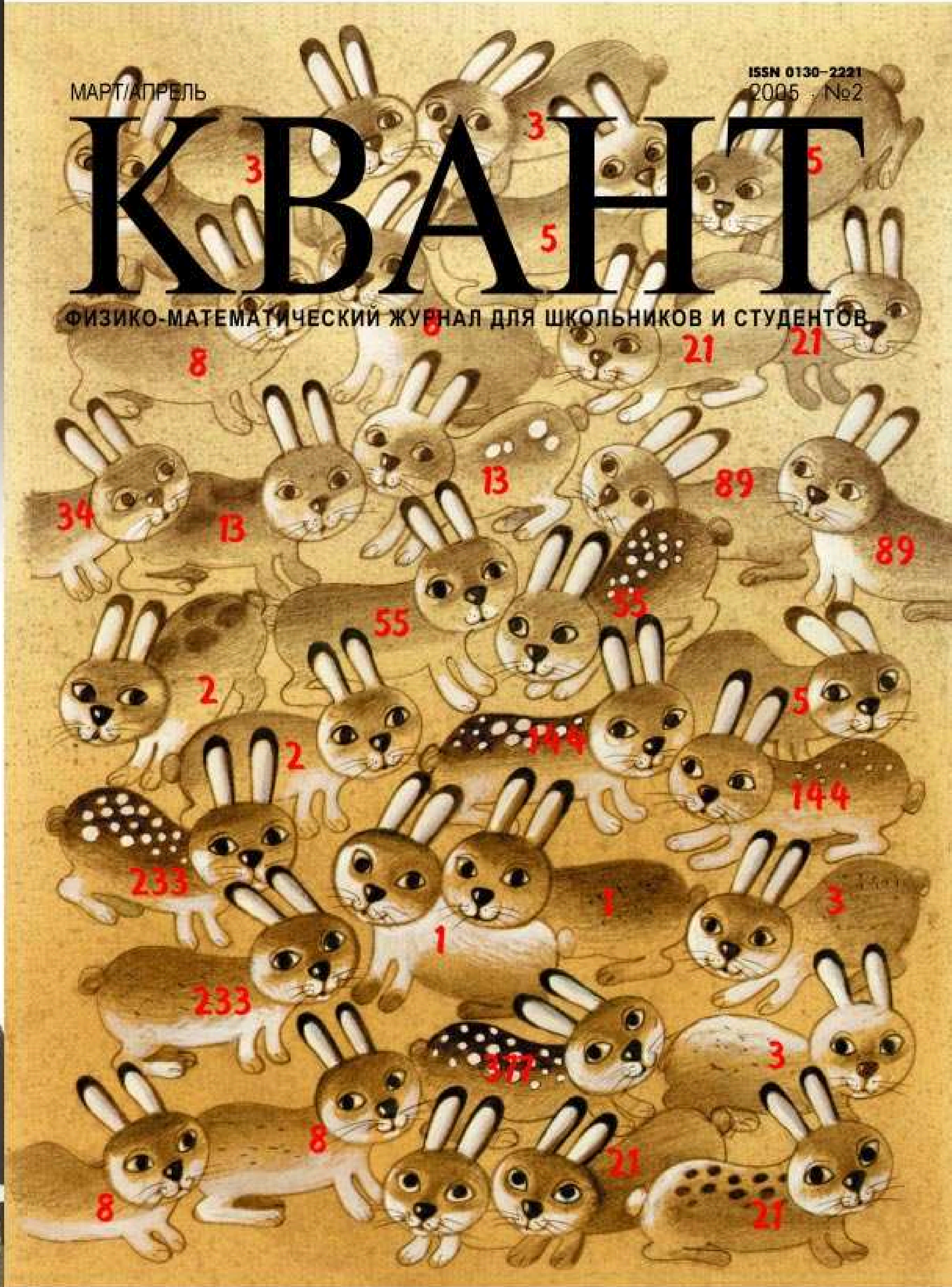
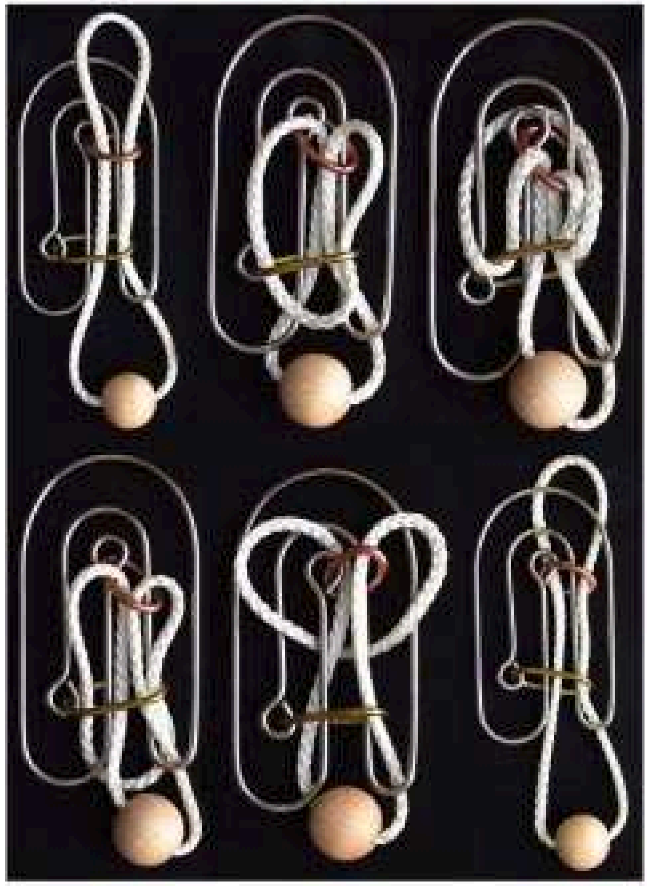
МАРТ/АПРЕЛЬ
ISSN 0130-2221
2005 · №2

