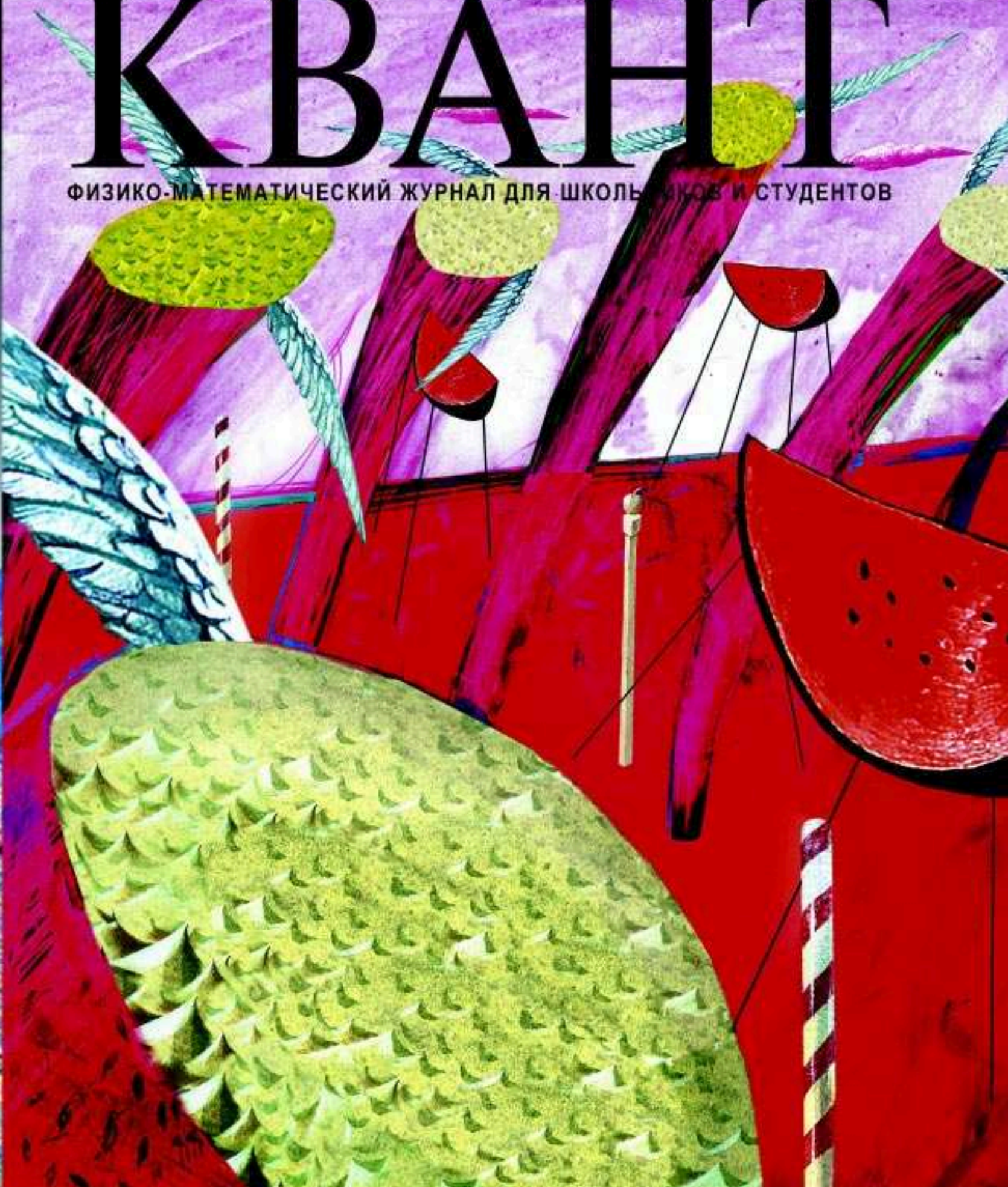


МАРТ/АПРЕЛЬ

ISSN 0130-2221  
2005 №3

# КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ







## Головоломки Кирилла Гребнева

Игрушки К.Гребнева "Крепкий орешек" и "Темное колечко" отличаются простотой конструкции, но это не значит, что они легко решаются. Задача в обеих головоломках одна и та же: необходимо освободить от веревочек кольца темного цвета.

При изготовлении важно соблюдать правильные пропорции - например, орешек должен быть больше веревочного колечка, шнурки нужно брать длинные, как на фотографиях, а вот кольца могут быть любого размера.

Для неопытных любителей головоломок дадим несколько советов. Начните с более простой задачи - с "Крепкого орешка". Длинную петлю в этой головоломке сначала пропустите внутрь короткой петли, а затем дважды обведите вокруг орешка. После разгадки этой головоломки вам легче будет разобраться с "Темным колечком". Узел, завязанный на светлом колечке, называется "коровий", так как используется пастухами для привязи животных. В отличие от пастухов, вам его сразу развязать не удастся. Сначала придется еще больше усложнить узел и перепутать веревочки, а уж затем - пытаться освободить колечко. Можно начать с обратной задачи: связать два колечка шнурком и пытаться надеть на него третье (темное) кольцо с таким же узлом, как на фотографии.

Если вы справитесь с задачей за час, значит, вам пора придумывать собственные головоломки. Желаем успеха.

**А.Калинин**

*Коллекция Коллекция Коллекция*  
**ГОЛОВОЛОМКИ**



*Коллекция Коллекция Коллекция Коллекция Коллекция Коллекция*

# журнал<sup>©</sup> Квант МАЙ 2005 №3 ИЮНЬ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипяна)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.А.Осипян

ПЕРВЫЕ ЗАМЕСТИТЕЛИ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

С.С.Кротов, С.П.Новиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,  
А.Н.Виленин, С.А.Гордюнин, Н.П.Долбилин,  
В.Н.Дубровский, А.А.Егоров,  
А.Р.Зильберман, В.В.Козлов,  
С.П.Коновалов, А.А.Леонovich, Ю.П.Лысов,  
В.В.Можаев, В.В.Произволов, Н.Х.Розов,  
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров

(заместитель главного редактора),

В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,

А.И.Черноуцан

(заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,  
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,  
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин,  
Е.Л.Сурков, Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,  
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,  
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,  
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,  
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,  
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,  
М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский,  
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро



Квантум

© 2005, Президиум РАН,  
Фонд Осипяна, «Квант»

- 2 Топология графов. *В.Болтянский*  
10 Прощай торнадо! *Г.Устюгина, Ю.Устюгин*

## ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 15 Московский университет. *А.Васильев*

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 17 Задачи М1951–М1960, Ф1958–Ф1967  
19 Решения задач М1931–М1935, Ф1943–Ф1952  
25 Победители конкурса «Задачник «Кванта» 2004 года

## К М Ш

- 26 Задачи  
27 Треугольники на шахматной доске. *И.Акулич*

## ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 30 Херувимы, серафимы, самолеты... *А.Стасенко*  
31 Как исследовать магнитную катушку. *С.Мягмарсурэн*  
35 Принцип Торричелли и центробежная сила инерции.  
*А.Буров*

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Поверхностное натяжение

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 37 Поляризованный шар – это просто. *Е.Ромишевский, А.Стасенко*

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 40 Правило Декарта. *М.Горелов*

## ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 44 Теплоемкость равновесных тепловых процессов. *В.Можаев*

## ОЛИМПИАДЫ

- 47 XIII Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»  
51 Всероссийская студенческая олимпиада по физике

## ИНФОРМАЦИЯ

- 51 Заочная физическая школа при физическом факультете МГУ  
53 Заочная школа при НГУ  
55 Ответы, указания, решения  
Нам пишут (24)

## НА ОБЛОЖКЕ

- I Иллюстрация к статье «Прощай, торнадо!»  
II Коллекция головоломок  
III Шахматная страничка  
IV Университеты мира на монетах и банкнотах







# Топология графов

В. БОЛТЯНСКИЙ

## Часть I. Топология графов

Известный французский математик Андре Вейль сказал как-то, что за душу каждого математика борются «дьявол абстрактной алгебры и ангел топологии». В этой статье, посвященной графам, мы будем прислушиваться в первую очередь к голосу ангела топологии, хотя легкий на помине дьявол тоже скажет свое веское слово.

**Граф** (конечный) – это множество точек (*вершин графа*), соединенных – на плоскости или в пространстве – конечным числом дуг (*ребер графа*), причем дуги пересекаются только в вершинах (рис.1). В большей части статьи для нас будет важно, что граф – это некоторая фигура (множество всех точек дуг); выделенные точки этой фигуры – вершины – мы будем часто игнорировать.

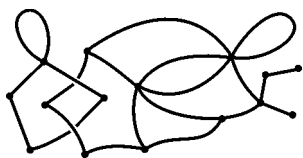


Рис. 1

### Какие графы одинаковы?

Ангел топологии считает одинаковыми *гомеоморфные графы* – такие графы  $G_1$  и  $G_2$ , для которых существует непрерывное (без разрывов) и обратимое (без склеиваний) отображение  $h: G_1 \rightarrow G_2$  множества  $G_1$  на все множество  $G_2$  (такое отображение называется *гомеоморфизмом*<sup>1</sup>). Из этого определения следует, что два графа гомеоморфны, в частности, если, как угодно изгибая и растягивая ребра, но не допуская

<sup>1</sup> При определении гомеоморфизма произвольных фигур требуется еще непрерывность обратного отображения  $h^{-1}$  (для конечных графов она выполняется автоматически, что нам шепнул на ухо без доказательства ангел топологии).

25 апреля 2005 года исполнилось 80 лет замечательному математику, известному педагогу и популяризатору науки, члену Редакционной коллегии и Редакционного совета журнала «Квант» Владимиру Григорьевичу Болтянскому. За тридцать пять лет существования «Кванта» он написал множество превосходных статей по самым разным вопросам математики, входящих, безусловно, в золотой фонд популярной литературы. Мы рады поздравить Владимира Григорьевича с юбилеем и пожелать ему всевозможных успехов на ниве просвещения.

Предлагаемая вашему вниманию статья была опубликована в «Кванте» №6 и 7 за 1981 год.

разрывов и склеиваний, можно один из них наложить на другой.

На рисунке 2,а показано, как можно окружность превратить в восьмерку; однако это не означает, что

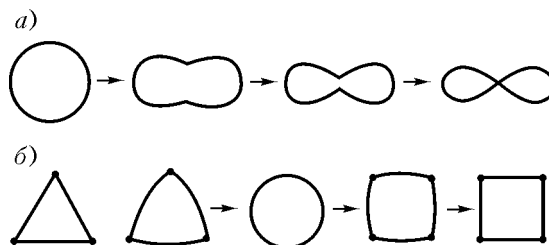


Рис. 2

окружность и восьмерка гомеоморфны (ведь при этом превращении произошло склеивание двух точек). Окружность можно превратить и в полуинтервал, но для этого ее нужно разорвать и лишь потом распрямить. Поскольку разрывы не разрешены, такое превращение не будет гомеоморфизмом; к тому же, полуинтервал не является графом. А вот контур треугольника и контур квадрата гомеоморфны, и оба они гомеоморфны окружности, что показано на рисунке 2,б.

Заметим, что не всегда удастся реализовать гомеоморфное отображение  $h: G_1 \rightarrow G_2$  изгибанием, растяжением и сжатием графов в самом пространстве. Так, пара зацепленных окружностей (рис.3) гомеоморфна паре незацепленных, хотя в пространстве расцепить их, не разрывая, невозможно.

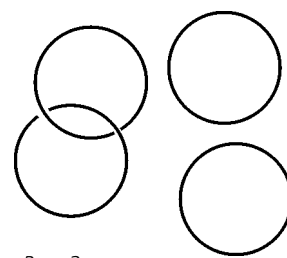


Рис. 3

Как показывает пример с треугольником и квадратом, при гомеоморфизме вершина не обязана перейти в вершину. К этому мы еще вернемся.

**Пример 1.** Будем представлять буквы русского алфавита в виде линий. Буквы Г, Л, М, П, С гомеоморфны между собой. Буквы Е, У, Т, Ч, Ш, Ц, Э также гомеоморфны между собой, но не гомеоморфны указанным ранее буквам. Буква О не гомеоморфна никакой другой букве русского алфавита.

Поучительно сравнить понятие гомеоморфизма и понятие конгруэнтности фигур. В геометрии рассматриваются перемещения, т.е. отображения, сохраняющие расстояния между точками. Две фигуры, которые переводятся одна в другую («совмещаются») с помощью перемещения, называются *конгруэнтными* и рассматриваются как одинаковые (с геометрической точки зрения). В топологии рассматриваются отображения

более общие, чем перемещения, а именно *гомеоморфные отображения*, которые могут не сохранять расстояний, а сохраняют лишь непрерывность расположения точек в фигурах (не допускают разрывов и склеиваний). Поэтому две гомеоморфные между собой фигуры рассматриваются (с топологической точки зрения) как одинаковые.

### Простейшие инварианты

Свойства фигур, которые сохраняются при переходе от фигуры к гомеоморфной ей фигуре, называются *топологическими свойствами фигур*, или *топологическими инвариантами* (от латинского слова *invariant* – неизменный). Изучением топологических свойств фигур и занимается топология.

Чаще всего применяют такие топологические инварианты, которые являются числами (или другими алгебраическими объектами), так как с такими инвариантами удобно обращаться. Используются они в основном для решения на первый взгляд безнадежной задачи: доказать, что две фигуры  $A$  и  $B$  не гомеоморфны.

Действительно, доказывая, что нечто можно построить (у нас – гомеоморфизм  $h: A \rightarrow B$ ), достаточно придумать один вариант этого построения. А как доказать, что нечто нельзя построить? Для этого нужно перебрать всевозможные варианты построений (у нас – отображений  $h: A \rightarrow B$ ) и проверить, что ни один вариант не годится (не является гомеоморфизмом). Но обычно отображений  $h: A \rightarrow B$  бесконечно много, всех не проверишь. Как быть?

Здесь и помогают числовые инварианты. Пусть каждой фигуре  $A$  рассматриваемого класса приписывается число  $q(A)$ , причем гомеоморфным фигурам приписывается одно и то же число. Пусть фигуры  $A$  и  $B$  таковы, что  $q(A) \neq q(B)$ . Тогда они не могут быть гомеоморфными – нельзя построить гомеоморфизм  $h: A \rightarrow B$ !

Удивительная простота этого рассуждения скрывает его глубину и важность. Создается впечатление, что нас обманули, спрятав неизвестно куда трудность задачи. Это не удивительно: появились инварианты – числа, за которыми скрывается дьявол абстрактной алгебры, большой хитрец и мистификатор.

**Пример 2.** Буква Ы представляет собой фигуру, состоящую из двух не связанных между собой частей. Большинство остальных букв русского алфавита состоит из одного связного куска (исключение составляют буквы Й, Ё). Число связных «кусков», из которых состоит фигура (говорят также: *число компонент* фигуры), является топологическим инвариантом. Поэтому буква Ы не гомеоморфна, например, букве О, букве П, букве Ц и т.д.

**Пример 3.** На восьмерке (рис.4,а) имеется такая точка  $x$ , что после ее удаления (рис.4,б) мы получаем несвязную фигуру (содержащую больше одной компо-



Рис. 4

ненты). Точку, обладающую этим свойством, называют *разбивающей точкой* фигуры. Никакая отличная от  $x$  точка восьмерки не является разбивающей (рис.4,в).

Если точка  $x$  фигуры  $A$  является разбивающей, она остается таковой при любом гомеоморфизме фигуры  $A$ ; аналогично – для неразбивающей точки. Поэтому число разбивающих точек данной фигуры есть ее топологический инвариант, число неразбивающих точек – также топологический инвариант.

### Задачи

1. Для каждой из букв русского алфавита укажите, сколько разбивающих и неразбивающих точек она содержит. Докажите, что буквы О, Г, Т, Ъ попарно не гомеоморфны.

2. Докажите, что для любого натурального  $n$  существует фигура, содержащая ровно  $n$  разбивающих точек, а также фигура, содержащая ровно  $n$  неразбивающих точек.

**Пример 4.** Пусть  $A$  – граф и  $x$  – его вершина. Число ребер графа  $A$ , сходящихся в  $x$ , называется *индексом* вершины  $x$  в графе  $A$  (при этом *петля* – ребро с началом и концом в одной и той же вершине  $x$  – считается за два ребра, ибо она входит в  $x$  двумя своими концами).

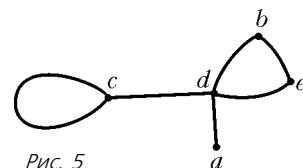


Рис. 5

На рисунке 5 вершины  $a, b, c, d$  имеют индексы 1, 2, 3, 4 соответственно. Число вершин индекса  $n \neq 2$ , содержащихся в графе, – топологический инвариант. Почему приходится исключать вершины индекса 2?

### Задачи

3. Докажите, что буквы Ю и Ф не гомеоморфны. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что число вершин индекса  $k$  ( $k \neq 2$ ) является инвариантом.

4. Сформулируйте необходимое и достаточное условие, при выполнении которого фигура, составленная из конечного числа дуг, гомеоморфна окружности.

5. Пусть  $G$  – граф. Через  $a_k(G)$  обозначим число вершин этого графа, имеющих индекс  $k$ . Докажите, что число ребер графа  $G$  равно

$$\frac{1}{2}(a_1(G) + 2a_2(G) + 3a_3(G) + \dots).$$

6. Докажите, что во всяком графе число вершин, имеющих нечетный индекс, четно.

### Кёнигсбергские мосты

Граф называется *уникурсальным* (или *эйлеровым*), если его можно «нарисовать одним росчерком», т.е. обойти его весь непрерывным движением, не проходя одно и то же ребро дважды. Свойство графа быть уникурсальным является, очевидно, топологическим инвариантом. Однако этот топологический инвариант не является новым, а выражается через понятие индекса вершины (см. далее задачу 9).

### Задачи

7. Докажите, что если каждая вершина графа имеет индекс, не меньший двух, то из ребер этого графа можно составить линию, гомеоморфную окружности.

8. Докажите, что если все вершины связного графа имеют четный индекс, то этот граф можно «нарисовать одним

росчерком», начав движение из произвольной вершины и возвратясь в ту же вершину.

9. Докажите, что связный граф тогда и только тогда уникурсален, когда он содержит не больше двух вершин нечетного индекса.

С уникурсальными графами связана задача о кёнигсбергских мостах, рассмотренная еще Эйлером. В то время в Кёнигсберге было семь мостов через реку Прегель (рис.6,а). Задача состоит в том, чтобы выяснить, можно ли, прогуливаясь по городу, пройти через

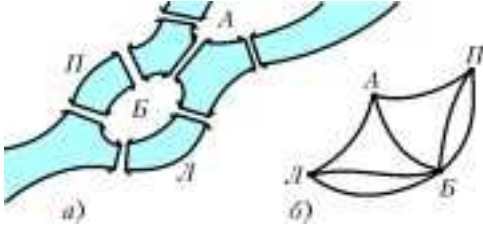


Рис. 6

каждый мост точно по одному разу. Сопоставим с планом города некоторый граф: вершина  $Л$  обозначает левый берег,  $П$  — правый берег,  $А$  и  $Б$  — острова, а ребра графа соответствуют мостам (рис.6,б). В этом графе все четыре вершины имеют нечетный индекс. Следовательно, граф не уникурсален, и потому требуемого маршрута не существует.

#### Задачи

10. Докажите, что, добавив еще один мост (где угодно на плане рисунка 6,а), мы получим схему города, по которому можно пройти через каждый мост ровно по одному разу.

11. *Полным графом* называется граф без петель, у которого любые две вершины соединены ровно одним ребром. В каком случае полный граф уникурсален?

#### Как построить связный граф

Всякий граф можно «построить», добавляя одно ребро за другим (разумеется, при этом нужно будет отмечать и вершины графа). Нумерация ребер графа

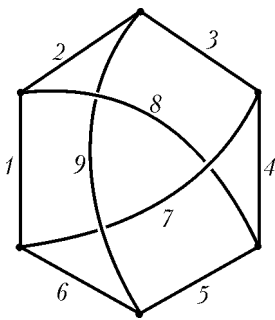


Рис. 7

на рисунке 7 выбрана так, что при вычерчивании графа в соответствии с этой нумерацией все время получаются связные графы. Если бы, однако, мы занумеровали ребра в обратном порядке, то при вычерчивании у нас сначала получался бы несвязный граф. Оказывается, во всяком связном графе существует такая нумерация ребер, что при

вычерчивании графа в соответствии с этой нумерацией все время получаются связные графы. Это утверждение можно назвать «теоремой о вычерчивании связных графов».

#### Задачи

12. Докажите, что любой связный граф можно «нарисовать одним росчерком», если разрешить проходить каждое ребро ровно два раза.

13. Выведите из утверждения предыдущей задачи теорему о вычерчивании связных графов.

14. Докажите, что любые две вершины связного графа  $G$  можно соединить в  $G$  простой цепочкой ребер — такой цепочкой, что объединение ребер этой цепочки представляет собой линию, гомеоморфную отрезку.

#### Сколько деревьев в лесу?

*Контуром* в графе называется замкнутая цепочка ребер, объединение которых представляет собой линию, гомеоморфную окружности (рис.8). Связный граф, не содержащий ни одного контура, называется

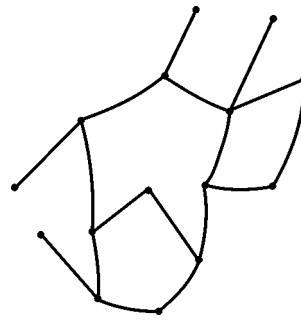


Рис. 8

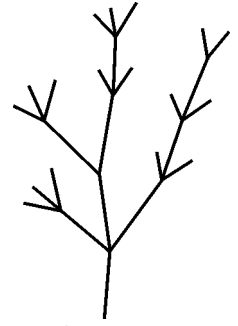


Рис. 9

деревом (рис.9). Докажем, что в любом дереве число вершин  $В$  и число ребер  $Р$  связаны соотношением

$$В - Р = 1. \quad (1)$$

Для доказательства проведем индукцию по числу ребер  $Р$ . При  $Р = 1$  (дерево состоит только из одного ребра и имеет две вершины) соотношение (1) справедливо. Предположим, что для любого дерева, имеющего  $n$  ребер, соотношение (1) уже доказано, и пусть  $G$  — дерево, имеющее  $n + 1$  ребро. Так как граф  $G$  — связный, его можно получить из некоторого связного графа  $G'$  добавлением одного ребра  $r$ . Граф  $G'$  содержит  $n$  ребер и тоже является деревом (почему?). По предположению индукции соотношение (1) для графа  $G'$  справедливо, и потому в нем имеется  $n + 1$  вершина. Заметим теперь, что только один конец добавляемого ребра  $r$  является вершиной графа  $G'$  (иначе, в силу задачи 14, при добавлении ребра  $r$  в графе  $G$  появился бы контур — см. рис. 10). Следова-

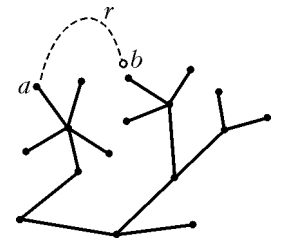


Рис. 10

тельно, при добавлении ребра  $r$  в графе  $G$  появляется одно новое ребро и одна новая вершина. Иначе говоря, в графе  $G$  имеется  $n + 2$  вершины и  $n + 1$  ребро, и потому соотношение (1) для него справедливо. Проведенная индукция доказывает равенство (1) для любого дерева.

Разность  $В - Р$  называется *эйлеровой характеристикой графа  $G$*  и обозначается через  $\chi(G)$ . Таким образом, равенство (1) означает, что *эйлерова характеристика любого дерева равна 1*.

#### Задачи

15. Граф, не содержащий контуров, называется *лесом*. Ясно, что если граф  $G$  представляет собой лес, то каждая его

компонента является деревом. Докажите, что если  $G$  – лес, то число деревьев, которые «растут» в лесу (т.е. число компонент графа  $G$ ), равно  $\chi(G)$ .

**16.** Докажите, что если граф  $G$  является деревом, то каждые две его вершины могут быть соединены только одной простой цепочкой. Верно ли обратное?

### Максимальное дерево и системы токов

Пусть теперь  $G$  – связный граф, не являющийся деревом. Тогда в  $G$  имеется контур; пусть  $r_1$  – какое-либо ребро, входящее в этот контур (рис. 11, а). Удалив из  $G$  ребро  $r_1$ , мы получим связный граф  $G'$  (поскольку концы выброшенного ребра соединены в  $G'$  простой цепочкой – оставшейся частью контура), причем вершины у графа  $G'$  – те же, что и у  $G$ . Если  $G'$  еще

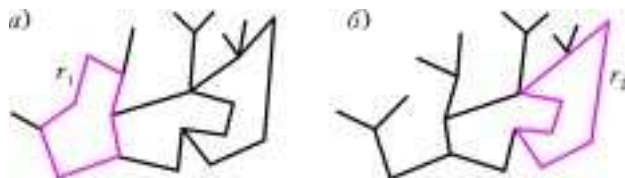


Рис. 11

не является деревом, т.е. в  $G'$  также имеется контур (рис. 11, б), то мы можем взять произвольное ребро  $r_2$  этого контура и, выбросив его, получить связный граф  $G''$  с теми же вершинами, что и у  $G$ , и т.д. Так как число ребер конечно, этот процесс должен на каком-то шаге остановиться; иначе говоря, после выбрасывания какого-то ребра  $r_k$  мы получим связный граф  $G^*$ , содержащий все вершины графа  $G$  и уже не имеющий контуров, т.е. являющийся деревом. Граф  $G^*$  называется **максимальным деревом** графа  $G$ , а ребра  $r_1, r_2, \dots, r_k$ , которые пришлось выбросить из  $G$ , чтобы получить максимальное дерево  $G^*$ , называются **перемычками**.

Если  $B$  – число вершин графа  $G$ , то максимальное дерево  $G^*$  тоже имеет  $B$  вершин. Согласно (1), граф  $G^*$  имеет  $B - 1$  ребро, и потому число ребер графа  $G$  равно  $B - 1 + k$  (чтобы из  $G^*$  получить  $G$ , надо «возвратить»  $k$  выброшенных ребер-перемычек). Следовательно,

$$\chi(G) = B - (B - 1 + k) = 1 - k. \quad (2)$$

Так как  $k \geq 1$ , получаем  $\chi(G) \leq 0$ . Таким образом, учитывая (1), мы видим, что для любого связного графа  $G$  справедливо соотношение

$$\chi(G) \leq 1,$$

причем равенство достигается в том и только том случае, когда  $G$  – дерево.

Далее, согласно (2), число перемычек равно

$$k = 1 - \chi(G).$$

### Задачи

**17.** Докажите, что если граф  $G$  содержит  $l$  компонент, то  $\chi(G) \leq l$ . В каком случае достигается равенство?

**18\*.** Будем говорить, что в графе  $G$  задана **система токов**, если каждому ребру приписано направление (указываемое стрелкой) и некоторое неотрицательное число (ток), причем выполняется **правило Кирхгофа**: для каждой вершины сумма входящих в нее токов равна сумме исходящих. Докажите,

что если граф является деревом, то в нем существует только **тривиальная** система токов (все токи равны нулю).

**19.** Пусть  $G$  – связный граф,  $G^*$  – его максимальное дерево, а  $r_1, r_2, \dots, r_k$  – перемычки (т.е. ребра графа  $G$ , не содержащиеся в  $G^*$ ). Докажите, что если произвольно задать токи на ребрах  $r_1, r_2, \dots, r_k$ , то их можно однозначно дополнить токами на остальных ребрах так, чтобы получилась система токов в  $G$ .

*Указание.* Для каждой перемычки  $r_i$  существует единственный контур, содержащий ее и не содержащий других перемычек. Если пустить по этому контуру ток такой величины и направления, как указано на перемычке  $r_i$ , а затем взять сумму всех этих «контурных токов», то мы и получим требуемую систему токов на графе  $G$ . Если бы существовали две различные системы токов, совпадающие на перемычках, то их разность была бы нетривиальной системой токов на дереве  $G^*$ .

## Часть II. Плоские графы

В этой части статьи речь пойдет о некоторых глубоких свойствах плоских графов. Их изучение потребует вмешательства «дьявола абстрактной алгебры» и одного из его прислужников – инварианта по имени **индекс пересечения**.

### Три домика и три колодца

Граф  $G$  называется **вложимым в плоскость**, если существует на плоскости граф  $G'$ , гомеоморфный  $G$ . Так, граф, составленный из ребер тетраэдра, и граф, составленный из ребер куба, вложимы в плоскость (рис. 12). Приведем два примера графов, не вложимых в плоскость.

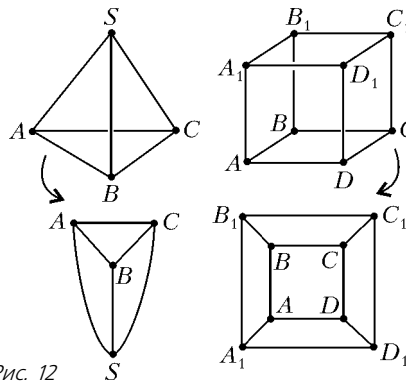


Рис. 12

**Пример 5** («домики и колодцы»). На плоскости даны шесть точек:  $D_1, D_2, D_3$  (домики) и  $K_1, K_2, K_3$  (колодцы). Можно ли на плоскости провести тропинки от каждого домика к каждому колодцу так, чтобы никакие две тропинки не пересекались?

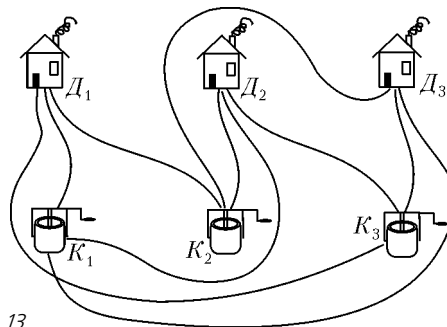


Рис. 13



Если мы проведем все тропинки, кроме одной, то для последней тропинки уже «не будет места» на плоскости. Таким образом, видно, что граф  $P_1$ , изображенный на рисунке 13, не вложим в плоскость.

**Пример 6.** Обозначим через  $P_2$  *полный граф* с пятью вершинами  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$ , т.е. граф без петель, любая пара вершин которого соединена ребром. На

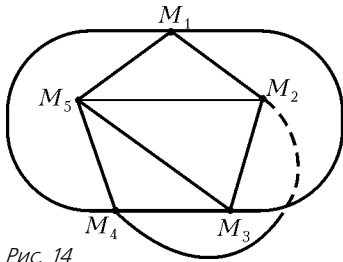


Рис. 14

рисунке 14 проведены девять ребер этого графа, а десятое прервано: для него «нет места» на плоскости. Снова видно, что граф  $P_2$  не вложим в плоскость.

Оказывается, графы  $P_1, P_2$  действительно не вложимы в плоскость.

Разумеется, рассуждения, приведенные в примерах 5 и 6 («нет места» на плоскости), не являются доказательствами.

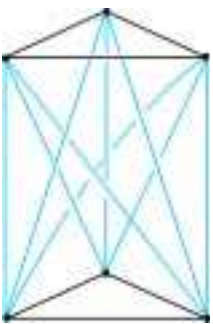


Рис. 15

К доказательству мы еще вернемся, а пока, считая невложимость графов  $P_1$  и  $P_2$  в плоскость известной, посмотрим на рисунок 15. На нем показан граф  $A$  с выделенным «синим» подграфом. Этот подграф гомеоморфен  $P_1$ , значит, граф  $A$  не вложим в плоскость (поясните!). Вообще, если некоторый граф  $G$  содержит подграф, гомеоморфный  $P_1$  или  $P_2$ , то граф  $G$  не вложим в плоскость. Польский математик Куратовский доказал обратную теорему: если граф не вложим в плоскость, то он содержит подграф, гомеоморфный  $P_1$  или  $P_2$ .

Мы не будем доказывать теорему Куратовского, а ограничимся доказательством невложимости в плоскость графов  $P_1$  и  $P_2$ .

### Индекс пересечения

Пусть  $a, b$  — два отрезка на плоскости, ни один из которых не содержит концов другого отрезка. Если эти отрезки пересекаются, то будем писать  $I(a, b) = 1$ , а если нет, то  $I(a, b) = 0$ . Число  $I(a, b)$  назовем *индексом пересечения отрезков  $a$  и  $b$* . Если один из отрезков  $a, b$  содержит конец другого отрезка, то число  $I(a, b)$  не определено.

Пусть  $x = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  и  $y = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  — два множества отрезков на плоскости, причем для любых  $i, j$  определен индекс  $I(a_i, b_j)$ .

Если сумма  $\sum_{i,j} I(a_i, b_j)$  (т.е. сумма индексов пересечения каждого из отрезков  $a_1, \dots, a_m$  с каждым из отрезков  $b_1, \dots, b_n$ ) четна, положим  $I(x, y) = 0$ , а если эта сумма нечетна, положим  $I(x, y) = 1$ . Число  $I(x, y)$  назовем *индексом пересечения множеств  $x$  и  $y$* . Это число будет играть основную роль в этой части статьи.

Будем рассматривать графы, ребра которых являются отрезками. Если в каждой вершине такого графа сходится четное число ребер, мы будем называть его

циклом. Докажем, что для любых циклов  $x, y$  на плоскости, индекс пересечения которых определен, индекс пересечения равен нулю.

По определению, в каждой вершине цикла сходится не меньше двух ребер. Из результата задачи 7 следует, что цикл содержит ломаную, гомеоморфную окружности. Если из цикла выбросить эту ломаную и хоть один отрезок останется, оставшийся граф по-прежнему будет циклом. В оставшемся цикле можно снова выделить ломаную, гомеоморфную окружности, и т.д. Это рассуждение показывает, что *каждый цикл является объединением конечного числа ломаных, каждая из которых гомеоморфна окружности* (причем эти ломаные попарно не имеют общих звеньев).

Поэтому достаточно установить справедливость доказываемого утверждения в случае, когда каждый из циклов  $x, y$  состоит из одной ломаной, гомеоморфной окружности. Сдвинув чуть-чуть вершины циклов  $x$  и  $y$ , мы можем добиться того, чтобы индекс  $I(x, y)$  не изменился и никакой отрезок, входящий в цикл  $x$ , не был параллелен никакому отрезку, входящему в  $y$ . Выберем теперь прямую  $l$ , не параллельную ни одной прямой, соединяющей какую-либо вершину цикла  $x$  с какой-либо вершиной цикла  $y$ , и будем непрерывно перемещать цикл  $x$  (как твердое целое) параллельно прямой  $l$  (рис. 16). Индекс пересечения  $I(x, y)$  мог бы изменяться лишь в те моменты, когда вершины движу-

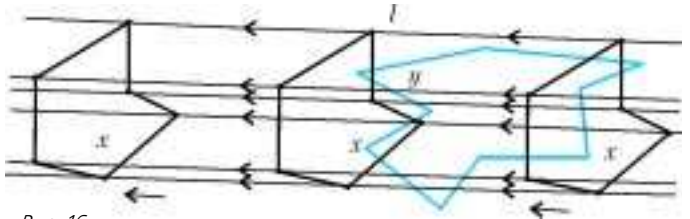


Рис. 16

щегося цикла  $x$  проходят через ребра неподвижного цикла  $y$  или когда ребра цикла  $x$  проходят через вершины цикла  $y$  (вершины цикла  $x$  не могут попасть в вершины цикла  $y$  в силу выбора прямой  $l$ ). Однако, как показывает рисунок 17, в момент, когда некоторое ребро  $a$  цикла  $x$  проходит через вершину  $q$  цикла  $y$ , число точек пересечения не меняет своей четности, а

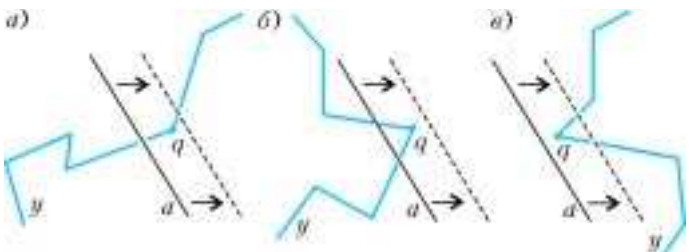


Рис. 17

потому индекс пересечения  $I(x, y)$  не меняется. То же происходит и при прохождении вершин цикла  $x$  через ребра цикла  $y$ .

Итак, в течение всего движения индекс пересечения не меняется, является инвариантом. Но в конце концов цикл  $x$  попадает в положение, в котором он совсем не имеет общих точек с  $y$  (см. рис. 16), так что индекс

пересечения становится равным нулю. Следовательно, и первоначально было  $I(x, y) = 0$ .

### Невложимость полного пятивершинного графа

Теперь мы в состоянии доказать, что граф  $P_2$ , рассмотренный в примере 6, не вложим в плоскость. Соединим ломаными попарно 5 точек на плоскости, не обращая пока внимания на пересечения. Ребра-ломанные, не имеющие общих концов, условимся называть *несмежными*. Обозначим через  $J$  сумму индексов пересечения по всем парам несмежных ребер. Конечно, число  $J$  зависит от того, каким образом нарисованы на плоскости ребра. Если бы их удалось нарисовать без пересечений, число  $J$  оказалось бы равным нулю. Однако мы докажем, что *при любом способе проведения ребер число  $J$  оказывается нечетным*. Тем самым будет доказано, что граф  $P_2$  не вложим в плоскость.

Предположим, что мы меняем положение одного ребра, скажем  $M_1M_2$ . Первоначальное положение этого ребра обозначим через  $x$ , а его новое положение — через  $x'$ . Несмежными с ребром  $M_1M_2$  являются три ребра  $M_3M_4$ ,  $M_4M_5$ ,  $M_5M_3$ . Замкнутая ломаная  $M_3M_4M_5$  (возможно, пересекающая себя) является циклом; обозначим его через  $y$  (рис.18). Ломанные  $x$  и

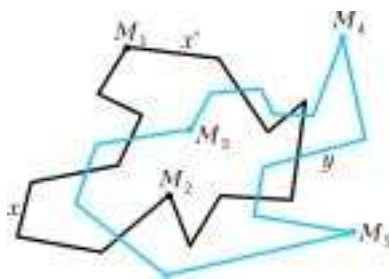


Рис. 18

$x'$ , вместе взятые, также образуют цикл. Поскольку индекс пересечения любых двух циклов равен нулю:

$$I(x \cup x', y) = 0,$$

число точек пересечения ребра  $x$  с циклом  $y$  (т.е. со всеми

несмежными ему ребрами) имеет ту же четность, что и число точек пересечения ребра  $x'$  с циклом  $y$ .

Таким образом, при замене ребра  $x$  ребром  $x'$  число  $J$  не меняет своей четности.

Из доказанного следует, что *при любых расположениях ребер на плоскости число  $J$  всегда имеет одну и ту же четность*. Действительно, если заданы два различных расположения ребер, то, последовательно заменяя сначала одно ребро первого расположения соответствующим ребром второго расположения, затем еще одно, еще одно и т.д., мы постепенно заменим первое расположение вторым, а четность числа  $J$ , в силу доказанного, меняться не будет.

Итак, либо для всех расположений ребер число  $J$  четно, либо оно для всех расположений нечетно. На рисунке 14 имеется только одна точка пересечения (разумеется, кривые ребра на этом рисунке можно заменить ломаными). Таким образом, на рисунке 14 число  $J$  равно единице, а потому для любого расположения ребер оно нечетно, и, значит,  $P_2$  не вложим в плоскость.

### Задачи

**20.** Докажите, что граф  $P_1$  из примера 5 не вложим в плоскость.

**21.** Ребрами графа служат стороны и наименьшие диагона-

ли правильного  $n$ -угольника ( $n > 3$ ). Докажите, что при четном  $n$  этот граф может быть вложен в плоскость, а при нечетном — нет.

**22.** Ребрами графа служат стороны и наибольшие диагонали правильного  $2n$ -угольника. Докажите, что при  $n \geq 3$  этот граф не вложим в плоскость.

**23.** Ребрами графа служат стороны и наибольшие диагонали (их  $2n + 1$ ) правильного  $(2n + 1)$ -угольника. Докажите, что этот граф не вложим в плоскость.

### Нельзя ли проще?

Выше (см. рисунки 16, 17) мы доказали, что индекс пересечения любых двух циклов на плоскости равен нулю. Возможно, читатель предложит следующее более простое доказательство: будем двигаться по замкнутой ломаной  $x$ ; в каждой точке ее пересечения с замкнутой ломаной  $y$  мы будем либо входить во внутреннюю область ломаной  $y$ , либо выходить из нее во внешнюю область; так как точки входа и точки выхода чередуются, к моменту прихода в исходную точку число точек входа будет равно числу точек выхода; значит, общее число точек пересечения ломанных  $x$  и  $y$  четно. Однако это доказательство можно признать корректным лишь в том случае, если уже выяснен смысл понятия «внутренняя область», а это понятие вовсе не является таким простым, как кажется на первый взгляд. Выясним смысл этого понятия.

### Теорема Жордана

Замкнутая линия, гомеоморфная окружности, называется простой *замкнутой линией*. Теорема Жордана состоит в том, что *всякая простая замкнутая линия, расположенная на плоскости, разбивает эту плоскость на две области* (внутреннюю и внешнюю). Поясним смысл этой теоремы. Пусть  $l$  — простая замкнутая линия на плоскости. Возьмем точки  $p, q$ , не лежащие на линии  $l$ . Если  $p$  и  $q$  можно соединить ломаной, не пересекающейся с  $l$ , то считают, что точки  $p$  и  $q$  лежат в одной и той же области относительно линии  $l$ . Если же любая ломаная, соединяющая точки  $p$  и  $q$ , обязательно пересекает  $l$ , то считают, что  $p$  и  $q$  лежат в разных областях. Теорема Жордана утверждает, что линия  $l$  определяет на плоскости ровно две области.

Не следует думать, что теорема Жордана утверждает нечто совершенно очевидное. Кажущаяся ее «очевидность» объясняется лишь тем, что на ум обычно приходят очень простые линии (окружность, контур выпуклого многоугольника и т.п.). В общем же случае утверждение теоремы Жордана не так уж очевидно. На рисунке 19 изображена простая замкнутая ломаная (это можно проверить, обведя линию карандашом). Однако вовсе не очевидно, что плоскость разрезана этой линией на две области; например, далеко не сразу можно понять,



Рис. 19



в какой области (внутренней или внешней) лежат точки  $a, b, c, d$ .

Мы приведем доказательство теоремы Жордана, основанное на применении индекса пересечения. При этом ограничимся случаем, когда  $l$  – не произвольная простая замкнутая линия на плоскости, а простая замкнутая ломаная.

Пусть  $b_1, b_2, \dots, b_n$  – последовательные звенья ломаной  $l$ . Проведем отрезок, пересекающий звено  $b_1$  в точке  $a$ , и возьмем на этом отрезке две точки  $p, p'$ , расположенные по разные стороны звена  $b_1$  на одном и том же расстоянии от него. Через точку  $p$  проведем отрезок, параллельный звену  $b_1$ , до точки его пересечения с биссектрисой угла между звеньями  $b_1$  и  $b_2$  (рис.20). Из этой точки пересечения проведем отрезок, параллельный  $b_2$ , до пересечения с биссектрисой угла между звеньями  $b_2$  и  $b_3$  и т.д. В результате мы

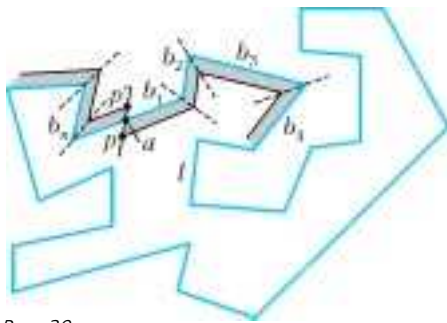


Рис. 20

получим ломаную  $x$ , звенья которой находятся на одном и том же расстоянии от соответствующих звеньев ломаной  $l$ . Если при этом точка  $p$  была взята достаточно близко к  $a$ , то построенная линия  $x$  не пересекает  $l$  и, пройдя вдоль линии  $l$ , должна вернуться либо в точку  $p$ , либо в  $p'$ . Легко понять, однако, что в точку  $p'$  ломаная  $x$  прийти не может: если бы ломаная  $x$  соединяла точки  $p$  и  $p'$ , то, присоединив к  $x$  отрезок  $pp'$ , мы получили бы цикл, который с циклом  $l$  пересекается в единственной точке  $a$ , т.е. индекс пересечения этих двух циклов был бы равен 1, что невозможно. Итак,  $x$  представляет собой замкнутую ломаную, выходящую из точки  $p$ , один раз проходящую вдоль ломаной  $l$  и возвращающуюся в точку  $p$ . Аналогично получается замкнутая ломаная  $x'$ , выходящая из  $p'$ , один раз проходящая вдоль ломаной  $l$  и возвращающаяся в точку  $p'$ .

Пусть теперь  $c$  – произвольная точка, не лежащая на линии  $l$ . Тогда ее можно соединить, не пересекая  $l$ , либо с точкой  $p$ , либо с точкой  $p'$ : достаточно провести из точки  $c$  луч, пересекающий линии  $x, x'$ , и от точки  $c$  пройти до первой точки пересечения этого луча с какой-либо из линий  $x, x'$ , а затем по этой линии дойти до точки  $p$  или  $p'$ .

Нетрудно понять, что если из точки  $c$  проведены две различные ломаные  $y, z$ , не пересекающие  $l$  и оканчивающиеся в одной из точек  $p, p'$ , то обе они оканчиваются в одной и той же точке. В самом деле, если бы ломаная  $y$  соединяла точки  $c$  и  $p$ , а ломаная  $z$  соединяла точки  $c$  и  $p'$  (рис.21), то ломаная  $y \cup z$  вместе с отрезком  $pp'$  составляла бы цикл, индекс пересечения

которого с циклом  $l$  равнялся 1, что невозможно.

