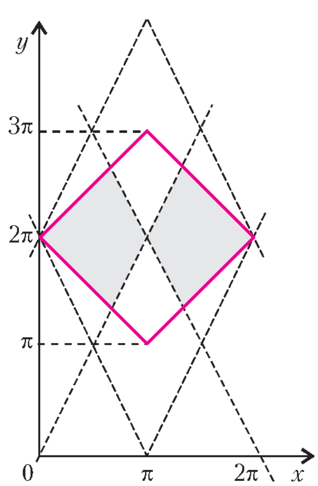


Рис. 10

б) $\varnothing$ при

$a \in \left(-\infty;\ \dfrac{4\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{8\pi}{3};\ -\infty\right)$;

$\left[2\pi - a;\ \dfrac{a}{2}\right) \cup \left(\dfrac{4\pi - a}{2};\ a\right]$ при

$a \in \left(\dfrac{4\pi}{3};\ 2\pi\right)$;

$\left[a - 2\pi;\ \dfrac{4\pi - a}{2}\right) \cup \left(\dfrac{a}{2};\ 4\pi - a\right]$

при $a \in \left(2\pi;\ \dfrac{8\pi}{3}\right)$;

$(0;\ \pi) \cup (\pi; 2\pi)$ при $a = 2\pi$.

5. а) $12\left(3 + \sqrt{2}\right)$, б) $46\sqrt{3}$,

в) $\operatorname{tg}\alpha = 2\left(\sqrt{1 + \sqrt{2}} - 1\right)$.

Вариант 2

1. 459. **2.** $\dfrac{-7 - \sqrt{21}}{2}$. **3.** $x \in (0; 2] \cup [5; 7)$.

4. $f'(x) = \dfrac{20\cos x\left(\sin x + \sqrt{2}/4\right)}{\left(2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x\right)^2}$ при $x \notin \{\pi k,\ 5\pi/4 + 2\pi m,$ $7\pi/4 + 2\pi n,\ k, m, n \in \boldsymbol{N}\}$, при других x функция и производная не определены.

Критические точки:

$$\left\{\pi/2 + \pi s,\ (-1)^{r+1}\arcsin\left(\sqrt{2}/4\right) + \pi r,\ r, s \in \boldsymbol{N}\right\}.$$

Наибольшие значения функция достигает в точках:

$x_{\max} = a + 3\pi/8$ при $a \in (2\pi k;\ \pi/8 + 2\pi k)$,

$x_{\max} = \pi/2 + 2\pi k$ при $a \in [\pi/8 + 2\pi k;\ \pi/2 + 2\pi k]$,

$x_{\max} = a$ при $a \in (\pi/2 + 2\pi k;\ 5\pi/8 + 2\pi k)$,

$x_{\max} = 3\pi/2$ при $a \in (5\pi/4 + 2\pi k;\ 11\pi/8 + 2\pi k)$,

$\varnothing$ при $a \in [5\pi/8 + 2\pi k;\ 5\pi/4 + 2\pi k] \cup [11\pi/8 + 2\pi k;\ 2\pi + 2\pi k]$,

где $k \in \boldsymbol{N}$.

5. а) $V = 216\sqrt{3}$. б) В сечении равнобедренный треугольник, трапеция или прямоугольник.

в) $S_{\min} = \dfrac{\sqrt{6}}{16}\sqrt{33 + 4\sqrt{7}}\sqrt{251 - 88\sqrt{7}}$.

.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $v_{ср} = \dfrac{5v_1v_2}{4v_1 + v_2} = 54{,}5$ км/ч. **2.** $\mathrm{M} = \dfrac{\mathrm{M}_{O_2}}{2(2T_1/T_2 - 1)} = 4$ г/моль.

3. $U_1 = \dfrac{(5 + 6\varepsilon)U}{11\varepsilon}$. **4.** $l = \dfrac{v_0^2 M}{2\mu g(m + M)}$. **5.** $F = \dfrac{qvB}{2\sin\alpha}$.

Вариант 2

1. $l_1 = \dfrac{lF}{d - F}$. **2.** $v = \dfrac{2s}{\tau\sqrt{n}}$. **3.** $Q = \dfrac{11}{2}\nu RT$.

4. От пластины с зарядом $3Q$ к пластине с зарядом Q протечет заряд $5Q/3$.