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ





Калитка Весалы

В первых числах августа 2005 года в Хельсинки состоится съезд изобретателей, коллекционеров и любителей головоломок. На ежегодную встречу приглашены участники из 20 стран, в том числе и из России. Одним и устроителей и хозяев съезда будет известный финский изобретатель Маркку Весала. На рисунке вы видите его новую головоломку, которая по форме напоминает калитку в саду, а по смыслу является приглашением на съезд и ключом к доступу на него.

По своей конструкции это типичная топологическая игрушка, в которой требуется отцепить веревочную петлю с шариком от проволочной фигуры. Кроме сложности решения, головоломка хороша тем, что ее можно сделать любого размера из любой проволоки. Необходимо соблюсти лишь единственное условие – шар на петле должен быть больше, чем щели в проволочной фигуре. Веревочная петля примерно втрое втрое должна превышать высоту «калитки» – длины петли должно хватить на весь путь, который она пройдет во время решения. Поскольку головоломка очень трудная, промежуточные этапы этого пути показаны на рисунке.

А.Калинин

журнал Квант©
МАРТ АПРЕЛЬ 2005 №2

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Квант

Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

Бюро Квантум

Разговоры физиков за бокалом вина

А.РИГАМОНТИ, А.ВАРЛАМОВ, А.БУЗДИН

ПУЗЫРЬКИ И ОБРАЗОВАНИЕ ПЕНЫ. СЕКРЕТ «шумного» способа открывания бутылки шампанского прост – для получения обильной пены достаточно сильно потрясти бутылку перед открыванием. В результате то небольшое количество газа, которое всегда имеется в горлышке, смешивается с шампанским, образуя множество пузырьков. Когда же пробка вылетает, то давление в бутылке резко падает и образованные ранее пузырьки служат центрами выделения растворенного в жидкости углекислого газа по всему ее объему.

Пузырьки шампанского могут развлекать не только зрителей автомобильных гонок. Так студенты-физики удивляют девушек с филологического факультета, сидя за бокалом шампанского (или минеральной воды) и бросая в него кусочек шоколада. Читатель может сам убедиться на практике, что сначала шоколад утонет, затем через некоторое время всплывет, потом снова утонет, и так будет «осциллировать» несколько раз. Оставим объяснение этого нехитрого фокуса читателю, а сами перейдем к обсуждению других, менее очевидных свойств пузырьков шампанского.

Говоря о шампанском, физик не может обойти молчанием его необычные акустические свойства. Здесь мы остановимся на одном из таких свойств – своеобразном шипении пузырьков, лопающихся на поверхности шампанского. Понятно, что «колючий» звук лопающихся на пенной поверхности только что налитого в бокал свежего шампанского пузырьков связан с возникновением в пене своеобразных миниатюрных лавин. Шипящий звук является суммой многих спонтанных взрывов отдельных пузырьков. Совсем недавно бельгийский физик Вандервал с коллегами детально изучил специфику этих микровзрывов. Если бы число взрывов в секунду было фиксированным, то мы слышали бы постоянный свист – как от ненастроенного радиоприемника. Такой «белый шум» возникает в акустических процессах в случае, если частота звука меняется хаотично, в то время как амплитуда сигнала остается постоянной. Исследования же ученых показали, что акустический спектр звука лопающихся пузырьков шампанского не имеет ничего общего с белым шумом. Измерение с помощью чувствительного микрофона зафиксировало, что интенсивность сигнала существенно зависит от частоты, и эта зависимость возникает именно благодаря тому, что пузырьки лопаются не каждый сам по себе, а коллективно, влияя один на другой. Каждый пузырек лопается за время порядка $1/1000$ секунды. Когда такие микровзрывы происходят в быстрой последовательности один за другим, их шум сливается в единый достаточно громкий звуковой сигнал. Когда же пузырьки лопаются сами по себе, их едва слышно.

Почему шампанское пузырится? Растворимость газов в воде (вине) быстро растет с ростом давления. Поэтому в бутылке шампанского, находящегося под высоким давлением, растворено много углекислого газа, который образовался при ферментизации вина. Когда бутылку открывают, давление резко падает, а с ним падает и растворимость газа, который и выходит в виде многочисленных пузырьков.