Теперь уже нетрудно доказать теорему Жордана. Обозначим через  $U$  множество всех точек плоскости, которые можно, не пересекая  $l$ , соединить с точкой  $p$ , а через  $V$  – множество точек, которые можно, не пересекая  $l$ , соединить с точкой  $p'$ . Тогда  $U$  и  $V$  будут теми двумя областями, на которые линия  $l$  разбивает плоскость. В самом деле, если точки  $c_1, c_2$  принадлежат одной области (скажем,  $U$ ), то существуют ломаные  $y_1, y_2$ , не пересекающие  $l$ , которые соединяют  $c_1$  и  $c_2$  с точкой  $p$ . Объединение их представляет собой ломаную, соединяющую  $c_1$  и  $c_2$  и не пересекающую  $l$ . Итак, две точки, принадлежащие одной области, можно соединить ломаной, не пересекающей  $l$ . Если же точки  $c_1, c_2$  принадлежат различным областям ( $c_1 \in U, c_2 \in V$ ), то их нельзя соединить ломаной, не пересекающей  $l$  (иначе, как и выше, мы получили бы цикл, имеющий с  $l$  индекс пересечения 1). Тем самым, теорема Жордана (для случая простой замкнутой ломаной) доказана.

**Замечание.** Все «далекие» точки плоскости расположены в одной и той же области относительно линии  $l$  (рис.22). Поэтому одна из двух областей, определяемых линией  $l$ , – неограниченная, а другая – ограниченная. Неограниченную область называют *внешней*, а ограниченную – *внутренней*. Точки внешней области характеризуются тем, что из этих точек можно провести ломаные, не пересекающиеся с  $l$  и уходящие как угодно далеко от  $l$ ; точки внутренней области этим свойством не обладают.



Рис. 22

### Задачи

**24.** Если ломаная  $l$  – очень сложная, то определить «на глаз», в какой области (внутренней или внешней) лежит точка  $a$ , трудно: для этого нужно выяснить, можно ли, отправляясь из точки  $a$ , выйти из «лабиринта», образованного линией  $l$  (см. рис.19). Докажите, что если луч, исходящий из точки  $a$  и не проходящий через вершины ломаной  $l$ , пересекает  $l$  в четном числе точек, то точка  $a$  лежит во внешней области (т.е. выбраться из «лабиринта» можно), а если в нечетном, то точка  $a$  лежит во внутренней области.

**25.** На плоскости проведены  $k$  ломаных линий, каждая из которых соединяет две заданные точки  $p$  и  $q$ . Докажите, что если других общих точек ломаные попарно не имеют, то плоскость разбита на  $k$  областей.

# Прощай, торнадо!

*Г.УСТЮГИНА, Ю.УСТЮГИН*

**Ч**ТО ТАКОЕ ТОРНАДО? С КАКОЙ СТАТИ ЛЮДИ должны терпеть такую напасть? Между тем, средства массовой информации несут тревожные вести со всех сторон. Значит, есть актуальная задача. И мы предлагаем один из путей ее возможного решения.

Обычно торнадо – так называют смерч над сушей в Соединенных Штатах Америки – возникает в грозовом облаке и стремительно движется вниз, к земле. При этом черные облака находятся так низко, что, кажется, уже касаются нас, а их видимое движение сопровождается сильным ветром у земной поверхности, дождем, градом и холодом. Этот атмосферный вихрь существует недолго, но порой вызывает значительные разрушения. В океане торнадо набирает силы и выходит, как разбойник, на большую дорогу. И надо же, дошло даже до того, что у него есть собственная дорога – известная в США «дорога торнадо».

Между тем, люди строили свои поселения, не рассчитывая на встречу с торнадо. И, как выяснилось, напрасно. Глобальные изменения климата, его потепление из-за парникового эффекта, вызванного нарастанием количества углерода в атмосфере, предсказывают увеличение числа случаев возникновения торнадо, а также его мощности и продолжительности. Легко представить себе торнадо, который будет уничтожать все, что построено человеком.

Как же бороться с ним? Оказывается, борьба с ураганами, тайфунами, смерчами, торнадо находится в начальной стадии – наблюдений за ними, накопления измерительной и визуальной информации, обсуждения возможных проектов и идей.

Чтобы начать поиск решения задачи, сформулируем ее. Начнем с условий задачи.

У нас есть атмосфера, т.е. воздушная среда, в которой обитает весь растительный и животный мир и сам человек. Воздушная атмосфера несет с собой облака. Речь идет о плотных, мощных, а потому по цвету черных, из-за непроницаемости для солнечного света, облаках, из которых рождается торнадо.

Известно, что облака являются продуктом взаимодействия солнечного излучения с водной поверхностью океана. Это взаимодействие приводит к процессам испарения воды океанов и конденсации пара в капли в верхних холодных слоях атмосферы. Солнечная энергия, способствовавшая процессу парообразования, как бы перемещается вместе с паром в верхние слои атмосферы, где некоторое время сохраняется до того момента, пока не начнется интенсивный процесс конденсации с последующим выпадением осадков на поверхность земли. Осадки превращаются в реки, реки впа-

дают в океаны и т.д. Так осуществляется кругооборот воды в природе под действием энергии солнца. Пока пар в облаках не сконденсировался до состояния выпадения в виде осадков, облака представляют собой визуально наблюдаемый вариант парогазовой среды – туман.

Есть различные теории и предположения, касающиеся механизма возникновения торнадо. Но мы здесь не будем обсуждать этот механизм и вообще механизм образования вращательного движения верхних слоев атмосферы. Тогда, не рассуждая о причинах появления крупномасштабного атмосферного вихревого движения, допустим, что в атмосфере, заполненной облачной массой, возникает некий процесс, порождающий ее вращательное движение. Назовем его «активатор-процесс». В этом понятии объединено все, что объективно обуславливает процесс образования торнадо, предшествует его возникновению и сопровождает его. Это – солнечная энергия, водная поверхность океана, суточная периодическая активность взаимодействия солнечной энергии с океаном и атмосферой, вращение Земли, порожденное этим вращением действие кориолисовых сил на потоки влажной и сухой атмосферы, сохранение момента импульса, процессы испарения и конденсации влаги до состояния облаков, выпадение осадков и т.д. (При этом, правда, следует понимать, что из-за взаимодействия с солнечным излучением земная атмосфера не является замкнутой системой, а, следовательно, сохранение момента импульса по отношению к атмосфере Земли вообще и к отдельному атмосферному вихрю в частности применимо с весьма существенными ограничениями.)

Результат всего этого – непрерывные потоки вихрей в атмосфере. Каждый из вихрей долго сохраняет свою индивидуальность, совершая перемещение на значительные расстояния над земной поверхностью вместе с верхними слоями атмосферы. Но некоторые крупномасштабные атмосферные вихри порождают более мелкие вихри – торнадо, характеризующиеся высочайшей концентрацией вращательного движения атмосферы, оказывающие разрушительное воздействие на строения и сооружения, возведенные людьми.

Для дальнейшего рассмотрения выделим один крупномасштабный атмосферный вихрь. В районе наблюдения за ним облака движутся низко. В них видны довольно быстрые хаотические движения, которые в отдельный момент переходят во вращательное движение вокруг некоторой области в нижней, видимой для наземного наблюдателя, части сплошной облачности. Происходит все так, словно некий активатор своим воздействием приводит хаотические движения атмосферы в организованное вращательное движение. При-



чем получается, что чем дольше действует активатор, тем большие массы воздуха начинают принимать участие в таком движении. Это – процесс аккумуляции энергии в виде вращения больших масс воздуха.

По мере протекания этого процесса все более глубокие слои атмосферы начинают принимать участие в движении, вращательное движение приближается к земной поверхности. Тем временем, из облака, точнее из его нижней части, видимой наземным наблюдателем, формируется воронка в сторону поверхности земли или воды. И, наконец, выделяется так называемый хобот – тот самый торнадо, быстро соединяющий нижнюю часть воронки с землей или водой. Он становится видимым из-за окрашивания (особенно в первые мгновения возникновения) вовлеченной в него частью парообразной влаги облаков, а затем пылью или предметами, спирально возносимыми вверх к облаку.

Но и это еще не все. Дальнейшее аккумулятивное энергии вращения приводит к нарастанию глубины и размеров воронки. Следовательно, необходимо создать физическую модель, в которой вращательное движение среды, задаваемое активатором, приводило бы к образованию воронки и хобота.

Что такое торнадо с точки зрения физики? Оказывается, это вихревая трубка в парогазовой среде, если иметь в виду атмосферные воздух, в котором она образуется и существует, и вращающуюся часть верхних слоев атмосферы, содержащую влагу в виде облаков и, как генератор, задающую вращательное движение нижним слоям атмосферы. А воронка – это общеизвестное явление. Только мы привыкли видеть воронку в воде. Чаще и легче всего ее можно наблюдать, когда вода вытекает из ванны или раковины через сток (рис.1).

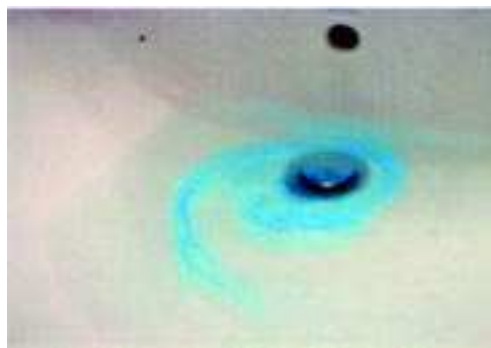


Рис. 1

Можно попробовать рукой побеспокоить воронку, но она довольно быстро восстанавливается, ну разве что может изменить направление вращения. Вот и все.

Продолжим наши рассуждения.

Итак, в качестве физической модели среды воспользуемся водой. Это жидкая среда, за состоянием и движением которой можно и очень удобно следить в лабораторных условиях. Теперь наша задача – воспроизвести торнадо в малом объеме воды. Это означает, что в жидкости под действием активатора вращательного движения должна образоваться воронка. Эта воронка должна иметь возможность развиваться по мере накопления вращательного движения жидкостью



Рис. 2

– т.е. увеличивать со временем свою глубину. Наконец, должен появиться хобот.

Воспользуемся готовым устройством для воспроизведения вихревого движения в воде. Например – малым шлифовально-полировальным устройством, на рисунке 2 оно обозначено буквой *а*. Это устройство не имеет опасных напряжений электрического тока, всегда готово к применению. В комплекте устройства имеется несколько сменных насадок, одна из которых, использованная нами при проведении экспериментальных работ, тоже изображена на рисунке 2 и обозначена буквой *б*. Насадка представляет собой цилиндрическое тело с «заovalенными» краями, ввинчивающееся в торцовую часть ротора устройства.

Наливаем обычную воду в прозрачный цилиндрический сосуд объемом один литр до уровня трех четвертей объема. Одна четверть должна быть свободной для того, чтобы неизбежное разбрасывание воды по сторонам под действием вращающегося активатора – насадки устройства – не приводило к попаданию воды на внешние предметы. Чтобы увидеть потоки движущейся жидкости, можно, как говорится, их визуализировать, добавив маковых зерен. Причем так, чтобы вначале они утонули и расположились на дне сосуда.

Теперь подводим вращающуюся насадку к свободной поверхности воды и наблюдаем за

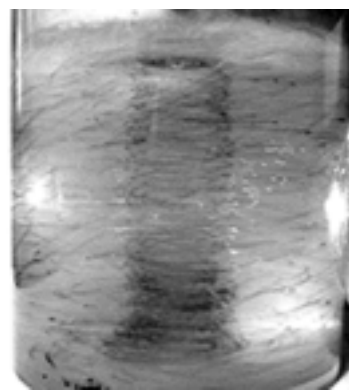


Рис. 3

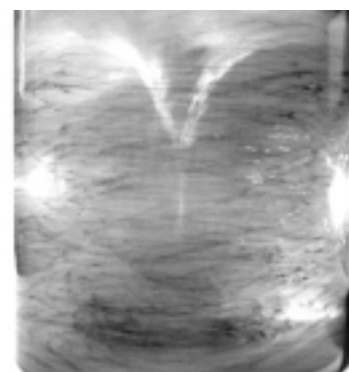


Рис. 4



Рис. 5

тем, что происходит. А происходит следующее. Совершенно удивительным образом вся масса маковых зерен вдруг приподнимается вертикально вверх в своем спиральном движении. Некоторое время можно наблюдать это поразительное явление, оно запечатлено на рисунке 3. Затем можно увидеть, как зерна мака вместе с потоками воды из центрального столба отбрасываются к стенкам сосуда, и там они продолжают свое уже ниспадающее спиральное движение ко дну сосуда, чтобы снова вернуться в центральную часть жидкости. Начинается циклический процесс движения жидкости. Продолжение процесса приводит к образованию и развитию воронки. Воронка становится все более глубокой, и в какой-то момент ее развития появляется хобот (рис.4).

А вот еще одно наблюдение (рис.5). Энергия восходящих потоков такова, что массивное стальное тело, помещенное в пустотелую алюминиевую чашечку, отрывается от дна и начинает всплывать, совершая «полет». И лишь придавливающие ее периферические потоки не позволяют такому телу полностью оторваться от дна и всплыть к свободной поверхности жидкости. Теперь-то уж точно можно себе представить, как торнадо поднимает в воздух автомобили и объемные массивные тела и разбрасывает их на большие расстояния, которые задают размеры торнадо.

Идем дальше.

В лабораторных, даже домашних, условиях мы воспроизвели торнадо. Причем убедились, что он ведет себя так же, как природный торнадо в атмосфере, — образуются воронка и хобот. Но, оказывается, самый страшный, самый энергичный, самый разрушительный торнадо тот, в котором уже нет хобота, а воронка в своем развитии нижней частью достигла земной поверхности. От такого торнадо нужно прятаться как можно глубже в подвалы или другие подземные убежища.

Все это мы видим в своем домашнем эксперименте, представляя, как это происходит в больших масштабах. Значит, нельзя допускать, чтобы торнадо развился до такого состояния. Необходимо тормозить его развитие, отнимать его энергию, чтобы не происходил процесс аккумуляции энергии. Нужно подавлять те условия, которые способствуют развитию торнадо. А еще лучше — заставить его бороться с самим собой. Для этого нужно отнимать у него энергию движения воз-

душных потоков, преобразовывать эти потоки и вновь возвращать их основному вихрю. Но возвращенные потоки должны вступать во взаимодействие с основным вихрем таким образом, чтобы в результате он разрушался, превращаясь в неорганизованную турбулентную воздушную среду. (Выражение «турбулентная воздушная среда» означает, что ветер в районе торнадо будет дуть в самые разные стороны, только не к центру торнадо.) Вот в этом и состоит наша задача.

Но возникает вопрос: можно ли считать нашу физическую модель близкой к природному атмосферному вихрю, если у природного вихря нет свободной поверхности, как у воды в нашей модели, а также отсутствуют твердые стеклянные стенки?

Те, кто занимаются вопросами вихреобразования, знают, что вихрь обязательно должен начинаться и заканчиваться на поверхностях раздела двух сред. Он как бы «присасывается» к ним своими окончаниями, т.е. окончания вихря не могут располагаться свободно в сплошных средах. Если же вихревая нить или вихревая трубка, состоящая из множества вихревых нитей, образуется внутри сплошной среды, вдали от свободной или контактной с внешней средой поверхности жидкости, то она не должна иметь ни начала, ни конца. Это тот вариант, когда вихрь представляет собой замкнутую геометрическую фигуру, называемую тором. Такое объемное тело легко себе представить как дымовое кольцо, образующееся при выхлопе газов (продуктов сгорания жидкого топлива) двигателями в момент их запуска. Очень часто его можно видеть вылетающим с большой скоростью из выхлопной трубы при запуске дизельного двигателя трактора. При определенном навыке курильщик может развлекаться колечками, образованными выдыхаемым им дымом. Есть и целый ряд демонстрационных устройств, воспроизводящих вихревые кольца как в газообразных, так и в жидких средах. Значит, существование отдельного атмосферного вихря указывает на то, что физическое состояние атмосферы верхних слоев принципиально отличается от физического состояния нижних околоземных слоев атмосферы, причем настолько, что даже вихрь «присасывается» к невидимой границе раздела.

Это общее заключение из наблюдаемого явления подтверждается исследованиями специалистов в воп-



росах физики атмосферы, которые уже много десятилетий знают о слоистом строении атмосферы и весьма сложном движении этих слоев. Слои различаются, например, такими показателями, как плотность, давление, температура. Следовательно, физическая модель, использующая свободную поверхность жидкой среды, не противоречит условиям существования атмосферных вихрей.

Далее.

Если вспомнить карту погоды, показываемую, например, ежедневно по различным телевизионным каналам, то можно обратить внимание на тот факт, что атмосферные вихри движутся один за другим с запада на восток, очень долго сохраняя каждый свою индивидуальность.

Из гидроаэродинамики и метеорологии хорошо известно, что два соседних вихря могут иметь как одинаковые направления вращения, так и противоположные. При этом одинаковые вихри равной интенсивности, но противоположных направлений вращения движутся параллельно друг другу вдоль разделяющей их поверхности. Вихри же, одинаковые и по направлению вращения, совершают вращательное движение вокруг их общего геометрического центра.

В научно-популярной и специальной литературе читатель может найти массу фотографий, иллюстрирующих взаимодействие вихрей. Для нас же важно, что вихри, в том числе и атмосферные, сохраняют свою индивидуальность в общей динамике движения бесконечного потока вихрей. При этом каждый из них ограничен и отделен «своим» пространством, как стеклянной стеной. И в этом пространстве осуществляется вся собственная картина движения среды. Говорят, что вихрь отделен своими линиями тока от остальной части сплошной среды. Эти линии тока в совокупности составляют замкнутую поверхность, аналогичную внешней поверхности цилиндрической трубки, внутри которой располагается весь вихрь. Следовательно, стеклянные стенки физической модели воспроизводят картину ограничения атмосферного вихря в пространстве собственными линиями тока.

Таким образом, задача воспроизведения вихревого движения в сплошной среде поставлена, условия известны. Критерием развития торнадо будет образование воронки и возникновение хобота. Если в результате применения нашего устройства в среде не развивается воронка и не возникает хобот, то мы нашли способ и средство для торможения развития торнадо. И в этом будет состоять наш самый важный результат.

Можно представить себе некие гипотетические установки, которые, обладая запасом энергии, не имеющим отношения к торнадо, воздействуют на торнадо так, что разрушают как сам торнадо, так и условия его существования и развития. Но при этом, как оказывается, необходима энергия в таком количестве, что она сравнима с энергией нескольких самых больших электростанций из существующих на земле. Такой путь крайне расточителен для человечества.

Чтобы не тратить дополнительную энергию, нужно воспользоваться собственной энергией торнадо. Такой

процесс будет называться самоподавлением торнадо. Чем большую энергию торнадо пытается передать окружающей среде, тем больше эта среда будет ему противодействовать, превращая собственную энергию торнадо в энергию борьбы с ним.

Ну, допустим, эта мысль нам понятна. А как ее осуществить?

Вспомним, что есть энергия воздушных потоков, движущихся к центру торнадо. А ведь именно она, возвращаясь в торнадо, приносит, или, можно сказать, возвращает ему энергию развития. При этом самоорганизация торнадо такова, что возвращенная энергия вращательного движения не рассеивается, а складывается с уже имеющейся энергией вращательного движения торнадо. Иными словами, торнадо, разбрасывая свою энергию в верхней части, возвращает ее в своей центральной нижней части.

То же самое мы видим в нашей установке. Маковые зерна показывают, как в нижней части они «сбегаются» к центру и там возносятся вверх. Значит, нужно использовать эти нижние придонные потоки для подавления развития воронки.

Гигантский вихрь торнадо необходимо заставить взаимодействовать с более мелким вихрем (но не мельчайшим). Нужно, чтобы главный вихрь «замечал» более мелкий вихрь и активно вступал с ним во взаимодействие, и чтобы в результате этого взаимодействия образовывались пусть в большом количестве, но более мелкие вихри, которые поглощали бы энергию основного вихря и рассеивали ее в среде. При этом процесс аккумуляции средней энергии движения должен быть хаотическим, а не направленным на концентрирование ее в одном центральном вихре – торнадо.

Теперь уместно вспомнить, как истекает жидкость через сток в раковине. Если на дне сосуда расположить решетку с отверстиями (рис.6), причем так, что она



Рис. 6

будет находиться на некоторой высоте над донной поверхностью, то мы получим целую серию стоков для придонных потоков жидкости. Только в этом варианте через сток жидкость поднимается вверх, а не сливается вниз. И при этом она также закручивается в вихрь. В результате возникает целый ряд вихрей, их удобнее называть вихревыми нитями, которые взаимодействуют друг с другом и разделяют собой основной вихрь на группы взаимодействующих вихрей.

На рисунке 7,а показаны траектории придонного

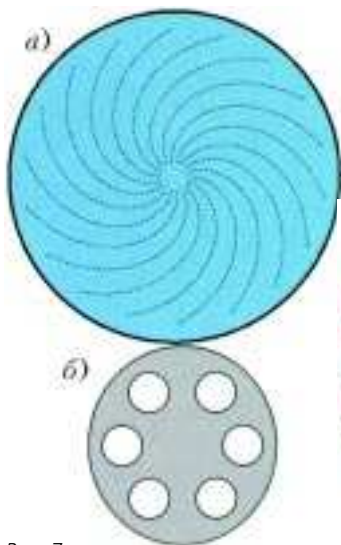


Рис. 7



Рис. 8

хватываются восходящими потоками жидкости и поднимаются к свободной поверхности жидкости, составляя один мощный вихревой поток. На рисунке 7,б схематически показана решетка с гексагональным расположением каналов, через которые придонные потоки жидкости могут проходить в область главного вихря, существенным образом составляя тело основного вихря. Рисунок 8 (вид сверху) иллюстрирует расположение решетки в центральной придонной области сосуда. Спиральными линиями показаны наблюдаемые в эксперименте траектории движения маковых зерен под воздействием основного циркулирующего движения, которое возникает в результате действия активатора, вращающегося по часовой стрелке.

А пока идем дальше.

Видим (рис.9), что маковые зерна, пройдя через каналы решетки снизу вверх, вовлекаются в процесс общего вихревого движения, поднимаясь по спирали. Затем активатор их рассеивает к периферии, где они участвуют во вращательном движении среды, ниспадая по спирали ко дну. В центральной же придонной части потоки маковых зерен вновь проходят через решетку вверх и опять вовлекаются в основное центральное движение. По сравнению с картиной на рисунке 3 здесь движение маковых зерен хаотичное и заметно более медленное.



Рис. 9

И теперь тоже можно видеть вращательное и циркуляционное движение жидкости. Но сколько бы вы ни поддерживали вращательное движение жидкости своим активатором, добиться образования воронки и хобота не удастся. Изменение размеров решетки, диаметра каналов решетки, высоты расположения ре-

шетки над дном сосуда не изменяет результат – воронка и хобот не образуются.

На рисунке 10 приведена фотография объема жидкости, находящегося под воздействием активатора в присутствии решетки. Маковые зерна не добавлялись. Фотографирование проводилось с боковой подсветкой, для того чтобы зафиксировать движение кавитационных пузырьков, которые также делают видимыми возникшие потоки жидкости. Вихрь не образуется.



Рис. 10

Однако, может быть, само тело, погруженное на дно сосуда, мешает развитию хобота? Для проверки закрываем каналы сверху тонкой пленкой, чтобы исключить потоки жидкости через каналы. Запускаем устройство и видим следующее. Маковые зерна, располагавшиеся на пленке, покрывающей диск, традиционно поднимаются вверх. Жидкость приобретает циркуляционное движение. Образуется воронка, а затем и хобот (рис.11).

Рис. 11

Возможно замечание. В эксперименте воронка пытается развиться прямо над решеткой, а она этого «не позволяет». А что если, как в природе, вихрь будет развиваться где-то в стороне от решетки? Тогда они друг друга могут не заметить. И что дальше?

Берем более крупный сосуд, чтобы иметь возможность изменять взаимное расположение активатора и связанной с ним воронки по отношению к месту расположения решетки. Сначала убеждаемся, что воронка развивается. Но теперь на ее развитие требуется большее время, поскольку принять участие в вихревом движении должна большая масса воды. И все же воронка развивается, как это видно на фотографии на рисунке 12. Затем на дне сосуда размещаем решетку, по горизонтали смещенную



Рис. 12





Рис. 13

от места расположения активатора. Теперь хорошо видно (рис.13), что ни расположение активатора, ни продолжительное во времени поддержание вращательного движения верхнего слоя жидкости не приводят к тому случаю, когда воронка в своей нижней части отделяется от активатора и все более и более углубляется. Маковые зерна демонстрируют хаотическое движение жидкости и тот факт, что вихревые потоки, прошедшие через решетку, хотя и «подчиняются воле» основного центрального вихря, но вступают с ним в активное противодействие. В результате в жидкой среде образуется, как говорят, турбулентный хаос. Но зато основной вихрь не развивается. А именно это нам и нужно.

А теперь – самое главное. Что мы предложим людям? По нашему разумению, естественно предложить построить на пути торнадо рядом с поселениями сооружения типа решетки на опоре (рис.14). Решетка (4) в виде перфорированного цилиндрическими каналами основного цилиндра – это лишь вариант того тела, которое будет изменять направление воздушных потоков (5), завихрять их и уже потом возвращать их

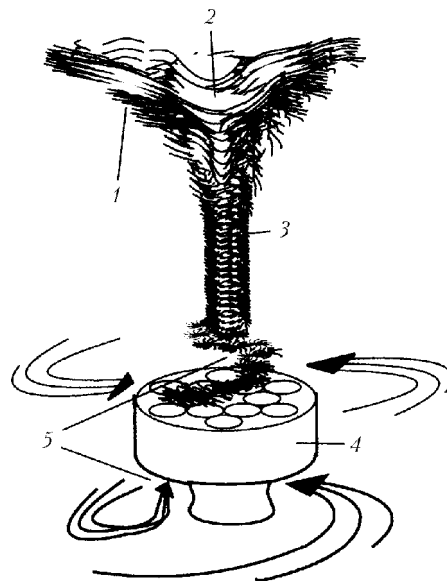


Рис. 14

основному вихревому потоку. Далее, понятно, сам торнадо (1, 2, 3) либо борется с собой до той поры, пока не иссякнет его энергия, либо он переместится подальше от людских поселений и угодий.

На наш взгляд, такой способ борьбы самый оптимальный.

И – прощай, торнадо!

## ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

# Московский университет

**А.Васильев, профессор, заведующий кафедрой физики низких температур и сверхпроводимости физического факультета МГУ**

**В** ТАТЬЯНИН ДЕНЬ 25 ЯНВАРЯ 2005 ГОДА МОСКОВСКОМУ ГОСУДАРСТВЕННОМУ УНИВЕРСИТЕТУ им. М.В.Ломоносова исполнилось 250 лет. На праздник съехались гости из многих университетов мира, в торжественных церемониях принимали участие высокие руководители государства. По сути, этот день отмечался всей Россией.

Указ об образовании Московского университета был подписан императрицей Елизаветой Петровной 12 января (25 по новому стилю) 1755 года по представлению графа Ивана Ивановича Шувалова. Проект создания университета принадлежал выдающемуся ученому-энциклопедисту Михаилу Васильевичу Ломоносову, согласно планам которого в новом высшем учебном заведении России были открыты три факультета: философский, юридический и медицинский. Свое обучение студенты начинали на философском факультете,

где получали базовые знания как по естественным, так и по гуманитарным наукам. Продолжить образование можно было на любом из указанных факультетов в соответствии с избранной специальностью. Преподавание в университете велось на латыни и на русском языке, а отсутствие в структуре университета богословского факультета было обусловлено наличием в России специальной системы подготовки служителей церкви.

Вскоре после учреждения Московского университета при нем были открыты типография и книжная лавка, начали издаваться газета «Московские ведомости» и журнал «Полезное увеселение». Тогда же первых читателей приняла университетская библиотека, которая более 100 лет оставалась единственной общедоступной библиотекой в Москве. Под эгидой Московского университета возникли и получили развитие многие центры отечественной культуры, науки и просвещения. Среди них – Малый театр, Петербургская академия художеств, Казанский университет.

В XIX веке на базе Московского университета были образованы различные общества: испытателей приро-

ды, истории и древностей российских, любителей российской словесности. В 1804 году был принят университетский устав, согласно которому университет получил широкую автономию. Развитие демократических начал в Московском университете немало способствовало активизации общественно-политической жизни в стране. Именно в его аудиториях кипели бурные споры западников и славянофилов о путях развития России.

В конце XIX – начале XX века по инициативе и при содействии университета возникли знаменитые московские музеи: Политехнический, Исторический, Зоологический, Антропологии, Изящных искусств; открылись Ботанический сад и Московский зоопарк. После революции 1917 года в организации Московского университета произошли кардинальные перемены. Была не только отменена плата за обучение, но и внедрена система студенческих стипендий. Университет перешел на государственное обеспечение. Произошло резкое увеличение числа готовящихся специалистов. На базе некоторых факультетов университета были образованы новые высшие учебные заведения.

К началу Второй мировой войны университет насчитывал около 5000 студентов, обучавшихся по всем направлениям гуманитарных и естественных наук того времени. В 1940 году, к празднованию 185-летия Московского университета, ему было присвоено имя М.В.Ломоносова. С осени 1941 года университет находился в эвакуации – сначала в Ашхабаде, затем в Свердловске, а в Москву университет вернулся весной 1943 года. Ученые Московского университета внесли важный вклад в дело повышения обороноспособности страны. За годы войны были проведены многочисленные исследования по аэродинамике и гидродинамике, радиосвязи, автоматике и системам управления, разработке взрывчатых веществ. Были открыты новые месторождения стратегически важных полезных ископаемых, в медицинскую практику были введены новые лекарственные препараты.

В послевоенные годы Московский университет стал символом восстановления разрушенного хозяйства страны. На Ленинских горах был возведен величественный комплекс зданий Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова.

В настоящее время Московский университет является крупнейшим классическим университетом России. На 29 естественных и гуманитарных факультетах МГУ обучается более сорока тысяч студентов, аспирантов и докторантов, а также специалистов в системе повышения квалификации. Обучение студентов ведется по 27 направлениям и 57 специальностям. Тематика аспирантов и докторантов охватывает практически весь спектр современных научных направлений. Учебный процесс в МГУ обеспечивает уникальный коллектив преподавателей и ученых, среди которых две с половиной тысячи докторов и шесть тысяч кандидатов наук, около тысячи профессоров и двух тысяч доцентов и старших преподавателей.

В Московском университете реализована, по сути, оптимальная концепция сочетания науки и образования. В структуре университета имеется ряд центров и научно-исследовательских институтов, однако научная работа осуществляется также профессорами и преподавателями, которые имеют возможность привлекать к научным исследованиям талантливую молодежь уже с младших курсов. Среди выпускников и преподавателей Московского университета лауреаты престижных национальных и международных премий. Из 18 Нобелевских премий, присужденных нашим соотечественникам, 11 принадлежат выпускникам и профессорам МГУ.

Празднование 250-летия Московского университета дало новый импульс его развитию. К юбилею была открыта Фундаментальная библиотека МГУ, началось освоение новой территории. Московский университет комплектуется самым современным оборудованием, происходит расширение тематики научных исследований и формирование новых факультетов. Наряду с классическими факультетами – механико-математическим, физическим, химическим и др. появились новые факультеты – факультет наук о материалах, биоинженерии и биоинформатики, фундаментальной медицины и др. Все они обеспечивают мировой уровень подготовки специалистов и способствуют укреплению позиций Московского университета как одного из ведущих центров науки и образования в мире.



*Поздравляем членов Редакционной коллегии  
журнала «Квант» и его активных авторов,  
награжденных Почетным знаком «250 лет МГУ» —  
за самоотверженное служение Российской науке  
и образованию:*

*Васильева А.Н., Григорьева Е.А.,  
Дубровского В.Н., Козлова В.В., Кротова С.С.,  
Медведева Г.Н., Панферова В.С., Погожева В.А.,  
Розова Н.Х., Семенова М.В., Сергеева И.Н.,  
Склянкина А.А., Сурдина В.Г., Тихомирова В.М.,  
Чеснокова С.С.*



# Задачи по математике и физике

*Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.*

*Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 августа 2005 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3–2005» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1951» или «Ф1958». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).*

*Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).*

*В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.*

## Задачи М1951–М1960, Ф1958–Ф1967

**М1951.** Имеются два разных расположения одних и тех же ладей на шахматной доске, причем известно, что одно получено из другого после двух ходов каждой ладьи. Всегда ли можно указать третье расположение этих же ладей на этой доске, из которого каждое из двух данных расположений достигается одним ходом каждой ладьи?

*С. Волчёнков*

**М1952.** Пусть  $АН$  – высота,  $BL$  – биссектриса,  $CM$  – медиана треугольника  $ABC$ .

а) Докажите, что  $АН$ ,  $BL$  и  $CM$  пересекаются в одной точке в точности если  $LH \parallel AB$ .

б) Докажите, что  $LH \parallel AB$  в точности если

$$\frac{\sin \angle A}{\cos \angle C} = \operatorname{tg} \angle B.$$

*А. Полянский (ученик 10 кл.)*

**М1953.** Из листа клетчатой бумаги вырезали по линиям сетки многоугольник без дыр. Известно, что его можно разрезать по линиям сетки на прямоугольники  $2 \times 1$ . Докажите, что у него есть хотя бы одна сторона четной длины.

*В. Гуровиц*

**М1954.** Найдите все точные квадраты вида  $\overline{a0\dots 0b}$ , где  $a$  и  $b$  – отличные от нуля цифры.

*В. Сендеров*

**М1955.** Одна из проекций точки  $D$  на стороны треугольника  $ABC$  является серединой отрезка между двумя другими. Докажите, что одна из проекций точки  $C$  на стороны треугольника  $ABD$  также является серединой отрезка между двумя другими.

*А. Заславский*

**М1956.** Существует ли возрастающая арифметическая прогрессия из 2005 натуральных чисел таких, что произведение любых четырех из них делится на куб их суммы? А бесконечная арифметическая прогрессия с такими же свойствами?

*И. Акулич*

**М1957.** Из полного набора домино выбрали несколько костяшек и выложили по правилам в один ряд. Докажите, что костяшки всего набора можно выложить в один ряд, в котором выбранные костяшки идут в том же порядке (может быть, не подряд).

*С. Волчёнков*

**М1958\*.** Можно найти пару натуральных чисел  $x$  и  $y$ , для которых  $x^2 + xy + y^2$  является квадратом целого числа, а также пару натуральных чисел  $x$  и  $y$ , для которых  $x^2 - xy + y^2$  является квадратом.

Докажите, что нельзя найти пару натуральных чисел  $x$  и  $y$ , для которых оба числа  $x^2 + xy + y^2$  и  $x^2 - xy + y^2$  являются квадратами.

*В. Произволов, В. Сендеров*

**М1959.** Имеются  $n$  квадратных трехчленов с буквенными коэффициентами и прозрачной мешок, содержащий  $3n$  натуральных чисел. Двое ходят поочередно: каждый своим ходом берет из мешка число и заменяет им какой-либо из еще не замененных буквенных коэффициентов. Первый игрок хочет, чтобы каждый из  $n$  трехчленов имел хотя бы один целый корень. Может ли второй игрок всегда (при любом содержимом мешка и любой стратегии первого) этому помешать, если а)  $n = 1$ ; б)  $n = 2$ ; в)  $n > 2$ ?

*Н. Агаханов, В. Сендеров*

**М1960.** Проекция внутренней точки правильного тетраэдра на грани соединены отрезками с вершинами

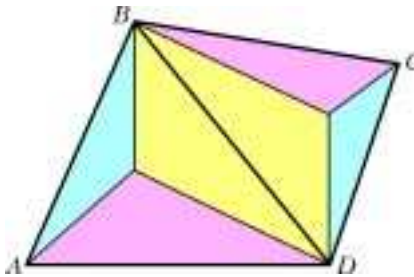


Рис. 1

своих граней. В результате поверхность тетраэдра оказалась разделенной на шесть областей. Каждая пара областей, содержащих пару противоположных ребер тетраэдра, окрашивается в свой цвет: желтый, синий или красный (рис.1). Докажите, что площадь, занятая каждым цветом, одна и та же.

*В.Произволов*

**Ф1958.** На тонкий прямой стержень длиной  $L = 10$  м насажены  $N = 20$  одинаковых маленьких бусинок, которые могут скользить по нему без трения. Скорости бусинок одинаковы и составляют  $v = 2$  м/с, а при столкновениях друг с другом и с упорами стержня скорости бусинок меняют направление, оставаясь прежними по величине. В начальный момент половина бусинок едет вправо, половина – влево. Сколько ударов бусинок об упоры стержня произойдет за время  $T = 1$  ч? А сколько всего ударов произойдет за это время между бусинками?

*А.Бусин*

**Ф1959.** Материальная точка движется вдоль отрезка прямой, длина которого  $L = 2$  м. Скорость точки в начале отрезка  $v_1 = 0,2$  м/с, в конце отрезка  $v_2 = 0,4$  м/с. Известно, что скорость все время увеличивалась, но ускорение не превосходило  $a_0 = 0,1$  м/с<sup>2</sup>. Каким могло быть среднее ускорение точки на этом отрезке?

*А.Простов*

**Ф1960.** Туман состоит из огромного количества мельчайших капелек воды, неподвижно висящих в воздухе. Масса капелек в 1 л воздуха составляет 1 г (средняя плотность тумана получается в 1000 раз меньше плотности воды). Маленькая капля воды начинает падать на землю с высоты 5 м, «впитывая» встреченные капельки. Считая, что капля сохраняет форму шарика, найдите ее диаметр перед падением на землю.

*З.Рафаилов*

**Ф1961.** На гладком горизонтальном столе лежит твердый кубик. На него налетает мягкий, довольно упругий кубик такой же массы, и между ними происходит лобовой удар. Скорость мягкого кубика после удара уменьшилась в 10 раз. Какая часть максимальной энергии деформации перешла в тепло при этом ударе? Считайте, что все тепло выделяется в мягком кубике при его деформировании.

*А.Повторов*

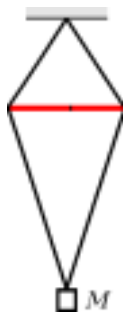


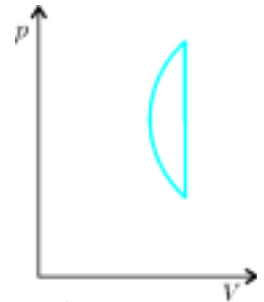
Рис. 2

**Ф1962.** На сложенных вместе двух нитях длиной  $L$  каждая подвешено тело массой  $M$  (рис.2). На расстоянии  $L/3$  от верхнего конца между нитями вставили очень лег-

кую горизонтальную распорку общей длиной  $d$ , состоящую из двух соединенных торцами половинок. Найдите силу, с которой одна половинка распорки действует на другую.

*А.Зильберман*

**Ф1963.** На  $pV$ -диаграмме изображен замкнутый процесс (рис.3). Кривая – это дуга окружности, прямая – вертикальна и соответствует охлаждению газа при постоянном объеме. Считая, что этот процесс проводят с порцией гелия, найдите КПД получившейся тепловой машины. Отношение максимального давления к минимальному в этом цикле равно 5, а минимальный объем составляет 0,9 от максимального.



З.Циклов Рис. 3

**Ф1964.** Три большие проводящие пластины площадью  $S = 2$  м<sup>2</sup> каждая расположены параллельно друг другу, расстояние между соседними пластинами  $d = 1$  см. На одну из крайних пластин помещен заряд  $Q = 1$  мкКл, на вторую, среднюю, пластину – заряд  $2Q$ , на третью пластину – заряд  $-3Q$ . Между первой и второй пластинами включают резистор сопротивлением  $r = 100$  Ом. Одновременно с этим резистор сопротивлением  $R = 100$  кОм включают между первой и третьей пластинами. Найдите количество теплоты, которое выделится в каждом из резисторов.

*А.Повторов*

**Ф1965.** К батарейке подключены три вольтметра, соединенные последовательно. Показания вольтметров составляют при этом 0,5 В, 1 В и 2 В (должно быть, разные попались вольтметры). Изменим соединение – включим теперь два вольтметра параллельно, к ним присоединим последовательно третий вольтметр, а к выводам всей цепи подключим батарейку. Оказалось, что один из вольтметров при таком переключении свои показания не изменил. А что показывают остальные два вольтметра? Напряжение батарейки считать неизменным.

*Р.Александров*

**Ф1966.** В экономичном современном фонарике (вместо лампочки там используется очень яркий светодиод) применяют накопитель энергии – конденсатор большой емкости 0,1 Ф (это не шутка, такие конденсаторы выпускают уже больше 30 лет, в последние годы они сильно подешевели). А «накачивают» его энергией, встряхивая фонарик – при этом цилиндрический магнит длиной 2 см и диаметром 1 см проскакивает то в одну, то в другую сторону через катушку, содержащую 1000 витков и намотанную в 10 слоев на длине 2 см. Длина трубки, в которой движется магнит, равна 7 см, на концах трубки сделаны эластичные упоры – магнит при ударе о такой упор останавливается. Считая магнитную индукцию поля у торца магнита равной 0,2 Тл, оцените время, за которое можно зарядить конденсатор до напряжения 3 В.



Чтобы конденсатор не разряжался через катушку, его подключают через диод.

С.Фонарев

**Ф1967.** К звуковому генератору подключают последовательно соединенные конденсатор емкостью  $C = 1$  мкФ и катушку индуктивностью  $L = 1$  Гн. Частоту генератора меняют, измеряя при этом напряжение на катушке вольтметром, имеющим сопротивление  $R = 20$  кОм. На какой частоте показания вольтметра будут наибольшими? Найдите максимальное напряжение, которое покажет вольтметр. Напряжение генератора все время равно  $U = 1$  В (эффективное значение). А что будет, если вольтметр переключить и измерять напряжение на конденсаторе? Катушку и конденсатор считать идеальными, сопротивлением проводов и внутренним сопротивлением генератора пренебречь.

З.Рафаилов

### Решения задач М1931–М1935, Ф1943–Ф1952

**М1931.** Каждая целочисленная точка плоскости окрашена в один из трех цветов, причем все три цвета присутствуют. Докажите, что найдется прямоугольный треугольник с вершинами трех разных цветов.

Назовем целочисленную точку узлом. Если на каждой вертикальной прямой все узлы одного цвета, то выберем любой узел – пусть он цвета 1. Проведем через него две перпендикулярные прямые, идущие под углом  $45^\circ$  к вертикали, и выберем на этих прямых точки цветов 2 и 3 (это возможно, постольку существуют вертикали этих цветов). Полученный треугольник будет искомым.

Аналогично, если все горизонталь одного цвета.

Пусть есть вертикаль  $v$ , на которой присутствуют ровно два цвета, скажем 1 и 2. Тогда выберем любой узел  $C$  цвета 3, узел  $A$  на  $v$ , находящийся с  $C$  на одной горизонтали, пусть узел  $A$  цвета 1, и узел  $B$  цвета 2 на  $v$ .

Если же есть вертикаль  $v$ , на которой встречаются все три цвета, то выберем горизонталь  $h$ , на которой не все точки одного цвета. Пусть точка  $A$  их пересечения имеет цвет 1, тогда выберем на  $h$  точку  $B$  цвета, отличного от 1, скажем второго, а на  $v$  – точку  $C$  третьего цвета.

С.Берлов

**М1932.** Последовательность неотрицательных рациональных чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots$  удовлетворяет соотношению  $a_m + a_n = a_{mn}$  при любых натуральных  $m, n$ . Докажите, что не все ее члены различны.

Предположим противное. Полагая  $m = n = 1$ , получаем  $a_1 + a_1 = a_1$ , т.е.  $a_1 = 0$ . Поэтому все остальные члены ненулевые. Пусть  $a_2 = p/q$ ,  $a_3 = r/s$ . Заметим, что из условия  $a_{m^k} = ka_m$ ; поэтому  $a_{2^{qr}} = qr \cdot p/q = pr = ps \cdot r/s = a_{3^{ps}}$ , но  $2^{qr} \neq 3^{ps}$ . Противоречие.

А.Протопопов

**М1933.** В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными

авиалиниями, принадлежащими  $k$  авиакомпаниям. Известно, что любые две линии одной авиакомпании имеют общий конец. Докажите, что все города можно разбить на  $k + 2$  группы так, что никакие два города из одной группы не соединены авиалинией.

Индукция по  $k$ . Если  $k = 0$ , утверждение тривиально: авиалиний нет.

Рассмотрим граф, вершины которого соответствуют городам, а ребра – авиалиниям. Пусть  $E_1, E_2, \dots, E_k$  – группы ребер, соответствующие авиалиниям первой, второй, ...,  $k$ -й авиакомпаний. Нетрудно понять, что для любого  $i \in \{1, \dots, k\}$  группа  $E_i$  – либо треугольник, либо «еж» – несколько ребер с одним концом. Если какая-то группа  $E_i$  – еж с центром в вершине  $A$ , то удалим  $A$  и все выходящие из нее ребра. В оставшемся графе ребра принадлежат  $k - 1$  авиакомпаниям, его вершины мы разобьем на  $k + 1$  группу так, чтобы вершины из одной группы не были соединены ребром, а вершина  $A$  составит  $(k + 2)$ -ю группу.

Остается рассмотреть случай, когда все группы  $E_1, \dots, E_k$  – треугольники. Тогда всего в графе  $3k$  ребер. Разобьем вершины графа на минимальное возможное количество групп так, что никакие две вершины одной группы не смежны (т.е. не соединены ребром). Пусть это группы  $B_1, \dots, B_n$ , причем  $n \geq k + 3$ . Отметим, что для любых двух групп  $B_i$  и  $B_j$  существует ребро между вершиной из  $B_i$  и вершиной из  $B_j$ , иначе можно объединить эти две группы в одну. Таким образом, всего в графе хотя бы  $\frac{n(n-1)}{2}$  ребер. Отметим, что  $\frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{(k+3)(k+2)}{2} > 3k$  – противоречие, завершающее решение задачи.

В.Дольников

**М1934.** Даны четыре последовательных натуральных члена арифметической прогрессии с ненулевой разностью. Эти четыре числа взаимно просты в совокупности. Не все они квадраты, однако произведение их – квадрат. Докажите, что это произведение делится на  $2520^2$ .

Пусть  $a, a + d, a + 2d, a + 3d$  – прогрессия задачи. Из условия следует, что  $(a, d) = 1$ . Значит, если  $b = (a + kd, a + ld) > 1$ , где  $0 \leq k < l \leq 3$ , то либо  $k = 0, b = l = 3$ , либо  $k = 0, b = l = 2$ , либо  $k = 1, l = 3, b = l - k = 2$ . Поэтому достаточно рассмотреть прогрессии следующих трех видов.