5. $t = \dfrac{\operatorname{arctg} 11 + 10\pi}{\omega}$, где $\omega = \sqrt{k/m}$.

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $T = m\sqrt{a^2 + g^2}$. **2.** $v = \dfrac{2N}{5mg}$.

3. Пусть заряд нижней внешней пластины q, верхней $-q$. Из условия нулевого напряжения получим $qH = Qh$. Энергию системы вначале можно считать равной энергии трех конденсаторов, двух с зарядами q и одного с зарядом $Q - q$:

$$W_0 = \frac{q^2(H - h)}{2\varepsilon_0 S} + \frac{(Q - q)^2 h}{2\varepsilon_0 S}.$$

В конце энергия равна

$$W = \frac{Q^2 h}{2\varepsilon_0 S}.$$

Работа равна изменению энергии:

$$A = W - W_0 = \frac{Q^2h^2}{2\varepsilon_0 SH}.$$

4. $v \approx (2\pi/T)H = 3$ см/с (здесь $H = 500$ м, $T = 86400$ с).
5. При повороте катушки в ней меняется знак магнитного потока, а значит, и ЭДС индукции. Поэтому почти одинаковые ЭДС в катушках в одном случае складываются, а в другом вычитаются. В соответствии с этим, при неизменном общем сопротивлении в одном случае ток гальванометра заметен, а в другом близок к нулю.

Вариант 2

1. $\rho = \rho_0 \dfrac{m}{m + \rho_0 S(h_0 - h)}$.

2. Максимальная ЭДС индукции «источника» равна $\mathscr{E} = \omega BHh$. Запишем закон Ома для левого и правого контуров схемы (рис.11): $I_1 \cdot 2R = 2\mathscr{E}$, $I_2 \cdot 6R = 2\mathscr{E}$. Отсюда найдем ток в перемычке: $I = I_1 - I_2 = \dfrac{2\omega BHh}{3R}$.

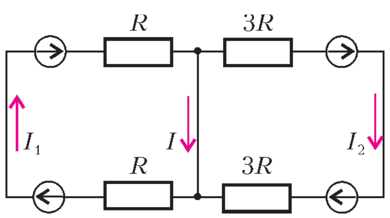


Рис. 11

3. Запишем законы сохранения энергии и заряда: $\dfrac{C_0U_0^2}{2} + mgh = \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{CU^2}{2}$, $C_0U_0 = CU$. Отсюда найдем: $C = \dfrac{C_0^2U_0^2}{C_0U_0^2 + 2mgh - mv^2}$.
4. $Q = cmT_0 \approx 30$ МДж (здесь $m \approx 100$ кг, $T_0 \approx 300$ К).
5. Массивное колесо давит на стержень с некоторой силой F. При легком стержне можно считать эту силу направленной вдоль стержня. Если угол между стержнем и нормалью к доске φ, то при проскальзывании $f_{\text{тр}} = \mu F\cos\varphi \le F\sin\varphi$. Условие проскальзывания $\operatorname{tg}\varphi > \mu$ выполняется для длинного стержня, а для короткого происходит «заклинивание».

Вариант 3

1. $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\mu(1 + m/M)\right)$. **2.** $V_0 = \dfrac{(h - h_0)ST_0}{T - T_0}$.
3. $v = \dfrac{1}{2\rho C}$; $I = \dfrac{BH}{2R_0\rho C}$. **4.** $S \approx 2$ см^2.
5. Плотность солевого раствора больше плотности воды, но диаметры спиц заметно различаются, поэтому смещение второго поплавка значительно меньше.

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ.А.И.ГЕРЦЕНА

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\left(1; \frac{3}{2}\right) \cup \left(2; \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$. **2.** 123300.
3. $\left(-\infty; -\frac{1}{14}\right] \cup \left[\frac{13}{16}; +\infty\right)$. **4.** 24 и 16. **5.** $(1{,}5; 10)$.
6. $k = 4$, корни 6 и 3. **7.** $\frac{8}{3}\pi$. **9.** $250\sqrt{6}$.