Забавный случай связан с этим явлением. При вводе в эксплуатацию одной из глубоких шахт комиссия отметила это событие распитием на дне шахты бутылки шампанского. Затем члены комиссии быстро поднялись на поверхность на лифте и... сразу же схватились за животы. А объяснялось это очень просто. Давление на глубине шахты было больше давления на поверхности, и растворенный в шампанском газ, который не выходил из него на глубине, на поверхности стал быстро выделяться.

Характерно, что пена сходит по мере того, как жидкость в стенках пузырьков стекает вниз под действием силы тяжести, делая их слишком тонкими для выживания пузырька. Исследователи изучали этот процесс не на шампанском (чья пена лопается слишком быстро), а на знакомой всем мыльной воде, где пена рассасывается медленно, с характерным временем около часа. На таком удобном объекте они изучили зависимость длительности интервалов между последовательными разрывами пузырьков от времени и обнаружили, что эта зависимость имеет степенной характер. Это означает, что не существует характерной длительности такого интервала: время между обсуждаемыми событиями может оказаться любым – от миллисекунд до нескольких секунд, и нет способа предсказать, какой именно длительности окажется интервал при данном измерении.

Подобные степенные законы наблюдаются во многих природных явлениях, таких как землетрясения (которые не имеют выделенной амплитуды), сели или солнечные вспышки. Они обычно имеют место в системах, в которых взаимодействия между отдельными элементами играют важную роль в поведении системы как

Продолжение. Начало см. в «Кванте» №1.

Иллюстрация П.Чернуского

целого. Так, на лавиноопасном склоне сорвавшийся камешек может как вызвать страшное несчастье, так и просто скатиться вниз.

Физика и пастúс

На юге Франции, где часто стоит жаркая погода, распространен алкогольный напиток пастис. Пьют его так: в стакан наливается немного пастиса, а затем его доливают доверху холодной водой. Пастис и вода прозрачны, но их смесь сразу же становится непрозрачной – на вид белой. В чем же тут дело? Пастис представляет собой раствор этилового спирта (45%) в воде (55%), куда добавлено чуть-чуть анетола, примерно 2 грамма на литр. Анетол – это ароматическая молекула, которая еще с античных времен была важной составной частью разных лекарств и парфюмерных изделий. Получают анетол экстракцией из семян аниса. Анетол представляет собой желтоватую и сильно пахучую жидкость. Он очень хорошо растворяется в спирте и исключительно плохо в воде: молекулы воды сильно притягиваются друг к другу и очень слабо – к молекулам анетола. Молекулы воды и анетола в результате образуют несмешивающиеся фазы. Напротив, молекулы спирта так же хорошо притягиваются друг к другу, как и к молекулам анетола. Поэтому анетол хорошо растворяется в спирте. В бутылке пастиса концентрация спирта достаточно высока, чтобы молекулы анетола были растворены. Когда в пастис добавляют воду, спирт образует менее концентрированный раствор с водой, и молекулы анетола собираются в маленькие капельки. Именно присутствие этих мельчайших капелек делает напиток непрозрачным – он представляет собой эмульсию.

Хорошо знакомые примеры эмульсий это молоко, крем, майонез. Цвет в этом случае определяется рассеянием света на частицах, размер которых сравним с длиной волны световых волн (закон Бэра). Но каков же размер микрокапелек анетола в пастисе, готовом к употреблению? Чтобы ответить на этот вопрос, физики из Гренобля использовали методику рассеяния нейтронов на малые углы. В результате удалось узнать, что размер этих капелек в свежеприготовленной эмульсии оказывается действительно около половины микрона. Со временем их размер растет – на 50 процентов в течение суток. Если же оставить эмульсию в покое на несколько дней, то все капельки анетола соберутся в одну большую – произойдет полное разделение фаз. Но кто же будет ждать так долго, если на улице сильная жара...

Хлебное вино – водка

Чем ближе к северу, тем хуже растет виноград, и место вина занимают напитки, изготовленные путем дисцилляции яблок (кальвадос – северная Франция), слив и абрикосов (сливовица – Болгария, Чехия) и, наконец, того или иного сорта зерна (виски – Англия, водка – Россия). В старое время водка в России так и называлась – хлебное вино № 21 (Смирновъ), да и даже сегодня потребляется она за столом в той же манере, в которой французы и итальянцы пьют виноградное вино. Однако задумывались ли вы, почему все перечисленные напитки, будучи с химической точки зрения растворами полученного дистилляцией спирта в воде, имеют процентное содержание алкоголя (этилового спирта) около 40%?