1)  $3x^2, y^2, z^2, 3t^2$ , где, поскольку  $(a, d) = 1$ ,  $y$  и  $z$  не делятся на 3. Имеем  $3x^2 + z^2 = 2y^2$ , откуда  $1 \equiv 2 \pmod{3}$ .

2)  $2x^2, y^2, 2z^2, t^2$ , где  $y$  и  $t$  нечетны. Имеем  $y^2 + t^2 = 4z^2$ , откуда  $2 \equiv 0 \pmod{4}$ .

3)  $6x^2, y^2, 2z^2, 3t^2$ . Имеем  $3x^2 + z^2 = y^2$ ,  $y^2 + 3t^2 = 4z^2$ , откуда

$$x^2 + t^2 = z^2.$$

Пусть  $(x, t, z)$  – тройка натуральных чисел, удовлетворяющая последнему равенству. Докажем, что  $xtz : 60$ .

Без ограничения общности будем считать, что  $(x, t, z) = 1$ ,  $x$  четно,  $t$  и  $z$  нечетны. Так как  $t^2 \equiv 1 \pmod{8}$ ,  $z^2 \equiv 1 \pmod{8}$ , то  $x^2 \equiv 8$ , откуда  $x \equiv 4$ . Далее, если  $xt$  не делится на 3, то  $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$ ,  $t^2 \equiv 1 \pmod{3}$ . Отсюда  $z^2 \equiv 2 \pmod{3}$ , что невозможно. Осталось доказать, что  $xtz \equiv 5$ . Если  $xt$  не делится на 5, то имеются 4 возможности:  $x^2 \equiv \pm 1 \pmod{5}$ ,  $t^2 \equiv \pm 1 \pmod{5}$ . Отсюда, так как  $z^2 \not\equiv \pm 2 \pmod{5}$ , получаем  $z^2 \equiv 5$ .

Теперь докажем делимость произведения на 49. Из равенства  $y^2 + 3t^2 = 4z^2$  следует, что в случае, когда  $yzt$  не делится на 7, остатки от деления на 7 распределяются так:

$y^2$	$3t^2$	$2z^2$
1	3	2
2	6	4
4	5	1

Отсюда  $6x^2 = 2y^2 - 2z^2$  делится на 7, а значит, и на 49.

**Замечание.** Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Пусть  $a, b, c, d, e \in \mathbf{N}$ ,  $abcd = e^2$ ,  $a, b, c, d$  — арифметическая прогрессия. Тогда  $a = b = c = d$ .

Эта теорема обобщает теорему Ферма, согласно которой не существует четырех различных квадратов натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию.

Доказательство нашей теоремы довольно сложно. Оно основано на представлении каждой арифметической прогрессии, удовлетворяющей ее условиям, члены которой взаимно просты в совокупности, в одном из следующих трех видов:

$$\begin{aligned} & x^2, y^2, z^2, t^2, \\ & 6x^2, y^2, 2z^2, 3t^2, \\ & 3x^2, 2y^2, z^2, 6t^2, \end{aligned}$$

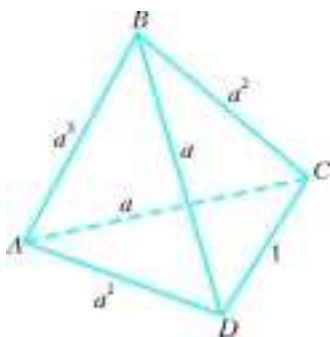
где  $x, y, z, t \in \mathbf{N}$ .

Из существования каждой из таких прогрессий с различными членами можно вывести существование натуральных чисел  $u, v, w$  таких, что  $u \neq v$ ,

$$u^4 - u^2v^2 + v^4 = w^2$$

(подумайте, как в каждом из трех случаев получить эти числа). Однако полученное равенство при  $u, v, w \in \mathbf{N}$ ,  $u \neq v$  выполняться не может. Для доказательства этого надо воспользоваться «методом спуска»; прочтите о нем в статье В. Сендерова и А. Спивака «Уравнения Пелля» в «Кванте» №3 за 2002 год или в решении задачи М1883 в «Кванте» №2 за 2004 год и подумайте, как применить его к нашей задаче.

В. Сендеров



**М1935.** Все грани тетраэдра — подобные треугольники. Верно ли, что они равны?

Неверно, что видно из следующего контрприме-

ра. Тетраэдр  $ABCD$  имеет такие размеры:  $AB = a^3$ ,  $AD = BC = a^2$ ,  $AC = BD = a$ ,  $CD = 1$  и при этом  $a = 1,1$  (см. рисунок). Нетрудно видеть, что все четыре его грани — подобные треугольники. Однако грань  $ABC$ , очевидно, не равна грани  $BCD$ .

В. Произволов

**Ф1943.** По горизонтальному столу скользит плоский лист фанеры, на котором нарисована система координат  $xy$ . В данный момент скорость точки  $A$  с координатами  $(1; 3)$  направлена вдоль оси  $x$  и равна  $1$  м/с. Скорость точки  $B$  с координатами  $(2; 1)$  составляет в тот же момент угол  $45^\circ$  с осью  $x$ . Где находятся точки листа, скорости которых по величине не превосходят  $1$  см/с?

Будем считать лист фанеры жестким. В этом случае вектор скорости точки  $B$  должен быть направлен, например, так, как показано на рисунке 1. Найдем положение точки, скорость которой в данный момент оказалась нулевой, т.е. мгновенный центр вращения — МЦВ. Ясно, что эта точка лежит на пересечении перпендикуляров к векторам скоростей  $\vec{v}_A$  и  $\vec{v}_B$  — получается точка МЦВ-1  $(1; 0)$ . Угловая скорость вращения листа в данный момент равна

$$\omega_1 = \frac{v_A}{h_1} = \frac{1 \text{ м/с}}{3 \text{ м}} = \frac{1}{3} \text{ с}^{-1}.$$

Ясно, что мгновенные скорости малы у точек вблизи МЦВ-1: они лежат внутри круга с центром  $(1; 0)$  и радиусом

$$r_1 = \frac{v}{\omega_1} = \frac{1 \text{ см/с}}{\frac{1}{3} \text{ с}^{-1}} = 3 \text{ см}.$$

«Самые дальние» точки, скорости которых не превосходят  $1$  см/с, лежат на самой окружности.

Аналогично рассмотрим второй случай (рис.2; строго говоря, его можно и не обсуждать, поскольку здесь угол вектора  $\vec{v}_B$  с осью  $x$  составляет не  $45^\circ$ , а  $135^\circ$  — ну, да ладно!). В этом случае МЦВ-2 находится в точке с координатами  $(1; 2)$ , и угловая скорость равна

$$\omega_2 = \frac{v_A}{h_2} = \frac{1 \text{ м/с}}{1 \text{ м}} = 1 \text{ с}^{-1}.$$

Тогда радиус нужного нам круга с центром в точке МЦВ-2 будет

$$r_2 = \frac{v}{\omega_2} = \frac{1 \text{ см/с}}{1 \text{ с}^{-1}} = 1 \text{ см}.$$

А. Центров

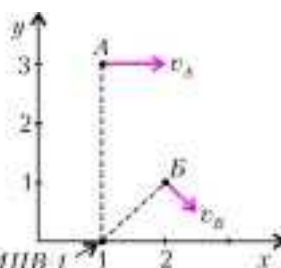


Рис. 1

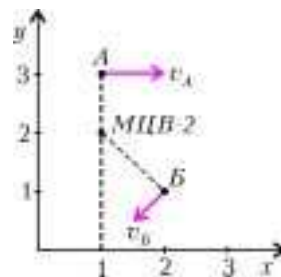


Рис. 2

**Ф1944.** В системе на рисунке 1 все блоки одинаковы, их массы практически сосредоточены в тонких осях. Найдите ускорения блоков после того, как мы перережем нить в точке  $A$ . Нити считать нерастяжимы-



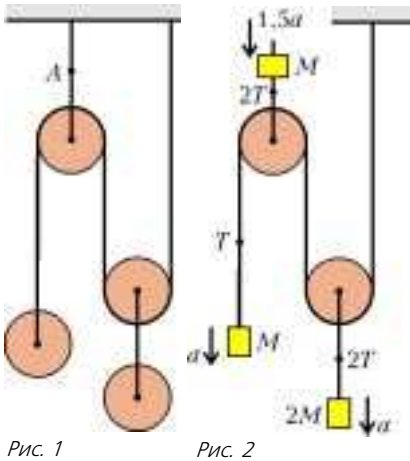


Рис. 1

Рис. 2

ми и очень легкими. Свободные куски нитей вертикальны.

Перерисуем чертеж, выделив массы осей и заменив их обычными грузами (рис.2; если бы массы не были сосредоточены в осях блоков, задача была бы намного сложнее!). Данные в условии подобраны

так, что ускорения нижних грузов получаются одинаковыми: легкий груз массой  $M$  движется под действием сил  $T$  и  $Mg$ , тяжелый — под действием сил  $2T$  и  $2Mg$ , а его масса  $2M$ . Запишем уравнения для верхнего груза — его ускорение равно  $1,5a$  — и легкого нижнего:

$$Mg + 2T = M \cdot 1,5a,$$

$$Mg - T = Ma.$$

Отсюда находим

$$a = \frac{6}{7}g.$$

Ускорение верхнего груза равно

$$1,5a = \frac{9}{7}g > g,$$

значит, нити действительно натянуты (иначе все грузы имели бы ускорение  $g$ ).

А.Зильберман

**Ф1945.** На горизонтальном гладком столе покоится клин массой  $M$  с углом  $\alpha$  при основании. На него наезжает со скоростью  $v_0$  маленькое тело массой  $m$  и начинает подниматься вверх по клину (удара при этом не происходит — у основания клина сделан плавный «въезд»). При какой высоте клина  $H$  маленькое тело поднимется по нему на самый верх? С какой скоростью будет двигаться клин после того, как маленькое тело его покинет?

Это довольно простая задача — тело и клин едут вместе в тот момент, когда максимальная высота достигнута. Скорость этого движения по горизонтали равна

$$u = \frac{mv_0}{M+m}.$$

Теперь запишем баланс энергий:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{(M+m)u^2}{2} + mgH.$$

Отсюда сразу находим необходимую высоту клина:

$$H = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{(M+m)}{2mg} \left( \frac{mv_0}{M+m} \right)^2 = \frac{v_0^2}{2g} \frac{1}{1+m/M}.$$

Тут есть только одна маленькая тонкость — на коротком плавном «въезде» на клин (и на обратном пути!)

скорость тела (и клина) заметно меняется; там между телом и клином действуют большие силы, необходимые для быстрого «разворота» вектора скорости тела. Скорость клина легко найти, если тело не перескочит через него, а съедет назад. Обозначим скорости после этого  $u_1$  и  $u_2$  (рис.1) и запишем законы сохранения импульса и энергии:

$$mv_0 = mu_1 + Mu_2,$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{Mu_2^2}{2}.$$

Получились обычные уравнения — такие же, как при расчете абсолютно упругого удара двух тел. Отсюда находим

$$u_2 = \frac{2v_0}{1+M/m}.$$

А вот когда высота клина недостаточна или тело слишком быстро наезжает — придется потруднее. В этом случае удобно представить движение тела в виде

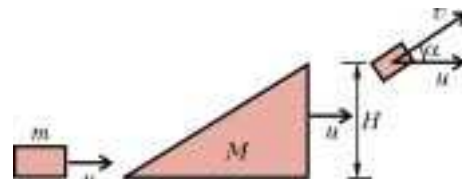


Рис. 2

суммы двух движений — вместе с клином плюс относительно клина (рис.2):

$$mv_0 = Mu + m(u + v \cos \alpha),$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{Mu^2}{2} + \frac{m((u + v \cos \alpha)^2 + (v \sin \alpha)^2)}{2} + mgH.$$

Из этих уравнений и найдется скорость клина  $u$ .

А.Повторов

**Ф1946.** В сосуде под поршнем находится моль гелия. Медленно нагреваем газ, при этом его объем увеличивается, однако частота ударов частиц о неподвижное дно сосуда остается неизменной. Найдите теплоемкость газа в таком процессе.

При увеличении температуры  $T$  газа его частицы двигаются быстрее, и при той же концентрации газа  $n$  частота ударов  $v_{уд} \sim v_{тепл} \sim \sqrt{T}$ . Но  $v_{уд} \sim n$ . Значит,

$$n\sqrt{T} = \text{const}, \text{ или } \frac{N}{V}\sqrt{T} = \text{const}.$$

Отсюда получаем  $T \sim V^2$ . Но для 1 моля газа  $pV = RT$ . Следовательно,  $p \sim V$ .

На малом участке этого процесса получаемое газом количество теплоты равно

$$Q = \frac{3}{2}R\Delta T + p\Delta V = \frac{3}{2}R\Delta T + \frac{RT}{V}\Delta V.$$

Для зависимости  $T \sim V^2$  получим  $\frac{\Delta T}{T} = 2 \frac{\Delta V}{V}$ . Тогда

$$Q = \frac{3}{2} R \Delta T + R \Delta T \frac{\Delta V}{V} \frac{T}{\Delta T} = \left( \frac{3}{2} R + \frac{R}{2} \right) \Delta T = 2 R \Delta T.$$

Отсюда теплоемкость газа равна

$$C = \frac{Q}{\Delta T} = 2R \approx 16,6 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}).$$

3. Рафаилов

**Ф1947.** В легком тонкостенном сосуде мы нагреваем при помощи кипятильника 1 литр воды. Температура достигает  $60^\circ\text{C}$  и никак дальше не растет. Нам надоело, и мы выключаем нагреватель. За первые 20 секунд вода остывает на 2 градуса. На упаковке кипятильника было написано: «500 ватт, сделано в Китае». Сколько ватт содержит «китайский ватт»?

При предельной температуре мощность потерь равна мощности кипятильника. Если считать изменение температуры  $\Delta T = 2$  градуса небольшим (чтобы не изменилась заметно мощность потерь), то эту мощность можно посчитать:

$$P = \frac{cm\Delta T}{\tau} = \frac{4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}) \cdot 1 \text{ кг} \cdot 2 \text{ К}}{20 \text{ с}} = 420 \text{ Вт}.$$

Итак, один «китайский ватт» содержит  $\frac{420}{500} = 0,84$  ватта.

О. Простов

**Ф1948.** Три тонкие пластины в виде кругов диаметром  $D$  расположены параллельно друг другу, расстояние между соседними пластинами  $d$  ( $d \ll D$ ). Средняя пластина равномерно заряжена по поверхности зарядом  $2Q$ , крайние – также равномерно, но зарядами противоположного знака по  $-Q$  каждая. Найдите потенциалы центров пластин. Других тел рядом нет.

Рассмотрим вначале простую систему из двух таких пластин, заряженных равномерно по поверхности зарядами  $Q$  и  $-Q$  (рис.1). Возьмем точку  $A$  – она находится в самом центре системы. Ясно, что ее потенциал  $\phi_A = 0$  (потенциалы от всех зарядов системы компенсируются точно именно для этой точки). Поле на оси системы можно считать однородным (при  $d \ll D$ ), его напряженность равна  $E = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$ , и потенциал пластины с зарядом  $Q$  равен теперь

$$\phi_A + E \frac{d}{2} = 0 + \frac{Qd}{2\epsilon_0 S}.$$

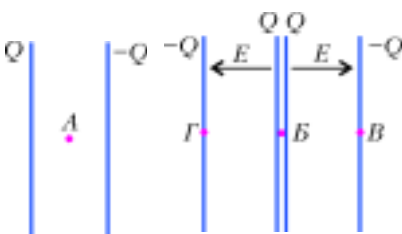


Рис. 1

Рис. 2

Система пластин, описанная в условии задачи, представляет «сумму» двух рассмотренных нами систем из двух пластин каждая – потенциал центра средней пластины равен сумме потенциалов

каждого из двух полей. Тогда (рис.2)

$$\phi_B = 2 \frac{Qd}{2\epsilon_0 S} = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}.$$

Поля в промежутках между пластинами такие же, как в описанном выше случае. Поэтому

$$\phi_B = \phi_\Gamma = \phi_B - Ed = 0.$$

Итак, потенциалы центров крайних пластин равны нулю, потенциал центра средней пластины равен

$$\phi_B = \frac{Qd}{\epsilon_0 S} = \frac{4Qd}{\epsilon_0 \pi D^2}.$$

Видно, что в описанной системе поля на ее оси снаружи получаются совсем малыми – поля пластин очень хорошо друг друга компенсируют.

А. Повторов

**Ф1949.** Мостик из четырех резисторов подключен к батарее. К диагонали мостика подключили последовательно соединенные другую батарею – ее напряжение известно и составляет 12 В – и амперметр. Показания прибора при этом составили 5 мА. После того, как мы поменяли местами выводы батарейки на 12 В, ток через амперметр поменял направление и стал равен 35 мА. Потом поменяли местами батарейки – ток амперметра упал до нуля. Что покажет прибор, если одну из батареек теперь включить «наоборот» (поменять местами выводы)?

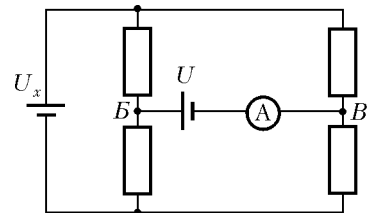


Рис. 1

Представим цепь из батарейки напряжением  $U_x$  и резисторов мостика (рис.1) в виде «эквивалентного источника» с напряжением  $U_\Delta$  и внутренним сопротивлением  $r_\Delta$  (рис.2). Ясно, что  $U_\Delta = kU_x$ . Понятно, что при изменении ЭДС батареек (например – изменение полярности, замена одной батарейки на другую) внутреннее сопротивление  $r_\Delta$  не меняется. Тогда

$$\frac{|U_\Delta + U|}{r_\Delta} = I_1, \quad \frac{|U_\Delta - U|}{r_\Delta} = I_2,$$

где  $U = 12$  В и  $U_\Delta < 12$  В (ток менял направление). Получаем

$$\frac{U + U_\Delta}{U - U_\Delta} = \frac{35 \text{ мА}}{5 \text{ мА}} = 7, \quad U_\Delta = 9 \text{ В}, \quad kU_x = 9 \text{ В}.$$

После смены батареек местами ток стал ненулевым, поэтому  $kU = U_x$ , и можно найти  $k$  и  $U_x$ :

$$k \cdot 12 = U_x, \quad kU_x = 9,$$

$$k^2 = \frac{3}{4}, \quad k = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad U_x = kU = 6\sqrt{3} \text{ В}.$$



Теперь найдем ток после «переполюсовки»:

$$I = \frac{kU + U_2}{r_2} = \frac{kU + U_x}{U - kU_x} I_2 = 20\sqrt{3} \text{ мА} \approx 34,6 \text{ мА}.$$

Р.Александров

**Ф1950.** Из куска тонкого провода, имеющего сопротивление  $r = 100 \text{ Ом}$ , сделали квадратный контур и охватили им длинный соленоид, по которому пропускают изменяющийся со временем по линейному закону ток. Ток в контуре составил при этом  $I = 5 \text{ мА}$ . Какое напряжение покажет вольтметр, включенный вместе одной из сторон квадрата? Что будет показывать этот вольтметр в другом случае – если сторону квадратного контура не убирать, а просто подключить вольтметр короткими проводами к концам этой стороны? Сопротивление вольтметра  $R = 1000 \text{ Ом}$ .

Будем считать, что токи, текущие по проводникам, сами не создают заметных магнитных полей (большое сопротивление контура), и пренебрежем дополнительным магнитным потоком от этих токов – мы пренебрегаем при этом самоиндукцией. Найдем ЭДС индукции:

$$\frac{\mathcal{E}}{r} = I, \quad \mathcal{E} = rI = 0,5 \text{ В}.$$

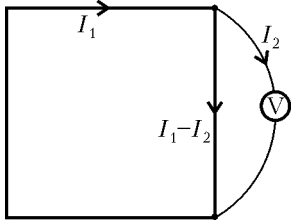
Когда мы включили вместо «четвертушки» контура вольтметр, ток в цепи стал равным

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{\frac{3}{4}r + R} = I \frac{r}{\frac{3}{4}r + R} = 0,465 \text{ мА}.$$

Вольтметр при этом покажет

$$U_1 = I_1 R = 0,465 \text{ В}.$$

Рассмотрим последний случай (см. рисунок): через вольтметр течет ток  $I_2$ , ток во внешней цепи  $I_1$ . Тогда



$$\mathcal{E} = \frac{3}{4}rI_1 + \frac{r}{4}(I_1 - I_2),$$

$$\mathcal{E} = \frac{3}{4}rI_1 + RI_2.$$

Собственно, нам нужно найти  $RI_2$ . Перепишем уравне-

ния в виде

$$\mathcal{E} = rI_1 - \frac{r}{4}I_2, \quad \mathcal{E} = \frac{3}{4}rI_1 + RI_2$$

и исключим из них  $I_1$ :

$$\mathcal{E} = 4RI_2 + \frac{3}{4}rI_2 = RI_2 \left( 4 + \frac{3}{4} \frac{r}{R} \right),$$

откуда

$$U_2 = RI_2 = 0,1227 \text{ В}.$$

Можно посчитать ответ и проще – заменить параллельно соединенные сопротивления  $\frac{r}{4}$  и  $R$  одним резистором и найти токи. Ответ получится тот же.

А.Старов

**Ф1951.** Одинаковые конденсаторы емкостью  $C$  каждый соединяют последовательно, а крайние выводы получившейся цепочки подключают к зажимам после-

довательно соединенных батареек напряжением  $U$  слева и  $2U$  справа (рис.1). Немного подождав, между точками  $A$  и  $B$  включают катушку индуктивностью  $L$ . Найдите максимальное значение силы тока через катушку. Найдите также максимальные заряды конденсаторов. Сопротивление проводов считать малым (но не нулевым!). Батарейки, конденсаторы и катушку считать идеальными.

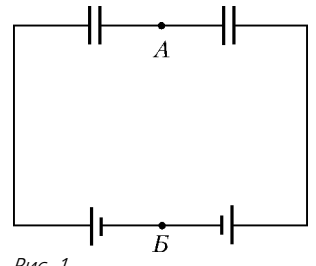


Рис. 1

При подключении конденсаторов к батарейкам произойдет быстрый процесс – в результате заряды конденсаторов установятся до  $q_0 = 0,5CU$ , в цепи выделится некоторое количество теплоты (в сопротивлении проводов, его можно посчитать, но для решения этой задачи это не нужно). После подключения катушки заряды конденсаторов будут меняться, но сумма их напряжений останется неизменной – значит, дополнительные заряды будут одинаковы, мы их обозначим  $Q$  (рис.2).

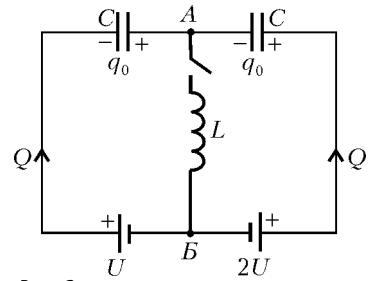


Рис. 2

Токи в цепи теперь ограниченные (не такие большие, как при начальном этапе), и можно пренебречь тепловыми потерями за первый период колебаний (все интересное произойдет за этот период!). Работа батареек равна

$$A_1 + A_2 = QU + Q \cdot 2U = 3QU.$$

Начальная энергия была

$$W_n = 2 \frac{q_0^2}{2C}.$$

Обозначим ток катушки  $I$ , тогда, в соответствии с законом сохранения энергии, можно записать

$$W_n + A_1 + A_2 = \frac{(-0,5CU + Q)^2}{2C} + \frac{(0,5CU + Q)^2}{2C} + \frac{LI^2}{2}.$$

Теперь найдем максимальный ток катушки. При максимальном токе  $I_m$  ЭДС индукции обратится в ноль, напряжения конденсаторов составят  $U$  и  $2U$ , тогда  $Q_1 = 1,5CU$ , и энергетическое уравнение запишется так:

$$0,25CU^2 + 1,5CU^2 + 3CU^2 = \frac{CU^2}{2} + 2CU^2 + \frac{LI_m^2}{2}.$$

Отсюда

$$I_m^2 = \frac{9}{2} \frac{C}{L} U^2, \quad \text{и} \quad I_m = 3U \sqrt{\frac{C}{2L}}.$$

Максимальные заряды (и минимальные тоже) получают при  $I = 0$ . Тогда запишем

$$0,25CU^2 + Q_2U + Q_2 \cdot 2U = \frac{(-0,5CU + Q_2)^2}{2C} + \frac{(0,5CU + Q_2)^2}{2C}.$$

После простых преобразований получим

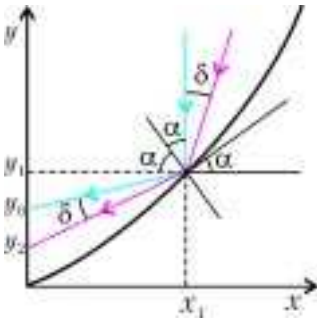
$$Q_2^2 = 3CUQ_2, \text{ откуда } Q_2 = 0 \text{ или } Q_2 = 3CU.$$

Первый корень дает  $Q_{\min}$ , второй —  $Q_{\max}$ . Следовательно, максимальные заряды конденсаторов будут равны  $2,5CU$  и  $3,5CU$ .

*Примечание.* Ответ  $Q_2 = 3CU$  можно было угадать: ясно, что в цепи происходят гармонические колебания, максимальный ток соответствует заряду  $1,5CU$  — до «максимума» должен пройти еще такой же заряд.

З.Рафаилов

**Ф1952.** В фокусе большого параболического отражателя находится точечный источник радиоволн частотой  $f = 1000$  МГц, диаметр параболического отражателя  $D = 6$  м. Из-за дифракции система излучает расходящийся пучок волн. На сколько нужно отодвинуть источник вдоль оси параболоида, чтобы расходимость пучка увеличилась примерно в три раза?



Пусть парабола (параболоид в разрезе) описывается выражением  $y = Ax^2$  (см. рисунок). Рассмотрим луч, падающий в точку  $x_1$ .

Наклон параболы в этой точке (он нам нужен для определения угла падения луча) определится производной:

$$\frac{dy}{dx} = 2Ax_1 = \operatorname{tg} \alpha.$$

Найдем теперь положение точки  $y_0$ :

$$\begin{aligned} y_0 &= y_1 - x_1 \operatorname{tg}(2\alpha - 90^\circ) = Ax_1^2 - x_1 \operatorname{ctg} 2\alpha = \\ &= Ax_1^2 - x_1 \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha} = Ax_1^2 - x_1 \frac{1 - (2Ax_1)^2}{4Ax_1} = \frac{1}{4A} = F. \end{aligned}$$

Видно, что все лучи, идущие параллельно главной оси параболоида, сходятся в точку  $F$  (фокус), и ясно, — где он находится. Вообще-то, нам нужно излучать радиоволны, а не принимать, но обратимость лучей позволяет нам выбрать любой из этих случаев.

Итак, пусть луч падает в ту же точку параболоида, но

под малым углом  $\delta$  к его оси. Найдем положение точки  $y_2$ , точнее — длину отрезка  $y_0 y_2$ :

$$\begin{aligned} \Delta &= y_0 - y_2 = x_1 \operatorname{tg}(2\alpha - 90^\circ) - x_1 \operatorname{tg}(2\alpha - 90^\circ + \delta) = \\ &= x_1 (\operatorname{ctg} 2\alpha - \operatorname{ctg}(2\alpha + \delta)) \approx \frac{x_1 \delta}{\sin^2 2\alpha} \end{aligned}$$

(для нахождения малого приращения функции мы использовали производную). Видно, что при падении луча под данным углом  $\delta$  в разные точки параболоида мы получаем различные значения смещения  $\Delta$ . Нам нужно найти такое место падения луча, чтобы сделать  $\Delta$  наименьшим для данного угла  $\delta$ . Это и будет смещение источника радиоволн относительно фокуса параболоида, обеспечивающего данный угол расхождения пучка. Выразим величину  $\Delta$  через угол  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} 2Ax_1 &= \operatorname{tg} \alpha, \quad x_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2A}, \\ \Delta &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2A} \delta \frac{1}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{\delta}{8A \sin \alpha \cos^3 \alpha}. \end{aligned}$$

Найдем максимальное значение знаменателя:

$$\begin{aligned} (\sin \alpha \cos^3 \alpha)'_{\alpha} &= \cos^4 \alpha - 3 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = \\ &= \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha) = 0, \end{aligned}$$

откуда, ясно, что  $\operatorname{tg} \alpha \approx \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Таким образом, самое большое расхождение пучка получится при отражении от точки, где  $\alpha = 30^\circ$ :

$$\Delta = \frac{\delta}{8A \cdot 0,5 \cdot (\sqrt{3}/2)^3} = \delta \frac{1}{4A} \frac{8}{3\sqrt{3}} = \delta F \frac{8}{3\sqrt{3}}.$$

Определим теперь угол  $\delta$ : дифракционное расхождение пучка, исходящего из фокуса параболоида, составляет  $\delta_0 \approx \frac{\lambda}{D} = \frac{0,3}{6} = \frac{1}{20}$  радиана (для круглого отверстия в экране угол немного другой:  $\delta^* \approx \frac{1,22\lambda}{D}$ , но нам достаточно и грубой оценки). Тогда  $\delta = 2\delta_0 \approx 0,1$ , и

$$\begin{aligned} \text{смещение } \Delta &= 0,1F \frac{8}{3\sqrt{3}} \approx 0,15F. \end{aligned}$$

Итак, особенно точной установки излучателя в фокус антенны не потребуется.

З.Волнов

## НАМ ПИШУТ

В «Кванте» №4 за 1999 год была опубликована следующая задача.

М1692. Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  — длины сторон треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{a^2 + 2bc}{b^2 + c^2} + \frac{b^2 + 2ac}{c^2 + a^2} + \frac{c^2 + 2ab}{a^2 + b^2} > 3.$$

Возникает естественный вопрос о верхней границе. Используя теорему косинусов и тождество

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

при  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + 2bc}{b^2 + c^2} + \frac{b^2 + 2ac}{c^2 + a^2} + \frac{c^2 + 2ab}{a^2 + b^2} &= \\ &= \frac{2bc}{b^2 + c^2} (1 - \cos \alpha) + \frac{2ac}{c^2 + a^2} (1 - \cos \beta) + \\ &+ \frac{2ab}{a^2 + b^2} (1 - \cos \gamma) + 3 \leq 5 - 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} < 5. \end{aligned}$$

Отметим, что обе оценки — нижняя и верхняя — точны: для доказательства достаточно рассмотреть семейство треугольников с длинами сторон 1, 1,  $x$ .

Г.Карнаух



Победители конкурса  
«Задачник «Кванта»  
2004 года



***Первое место заняли***

по математике

Ливинский Иван – Украина, г.Киев,  
лицей «Научная смена»,  
Кузнецов Василий – Украина, г.Киев,  
лицей 171 «Лидер»;

по физике

Зеленский Павел – Украина, г.Днепропетровск, лицей НИТ 2,  
Арзамасов Вадим – г.Чебоксары, лицей 3,  
Аскарян Владимир – г.Волгодонск, школа 24.

***Второе место заняли***

по математике

Гутник Михаил – Украина, г.Донецк, лицей «Эрудит»,  
Красильников Александр – г.Ульяновск, гимназия 79;

по физике

Горбенко Ярослав – г.Чебоксары, лицей 3,  
Баранов Артем – г.Каменка Пензенской обл., школа 4.

***Третье место заняли***

по математике

Ляшко Андрей – г.Балашов Саратовской обл., ГПЛ;

по физике

Репринцева Людмила – г.Волжский, школа 30 им. С.Р.Медведева,  
Парамонов Евгений – г.Чебоксары, лицей 3.

***Кроме того, в число победителей вошли***

по математике

Бударагин Дмитрий – г.Нижний Новгород, лицей 40,  
Есин Алексей – ст. Старонижестеблиевская Краснодарского кр., школа 55,  
Новоженин Егор – г.Новосибирск, гимназия 3,  
Еремин Алексей – г.Краснодар, школа 47,  
Ампилогов Антон – г.Краснодар, лицей ИСТЭК,  
Мамбетов Бектур – Киргизия, г.Бишкек, ФМЛ 61,  
Путин Никита – г.Пермь, ПГУ,  
Чуклин Александр – Украина, г.Севастополь, гимназия 1,  
Уланов Максим – г.Протвино Московской обл., СУНЦ МГУ,  
Строгальщиков Дмитрий – г.Миасс, школа 9;

по физике

Светличный Павел – г.Волжский, школа 30,  
Ливинский Иван – Украина, г.Киев, лицей «Научная смена»,  
Афанасьев Александр – г.Владивосток, гимназия 1,  
Дьяков Антон – г.Армавир, школа 9,  
Василенко Денис – г.Армавир, школа 9.

***Победители, занявшие первые места по математике и физике, награждаются комплектами журнала «Квант» за второе полугодие 2005 года.***



# Задачи

1. Из репортажа корреспондента журнала «True-False»:

«Я вместе с рыцарями и лжецами лечу на борту воздушного лайнера. Вы, конечно, знаете, что рыцари всегда говорят правду, а лжецы — безбожно лгут... На



мой вопрос: «Сколько же здесь лжецов?» каждый из моих попутчиков отвечал: «Лжецов в салоне нечетное количество». После чего махал мне ручкой и выпрыгивал с парашютом. И вот я остался один...»

Можно ли доверять корреспонденту журнала «True-False»?

*А.Жуков*

2. Когда Торопыжка хочет записать какую-нибудь дату, он пишет число и номер месяца (именно в таком порядке) арабскими цифрами, не оставляя между ними пробела, не помещая никакого разделительного



знака и не ставя нулей в начале числа. Сколько дат в году нельзя различить при такой форме записи?

*М.Ахмеджанова*

3. На Поле Чудес мышиные норки расположены на различных расстояниях друг от друга, причем от каждой норки к ближайшей к ней по прямой линии протоптана тропинка.



Какое наибольшее число тропинок может подходить к какой-либо норке?

*А.Ряховский*

4. Чичиков покупал у Плюшкина беглые души. Если бы он купил столько душ, сколько копеек заплатил за каждую, то Плюшкину досталось бы больше десяти рублей. А если бы он за каждую душу заплатил столько копеек, сколько купил душ, то Плюшкин получил бы



больше шестидесяти рублей.

Сколько душ и по какой цене купил Чичиков, если он израсходовал на это не более 25 рублей?

*И.Акулич*

5. 50 синих и 50 красных точек разделили окружность на 100 равных дуг. Докажите, что прямоугольных треугольников, все вершины которых красные, существует столько же, сколько прямоугольных треугольников, все вершины которых синие.

*В.Произволов*



# Треугольники на шахматной доске

И. АКУЛИЧ

КАЖДОМУ ИЗВЕСТНО: ШАХМАТНАЯ ДОСКА — КВАДРАТНАЯ и все поля на ней квадратные, так о каких треугольниках вообще можно толковать? А между тем... почему бы и нет? Возьмем центры трех любых полей, соединим их — вот и треугольник. Именно о них и поговорим.

Летом 2003 года на заключительном этапе Конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8» была предложена следующая задача:

*Какое наибольшее число клеток шахматной доски можно отметить, чтобы не нашлось ни одного прямоугольного треугольника с вершинами в центрах отмеченных клеток?*

Решение ее таково.

Рассмотрим сначала все горизонтали доски, в каждой из которых отмечено не менее двух клеток. Пусть таких горизонталей  $m$  (ясно, что  $0 \leq m \leq 8$ ), и всего в них отмечено  $M$  клеток. Закрасим все эти  $M$  клеток в красный цвет. Заметим, что на одной вертикали с любой красной клеткой  $Q$  не может находиться ни одной отмеченной клетки (в противном случае появится прямоугольный треугольник со сторонами, параллельными сторонам доски; вершины его — красная клетка  $Q$  и отмеченная клетка, лежащие на одной вертикали, а также любая другая красная клетка на одной горизонтали с клеткой  $Q$ ).

Рассмотрим также все вертикали доски, в каждой из которых отмечено не менее двух клеток. Пусть таких

вертикалей  $n$  ( $0 \leq n \leq 8$ ), и всего в них отмечено  $N$  клеток. Закрасим все эти  $N$  клеток в синий цвет. Аналогично предыдущему случаю, можно убедиться, что на одной горизонтали с любой синей клеткой не может находиться ни одной отмеченной клетки.

Кроме красных и синих, на доске могут оказаться еще какие-то отмеченные клетки — закрасим их в желтый цвет. Заметим, что в строке или столбце с желтой клеткой не может быть никакой другой отмеченной клетки — иначе эта пара клеток была бы окрашена в красный или синий цвет. Пусть желтых клеток имеется  $K$ .

Понятно, что суммарное число отмеченных клеток

$$x = M + N + K.$$

Рассмотрим все вертикали доски.  $M$  из них «заняты» красными клетками (ибо, как показано выше, на одной вертикали с красной клеткой не может быть никаких других отмеченных клеток). Кроме того, в  $n$  вертикалях находятся синие клетки. А так как всего на доске 8 вертикалей, то желтые клетки могут быть только на оставшихся  $(8 - M - n)$  вертикалях, причем не более чем по одной клетке на каждой вертикали. Поэтому

$$K \leq 8 - M - n.$$

Если рассмотреть все горизонтали доски, аналогичными рассуждениями придем к неравенству

$$K \leq 8 - N - m.$$





Следовательно, получаем два неравенства для суммарного числа клеток  $x$ :

$$x = M + N + K \leq M + N + (8 - M - n) = 8 + N - n,$$

$$x = M + N + K \leq M + N + (8 - N - m) = 8 + M - m.$$

Если  $n = 0$ , т.е. вертикалей с синими клетками не имеется, то и синих клеток нет, т.е.  $N = 0$ . Но тогда из первого неравенства получаем  $x \leq 8 + 0 - 0 = 8$ . Таким образом, при отсутствии синих клеток общее число отмеченных клеток не превысит 8. Аналогично, используя второе неравенство, можно показать, что при отсутствии красных клеток ( $m = 0$ ) общее число отмеченных клеток также не превысит 8. Ну, а если имеются и синие, и красные клетки — что тогда?

Обсудим этот вариант. Пусть  $n \geq 1$  и  $m \geq 1$ . Так как в каждой горизонтали не может быть больше одной синей клетки, то общее число синих клеток не превышает общего числа горизонталей, т.е.  $N \leq 8$ , поэтому получаем  $x \leq 8 + N - n \leq 8 + 8 - 1 = 15$ . Заметим, что максимальное значение 15 достигается, очевидно, при  $n = 1$  и  $N = 8$ . Но это означает, что имеется единственная вертикаль с синими клетками, причем синими являются все 8 клеток этой вертикали! А так как на одной горизонтали с любой синей клеткой не может быть других отмеченных клеток, то красных клеток вовсе нет, и  $m = 0$ . Но это противоречит рассматриваемому нами случаю, для которого должно быть  $m \geq 1$ . Поэтому значение 15 недостижимо.

Итак, всего отмеченных клеток меньше 15, т.е. не больше 14. С другой стороны, в соответствии с условием задачи можно расставить ровно 14 клеток. Как это сделать — показано на рисунке 1 (для наглядности клетки здесь раскрашены в красный и синий цвета — в соответствии с приведенными рассуждениями, а желтых не оказалось вовсе). Легко видеть, что действительно нет ни одного прямоугольного треугольника с вершинами в отмеченных клетках (даже таких, у которых катеты не параллельны сторонам доски, хотя при решении мы об этом и не упоминали). В самом деле, если взять любые три клетки одного цвета, то треугольник получится вырожденный (три вершины лежат на одной прямой), а если выбрать две клетки одного цвета и одну — другого, то он будет тупоугольный.

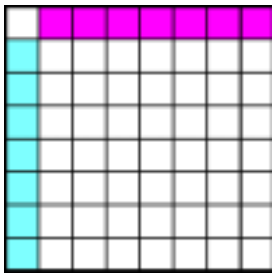


Рис. 1

Ясно, что задача естественным образом обобщается и на случай доски со стороной не 8, а  $p$  клеток, и ответ таков: наибольшее число отмеченных клеток равно  $2p - 2$ .

Естественно возникает вопрос: а ведь бывают и другие треугольники — остроугольные, тупоугольные, вырожденные, и интересно, каков будет ответ в аналогичной задаче для них? Таким образом, одна задача породила еще три, из которых в общем виде (т.е. для досок размером  $p \times p$ ) удалось одолеть... только одну. Негусто? Верно. Зато какой простор для творчества!

Наиболее легкой оказалась задача для тупоугольных треугольников (и, кстати, была предложена на заочном туре Конкурса «Математика 6–8» — см. «Квант» №1). Как ни странно, особенности шахматной доски в решении практически не используются, а на первое место выступают обычные геометрические соображения.

Для шахматной доски ответ таков: 8 клеток. За примером далеко ходить не надо: достаточно отметить все клетки любой вертикали или любой горизонтали, либо же одной из двух больших диагоналей. Тогда центры любых трех клеток будут лежать на одной прямой, и все треугольники будут вырожденные.

Докажем, что больше 8 клеток отметить нельзя. Используем метод «от противного». Допустим, что удалось все-таки отметить не менее 9 клеток с соблюдением требований условия. Очевидно, центры всех этих девяти клеток не могут лежать на одной прямой — размеры доски не позволяют. Выберем из отмеченных клеток только 6, но таких, что не все центры этих клеток лежат на одной прямой (то, что такие 6 клеток можно выбрать, также легко доказать «от противного»: если предположить, что центры любых шести клеток лежат на одной прямой, то отсюда быстро следует, что центры всех имеющихся клеток лежат на одной прямой — противоречие!). А далее абстрагируемся от шахматной доски, т.е. докажем более общую теорему.

**Теорема.** Пусть на плоскости лежат 6 попарно несовпадающих точек, причем не все они лежат на одной прямой. Тогда найдется тупоугольный треугольник с вершинами в каких-то трех из этих точек.

Рассмотрим несколько случаев.

1) Среди данных шести точек найдутся по крайней мере четыре, лежащие на одной прямой (обозначим эту прямую  $l$ , а точки назовем *сидящими*). Возьмем любую точку  $A$ , не лежащую на  $l$  (такая точка непременно есть, так как не все точки лежат на одной прямой). Опустим из нее перпендикуляр  $AB$  на прямую  $l$ . Точка  $B$  может совпасть с одной из сидящих точек, но может и не совпасть. В любом случае хотя бы 3 из сидящих точек не совпадут с точкой  $B$ , и по крайней мере 2 из этих трех точек окажутся по одну сторону от точки  $B$ . Пусть это точки  $C$  и  $D$ , причем, для определенности, точка  $C$  находится ближе к точке  $B$ , чем точка  $D$ . Тогда треугольник  $ACD$  тупоугольный. Убедиться в этом легко. В самом деле, треугольник  $ABC$  прямоугольный, поэтому прилегающий к гипотенузе  $AC$  угол  $ACE$  острый. Но тогда смежный с ним угол  $ACD$  тупой, и треугольник  $ACD$  тупоугольный.

2) Никакие 4 точки не лежат на одной прямой, но есть 3 точки, сидящие на одной прямой  $l$ . Обозначим их  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (точка  $B$  лежит между точками  $A$  и  $C$ ). Возьмем любую из остальных трех точек (обозначим ее  $D$ ) и опустим перпендикуляр  $DE$  на прямую  $l$ . Если точка  $E$  не совпала ни с одной из точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , то какие-то две из них лежат по одну сторону от точки  $E$ . Но тогда, аналогично предыдущему случаю, появится тупоугольный треугольник! Заметим, что тупоугольный треугольник обнаружится и в случае, когда точка  $E$  совпадет с точкой  $A$  или  $C$  (ибо опять найдутся две точки на



прямой /по одну сторону от  $E$ ). Поэтому единственная возможность — чтобы точка  $E$  совпала с  $B$ , т.е. произвольная точка, не лежащая на  $l$ , должна спроектироваться в точку  $B$ . Разумеется, это верно для любой из трех точек, не лежащих на  $l$ . Но тогда эти 3 точки вместе с точкой  $B$  образуют четверку точек, лежащих на одной прямой, перпендикулярной  $l$ . Противоречие с рассматриваемым случаем.

3) Никакие 3 точки не лежат на одной прямой. Проведем всевозможные отрезки, попарно соединяющие наши 6 точек. Эти отрезки ограничивают некоторый выпуклый многоугольник, причем часть точек может лежать внутри него (иногда говорят: *натянем выпуклую оболочку* на данные 6 точек — по смыслу то же самое). Здесь опять же возможны несколько вариантов.

а) 3 точки являются вершинами треугольника, а остальные 3 лежат внутри треугольника. Выберем любую из внутренних точек и соединим ее отрезками с вершинами треугольника. Сумма трех образовавшихся углов равна  $360^\circ$ , поэтому среди них непременно есть тупой угол, что порождает наличие тупоугольного треугольника. Если же предположить, что один из углов развернутый, то тогда, очевидно, имеются три точки, лежащие на одной прямой, что недопустимо.

б) 4 точки являются вершинами выпуклого четырехугольника, а остальные 2 лежат внутри четырехугольника. Выберем любую из внутренних точек и соединим ее отрезками с вершинами четырехугольника. Сумма четырех образовавшихся углов равна  $360^\circ$ . Если все они прямые, то тогда, очевидно, объявятся три точки, лежащие на одной прямой, что недопустимо, поэтому среди них непременно есть тупой угол, что порождает наличие тупоугольного треугольника.

в) 5 точек являются вершинами выпуклого пятиугольника, а шестая лежит внутри. Здесь ситуация еще проще. Сумма внутренних углов при вершинах пятиугольника равна, как известно,  $540^\circ$ . Поэтому среди них непременно найдется тупой угол (иначе сумма углов не превышала бы  $90^\circ \times 5 = 450^\circ$ ). Следовательно, вершина с тупым углом при ней вместе с двумя соседними вершинами как раз и являются вершинами тупоугольного треугольника.