Вариант 2

1. $(3; 1)$ и $\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right)$. **2.** $(-\infty; 4] \cup [36; +\infty)$. **3.** 4.
4. $(1; +\infty)$. **5.** $\{-0{,}5; 0; 1; 1{,}5\}$. **6.** $[2{,}5; 3)$.
7. 24. **8.** m^2. **9.** 121,5.

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К.Э.ЦИОЛКОВСКОГО (МАТИ)

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 1. **2.** $(5;2); (-5;-2)$. **3.** $-\pi$. **4.** $(-\infty;-3] \cup (0;1)$.
5. $(-\infty;-1] \cup \{3\}$. **6.** $\frac{\sqrt{21}}{5}$.
7. $(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$, $\frac{\pi}{3} + \pi k$, $n, k \in \boldsymbol{Z}$.

Вариант 2

1. 23. **2.** $\alpha = \beta = \gamma = 60°$. **3.** $b \le \frac{3 - \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}}$.
4. $n = 5$; $x_1 = 10$; $x_2 = -20$. **5.** 4 спортсмена. **6.** $\frac{1}{2}$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. 3). **2.** 5). **3.** 2). **4.** 1). **5.** 3). **6.** 2). **7.** 3). **8.** 4). **9.** 2). **10.** 4).

Вариант 2

1. 3). **2.** 1). **3.** 3). **4.** 5). **5.** 1). **6.** 2). **7.** 5). **8.** 5). **9.** 2). **10.** 4).

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НЕФТИ И ГАЗА ИМ. И.М.ГУБКИНА

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 7. **2.** 2. **3.** 46. **4.** −12. **5.** 0,6. **6.** −0,8. **7.** 1. **8.** −38.
9. Уравнение касательной к графику, проведенной в точке с абсциссой x_0, запишется так:

$$y = \left(3x_0^2 + 14x_0 + 17\right)x - 2x_0^3 - 7x_0^2 + a.$$

Эта прямая проходит через точку $M(0; 6)$, если выполняется условие $2p^3 + 7p^2 + 6 = a$. По условию нас интересуют значения параметра a, при которых это уравнение относительно неизвестной p имеет три различных корня. Рассмотрим функцию $y = 2x^3 + 7x^2 + 6$. Она убывает на промежутке $\left(-\frac{7}{3}; 0\right)$ и возрастает при $x \in \left(-\infty; -\frac{7}{3}\right) \cup (0; +\infty)$. При этом $y_{\max} = y\left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{505}{27}$ и $y_{\min} = y(0) = 6$. Горизонтальная прямая $y = a$ пересекает ее график в трех различных точках, если $a \in \left(6; \frac{505}{27}\right)$. Наибольшее целое число из этого промежутка это $a = 18$.

10. Неравенство равносильно системе $x > 1$, $\dfrac{\log_7 \sqrt{5x + 204}}{\log_7 x} \ge$ ≥ 1, решая которую, получаем $1 < x \le 17$. Значит, область решений содержит 16 целых точек.
11. 0,72. *Указание.* Пусть O – центр вписанной окружности, r – ее радиус, K – точка ее касания со стороной AD. Тогда $\angle KND = 45°$ и $KN = KD = 2r$. А так как $AB + CD = BC + AD$, то $BC = 1 - r$. Проведите высоту CT трапеции и из прямоугольного треугольника CTD найдите r.
12. 8. *Решение.* Пусть $SABCD$ – данная пирамида, M и K – середины сторон AD и BC, O – центр квадрата $ABCD$ соот-

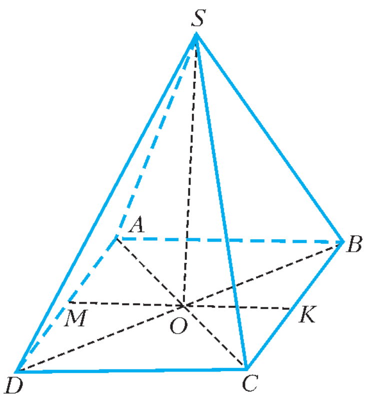


Рис. 12

ветственно (рис.12). Центр сферы радиуса R, проходящей через точки M, B, C, лежит на перпендикуляре к плоскости основания

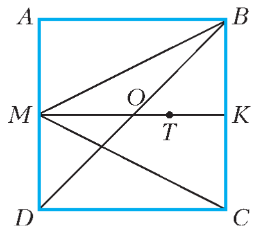


Рис. 13

пирамиды, проходящей через центр T окружности, описанной около треугольника MBC (рис.13). Пусть $\angle MCK = \varphi$. Тогда $\sin\varphi = \frac{MK}{MC}$ и радиус окружности есть $MT = \frac{MB}{2\sin\varphi} = \frac{5a}{8}$, где a – сторона основания пирамиды. Тогда

$OT = MT - MO = \frac{a}{8}$.