В качестве первой причины приведем легенду, имеющую физическую основу. Говорят, что когда Петр I ввел монополию на производство водки и, тем самым, возложил ответственность за ее качество на государство, корчмари стали эту водку безбожно разбавлять. Таким образом они увеличивали свои доходы, одновременно вызывая справедливое недовольство посетителей низким качеством любимого напитка. Чтобы пресечь возможность этого злоупотребления, Петр I издал указ, позволяющий посетителям питейного заведения бить кабатчика до смерти, если подаваемая им водка не горит. Оказалось, что сорокапроцентное содержание спирта в растворе с водой есть тот нижний предел, при котором его пары над поверхностью жидкости еще могут гореть при комнатной температуре. Естественно, на этой нижней границе содержания спирта в водке и остановились кабатчики, найдя таким образом компромисс между погоней за наживой и жизнью.

Другая причина устойчивости «магического числа» связана со следующим обстоятельством. Хорошо известно явление объемного расширения: оно заключается в том, что при увеличении температуры объем тел возрастает, а при охлаждении, соответственно, уменьшается. Этому закону подчиняется большинство веществ, в том числе и спирт. Вода же является жидкостью аномальной: ниже 4 °С она с падением температуры начинает расширяться, а при замерзании ее удельный объем вообще скачком возрастает на 10%! Вот почему, например, нельзя оставлять на морозе бутылки с водой: замерзшая и увеличившая свой удельный объем вода их просто разрывает. А с водкой можно: в Сибири часто ящики с этим напитком оставляют на морозе, и ничего с бутылками не случается. Объяснение этого явления состоит из двух частей. Во-первых, наличие столь заметного количества спирта в воде препятствует ее кристаллизации, так что при понижении температуры не происходит внезапного скачка ее удельного объема. Во-вторых, при соотношении объемов 4:6 суммарный коэффициент объемного расширения оказывется близким к нулю: «аномальность» воды компенсируется «нормальностью» спирта. Достаточно взглянуть в таблицы физических величин и сравнить соответствующие коэффициенты объемного расширения чистых веществ:

$$\alpha_1 = -0{,}7 \cdot 10^{-3}\ \text{град}^{-1}\ \text{для воды},$$

$$\alpha_2 = 10^{-3}\ \text{град}^{-1}\ \text{для спирта}.$$

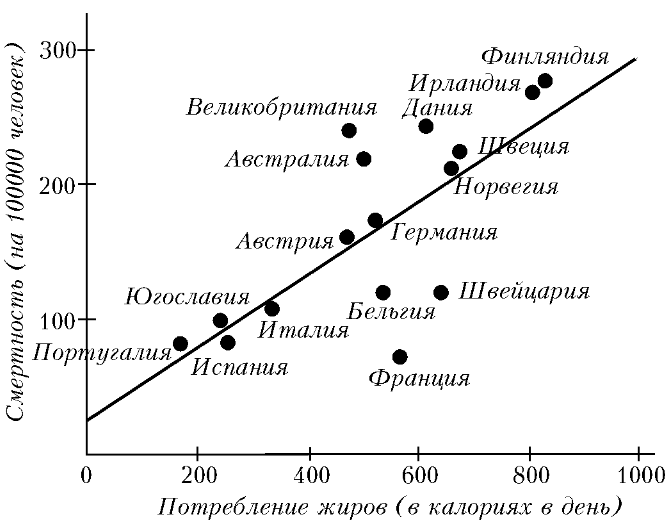
Есть и третья причина заветной крепости в 40%, открытие которой приписывают великому русскому химику Д.Менделееву. Утверждается, что именно он указал на тот факт, что 40-процентная водка не изменяет своей крепости, будучи оставленной с открытой поверхностью. Таким образом, рюмка водки, забытая на столе вечером, останется заполненной тем же напитком и на следующее утро (чего нельзя сказать о вине или шампанском) и, возможно, послужит лекарством страдающему головной болью юбиляру.

Четвертая причина 40-процентной крепости водки связана со скачком в вязкости раствора спирта в воде вблизи этой концентрации – в слабом растворе молекулы спирта двигаются сами по себе, в то время как при 40% начинается их полимеризация. Молекулы спирта выстраиваются в длинные одномерные цепочки, вязкость падает, и водка меняет к лучшему свои органолептические свойства (как говорят любители этого напитка, «сама втекает в горло»).

Пятая и последняя из известных авторам причин связана скорее с процедурой контроля стандарта качества напитка. Дело в том, что если в спиртоводный раствор бросить кусочек сала, то он окажется в положении безразличного равновесия именно при 40% спирта. В более крепком напитке он утонет, в более слабом – всплывет.

Роль вина в профилактике сердечно-сосудистых заболеваний: французский парадокс

На рисунке в схематической форме представлены данные по смертности от сердечно-сосудистых заболеваний (на сто тысяч человек) для различных стран мира в зависимости от среднего потребления населени-



ем жиров животного происхождения (в калориях в день). Зависимость очевидна: с увеличением потребления жиров (холестерина) практически линейно возрастает смертность от сердечно-сосудистых заболеваний. Однако на графике имеется одна, выпадающая из общей зависимости, точка, соответствующая положению дел во Франции: здесь потребляют заметное количество жиров, но, тем не менее, смертность от сердечно-сосудистых заболеваний относительно низка. Действительно, как видно из графика, французы едят жирной пищи больше, чем англичане, а вот от инфарктов умирают почти в четыре раза меньше.