г) Все 6 точек являются вершинами выпуклого шестиугольника. Здесь рассуждения аналогичны. Сумма внутренних углов при вершинах шестиугольника равна  $720^\circ$ . Поэтому среди них непременно найдется тупой угол (иначе сумма углов не превышала бы  $90^\circ \times 6 = 540^\circ$ ). Значит, вершина с тупым углом при ней вместе с двумя соседними вершинами как раз и являются вершинами тупоугольного треугольника.

Если же обобщить задачу на случай квадрата  $p \times p$ , то ответ, естественно, будет таков: при  $p = 2$  можно отметить все 4 клетки; при  $p = 3$  и 4 число отмеченных клеток возрастает до 5 — пример приведен на рисунке 2. Если же  $p \geq 5$ , то отме-

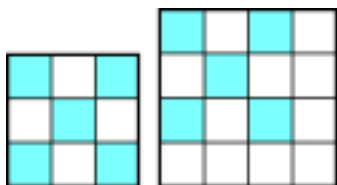


Рис. 2

тить можно  $p$  клеток — все клетки любой вертикали, горизонтали или большой диагонали.

Теперь перейдем к неподдавшимся задачам. Начнем с более простой (во всяком случае, на первый взгляд) — с вырожденными треугольниками. Легко найти ограничение сверху. Так как в каждой строке может быть отмечено не больше двух клеток (иначе три отмеченные клетки в строке мгновенно порождают вырожденный треугольник), то суммарное число отмеченных клеток для шахматной доски не превышает  $2 \times 8 = 16$  (а для доски  $p \times p$  — очевидно,  $2p$  клеток). Для шахматной доски это значение достигается — пример см. на рисунке 3.

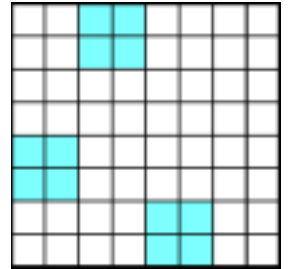


Рис. 3

Имеются и другие способы отметить 16 клеток, но гораздо менее симпатичные. Так что для шахматной доски задача решена полностью. Что касается доски  $p \times p$ , то с помощью компьютера был произведен поиск способов раскраски  $2p$  клеток для  $p$  от 2 до 13. Оказалось, что такой способ существует для всех этих  $p$ . Что касается  $p > 13$ , то пока остается только развести руками. И даже не ясно, куда следует направить усилия: на поиск неких общих способов раскраски  $2p$  клеток, либо на поиск каких-то дополнительных ограничений для больших  $p$ .

Наконец, самый крепкий орешек — остроугольные треугольники. Начнем опять же с шахматной доски (эта задача была предложена в КМШ — см. «Квант» № 2 за 2004 г.). Не составляет труда отметить 16 клеток — все клетки любых двух соседних вертикалей или горизонталей. После этого возможность отметить большее число клеток представляется если и не безнадёжной, то весьма маловероятной. И тем не менее, такая возможность есть! Как можно отметить 17 клеток — см. рисунок 4.

С помощью компьютера было проверено (ох, и долго же он мучился!), что 18 клеток отметить невозможно, но это, к сожалению, никак нельзя считать доказательством.

Если же говорить об обобщении нашей задачи для квадрата  $p \times p$ , то такой «Z-образный» принцип можно использовать для всех  $p \geq 5$ . Для  $p = 3$  и 4 он не годится (для них, по-видимому, максимальным значением будет 6 и 8 клеток соответственно — т.е. 2 соседние строки или 2 столбца), а для  $p = 2$  ответ очевиден: можно отметить все 4 клетки доски.

Как видим, дела с вырожденными и остроугольными треугольниками не блестящи. Но, учитывая незаурядный уровень интеллекта и великую изобретательность наших читателей, мы можем надеяться, что они сумеют разобрать эти задачи по косточкам. И заодно обобщить их на случай произвольных прямоугольных досок (а не только квадратных). Ждем результатов!

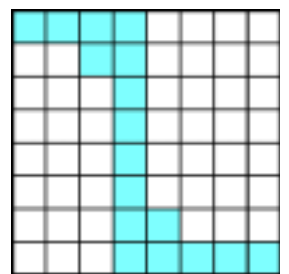


Рис. 4

# Херувимы, серафимы, самолеты...

**А. СТАСЕНКО**



Рис. 2. Штурмовик Сухого



Рис. 3. Сверхтяжелый транспортный самолет «Мрия», транспортирующий «Буран»

УЖЕ В ДРЕВНОСТИ КРЫЛЬЯ И ОГОНЬ СЧИТАЛИСЬ НЕОБХОДИМЫМИ атрибутами всего, что летает. Например: «...вдруг явилась колесница огненная и кони огненные ...и понесся Илья в вихре на небо». Подобных свидетельств много в Священных Писаниях, но наиболее детальное (просто – поразительно подробное) описание крылатого летательного аппарата дано в книге Пророка Иезекииля. Приведем наиболее существенные цитаты из этой книги:

«И видел я ...облако наполнило внутренний двор.

...и Дом наполнился облаком, и двор наполнился сиянием славы Господа. И шум от крыльев херувимов слышен был даже на внешнем дворе, как бы глас Бога Всемогущего, когда он говорит.

И видел я: и вот четыре колеса подле херувимов, по одному колесу подле каждого херувима... И по виду все четыре сходны...

Когда шли херувимы, тогда шли подле них и колеса; и когда херувимы поднимали крылья свои, чтобы подняться от земли, и колеса не отделились, но были при них.

У каждого – по четыре лица, и у каждого – по четыре крыла...

И видел я, и вот на своде, который над главами херувимов, как бы камень сапфир, как бы нечто похожее на престол, видно было над ними. И говорил Он...: войди между колесами под херувимов и возьми полную пригоршню горящих угольев...

И подняли херувимы крылья свои и поднялись в глазах моих от земли; когда они уходили, то и колеса подле них...

...И отошло от меня видение, которое я видел».

В свете этого свидетельства древнего пророка рассмотрим изображения самолетов только что ушедшего века (который вполне можно назвать веком авиации).

На рисунках 1–3 представлены летательные аппараты различных поколений. Полюбуйтесь деталями этих машин. Тут видны и «пары крыльев», и по «четыре лица» (воздухозаборники двигателей), и колеса, и «сапфир» наверху (остекление кабины). Из всех этих элементов вполне можно «собрать» то, что видел Иезекииль (попробуйте сделать это – и вы получите удовольствие).



Рис. 1. Один из первых одноместных бипланов

Конечно, для взлета этих аппаратов требуются весьма протяженные аэродромы. При разбеге по достижении определенной скорости подъемная сила превосходит вес (точнее – силу тяжести), и самолет отрывается от земли.

В качестве платы за подъемную силу крыла выступает сила сопротивления. Обе эти составляющие аэродинамической силы  $F_a$  (рис. 4) пропорциональны произведению  $\rho v^2$ , где  $\rho$  – плотность воздуха,  $v$  – скорость самолета, на некую площадь.

Для подъемной силы естественно взять площадь крыла  $S$ , а для силы лобового сопротивления – площадь вертикального силуэта летательного аппарата  $S_{\perp}$ . Тогда

$$F_y \sim \rho v^2 S, \quad F_x \sim \rho v^2 S_{\perp}.$$

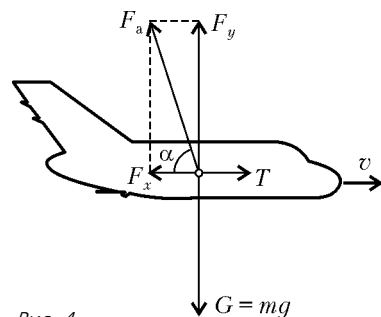
Отношение этих сил называется аэродинамическим качеством летательного аппарата:

$$K = \frac{F_y}{F_x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Прелесть крыла состоит в том, что это качество (у современных машин) составляет величину порядка 10–15. Значит, в горизонтальном полете двигатели должны создавать силу тяги  $T = F_x$ , на порядок меньшую веса летательного аппарата  $G = F_y$ , так что предыдущее равенство можно записать в виде

$$K = \frac{G}{T}.$$

Но в ряде случаев требуется посадка на небольшие площадки (в горах, на палубы качающихся кораблей...). И описанный Иезекиилем летательный аппарат мог сесть во двор храма только в том случае, если ему были доступны вертикальные посадка и взлет. Следовательно, это мог быть только аппарат с отклоняемыми соплами (с управляемым



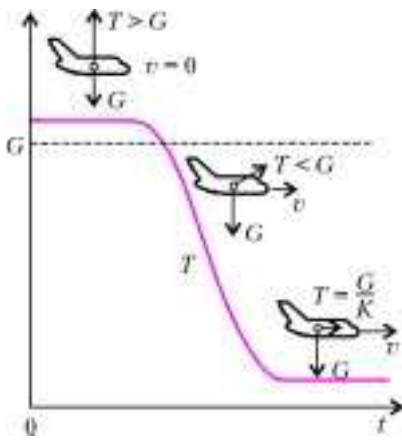


Рис. 5

пульса, не меньший веса самого летательного аппарата. Значит, давление на стартовую площадку, создаваемое струями, должно быть больше, чем нагрузка на крыло:

$$p_{\downarrow} \sim \frac{G}{N_c \pi r_c^2} > \frac{G}{S},$$

где  $N_c$  – число струй. Мало того, тут речь идет не только о давлении – струи представляют собой высокоскоростной поток раскаленных газов, способных прожигать палубу авианосцев. Не случайно Иезекииль упоминает об углях под херувимами.

Но что такое многочисленные «очи», покрывающие всю

вектором тяги), как у современных нам самолетов Як-49 (Россия) или Харриер (Англия). После вертикального взлета «на струях» эти самолеты переходят в горизонтальный полет, становясь «на крыло». Качественно изменение силы тяги двигателей изображено на рисунке 5. Видно, что в режиме «висения» струи двигателей должны создавать поток импульса, не меньший веса самого летательного аппарата.

поверхность херувимов? На определенном этапе развития авиации обшивка самолетов делалась из гофрированного дюралюминия, который обеспечивал жесткость конструкции. (В чем легко убедиться, собрав лист бумаги гармошкой – после этого его труднее согнуть.) Такой самолет выглядел «полосатым». С ростом скорости полета возникла проблема аэродинамического нагрева. И оказалось, что можно увеличить теплоотвод при помощи рельефного теплозащитного покрытия в виде кольцеобразных уступов, чередующихся по всей длине боковой поверхности летательного аппарата. (В настоящее время инженеры и ученые интенсивно исследуют такие покрытия.)

Итак, что же видел Иезекииль? Похоже, это был крылатый летательный аппарат вертикального взлета/посадки, который производил впечатляющий шум и оставлял под собою «горящие угли». Он обладал четырьмя реактивными двигателями и, конечно, колесами, которые больше всего потрясли Иезекииля. Габариты аппарата можно оценить сверху, учитывая, что из площади упомянутого двора ( $50 \times 100$  локтей, или  $22 \times 44$  метра) нужно вычесть площадь храма («Дома»,  $20 \times 60$  локтей). Таким образом, этот летательный аппарат мог иметь характерные размеры порядка десятка метров.

Но кому он мог принадлежать? Иным планетам? Или остаткам прежней земной цивилизации, которая, угасая, пыталась внушить оставшимся «неразвитым странам» благие мысли? И не придется ли землянам после грядущих глобальных катастроф (экологических, военных, социальных...) вновь изобретать «херувимов» через тысячи лет?

# Как исследовать магнитную катушку

С.МЯГМАРСУРЭН

ОБСУДИМ ОДИН ИЗ ВОЗМОЖНЫХ МЕТОДОВ ИЗМЕРЕНИЯ магнитной индукции и энергии магнитного поля катушки.

Энергию магнитного поля катушки индуктивности можно определить, используя взаимные преобразования энергии: электрической – магнитной – тепловой – электрической. Соберем установку, электрическая схема которой показана на рисунке 1. В качестве индукционной катушки мы использовали электромагнит, состоящий из дроссельной катушки и сердечника с двумя полюсными наконечниками, повернутыми плоскими сторонами друг к другу. При замыкании ключа  $K$  в положение 1 ток  $I$  проходит по катушке индуктивностью  $L$ , за счет чего в катушке образуется ЭДС самоиндукции

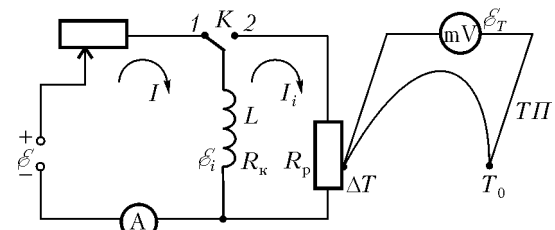


Рис. 1

$\mathcal{E}_i = -L \frac{dI}{dt}$ . Согласно правилу Кирхгофа,

$$I = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_i}{R}, \text{ или } \mathcal{E} = IR - \mathcal{E}_i = IR + L \frac{dI}{dt}.$$

Здесь  $R$  – сумма сопротивления реостата и омического сопротивления катушки. За время  $dt$  источник электрической энергии совершает работу, равную

$$\mathcal{E} Idt = I^2 R dt + LI dI.$$

Первое слагаемое в этой формуле выражает тепло Джоуля – Ленца, которое выделяется на сопротивлении  $R$ , а второе – дополнительную работу, обусловленную явлением самоиндукции. Следовательно, дополнительная работа, расходуемая на увеличение тока в цепи от 0 до значения  $I$ , является энергией магнитного поля  $W$ :

$$W = \int_0^I LI dI = \frac{LI^2}{2}.$$

А теперь замкнем ключ в положение 2 – в правой цепи ток самоиндукции  $I_i$  проходит через омическое сопротивление

(Продолжение см. на с. 34)



*Выдуйте мыльный пузырь и смотрите на него: вы можете заниматься всю жизнь его изучением, не переставая извлекать из него уроки физики.*

Уильям Томсон (лорд Кельвин)

*...жидкое состояние характеризуется сцеплением частиц, отсутствующим в газах и парах. Сцепление жидкостей выражается в капиллярных явлениях...*

Дмитрий Менделеев

*Эти сферические воздушные пленки легко образуются в мыльной воде. Они отличимы от обычных воздушных пузырей...*

Джозайя Гиббс

*...она <формула — А.Л.> действительно независимо от того, какими причинами обусловлено возникновение кривизны поверхности.*

Альберт Эйнштейн

# А так ли хорошо знакомо вам? поверхностное натяжение?

Именно это понятие — поверхностное натяжение — объединяет приведенные фрагменты из трудов великих ученых. К представительному списку имен можно смело добавить еще несколько — например, Галилея, задумавшегося над вопросом, почему росинки принимают шарообразную форму.

Отчего столь пристальное внимание привлекли тонкие пленки и мыльные пузыри, узенькие трубочки-капилляры и самая обычная пена?

Дело в том, что разгадка общего механизма действия поверхностных сил привела к объяснению удивительно разнообразных природных явлений — от процесса образования капель до поведения жидкостей в живых организмах. Более того, понимание свойств поверхностного натяжения позволило активно использовать его в широком практическом диапазоне — от сельского хозяйства до космической техники. Особенно хочется отметить, что исследования в этой области породили красивые и плодотворные аналогии. Так, при сооружении легких строительных конструкций сложных форм найти лучшие решения помогают... мыльные пленки, а построить первую теорию деления атомных ядер удалось, уподобив ядро... капле заряженной жидкости.

Жаль, что школьная программа по физике слишком «поверхностно» отнеслась к поверхностному натяжению, причислив его к отнюдь не главным вопросам курса. Попробуем хотя бы в малой степени восполнить этот пробел.

## Вопросы и задачи

**1.** Если налить в стакан воду и бросить туда небольшой кусочек пробки, то, покачавшись, пробка «причалит» к стенке. Как заставить пробку плавать в центре стакана?

**2.** Можно ли показать, не пользуясь никакими приборами, что коэффициент поверхностного натяжения у мыльного раствора меньше, чем у чистой воды?

**3.** Известно, что брезентовая палатка хорошо защищает от проникновения воды, но если во время дождя дотронуться до потолка рукой, он начинает протекать. Почему?

**4.** В каком случае из крана самовара падают более тяжелые капли: когда вода еще горячая или когда она уже остыла?

**5.** Почему на поверхности керосина (и многих других горючих жидкостей) никогда не бывает пыли?

**6.** Деревянная дощечка, положенная на дно сосуда и залитая затем водой, всплывает. Стеклопластинка, положенная на дно сосуда и залитая затем ртутью, не всплывает, хотя плавучесть стекла в ртути гораздо больше, чем плавучесть дерева в воде. Почему?

**7.** Две смоченные водой стеклянные пластинки трудно отделить друг от друга, пока они находятся в воздухе. Однако они разделяются без всяких усилий, если их опустить в воду. Чем это можно объяснить?

**8.** Куда девается мыльная пленка, когда она лопается?

**9.** Мыльный пузырь выдули через соломинку так, что он повис на одном ее конце. Что произойдет с пламенем свечи, если к нему поднести другой, открытый конец соломинки? Как будет зависеть поведение пламени от диаметра пузыря?

**10.** Есть ли на поверхности мыльного пузыря область, где разрыв его наиболее вероятен?

**11.** Если кусочек мела положить в воду, то из него по всем направлениям начнут выходить пузырьки. Почему это происходит?

**12.** Для удаления жирных пятен материю проглаживают горячим утюгом, подложив под нее лист бумаги. Отчего расплавленный жир впитывается в бумагу, а не расходится по материи?

**13.** Почему две спички, плавающие на поверхности воды вблизи друг от друга, притягиваются?

**14.** Вертикальная капиллярная стеклянная трубка подвешена к коромыслу весов и уравновешена гирями. Что произойдет с весами, если под трубку осторожно подвести сосуд с водой так, чтобы кончик капилляра коснулся ее поверхности?

**15.** В капиллярной трубке, опущенной вертикально в воду на глубину  $l$ , вода поднялась на высоту  $h$ . Нижний конец трубки закрывают, вынимают ее из воды и вновь открывают. Какой будет высота столбика воды, оставшейся в трубке?

**16.** В горизонтальный стеклянный капилляр с переменным сечением вводят сначала капельку воды, а затем капельку ртути. Куда будет двигаться каждая капелька?

**17.** На какую высоту поднимается смачивающая жидкость в капилляре, если сосуд с жидкостью, куда опущен капилляр, находится в невесомости?

### Микроопыт

Подставьте палец под тонкую водопроводную струю на расстоянии нескольких сантиметров от крана – там, где струя еще не распалась на капли. На что станет похожа часть струи над пальцем? Почему?

### Любопытно, что...

...с давних времен для успешной ловли рыбы с помощью остроги поверхность воды сбрызгивали маслом. Даже легкое волнение воды сильно искажает видимое изображение рыбы и мешает прицелиться, тонкая же пленка масла, благодаря силам поверхностного натяжения, способствует затуханию волн и успокоению воды.

...вошедший в историю науки опыт по созданию искусственной невесомости при зависании жидкого масляного шара в смеси воды и спирта, иллюстрирующий действие поверхностного натяжения жидкостей, был впервые осуществлен в 1843 году бельгийским профессором Жозефом Плато. К сожалению, вскоре он ослеп и больше не мог любоваться столь эффектным явлением.

...американский физик, один из основателей статистической механики Дж.Гиббс, впервые построивший общую теорию поверхностных явлений и капиллярности, считался кабинетным, далеким от эксперимента ученым. Однако впоследствии выяснилось, что он внимательнейшим образом изучал труды Плато с описанием многочисленных опытов с жидкими пленками.

...помещая конец узкой трубки с вытекающей из нее каплей в жидкость с плотностью чуть меньшей, чем плотность капли, Плато сумел «замедлить» процесс ее отрыва. При этом он заметил обычно не наблюдаемую вторичную маленькую капельку, отделяющуюся вслед за большой первой, – так называемый шарик Плато.

...идея флотации – отделения ценных фрагментов руды от пустой породы с помощью всплывающих воздушных пузырьков – возникла случайно. В конце позапрошлого века американская учительница Карри Эвертон обратила внимание на то, что при стирке загрязненных маслом мешков, в которых ранее хранился медный колчедан, замасленные крупинки минерала всплывали вместе с мыльной пеной, словно на воздушном шаре.

...заметный шаг в истории атомистики был совершен одним из создателей термодинамики, знаменитым У.Томсоном, проведшим подсчеты размеров молекул, основанные на изменении поверхностной энергии пленки при ее растекании. Значительно позже, уже в начале XX века, не менее знаменитому физику Дж.Рэлею удалось в блестящем эксперименте непосредственно

определить размеры молекул растекшегося по воде масла.

...в мемориальной статье 1924 года, посвященной лорду Кельвину, А.Эйнштейн выбрал из множества работ ученого особенно восхитившие его примеры. Это были три исследования Кельвина, в двух из которых изучались... капли.

...английский ученый Джеймс Дьюар, изобретший сосуд для хранения сжиженных газов, сумел в особых бутылках продержать мыльные пузыри более месяца. А рекордный по размерам пузырь, правда удлинённой формы, достигал в наибольшем поперечнике четырех метров!

...в условиях невесомости капли не только воды, но и жидких металлов, как убедительно продемонстрировали это космонавты, могут достигать внушительных размеров.

...специальные вещества с меньшим поверхностным натяжением, чем у воды, могут при малом расходе покрыть тонкой защитной пленкой большую площадь открытых водоемов, уменьшая испарение. Это особенно важно в засушливых районах, где таким способом можно предотвратить ежегодную потерю десятков миллионов литров драгоценной влаги с каждого гектара.

...размышления над вопросом о том, за какое время сливаются капли, привели в 1944 году российского физика Я.И.Френкеля к созданию модели, позволившей заложить физические основы порошковой металлургии, в которой спрессованные металлические зерна необходимо «спекать» друг с другом при термической обработке.

...главным врагом тонких жидких нитей являются капиллярные силы, приводящие к неустойчивости нитей. Это приходится учитывать при формировании изделий из стекла, в том числе тончайших оптических волокон – основы современной техники передачи информации.

### Что читать в «Кванте» о поверхностном натяжении

*(публикации последних лет)*

1. «Заряженная капля» – 1999, №1, с. 45;
2. «Можно ли носить воду в решете» – 1999, Приложение №6, с. 47;
3. «Что происходит на границе» и «Капилляры и смачивание» – 2000, Приложение №3, с. 28 и 99;
4. «Как мы дышим?» – 2001, Приложение №4, с. 18;
5. «Физика приготовления кофе» – 2001, №4, с. 2;
6. «А атомные ядра тоже колеблются» – 2001, Приложение №5, с. 101;
7. «Утро туманное...» – 2002, №4, с. 37;
8. «Молекулы, сосиски и алмазы» 2003, №1, с. 35;
9. «Поверхностное натяжение и капиллярные явления» – 2003, Приложение №4, с. 64;
10. «Решение задач с распределенной силой» – 2004, №6, с. 36.

*Материал подготовил А.Леонович*

(Начало см. на с. 31)

катушки  $R_k$  и сопротивление резистора  $R_p$ , на которых и выделяются количества теплоты  $Q_k$  и  $Q_p$  соответственно. Таким образом, энергия, запасенная в магнитном поле катушки, переходит в электрическую, а затем в тепловую.

Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{W}{Q_p} = \frac{R_k + R_p}{R_p}.$$

В этом выражении сопротивления  $R_k$  и  $R_p$  есть известные и точно измеряемые параметры. Поэтому для определения  $W$  нам придется узнать величину  $Q_p$ .

Используем уравнение теплового баланса:

$$Q_p = mc\Delta T,$$

где  $m$  – масса материала, имеющего сопротивление  $R_p$ ,  $c$  – удельная теплоемкость того же материала,  $\Delta T$  – изменение его температуры. Величину  $\Delta T$  измеряют термпарой ТП – для этого измерительный контакт прибора прикрепляется внутри витков резистора сопротивлением  $R_p$ , а другой, сравнивающий, контакт поддерживают при комнатной температуре  $T_0$  (см. рис.1). Температурная разность контактов термпары  $\Delta T$  прямо пропорциональна межконтактной разности потенциалов, т.е. термо-ЭДС  $\mathcal{E}_T$ . С учетом этого факта получим

$$Q_p = mc \frac{\mathcal{E}_T}{\delta},$$

где  $\delta$  – чувствительность термпары, измеряемая в милливольтх на кельвин.

Если выбрать сопротивление резистора  $R_p$  значительно больше, чем сопротивление катушки  $R_k$ , то эффект преобразования магнитной энергии в тепловую хорошо прослеживается. Поэтому в качестве резистора используют проволоочную спираль, сделанную из сплава с большим удельным сопротивлением. В подавляющем большинстве случаев для такого металлического сплава удельная теплоемкость неизвестна, так что нам придется определить эту величину. Для этого мы придумали маленькую хитрость.

Соберем электрическую схему – такую же, как на рисунке 1, только без катушки индуктивности. Резистор, по которому течет ток  $I'$  в течение времени  $t$ , нагревается, и в нем выделяется некоторое количество теплоты. Если при этом не возникает никаких других форм энергии, то, по закону сохранения энергии,

$$I'^2 R_p t = mc\Delta T'.$$

Используя ту же термпару, определим новое изменение температуры:  $\Delta T' = \frac{\mathcal{E}_T'}{\delta}$ . Поэтому можно записать

$$\frac{mc}{R_p \delta} = I'^2 \frac{t}{\mathcal{E}_T'} = \text{const}.$$

В этом выражении  $\mathcal{E}_T'$  пропорционально времени  $t$  (с момента включения ключа  $K$  до окончания измерения). Величины  $I'$ ,  $\mathcal{E}_T'$ ,  $t$  экспериментально измеряются. Таким образом, во второй части опыта можно определить удельную теплоемкость  $c$  для любых электропроводящих материалов.

Используя выражения для количества теплоты  $Q_p$  и удельного сопротивления  $c$ , для энергии магнитного поля получим

$$W = \frac{LI^2}{2} = Q_p = A\mathcal{E}_T,$$

где  $A$  – постоянная прибора, которая равна

$$A = (R_k + R_p) \frac{mc}{R_p \delta} = (R_k + R_p) I'^2 \frac{t}{\mathcal{E}_T'}.$$

На самом деле, энергия магнитного поля является функцией двух переменных – силы тока  $I$  и расстояния между полюсами электромагнита  $d$ . Для определения энергии магнитного поля в зазоре электромагнита нами экспериментально построены графики зависимости термо-ЭДС от силы тока при разных значениях  $d$  (рис.2). Из графиков видно, что

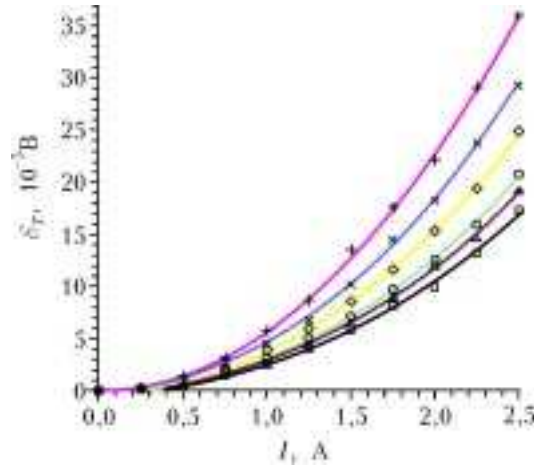


Рис.2. Зависимость термо-ЭДС от силы тока при разных значениях межполюсного расстояния  $d$  (6, 9, 13, 20, 27 и 35 мм, если двигаться сверху вниз)

зависимость  $\mathcal{E}_T(I)$  – квадратичная. Значит, зависимость термо-ЭДС от квадрата тока будет линейной. Таким образом, для нашего прибора получаются вольт-амперные характеристики вида  $\mathcal{E}_T(I, d) = K(d)I^2$ , а их коэффициенты  $K(d)$  являются, в свою очередь, функцией  $d$ . Это приводит к следующему выражению для  $W$ :

$$W(I, d) = A\mathcal{E}_T(I, d) = AK(d)I^2,$$

где коэффициент  $AK(d)$ , согласно формуле  $W = \frac{LI^2}{2}$ , будет выражать индуктивность катушки  $L$ , точнее  $L/2$ .

Наконец, используя вольт-амперные характеристики, построим градуировочный график зависимости  $K(d)$  (рис.3). Такая градуировка и представляет собой измеритель энергии магнитного поля, создающегося в данном электромагните при любых значениях силы тока и расстояния между его

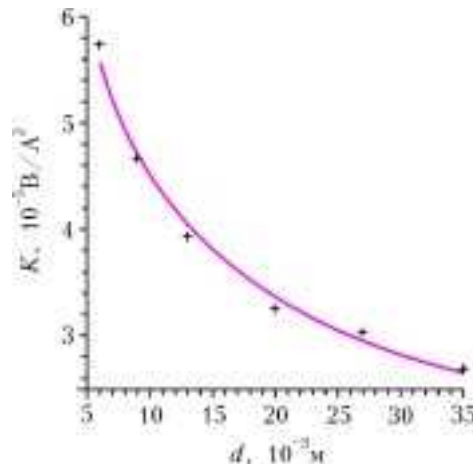


Рис.3. Градуировочный график зависимости  $K$  от  $d$



полюсами. А последнее выражение для  $W(I, d)$  является эмпирически полученной нами формулой (основанной на опыте) для определения магнитной энергии данного электромагнита.

Теперь приступим к определению магнитной индукции поля. Разделив выражение для  $W(I, d)$  на объем воздушного зазора между полюсами электромагнита, получим объемную плотность магнитной энергии (всеми нежелательными краевыми эффектами мы будем пренебрегать):

$$w(I, d) = \frac{AK(d)}{Sd} I^2,$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения полюса электромагнита. С другой стороны, объемная плотность магнитного поля прямо пропорциональна квадрату магнитной индукции  $B$  в данном месте пространства:

$$w(I, d) = \frac{B^2}{2\mu\mu_0},$$

где  $\mu$  – относительная магнитная проницаемость вещества,  $\mu_0$  – магнитная постоянная. Из сопоставления двух последних выражений следует, что магнитная индукция и сила тока связаны соотношением

$$B(I, d) = \sqrt{\frac{2\mu\mu_0 AK(d)}{Sd}} I.$$

Поскольку для данного электромагнита градуировка  $K(d)$

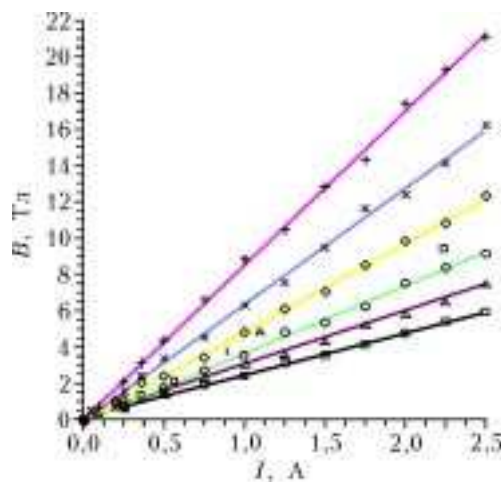


Рис.4. Зависимость магнитной индукции от силы тока при разных значениях межполюсного расстояния  $d$

уже установлена, можно графически построить семейство зависимости  $B(I, d)$  (рис.4). Из полученных графиков магнитная индукция непосредственно определяется без измерения и без вычисления при разных значениях либо  $d$ , либо  $I$ . Таким образом, мы получили эмпирическую формулу и создали градуировочные кривые для определения индукции магнитного поля.

# Принцип Торричелли и центробежная сила инерции

**А.БУРОВ**

В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ ПОЧЕМУ-ТО ОЧЕНЬ «БОЯТСЯ» СИЛЫ ИНЕРЦИИ. Как так – что это за сила, которая не хочет подчиняться третьему закону Ньютона? Тем не менее, каждому приходится сталкиваться с этой силой по многу раз на дню, и, вероятно, пришло время поговорить о некоторых ее «кажущихся» странностях.

Начнем с задачи.

**Задача 1.** В горизонтальной плоскости на пружинке крутят камень с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Найдите установившееся движение системы и исследуйте устойчивость этого движения, если длина пружинки в нерастянутом состоянии  $l$ , жесткость пружинки  $k$ , а масса камня  $m$ .

**Первое решение.** В школе, вероятно, эту задачу стали бы решать так. Центробежное ускорение камня равно  $a = -\omega^2 r$ , где  $r$  – длина пружинки в растянутом состоянии.

Знак «минус» указывает на то, что  $r$  отсчитывается от неподвижной точки, а центростремительное ускорение направлено к этой точке. Далее, со стороны пружинки на камень действует сила упругости  $F = -k(r - l)$ , и радиус  $R$  установившегося движения (а им окажется равновесие относительно равномерно вращающейся с угловой скоростью  $\omega$  системы отсчета) будет определяться из уравнения

$$-m\omega^2 r = -k(r - l).$$

Отсюда легко находим значение радиуса:

$$R = \frac{kl}{k - m\omega^2}.$$

Видно, что при  $\omega = 0$  система не вращается, и длина пружинки равна  $l$ . При возрастании  $\omega$ , до разумных пределов, знаменатель в выражении для  $R$  начинает уменьшаться, а само  $R$  – увеличиваться, что и соответствует нашему повседневному опыту. При неразумно больших значениях  $\omega$  закон Гука для силы упругости перестает выполняться, пружинка обрывается, а камень улетает – как правило, по касательной.

Относительно устойчивости найденного движения трудно сделать какие-либо определенные выводы.

**Второе решение.** Отважный, по крайней мере по отношению к центробежным силам инерции, человек стал бы решать эту задачу, возможно, так. Наблюдатель, равномерно вращающийся вместе с пружинкой с угловой скоростью  $\omega$ , видит, что на камень действуют центробежная сила инерции  $F_{\text{и}} = m\omega^2 r$  и упругая сила  $F_y = -k(r - l)$ , поэтому можно записать условие равновесия в виде

$$F_{\text{и}} + F_y = m\omega^2 r - k(r - l) = 0,$$

из которого получается то же самое значение радиуса  $R$ .

Более того, этот наблюдатель заметит, что как упругая сила, так и центробежная сила инерции – *потенциальны*, т.е.

существуют функции  $U_{\text{и}} = U_{\text{и}}(r)$  и  $U_{\text{у}} = U_{\text{у}}(r)$  такие, что

$$F_{\text{и}} = -\frac{dU_{\text{и}}}{dr} \text{ и } F_{\text{у}} = -\frac{dU_{\text{у}}}{dr}.$$

Функции, подобные  $U_{\text{и}}$  и  $U_{\text{у}}$ , физики называют потенциалами. В данном случае назовем их *измененными потенциалами* – для того чтобы отличить от обычных потенциалов, остающихся даже тогда, когда исчезает вращение.

В силу того что потенциалы аддитивны, их можно и нужно складывать. У нас появился замечательный шанс воспользоваться принципом Торричелли, который в данной ситуации звучит так:

*При устойчивом равновесии измененный потенциал  $U = U_{\text{и}}(r) + U_{\text{у}}(r)$  достигает своего локального минимума.*

В нашем случае

$$U_{\text{и}}(r) = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2, \quad U_{\text{у}}(r) = \frac{1}{2}k(r-l)^2.$$

Тогда уравнение относительного равновесия можно записать в виде

$$\frac{dU}{dr} = -m\omega^2 r + k(r-l) = 0.$$

Неудивительно, что оно отличается от предыдущего уравнения равновесия лишь знаками.

Ну, а для проверки условий устойчивости мы вычислим вторую производную измененного потенциала:

$$\frac{d^2U}{dr^2} = -m\omega^2 + k,$$

которая положительна при всех тех же «разумно-умеренных» значениях угловой скорости, о которых говорилось раньше.

Итак, согласно принципу Торричелли, найденное относительное равновесие устойчиво. Иными словами, второй метод решения позволяет узнать о движении больше, чем первый «школьный» метод.

Теперь обратимся к решению другой задачи – частного случая известной задачи Кеплера.

**Задача 2.** Пусть  $N$  – светило, притягивающее некоторый камень с силой  $F_N = -m\gamma/r^2$ , где  $m$  – масса камня,  $r$  – его расстояние до светила,  $\gamma$  – положительная постоянная, равная произведению массы светила на постоянную ньютоновского тяготения. В предположении о том, что под действием ньютоновского тяготения камень совершает равномерное вращение вокруг светила с постоянной угловой скоростью  $\omega$  в плоскости, проходящей через это светило, найдите радиус орбиты камня и исследуйте устойчивость его движения.

**Первое «решение».** У нас уже имеется опыт написания измененных потенциалов. Потенциал центробежной силы инерции снова равен  $U_{\text{и}}(r) = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ , а потенциал силы притяжения имеет вид  $U_N(r) = -\frac{m\gamma}{r}$ . Для определения установившегося движения запишем измененный потенциал  $U = U_{\text{и}}(r) + U_N(r)$ , найдем его первую производную и приравняем ее к нулю:

$$\frac{dU}{dr} = -m\omega^2 r + \frac{m\gamma}{r^2} = 0.$$

Из этого уравнения получаем третий закон Кеплера:

$$\omega^2 r^3 = \gamma,$$

а из него – выражение для радиуса орбиты:

$$R = \left(\frac{\gamma}{\omega^2}\right)^{1/3}.$$

Что ж, неплохо. По крайней мере, радиус орбиты уже найден, и найден правильно.

Теперь с помощью принципа Торричелли разберемся с устойчивостью. Вторая производная потенциал имеет вид

$$\frac{d^2U}{dr^2} = -m\omega^2 - \frac{2m\gamma}{r^3},$$

и мы с удивлением обнаруживаем, что она *всегда* отрицательна. Получается, что либо не работает принцип Торричелли, чего не может быть, так как он проверен на многочисленных примерах, либо орбиты планет стали неустойчивы, о чем страшно даже подумать.

В чем же проблема? Оказывается, что это решение не совсем верное, и именно поэтому мы поставили в подзаголовке слово *решение* в кавычках. Ну, а какое же решение правильное?

**Правильное решение.** Дело в том, что мы не очень внимательно прочитали условие задачи и не почувствовали его отличия от предыдущего. В первой задаче пружинку с камнем *принудительно вращали* с постоянной угловой скоростью, в то время как во второй задаче камень *совершенно свободен* и в принципе может совершать движение с любой угловой скоростью. Такая замечательная свобода имеет далеко идущие последствия.

Так как физические свойства системы не меняются при повороте на произвольный угол вокруг притягивающего центра, то говорят, что имеет место симметрия, или что система инвариантна относительно поворотов. А это значит, что помимо закона сохранения энергии имеется еще один закон сохранения – кинетического момента, который в наших обозначениях принимает вид

$$mr^2\omega = p,$$

где  $p$  – постоянная. Таким образом, движение камня не такое уж и свободное – постоянная  $p$  зависит от того, как камень был запущен в начальный момент времени, и уж эта величина будет сохраняться в течение всего времени движения.

Так вот, оказывается, что при такой «свободной» постановке задачи потенциал центробежной силы инерции надо писать в виде

$$U_{\text{и}}(r) = \frac{1}{2} \frac{p^2}{mr^2}.$$

Тогда для самой силы получаем

$$F_{\text{и}}(r) = -\frac{dU_{\text{и}}(r)}{dr} = \frac{p^2}{mr^3},$$

а подстановка в это выражение значения  $p$  из закона сохранения кинетического момента после небольших преобразований дает уже привычное выражение для центробежной силы как функции от угловой скорости  $\omega$ .

Итак, нами получено первое утешение – выражение для центробежной силы инерции найдено правильно, т.е. первая часть предыдущего «решения» все же верна, закон Кеплера остается в силе, и все не так уж плохо. Остается разобраться с устойчивостью.

Дать ответ на этот вопрос теперь, после того как найдено еще одно выражение для потенциала центробежной силы, не так уж трудно. Запишем с помощью этого выражения суммарный потенциал, причем, чтобы отличать его от измененного потенциала, мы не только обозначим его другой буквой –  $W$ , но и назовем *приведенным потенциалом*:

$$W = U_{\text{и}}(r) + U_N(r) = \frac{1}{2} \frac{p^2}{mr^2} - \frac{m\gamma}{r}.$$

Из равенства нулю его первой производной:

$$\frac{dW}{dr} = -\frac{p^2}{mr^3} + \frac{m\gamma}{r^2} = 0$$

мы немедленно найдем значение радиуса установившегося, в данном случае стационарного, движения:

$$R = \frac{p^2}{\gamma m^2},$$

которое, разумеется, тождественно найденному ранее значению.

Теперь для изучения устойчивости вычислим вторую производную функции  $W$ :

$$\frac{d^2W}{dr^2} = \frac{3p^2}{mr^4} - \frac{2m\gamma}{r^3}.$$

Но вычислить эту производную мало – надо в нее еще подставить только что найденное решение:

$$\frac{d^2W}{dr^2} = \frac{3p^2}{m\left(\frac{p^2}{\gamma m^2}\right)^4} - \frac{2m\gamma}{\left(\frac{p^2}{\gamma m^2}\right)^3} = \frac{\gamma^4 m^7}{p^6} > 0.$$

Это означает, что кеплеровская круговая орбита устойчива по радиусу, и Вселенной не грозит уничтожение (в рамках сделанных предположений) в смысле существенных изменений радиусов орбит.

Вместе с тем, в задаче Кеплера нет устойчивости «по углу». Иными словами, два спутника, запущенные из близких точек и с близкими скоростями, вообще говоря, разбегутся,

т.е. удалятся друг от друга, хотя радиусы их орбит будут оставаться близкими друг другу все время.

Задача Кеплера идеально «приспособлена» для ответа на этот вопрос с помощью только элементарных средств. В самом деле, хорошо известно, что в этой задаче траектории могут быть лишь конические сечения, т.е. эллипс, парабола или гипербола. Рассмотрим, наряду с найденной круговой орбитой, другую близкую орбиту. Нетрудно сообразить, что эта орбита окажется эллиптической. Но для эллиптической орбиты, выполняется соотношение  $\omega^2 a^3 = \gamma$ , где  $a$  – большая полуось эллипса (а в случае круговой орбиты – ее радиус). Ясно, что для наугад взятой эллиптической орбиты, близкой к рассматриваемой круговой, величина полуоси  $a$  не будет совпадать с радиусом круговой орбиты, да и орбитальная угловая скорость  $\omega$  в общем случае будет слегка отличаться от угловой скорости при круговом движении. Вот эта разница в орбитальных угловых скоростях и определяет разбегание спутников по углу.

\*\*\*

Какова же мораль из всего сказанного? Во-первых, силы инерции, в данном случае центробежные силы инерции, не так уж страшны, как может показаться на первый взгляд. Их потенциальный характер позволяет не только находить установившиеся движения, но и исследовать их устойчивость. Это, как мы видели, посильно школьнику. Единственное, что надо уметь, так это отличать те случаи, когда систему принудительно вращают с постоянной угловой скоростью, от случаев, когда она вращается совершенно свободно.

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

# Поляризованный шар – это просто

**Е.РОМИШЕВСКИЙ, А.СТАСЕНКО**

В СОВРЕМЕННОЙ ФИЗИКЕ ЕСТЬ ГЛАГОЛЫ «НАМАГНИТИТЬ» и «наэлектризовать» некое тело, т.е. сделать его источником длительно существующих магнитного и электрического полей. Вещства, у которых эти свойства проявляются наиболее ярко, называют ферромагнетиками и сегнетоэлектриками соответственно.

Мы собираемся рассмотреть структуру электрического поля поляризованного тела, имеющего наиболее совершенную форму – форму шара. Но прежде вспомним самые простые факты.

Возьмем две бесконечные параллельные пластины, имеющие одинаковые по величине, но противоположные по знаку заряды (рис.1,а). Пусть на единицу поверхности этих пластин приходятся заряды  $\pm\sigma_0$  (поверхностная плотность зарядов). Как известно, в таком устройстве – конденсаторе

– напряженность электрического поля равна  $E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$  (здесь  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная), а вне пластин поле отсутствует, т.е. напряженность равна нулю. Этот факт можно трактовать и так: при пересечении левой пластины нормальная составляющая электрического поля увеличивается от нуля до значения  $+\frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$ , а при переходе через правую пластину ее скачок вниз равен

$-\frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$ . Иначе,

$$\Delta E_n = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}.$$

Расположим теперь между этими пластинами слой вещества, способного поляризоваться. Это значит, что под действием первоначального поля молекулы этого вещества либо повернутся в одном направлении (конечно, вдоль вектора  $\vec{E}_0$ ), если они заранее представляли собой электрические диполи, либо «центры тяжести» их отрицательных и положительных зарядов раздвинутся под действием этого поля, либо произойдет и то и другое. Как бы то ни было, в результате на поверхности слоя вещества

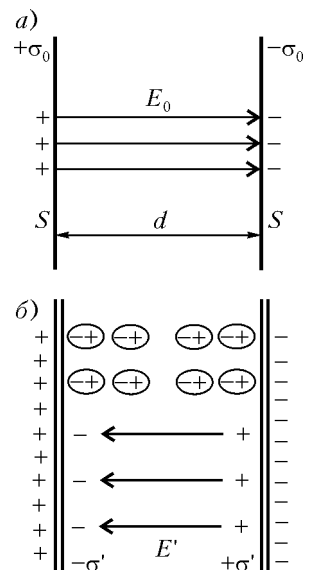


Рис. 1



появятся заряды плотностью  $\mp\sigma'$ , которые создадут поле  $\vec{E}'$ , противоположное по направлению полю  $\vec{E}_0$  (рис.1,б). Таким образом, внутри первого конденсатора как бы вставили второй, и его поле равно  $E' = -\frac{\sigma'}{\epsilon_0}$ . В результате суммарное поле внутри слоя равно

$$E_c = E_0 - E' = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{E_0}{\epsilon},$$

где  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость вещества. Ясно, что оно будет слабее, чем  $E_0$ .