Рассмотрим теперь сечение пирамиды плоскостью MSK (рис.14). По условию $\angle SMO = \beta$, $\cos\beta = 2/3$. Поскольку сфера радиуса R проходит через точки M и S, ее центр лежит в плоскости, перпендикулярной отрезку SM и проходящей через его середину L. Точки пересечения этой плоскости с высотой пирамиды и перпендикуляром к плоскости основания пирамиды, проведенном через точку T, обозначим F и P соответственно.

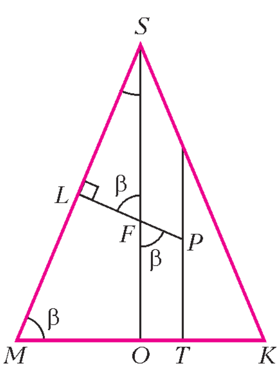


Рис. 14

Вычислим $R = MP$. Ясно, что $SM = \frac{a}{2\cos\beta}$, $SL = LM = \frac{a}{4\cos\beta}$. Далее, $LF = SL\operatorname{tg}(90° - \beta) = \frac{a}{4\sin\beta}$ и $FP = \frac{OT}{\sin\beta} = \frac{a}{8\sin\beta}$. Итак,

$LP = LF + FP = \frac{3a}{8\sin\beta}$ и $R^2 = MP^2 = LM^2 + LP^2 = \frac{a^2}{64\sin^2\beta\cos^2\beta}\left(4 + 5\cos^2\beta\right)$.

А поскольку радиус r вписанной в пирамиду сферы равен $r = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, осталось найти отношение $\frac{r^2}{R^2}$.

Вариант 2

1. 0,4. **2.** –10. **3.** 7. **4.** –4. **5.** 5. **6.** 2. **7.** 0,08. **8.** –30. **9.** 5. **10.** 18. **11.** 0,3.**12.** 11.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $v = 60$ м/с. **2.** $T = 24$ Н. **3.** $k = 3$.
4. $T = 12$ Н. **5.** $t_н = 287$ °C. **6.** $a = 30$ м/с^2.
7. $R_р = 90$ Ом. **8.** $k = 4$.

9. Запишем законы сохранения импульса и энергии:

$$m_1v_1 = m_1u_1 + m_2u_2, \quad \frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2} + Q,$$

где Q – энергия, перешедшая при ударе в тепло (увеличение внутренней энергии системы). Выразим из первого уравнения проекцию конечной скорости пули:

$$u_1 = v_1 - \frac{m_2}{m_1}u_2,$$

подставим во второе уравнение и получим для скорости шара u_2 квадратное уравнение

$$\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)u_2^2 - 2v_1u_2 + \frac{2Q}{m_2} = 0.$$

Это уравнение имеет два положительных корня:

$$u_2 = \frac{v_1 \pm \sqrt{v_1^2 - \frac{2Q}{m_2}\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \left[\begin{array}{l} 9 \text{ м/с} \\ 7 \text{ м/с}. \end{array}\right.$$

Чтобы понять, какой из корней соответствует условию задачи, надо для каждого из них вычислить скорость пули u_1:

$$u_1 = v_1 - \frac{m_2}{m_1}u_2 = \frac{v_1 \mp \frac{m_2}{m_1}\sqrt{v_1^2 - \frac{2Q}{m_2}\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \left[\begin{array}{l} -16 \text{ м/с} \\ 32 \text{ м/с}. \end{array}\right.$$

Видно, что нижний корень соответствует случаю, когда пуля пробивает шар насквозь ($u_1 > u_2$). Условию задачи соответствует верхний корень, т.е. скорость шара равна 9 м/с.

10. Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{3}{2}\nu RT_1 = \frac{3}{2}\nu RT_2 + \frac{kx^2}{2},$$

условие механического равновесия поршня:

$$p_2S = kx$$

и уравнение Клапейрона–Менделеева для конечного состояния газа:

$$p_2\left(Sh_2\right) = \nu RT_2.$$

Из последних двух уравнений исключим p_2S и получим

$$kxh_2 = \nu RT_2.$$

По условию задачи объем и, соответственно, высота поршня изменяются в 1,25 раза:

$$h_2 = 1{,}25\left(h_2 - x\right),$$

откуда находим

$$h_2 = 5x, \text{ и } 5kx^2 = \nu RT_2.$$

Подставив $kx^2 = \frac{\nu RT_2}{5}$ в закон сохранения энергии, получим

$$T_2 = \frac{3}{3{,}2}T_1$$

и выразим отношение давлений:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{3{,}2}\frac{1}{1{,}25} = 0{,}75.$$

Значит, давление понизилось на 25%.

11. $v = 3$ м/с. **12.** $k = 9$.

Вариант 2

1. $t = 2$ с. **2.** $\omega = 3\ c^{-1}$. **3.** $v = 250$ см/с.
4. $k = 7$. **5.** $T_1 = 200$ К. **6.** $U = 60$ В.
7. $R_2 = 15$ Ом. **8.** $l = 16$ см **9.** $v_ш = 1$ м/с.
10. На 50%. **11.** $E = 16$ кВ/м. **12.** $t = 157$ мкс.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. −1. **2.** ± 2. **3.** 75. **4.** $-\frac{2}{3}$. **5.** −2,2; 1,2. **6.** $a > b$.
7. $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **8.** $-\frac{24}{25}$. **9.** $\{-3\} \cup [1; +\infty)$. **10.** ± 13.
11. $(-\infty; 1]$. **12.** $(-\infty; -3] \cup [6; +\infty)$. **13.** 2295.
14. $(-\infty; 1) \cup \{2\} \cup (3; +\infty)$. **15.** $\frac{1}{4}$. **16.** 1. **17.** $(2; -2)$; $(-2; 2)$.
18. 4. **19.** $\sqrt{21}$; 7. **20.** $[-2; 0] \cup [1; 3)$.

Вариант 2

1. $a + 2$. **2.** 14. **3.** $\frac{1}{2}$. **4.** 20%. **5.** −1. **6.** $\{2\} \cup [3; +\infty)$.
7. $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **8.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\sqrt{3}$. **9.** $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$. **10.** $(-\infty; 1]$.
11. 2. **12.** -1; $\log_3 6$. **13.** $[2; 3)$. **14.** $(1; 1)$; $(3; 3)$.
15. ± 1; ± 2; ± 4. **16.** 40. **17.** $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$. **18.** $\frac{1}{4}$. **19.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
20. $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $a \in (-\infty; -1) \cup \left\{-\frac{1}{3}\right\} \cup [0; 1) \cup (1; +\infty)$. *Указание.* Ясно, что $x > a$ и $x \neq a + 1$. При этих условиях уравнение равносильно такому: $2x^2 - (3a + 1)x = 0$, т.е. $x = 0$ или $x = \frac{3a+1}{2}$.

2. $\frac{\sqrt{13} - 3}{2}$. *Указание.* Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x} = (1 + x)^2, \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-1)(x-2) = \left(x^2 + 2x\right)\left(x^2 + 2x + 1\right), \\ x \geq -1. \end{cases}$$

Пусть $a = x^2 + 2x$, $b = x - 2$. Тогда $b(b + 1) = a(a + 1)$, откуда либо $a = b$, либо $a + b = -1$. С учетом условия $x \geq -1$ получаем ответ.

3. $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Рассмотрим два случая.

1) $x \notin \left(0; \frac{3}{2}\right)$. Так как арктангенсы лежат на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и имеют разные знаки, их сумма также лежит на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому неравенство при таких x равносильно неравенству $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(3 - 2x)\right) > 1$, т.е. $\frac{3 - x}{1 - x(3 - 2x)} > 1$, откуда $x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right] \cup \left[\frac{3}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

2) $x \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$. В этом случае оба арктангенса положительны. Заметим, что при $x \geq 1$ $\operatorname{arctg} x \geq \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, а при $x < 1$ $\operatorname{arctg}(3 - 2x) > \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Поэтому левая часть неравенства больше $\frac{\pi}{4}$ при всех $x \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$.