Приведенные официальные данные были получены в рамках проекта MONICA Всемирной организации здравоохранения и были опубликованы в 1992 году. Однако, по-видимому, еще раньше с ними ознакомился ведущий одного из американских телеканалов, который уже в 1991 году обнародовал их под громким названием «французского парадокса», ставшего впоследствии известным также под названием «эффекта Бордо». Практически с момента открытия эта аномалия была приписана регулярному потреблению французами заметного количества красного вина, особенно характерному для провинции Бордо. Последующие научные исследования в других зонах производства красного вина позволили сделать однозначный вывод: потребление красного вина приводит к заметному снижению риска сердечно-сосудистых заболеваний. По какой причине? На этот вопрос дать ответ было не так-то просто.

Дело в том, что красное вино содержит в себе около 2000 различных веществ: разнообразные кислоты, фенолы, ваниль и следы почти всех известных минералов. Особый интерес у ученых вызвали полифенолы (содержащиеся в красном вине в количестве около 1 г на литр) и фитоалезин (присутствующий в виноградной кожице). В фитоализине в частности был обнаружен трансрезерватрол, который имеет сильное противоокислительное действие и противодействует старению клеток мозга. Дальнейшие исследования показали, что полифенолы оказывают влияние на липопротеины, уменьшают влияние главного виновника сердечно-сосудистых заболеваний эндотелина-1, предотвращают формирование «бляшек» на стенках сосудов. Но не будем углубляться в медицинские дебри. Попробуем, пользуясь методами обработки физического эксперимента, оценить приносящее пользу для здоровья дневное потребление красного вина.

На основании приведенных выше данных можно предположить, что вероятность сердечно-сосудистых заболеваний убывает с потреблением красного вина по часто встречающемуся в природе экспоненциальному закону:

$$I = I_0 e^{-\frac{b}{b_i}}.$$

Здесь I_0 – вероятность заболевания для непьющего вино человека, а b_i – норма ежедневного потребления вина в исследуемой области: во Франции эта величина составляет пару стаканов красного вина в день.

Однако понятно, что увлекаться винной профилактикой инфаркта не следует: потребление алкоголя в заметных количествах приводит к тяжелым недугам, например таким, как цирроз печени. О нем проще судить по потреблению водки: понятно, что те же два стакана в день, но не вина, а водки, пагубно скажутся на здоровье и заметно (в разы) увеличат вероятность цирроза печени по сравнению с непьющим человеком. Соответствующий фактор риска мы вновь промоделируем характерной для природных процессов экспоненциальной функцией, однако, в противоположность уже приведенной, – растущей:

$$C = C_0 e^{\frac{b}{b_c}}.$$

Здесь C_0 – вероятность возникновения цирроза у непьющего человека, а за константу b_c мы примем два стакана водки, что в простом пересчете по содержанию спирта эквивалентно шести стаканам вина в день.

(Заметим, что столь большое дневное потребление вина не является совершенной фантазией. Например, в замке города Гейдельберг (Германия) до сих пор сохранилась самая большая бочка в мире, из которой с помощью специальной системы ручных насосов вино подавалось в большой обеденный зал. Среднее потребление вина на обитателя замка, включая детей, стариков и вольных, составляло 2 литра в день. Придворный шут, карлик Перкей, регулярно выпивал двенадцать бутылок в день. При этом умер он не от цирроза, а от дизентерии, которой заразился, выпив, из-за проигранного спора, стакан плохо очищенной воды.)

Сложим вероятности обоих заболеваний:

$$W = I_0 e^{-\frac{b}{b_i}} + C_0 e^{\frac{b}{b_c}}.$$

Очевидно, что оптимум винопития реализуется при минимуме суммарной вероятности учитываемых заболеваний. Вычисляя и приравнивая к нулю производную:

$$\frac{dW}{db} = -\frac{b}{b_i} I_0 e^{-\frac{b}{b_i}} + \frac{b}{b_c} C_0 e^{\frac{b}{b_c}} = 0,$$

находим, что соответствующее количество вина определяется выражением

$$b^* = \frac{b_i b_c}{b_i + b_c}\left(\ln\frac{b_c}{b_i} + \ln\frac{I_0}{C_0}\right),$$

или

$$\frac{b^*}{b_i} = 0,75\left(1,1 + \ln\frac{I_0}{C_0}\right).$$

Предполагая вероятности цирроза и инфаркта для непьющего человека одинаковыми (авторы не нашли точных данных), видим, что оптимальным количеством дневного потребления является 1,5 стакана, или около трехсот граммов красного вина в день. Это и есть то количество, которое обычно выпивают, например, крестьяне в Тоскане за обедом и ужином.

Определение качества и происхождения вина: метод SNIF–ЯМР

Говоря о пользе разумного потребления натурального красного вина с определенными свойствами, необходимо быть уверенным в том, что его происхождение соответствует написанному на этикетке. Современная физика предлагает метод точнейшего контроля происхождения вина, основанный на применении явления ядерного магнитного резонанса. Этот метод называется методом определения специфического природного изотопического состава вина, английская аббревиатура – SNIF, от Specific Natural Isotope Fraction. Явление ядерного магнитного резонанса (ЯМР) состоит в следующем.