Теперь представим, что возникшее распределение зарядов «заморожено», т.е. может существовать (даже после того, как исчезнет заряд конденсатора) достаточно долго – по крайней мере, пока вы читаете эту статью. Вынем наэлектризованный слой из конденсатора – внутри слоя останется однородное поле  $\vec{E}'$ . А наличие связанных зарядов плотностью  $\pm\sigma'$  на поверхностях слоя можно трактовать еще и так. Весь слой заполнен равномерно распределенными диполями, каждый из которых имеет дипольный момент  $\vec{p}_1$ . (Напомним, что дипольный момент диполя, т.е. системы двух одинаковых по величине, но противоположных по знаку точечных зарядов, направлен от отрицательного заряда к положительному и равен произведению величины заряда на расстояние между зарядами.) Если концентрация диполей  $n$ , то в единице объема слоя содержится суммарный дипольный момент  $\vec{P} = n\vec{p}_1$ . Его размерность  $\frac{\text{Кл} \cdot \text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$  совпадает с размерностью поверхностной плотности заряда, и это неслучайно. Действительно, величину суммарного дипольного момента слоя можно записать как  $PSd$ , где  $Sd$  – объем слоя. С другой стороны, дипольный момент равен произведению заряда «пластины»  $\sigma'S$  на толщину слоя  $d$ . Приравнявая эти два выражения, получим

$$PSd = \sigma'Sd, \text{ откуда } P = \sigma'.$$

Учтем еще, что вектор  $\vec{P}$  направлен от отрицательно заряженной пластины к положительной (т.е. против вектора  $\vec{E}'$ ). Тогда легко понять, что при переходе, например, через положительно заряженную границу слоя его значение уменьшается от  $P$  до нуля, так как вне пластины никаких диполей нет. Значит, смысл полученного соотношения  $P = \sigma'$  можно уточнить: речь идет о скачке нормальной составляющей вектора  $\vec{P}$ :

$$P^+ - P^- = \Delta P_n = -\sigma'.$$

Но где же обещанный шар? А вот теперь из обсуждаемого слоя вырежем шар радиусом  $a$  (рис.2). Положительные и отрицательные заряды «хвостов» молекул-диполей внутри шара по-прежнему взаимно компенсируют друг друга, а приповерхностные, которые «торчат наружу», создают поверхностный заряд плотностью  $\sigma = \sigma' \cos \theta$ , где  $\theta$  – полярный угол. Действительно, если мы возьмем несколько элементарных слоев молекул общей толщиной  $\Delta y \sim N\Delta y_1$ , то их «хвосты» окажутся на поверхностном кольце шириной  $a\Delta\theta = \Delta y / \cos \theta$  (см. треугольник  $ABC$  на рисунке 2), откуда

$$\frac{\Delta y}{a\Delta\theta} = \cos \theta \sim \frac{N\Delta y_1}{a\Delta\theta}.$$

Это же косинусоидальное распределение можно объяснить и полученным выше соотношением между скачком нормальной составляющей вектора  $\vec{P}$  и поверхностной плотностью связанных (теперь на поверхности сферы) зарядов:

$$P_n^+ - P_n^- = 0 - P_n = -P \cos \theta = -\sigma(\theta), \text{ и } \sigma(\theta) = \sigma' \cos \theta.$$

Интересно отметить, что косинусоидальное распределение зарядов на сфере всегда создает внутри сферы однородное поле. Вспомним хотя бы проводящий шар, помещенный в однородное электрическое поле  $\vec{E}_0$ . По определению, поле внутри шара равно нулю. Значит, на поверхности возникает такое распределение зарядов, которое создает свое поле  $-\vec{E}_0$ , компенсирующее внешнее (рис.3). Можно найти нормальную составляющую  $E_n^+$  поля снаружи сферы (у ее

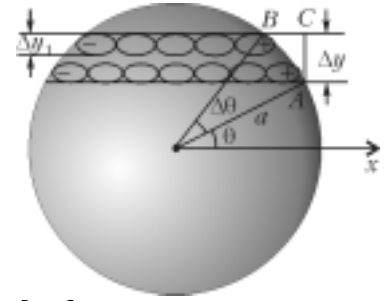


Рис. 2

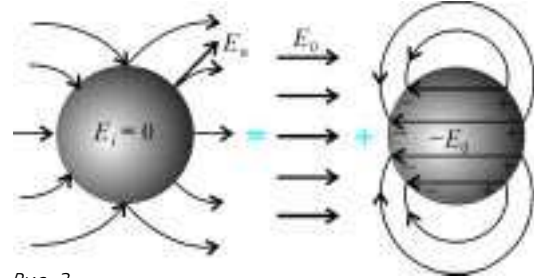


Рис. 3

внешней поверхности):

$$E_n^+ = \frac{\sigma(\theta)}{\epsilon_0}.$$

(А тангенциальная составляющая, естественно, равна нулю – иначе по поверхности проводящей сферы потек бы электрический ток.)

Кстати, в этом случае легко получить силу, действующую на единицу поверхности поляризованной сферы. Заряд  $\sigma$ , расположенный в этом месте, создает собственное поле напряженностью  $\pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ , направленное как по радиусу, так и против радиуса (поле плоскости), значит, его составляющие равны  $\pm \frac{1}{2} E_n^+$ . Сам же заряд находится в поле, равном  $+\frac{1}{2} E_n^+$ , поэтому действующая на него сила равна  $\sigma \cdot \frac{1}{2} E_n^+ = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$ .

Этот результат можно перефразировать и так – давление на поверхность сферы (изнутри) равно произведению поверхностной плотности заряда на полусумму нормальных внутренней и внешней составляющих электрического поля:

$\sigma \frac{E_n^+ + 0}{2}$ , или в общем случае (если поле  $E_n^-$  внутри не равно нулю):  $\sigma \frac{E_n^+ + E_n^-}{2}$ . Этот факт нам скоро пригодится.

Но вернемся к нашему поляризованному диэлектрическому шару. Мы уже знаем, что электрическое поле  $E_i$  внут-

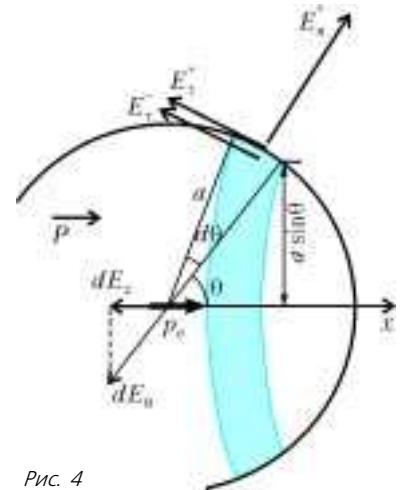


Рис. 4

ри него однородно. Значит, его напряженность в любой точке такая же, как, например, в центре. А ее легко найти. Действительно, каждое кольцо на поверхности сферы площадью  $2\pi a \sin \theta \cdot a d\theta$  (рис.4) имеет заряд  $\sigma(\theta) \cdot 2\pi a \sin \theta \cdot a d\theta$ , который в центре (на расстоянии  $a$ ) создает (по закону Кулона) поле напряженностью

$$dE_x = dE_\theta \cos \theta = -\frac{\sigma(\theta) \cdot 2\pi a \sin \theta \cdot a d\theta}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cos \theta.$$

(Тут мы не забыли спроектировать все элементарные поля на ось  $x$ , поэтому и появился  $\cos \theta$  в конце выражения.) Напряженность поля внутри будет суммой вкладов от всех элементарных колец:

$$E_i = -\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{P \cos \theta \cdot 2\pi a \sin \theta \cdot a d\theta}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cos \theta = \\ = \frac{P}{2\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \cos^2 \theta \cdot d \cos \theta = \frac{P}{2\epsilon_0} \frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_{\theta=0}^{\pi} = -\frac{P}{3\epsilon_0}.$$

А чтобы найти внешнее поле, вспомним известный мысленный эксперимент. Пусть имеется два шара, вложенных друг в друга и обладающих равными зарядами противоположных знаков, т.е.  $\pm q$ . Естественно, суммарный заряд этих шаров равен нулю, и никакого поля пока что нет. Но теперь давайте раздвинем шары в направлении оси  $x$  так, что расстояние между их центрами станет порядка размера молекулы  $l$ . В центре возникнет диполь с моментом  $p_e = ql$ , а на поверхности «вылезут» заряды плотностью  $\pm \sigma$  (рис.5,а). При этом такое устройство останется почти шаром. Действительно, если радиус шара взять, например, равным  $1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$ , то размер молекул, измеряемый ангстремами ( $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$ ), в миллион раз меньше, и ни один файн-механик не заметит,

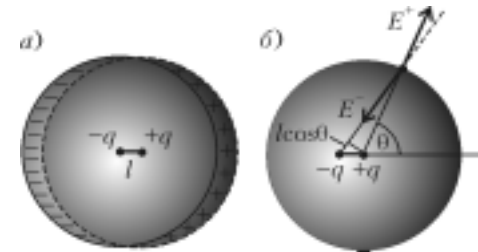


Рис. 5

что шар деформирован. Конечно, поле образовавшегося «диполя» внутри шара по-прежнему равно нулю, так что этот диполь – фикция, но он поможет найти поле поверхностных зарядов вне шара.

Рассмотрим рисунок 5,б. Электрические поля на поверхности шара от фиктивных зарядов  $\pm q$  равны  $E^+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$  (считаем, что положительный заряд расположен строго в центре координат) и  $E^- = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 (a + l \cos \theta)^2}$ . Так как эти два вектора лежат почти на одной прямой (вследствие того, что  $l \ll a$ ), составляющую внешнего дипольного поля найдем просто:

$$E_n^+ \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a + l \cos \theta)^2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left( 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{l}{a} \cos \theta\right)^2} \right) = \\ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{1 + 2\frac{l}{a} \cos \theta + \left(\frac{l}{a} \cos \theta\right)^2}{\left(1 + \frac{l}{a} \cos \theta\right)^2} \approx \frac{2ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 a^3}, \text{ где } ql = p_e.$$

Теперь у нас есть все, чтобы понять, что произойдет с поляризованным диэлектрическим шаром. Нормальная составляющая внешнего поля равна (см. рис.4)

$$E_n^+ = \frac{2p_e \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 a^3} = \frac{2}{3} \frac{P}{\epsilon_0} \cos \theta,$$

а внутреннего –

$$E_n^- = -\frac{P}{\epsilon_0} \cos \theta.$$

Тангенциальные составляющие внутреннего и внешнего полей одинаковы (свойство потенциальности в электростатике):

$$E_\tau^+ = E_\tau^- = E_i \sin \theta = \frac{P}{3\epsilon_0} \sin \theta.$$

Следовательно, нормальная составляющая силы, действующей на единицу поверхности шара, равна

$$f_n = \sigma(\theta) \frac{E_n^+ + E_n^-}{2} = \frac{P^2}{2} \frac{\cos^2 \theta}{3\epsilon_0},$$

а тангенциальная –

$$f_\tau = \sigma(\theta) E_\tau = \frac{P^2}{3\epsilon_0} \sin \theta \cos \theta.$$

Соответственно,  $x$ -компонента силы (на единицу площади поверхности шара) будет равна

$$f_x = f_n \cos \theta - f_\tau \sin \theta = \frac{P^2}{3\epsilon_0} \cos \theta \left( \frac{\cos^2 \theta}{2} - \sin^2 \theta \right).$$

Что же получилось? Выходит, что в приполярной области (при малых  $\theta$ ) эта сила положительна, а в экваториальной – отрицательна! Видно, что существует такое значение  $\theta_*$  полярного угла, при котором эта сила обращается в ноль:

$$\sin^2 \theta_* = \frac{\cos^2 \theta_*}{2}, \quad \text{tg } \theta_* = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \theta_* \approx 35^\circ.$$

В направлении полярной оси ( $\theta = 0$ ) силы стремятся растянуть шар, а в экваториальной плоскости – сжать (рис.6). Разумеется, если мы просуммируем все силы (проинтегрируем по поверхности), получим силу притяжения – это не удивительно, если вспомнить об эквивалентном диполе  $p_e$ , заряды которого, конечно же, притягивают друг друга.

Но чтобы решить задачу о деформации нашего поляризованного шара, нужно изучить теорию упругости. А можно ли решить аналогичную задачу для шара, вырезанного из куска магнита?

Все это вполне возможно, если вы поступите в МФТИ или МГУ. Чего вам и желаем.

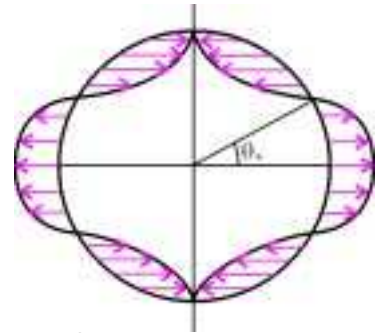


Рис. 6

# Правило Декарта

М. ГОРЕЛОВ

Для удобства записи введем функцию  $y = \operatorname{sgn} x$  (читается «сигнум» или «знак»  $x$ ), определенную так:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{пр, } x > 0, \\ 0 & \text{пр, } x = 0, \\ -1 & \text{пр, } x < 0. \end{cases}$$

Отметим, что при  $x \neq 0$

$$\operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|}.$$

## Правило Декарта

В 1637 году знаменитый французский математик и философ Рене Декарт (1596–1650) сформулировал следующее утверждение.

**Теорема 1** (правило Декарта). Число положительных корней многочлена  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  не превосходит числа перемен знака в последовательности  $A = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  его коэффициентов и отличается от него на четное число.

Если вы решили упражнения 1–5, сравните ваши результаты со сформулированной теоремой. А теперь приступим к ее доказательству.

**Доказательство.** Будем без ограничения общности считать, что  $a_n > 0$  и  $a_0 \neq 0$ . Проведем индукцию по числу перемен знака. Если в последовательности  $A$  перемен знака нет, то все ненулевые числа этой последовательности положительны, так что  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 > 0$  при любом  $x > 0$  и положительных корней у многочлена  $f(x)$  нет. Это дает базу индукции.

Предположим теперь, что теорема уже доказана для всех многочленов, у которых число перемен знака в последовательности коэффициентов меньше  $q$ . Пусть  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  — многочлен, у которого в последовательности коэффициентов ровно  $q$  перемен знака, и  $c$  — положительный корень этого многочлена. Тогда

$$f(x) = (x - c)g(x),$$

где

$$g(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_0,$$

т.е.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = (x - c)(b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0).$$

Из последнего равенства следует, что

$$a_n = b_{n-1},$$

$$a_{n-1} = b_{n-2} - cb_{n-1},$$

$$\dots$$

$$a_k = b_{k-1} - cb_k,$$

$$\dots$$

$$a_0 = -b_0 c.$$

Докажем, что в последовательности  $B = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$  меньше перемен знака, чем в последовательности  $A$ . Пусть  $p$  — число перемен знака в последовательности  $B$ . Заметим сразу, что  $\operatorname{sgn} a_n = \operatorname{sgn} b_{n-1}$ , а  $\operatorname{sgn} a_0 = -\operatorname{sgn} b_0$ .

Если  $l$  — самое первое место перемены знака в последовательности  $B = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$ , то числа  $b_0$  и  $b_l$  имеют разные знаки. Но тогда  $\operatorname{sgn} a_0 = -\operatorname{sgn} b_0$ ,  $\operatorname{sgn} a_l = \operatorname{sgn}(b_{l-1} - cb_l) = -\operatorname{sgn} b_l$ , т.е. знаки чисел  $a_0$  и  $a_l$  — различны. Поэтому последовательность  $a_0, \dots, a_l$  содержит по крайней мере одну перемену знака.

Пусть  $l$  и  $k$  — два соседних места перемены знака в

**ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ** ЧАСТО ВСТРЕЧАЮТСЯ на математических олимпиадах. Отчасти это связано с тем, что профессиональным математикам тоже время от времени приходится доказывать неравенства в их научных работах. Таким образом, «олимпиадная» математика тесно сопрягается с профессиональной.

В этой статье будет рассказано об одной старой теореме, помогающей решать подобные задачи. Впрочем, сначала речь пойдет об одном замечательном правиле, позволяющем оценивать количество положительных корней многочлена.

## Перемены знака в конечных последовательностях

Пусть дана последовательность действительных чисел  $a_0, a_1, \dots, a_n$ . Будем говорить, что в этой последовательности на месте с номером  $l$  происходит перемена знака, если  $a_l \neq 0$ , причем первое отличное от нуля число  $a_k$ , номер которого меньше  $l$ , имеет знак, противоположный знаку  $a_l$ . Например, в последовательности

$$1, -1, 2, 0, 0, 0, 1, 0, -1, 1$$

местами перемены знака будут  $l = 2, 3, 9, 10$ .

Нас в дальнейшем часто будут интересовать количества перемен знаков в конечных последовательностях. Для такого подсчета можно выписать строку из плюсов и минусов: вместо положительных чисел пишем плюс, вместо отрицательных — минус, вместо нуля не пишем ничего. Для нашей последовательности, например, получим такой набор плюсов и минусов:

$$+ - + + - +.$$

Заметим попутно, что у последовательностей  $a_0, a_1, \dots, a_n$  и  $-a_0, -a_1, \dots, -a_n$  количества перемен знака одинаковы.

Оказывается, что количество перемен знака в последовательности  $a_0, a_1, \dots, a_n$  связано с числом положительных корней уравнения

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0.$$

## Упражнения

1. Опишите последовательности, имеющие а) ровно одну; б) ровно две перемены знаков.

2. Докажите, что если в последовательности  $a, b, c$  в точности одна перемена знака, то квадратное уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  имеет ровно один положительный корень.

3. Сколько положительных корней может иметь квадратное уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$ , если в последовательности  $a, b, c$  две перемены знака?

4. Найдите число положительных корней уравнения  $x^5 + 2x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$ . Сравните это число с количеством перемен знака в ряду его коэффициентов.

5. Сколько положительных корней имеет уравнение  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ , если последовательность его коэффициентов имеет в точности одну перемену знака?



последовательности  $B$ . Тогда числа  $a_l = b_{l-1} - cb_l$  и  $a_k = b_{k-1} - cb_k$  тоже имеют разные знаки. Так что среди чисел  $a_1, \dots, a_k$  есть перемена знака.

**Упражнение 6.** Убедитесь в этом.

Наконец, пусть  $k$  – последнее место перемены знака в последовательности  $B$ . Тогда  $b_k > 0$  и числа  $a_k = b_{k-1} - cb_k$  и  $a_n$  имеют разные знаки, поскольку

$$\operatorname{sgn} a_k = -\operatorname{sgn} b_k, \quad \operatorname{sgn} a_n = 1 = \operatorname{sgn} b_{n-1}.$$

Поэтому в наборе чисел  $a_k, \dots, a_n$  тоже есть перемена знака.

Итак, если последовательность  $B$  содержит  $p$  перемен знака, то последовательность  $A$  содержит по меньшей мере  $p + 1$  перемен знака.

С другой стороны, количества перемен знака в последовательностях  $A$  и  $B$  имеют разную четность. Это следует из уже сделанного ранее замечания о знаках  $a_0$  и  $b_0$  и следующего упражнения.

**Упражнение 7.** Докажите, что последовательность  $A = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  содержит четное (нечетное) число перемен знака тогда и только тогда, когда  $\operatorname{sgn} a_0 = \operatorname{sgn} a_n$  ( $\operatorname{sgn} a_0 = -\operatorname{sgn} a_n$ ).

По предположению индукции, количество корней многочлена  $g(x)$  отличается от  $p$  на четное число. Число же корней многочлена  $f$  на единицу больше, а число  $q$  перемен знака в ряду его коэффициентов больше  $p$  и имеет другую четность. Поэтому разность между  $q$  и числом положительных корней многочлена  $f$  четна.

#### Упражнения

8. Сколько отрицательных корней имеет уравнение

$$a) \quad x^3 - 3x + 1 = 0; \quad б) \quad x^5 - 4x + 2 = 0?$$

9. Докажите, что число отрицательных корней многочлена  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n+1} + \dots + a_0$  не больше числа перемен знака в последовательности  $(-1)^n a_n, (-1)^{n-1} a_{n-1}, \dots, a_0$  и отличается от него на четное число.

#### Квазимногочлены

Квазимногочленами называют функции вида

$$f(x) = a_0 b_0^x + a_1 b_1^x + \dots + a_{k-1} b_{k-1}^x + a_k b_k^x. \quad (1)$$

Приставка «квази», означающая «как будто», свидетельствует о том, что функции такого вида во многих отношениях ведут себя так, как будто они – обычные многочлены.

Договоримся записывать квазимногочлены таким образом, что  $0 < b_0 < b_1 < \dots < b_{k-1} < b_k$ . Будем также считать, что в последовательности  $A = (a_0, a_1, \dots, a_k)$  нет нулей. Таковую форму записи будем называть стандартной.

**Теорема 2.** Число действительных корней квазимногочлена, записанного в стандартной форме, не превосходит числа перемен знака в последовательности его коэффициентов.

**Доказательство.** Снова проведем индукцию по числу перемен знака. Если это число равно нулю, то все коэффициенты квазимногочлена имеют один знак, и тот же знак будет иметь значение квазимногочлена в любой точке, т.е. число его корней будет равно нулю. Это дает нам базу индукции.

Предположим теперь, что мы уже доказали справедливость теоремы для всех квазимногочленов, последовательность коэффициентов которых содержит меньше  $p$  перемен знака. Пусть последовательность коэффициентов квазимногочлена (1) содержит  $p$  перемен знака. Не ограничивая общности, можем считать, что среди его коэффициентов нет нулей.

Возьмем любое  $l$ , для которого  $a_{l-1} a_l < 0$ , и зафиксируем произвольное число  $b$ , удовлетворяющее неравенствам  $b_{l-1} < b < b_l$ . Рассмотрим квазимногочлен

$$g(x) = b^{-x} f(x) = a_0 c_0^x + a_1 c_1^x + \dots + a_{k-1} c_{k-1}^x + a_k c_k^x,$$

где  $c_i = \frac{b_i}{b}$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ . Очевидно, он имеет столько же корней, сколько  $f(x)$ , а последовательность его коэффициентов содержит ровно  $p$  перемен знака.

Рассмотрим производную квазимногочлена  $g(x)$ :

$$g'(x) = a_0 c_0^x \ln c_0 + \dots + a_{l-1} c_{l-1}^x \ln c_{l-1} + \\ + a_l c_l^x \ln c_l + \dots + a_k c_k^x \ln c_k.$$

Индекс  $l$  является местом перемены знака в последовательности коэффициентов квазимногочлена  $g(x)$ , но не является местом перемены знака в последовательности коэффициентов квазимногочлена  $g'(x)$ , так как  $\ln c_{l-1} < 0$ , а  $\ln c_l > 0$ . Все остальные переменные знака при дифференцировании остаются на своих местах, так как соседние коэффициенты умножаются при этом на числа одного знака. Значит, последовательность коэффициентов квазимногочлена  $g'(x)$  имеет  $p - 1$  перемен знака, и мы можем воспользоваться предположением индукции.

Согласно ему, квазимногочлен  $g'(x)$  имеет не более  $p - 1$  корней. Обозначим их в порядке возрастания  $x_1, x_2, \dots, x_q$ . На каждом из интервалов  $(-\infty; x_1), (x_1; x_2), \dots, (x_{q-1}; x_q), (x_q; +\infty)$  производная  $g'(x)$  квазимногочлена  $g(x)$  сохраняет знак. Поэтому на каждом из замкнутых интервалов  $(-\infty; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{q-1}; x_q], [x_q; +\infty)$  функция  $g(x)$  строго монотонна и, следовательно, имеет не более одного корня. Число этих интервалов равно  $q + 1$ , значит,  $g(x)$  имеет не более  $q + 1 \leq p$  корней. Шаг индукции завершен.

Теорема доказана. Идея этого доказательства принадлежит французскому математику Эдмону Никола Лагеррру (1834–1886). По аналогии, теорему 2 тоже называют правилом Декарта.

Эта теорема может быть усилена за счет правильного учета кратных корней. Нам не понадобится самый сильный результат, поэтому мы его формулировать не станем. Ограничимся лишь одним уточнением, которое легко усматривается из приведенного выше доказательства.

Может случиться, что корень квазимногочлена  $g(x)$  является корнем его производной  $g'(x)$ . Правило Декарта останется верным, если при подсчете корней мы такой корень посчитаем за два. В самом деле, если  $g(x_i) = g'(x_i) = 0$ , то на отрезках  $[x_{i-1}; x_i]$  и  $[x_i; x_{i+1}]$  других корней нет.

#### Неравенства для степенных средних

Рассмотрим квазимногочлен

$$f(x) = \frac{b_1^x + b_2^x + \dots + b_k^x}{k} - \left( \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_k}{k} \right)^x. \quad (2)$$

Он имеет всего один отрицательный коэффициент. Поэтому, если мы запишем его в стандартной форме<sup>1</sup>, последовательность его коэффициентов будет содержать не больше двух перемен знака. А значит, он имеет не больше двух корней. Но два корня  $x = 1$  и  $x = 0$  очевидны. Поэтому перемен знака ровно две, и, следовательно, член с отрицательным знаком при стандартной записи окажется в середине. А знак нашего

<sup>1</sup> Для этого нужно привести, если можно, подобные и переставить члены в порядке возрастания оснований экспонент.

квазимногочлена при больших  $x$  определяется знаком коэффициента при экспоненте с самым большим основанием; этот коэффициент положителен. В силу приведенного выше уточнения, производная нашего квазимногочлена не может обращаться в ноль в точках  $x = 1$  и  $x = 0$ , следовательно, в этих точках квазимногочлен меняет знак. Отсюда немедленно следует, что

$$\frac{b_1^x + b_2^x + \dots + b_k^x}{k} \geq \left( \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_k}{k} \right)^x$$

при  $x \geq 1$  или  $x \leq 0$ , и выполняется неравенство противоположного знака, если  $0 < x < 1$ .

Воспользуемся монотонностью степенной функции, которая возрастает, когда показатель степени положителен, и убывает в противном случае. Мы получим, что

$$\left( \frac{b_1^x + b_2^x + \dots + b_k^x}{k} \right)^{\frac{1}{x}} \geq \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_k}{k}, \text{ если } x \geq 1,$$

и

$$\left( \frac{b_1^x + b_2^x + \dots + b_k^x}{k} \right)^{\frac{1}{x}} \leq \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_k}{k}, \text{ если } x < 1.$$

Нетрудно заметить, что приведенное доказательство не проходит, когда все числа  $b_1, b_2, \dots, b_k$  совпадают, но этот случай тривиален.

Фиксируя различные значения  $x$ , отсюда можно получить много интересного. Так, при  $x = 2$  получаем неравенство

$$\sqrt{\frac{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_k^2}{k}} \geq \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_k}{k}$$

между средним квадратическим и средним арифметическим, а при  $x = -1$  — неравенство

$$\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_k}{k} \geq \frac{k}{\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_k}}$$

между средним арифметическим и средним гармоническим. Да и доказанное попутно утверждение о том, что среднее арифметическое нескольких чисел лежит между самым большим и самым маленьким из усредняемых чисел, хотя и совсем простое, но тоже заслуживает внимания. Но и этим число «бесплатных» следствий не ограничивается.

Мы выяснили, что квазимногочлен (2) принимает положительные значения при  $x < 0$  и отрицательные при  $0 < x < 1$ . Значит, он убывает вблизи точки  $x = 0$ . Но тогда его производная в этой точке, т.е.

$$\frac{\ln b_1 + \ln b_2 + \dots + \ln b_k}{k} - \ln \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_k}{k},$$

отрицательна. Отсюда немедленно получается неравенство

$$\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_k}{k} \geq \sqrt[k]{b_1 b_2 \dots b_k}.$$

Таким образом, мы почти без труда получили знаменитое неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим. Говоря об этом неравенстве, обычно ссылаются на «Курс анализа» Коши, первое издание которого вышло в 1821 году. Впрочем, мне не приходилось видеть утверждения о том, что именно там это неравенство появилось впервые. Его частные случаи заведомо были известны и раньше. Так, неравенство Коши для двух чисел содержится уже в «Началах» Евклида.

Но и это не все. Как и выше, мы замечаем, что производная функции (2) при  $x = 1$  положительна. Следовательно,

$$\frac{b_1 \ln b_1 + b_2 \ln b_2 + \dots + b_k \ln b_k}{k} > \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_k}{k} \ln \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_k}{k}.$$

Это неравенство не имеет «имени собственного». Но оно играет фундаментальное значение в теории информации и статистической физике (оно имеет прямое отношение ко второму началу термодинамики). Поэтому на него стоит обратить внимание.

### Неравенство Гёльдера

Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_k$  и  $b_1, b_2, \dots, b_k$  — положительные числа. Рассмотрим квазимногочлен

$$f(x) = a_1^x b_1^{1-x} + a_2^x b_2^{1-x} + \dots + a_k^x b_k^{1-x} - (a_1 + a_2 + \dots + a_k)^x (b_1 + b_2 + \dots + b_k)^{1-x}.$$

В силу правила Декарта, он имеет не более двух корней, а два его корня  $x = 0$  и  $x = 1$  очевидны. Полагая  $p = \frac{1}{x}$ ,  $q = \frac{1}{1-x}$ ,  $A_i = a_i^p$ ,  $B_i = b_i^q$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , получим следующий важный результат.

Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_k$  и  $B_1, B_2, \dots, B_k$  — неотрицательные числа и  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Тогда если числа  $p$  и  $q$  положительны, то выполняется неравенство Гёльдера

$$A_1 B_1 + A_2 B_2 + \dots + A_k B_k \leq \left( A_1^p + A_2^p + \dots + A_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( B_1^q + B_2^q + \dots + B_k^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

а если одно из чисел  $p$  или  $q$  отрицательно, то выполняется обратное неравенство.

Неравенство Гёльдера обобщает известное утверждение о том, что скалярное произведение векторов не превосходит произведения их модулей. Этим и определяется его важность.

### Неравенство Швейцера

Пусть  $m$  и  $M$  — положительные числа и при любом  $i = 1, \dots, k$  выполняются неравенства  $m \leq b_i \leq M$ . Докажем, что тогда

$$(b_1 + b_2 + \dots + b_k) + mM \left( \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_k} \right) \leq k(m + M).$$

В этом неравенстве нетрудно увидеть среднее арифметическое и среднее гармоническое. Поэтому имеет смысл вспомнить функцию

$$f(x) = \frac{b_1^x + b_2^x + \dots + b_k^x}{k} - \left( \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_k}{k} \right)^x,$$

которая помогла нам доказать неравенство между этими двумя средними. С помощью чисел  $m$  и  $M$  сконструируем еще квазимногочлен

$$g(x) = \alpha m^x + \beta M^x - (\alpha m + \beta M)^x.$$

Параметры  $\alpha$  и  $\beta$  подберем так, чтобы выполнялись равенства

$$\alpha + \beta = 1 \text{ и } \alpha m + \beta M = A = \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_k}{k}.$$

Для этого нужно взять

$$\alpha = \frac{M-A}{M-m} \text{ и } \beta = \frac{A-m}{M-m}.$$

Нетрудно проверить, что числа  $\alpha$  и  $\beta$  неотрицательны.

Рассмотрим квазимногочлен  $h(x) = f(x) - g(x)$ . Параметры  $\alpha$  и  $\beta$  выбраны так, что отрицательные члены квазимногочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  сократятся и в последовательности коэффициентов квазимногочлена  $h(x)$  будет две перемены знаков: на первом и последнем местах. Но по построению  $f(0) = f(1) = 0$  и  $g(0) = g(1) = 0$ . Поэтому квазимногочлен  $h(x)$  имеет два корня 0 и 1. А значит,  $h(x) > 0$  при  $0 < x < 1$  и  $h(x) < 0$  при  $x < 0$  и при  $x > 1$ . В частности,  $h(-1) \leq 0$ , что и дает нужное нам неравенство.

Пусть  $m$  и  $M$  – положительные числа, и при любом  $i = 1, \dots, k$  справедливы неравенства  $m \leq b_i \leq M$ . Тогда выполняется неравенство Швейцера

$$(b_1 + b_2 + \dots + b_k) \left( \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_k} \right) \leq \frac{(m+M)^2}{4mM} k^2.$$

Докажем это неравенство. В силу полученного выше результата,

$$(b_1 + b_2 + \dots + b_k) \left( \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_k} \right) \leq \frac{1}{mM} k^2 A(m+M-A),$$

$$\text{где } A = \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_k}{k}.$$

Остается заметить, что из простейшего варианта неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим следует

$$A(m+M-A) \leq \frac{(A+(m+M-A))^2}{4} = \frac{(m+M)^2}{4}.$$

Итак, мы доказали, что при выполнении условий задачи отношение среднего арифметического к среднему гармоническому нескольких чисел не превосходит  $\frac{(m+M)^2}{4mM} k^2$ . В этом смысле оно обращает «классическое» неравенство, согласно которому это отношение больше единицы.

Попробуйте теперь решить следующие упражнения.

#### Упражнения

**10** (олимпиада Московской области, 1995 г.). Решите уравнение

$$x^{19} + x^{95} = 2x^{19+95}.$$

**11.** Сколько действительных корней имеет уравнение

$$x^5 + 2x^3 - x^2 + x - 1 = 0?$$

**12** (Ленинградская олимпиада, 1988 г.). Вещественные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $0 \leq a$ ,  $b \leq 1$ . Докажите, что

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} \leq 1.$$

**13** (Ленинградская олимпиада, 1980 г.). Докажите, что для любых  $a, b, c$  из отрезка  $[0; 1]$  выполнено неравенство

$$3(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - 2abc(a+b+c) \leq 3.$$

**14** (Московская олимпиада, 1952 г.). Докажите, что при целом  $n \geq 2$  и  $|a| < 1$  справедливо неравенство

$$(1-a)^n + (1+a)^n < 2^n.$$

**15** (из материалов жюри Международной олимпиады, 1982 г.). Докажите, что для любых положительных чисел  $a \neq 1$ ,  $x < 1$

справедливо неравенство

$$\frac{1-a^x}{1-a} < (1+a)^{x-1}.$$

**16.** Пусть  $b_1 < b_2 < \dots < b_k$  – положительные, а  $p$  и  $q$  – произвольные действительные числа. Докажите, что если  $p$  и  $q$  одного знака, то

$$\frac{b_1^{p+q} + b_2^{p+q} + \dots + b_k^{p+q}}{k} \geq \frac{b_1^p + b_2^p + \dots + b_k^p}{k} \frac{b_1^q + b_2^q + \dots + b_k^q}{k},$$

а если  $p$  и  $q$  имеют разные знаки, то выполняется обратное неравенство.

**17** («Задачник «Кванта», М620). Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – действительные числа такие, что  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ . Докажите, что сумма модулей  $2^n$  чисел  $\pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n$  (по всевозможным комбинациям знаков «+» и «-») не превосходит  $2^n$ .

**18.** Пусть  $b_1, b_2, \dots, b_k$  и  $p_1, p_2, \dots, p_k$  – положительные числа. Докажите, что

$$b_1^{p_1} b_2^{p_2} \dots b_k^{p_k} \leq \left( \frac{p_1 b_1 + p_2 b_2 + \dots + p_k b_k}{p_1 + p_2 + \dots + p_k} \right)^{p_1 + p_2 + \dots + p_k}.$$

**19.** Пусть  $b_1, b_2, \dots, b_k$  – положительные числа. Докажите, что

$$\sqrt[k]{\frac{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_k^2}{k}} \leq \sqrt[3]{\frac{b_1^3 + b_2^3 + \dots + b_k^3}{k}}.$$

**20** (из материалов жюри Международной олимпиады). Докажите, что для любых положительных чисел  $a \leq b \leq c \leq d$  справедливо неравенство  $a^b b^c c^d d^a \geq b^a c^b d^c a^d$ .

**21** (Санкт-Петербургская олимпиада, 1996 г.). Докажите для любых положительных чисел  $a$  и  $b$  неравенство

$$a^b b^a \leq \left( \frac{a+b}{2} \right)^{a+b}.$$

**22.** Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_k$  и  $b_1, b_2, \dots, b_k$  – положительные числа. Докажите, что

$$\begin{aligned} a_1 \ln \frac{a_1}{b_1} + a_2 \ln \frac{a_2}{b_2} + \dots + a_k \ln \frac{a_k}{b_k} &\geq \\ &\geq (a_1 + a_2 + \dots + a_k) \ln \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{b_1 + b_2 + \dots + b_k}. \end{aligned}$$

**23.** Пусть  $a_0, a_1, \dots, a_k$  и  $b_0, b_1, \dots, b_k$  – такие действительные числа, что выполняется хотя бы одно из неравенств  $a_0^2 > a_1^2 + \dots + a_k^2$  и  $b_0^2 > b_1^2 + \dots + b_k^2$ . Докажите, что тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned} (a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_k^2)(b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_k^2) &\leq \\ &\leq (a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - \dots - a_k b_k)^2. \end{aligned}$$

**24.** Сумма положительных чисел  $a, b, c$  и  $d$  равна 1. Докажите, что

$$3 + \sqrt{5} \leq \sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1} \leq 4\sqrt{2}.$$

**25.** Пусть  $m$  и  $M$  – положительные числа и при любом  $i = 1, \dots, k$  выполняются неравенства  $m \leq b_i \leq M$ , а  $a_1, a_2, \dots, a_k$  – произвольные действительные числа. Докажите, что

$$\begin{aligned} (a_1^2 b_1 + a_2^2 b_2 + \dots + a_k^2 b_k) \left( \frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_k^2}{b_k} \right) &\leq \\ &\leq \frac{(m+M)^2}{4mM} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2)^2. \end{aligned}$$

**26** (из материалов жюри Международной олимпиады, 1979 г.). Для заданного числа  $n \geq 2$  найдите наибольшее и наименьшее значения произведения  $a_1 a_2 \dots a_n$  при условии, что  $a_i \geq 1/n$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$ .



# Теплоемкость равновесных тепловых процессов

**В. МОЖАЕВ**

**Т**ЕПЛОЕМКОСТЬЮ С ТЕЛА (В ГАЗООБРАЗНОМ, ЖИДКОМ или твердом состоянии) называют отношение бесконечно малого количества теплоты  $\Delta Q$ , полученного этим телом, к соответствующему приращению температуры  $\Delta T$ :

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

В случае единичной массы тела теплоемкость называют удельной, а если масса тела равна массе одного моля, то говорят о молярной теплоемкости.

В этой статье речь пойдет о теплоемкости идеального газа.

Следует подчеркнуть, что теплоемкость не является функцией состояния тела, а характеризует процесс, по которому тело из состояния с температурой  $T$  переходит в состояние с температурой  $T + \Delta T$ . Например, если такой переход происходит при постоянном объеме, то это будет теплоемкость при постоянном объеме:

$$C_V = \left( \frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_V.$$

В случае изобарического процесса мы имеем дело с теплоемкостью при постоянном давлении:

$$C_p = \left( \frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_p.$$

В одних процессах теплоемкость остается постоянной и не зависит от параметров, характеризующих состояние тела (такие процессы называют политропическими), а в других процессах теплоемкость может непрерывно изменяться и даже испытывать скачки.

Рассмотрим на конкретных примерах поведение теплоемкости идеального газа в различных тепловых процессах.

**Задача 1.** Найдите молярную теплоемкость одноатомного идеального газа для процесса, в котором давление  $p$  пропорционально объему  $V$ .

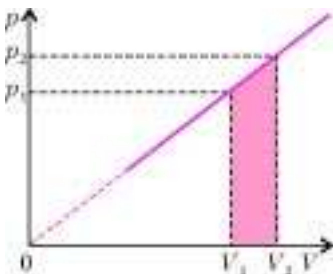


Рис. 1

Запишем уравнение такого процесса:

$$p = \alpha V,$$

где  $\alpha$  — некоторая положительная константа. Этот процесс изображен прямой линией на рисунке 1.

Пусть один моль одноатомного идеального газа находится в равновесном состоянии 1, которое при-

надлежит данной прямой. Параметры газа в этом состоянии: объем  $V_1$  и давление  $p_1$ . Подведем к газу небольшое количество теплоты  $\Delta Q$ , и газ перейдет в новое состояние 2 с параметрами  $V_2$  и  $p_2$ . При этом все промежуточные состояния, так же, как и состояние 2, лежат на данной прямой. По первому началу термодинамики, подведенное количество теплоты частично пошло на изменение внутренней энергии газа, а частично — на работу, которую совершил газ против внешних сил:

$$\Delta Q = \Delta U + A = C_V (T_2 - T_1) + A.$$

Здесь  $T_1$  и  $T_2$  — температуры газа в состояниях 1 и 2. Работа, совершенная газом, численно равна площади трапеции, выделенной на рисунке 1:

$$A = \frac{(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)}{2} = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{2} = \frac{R(T_2 - T_1)}{2}.$$

При записи этой цепочки равенств был использован тот факт, что  $p_1 V_1 = p_2 V_2$  (из подобия соответствующих треугольников), а также уравнение состояния  $pV = RT$ , где  $R$  — универсальная газовая постоянная. После подстановки выражения для  $A$  в уравнение первого начала термодинамики получим

$$\Delta Q = \left( C_V + \frac{R}{2} \right) (T_2 - T_1).$$

По определению теплоемкости,

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta Q}{T_2 - T_1} = C_V + \frac{R}{2}.$$

Для одноатомного газа  $C_V = \frac{3}{2}R$ , поэтому окончательно

$$C = 2R.$$

Сделаем некоторые замечания.

1. Надо прекрасно понимать, что полученный результат имеет смысл только для таких параметров  $p$  и  $V$ , при которых газ можно считать идеальным.

2. Если внимательно посмотреть на полученный результат  $C = C_V + R/2$  и вспомнить, что  $C_p = C_V + R$ , то можно заметить, что наша теплоемкость  $C$  равна среднему значению между  $C_p$  и  $C_V$ :

$$C = \frac{C_p + C_V}{2}.$$

3. Единственным параметром, изменяющим характер теплового процесса, в нашем случае является тангенс угла наклона прямой  $\alpha$ . Но наша теплоемкость не зависит от  $\alpha$ , и мы оказываемся на «необитаемом острове» и никак не можем достигнуть ни  $C_p$  ни  $C_V$ . С математической точки зрения, так оно и есть: изменяя только один параметр  $\alpha$ , мы не сможем перейти к процессам  $V = \text{const}$  или  $p = \text{const}$ . Промежуточным процессом, позволяющим перейти от нашего процесса к изохорному или изобарному процессам, является процесс  $p = \alpha V + \beta$  (см. в Упражнениях задачу 1).

**Задача 2.** Используя первое начало термодинамики, уравнение состояния и выражение для внутренней энергии идеального газа, получите уравнение (например, в координатах  $p$  и  $V$ ) такого процесса, в котором молярная теплоемкость газа постоянна и равна  $C$ .

Рассмотрим один моль идеального газа, молярная теплоемкость которого постоянна и равна  $C$ . Пусть этот газ находится в равновесном состоянии с параметрами  $p$ ,  $V$  и  $T$ , которые связаны между собой уравнением состояния

$$pV = RT.$$

Подведем к газу небольшое количество теплоты  $\Delta Q$ . Это тепло пойдет на изменение внутренней энергии газа и на

работу, которую совершит газ при своем расширении:

$$\Delta Q = C_V \Delta T + p \Delta V.$$

С другой стороны,

$$\Delta Q = C \Delta T.$$

Отсюда получим

$$(C - C_V) \Delta T = p \Delta V,$$

или

$$(C - C_V) \Delta T = \frac{RT}{V} \Delta V.$$

Разделим переменные  $T$  и  $V$ :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{R}{C - C_V} \frac{\Delta V}{V}.$$

Проинтегрируем обе части данного уравнения и получим

$$\ln T = \frac{R}{C - C_V} \ln V + \text{const},$$

или, проведя соответствующие математические преобразования,

$$TV^{\frac{R}{C - C_V}} = \text{const}.$$

Константа в последнем уравнении не равна константе в предыдущем уравнении, но это не имеет никакого значения.

Мы получили уравнение процесса с постоянной молярной теплоемкостью  $C$  в переменных  $T$  и  $V$ . Найдем эквивалентное выражение данного процесса в переменных  $p$  и  $V$ . Для этого воспользуемся выражением для температуры из уравнения состояния:  $T = \frac{pV}{R}$  и получим

$$pV^{\frac{C - C_V - R}{C - C_V}} = \text{const}.$$

Процессы с постоянной теплоемкостью называют политропическими процессами, а последние два уравнения – уравнениями политропы. Рассмотрим известные процессы с постоянной теплоемкостью:

1) если  $C = C_V$ , то из уравнения политропы получим, что  $V = \text{const}$ , т.е. процесс идет при постоянном объеме (изохорный процесс);

2) если  $C = C_p = C_V + R$ , то  $p = \text{const}$  (изобарный процесс);

3) если  $C = \infty$ , то  $T = \text{const}$  (изотермический процесс);

4) если  $C = 0$ , то  $pV^{\frac{C_V + R}{C_V}} = \text{const}$  – это уравнение адиабатического процесса.

**Задача 3.** Найдите теплоемкость системы, состоящей из закрытого цилиндрического сосуда, в котором расположен подвижный поршень (рис.2). Справа от поршня сосуд заполнен одноатомным идеальным газом с параметрами

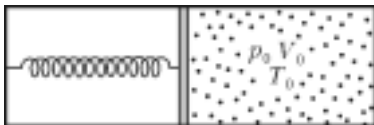


Рис. 2

$T_0, p_0, V_0$ , а слева от поршня – вакуум. Поршень удерживается упругой пружиной. Если газ справа откачать, то поршень будет соприкасаться с правой стенкой сосуда, а пружина не будет деформирована. Теплоемкостями сосуда, поршня и пружины пренебречь.

Из заданного равновесного состояния найдем жесткость пружины  $k$ . Для этого запишем условие неподвижности поршня:

$$k \frac{V_0}{S} = p_0 S,$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения сосуда. Отсюда

$$k = \frac{p_0 S^2}{V_0}.$$

Если от газа отвести некоторое количество теплоты, то поршень сместится вправо и займет новое положение равновесия с объемом  $V$  и давлением  $p$ . Новое условие неподвижности поршня будет иметь вид

$$k \frac{V}{S} = pS.$$

После подстановки в это уравнение выражения для жесткости  $k$  получим

$$pV^{-1} = \frac{p_0}{V_0} = \text{const}.$$

Это уравнение показывает, что данный процесс является политропическим процессом. Приравнивая показатель степени объема в уравнении политропы к минус единице, найдем молярную теплоемкость данного процесса:

$$\frac{C - C_V - R}{C - C_V} = -1, \text{ откуда } C = C_V + \frac{R}{2}.$$

Для одноатомного газа  $C_V = \frac{3}{2}R$ , поэтому  $C = 2R$ . Но это молярная теплоемкость, а число молей нашего газа равно

$$\nu = \frac{p_0 V_0}{RT_0}.$$

Итак, теплоемкость системы, т.е. всего газа, равна

$$C_{\text{сист}} = C\nu = \frac{2p_0 V_0}{T_0}.$$

**Задача 4.** Боковые стенки цилиндра  $AC$  и  $BD$ , его крышка  $CD$  и невесомый поршень  $MN$  выполнены из материала, не проводящего тепло (рис.3). Дно  $AB$  проводит тепло. Поршень может перемещаться в цилиндре без трения. Сверху и снизу от поршня находится по одному молю одноатомного идеального газа. Тепло может подводиться к газу (или отводиться от газа) в нижней части цилиндра через дно  $AB$ . Выразите теплоемкость  $C_1$  нижнего газа через объемы газов  $V_1$  и  $V_2$ . Чему равна при этом теплоемкость  $C_2$  верхнего газа?