4. $\frac{2}{9}$, 1 или 2. *Указание.* Необходимо разобрать три случая: окружность вписана в ΔABC, касается только отрезка BC или касается только отрезка AB.

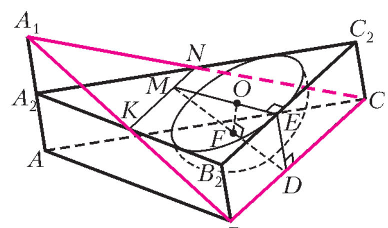


Рис. 15

5. Пусть сечение призмы $A_2B_2C_2$ проходит через центр сферы O параллельно ABC (рис.15). Так как $ME \perp BC$ и $DE \perp BC$, то плоскости DEM и A_1BC перпендикулярны. Поэтому OF равно расстоянию от центра сферы до плоскости A_1BC. Площадь треугольника $A_2B_2C_2$ по формуле Герона равна $S = 42$ и $OE = 2$. Так как $\frac{A_2K}{A_2B_2} = \frac{A_1A_2}{A_1A} = \frac{1}{2}$ и $\frac{A_2N}{A_2C_2} = \frac{1}{2}$, то KN − средняя линия треугольника $A_2B_2C_2$. Поэтому $ME = \frac{S}{BC} = 6$ и $OM = 4$. В силу подобия треугольников MOF и MDE получаем $\frac{OF}{OM} = \frac{DE}{DM} \Rightarrow OF = \frac{OM \cdot OE}{\sqrt{ME^2 + OE^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$. Радиус сечения равен $\sqrt{OE^2 - OF^2} = \frac{\sqrt{60}}{5}$.

Вариант 2

1. $\frac{59}{110}$. **2.** $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **3.** $(0; 1) \cup \left(1; \frac{5}{3}\right] \cup (3; 4)$.
4. $\frac{3}{2}\sqrt{39}$. **5.** $a \in \left[2; \sqrt[3]{32}\right] \cup \left\{\sqrt{5} + 1\right\}$.

Вариант 3

1. 12 км/ч. **2.** $\left(0; \frac{1}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right]$. **3.** $\pi + 2\pi k$, $\frac{\pi}{7} + 2\pi k$, $\frac{11\pi}{7} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **4.** $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$ или 3. **5.** См. рис.16.

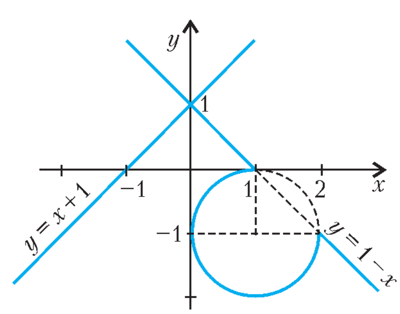


Рис. 16

XXXVII МЕЖДУНАРОДНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Задача 1

1) $A = 2a^2\,\mathrm{tg}\,\theta$. 2) $H = 2a\sin\theta\sin\varphi$.

3) $\Delta N_{\text{опт}} = 2\dfrac{gM^2}{h^2}a^2\lambda_0\,\mathrm{tg}\,\theta\sin\varphi$.

4) $\Delta N_{\text{опт}} = \dfrac{\lambda_0 A}{V}\sin\varphi$, где $V = 0{,}1597\ \text{см}^2\cdot\text{нм}$.

5) $n = \dfrac{2\lambda_0 A}{V}$. 6) $\lambda_0 = 0{,}1441$ нм. 7) $A = 11{,}98\ \text{см}^2$.

Задача 2

1) $x = \tilde{x} + \beta\sqrt{D^2+\tilde{x}^2}$. 2) $\tilde{x} = \gamma^2 x - \beta\gamma\sqrt{D^2+(\gamma x)^2}$.

3) $\tilde{L}(x_0) = \gamma L + \beta\gamma\sqrt{D^2+\left(\gamma x_0-\dfrac{L}{2}\right)^2} - \beta\gamma\sqrt{D^2+\left(\gamma x_0+\dfrac{L}{2}\right)^2}$.

4) Все время уменьшается.

5) $\tilde{L} = \dfrac{L}{\gamma}$. 6) $x_0 = \beta\sqrt{D^2+\left(\dfrac{L}{2\gamma}\right)^2}$.