Ядра, например протоны в случае атомов водорода, подобно стрелке компаса, обладают некоторым весьма малым магнитным моментом. Будучи помещенными в однородное магнитное поле, эти магнитные моменты прецессируют (медленно вращаются) вокруг направления поля с пропорциональной величине этого поля частотой Ω. Приложим теперь малое переменное поле с частотой радиодиапазона в направлении, перпендикулярном основному полю. Так как магнитные моменты в принципе могут разворачиваться против направления постоянного магнитного поля, то, когда частота ω радиосигнала оказывается близкой к Ω (вот откуда происходит термин «резонанс»), его энергия начинает эффективно поглощаться. Следует иметь в виду, что ЯМР является сложным квантовым эффектом, однако приведенное грубое классическое описание в основном отражает его суть. В рассматриваемом случае для нас важно, что посредством электронной аппаратуры оказывается возможным измерить с огромной точностью величину резонансного магнитного поля, определяющего «линию ЯМР» в спектре поглощения. Эта величина соответствует значению локального магнитного поля на ядре, являющегося суммой внешнего поля и малых магнитных полей, индуцируемых электронными токами. Понятно, что резонансные линии могут соответствовать различным частотам электромагнитного излучения – в зависимости от специфики электронного окружения выбранного ядра. Резонансный спектр, таким образом, становится в некотором смысле «фотографией» конфигурации молекулы.

С помощью метода SNIF-ЯМР сегодня можно различать спирты одной и той же химической структуры, но различного ботанического происхождения. Оказывается возможным сказать, действительно ли данное вино было получено в результате брожения винограда с конкретного виноградника из определенной области. Метод основывается на том факте, что в виду различных процессов фотосинтеза и метаболизма растения, географических и климатических условий, содержание дейтерия по отношению к водороду измеримо варьируется от провинции к провинции, от виноградника к винограднику, от растения к растению. Дело в том, что обычная формула этилового спирта CH_3CH_2OH не отражает все возможные его вариации. В зависимости от содержания дейтерия в данной местности или в результате конкретного процесса метаболизма спирты, содержащиеся в вине, могут описываться также и формулами $CH_2D\text{-}CH_2\text{-}OH$, $CH_3\text{-}CDH\text{-}OH$, CH_3CH_2OD. Отношение D/H для каждой такой индивидуальной группы может быть получено в результате анализа спектра ЯМР на ядрах дейтерия. На основании таких измерений созданы базы данных по географической принадлежности вина, по ним можно узнать, добавлялся ли при его изготовлении сахар, использовались ли для его ароматизации вина других регионов и многое другое.

Фибоначчиевы кролики

Л.ШИБАСОВ, З.ШИБАСОВА

В 1170 ГОДУ В ИТАЛЬЯНСКОМ ГОРОДЕ ПИЗА В семье нотариуса родился сын Леонардо. Его отец имел прозвище Боначчи – добряк, поэтому мальчика называли Фибоначчи – сын Боначчи. Под этим именем Леонардо Пизанский, ставший впоследствии известным математиком, часто упоминается в истории науки. Отец работал в Алжире в качестве представителя торгового дома своего города. Проживание в Алжире благоприятно сказалось на образовании Леонардо. Ведь это была мрачная эпоха Средневековья, когда европейская наука находилась в упадке. В арабском же мире наблюдался подъем математической науки. Арабы, завоевавшие к этому времени высокоразвитые страны Средиземноморья, многое позаимствовали из культуры покоренных стран. Арабские халифы для прославления своего правления покровительствовали искусствам и наукам. Ученые активно переводили античные труды с греческого языка на арабский и получили ряд новых серьезных результатов в области алгебры и тригонометрии.

Образование, полученное в Алжире, Леонардо постоянно пополнял во время путешествий с отцом, которому часто приходилось бывать по торговым делам в разных странах Средиземноморья. Внимательно изучив достижения арабской математики, Леонардо подытожил их в трактате «Книга абака» (1202). Абак – это простейший вычислительный прибор, прародитель счетов, хорошо знакомых нам по недавнему прошлому. Но в книге речь шла не об этом приборе, а об искусстве вычислений. Труд получился грандиозным – достаточно сказать, что уже в печатном виде книга содержала 460 страниц. Написана она была для торговых и деловых людей с целью облегчения расчетов. В ней Леонардо познакомил широкий круг европейцев с десятичной системой счисления, которой пользовались арабы, и показал ее преимущество перед римской нумерацией, применявшейся в Европе.