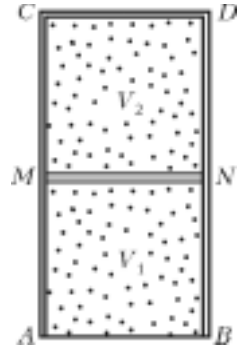


Рис. 3

В исходном состоянии нижний газ занимает объем  $V_1$ , имеет некоторое давление  $p$  и некоторую температуру  $T_1$ , а верхний газ занимает объем  $V_2$ , его давление также  $p$ , а температура  $T_2$ .

Пусть через дно  $AB$  в сосуд подвели небольшое количество теплоты  $\Delta Q$ . Очевидно, что это тепло поступит только к нижнему газу, поскольку поршень  $MN$  не проводит тепло. Следовательно, мы можем записать

$$\Delta Q = C_1 \Delta T_1,$$

где  $C_1$  – теплоемкость, а  $\Delta T_1$  – изменение температуры нижнего газа. По первому началу термодинамики,

$$C_1 \Delta T_1 = C_V \Delta T_1 + p \Delta V_1.$$

Из уравнения состояния найдем связь бесконечно малых приращений параметров нижнего газа  $\Delta T_1$ ,  $\Delta V_1$ , и  $\Delta p$ :

$$\Delta(pV_1) = R \Delta T_1, \text{ или } \Delta p V_1 + p \Delta V_1 = R \Delta T_1.$$

Теперь обратимся к верхнему газу. Над этим газом совершается адиабатический процесс. В задаче 2 было получено уравнение такого процесса (когда теплоемкость равна нулю):

$$pV_2^{\frac{C_V+R}{C_V}} = \text{const}.$$

Обозначим показатель степени при  $V_2$  через  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{C_V + R}{C_V}$$

и возьмем бесконечно малое приращение от обеих частей уравнения адиабаты:

$$\Delta(pV_2^\gamma) = 0.$$

Проведя дифференцирование произведения двух функций, получим

$$\Delta p V_2^\gamma + \gamma p V_2^{\gamma-1} \Delta V_2 = 0,$$

или, после сокращения на  $V_2^{\gamma-1}$ ,

$$\Delta p V_2 + \gamma p \Delta V_2 = 0.$$

Отсюда, поскольку  $\Delta V_2 = -\Delta V_1$ , найдем

$$\Delta p = \gamma p \frac{\Delta V_1}{V_2}.$$

Воспользуемся тем, что приращения давления для нижнего и верхнего газов одинаковы, и получим

$$\gamma p \frac{V_1}{V_2} \Delta V_1 + p \Delta V_1 = R \Delta T_1,$$

откуда

$$\Delta V_1 = \frac{R \Delta T_1}{p \left( 1 + \gamma \frac{V_1}{V_2} \right)}.$$

Затем из первого начала термодинамики найдем теплоемкость нижнего газа:

$$C_1 = C_V + \frac{R}{\left( 1 + \gamma \frac{V_1}{V_2} \right)}.$$

Поскольку для одноатомного газа  $C_V = \frac{3}{2}R$ , а  $\gamma = \frac{5}{3}$ , то

$$C_1 = \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{\left( 1 + \frac{5}{3} \frac{V_1}{V_2} \right)} \right) R = \frac{15}{2} \frac{(V_1 + V_2)}{(5V_1 + 3V_2)} R.$$

Очевидно, что при этом теплоемкость верхнего газа  $C_2 = 0$  (адиабатический процесс).

**Задача 5.** Найдите объем и температуру, при которых теплоемкость одного моля идеального газа в процессе

$p = p_0 - \frac{p_0}{V_0} V$  равна бесконечности.

Уравнение заданного процесса в координатах  $p$  и  $V$  является уравнением прямой, которая изображена на рисунке 4. Если решать задачу в общем виде, то нужно найти зависимость теплоемкости данного процесса от объема, а затем посмотреть, при каком значении объема она стремится к бесконечности. Такой способ решения предложим читателю в качестве самостоятельного упражнения, а сами пойдем по другому пути.

Известен такой процесс, при котором теплоемкость равна бесконечности. Это – изотермический процесс. Следовательно, если на нашей прямой есть такая точка, в которой одна из изотерм касается прямой, то в окрестности этой точки

изотерма аппроксимируется прямой, а теплоемкость в этой точке равна бесконечности.

Запишем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} pV = RT, \\ p = p_0 - \frac{p_0}{V_0} V. \end{cases}$$

Будем искать совместные решения этой системы относительно объема  $V$ . Исключив  $p$ , получим квадратное уравнение

$$V^2 - V_0 V + \frac{V_0 RT}{p_0} = 0.$$

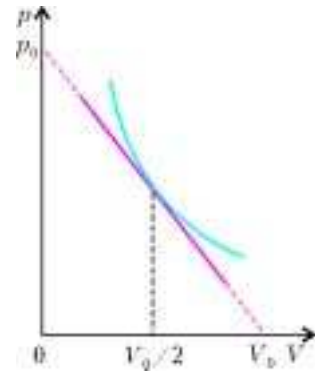


Рис. 4

В общем случае это уравнение имеет два корня:

$$V_{1,2} = \frac{V_0}{2} \pm \sqrt{\frac{V_0^2}{4} - \frac{V_0 RT}{p_0}}.$$

Нас интересует ситуация, когда изотерма касается прямой, а в этом случае система уравнений должна иметь один корень, т.е. подкоренное выражение должно быть равно нулю:

$$\frac{V_0^2}{4} - \frac{V_0 RT}{p_0} = 0.$$

Отсюда мы находим температуру, при которой теплоемкость становится равной бесконечности:

$$T_\infty = \frac{p_0 V_0}{4R},$$

и значение объема для этого состояния:

$$V_\infty = \frac{V_0}{2}.$$

Именно эта ситуация и изображена на рисунке 4.

### Упражнения

1. Вычислите зависимость молярной теплоемкости одноатомного идеального газа от его объема для процесса, в котором давление линейно зависит от объема:  $p = \alpha V + \beta$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  – константы,  $\alpha > 0$ .

2. Нагревается или охлаждается идеальный газ, если он расширяется по закону  $pV^2 = \text{const}$ ? Какова молярная теплоемкость газа в этом процессе?

3. При некотором политропическом процессе гелий был сжат от начального объема 4 л до конечного объема 1 л. Давление при этом возросло от 1 атм до 8 атм. Найдите теплоемкость гелия, если его начальная температура была 300 К.

4. Моль гелия расширяется из начального состояния 1 в конечное состояние 3 в двух процессах (рис.5). Сначала расширение идет в процессе 1–2 с постоянной теплоемкостью  $C = \frac{3}{4}R$ . Затем газ расширяется в процессе 2–3, когда его давление  $p$  прямо пропорционально объему  $V$ . Найдите работу, совершенную газом в процессе 1–2, если в процессе 2–3 он совершил работу  $A$ . Температуры начального и конечного состояний равны.

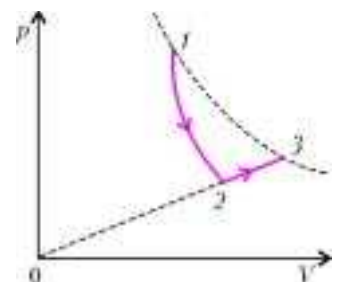


Рис. 5



# XIII Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» в рамках международной программы «Дети. Интеллект. Творчество» при участии Фонда одаренных детей Чехии ( Menza Czech Republic), МГУ им.М.В.Ломоносова, Фонда некоммерческих программ «Династия» и при поддержке компаний «Кирилл и Мефодий», «Физикон», издательского дома «Первое сентября» и журнала «Квант» провел очередную тест-рейтинговую олимпиаду «Интеллектуальный марафон». Олимпиада проходила с 17 по 24 октября 2004 года на базе международного «Юниорцентра», который расположен на берегу одного из красивейших озер Европы в городе Сечь (Чехия).

На олимпиаду приехали участники из разных регионов России, из Казахстана и Норвегии. Одаренные школьники, проявившие интерес к фундаментальным наукам, соревновались в командных и индивидуальных турах по математике, физике, истории научных идей и открытий. Во второй раз участвовали в олимпиаде школьники, интересующиеся экологией и биологией, соревнуясь в командном туре по истории научных идей и открытий и в индивидуальных турах по биологии и экологии.

Церемония открытия олимпиады проходила в замке XIII века. У стен замка участников встретили рыцари той эпохи, которые под барабанный бой проводили всех во внутренний дворик замка. По канонам времен средневековья состоялось открытие олимпиады. На открытии выступили организаторы олимпиады, представители мэрии Пардубицкого края, директор международного «Юниорцентра» и участники олимпиады. После завершения приветственных речей и представления команд-участниц состоялся рыцарский турнир. Рыцарь-победитель повел участников олимпиады осматривать достопримечательности замка.

День завершился устными командными соревнованиями по истории научных идей и открытий в области физики и математики, экологии и биологии. Затем последовали напряженные рабочие дни олимпиады, в которых каждый школьник участвовал в командных и индивидуальных соревнованиях.

В один из экскурсионных дней участники съездили в известный средневековый город — Кутна Гора. Этот город прославился своими серебряными рудниками и монетным двором, в котором чеканились монеты для всей Европы.

Закрытие олимпиады проводилось в Русском культурном центре при посольстве РФ в Праге. Организаторы и члены жюри поблагодарили участников за интересную совместную работу, сказали теплые слова всем, кто помогал в организации и проведении этого мероприятия (особо было отмечено участие Фонда «Династия» и компании «Кирилл и Мефодий»). Впервые МИК «Глюон» совместно с издательским домом «Первое сентября» учредил специальный приз имени И.Л.Соловейчик, который был вручен лучшему ученику по математике и лучшему учителю-математику, воспитавшему ученика-победителя. Церемония награждения прошла в праздничной обстановке. Всем участникам вручили сертификаты и памятные подарки олимпиады, а лучшие в индивидуальных и командных зачетах по всем номинациям были награждены дипломами, медалями, кубками и памятными сувенирами.

Абсолютным победителем олимпиады «Интеллектуальный марафон-2004» в командном зачете стала команда Классического лицея 1 при РГУ (Ростов-на-Дону). Ей был вручен главный приз соревнований — суперкубок и призы от спонсоров. Команда была также лучшей в турах по физике, математике, истории научных идей и открытий; ей были вручены соответствующие малые кубки соревнований. Второе место в общем зачете заняла команда лицея 1511 при МИФИ (Москва). Она также заняла второе место в турах по физике, истории научных идей и открытий и третье место по математике. Команде был вручен большой кубок за второе место в общем зачете и соответствующие дипломы за успехи в командных соревнованиях. На третье место вышла сборная команда Тольятти (Региональный центр МИК «Глюон»), которая также стала второй по математике и третьей по истории научных идей и открытий. Ей также был вручен кубок и диплом за успехи в командных соревнованиях.

В биолого-экологическом направлении олимпиады победу одержала сборная России (представители Электростали, Тольятти, Ростова-на-Дону), на втором месте оказались отдельные команды России и Норвегии, на третьем — Казахстана. Всем им были вручены кубки, дипломы и призы олимпиады.

В индивидуальных соревнованиях абсолютным победителем олимпиады стал Илья Ожогин, ученик 11 класса Классического лицея 1 при РГУ. Ему были вручены большая золотая медаль, малая золотая медаль за первое место по математике, а также бронзовая медаль за третье место по физике. Вторым призером в общем зачете стал ученик того же лицея Алексей Кучмиев, ему были вручены большая серебряная медаль и малая серебряная медаль за второе место по физике. Большую бронзовую медаль в общем зачете завоевал Илья Китанин, того же лицея.

В индивидуальном зачете по физике лучшим стал Кирилл Петров (Классический лицей 1 при РГУ, 11 кл.), ему была вручена малая золотая медаль. Стан Крат (лицей 1511 при МИФИ, 10 кл.) получил серебряную медаль за второе место по математике, а Андрей Крахмалев (лицей 1511 при МИФИ, 11 кл.) был награжден малой бронзовой медалью за третье место по математике.

В индивидуальных соревнованиях по биологии и экологии победу одержала Светлана Усачева (Классический лицей 1 при РГУ, 11 кл.), ей был вручена золотая медаль. Второе место занял Юрий Бобылев (школа 48, Тольятти, 11 кл.), а третьей оказалась Наталья Парамонова (лицей 7, Электросталь, 11 кл.). Им были вручены, соответственно, серебряная и бронзовая медали.

Международный интеллект-клуб «Глюон» приглашает региональные центры, школы, лицеи и гимназии, работающие с одаренными детьми, принять участие в XIV Международной олимпиаде «Интеллектуальный марафон», который пройдет в октябре 2005 года.

Заявки на участие присылайте по адресу: 115522 Москва, Пролетарский проспект, д.15/6, корп.2, МИК «Глюон»  
Телефон: (095)517-80-14, факс: (095)396-82-27,  
e-mail: [gluon@yandex.ru](mailto:gluon@yandex.ru)  
(для получения информации см. также сайт:  
[www.informika.ru/text/goscom/gluon](http://www.informika.ru/text/goscom/gluon))

## ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

## Письменный индивидуальный тур

## Математика

1. Может ли число, оканчивающееся цифрами а) 987654321; б) 123456789, быть квадратом целого числа?

2. Биссектрисы внешних углов при вершинах  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $O$ , причем  $OB = OC$ . Найдите  $AB$ , если  $\angle AOB = \alpha$ , а радиус описанной около треугольника  $ABC$  окружности равен  $R$ .

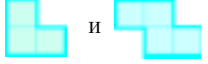
3. Решите уравнение

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} = 3.$$

4. Последовательность  $\{f_n\}$  (числа Фибоначчи) удовлетворяет условиям  $f_1 = f_2 = 1$ ,  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$  при  $n > 2$ . Какие числа вида а)  $3^k$ ; б)  $2^k$  содержатся в этой последовательности?

5. Из вершины треугольника проведен отрезок в точку на противоположной стороне, делящийся на 3 равные части точками его пересечения с вписанной окружностью. Может ли этот отрезок быть а) высотой; б) медианой; в) биссектрисой треугольника?

6. Какое наименьшее значение может принимать сумма всевозможных попарных произведений  $n$  чисел, каждое из которых по модулю не больше 1?

7. Можно ли разрезать квадратный лист клетчатой бумаги  $(2n-1) \times (2n-1)$  на части вида , если а)  $n=2$ ; б)  $n=3$ ; в)  $n=4$ ; г)  $n \geq 5$  — любое натуральное число?

## Физика

1. Мотоциклист начинает разгоняться по круговой трассе, стараясь набрать скорость за минимальное время. Какую часть круга он пройдет к моменту достижения максимальной скорости?

2. Два свинцовых шарика, отпущенных с большой высоты, достигают при падении в воздухе установившихся скоростей 100 м/с и 150 м/с. Чему будет равна установившаяся скорость падения, если шарики соединить длинной невесомой нитью? Сила сопротивления пропорциональна площади поперечного сечения и квадрату скорости.

3. Частица движется в центральном силовом поле  $\vec{F} = -k\vec{r}$  по круговой траектории радиусом  $R_0$ . Внезапно в некоторый момент времени происходит уменьшение коэффициента  $k$  в два раза. Каким будет максимальное удаление частицы от силового центра? По какой траектории будет двигаться частица?

4. В морозную ночь на поверхности озера начинает нарастать лед и за первые 5 ночных часов достигает толщины 5 см. Какой станет толщина льда еще через 5 часов, если температура воздуха не меняется? Теплопроводность льда во много раз больше теплопроводности воды.

5. В вертикальном цилиндре под поршнем находится идеальный одноатомный газ при температуре 280 К. С помощью нагревателя газ очень быстро (так, что поршень не успевает сдвинуться с места) нагревают до температуры 350 К. Чему будет равна температура газа после установления полного равновесия? Снаружи — вакуум.

6. Тонкий проводящий диск толщиной  $d$  и площадью  $S$  падает в вертикальном положении в горизонтальном магнитном поле с индукцией  $B$ , линии которой параллельны плоскости проводника. Найдите ускорение падения диска, если его масса  $m$ .

7. Определите сжатие Юпитера у полюсов  $\Delta R/R_0$  ( $\Delta R$  — разность между радиусами на экваторе и на полюсе,  $R_0$  — средний радиус планеты), если известно, что  $R_0 = 70000$  км,  $g = 20$  м/с<sup>2</sup> у поверхности, а период обращения составляет 10 часов. Считать, что основная масса планеты сосредоточена в плотном компактном сферическом ядре.

## Экология

1. Принцип конкурентного исключения Гаузе гласит: «Два вида с одинаковыми потребностями не могут существовать вместе: один из них через какое-то время обязательно вытеснит другой». Объясните, в чем суть принципа и как этот принцип выполняется в природе.

2. В 60-е годы в период распахки целинных земель в степных районах под зерновые культуры для защиты посевов от степных ветров необходимо было создать лесозащитные полосы. Лесоводы принялись высаживать молодые деревца дубов, но саженцы не приживались, хотя климатические условия и плодородие почв соответствовали потребностям растений. Как вы думаете, в чем была причина гибели растений? О чем необходимо было знать и что необходимо было предусмотреть лесоводам для сохранения жизнеспособности деревьев?

3. Сторонники и противники подписания Киотского протокола (1998) выдвигают определенные доводы в пользу той или иной позиции. Поясните, в чем суть проблемы и как ее можно разрешить.

4. Защитники чистоты городских улиц, скверов и парков сетуют не только на засорение территорий бытовым мусором со стороны безответственных прохожих, но и на недисциплинированность владельцев домашних животных, чьи питомцы оставляют, по мнению этих защитников, тонны экскрементов в самых неподходящих местах. Как вы думаете, почему мы не видим такого количества навозных куч в рекреационных зонах города, где осуществляется выгул собак, а владельцы не озабочены уборкой экскрементов за своими любимцами?

5. Хорошо известно, что живые организмы обладают способностью к неограниченному росту своей численности. Например, потомство одной инфузории туфельки за год может достигнуть цифры в  $75 \cdot 10^{108}$  особей. По объему такое количество заняло бы полый шар, диаметр которого равен расстоянию от Земли до Солнца. Почему в природе этого не происходит? Изобразите графически динамику потенциального и реального роста популяции инфузории туфельки в природе и укажите в определенной последовательности факторы, влияющие на увеличение или снижение численности популяции.

6. Ни для кого не секрет, что концепция устойчивого развития выдвигает острую необходимость поиска новой модели цивилизации, в рамках которой государства были бы призваны обеспечить научно-обоснованное соотношение экологических и экономических интересов общества. Как вы считаете, какие основополагающие принципы следовало бы учесть при составлении свода законов и правил для осуществления государственного регулирования «экоразвития»?

## Биология

1. У целого ряда организмов вегетативное тело, не имеющее настоящих тканей, называют талломом (от греческого *thallós* — молодая ветка, росток, побег), или слоевищем. Расскажите, что собой представляет таллом, у каких организмов он встречается, как осуществляется функционирование организма с таким типом строения.

2. Поверхность клеток эпителиальной ткани большинства организмов покрыта кутикулой (от латинского *cuticula* —

кожица). Что представляет собой кутикула? Для каких целей она служит, как и у кого появляется? Какие функции выполняет кутикула и каково ее значение в процессах жизнедеятельности у различных представителей царств живой природы?

3. Хорошо известно, что у многих представителей царства животных многие органы имеют черты внешнего сходства и различия, например: крыло птицы, бабочки, стрекозы, жука, летучей мыши; лапка таракана, лапка сороконожки, нога улитки, ножка рака, нога лошади, лапка лягушки и так далее. Чем обусловлены черты сходства и различия в строении органов у многих организмов? Что означают термины: гомологичные и аналогичные органы? Какие из перечисленных органов относятся к категории гомологичных, а какие – к категории аналогичных?

4. Большинство ракообразных являются обитателями морей и пресноводных водоемов различного типа и составляют существенную часть водной фауны. Каким же образом жабродышащие ракообразные приспособились к переживанию неблагоприятных условий наземно-воздушной среды при обитании в зоне приливов и отливов или при случайном пребывании на суше?

5. Питание является совокупностью процессов, включающих поступление в организм, переваривание, всасывание и усвоение им пищевых веществ, обеспечивающих рост и жизнедеятельность организма. Для большинства современных людей тема питания является актуальной и модной. Человек все больше задумывается о своем здоровье. Древняя восточная мудрость гласит: «Ты – это то, что ты ешь!» Каким же должен быть рацион современного городского жителя и каким критериям рационального питания он должен удовлетворять?

6. Хорошо известно, что во многих странах существует переход на так называемое «летнее» или «зимнее» время, который оправдывают экономией топливных ресурсов и вырабатываемой энергией, необходимой для обеспечения производственной деятельности человека. Но зачастую врачи «бьют тревогу», заявляя, что никакой экономии не происходит, так как экономисты не учли возможные издержки. Как вы думаете, правы ли врачи?

### Устный командный тур

#### Математика

1. Из пункта  $A$  в пункт  $B$  вышел пешеход. Одновременно с ним из  $B$  в  $A$  выехал велосипедист. Через час пешеход оказался ровно посередине между  $A$  и велосипедистом. Еще через 15 минут они встретились и продолжили свой путь. Сколько времени пешеход шел до  $B$ ? (Скорости пешехода и велосипедиста постоянны.)

2. В трапеции  $ABCD$  боковая сторона  $AB$  равна  $a$ , а расстояние от середины другой боковой стороны до  $AB$  равно  $b$ . Найдите площадь трапеции  $ABCD$ .

3. Может ли делиться на 30030 произведение двух натуральных чисел, сумма которых равна 30030?

4. Какое наименьшее количество «уголков» из трех клеток следует вырезать из шахматной доски  $8 \times 8$  клеток, чтобы из оставшейся части доски нельзя было вырезать ни одного уголка?

5. Найдите углы треугольника  $ABC$ , если его ортоцентр является точкой пересечения двух трисектрис углов  $B$  и  $C$  (трисектрисы – отрезки, делящие угол на три равные части).

6. Что больше:  $5^{100} + 6^{100}$  или  $7^{100}$ ?

7. Можно ли записать в строку 17 чисел так, чтобы сумма любых пяти подряд стоящих чисел была отрицательна, а сумма всех 17 чисел положительна?

8. Делится ли число  $2^{202} + 1$  на  $2^{101} + 2^{51} + 1$ ?

9. На катете  $AC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  взята точка  $M$  так, что  $AM = BC$ , а на катете  $BC$  – точка  $N$  так, что  $BN = MC$ . Найдите угол между прямыми  $AN$  и  $BM$ .

10. На окружности расставлены  $n$  точек, занумерованных подряд числами  $1, 2, 3, \dots, n$ . Двое играют в следующую игру. Каждый по очереди проводит хорду, соединяющую точки с номерами одной четности. Каждая проведенная хорда не должна иметь общих точек (даже концов) с проведенными ранее. Побеждает тот, кто сделал последний ход. Кто выигрывает при правильной игре – начинающий или его партнер, если а)  $n = 2004$ ; б)  $n = 2005$ ?

#### Физика

1. Можно ли на самолете догнать лунную тень, движущуюся по поверхности Земли на широте города Пардубице?

2. Пустая бутылка емкостью 0,5 л имеет массу 250 г. Найдите плотность стекла, из которого сделана бутылка, если известно, что плавающая в воде бутылка тонет, когда ее заполняют водой на 70%.

3. Невесомый стержень длиной  $2l$ , на котором закреплены два одинаковых груза на расстояниях  $0,2l$  от его концов, свободно вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, проходящей через его середину. В некоторый момент грузы освобождаются и начинают скользить по стержню без трения. За какое время грузы достигнут концов стержня?

4. При испытании новой модели электрического чайника, рассчитанного на мощность  $P = 300$  Вт и напряжение сети  $U = 110$  В, оказалось, что вода нагревается почти до  $100^\circ\text{C}$ , но не закипает. За какое время чайник выкипит наполовину, если его подключить к сети напряжением 220 В? Масса воды  $m = 1$  кг, удельная теплота парообразования  $r = 2,3$  МДж/кг.

5. На расстоянии  $r$  от заземленного металлического шарика радиусом  $R$  ( $R \ll r$ ) находится точечный заряд  $q$ . Во сколько раз увеличится сила, действующая на шарик, если к нему поднести второй такой же заряд и расположить его на расстоянии  $r/2$  от шарика так, что отрезки, соединяющие шарик с зарядами, взаимно перпендикулярны?

6. Длинная трубка, закрытая с верхнего конца, выступает из воды на 10 см. Трубка целиком заполнена водой, но содержит маленький пузырек воздуха. Где будет находиться уровень воды в трубке, если ее нагреть до  $100^\circ\text{C}$ ?

7. В лодку налили столько воды, что ее уровень сравнялся с уровнем воды в водоеме. Изменится ли глубина погружения лодки, если в нее положить бревно, плавающее на поверхности воды? Течь в лодке отсутствует.

8. Бруску, сечение которого имеет вид правильного шестиугольника (большой карандаш), сообщили начальную скорость в поперечном направлении. При каких значениях коэффициента трения он будет скользить не перекатываясь?

9 (экспериментальная). Демонстрируется опущенная в воду таблетка аспирина Упса, которая некоторое время лежит на дне, а затем всплывает. Требуется объяснить наблюдаемое явление.

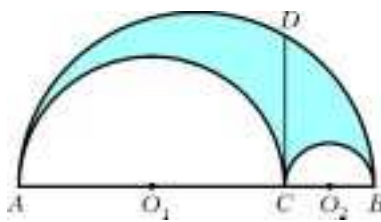
10. В рекламе известной марки чешского пива «Великоповицкий козел» есть такая сцена: для проверки качества сваренного пива пивовар садится кожаными штанами на облитую свежим пивом деревянную скамью и тащит ее на себе. Может ли такое быть на самом деле, и каков физический механизм этого явления? Выделите главный из возможных механизмов и сделайте оценки действующей силы, введя все необходимые параметры.



## История научных идей и открытий

## Математика

1. Архимед, пытаясь решить задачу о квадратуре круга, рассмотрел *арбелос* – фигуру, ограниченную тремя полуокружностями (см. рисунок). Найдите площадь арбелоса, если  $CD = a$ .



2. Великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс измерял углы треугольника, образованного вершинами трех удаленных друг от друга гор. Зачем он это делал?

3. Великий астроном древности, создатель геоцентрической системы мира Клавдий Птолемей был и выдающимся математиком. В частности, он доказал, что сумма произведений противоположных сторон вписанного четырехугольника равна произведению его диагоналей. Какая формула тригонометрии стоит за этой теоремой?

4. Пьер Ферма впервые поставил вопрос о представимости простых чисел квадратичными формами, т.е. о возможности записать данное простое число  $p$  в виде  $p = ax^2 + 2bxy + cy^2$ , где  $a, b, c, x, y$  – целые числа. Докажите, что если  $p = x^2 + xy + y^2$ , то  $p = 6k + 1$  при некотором  $k$ .

5. Французский историк А.Вандаль писал: «... он слишком большой математик для того, чтобы судить о политических делах. Он ни одного вопроса не рассматривал под настоящим углом зрения, он всюду искал хитроумных комбинаций, высказывал лишь математические идеи и вносил в администрацию дух бесконечно малых...». О каком великом математике и астрономе идет речь? Назовите также еще нескольких крупных математиков – государственных деятелей.

## Физика

1. Описывая историю своих астрономических открытий, этот замечательный ученый написал: «...Наконец, не щадя ни труда, ни издержек, я дошел до того, что построил себе прибор, до такой степени превосходный, что с его помощью предметы казались почти в тысячу раз больше и более чем в тридцать раз ближе, чем при наблюдении простым глазом». В это же время похожий телескоп построил и другой известный ученый.

1) В каком году это происходило? (Укажите хотя бы примерную дату.)

2) Назовите этих двух ученых.

3) В каких городах они жили (когда изобретали эти приборы)?

4) В процитированном выше отрывке говорится о труде и издержках. В чем заключался основной труд, и почему необходимы были значительные денежные затраты?

5) В чем состояло различие между конструкциями телескопов этих двух ученых?

6) Какая конструкция применялась в астрономии гораздо чаще?

7) Перечислите несколько астрономических открытий, сделанных первым из этих двух ученых с помощью телескопа.

2. В 1600 году был опубликован научный труд, озаглавленный «О магните, магнитных телах и большом магните – Земле».

1) Кто автор этого труда?

2) Какая из идей, высказанных в этом труде, облегчила Ньютону создание закона всемирного тяготения?

3) Какой ученый практически одновременно с Ньютоном сформулировал закон тяготения? Чем еще известен этот ученый?

3. На купюрах американской валюты изображены основатели Соединенных Штатов Америки и некоторые выдающиеся политические деятели.

1) На купюре какого достоинства изображен известный ученый-естествоиспытатель (в частности, он изобрел кресло-качалку)?

2) Каков наиболее существенный вклад этого ученого в науку?

3) В чем заключалась его общественная деятельность на благо своей родины?

4) Какой писатель написал роман об одном из эпизодов жизни этого ученого? Как он называется?

5) Какие российские ученые примерно в то же время занимались той же самой научной проблемой? Почему об одном из них английский религиозный философ Джозеф Пристли сказал, что он «нашел свою завидную смерть»?

4. В истории науки первой половины XX века большую роль сыграло развитие работ Дж.Дж.Томсона о применении силы Лоренца для определения удельного заряда и массы электрона. Ученик Томсона сконструировал прибор, который он называл масс-спектрографом, и за период с 1919 по 1937 год значительно улучшил его конструкцию, добившись точности измерения масс атомов до 0,001%.

1) Назовите имя этого ученого.

2) В чем состояли первые важные результаты применения масс-спектрографов, за которые этот ученый получил Нобелевскую премию по химии?

3) В чем заключалось главное практическое значение результатов точных измерений масс атомов для человечества?

5. В 1880 году окончил Пражский университет (получив второе высшее техническое образование) один из самых выдающихся изобретателей и конструкторов в области электротехники и радиотехники. Он работал в разных фирмах и получал за свою работу крупные вознаграждения – например, по одному доллару за каждый киловатт мощности создаваемых им двигателей. Это позволяло ему думать только о работе. Одно из его дел – постройка Ниагарской гидроэлектростанции.

1) Каково имя этого ученого и изобретателя?

2) В какой стране он жил и работал с 1884 года до своей смерти в возрасте 87 лет?

3) Какие его изобретения вам известны?

4) Какая физическая единица названа его именем? Выразите размерность этой величины через основные единицы Международной системы единиц.

Публикацию подготовили В.Альминдеров, А.Альминдерова, Б.Алиев, А.Егоров, Ж.Раббот, А.Черноуцан

# Всероссийская студенческая олимпиада по физике

2 ноября 2004 года в Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э.Баумана прошла Всероссийская олимпиада по физике среди студентов технических вузов. К участию в олимпиаде были приглашены все ведущие технические вузы европейской части страны. Состав каждой команды — 3 студента до третьего курса включительно.

Участникам олимпиады был предложен вариант из 8 задач (в зависимости от сложности задачи оценивались от 5 до 10 баллов) и разрешалось пользоваться справочной литературой.

По результатам олимпиады в командном зачете первое место заняла команда Уфимского государственного авиационного технического университета (УГАТУ) (49 баллов), второе место — команда МГТУ им. Н.Э.Баумана (29 б.), третье место — команда Московского государственного института стали и сплавов (29 б.).

В личном зачете первое место завоевал А.Касаткин (УГАТУ, 18 баллов), второе место — А.Искандаров (УГАТУ, 17 б.), третье место — И.Магнитский (МГТУ им. Н.Э.Баумана, 16 б.).

## Задачи олимпиады

1. Точка движется прямолинейно с постоянной скоростью  $v$ . Другая точка, скорость которой постоянна по модулю и равна  $u > v$ , догоняет первую таким образом, что в любой момент времени угол между вектором скорости второй точки и линией, соединяющей обе точки, равен  $\phi$  и направлен на опережение движения первой точки. В начальный момент времени вторая точка находится на перпендикуляре к траектории первой точки на расстоянии  $L$  от нее. Определите угол первого пересечения траекторий движения точек. Рассмотрите два возможных случая.

2. Космический зонд движется в свободном пространстве со скоростью  $v_0$  и должен развернуться на обратный курс, но запасов топлива почти не осталось. Однако на пути зонда находится массивная планета, движущаяся также со скоростью  $v_0$  так, что ее вектор скорости направлен под углом  $120^\circ$  к вектору скорости зонда. Определите, какую максимальную скорость в обратном направлении может приобрести зонд, используя силу притяжения планеты.

3. Полый цилиндр радиусом  $R$  и массой  $m$  стоит на таком же полом цилиндре, который, в свою очередь, стоит на гладкой поверхности стола. Оси цилиндров параллельны. Определите угол поворота верхнего цилиндра в случае потери им равновесия, при котором произойдет отрыв верхнего цилиндра от нижнего. Проскальзывание между цилиндрами отсутствует.

4. Космическая энергоустановка представляет собой тепловую машину. В ней в качестве нагревателя используется ядерный реактор с температурой  $T_1$ , а в качестве холодильника — тепловой излучатель, представляющий собой абсолютно черное тело с площадью поверхности  $S$ . Определите максимальную мощность, которую способна выработать данная тепловая машина, считая ее идеальной.

5. Полусфера радиусом  $R$ , основание которой закрыто круглой пластиной радиусом  $R$ , заряжена вместе с пластиной равномерно по поверхности зарядом плотностью  $\sigma$ . Какую максимальную кинетическую энергию приобретает пластина при удалении?

6. Два одинаковых металлических шара находятся близко друг от друга. Если один шар зарядить зарядом  $q$ , то его потенциал станет  $\phi_1$ , а потенциал второго шара будет  $\phi_2$ . Какая энергия выделится в резисторе, если им замкнуть второй шар на землю?

7. Три концентрических металлических цилиндра, радиусы которых  $R_1 = R$ ,  $R_2 = 2R$ ,  $R_3 = 3R$ , а длина  $l$ , вставлены друг в друга и на одном конце закорочены. На другом конце первый и третий цилиндры замкнуты между собой и подключены к выводу  $A$ , а второй цилиндр подключен к выводу  $B$ . Определите индуктивность между выводами  $A$  и  $B$ .

8. Две зонные пластинки закрывают четные зоны Френеля: одна для длины волны  $\lambda$ , а другая — для  $2\lambda$ . При этом интенсивность света в точке наблюдения в обоих случаях равна  $I_m$ . Какова будет интенсивность света, если пластинки поменять местами? Все остальные геометрические размеры считать одинаковыми.

*Публикацию подготовили  
М.Яковлев, В.Голубев*

## ИНФОРМАЦИЯ

### Заочная физическая школа при физическом факультете МГУ

Физический факультет МГУ объявляет прием учащихся в 10 и 11 классы Заочной физической школы (ЗФШ) при физическом факультете на очередной учебный год.

Физический факультет МГУ готовит физиков — теоретиков и экспериментаторов по всем разделам современной физики и астрономии. Фундаментальное университетское образование позволяет выпускникам физического факультета быстро осваивать специфику любого научного или

технического направления, успешно работать на стыке научных направлений — таких, например, как геофизика и биофизика, астрофизика и химическая физика, компьютерная физика и математическое моделирование. Выпускникам физического факультета присваивается степень магистра.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику, лучше подготовиться к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения, прежде всего — на физический факультет МГУ.

Прием в ЗФШ проводится по результатам решения вступительного задания. Решение вступительного задания необходимо отослать *до 1 октября* по адресу:

119899 Москва, Воробьевы горы, МГУ, физический факультет, ЗФШ.

В письмо вложите анкету (заполненную по приведенному образцу) и конверт с Вашим адресом.

Фамилия, имя, отчество	Ковалевский Владимир Леонидович
Класс ЗФШ	10
Профессия родителей	мать – врач, отец – инженер
Подробный домашний адрес	120713 Москва, ул. Столетья, д.3, кв.13
Номер школы	школа 564

Решение о зачислении в ЗФШ будет сообщено до 20 октября.

Принятым в ЗФШ в течение года высылаются контрольные задания по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Решенные задания оцениваются, рецензируются и отсылаются обратно. Учащиеся 10 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 11 класс. Успешно прошедшие обучение получают удостоверение об окончании ЗФШ (при поступлении на физический факультет эти удостоверения учитываются приемной комиссией).

Справки по телефону (095) 939-54-95.

Для проживающих в Москве и Московской области имеется Вечерняя физико-математическая школа. Телефон для справок 939-38-78 (с 14 до 16 часов по рабочим дням).

### Вступительное задание

#### 10 класс

1. На рисунке 1 приведен график зависимости скорости материальной точки, движущейся прямолинейно, от времени. Постройте график изменения со временем средней скорости и вычислите ее значение в конечный момент времени  $\tau$ . Ускорения  $a$  и  $b$  и время  $T$  считать известными.

Рис. 1

2. Шарик, летящий прямолинейно со скоростью  $v$ , налетает на стенку, которая движется навстречу шарiku со скоростью  $u$  (рис. 2). Происходит абсолютно упругий удар. Определите скорость шарика после удара. Ответ дайте в векторной форме.

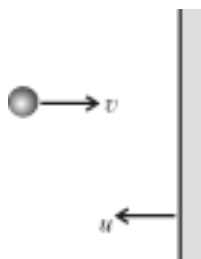


Рис. 2

3. Человек спускается по ходу движущегося эскалатора. В первый раз он насчитал  $n = 100$  ступенек, а во второй раз, когда он шел вдвое быстрее,  $m = 150$  ступенек. Сколько ступенек человек насчитал бы на неподвижном эскалаторе?

4. Автобус движется по шоссе со скоростью  $v_1$ . В поле на расстоянии  $H$  от шоссе и на расстоянии  $L$  от автобуса находится человек, который может двигаться по полю со скоростью  $v_2$ . В каком направлении должен двигаться человек, чтобы успеть к автобусу в какой-либо точке шоссе?

5. С крыши дома вертикально вниз бросают камень с начальной скоростью  $v_0$ . Через время  $\tau$  с такой же начальной скоростью бросают вертикально вверх второй камень. Найдите зависимость от времени  $t$  скорости второго камня относительно первого и расстояния  $l$  между ними ( $t > \tau$ ).

6. Мальчик бросает теннисный мяч, который, ударившись в стену, падает точно к его ногам. Какова была начальная скорость мяча, если расстояние до стены  $L$ , бросок сделан

под углом  $45^\circ$  к горизонту, в момент броска мяч находился на начальной высоте  $h$ ?

7. Ось вращающегося диска движется поступательно со скоростью  $v_0$ . Определите мгновенную скорость верхней точки диска, если известна скорость  $v_1$  нижней точки. Ответ дайте в векторной форме.

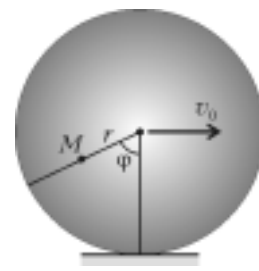


Рис. 3

8. Колесо радиусом  $R$  катится со скоростью  $v_0$  по горизонтальной поверхности без проскальзывания (рис.3). Найдите мгновенную скорость точки  $M$ . Угол  $\phi$  и расстояние  $r$  от точки  $M$  до центра колеса считать известными.

#### 11 класс

1. Металлическое кольцо радиусом  $R$  имеет заряд  $+Q$ . Определите зависимость напряженности и потенциала поля от расстояния  $d$  до центра кольца вдоль оси, перпендикулярной плоскости кольца.

2. Два одинаковых металлических кольца закреплены соосно на расстоянии  $d$  друг от друга и заряжены противоположными по знаку зарядами  $+Q$  и  $-Q$  (рис.4). Для пролета вдоль оси положительно заряженная частица должна обладать минимальной скоростью  $v_0$ . Найдите отношение максимальной скорости частицы к минимальной во время пролета вдоль оси, если ее начальная скорость на большом расстоянии от колец будет равна  $nv_0$ .

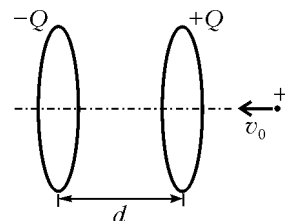


Рис. 4

3. Внутри толстостенной металлической сферической оболочки с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) на расстоянии  $d < R_1$  от центра помещен точечный заряд  $Q$ . Определите потенциал центра оболочки.

4. В системе из трех концентрических металлических сфер с радиусами  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  крайние сферы заземлены, а средней сообщен заряд  $Q$ . Определите напряженность электростатического поля внутри и вне сфер.

5. Конденсаторы с емкостями  $C_1$  и  $C_2$  соединены последовательно и подключены к батарее с ЭДС  $\mathcal{E}$ . Затем батарею отключили, а конденсаторы разъединили. Найдите заряды каждого конденсатора после их параллельного соединения одноименно заряженными пластинами.

6. Четыре конденсатора подключены к источнику, как показано на рисунке 5. Какой заряд протечет по резистору  $R_1$ , если ключ  $K$  замкнуть? Емкости конденсаторов равны  $C_1 = 2$  мкф,  $C_2 = C_3 = C_4 = 1$  мкф, ЭДС источника  $\mathcal{E} = 10$  В.

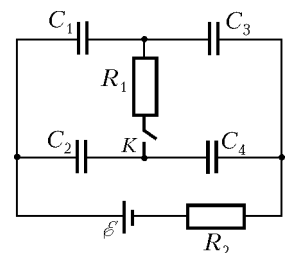


Рис. 5

7. На одну из пластин плоского конденсатора емкостью  $C$  поместили заряд  $-q$ , на другую пластину поместили заряд  $+mq$ . Определите разность потенциалов между пластинами.

8. Металлическую сферу радиусом  $R_0$ , заряженную до потенциала  $\Phi_0$ , окружают проводящей концентрической сферической оболочкой радиусом  $r_0$ . Найдите потенциал шара после заземления оболочки.



## Заочная школа при НГУ

При Новосибирском государственном университете в составе Специализированного учебно-научного центра (СУНЦ НГУ) работает созданная более 30 лет назад Заочная физико-математическая школа (ЗШ). Основными задачами Заочной школы являются: формирование у школьников 9 – 11 классов интереса к естественным и точным наукам; предоставление возможности учащимся общеобразовательных школ, расположенных в удаленных от научных центров пунктах и территориях, углубленно заниматься математикой, физикой, химией, биологией; повышение уровня преподавания естественнонаучных предметов в школе; методическая помощь учителям в преподавании узловых пунктов школьной программы и факультативных курсов; привлечение наиболее способных школьников в СУНЦ НГУ и НГУ. Более 50% выпускников Заочной школы ежегодно становятся студентами НГУ.

Набор в 9,10,11 классы ЗШ на 2005/06 учебный год проводится на отделения: математическое, физическое, химическое, биологическое (с 10 кл.), иностранных языков (английский и французский), психологии. В течение учебного года учащийся ЗШ должен выполнить 5 высылаемых по почте заданий, которые составляют преподаватели НГУ и СУНЦ НГУ. Темы большинства заданий совпадают с недавно пройденным или изучаемым в данный момент материалом школьной программы. Каждое задание содержит теоретическую часть и задачи нескольких уровней сложности.

Кроме отдельных учащихся, в Заочную школу принимают факультативы: математические, физические, химические, биологические, английского и французского языков. Факультативные группы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении преподавателями математики, физики, химии, биологии и иностранного языка. В течение учебного года руководители факультативов получают методические материалы ЗШ, задания по темам программы, решения заданий, информационно-рекламные материалы НГУ и его факультетов с правилами приема, приглашаются на курсы повышения квалификации учителей, проводимых на базе СУНЦ НГУ. Работа руководителей факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением как факультативные занятия.

Лучшие учащиеся ЗШ ежегодно приглашаются в Летнюю школу для участия в конкурсе по приему в СУНЦ НГУ.

Учащиеся ЗШ, успешно выполнившие все задания, по окончании 11 класса получают удостоверение Заочной школы и при прочих равных условиях имеют приоритет при зачислении в НГУ.

Чтобы поступить в Заочную школу СУНЦ НГУ, необходимо в период с 1 сентября по 1 ноября прислать в адрес ЗШ выполненное вступительное задание и заявление. В заявлении нужно указать фамилию, имя отчество (полностью, печатными буквами); класс, в котором Вы учитесь в школе; отделение ЗШ, на котором Вы желаете учиться; подробный домашний адрес (с указанием индекса), телефон (с кодом), e-mail. Руководитель факультатива кроме вышеперечисленного должен прислать алфавитный список учеников с подписью директора и печатью общеобразовательного учреждения.

Решения задач вступительного задания запишите в простую ученическую (тонкую) тетрадь в клетку, оставляя поля для замечаний преподавателя. На обложке тетради укажите те же сведения о себе, что и в заявлении. Работу отошлите вместе с заявлением, причем *только простой бандеролью* (тетрадь не перегибайте, не сворачивайте в трубочку). Для

получения ответа вложите конверт с маркой с написанным на нем Вашим домашним адресом.

Обучение в школе – платное. Количество предметов может быть любым. Учащиеся частично возмещают расходы на свое обучение: почтовые услуги, печать пособий, проверку и рецензирование работ. Бесплатное обучение в ЗШ сохраняется для детей-сирот, обучающихся в школах-интернатах и детей из многодетных семей. Ученикам сельских школ предоставляется льгота по оплате.