7) $x = \dfrac{L}{2\gamma} - \beta\gamma\sqrt{(\gamma D)^2+\left(\dfrac{L}{2}\right)^2} + \beta\gamma\sqrt{(\gamma D)^2+\left(\dfrac{\beta L}{2}\right)^2}$.

8) Видимая длина равна $\tilde{L}_{\text{р}} = 3$ м на раннем снимке и $\tilde{L}_{\text{п}} = 1$ м – на позднем.

9) $v = \dfrac{c}{2}$. 10) $L = \sqrt{\tilde{L}_{\text{р}}\tilde{L}_{\text{п}}} = 1{,}73$ м.

11) $\tilde{L} = \dfrac{2\tilde{L}_{\text{р}}\tilde{L}_{\text{п}}}{\tilde{L}_{\text{р}}+\tilde{L}_{\text{п}}} = 1{,}50$ м.

Задача 3

1) $\Delta x = 1{,}22\lambda F_{\#} = 1{,}22$ мкм.

2) $N = \left(\dfrac{L}{\Delta x}\right)^2 \approx 830$ мегапикселей.

3) $F_{\#} = 11$. 4) $z \approx 15$ см.

5) $U = \rho\dfrac{4\pi R^3}{2}c\left(T_{\text{с}}-T_0\right) = 1677$ Дж.

6) $J = \kappa\dfrac{T_1-T_0}{R} \approx 2460\ \text{Вт/м}^2$.

7) $P = 4\pi R^2 J = 4\pi\kappa R\left(T_1-T_0\right) \approx 19{,}3$ Вт.

8) $\tau = \dfrac{U}{P} = \dfrac{\rho c R^2}{3\kappa}\dfrac{T_{\text{с}}-T_0}{T_1-T_0} \approx 870\ \text{с} = 14{,}5$ мин.

9) $Q = \dfrac{I_0\tau}{2} = 5$ Кл. 10) $I = \dfrac{I_0}{2} = 50$ кА. 11) $t \approx 10$ ч.

12) $N \approx 4{,}5\cdot 10^9$. 13) $v = \dfrac{D}{N\pi r^2} = \dfrac{r^2\Delta p}{8\eta L} = 044$ мм/с.

14) $\dfrac{dT}{T} = \left(1-\dfrac{1}{\gamma}\right)\dfrac{dp}{p}$. 15) $dp = \dfrac{mg}{k}\dfrac{p}{T}dz$. 16) $T_{\text{в}} = 20{,}6\ ^\circ\text{C}$.

МОСКОВСКАЯ ГОРОДСКАЯ ОЛИМПИАДА СТУДЕНТОВ ПО ФИЗИКЕ

1. $v_{\text{ср max}} = L\sqrt{\dfrac{\mu g}{32A}}$. **2.** $I = \dfrac{mR^2}{4}$.

3. Возможны два варианта. 1) Пролетая через точку пересечения начальной и последующей орбит, каждый раз поворачивать вектор скорости без изменения ее величины; тогда $v_{\text{x}} = \pi v/2$. 2) Перейти на сильно вытянутую эллиптическую орбиту, в верхней точке развернуть плоскость орбиты на $90°$ и снова вернуться на круговую орбиту; тогда $v_{\text{x}} = 2\left(\sqrt{2}-1\right)v$.

4. $a = \dfrac{2}{3}g\left(1-\dfrac{16\sqrt{6}\mu}{9\pi}\right)$.

5. $\eta = \dfrac{4}{5}\dfrac{RT_2}{\left(c\left(T_2-T_1\right)+r\right)\text{M}}$, где M – молярная масса водяного пара.

6. $W = -\dfrac{kq^2R^3}{2l^2\left(l^2-R^2\right)}$. **7.** $\mathcal{E}_i = \dfrac{p_m N\omega}{L}$.

8. 16. **9.** $I = 4I_0$.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»
kvant.info
Московский центр непрерывного математического образования
kvant.mccme.ru
Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru
Костромской центр дополнительного образования «Эврика»
ceemat.ru

журнал Квант ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
В.В.Власов, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия,

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: 930-56-48
E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г.Чехов Московской области
Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(496) 270-73-59
Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59