Помимо задач практического характера (о цене товара, о дележе наследства, об имуществе, о сплавах и растворах) книга содержала правило приближенного извлечения корней, способы решения систем линейных уравнений, неопределенных уравнений и их систем, в частности – решение китайской задачи о делении с остатком. В этом трактате многое для европейской математики оказалось новым: использовались отрицательные числа, которые трактовались как долг, был введен термин «частное», в записи дроби появилась разделительная черта между числителем и знаменателем и т.д. Содержались в книге и собственные результаты Леонардо, в частности – решение задачи о размножении кроликов (о ней пойдет речь ниже) и задачи о наименьшем числе гирь, с помощью которых можно взвесить на рычажных весах все грузы, вес которых выражается целыми числами, не превышающими фиксированного натурального числа. Ее решение у Леонардо фактически основано на записи числа в троичной системе счисления. Эта задача до сих пор остается популярной. Надо сказать, что многие задачи из «Книги абака» использовались позже различными авторами.

В 1220 году Леонардо пишет «Практическую геометрию», в которой рассматривает геометрические задачи на построение, решаемые с помощью алгебры. Слава о выдающемся пизанском математике разнеслась по всей Европе. Прибывший в 1225 году в Пизу император Германии и король Сицилии Фридрих II решил испытать Леонардо. Придворный философ императора Иоганн Палермский предложил ему ряд задач, с которыми Леонардо блестяще справился. В том же году в «Книге квадратов» и в трактате «Цветок» он привел решения некоторых из них.

А теперь сформулируем знаменитую **задачу о размножении кроликов:** «Некто поместил пару кроликов в загоне, огороженном со всех сторон, дабы узнать, сколько пар кроликов родится в течение года. Природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а потомство дают они со второго месяца после своего рождения».

Приведем решение Леонардо. В начале первого месяца была одна пара кроликов; в начале второго – две, причем одна из них зрелая, т.е. способная через месяц принести потомство, вторая – нет. Поэтому в начале третьего месяца будут три пары кроликов, две из них зрелые. В начале четвертого месяца станет пять пар (три пары были и две – новое потомство), из них только три зрелые, и т.д.:

Начало месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Число зрелых пар	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
Число всех пар	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Из таблицы видно, что в конце года в загоне окажется 377 пар кроликов.

Числа второй строки с легкой руки французского математика Э.Люка стали называть *числами Фибоначчи.* Они образуют последовательность, элементы которой обозначим через φ_n. Легко видеть, что $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$, $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$, $\varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3$ и т.д. Другими словами, для чисел φ_n выполняется соотношение

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}, \qquad (1)$$

т.е. для вычисления элемента φ_n необходимо знать два предыдущих элемента φ_{n-1} и φ_{n-2}, а для их вычисления – вновь надо знать предыдущие элементы и т.д. до тех пор, пока не вернемся к φ_2 и φ_1. Соотношения такого типа в математике называют *рекуррентными* (от латинского recurrentis – возвращающийся), а возникающую при этом последовательность – *рекуррентной* или *возвратной*.

Равенство (1) позволяет вывести многие свойства чисел Фибоначчи. Мы приведем доказательство одних из них, а другие сформулируем в виде упражнений.

Свойство 1. *Соседние члены последовательности Фибоначчи взаимно просты.*

Предположим противное: найдутся φ_{n+1} и φ_n, имеющие общий делитель $d > 1$. Тогда $\varphi_{n-1} = \varphi_{n+1} - \varphi_n$ тоже делится на d. Продолжая этот спуск дальше, дойдем до $\varphi_2 = 1$, которое также должно делиться на d, что невозможно. Свойство доказано.

Свойство 2. *Если φ_n – наименьшее число, делящееся на d, то числа Фибоначчи, кратные d, повторяются с периодом, равным n.*

Пусть n – наименьший номер, для которого φ_n делится на d: $\varphi_n = a_0 d$. Тогда $\varphi_{n+1} = a_1 d + r$, $0 < r < d$, причем по предыдущему свойству d и r взаимно простые, $\varphi_{n+2} = (a_0 + a_1)d + r = a_2 d + r$, $\varphi_{n+3} = a_3 d + 2r$, $\varphi_{n+4} = a_4 d + 3r$, $\varphi_{n+5} = a_5 d + 5r$, …, $\varphi_{n+k} = a_k d + \varphi_k r$. Остатки r, r, $2r$, $3r$, $5r$, …, φ_k не являются наименьшими остатками от деления φ_{n+k} на d. При $k < n$ они на d не делятся в силу того, что φ_k не делится на d по условию, а r взаимно просто с d. Но число $\varphi_{2n} = a_n d + \varphi_n r$ кратно d. Аналогично, следующее число, делящееся на d, это φ_{3n} и т.д. Свойство доказано.

Из этого свойства вытекает, например, что числа φ_{3m} четные, числа φ_{4m} кратны трем, φ_{5m} делятся на 5, φ_{6m} – на 8.

Свойство 3. *При $m \neq 2$ число φ_n кратно φ_m тогда и только тогда, когда n кратно m.*

В самом деле, если $n = km$, то, положив $d = \varphi_m$, по предыдущему свойству получим, что число φ_{km} делится на φ_m. Пусть теперь φ_n делится на φ_m и $n = km + r$, $0 \le r < m$. По свойству 2, между числами φ_{km} и φ_{km+m} нет чисел, делящихся на φ_m, а значит, $r = 0$.