Ждем ваших заявлений о приеме по адресу:

630090 Новосибирск-90, ул.Пирогова, 11, Заочная школа

Телефон: (3833) 39-78-89

E-mail: distant@sscadm.nsu.ru

(Вступительные задания за прошлые годы вы можете найти на сайтах <http://profile.edu.ru> и <http://sscadm.nsu.ru>)

### Вступительное задание

#### Математика

##### 9 класс

1. У спортсмена имелось не более 400 патронов, из которых 68,4% он выпустил по мишени во время соревнования. Определите, сколько патронов у него осталось.

2. Три окружности, проходящие через точку  $M$ , попарно пересекаются в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Через точку  $A$  проведена прямая, пересекающая две из этих окружностей в точках  $D$  и  $E$ . Докажите, что точка  $F$  пересечения прямых  $BD$  и  $CE$  лежит на третьей окружности.

3. Внутри треугольника  $ABC$  выбрана точка  $O$  такая, что площади треугольников  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COA$  равны. Докажите, что точка  $O$  совпадает с точкой пересечения медиан треугольника  $ABC$ .

4. Докажите, что при любом нечетном  $n > 1$  произведение

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}\right) \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1)$$

делится на  $n$ .

5. Внутри квадрата со стороной 1 произвольно выбраны 5 точек. Докажите, что обязательно найдутся такие две из этих точек, что расстояние между ними не больше  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

6. Решите систему уравнений

$$x = \frac{1}{2} \left( y + \frac{1}{y} \right), y = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), z = \frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{x} \right).$$

##### 10 класс

1. Из одного города в другой вниз по реке корабль плывет сутки, а обратно – двое. За какое время можно добраться из верхнего города в нижний на плоту?

2. В треугольнике  $ABC$ , вписанном в окружность с центром  $O$ , проведены высоты  $AF$  и  $BG$ . Докажите, что отрезки  $OC$  и  $FG$  перпендикулярны.

3. Прямоугольник, у которого одна из сторон в два раза длиннее другой, разделили на прямоугольники несколькими сквозными разрезами, параллельными его сторонам. Оказалось, что сумма периметров этих прямоугольников в 101 раз больше периметра исходного прямоугольника. Какое наибольшее число прямоугольников могло при этом получиться? Приведите обоснование ответа.

4. В 450 коробках лежат 2005 шариков. Из любой коробки разрешается взять ровно 5 или 13 шариков и переложить их в любую другую коробку. Докажите, что с помощью таких операций можно собрать все шарики в одной коробке.

5. На сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  треугольника  $ABC$  точки  $A_1, B_1, C_1$  расположены так, что  $AC_1 = 2C_1B$ ,  $BA_1 = 2A_1C$ ,

$CB_1 = 2B_1A$ . Докажите, что площадь треугольника, образованного при пересечении отрезков  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ , составляет  $\frac{1}{7}$  от площади треугольника  $ABC$ .

6. Докажите, что уравнение

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_1 x_2 x_3 \dots x_n} = 1$$

всегда имеет решение в целых положительных числах.

### 11 класс

1. Травы на лугу растут одинаково густо и быстро. Известно, что если выпустить на луг 20 коров, то они съедят всю траву полностью за 8 дней, а если выпустить на тот же луг 26 коров – то за 6 дней. Какое наибольшее число коров может кормиться на этом лугу все лето? Appetit у всех коров одинаков и неизменен. Скорость роста травы постоянна.

2. На координатной плоскости определите координаты точки, симметричной точке (7; 3) относительно прямой, заданной уравнением  $5x + 13y = 1$ .

3. Пусть  $x$  и  $y$  – действительные числа. Докажите, что равенство

$$(x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = 1$$

выполняется тогда и только тогда, когда  $x + y = 0$ .

4. Найдите отношение объемов правильного тетраэдра и правильного октаэдра, ребра которых равны 1.

5. Имеется квадратная таблица  $8 \times 8$ . Докажите, что невозможно расставить в ее клетках 64 числа 1, 2, 3, 4, ..., 63, 64 так, чтобы числа в соседних клетках отличались не больше чем на 4.

6. Решите уравнение

$$\frac{1}{\cos x \cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x \cos 3x} + \dots + \frac{1}{\cos 100x \cos 101x} = 0.$$

### Физика

#### 9 класс

1. Мотоциклист движется со скоростью  $u$  навстречу колонне автомобилей. После того как мотоциклист увеличил скорость в два раза, он стал встречать автомобили из колонны в полтора раза чаще. Какова скорость  $v$  автомобилей в колонне?

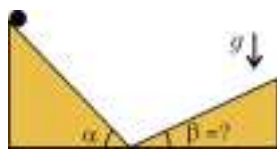


Рис. 1

2. Маленький шарик скользит по наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  к горизонту, которая вплотную примыкает к другой наклонной плоскости (рис.1). Чему равен угол  $\beta$  между второй плоскостью и горизонтом, если известно, что после упругого удара о нее шарик полетел вертикально?

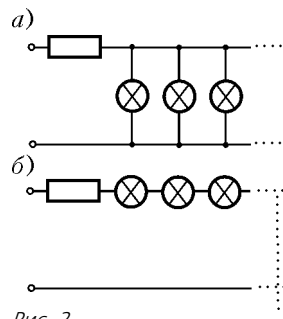


Рис. 2

4. Гирлянду из  $N$  одинаковых лампочек подсоединили к источнику напряжения через входное сопротивление двумя

способами (рис.2): а) лампочки между собой соединены параллельно; б) лампочки между собой соединены последовательно. В обоих случаях накал лампочек одинаков. Чему равно входное сопротивление, если сопротивление каждой лампочки  $R$ ?

### 10 класс

1. Решите задачу 3 для 9 класса.

2. Решите задачу 4 для 9 класса.

3. Бруску, лежащему на наклонной плоскости, щелчком сообщают горизонтальную скорость  $v$ , как показано на рисунке 3. Определите ускорение бруска сразу после щелчка. Угол наклона плоскости к горизонту  $\alpha$ , коэффициент трения между брусом и плоскостью  $\mu$ .

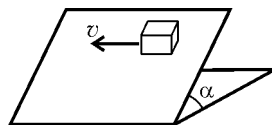


Рис. 3

4. Сила сопротивления воздуха, действующая на тело, пропорциональна квадрату скорости тела относительно воздуха:  $F_{\text{сопр}} = Av^2$  (постоянная  $A$  известна). Тело вначале движется в воздухе под действием внешней постоянной силы с установившейся скоростью  $v_0$ . С некоторого момента времени ( $t = 0$ ) внешняя сила стала изменяться так, что тело тормозится с постоянным ускорением  $a$  вплоть до остановки. Как зависит от времени внешняя сила? Масса тела  $m$ .

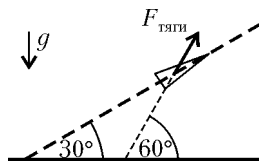


Рис. 4

5. Ракета массой  $m$  стартует под углом  $30^\circ$  к горизонту (рис.4). Найдите ускорение ракеты и силу тяги реактивной струи, которая образует угол  $60^\circ$  с горизонтом. Ускорение свободного падения  $g$ . Двигатель установлен так, что ракета не вращается.

### 11 класс

1. Решите задачу 4 для 9 класса.

2. Решите задачу 5 для 10 класса.

3. Два сообщающихся сосуда сечениями  $S_1$  и  $S_2$  ( $S_1 > S_2$ ) и высотой  $h$  заполнены жидкостью до уровня  $h/2$ . На поверхности жидкости в сосуде сечением  $S_1$  лежит невесомый поршень. На поршень начинают осторожно сыпать песок. Определите массу насыпанного песка, при которой жидкость начнет выливаться из сосуда сечением  $S_2$ . Плотность жидкости  $\rho$ , ускорение свободного падения  $g$ .

4. Вертикально стоящий герметичный сосуд с газом разделен тонким подвижным массивным поршнем на две одинаковые части. Вначале в верхней части сосуда температура  $T_1$  и давление  $p$ , а в нижней  $T_2$  и  $2p$  соответственно. После того как температура в обеих частях сравнялась с температурой окружающей атмосферы  $T_x$ , поршень остался на месте. Определите  $T_x$ .

5. Горизонтальная плоскость делит пространство на две части: область с однородным электрическим полем  $\vec{E}$  и область, в которой электрического поля нет (рис.5). На каком расстоянии  $h$  от плоскости был отпущен шарик массой  $m$  и зарядом  $q$ , если он, пролетев сквозь небольшое отверстие в плоскости, возвратился на прежнее место через время  $\tau$ ? Ускорение свободного падения  $g$ . Считать, что  $qE > mg$ .

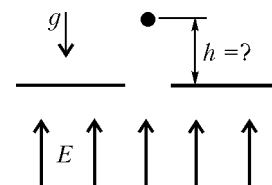


Рис. 5

## КМШ

### Задачи

(см. «Квант» №2)

1. См. рис.1.

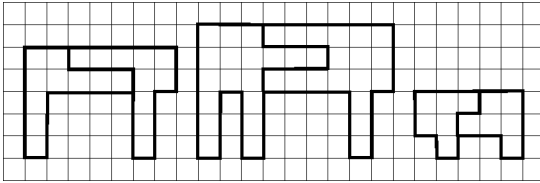


Рис. 1

2. Здесь надо уяснить следующий момент: каждый владелец сотового телефона платит за все звонки, что сделал сам, и плюс еще за все звонки, что поступили ему с обычных телефонов. Так как каждый владелец сотового телефона сделал одинаковое число звонков, а именно 3, то, следовательно, каждому поступило *разное* число звонков с обычных телефонов (ибо заплатили они за разное число разговоров). Пусть владельцев сотовых телефонов было  $n$ . Пронумеруем их в порядке возрастания числа поступивших звонков с обычных телефонов. Тогда первому могло вообще не поступить таких звонков, зато второму – не меньше одного, третьему – не меньше двух, ...,  $n$ -му – не меньше  $(n-1)$ , а всего, таким образом, не меньше  $1 + 2 + \dots + (n-1)n/2$ . С другой стороны, эта сумма наверняка не больше суммарного числа звонков, сделанного владельцами обычных телефонов, т.е.  $3(8-n)$ , поскольку все сделали по 3 звонка. Поэтому

$$(n-1)n/2 \leq 3(8-n),$$

откуда  $n(n+5) \leq 48$ . Выражение в левой части последнего неравенства возрастает с ростом  $n$ , и при  $n=5$  оно уже не выполняется (ибо  $5(5+5) = 50 > 48$ ). Поэтому  $n \leq 4$ . Получается, что сотовых телефонов не больше 4. Но в условии уже указаны фамилии четырех владельцев сотовых телефонов. Значит, все остальные, в том числе и упомянутый Джапаридзе, имеют *обычные* телефоны. Таков ответ.

3. Можно:

2	10	3	8
12	11	9	7
14	5	13	6
4	1	15	16

Но найти такое расположение непросто.

4. Не удастся. Поскольку ровно 5 чисел делятся на 2, то среди 6 чисел не более одного нечетного. Следовательно, среди 4 чисел, делящихся на 3, не менее 3 чисел четных. Значит, не менее 3 чисел должны делиться на 6. Противоречие.

5. Треугольники  $AC_1B_1$ ,  $C_1BA_1$ ,  $A_1CB_1$  имеют по три равных угла, при этом  $\angle B = \angle C = \angle A$  (рис.2). Следовательно, треугольник  $ABC$  равнобедренный.

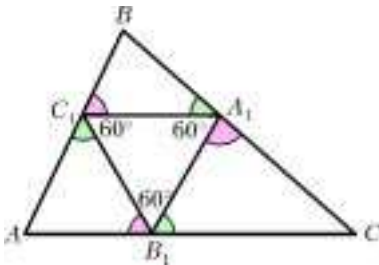


Рис. 2

### Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №6 за 2004 г.)

11. Перемножив неравенства

$$1-x > y, \quad 1-y > z, \quad 1-z > x,$$

получим  $(1-x)(1-y)(1-z) > xyz$ . Чисел, удовлетворяющих условию задачи, не существует.

12. Сначала докажем, что для любого натурального числа  $k$  существует степень двойки, которая записывается с помощью  $k$  десятичных цифр. Это непосредственно проверяется для небольших значений  $k = 1, 2, \dots$ . Пусть  $a$  – наибольшее натуральное число такое, что для записи степени  $2^a$  используется ровно  $k$  цифр,  $k \geq 1$ :

$$10^{k-1} < 2^a < 10^k.$$

Тогда следующая степень двойки  $2^{a+1}$  записывается ровно  $k+1$  цифрами.

(На самом деле справедливо более сильное утверждение: для любого натурального  $k$  существует ровно три различных степени двойки, записывающихся с помощью  $k$  десятичных цифр).

А теперь приступим к решению задачи. Рассмотрим степень двойки  $2^n$ , для записи которой используется ровно  $k = 6m + 1$  цифр, где  $m \geq 0$  – целое. Тогда

$$\overline{2^{n+1}2^n} = 10^k \cdot 2^{n+1} + 2^n = 2^n (2(7+3)^k + 1) = 2^n (7A + 2 \cdot 3^k + 1),$$

где  $A$  – некоторое натуральное число. Далее,

$$2 \cdot 3^k + 1 = 2 \cdot 3^{6m+1} + 1 = 6(3^6)^m + 1 =$$

$$= 6(7 \cdot 104 + 1)^m + 1 = 7B + 6 + 1,$$

где  $B$  – некоторое натуральное число. Таким образом, число  $\overline{2^{n+1}2^n}$  делится на 7.

Поскольку  $m \geq 0$  – произвольное целое число, то существует сколь угодно много натуральных чисел  $n$ , удовлетворяющих условию задачи.

13. Совместим прямые углы и катеты самого большого треугольника и одного из двух других треугольников (рис.3).

Ориентируя катеты оставшегося треугольника параллельно катетам этих треугольников, разместим его вершину в произвольной точке  $M$  гипотенузы  $RS$ .

Так как четырехугольники  $PFMR$  и  $MGQS$  – параллелограммы, то из условия задачи следует, что длина ломаной  $PFQ$  равна длине гипотенузы  $PQ$ . Значит, точки  $F$  и  $G$  лежат на  $PQ$ , и все три треугольника  $ORS$ ,  $MFG$  и  $OPQ$  подобны друг другу.

14. а) Одним кубиком обойтись невозможно. Используем метод «от противного».

Допустим, что, поставив один кубик на какую-то клетку, можно прокатить его по всем клеткам доски (посетив, возможно, некоторые из них дважды) так, что каждый раз цвет клетки и соприкасающейся с ней грани совпадали. Обозначим половину белых клеток буквой  $A$ , другую половину – буквой  $B$ , как на рисунке 4.

Возможны три варианта исходного положения кубика перед началом его перекачивания: на какой-либо клетке  $A$ , на какой-либо клетке  $B$ , на какой-либо черной клетке (эти клетки мы никак не подразделяем и не обозначаем). Пусть первоначально кубик нахо-

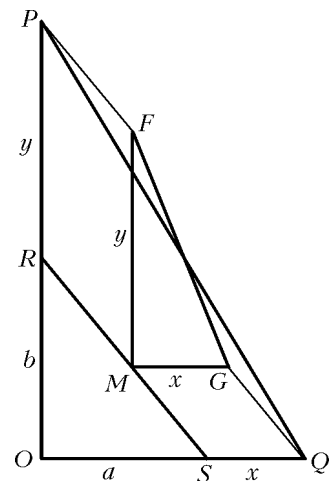


Рис. 3

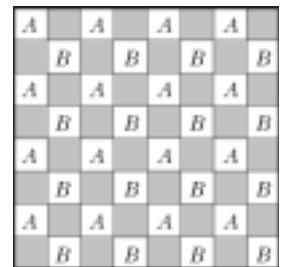


Рис. 4



дился на одной из клеток  $A$ . Заметим, что, перекачиваясь по доске, он может, соблюдая установленные правила, побывать на всех остальных клетках  $A$ . В самом деле, перекатившись на соседнюю с исходной клеткой  $A$  черную клетку, он может потом попасть на соседнюю с ней другую клетку  $A$ , а от нее — на другую ближайшую клетку  $A$ , и так далее. Кроме того, он может посетить все черные клетки, соседние с любой  $A$  (перекатившись на них, а потом обратно). Однако, соблюдая правила, кубик не сможет попасть ни на какую клетку  $B$ . Докажем это. Предположим противное и рассмотрим *первую* клетку  $B$ , на которую попал кубик в процессе перекачиваний. Откуда он мог попасть на эту клетку? Только из соседней с ней черной клетки. А как он мог перекатиться на эту черную клетку? Только из соседней с ней белой клетки  $A$  (но не из другой клетки  $B$ , потому что рассматриваемая клетка  $B$  — *первая* на маршруте кубика). Однако, когда кубик перекатился с клетки  $A$  на соседнюю черную клетку, то нижняя его грань при этом, как полагается, черная, а среди четырех боковых граней две — белые, но они «смотрят» на две соседние клетки  $A$  (одна из них — та, с которой кубик только что перекатился на черную клетку). А вот на соседние с ней клетки  $B$  «смотрят» две *черные* грани кубика, и перекатиться, соблюдая правила, на клетку  $B$  невозможно. Поэтому, стартовав с клетки  $A$ , кубик не сможет побывать на всех клетках доски, что и требовалось доказать.

Если первоначально кубик находился на какой-либо клетке  $B$ , то рассуждения точно такие же (надо лишь  $A$  и  $B$  поменять местами). Так что и в этом случае посетить все клетки доски невозможно.

Ну, а если кубик первоначально лежал на какой-то черной клетке? Тогда после первого же перекачивания он окажется либо на клетке  $A$ , либо на клетке  $B$ . А дальше повторяем все наши предыдущие рассуждения (относящиеся к первому или второму случаю). Посему и здесь обход всех клеток невозможен.

б) Двух кубиков вполне хватит — см. рисунок 5. Для удобства восприятия черные клетки здесь не окрашены — и так все ясно. Здесь исходными для кубиков являются белые клетки  $d5$  и  $e4$ , а маршруты кубиков обозначены красной и синей линиями. При этом (сверх программы) каждая клетка посещается одним кубиком ровно один раз.

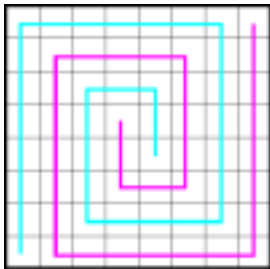


Рис. 5

кубиков обозначены красной и синей линиями. При этом (сверх программы) каждая клетка посещается одним кубиком ровно один раз.

**15.** Прямоугольник  $40 \times 100$ , стороны которого параллельны сторонам поля, будем называть участком. Докажем, что засеяно не меньше 90% площади поля. Для этого разделим поле на восемь участков и один квадрат со стороной 20, как показано на рисунке 6. Площадь квадрата составляет 10% площади участка. Если его накрыть каким-нибудь участком, то из условия задачи вытекает, что в нем засеяно не меньше 1% площади участка. На каждом участке засеяно не меньше 91% площади. Следовательно, всего засеяно не меньше чем

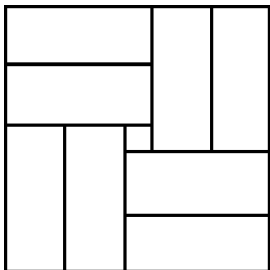


Рис. 6

$$8 \times 40 \times 100 \times 0,91 + 40 \times 100 \times 0,01 = 40 \times 729.$$

Отсюда получается, что в процентах от площади поля рожью засеяли не меньше чем

$$100\% \times (40 \times 729) / (180 \times 180) = 90\%.$$

Для решения задачи нам остается показать, что можно засеять рожью 90% площади поля с соблюдением условия засева участков. Для этого разделим все поле на 81 клетку со стороной 20, как показано на рисунке 7. Белым цветом показаны те места на поле, которые засеяны рожью. Серый цвет обозначает пустую землю. Все 9 серых прямоугольников равны между собой и одинаково расположены в клетках. Площадь каждого из них составляет 90% площади клетки. Поэтому их общая площадь составляет 10% площади поля, т.е. рожью засеяно ровно 90% площади поля.

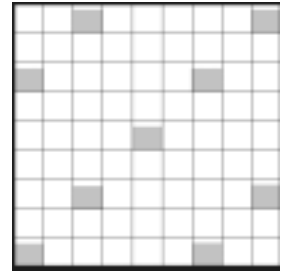


Рис. 7

Легко проверить, что в любом прямоугольнике размером  $2 \times 5$  со сторонами, параллельными сторонам поля (т.е. в любом участке), площадь, покрашенная в серый цвет, в совокупности не превосходит площади одного серого прямоугольника. Следовательно, на любом участке не меньше 91% площади засеяно рожью.

*Замечание.* Вместо серого прямоугольника мы могли бы использовать любую другую фигуру той же площади, которая целиком помещается в клетке.

## ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП КОНКУРСА ИМЕНИ А.П.САВИНА

(см. «Квант» №2)

Командная олимпиада

1. Нет, рядом с числом 18 может стоять только число 7.

2. Обозначим градусные меры дуг окружностей, как показано на рисунке 8. Угол  $BAD$  равен, с одной стороны,  $x/2$ , с другой стороны,  $(c-a)/2$ . Значит,  $x = c - a$ . Так как окружности касаются, то  $x = b$ . Получаем, что  $b = c - a$ , или  $c = a + b$ , откуда следует, что  $BD$  — диаметр. Значит, угол  $ABD$  — прямой.

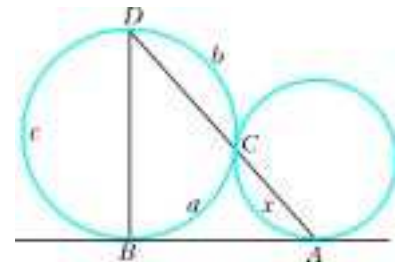


Рис. 8

3. Пусть стороны прямоугольника равны  $x$  и  $y$ . Тогда  $2(x + y) = 2004$ , откуда  $(x - 2)(y - 2) = 2008$ . Найдем всевозможные пары натуральных чисел, дающие в произведении 2008. Разложим 2008 на простые множители:  $2008 = 2^3 \cdot 251$ . Значит, одно из чисел в паре есть двойка в степени от 0 до 3. Искомых пар четыре, им соответствуют 4 различных прямоугольника (со сторонами 1 и 2008, 2 и 1004, 4 и 502, 8 и 251).

4.  $(0, 0)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(2, -1)$ .

При  $x < 0$  корней нет, так как  $2^x < 1$ ,  $3y^2 + 1 \geq 1$ .

При  $x = 0$  получаем  $y = 0$ .

При  $x = 1$  получаем  $3y^2 = 1$  — нет решений в целых числах.

При  $x = 2$  имеем  $y^2 = 1$ , откуда  $y = \pm 1$ .

Пусть  $x \geq 3$ . Тогда  $2^x$  делится на 8. Квадрат целого числа при делении на 8 дает в остатке 0, 1 или 4, откуда сумма  $3y^2 + 1$  дает остатки 1, 4 или 5, т.е. не кратна 8. Значит, в этом случае решений нет.

5. Рассмотрим дугу окружности, из каждой точки которой отрезок  $BC$  виден под одним и тем же углом  $\angle BAC = \varphi$ . Точка  $M$  пересечения медиан треугольника  $BAC$  лежит на дуге  $\gamma$ , гомотетичной этой дуге с коэффициентом гомотетии  $\frac{1}{3}$  и с

центром в середине отрезка  $BC$ . Пусть  $\gamma'$  – симметричный образ дуги  $\gamma$  относительно прямой  $BC$ . Замечаем, что в случае  $\varphi > 60^\circ$  дуга  $\gamma'$  не имеет точек пересечения с описанной окружностью  $\triangle ABC$ ; в случае  $\varphi = 60^\circ$  дуга  $\gamma'$  имеет одну точку касания с описанной окружностью  $\triangle ABC$ , при этом касание реализуется только в том случае, если  $\triangle ABC$  равнобедренный; в случае  $\varphi < 60^\circ$  дуга  $\gamma'$  имеет две точки пересечения с описанной окружностью  $\triangle ABC$  (рис.9).

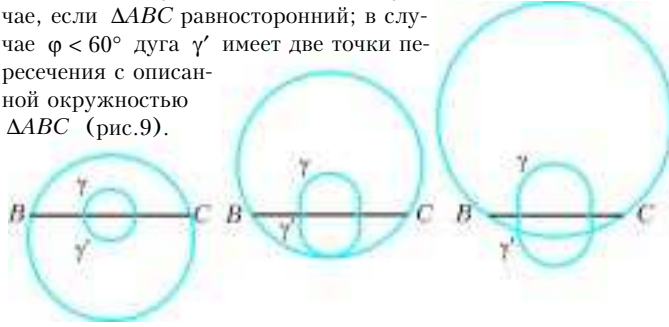


Рис. 9

6. Возьмем два из четырех чисел, заменим каждое из них их полусуммой. При этом значение левой части неравенства не уменьшится. Действительно, пусть  $c$  – полусумма  $x$  и  $y$ ,  $a = (1-z)(1-t)$ ,  $b = zt$ . Поскольку  $a \geq b$ , то

$$(1-x)(1-y)a - xyb = a - 2ac + (a-b)x(2c-x) \leq a - 2ac + (a-b)c^2 = (1-c)(1-c)a - c^2b.$$

Уравняем теперь  $z$  и  $t$ , заменив каждое их полусуммой, и аналогично покажем, что левая часть не уменьшится. Тем самым сведем неравенство к случаю двух пар равных чисел. Уравняем числа из разных пар, заменив каждое их полусуммой. Таким образом, достаточно проверить, верно ли неравенство, когда числа  $x, y, z, t$  равны. Однако в этом случае имеет место равенство.

7. Докажем утверждение по индукции. Для  $N = 1$  и  $N = 2$  утверждение очевидно. Пусть мы умеем располагать кольца в любом порядке для  $N = k \geq 2$ . Рассмотрим ситуацию, когда имеются  $k+1$  кольца. Расположим все кольца, кроме самого большого, в нужном порядке, не двигая кольцо, второе по величине. Это возможно, так как все кольца, кроме второго по величине, продеваются сквозь самое большое. После этого, по той же самой причине, можно поставить на нужное место самое большое кольцо.

#### Личная олимпиада

4. Пусть группа имеет вид  $n, n+1, n+2, \dots, n+9$ . Рассмотрим число  $n+10$ .

Оно делится на 10, так как  $n$  делится на 10.

Оно делится на 9, так как  $n+10 = (n+1) + 9$ , а число  $n+1$  делится на 9.

Оно делится на 8, так как  $n+10 = (n+2) + 8$ , а число  $n+2$  делится на 8.

...

Оно делится на 2, так как  $n+10 = (n+8) + 2$ , а число  $n+8$  делится на 2.

Значит,  $n+10$  кратно всем числам от 2 до 10. Следовательно,  $n+10$  кратно НОК(2, 3, ..., 10) = 2520, т.е.  $n+10 = 2520k$ .

Заметим, что все числа группы четырехзначные. Поэтому  $1009 < n+10 < 10001$ , или  $1009 < 2520k < 10001$ , откуда получаем  $k = 1, 2, 3$ . Следовательно, имеется только 3 группы.

5. Рассмотрим момент, когда у Васи наберется 5 закрашенных столбцов, тогда достаточно окрасить все восемь строк (часть строк могла быть окрашена ранее). Таким образом, Вася может сделать не более 13 операций. Каждая операция Васи добавляет на доске не более трех новых красных клеток. Значит, вначале Петя должен сделать не менее

$64 - 3 \cdot 13 = 25$  красных клеток. С другой стороны, нетрудно понять, что если Петя окрасит 25 клеток, показанных на рисунке 10, то Вася сможет окрасить всю доску.

6. Раскрасим шахматную доску, как показано на рисунке 11 слева. Если шашка изначально стоит на черной клетке, то она может бить только шашки, стоящие на заштрихованных клетках, причем только на тех, которые не примыкают к краю доски. Таких клеток 9, поэтому шашка не сможет съесть одним ходом более 9 шашек. На рисунке справа показано, как можно съесть одним ходом 9 шашек.

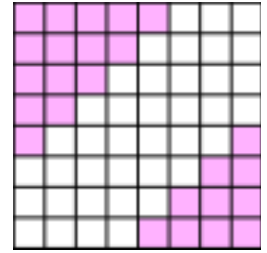


Рис. 10

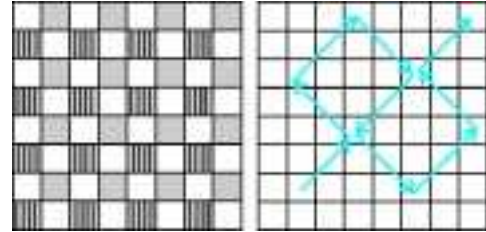


Рис. 11

7. Поскольку  $a > x$ ,  $b > z$ , то  $a + b + \sqrt{ab} > x + z + \sqrt{xz} = c$ .

8. Условию задачи удовлетворяют все простые числа  $N$  и только они. Проведем индукцию по  $N$ . Случаи  $N = 1, 2$  очевидны. Пусть  $N > 2$  и выполнено предположение индукции. Тогда  $d(N) < N$ , последовательность для  $d(N)$  не содержит точных квадратов, и по предположению индукции  $d(N)$  – простое число. Если  $d(N) = 2$ , то  $N$  – простое число. В противном случае  $d(N)$  нечетно. Но если число  $N$  имеет нечетное число натуральных делителей, то оно является точным квадратом (достаточно заметить, что если  $N$  делится на некоторое число  $x$ , то  $N$  делится и на  $N/x$ ).

9. Нет. Если  $n = a^2 + ab + b^2$ , то положим  $c = a + b$ ,  $d = b$ .

#### Задачи математических боев

1. Нет, не могло.

Каждый удар Вани или Вовы истребляет или добавляет количество комаров в комнате, кратное 17. Число же 2004 на 17 не делится.

5. Введем понятие *максимальной разности* – так назовем разность между количеством орехов в мешке, где их больше всего, и в мешке, где их меньше всего. Заметим, что если максимальная разность меньше 10, то по принципу Дирихле найдутся два мешка с одинаковым количеством орехов. Максимальная разность не может равняться в точности 10. Действительно, в этом случае количество орехов в мешках задается рядом:  $n, n+1, n+2, \dots, n+9$ , сумма чисел которого равна  $10n + 45$ , что ни при каких натуральных  $n$  не может быть равно общему количеству орехов 1000.

Предположим, что добиться уравнивания количества орехов в каких-то двух мешках невозможно, т.е. максимальная разность при всех перекладываниях будет больше 10. Докажем, что в этом случае при каком-то перекладывании максимальная разность станет меньше 10. Действительно, пусть максимальное число орехов в каком-то мешке равно  $M$ , а минимальное (в каком-то другом мешке) –  $m$ . Так как во всех мешках число орехов всегда различно, то в каждом из остальных восьми мешков число орехов заключено между  $M - 1$  и  $m + 1$ . Максимальная разность равна  $M - m$ , и если она не меньше 10, то после проведения операции перекладывания в мешке, где было  $M$  орехов, их станет  $M - 9$ , что, очевидно,

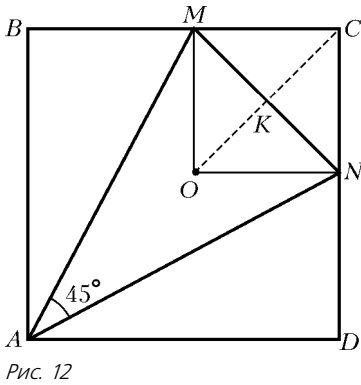


Рис. 12

7. Рассмотрим точку  $O$  — центр описанной вокруг треугольника  $AMN$  окружности (рис.12). Поскольку угол  $MON$  равен  $90^\circ$ , то вокруг четырехугольника  $OMCN$  можно описать окружность, причем  $MN$  является ее диаметром. Пусть точка  $K$  — середина диаметра  $MN$ . Поскольку треугольник  $OMN$  равнобедренный, то  $OK \perp MN$ . В треугольнике  $MCN$  отрезок  $CK$  является высотой и медианой, поэтому  $\angle MCK = \angle NCK$ , и точка  $K$ , так же, как и точка  $O$ , лежит на диагонали квадрата  $ABCD$ .

8. При любом  $n > 3$ .

Очевидно, что при  $n = 3$  средняя тетрадь никогда не покинет своего места. Сначала убедимся в том, что 4 тетради можно расположить в произвольном порядке. Пронумеруем тетради сверху вниз числами от 1 до 4. Для обозначения средней части будем использовать скобки. Например, запись 1, 2, (3), 4  $\rightarrow$  4, 3, 1, 2 означает, что верхнюю часть, состоящую из тетрадей 1 и 2, поменяли с нижней частью, состоящей из тетрадей 4. Вот возможные варианты перекалываний стопки из четырех тетрадей:

1, 2, (3), 4  $\rightarrow$  4, 3, (1), 2  $\rightarrow$  2, 1, (4), 3  $\rightarrow$  3, (4,2), 1  $\rightarrow$   $\rightarrow$  1, 4, (2), 3  $\rightarrow$  3, 2, (1), 4  $\rightarrow$  4, 1, (3), 2  $\rightarrow$  2, (3,4), 1  $\rightarrow$   $\rightarrow$  1, 3, (4), 2  $\rightarrow$  2, 4, (1), 3  $\rightarrow$  3, 1, (2), 4  $\rightarrow$  4, 2, 3, 1;  
4, (3, 1), 2  $\rightarrow$  2, 3, (1), 4  $\rightarrow$  4, 1, (2), 3  $\rightarrow$  3, 2, (4), 1  $\rightarrow$   $\rightarrow$  1, (4,3), 2  $\rightarrow$  2, 4, (3), 1  $\rightarrow$  1, 3, (2), 4  $\rightarrow$  4, 2, (1), 3  $\rightarrow$   $\rightarrow$  3, 1, 4, 2;  
3, (2,4), 1  $\rightarrow$  1, (2), 4, 3  $\rightarrow$  4, (3), 2, 1  $\rightarrow$  2, (1), 3, 4  $\rightarrow$   $\rightarrow$  3, 4, 1, 2.

Таким образом, получены все возможные варианты расположения четырех тетрадей в стопке.

Пусть  $n \geq 4$ . Покажем, что любые две соседние тетради в стопке можно поменять местами, не нарушая порядка остальных тетрадей. Если эти две тетради лежат в середине стопки, то мысленно склеим все предшествующие им тетради в один блок и все последующие за ними тетради — в другой блок. Опираясь с этими блоками и двумя тетрадями как со стопкой, состоящей из четырех тетрадей, добиваемся нужного расположения. Если же две перекалываемые тетради лежат сверху или снизу стопки, то оставшиеся тетради в стопке произвольным образом разбиваем на два блока, и также применяем алгоритм, использованный ранее для четырех тетрадей. Многократно применяя перекалку соседних тетрадей, можно любую тетрадь переместить на требуемое место.

9. Да. Впишем в окружность с диаметром  $AB$  прямоугольный равнобедренный треугольник  $ACB$ . От точки  $C$  отложим хорду  $CD = CB$  ( $D \neq B$ ). Треугольник  $ACD$  — искомым.

10. Перебрав значения  $m < 11$  (этот перебор можно уменьшить, заметив, что число  $m = 1$  делится на 3), находим  $m = 4$ . Покажем, что при  $m > 10$  решений нет. Если

$10^k \leq m - 1 < 10^{k+1}$ , где натуральное  $k > 0$  (т.е. число  $m - 1$   $(k + 1)$ -значное), то число  $(m - 1)^{m+1}$  имеет не менее

лежит в пределах от  $M$  до  $m + 1$ . В мешке, где было  $m$  орехов, их станет  $m + 1$ , что также попадает в те же пределы. Число орехов в остальных восьми мешках возрастет на 1, поэтому оно также окажется в пределах от  $M$  до  $m + 1$ . Как видно, после каждой операции перекалывания максимальная разность снижается как минимум на 1.

$(k + 1)^{m+1} \geq (k + 1)^{10^k}$  десятичных знаков. Однако число  $\frac{(m - 2)m(m - 1)}{9}$  не более чем  $3(k + 1)$ -значное.

11. 24. Пример для 24 ладей приведен на рисунке 13. Можно доказать, что число 24 — наибольшее.

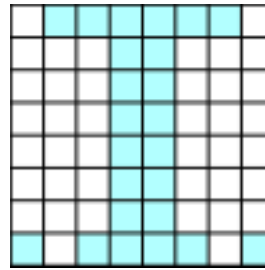


Рис. 13



Рис. 14

12. 24. Изобразим развертку одной из граней куба вместе с четырьмя граничащими с ней гранями (рис.14). Рассмотрим две суммы: сумму чисел, стоящих в квадрате  $\Pi$  и всех его соседей, а также сумму чисел, стоящих в квадрате  $P$  и всех его соседей. Заметим, что среди всех квадратов, образующих эти суммы, шесть квадратов одни и те же. Различие лишь в том, что помимо этих шести квадратов в указанные суммы входят квадраты  $A$  и  $B$  (первая сумма) либо квадраты  $B$ ,  $\Gamma$  и  $K$  (вторая сумма). Так как суммы, по условию, равны, то должно выполняться равенство

$$B + \Gamma + K = A + B.$$

Аналогично, «поворачивая» картину три раза на  $90^\circ$ , можем получить еще три равенства:

$$E + D + L = B + \Gamma, \quad \text{Ж} + \text{И} + \text{М} = E + D, \quad A + B + \text{Н} = \text{Ж} + \text{И}.$$

Сложив все 4 равенства, получаем

$$K + L + M + \text{Н} = 0,$$

а поскольку все числа неотрицательные, то  $K = L = M = \text{Н} = 0$ . Итак, числа, стоящие в угловых квадратах рассмотренной грани, равны нулю. Но, очевидно, то же можно утверждать и для всех остальных граней. Таким образом, в четырех квадратах каждой грани находятся одни и те же числа — нули, так что непременно найдется  $4 \times 6 = 24$  квадрата с одинаковыми числами.

Однако гарантии того, что найдется большее количество таких квадратов, нет. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим такую расстановку чисел в квадратах каждой грани, как показано на рисунке 15.

0	1	0
1	2	1
0	1	0

Рис. 15

Нетрудно проверить, что такая расстановка чисел удовлетворяет условию: все суммы одинаковы и равны 6. Но при этом в 24 квадратах стоят нули, в 24 — единицы и в 6 — двойки.

13.  $\frac{\pi}{2}$ . Заметим, что отношение площади вписанного круга к площади равностороннего треугольника

$$\text{равно } \frac{\pi \left( \frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\pi \sqrt{3}}{9}.$$

Площадь правильного шестиугольника со стороной 1 равна  $6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ . Поэтому сумма площадей

$$\text{всех кругов равна } \frac{\pi \sqrt{3}}{9} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

14. Воспользуемся сначала неравенством  $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$ , а за-



тем неравенством между средним арифметическим и средним гармоническим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{xy+1} + \frac{1}{yz+1} + \frac{1}{zx+1} &\geq \\ &\geq \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{2}+1} + \frac{1}{\frac{y^2+z^2}{2}+1} + \frac{1}{\frac{z^2+x^2}{2}+1} \geq \\ &\geq \frac{9}{\frac{x^2+y^2}{2}+1 + \frac{y^2+z^2}{2}+1 + \frac{z^2+x^2}{2}+1} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

15.  $m > 1$ ,  $n$  – любое.

Так как  $8 \equiv 1 \pmod{7}$ , то  $8^{8 \dots 8} \equiv 1 \pmod{7}$  при любом количестве восьмерок. Поскольку  $9 \equiv 2 \pmod{7}$  и девятка возводится в степень, кратную 3, то  $9^{9 \dots 9} = 2^{3^k} = 8^k \equiv 1 \pmod{7}$ , если только количество девяток больше 1. Если же девятка одна, то разность сравнима с 1 по модулю 7.

16. Победит Света. Исходное количество клеток кратно 3, каждая же девочка своим ходом закрашивает число клеток, дающее при делении на 3 остаток 1.

17. Рассмотрим гомотетию с центром в точке  $B$ , переводящую точку  $B_1$  в точку  $D$  такую, что  $DA \perp BA$ ,  $DC \perp CB$ . Центр описанной вокруг четырехугольника  $ABCD$  окружности лежит на диаметре  $BD$ . Следовательно, центр описанной вокруг треугольника  $ABC$  окружности лежит на прямой  $BB_1$ . Рассуждая аналогично, получаем, что он должен лежать на пря-

мых  $AA_1$  и  $CC_1$ . Следовательно, прямые  $BB_1$ ,  $AA_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке.

18. Следует. 19. 32.

22. 4009. 23.  $x = 1$  или  $x = 2$ .

26. Да, например: 8, 1, 15, 10, 6, 3, 13, 12, 4, 5, 11, 14, 2, 7, 9. 27. 13.

29. 18. На любой горизонтали или вертикали шахматной доски не могут стоять ладьи разного цвета. Поскольку всего горизонталей и вертикалей на

К	К						
К	К						
К	К						
		С	С				
		С	С				
		С	С				
				Ж	Ж	Ж	
				Ж	Ж	Ж	

Рис. 16

доске 16, то на каждый из 3 цветов может приходиться самое большее 5 полос. Эта ситуация реализуется (см. рис.16, на котором буквами К, С, Ж отмечены красные, синие и желтые ладьи).

30. Да, следует. Если углы  $\beta, \gamma, \beta', \gamma'$  острые, то воспользуемся подобием треугольников с углами

$$\frac{\pi}{2} - \beta, \frac{\pi}{2} - \gamma, \beta + \gamma, \frac{\pi}{2} - \beta', \frac{\pi}{2} - \gamma', \beta' + \gamma',$$

а если  $\beta$  и  $\beta'$  (или  $\gamma$  и  $\gamma'$ ) тупые – подобием треугольников с углами  $\beta - \frac{\pi}{2}, \gamma + \frac{\pi}{2}, \alpha$  и  $\beta' - \frac{\pi}{2}, \gamma' + \frac{\pi}{2}, \alpha'$  (или треугольников с углами  $\gamma - \frac{\pi}{2}, \beta + \frac{\pi}{2}, \alpha$  и  $\gamma' - \frac{\pi}{2}, \beta' + \frac{\pi}{2}, \alpha'$ ).

31. Отметим на сторонах единичного квадрата отрезки длины  $x, y, z, t$  (рис.17). А теперь воспользуемся тем, что сумма катетов всегда больше гипотенузы.

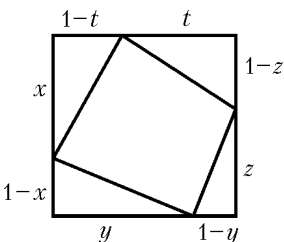


Рис. 17

32. Подходят первые  $2^{40}$  строк. Заменим в треугольнике Паскаля все нечетные числа единицей, а четные – нулями. По индукции можно доказать, что в строке с номером  $2^k$  ( $k \geq 0$ ) в таком треугольнике стоят одни единицы.

Кроме того, треугольник, объединяющий все строки с 1-й по

$2^{k+1}$ -ю, можно разбить на 4 треугольника  $A, B, C, D$  такие, что треугольник  $A$  объединяет все строки с 1-й по  $2^k$ -ю, треугольники  $A, C, D$  полностью идентичны (заполнены одними и теми же числами в одном и том же порядке), а треугольник  $B$  заполнен одними нулями (рис.18). По индукции также доказывается, что сумма чисел в треугольнике  $A$  равна  $3^k$ . Эта

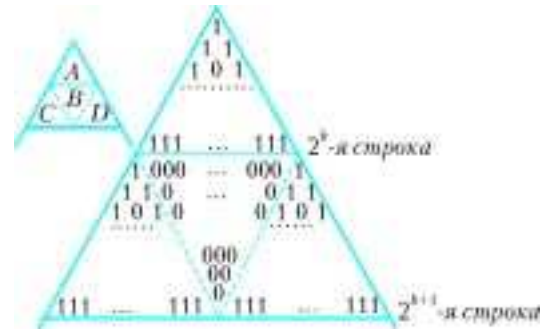


Рис. 18

сумма совпадает с количеством нечетных чисел в соответствующем треугольнике Паскаля. Поскольку всего чисел в треугольнике  $A$  ровно  $2^{k-1}(2^k + 1)$ , то доля нечетных чисел среди

них составляет  $\frac{3^k}{2^{k-1}(2^k + 1)}$ . При  $k = 40$  доля нечетных чисел

$$\frac{3^{40}}{2^{39}(2^{40} + 1)} \leq \frac{3^{40} \cdot 2}{2^{80}} \leq \left(\frac{243}{1024}\right)^8 \cdot 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^8 \cdot 2 \leq \left(\frac{1}{16}\right)^2 < \frac{1}{100}.$$

## Калейдоскоп «Кванта»

### Вопросы и задачи

1. Осторожно наполните стакан водой чуть выше краев. Поверхностное натяжение воды придаст свободной поверхности на краях небольшую выпуклость, и пробка сдвинется к центру.
2. Бросьте небольшое количество мыльной пены на чистую воду – комочки пены разбегутся в стороны.
3. Если прикоснуться к мокрой ткани рукой, то несколько маленьких капель, удерживаемых, как в решете, силами поверхностного натяжения, сливаются в одну большую каплю, которую эти силы уже не способны удержать.
4. Во втором. Капля удерживается поверхностным натяжением воды, а оно с ростом температуры заметно уменьшается.
5. Керосин очень хорошо смачивает практически все тела, поэтому пылинки, попав на его поверхность, сразу тонут.
6. Вода смачивает дерево и подтекает под дощечку. Ртуть не смачивает стекло и не подтекает под пластинку, а давление на пластинку сверху удерживает ее от всплытия.
7. Причина сцепления пластинок в воздухе – образование между ними водяной «лепешки» с вогнутой боковой поверхностью (рис.19). Погружение пластинок в воду приведет к исчезновению этой поверхности, а вместе с ней – и стягивающего усилия.
8. Пленка собирается в капелюшку, которая из-за малой толщины пленки имеет очень малый диаметр.
9. Пламя отклонится в сторону под действием струйки воздуха, вытекающего через соломинку из стягиваемого поверхностными силами пузыря. Отклонение пламени будет тем сильнее, чем меньше диаметр пузыря.
10. Есть. Жидкость стекает к основанию пузыря, его верхушка быстро утоньшается и рвется вероятнее всего.

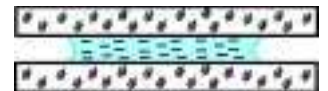
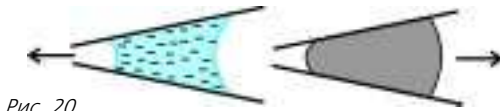


Рис. 19

11. Вода смачивает мел, входит в его поры и вытесняет из них воздух.
12. Жир смачивает и материю, и бумагу. Но в бумаге капилляры тоньше, чем в материи, и расплавленный жир активнее вытягивается именно в бумагу.
13. Из-за капиллярных эффектов вода между двумя близко расположенными спичками поднимается вверх. Давление в воде между спичками оказывается ниже атмосферного. Это и приводит к тому, что спички сближаются.
14. Коромысло весов, на котором подвешена трубка, опустится под действием капиллярных сил.
15. После открывания трубки на нижнем ее конце образуется мениск такой же формы, как и на верхнем. Поэтому высота столбика воды, оставшейся в трубке, будет равна  $2h$ , если  $l \geq h$ , и  $l + h$ , если  $l \leq h$ .
16. Поверхности капелек, обращенные к узкому концу капилляра, имеют меньший радиус кривизны, чем обращенные к



широкому концу (рис.20). «Отрицательное» давление слева под поверхностью смачивающей капилляр воды будет меньше, чем справа, и столбик воды переместится к узкому концу трубки. Давление слева под поверхностью несмачивающей капилляр ртути будет больше, чем справа, что приведет к выталкиванию столбика ртути к широкому концу.

17. Жидкость заполняет весь капилляр, так как сила поверхностного натяжения не уравновешивается силой тяжести жидкости в капилляре.

#### Микроопыт

Водяная струя как бы стянута пленкой. Под влиянием внешних воздействий, например пальца, эта пленка деформируется, и в ней начинаются поверхностные (капиллярные) колебания, придающие струе форму гармошки.

#### ФИБОНАЧЧИЕВЫ КРОЛИКИ

(см. «Квант» №2)

- Пусть  $\varphi_p$  – простое число; если  $p = mk$  ( $m, k > 1$ ), то  $\varphi_{mk}$  делится на  $\varphi_m$ ; приходим к противоречию. Но при  $p = 19$  имеем  $\varphi_{19} = 4181 = 37 \cdot 113$ .
- При  $m + 1 \geq n$  получим  $0 \leq N - (\varphi_n + \varphi_m) \leq N - (\varphi_n + \varphi_{n-1}) = N - \varphi_{n+1}$ , что невозможно.
- Из общего решения  $L_n = c_1 \Phi^{n-1} + c_2 \widehat{\Phi}^{n-1}$ , учитывая начальные условия  $L_1 = 1$ ,  $L_2 = 3$ , получаем  $c_1 = \Phi$ ,  $c_2 = \widehat{\Phi}$ , откуда  $L_n = \Phi^n + \widehat{\Phi}^n$ . Так как  $\Phi^2 + 1 = \Phi\sqrt{5}$ ,  $\widehat{\Phi}^2 + 1 = \widehat{\Phi}\sqrt{5}$ , то  $\Phi_{n+1} + \Phi_{n-1} = (\Phi^{n+1} - \widehat{\Phi}^{n+1} + \Phi^{n-1} - \widehat{\Phi}^{n-1})/\sqrt{5} = L_n$ .
- При  $n = 0$  и  $n = -1$  равенство выполняется; предположим, что оно верно для всех  $k \leq m$ , тогда  $\varphi_{-(m+1)} = \varphi_{-(m-1)} - \varphi_m = (-1)^m \varphi_{m-1} - (-1)^{m-1} \varphi_m = (-1)^m \varphi_{m+1}$ .
- Указания. а) Сложите равенства  $\varphi_1 = \varphi_3 - \varphi_2$ ,  $\varphi_2 = \varphi_4 - \varphi_3$ ,  $\varphi_3 = \varphi_5 - \varphi_4$ , ...,  $\varphi_n = \varphi_{n+2} - \varphi_{n+1}$ . б) Сложите равенства  $\varphi_1 = \varphi_2$ ,  $\varphi_3 = \varphi_4 - \varphi_2$ , ...,  $\varphi_{2n-1} = \varphi_{2n} - \varphi_{2n-2}$ . в) Вычтите из равенства пункта а) равенство пункта б). г) Так как  $\varphi_k \varphi_{k+1} - \varphi_{k-1} \varphi_k = \varphi_k (\varphi_{k+1} - \varphi_{k-1}) = \varphi_k^2$ , то остается сложить эти равенства при всех  $k$  от 1 до  $n$ . д)  $\varphi_{n+1}^2 - \varphi_n^2 = (\varphi_{n+1} + \varphi_n)(\varphi_{n+1} - \varphi_n) = \varphi_{n+2} \varphi_{n-1}$ . е)  $\varphi_{n-1} \varphi_{n+1} - \varphi_n^2 = \varphi_{n-1} (\varphi_n + \varphi_{n-1}) - \varphi_n^2 = \varphi_{n-1}^2 - \varphi_n (\varphi_n - \varphi_{n-1}) = -(\varphi_{n-2} \varphi_n - \varphi_{n-1}^2) = \dots$

- ...  $= (-1)^{n-1} (\varphi_0 \varphi_2 - \varphi_1^2) = (-1)^n$ .
- ж)  $\varphi_n^2 - \varphi_n \varphi_{n-1} - \varphi_{n-1}^2 = \varphi_n \varphi_{n-2} - \varphi_{n-1}^2 = (\varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}) \varphi_{n-2} - \varphi_{n-1}^2 = -(\varphi_{n-1}^2 - \varphi_{n-1} \varphi_{n-2} - \varphi_{n-2}^2) = \dots$   
 ...  $= (-1)^{n-1} (\varphi_2^2 - \varphi_2 \varphi_1 - \varphi_1^2) = (-1)^{n-1}$ .
- з) Поскольку  $\Phi^3 - 1 = 2\Phi$ ,  $\Phi + 1 = \Phi^2$ ,  $\widehat{\Phi}^3 - 1 = 2\widehat{\Phi}$ ,  $\widehat{\Phi} + 1 = \widehat{\Phi}^2$ , то получим  $\varphi_1^3 + \varphi_2^3 + \dots + \varphi_n^3 = (\Phi^3 + \Phi^6 + \dots + \Phi^{3n} + 3(\Phi - \Phi^2 + \dots + (-1)^{n+1} \Phi^n) + 3(-\widehat{\Phi} - \widehat{\Phi}^2 + \dots + (-\widehat{\Phi})^n) - \widehat{\Phi}^3 - \widehat{\Phi}^6 - \dots - \widehat{\Phi}^{3n})/5\sqrt{5} = (\Phi^{3n+2} - \widehat{\Phi}^{3n+2} - \Phi^2 + \widehat{\Phi}^2 + 6(-\Phi)^{n-1} - 6(-\widehat{\Phi})^{n-1} + 6\Phi^{-1} - 6\widehat{\Phi}^{-1})/10\sqrt{5} = (\varphi_{3n+2} + (-1)^{n-1} \cdot 6\varphi_{n-1} + 5)/10$ .
6. Доказательство проведем индукцией по  $m$ . При  $m = 1$  равенство справедливо, верно оно и при  $m = 2$ :  $\varphi_{n+2} = \varphi_{n+1} + \varphi_n = \varphi_{n-1} + \varphi_n + \varphi_n = \varphi_2 \varphi_{n-1} + \varphi_3 \varphi_n$ . Пусть оно выполняется при  $m \leq k$ , в частности при  $m = k$  имеем  $\varphi_{n+k} = \varphi_k \varphi_{n-1} + \varphi_{k+1} \varphi_n$ . Положим  $m = k + 1$ , тогда  $\varphi_{n+k+1} = \varphi_{n+k} + \varphi_{n+k-1} = \varphi_k \varphi_{n-1} + \varphi_{k+1} \varphi_n + \varphi_{k-1} \varphi_{n-1} + \varphi_k \varphi_n = \varphi_{k+1} \varphi_{n-1} + \varphi_{k+2} \varphi_n$ . а) При  $m = n$  формула дает  $\varphi_{2n} = \varphi_n (\varphi_{n-1} + \varphi_{n+1}) = (\varphi_{n+1} - \varphi_{n-1})(\varphi_{n+1} + \varphi_{n-1})$ . б) Положите в формуле  $n = m + 1$ . в) Пусть  $m = 2n$ , тогда  $\varphi_{3n} = \varphi_{n-1} \varphi_{2n} + \varphi_n \varphi_{2n+1} = \varphi_{n-1} (\varphi_{n+1}^2 - \varphi_{n-1}^2) + \varphi_n (\varphi_n^2 + \varphi_{n+1}^2) = \varphi_{n+1}^3 + \varphi_n^3 - \varphi_{n-1}^3$ . г) Пусть  $m > n$ , заменим в исходной формуле  $n + m$  на  $m$ :  $\varphi_m = \varphi_{m-n} \varphi_{n-1} + \varphi_{m-n+1} \varphi_n$ , тогда  $d = \text{НОД}(\varphi_m, \varphi_n) = \text{НОД}(\varphi_{m-n}, \varphi_n)$ , так как  $\text{НОД}(\varphi_{n-1}, \varphi_n) = 1$ . Продолжим далее вычитать из большего индекса меньший (такой процесс впервые описал Евклид и показал, что в результате пара чисел  $(m, n)$  приводится к паре  $(ks, k)$ , где  $k = \text{НОД}(m, n)$ ). Откуда  $d = \text{НОД}(\varphi_{ks}, \varphi_k) = \varphi_k$ .
7. Пусть длины сторон треугольника равны  $\varphi_n, \varphi_m, \varphi_k$ ,  $n > m > k$ . Тогда  $\varphi_k + \varphi_m \leq \varphi_{m-1} + \varphi_m = \varphi_{m+1} \leq \varphi_n$ , что противоречит неравенству треугольника.

#### ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ

(см. «Квант» №2)

- Куб. Указание. Воспользуйтесь неравенством  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ .
- Параллелепипед, основанием которого служит квадрат, а боковое ребро равно диагонали основания.
- Высота параллелепипеда равна  $\frac{1}{3}$  высоты пирамиды.
- Высота цилиндра наибольшего объема равна  $\frac{1}{3}$  высоты конуса.
- $\frac{4}{3}R$ . 6.  $4R$ . 7.  $V_{\max} = \frac{2\pi b^2}{9\sqrt{3}}$  при  $\alpha = \text{arccctg} \sqrt{2}$ .
- $V = \frac{1}{12} x^2 \sqrt{4 - 2x^2}$ ,  $0 < x < \sqrt{2}$ ;  $V_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{27}$  при  $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .
- $V = \frac{1}{6} x \sqrt{3 - x^2}$ ,  $0 < x < \sqrt{3}$ ;  $V_{\max} = \frac{1}{4}$  при  $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ .
- Пусть  $\angle BAC = \varphi$ ,  $AO = x$ . Применив теорему Пифагора к треугольникам  $AOB$  и  $AOC$  и теорему косинусов к треугольникам  $BOC$  и  $ABC$ , выразим  $\cos \varphi$ :  $\cos \varphi = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 9x + 8}}$ . Пусть  $\varphi = 45^\circ$ , тогда  $x = 1$ .

Чтобы найти наибольшее значение  $\varphi$ , заметим, что

$$\cos \varphi = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 9x + 8}} = \frac{2\sqrt{6}}{7} \frac{6(x^2 + 1) + (x^2 + 8)}{2\sqrt{6}(x^2 + 1)(x^2 + 8)} \geq \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

в силу неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом, причем равенство достигается при  $6(x^2 + 1) = x^2 + 8$ , т.е. при  $x = \sqrt{0,4}$ . Наибольшее значение  $\varphi$  равно  $\arccos \frac{2\sqrt{6}}{7} \approx 45^\circ 30'$ .

### ПРАВИЛО ДЕКАРТА

1. Это последовательности, которым соответствуют группы плюсов и минусов вида а)  $++\dots+-\dots-$  или  $---\dots-++\dots+$ ;  
б)  $++\dots+-\dots-++\dots+$  или  $---\dots-++\dots+-\dots-$ .
2. Поскольку числа  $a$  и  $c \neq 0$  имеют разные знаки, по теореме Виета уравнение имеет ровно один положительный корень. Если же  $c = 0$ , то уравнение  $ax^2 + bx = 0$  тоже имеет положительный корень.
3. Ни одного или два (с учетом кратности).
4. Один корень. Одна переменная знака. Рассмотрите функцию

$$f(x) = x^4 + 2x^2 + 3x - 1 - \frac{1}{x}.$$

Она возрастает, заведомо отрицательна при малых  $x$  и положительна при  $x > 1$ .

5. Один.
6.  $\operatorname{sgn} a_l = -\operatorname{sgn} b_l$ ,  $\operatorname{sgn} a_k = -\operatorname{sgn} b_k$ .
7. Это утверждение очевидно.
8. а) Один; б) два. *Указание.* Число отрицательных корней многочлена  $f(x)$  равно числу положительных корней многочлена  $f(-x)$ .
9. См. указание к предыдущему упражнению.
10.  $\{0, 1\}$ . *Указание.* При  $x < 0$  слева стоит отрицательное число, а справа — положительное, поэтому равенства быть не может. В силу правила Декарта, больше одного положительного корня быть не может. Но один корень очевиден:  $x = 1$ .
11. При  $x \leq 0$  слева, очевидно, стоит отрицательное число, следовательно, все корни уравнения положительны. Но число положительных корней рассматриваемого уравнения равно числу положительных корней уравнения  $(x+1)(x^5 + 2x^3 - x^2 + x - 1) = 0$ . Раскрывая скобки, получим  $x^6 + x^5 + 2x^4 + x^3 - 1 = 0$ . В силу правила Декарта, число корней этого уравнения не превосходит 1. Но один корень заведомо есть, так как левая часть отрицательна при  $x = 0$  и положительна при достаточно больших значениях  $x$ .
12. Очевидными преобразованиями неравенство приводится к виду  $a^2 - ab + b^2 - 1 \leq 0$ . Рассмотрим многочлен  $f(x) = x^2 - bx + b^2 - 1$ . Легко проверяются неравенства  $f(0) \leq 0$  и  $f(1) \leq 0$ . Из условия  $f(0) \leq 0$  и правила Декарта следует, что этот многочлен не может иметь более одного положительного корня. А если бы для какого-то  $x_0 \in [0; 1]$  выполнялось неравенство  $f(x_0) > 0$ , то этот многочлен имел бы как минимум два корня: один на интервале  $(0; x_0)$  другой — на интервале  $(x_0; 1)$ .

13. Рассмотрим многочлен  $f(x) = (3(a^2 + b^2) - 2ab)x^2 - 2ab(a+b)x - 3(1 - a^2b^2)$ . По условию,  $1 - a^2b^2 \geq 0$ , так что последовательность его коэффициентов содержит одну переменную знаков и, кроме того,  $f(0) < 0$ . Поэтому достаточно доказать, что  $f(1) \leq 0$ , т.е.

$$3(a^2 + b^2) - 2ab - 2ab(a+b) - 3(1 - a^2b^2) \leq 0.$$

Рассмотрим функцию  $g(x) = (3 - 2a - 3a^2)x^2 - (2a + 2a^2)x -$

$-3(1 - a^2)$ . По условию,  $1 - a^2 \geq 0$ , следовательно, уравнение  $g(x) = 0$  имеет не более одного положительного корня, и  $g(0) \leq 0$ . Поэтому достаточно доказать, что  $g(1) \leq 0$ , т.е.  $4a^2 - 4a \leq 0$ . Последнее неравенство проверяется легко.

14. Рассмотрим функцию  $f(x) = (1-a)^x + (1+a)^x - 2^x$ . Очевидно,  $f(1) = 0$ , а согласно правилу Декарта эта функция имеет не более одного корня. Остается заметить, что при очень больших значениях  $x$  она отрицательна. Впрочем, можно использовать и очевидное неравенство  $f(2) < 0$ .

15. Рассмотрим квазимногочлен  $f(x) = \frac{1}{1+a} (1+a)^x + \frac{1}{1-a} a^x - \frac{1}{1-a}$ . Он имеет три члена, значит, не может иметь больше двух корней. Но  $f(1) = f(2) = 0$ . А поскольку  $f(x) \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow +\infty$ , неравенство  $f(x) > 0$  выполняется при  $x > 2$  и  $x < 1$ .

16. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{b_1^q b_1^x + b_2^q b_2^x + \dots + b_k^q b_k^x}{k} - \frac{b_1^q + b_2^q + \dots + b_k^q}{k} \frac{b_1^x + b_2^x + \dots + b_k^x}{k}.$$

Она имеет одну переменную знака (сообразите, почему!) и очевидный корень  $x = 0$ . Остается разобраться со знаком этой функции при очень больших  $x$ , что уже несложно.

17. Квазимногочлен  $f(t) = \sum |\pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n|^t - 2^n (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{t/2}$  согласно правилу Декарта имеет не больше двух корней. Очевидно, что  $t = 0$  — корень. Убедиться, что  $t = 2$  — тоже корень, можно, просто раскрывая скобки.

18. Рассмотрим квазимногочлен

$$f(x) = \frac{p_1 b_1^x + p_2 b_2^x + \dots + p_k b_k^x}{p_1 + p_2 + \dots + p_k} - \left( \frac{p_1 b_1 + p_2 b_2 + \dots + p_k b_k}{p_1 + p_2 + \dots + p_k} \right)^x,$$

а дальше дословно повторим рассуждения, использованные при доказательстве неравенства Коши.

19. Рассмотрим квазимногочлен

$$f(x) = \frac{b_1^x + b_2^x + \dots + b_k^x}{k} - \left( \sqrt{\frac{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_k^2}{k}} \right)^x.$$

20. Рассмотрим квазимногочлен  $f(x) = ba^x + cb^x + dc^x + ad^x - (ab^x + bc^x + cd^x + da^x)$ . Согласно правилу Декарта он имеет два корня (0 и 1) и отрицателен при  $x < 0$ . Значит, его производная в нуле положительна, что и дает нужное неравенство.

21. Рассмотрим квазимногочлен  $f(x) = ab^x + ba^x -$

$-(a+b) \left( \frac{a+b}{2} \right)^x$ . Число  $\frac{a+b}{2}$  лежит между числами  $a$  и  $b$ , поэтому многочлен имеет 0 или 2 корня. Но  $f(0) = 0$ , следовательно, корней ровно два. При очень больших  $x$  значения этого квазимногочлена положительны, а  $f(1) < 0$ . Значит, второй корень больше 1. А тогда  $f'(0) < 0$ , откуда и получается нужное неравенство.

22. В силу правила Декарта, квазимногочлен

$$f(x) = a_1^x b_1^{1-x} + a_2^x b_2^{1-x} + \dots + a_k^x b_k^{1-x} - (a_1 + a_2 + \dots + a_k)^x (b_1 + b_2 + \dots + b_k)^{1-x}$$

имеет не более двух корней, а два его корня  $x = 0$  и  $x = 1$  очевидны. Остается выяснить знак производной этой функции в точке 1.

23. Если выполняется только одно из данных по условию неравенств, то доказываемое неравенство очевидно: его левая часть неположительна, а правая неотрицательна. Значит, можно считать, что выполняются оба данных неравенства.



Допустим сначала, что числа  $a_1, \dots, a_k$  и  $b_1, \dots, b_k$  положительны. Тогда мы вправе рассмотреть квазимногочлен

$$f(x) = (a_0^2)^x (b_0^2)^{1-x} - (a_1^2)^x (b_1^2)^{1-x} - \dots - (a_k^2)^x (b_k^2)^{1-x} - \\ - (a_0^2 - a_1^2 - \dots - a_k^2)^x (b_0^2 - b_1^2 - \dots - b_k^2)^{1-x}.$$

Он имеет два корня  $x = 1$  и  $x = 0$  и, значит, положителен при  $x = 1/2$ . Случай, когда не все числа  $a_1, \dots, a_k$  и  $b_1, \dots, b_k$  положительны, легко сводится к уже рассмотренному.

24. Для доказательства правого неравенства нужно рассмотреть квазимногочлен

$$f(x) = (4a+1)^x + (4b+1)^x + (4c+1)^x + (4d+1)^x - 4 \cdot 2^x,$$

а для доказательства левого – квазимногочлен

$$g(x) = 3 - (4a+1)^x - (4b+1)^x - (4c+1)^x - (4d+1)^x + 5^x.$$

25. Если мы положим  $p_i = \frac{a_i^2}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2}$ , то увидим, что доказываемое неравенство обобщает неравенство Швейцера.

26. Их условия задачи легко следует, что для любого  $i = 1, 2, \dots, n$  выполняются неравенства  $a_i \leq \frac{\sqrt{n^2 - n + 1}}{n}$ . Поэтому последовательность коэффициентов квазимногочлена

$$f(x) = (n-1) \left( \frac{1}{n} \right)^x - a_1^x - a_2^x - \dots - a_n^x + \left( \frac{\sqrt{n^2 - n + 1}}{n} \right)^x$$

содержит две перемены знака. Коэффициенты подобраны так, что значения квазимногочлена равны нулю в точках 0 и 2. Значит, его производная в точке ноль неположительна. Это дает нижнюю оценку произведения, которая достигается, когда квазимногочлен обращается в тождественный ноль, т.е., когда все числа  $a_i$ , кроме одного, равны  $1/n$ , а это последнее равно  $\frac{\sqrt{n^2 - n + 1}}{n}$ . Таким образом находится наименьшее значение. Наибольшее находится из неравенства Коши.

### ТЕПЛОЕМКОСТЬ РАВНОВЕСНЫХ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ

1.  $C = C_p - \frac{\alpha R V}{\beta + 2\alpha V}$ , где  $C_p$  – молярная теплоемкость при постоянном давлении.

2. Газ охлаждается;  $C = C_V - R$ , где  $C_V$  – молярная теплоемкость при постоянном объеме.

3.  $C = v(3C_V - 2C_p) = -0,677$  Дж/К, где  $v = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = 0,163$  моль – количество молей гелия,  $C_V = \frac{3}{2}R$  и

$$C_p = \frac{5}{2}R.$$

$$4. A_{12} = \frac{3}{2}A.$$

### XIII МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ МАРАФОН»

Письменный индивидуальный тур

Математика

1. а) Может. Например,  $11111111^2 = 12345678987654321$ .  
б) Нет. Если число оканчивается на 789, то при делении на 8 оно дает в остатке 5, а квадраты нечетных чисел дают остаток 1 при делении на 8.

$$2. 2R \cos \frac{\alpha}{2}.$$

3.  $(1; 0; \sqrt{2})$ . Указание. Из неравенства  $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ , справедливого при любых  $a$  и  $b$ , следует, что левая часть уравнения не больше чем 3, причем равенство возможно лишь при  $x = \sqrt{1 - y^2}$ ,  $y = \sqrt{2 - z^2}$ ,  $z = \sqrt{3 - x^2}$ .

4. а) 3; б) 2 и 8. Указания. а) Первое число Фибоначчи, делящееся на 9, это

$f_{12} = 144$ , причем на 9

делятся все числа вида

$f_{12n}$ , но они же (и только они) делятся на 16.

б) На 16 делятся числа вида  $f_{12n}$ , но они же делятся на 9.

5. а) Нет; б) может;

в) нет. Указание (рис. Рис. 21

21). а) Если  $CM$  – высота, то  $CK^2 = 2x^2$ ,  $ML = 2x^2$ , откуда  $CK = ML$ , но тогда  $BC = MB$ , что невозможно.

б) Если  $CM$  – медиана, то по формуле для медианы

$$9x^2 = \frac{1}{4} (2(3y+z)^2 + 2(y+z)^2 - 4(y+z)^2).$$

А так как  $y^2 = 2x^2$ , имеем после преобразований  $y = 4z$ . Пусть  $z = 1$ , тогда  $y = 4$ . Отсюда  $AB = 10$ ,  $AC = 13$ ,  $BC = 5$ . Осталось убедиться в том, что медиана  $CM$  делится вписанной окружностью на равные части.

в) Если  $CM$  – биссектриса, то  $\angle CMB = \angle ACM$ , что невозможно.

6.  $-\left[\frac{n}{2}\right]$ . Указание. Воспользуйтесь тем, что

$$\sum_{n \geq i > j \geq 1} x_i x_j = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{2} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2} \geq -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq -\frac{n}{2}.$$

При четном  $n = 2k$  минимум достигается, например, при  $x_{2i-1} = 1$ ,  $x_{2i} = 0$ . При нечетном – при  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 0$ , ...,  $x_n = 0$ .

7. а) Нет; б) нет; в) и г) да. Указание. Предположим, что лист бумаги удалось разрезать на фигурки нужного вида. Покажем черным цветом клетки листа, как показано на рисунке 22. Каждая из фигурок содержит не более одной покрашенной клетки. Пусть  $x$  – число «уголков», а  $y$  – число «зигзагов». Тогда  $x + y \geq n^2$ ,  $3x + 4y = (2n-1)^2$ , откуда  $x \geq 4n-1$ . Отсюда следует, что требуемых разрезов не существует при  $n = 2$  и  $n = 3$ . Например, при  $n = 3$  потребовалось бы не меньше 11 «уголков». Однако в квадрате  $5 \times 5$  всего 25 кле-

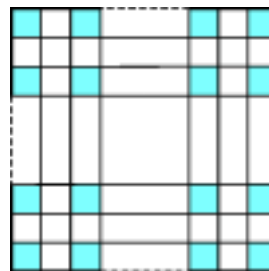


Рис. 22

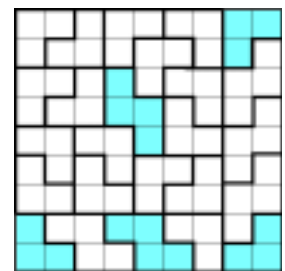


Рис. 23

ток. Если  $n = 4$ , то  $x \geq 15$ . Значит, для квадрата  $7 \times 7$  понадобится в точности 15 уголков и 1 «зигзаг». Такое разрезание возможно (рис.23). Как «продолжить» разрезания на большие  $n$ , показано на том же рисунке.

## Физика

1. Ускорение мотоциклиста определяется силой трения. Чтобы набирать скорость максимально быстро, он должен в каждый момент времени иметь максимально возможное тангенциальное ускорение. Для этого полное ускорение также должно быть максимально большим, т.е. равным  $a = F_{\text{тр}}/m = \mu g$ , где  $\mu$  – коэффициент трения. Обозначив  $\alpha$  угол между вектором ускорения и вектором скорости, выразим тангенциальное и нормальное ускорения:

$$a_t = v'(t) = a \cos \alpha, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = a \sin \alpha.$$

Продифференцировав второе уравнение по времени, получим

$$\frac{2vv'}{R} = a \cos \alpha \cdot \alpha'.$$

Учитывая, что  $v' = a \cos \alpha$ , а  $v/R = \omega = \phi'$ , где  $\phi$  – угол поворота радиуса-вектора мотоциклиста, получим  $\phi' = \alpha'/2$ . Значит, в каждый момент времени  $\phi = \alpha/2$ . В момент достижения максимальной скорости  $\alpha = \pi/2$ . Следовательно, в этот момент  $\phi = \pi/4$ , т.е. мотоциклист прошел восьмую часть окружности.

2.  $v = \left( \frac{v_1^6 + v_2^6}{v_1^4 + v_2^4} \right)^{1/2} = 143 \text{ м/с}.$

3. В проекциях на координатные оси уравнение движения частицы имеет вид  $ma_x = -kx$ ,  $ma_y = -ky$ , т.е. движение по каждой оси происходит по закону гармонических колебаний с частотой  $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ , амплитудой  $R_0$  и максимальной скоростью  $v_0 = \omega_1 R_0$ , равной линейной скорости движения частицы по окружности. Выберем оси координат так, чтобы в тот момент, когда  $k$  скачком уменьшается в два раза, частица находилась на оси  $y$ , тогда  $x = 0$ ,  $y = R_0$ . После этого движение в проекциях на оси будет происходить по закону гармонических колебаний с частотой  $\omega_2 = \omega_1/\sqrt{2}$ , причем вдоль оси  $y$  амплитуда колебаний останется равной  $R_0$ , а вдоль оси  $x$  амплитуда станет равной  $A_x = v_0/\omega_2 = \sqrt{2} v_0/\omega_1 = \sqrt{2} R_0$ . Движение частицы будет происходить по эллипсу с минимальным и максимальным удалениями от центра  $R_0$  и  $\sqrt{2} R_0$  соответственно.

4. Будем считать, что тепло, выделяющее при кристаллизации на границе воды и льда, уходит через лед наружу за счет разности температур  $\Delta T$  между нижней и верхней кромками льда (т.е. пренебрежем потоком тепла от воды). Тогда запишем

$$\lambda \rho_{\text{л}} dh = \gamma \frac{\Delta T}{h} dt,$$

где  $\lambda$  – удельная теплота плавления льда,  $\gamma$  – теплопроводность льда,  $h$  – толщина слоя льда. Отсюда

$$h^2 = \frac{2\gamma\Delta T}{\lambda \rho_{\text{л}}} t + C.$$

Поскольку в начальный момент толщина льда была равна нулю, получаем, что  $h \sim \sqrt{t}$ . Через 10 часов толщина льда будет в  $\sqrt{2}$  раз больше, чем через 5 часов, т.е. составит примерно 7 см.

5.  $T' = \frac{2T_1 + 3T_2}{5} = 322 \text{ К}.$  6.  $a = \frac{mg}{m + \epsilon_0 S d B^2}.$

7. Будем решать задачу в предположении небольшого отклонения формы планеты от сферической. Во вращающейся системе отсчета на любой элемент планеты помимо силы тяготения  $mg$  действует еще центробежная сила инерции, равная  $m\omega^2 r$  и направленная от оси вращения ( $r$  – расстояние до оси). Поскольку все точки поверхности должны иметь одинаковый потенциал, работа по переносу пробной массы  $m$  из центра планеты на поверхность должна быть одинаковой для

экватора и полюса. Отсюда получим

$$\int_0^{R_0} m\omega^2 r dr - mg\Delta R = 0, \text{ или } \frac{\Delta R}{R_0} = \frac{4\pi^2 R_0}{2gT^2} = 0,05.$$

Устный командный тур

## Математика

1. 5 часов. 2.  $ab$ . 3. Нет.

4. 11. Указание. Разрежем доску на квадратики  $2 \times 2$ .

В каждом из них должны быть заняты по меньшей мере 2 клетки (иначе из квадратика можно вырезать «уголок»). Поэтому должны быть заняты 32 клетки, т.е. число «уголков» не меньше 11. А 11 уголков вырезать можно (рис.24).

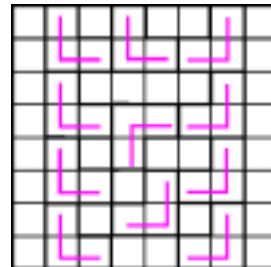


Рис. 24

5.  $\left(\frac{3\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}; \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{3\pi}{10}; \frac{3\pi}{10}; \frac{2\pi}{5}\right),$   
 $\left(\frac{3\pi}{7}; \frac{3\pi}{14}; \frac{5\pi}{14}\right).$

6. Второе число больше. Указание.

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{100} + \left(\frac{6}{7}\right)^{100} < \left(\frac{5}{7}\right)^3 + \left(\frac{6}{7}\right)^3 < 1.$$

7. Можно. Например: 2, 2, 2, 2, -9, 2, 2, 2, 2, -9, 2, 2, 2, 2, -9, 2, 2.

8. Делится. Указание. Пусть  $x = 2^{50}$ . Тогда

$$4x^4 + 1 = 4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^2 = (2x^2 + 2x + 1)(2x^2 - 2x + 1).$$

9.  $45^\circ$ . Указание. На перпендикуляре к  $AC$  в точке  $M$  (рис.25) отложим отрезок  $MK = MC$ . Треугольник  $AMK$  равен треугольнику  $MCB$  и треугольнику  $KNL$ . Отсюда следует, что  $AK = KN$ , а  $\angle AKN = 90^\circ$ .

10. а) Первый игрок; б) тоже первый игрок. Указание. а) Первый игрок соединяет диаметрально противоположные точки, а затем применяет «симметричную» стратегию: на каждый ход второго отвечает проведением хорды, симметричной только что проведенной хорде второго игрока относительно диаметра из первого хода. б) Первый соединяет точки с номерами 1 и 3. Оставшиеся точки для наглядности расположите в вершинах правильного 2002-угольника (номера диаметрально противоположных точек будут при этом иметь разную четность). На каждый ход второго игрока первый отвечает ходом, симметричным относительно центра окружности.

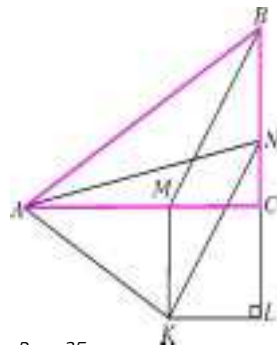


Рис. 25

## Физика

1. Скорость тени равна скорости движения поверхности Земли за счет суточного вращения, т.е. примерно 1100 км/ч.

2. 2500 кг/м³.

3. Поскольку стержень невесомый, момент сил, действующих на него со стороны грузов, должен быть равен нулю. Следовательно, грузы не взаимодействуют со стержнем и движутся равномерно по прямой со скоростью  $v = \omega \cdot 0,8l$ . Пройдя расстояние  $s = \sqrt{l^2 - (0,8l)^2} = 0,6l$ , они достигнут концов стержня за время  $t = s/v = 0,75 \omega^{-1}$ .

4. Мощность теплоотдачи при  $100^\circ \text{C}$  равна  $P$ . При увеличении напряжения в два раза мощность нагревателя возрастает до  $4P$ , причем  $P$  тратится на теплоотдачу, а  $3P$  – на испаре-

ние воды. Из уравнения  $3Pt = r \frac{m}{2}$  найдем  $t \approx 21$  мин.

5. Наведенный на шарике заряд  $Q$  находится из условия равенства нулю потенциала его центра:

$$k \frac{q}{r} + k \frac{Q}{R} = 0.$$

При поднесении второго заряда наведенный заряд увеличится в 3 раза. Если вначале на шарик действовала сила  $F$  притяжения к заряду  $q$ , то теперь на него действуют две взаимно перпендикулярные силы:  $3F$  со стороны первого заряда и  $12F$  со стороны второго. Равнодействующая этих сил равна  $3\sqrt{17}F$ . Значит, сила увеличится в  $3\sqrt{17}$  раза.

6. На уровне воды в сосуде.

7. Глубина погружения увеличится.

8.  $\mu < \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

9. Площадь поверхности таблетки уменьшается гораздо медленнее, чем ее объем.

*История научных идей и открытий*

*Математика*

1.  $\frac{\pi a^2}{2}$ . Указание.  $CD$  – высота прямоугольного треугольника  $ADB$ .

2. Гаусс пытался выяснить, действительно ли сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ , т.е. применима ли в реальной практике геометрия Евклида.

3.  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ .

4. Указание. Рассмотрите остатки от деления на 6.

5. Речь идет о Пьере Симоне Лапласе, которого Наполеон Бонапарт назначил министром внутренних дел, а потом не знал, что с ним делать.

*Физика*

1. 1) В 1609 году. 2) Галилео Галилей и Иоганн Кеплер. 3) Галилей – в Падуге, Кеплер – в Праге. 4) Труд – в шлифовании линз, доведении их поверхностей до сферических; издержки – в большой стоимости стекла для линз, которое должно быть особо однородным. 5) Галилей использовал плоско-выпуклую и плосковогнутую линзы с примерно одинаковыми фокусными расстояниями, а Кеплер – две плосковыпуклые линзы, причем длиннофокусную для окуляра и короткофокусную для объектива. 6) Телескоп Кеплера – он давал большую яркость изображения. 7) Обнаружение спутников Юпитера и спутника Сатурна, открытие пятен на Солнце, гор на Луне, фаз Венеры.

2. 1) Уильям Гильберт. 2) Идея о передаче силового взаимодействия через пространство, а не только при непосредственном соприкосновении тел. 3) Роберт Гук. Открыл закон упругости, сконструировал круговой пружинный маятник для ручных часов; усовершенствовал воздушный насос; провел систематизированные исследования микроскопического мира, которые привели, в частности, к открытию клетки.

3. 1) Бенджамин Франклин; столбчатая диаграмма. 2) Создал первую теорию электричества, исследовал атмосферное электричество и изобрел громоотвод. 3) Участвовал в работе над Декларацией независимости и Конституцией США. 4) Лион Фейхтвангер; «Лисы в винограднике». 5) М.В. Ломоносов; Георг Рихман, который погиб при проведении опытов с «притягиванием» молнии к громоотводу.

4. Фрэнсис Астон. 2) Открытие большого числа изотопов химических элементов и изучение их свойств. 3) Точные измерения масс атомов позволили измерить дефекты масс атомных ядер, знание которых было необходимо для практического использования ядерной энергии.

5. 1) Никола Тесла. 2) В США. 3) Разработал ряд конструкций электродвигателей, электрогенераторов, высокочастотных трансформаторов; построил радиоантенну. 4) Тесла – единица магнитной индукции;  $1 \text{ Тл} = 1 \text{ кг}/(\text{А} \cdot \text{с}^2)$ .

## ВСЕРОССИЙСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКЕ

1.  $\alpha = \pi - \arcsin \frac{u \sin \varphi}{v} - \varphi$  или  $\alpha = \pi - \varphi$ .

2.  $v_m = 2v_0$ . 3.  $\alpha = 56^\circ$ .

4.  $N = \frac{27}{256} \sigma T_1^4 S$ , где  $\sigma$  – постоянная Стефана–Больцмана.

5.  $E_k = \frac{\pi R^3 \sigma^2}{2 \epsilon_0}$ . 6.  $Q = \frac{1}{2} q \frac{\Phi_2^2}{\Phi_1}$ . 7.  $L = 0,52 \frac{\mu_0 l}{4\pi}$ .

8.  $I_1 = 0$ ,  $I_2 = \frac{I_m}{4}$ .

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»

kvant.info

Московский центр непрерывного математического образования

kvant.mccme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»

math.child.ru

Костромской центр дополнительного образования «Эврика»

ceemat.ru

журнал ©  
**Квант**

**НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ**

**А.А.Егоров, С.П.Коновалов,  
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

**НОМЕР ОФОРМИЛИ**

**В.А.Акатьева, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия,  
Е.Я.Силина**

**ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР**

**Е.В.Морозова**

**КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА**

**Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева**

**Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ  
по печати. Рег. св-во №0110473**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»;  
тел.: 930-56-48;  
e-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info,  
phys@kvant.info**

**Диапозитивы изготовлены ООО «Европолиграфик»**

**Заказ №**

**Отпечатано на ГУ РПП, г. Ржев, ул. Урицкого, 91**

**При участии ЗАО «РИЦ «Техносфера»,  
тел.: (095) 234-01-10**



# СУПЕРВУНДЕРКИНД

Из всех шахматных вундеркиндов Роберт Фишер был самым «продвинутым», самым великим, одним словом – супервундеркиндом.

Играть Бобби научила его старшая сестра Джоан в 6 лет, но немалое влияние на шахматное развитие сына оказала и мать. Именно она обратила внимание на его незаурядные способности и отвела в шахматный клуб. В 12 лет мальчик уже выступал в турнирах мастеров, в 13 стал чемпионом США среди юношей, в 14 – среди взрослых. В 15 лет Фишер – самый молодой гроссмейстер в мире, участник межзонального турнира, в 16 – претендент на шахматную корону.

Уже в 14 лет Фишера отличало зрелое мастерство и амбициозное желание побеждать. Вот первая победа Бобби в его первом официальном турнире – юношеском чемпионате США.

Томсон – Фишер

Нью-Йорк, 1955

Старонидийская защита

1. d4 ♘f6 2. c4 g6 3. ♘c3 ♗g7 4. e4 d6 5. ♘f3 0-0 6. ♗d3? Слабый ход, теперь черные организуют сильное давление на неприятельский центр. 6... ♗g4 7. 0-0 ♘c6 8. ♗e3 ♘d7 9. ♗e2 ♗:f3 10. ♗:f3 e5 11. d5 ♘e7 12. ♗e2 f5 13. f4 h6 14. ♗d3 ♘h7 15. ♗e2 fe 16. ♗:e4 ♘f5 17. ♗d2 ef 18. ♗:f4 ♘e5 19. ♗c2 ♘d4 20. ♗d2 ♗:e4 21. ♗f2 ♗:f4 22. ♗:f4 ♘e2+ 23. ♗h1 ♗:f4. Белые сдались.

В 1957 году Фишер выиграл и юношеский, и взрослый чемпионат США.

В 14 лет Бобби был дружелюбным мальчиком, ходил в старом сером свитере и джинсах, вел себя просто, но был очень застенчив и недоверчив, не любил открываться людям при первом знакомстве. Даже друзья не имели представления, чем Бобби живет и о чем думает. Но тратя много времени на шахматы, он не замыкался на них целиком. Как и Спасский, Фишер уделял большое внимание своему физическому развитию: плавал, катался на коньках и лыжах, играл в теннис, не прочь был поразмыслить на баскетбольной площадке или в кегельбане. Круг его интересов был не так уж узок: помимо спорта – телевидение, книги, музыка. Изучал Бобби и языки – сербско-хорватский, испанский, немецкий, особенно русский. Ведь он с самого детства просматривал и анализировал все партии, публиковавшиеся в периодической печати, прежде всего в советской.

В начале 1958 года шахматный мир облетела удивительная весть: очеред-

ной чемпионат США, который был одновременно отборочным к чемпионату мира, закончился победой 14-летнего вундеркинда, причем он оказался единственным участником, прошедшим турнир без поражений – 10,5 из тринадцати. Фишер завоевал путевку в межзональный турнир в Югославию, предстояло первое появление на международной арене.

По дороге в Югославию 15-летний Фишер нанес свой единственный в жизни визит в Москву. Американская шахматная федерация попросила советскую организовать два тренировочных матча юному участнику межзонального турнира – с Борисом Спасским и Евгением Васюковым. Однако, прибыв в СССР, Роберт замахнулся на самого Ботвинника, пожелал встретиться за доской только с ним. Но Михаил Моисеевич представлял собой харизматическую фигуру, тем более что недавно выиграл матч-реванш на первенство мира у Смыслова. Фишеру объяснили, что такая встреча затруднительна. Другие кандидатуры его не устроили, и он решил ограничиться разминкой в блиц. Почти две недели чемпион Америки провел в Центральном шахматном клубе, от зари до зари сражался в гроссмейстерской комнате.

В Югославии Фишер разделил 5–6-е места, его результат: шесть побед, два поражения и 12 ничьих.

После успеха в Портороже Бобби решил бросить школу: «Для того чтобы стать чемпионом мира, она мне не нужна». Многие осудили это решение юноши, часто посмеивались над ним. Но коллеги не обратили внимание на другие слова Фишера: «Я постоянно работаю над собой, стараюсь быть обходительным, и живу далеко не одними шахматами». Да, равный профессионализм Фишера не находил понимания.

В очередном чемпионате США, состоявшемся в конце 1958 года, Фишер опять пришел к финишу первым – 8,5 из 11, без поражений. Особенно много зрителей посетило шестой тур, в котором встретились два вундеркинда разных лет. Эта партия вошла во все сборники дебютных ловушек и комбинаций.

Фишер – Решевский

Нью-Йорк, 1958-1959

Сицилианская защита

1. e4 c5 2. ♘f3 ♘c6 3. d4 cd 4. ♗:d4 g6 5. ♗e3 ♘f6 6. ♗c3 ♗g7 7. ♗e4 0-0. Пора было пойти 7...d5, сводя игру к классическому варианту дракона. 8. ♗b3 ♗a5? 9. e5 ♗e8? После 9... ♗:b3 10. ef ♗:a1 11. fg ♗:c2+ 12. ♗:c2 ♗:g7 13. f4 шансы белых выше, но,

конечно, Решевский не подозревал, что его ждет при отступлении коня.



10. ♗:f7+! ♗:f7. После 10... ♗:f7 11. ♗e6! черные тоже остаются без

ферзя. 11. ♗e6! de. При взятии королем следует форсированный мат: 11... ♗:e6 12. ♗d5+ ♗f5 13. g4+ ♗:g4 14. ♗g1+ ♗h5 15. ♗d1+ ♗b4 16. ♗g4x 12. ♗:d8.

В этом безнадёжном положении Решевский сопротивлялся еще 30 ходов, хотя мог этого и не делать.

Осенью следующего года стартовал турнир претендентов в Югославии, восемь гроссмейстеров составляли в четыре круга. Американцы возлагали большие надежды на своего чемпиона, но юноша еще не был готов для великих свершений. Кроме того, Михаил Таль в те годы был неудержим и сметал все препятствия на своем пути. Он и вышел победителем, а в следующем году, одолев Ботвинника, взошел на шахматный престол. Впрочем, дележ 5–6-го мест с Глигоричем позади Тали, Кереса, Петросяна и Смыслова – вполне достойный результат для 16-летнего вундеркинда.

Весной 1960 года Фишер отправился на супертурнир в Мар-дель-Плата, где состоялась первая встреча двух вундеркиндов разных лет, двух будущих чемпионов мира – Спасского и Фишера. Хотя Бобби проиграл личную встречу, в остальных тринадцати он набрал 12,5 очков и с результатом 13,5 из пятнадцати разделил со Спасским 1–2-е места.

Осенью того же года 17-летний Фишер впервые возглавил сборную США на Шахматной олимпиаде. Здесь Фишер показал лучший результат на первой доске и одержал ряд блестящих побед. Благодаря ему американцы добились огромного успеха – после долгого перерыва завоевали «серебро».

В конце 1960 – новый чемпионат США, и четвертая подряд победа Бобби. Это была последняя победа Фишера перед его совершеннолетием.

Е. Гук



Индексы:

70465 – по каталогу "Роспечать"

26040 – по каталогу "Пресса России"

## Университеты мира на монетах и банкнотах

Величественное здание Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова на Воробьевых горах представлено на юбилейных монетах, посвященных XXII Олимпийским играм (Московская олимпиада 1980 г.), 850-летию Москвы (серия «Архитектурные памятники Москвы», 1997 г.) и 250-летию МГУ (2005 г.). Портрет основателя университета М.В.Ломоносова изображен на одной из монет серии «Эпоха просвещения. XVIII в.» (1992 г.). (Подробнее об МГУ – внутри журнала.)