Упражнение 1. Покажите, что если φ_p – простое число, то при $p \neq 4$ его номер p тоже является простым. Обратное утверждение неверно.

Прежде чем сформулировать следующее свойство, отметим, что для любого натурального числа N выполняется неравенство $\varphi_n \le N < \varphi_{n+1}$. Тогда либо $N = \varphi_n$, либо для числа $N - \varphi_n$ вновь находим два соседних числа Фибоначчи φ_m и φ_{m+1} таких, что $\varphi_m \le N - \varphi_n < \varphi_{m+1}$.

Упражнение 2. Покажите, что $m + 1 < n$.

И снова либо $N = \varphi_n + \varphi_m$, либо находим наибольшее число φ_k, не превосходящее разности $N - (\varphi_n + \varphi_m)$, и т.д. Разность $N - (\varphi_n + \varphi_m + \varphi_k + \ldots)$ неотрицательна и убывает с каждым шагом. Бесконечно убывать она не может, поскольку ограничена снизу нулем. Поэтому на некотором шаге она становится равной нулю. В результате имеем $N = \varphi_n + \varphi_m + \varphi_k + \ldots$, где $N < \varphi_{n+1}$, $m + 1 < n$, $k + 1 < m$,… Включив в найденную сумму все пропущенные числа Фибоначчи с нулевыми коэффициентами, получаем следующее свойство

Свойство 4. *Любое натуральное число N однозначно записывается в виде*

$$N = a_n\varphi_n + a_{n-1}\varphi_{n-1} + \ldots + a_2\varphi_2 + a_1\varphi_1$$

с коэффициентами a_k, равными нулю или единице.

Это позволяет говорить о фибоначчиевой системе счисления. Например,

$$20 = 13 + 5 + 2 = \varphi_7 + \varphi_5 + \varphi_3 = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0)_\Phi,$$

$$50 = 34 + 13 + 3 = \varphi_9 + \varphi_7 + \varphi_4 = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)_\Phi,$$

$$100 = 89 + 8 + 3 = \varphi_{11} + \varphi_6 + \varphi_4 = (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0)_\Phi.$$

Индекс «Ф» указывает на то, что число записано в фибоначчиевой системе счисления. Такая запись напоминает двоичную, но, в отличие от нее, не может иметь две подряд идущие единицы в силу максимальной экономности способа представления.

Рекуррентная формула позволяет найти значение любого члена последовательности Фибоначчи по предыдущим членам. А можно ли выразить φ_n непосредственно через n? Ответ на этот вопрос положительный. Чтобы найти искомое выражение, снова обратимся к соотношению (1) и рассмотрим его как уравнение с неизвестным φ_n. Будем искать решение этого уравнения в виде $\varphi_n = \lambda^n$. Подставляя λ^n в (1), получим

$$\lambda^{n+2} = \lambda^{n+1} + \lambda^n. \tag{2}$$

Поскольку нулевое решение нас не интересует, сократив на λ^n, придем к уравнению $\lambda^2 = \lambda + 1$. Оно называется *характеристическим* для соотношения (1). Степени его корней $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ удовлетворяют уравнению (2) и, следовательно, соотношению (1). Очевидно, любая линейная комбинация λ_1^n и λ_2^n также удовлетворяет (1), поэтому

$$\varphi_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$

Остается так подобрать коэффициенты c_1 и c_2, чтобы $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$. С этой целью положим $n = 1$ и $n = 2$, тогда

$$1 = c_1 + c_2 \text{ и } 1 = c_1\frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

откуда $c_1 = \left(1+\sqrt{5}\right)/2\sqrt{5}$, $c_2 = \left(\sqrt{5}-1\right)/2\sqrt{5}$. Окончательно получаем

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Это равенство называют *формулой Бине* по имени открывшего ее (1843) французского математика Ж.Бине, хотя еще раньше она встречалась (1728) у швейцарского математика Д.Бернулли.

В формуле Бине присутствуют два числа $\left(1+\sqrt{5}\right)/2 = \Phi$ и $\left(1-\sqrt{5}\right)/2 = \widehat{\Phi}$, связанные еще с одним замечательным математическим понятием — *золотым сечением.* Оно определяется как деление отрезка на две неравные части, из которых бóльшая x является средней пропорциональной между всем отрезком a и меньшей частью, т.е. $a : x = x : (a - x)$. Из этой пропорции находим $x = a\Phi^{-1} = -a\widehat{\Phi}$. Отношение же всего отрезка к его большей части равно Ф. Такое деление отрезка обладает рядом интересных свойств и часто применяется при создании произведений искусства и предметов быта для достижения гармонии. По этой причине великий художник и ученый эпохи Возрождения Леонардо да Винчи назвал его «золотым сечением». Обозначение отношения буквой Ф взято в честь древнегреческого скульптора Фидия (V в. до н.э.), специально использовавшего его в своих произведениях.

Выведем с помощью формулы Бине еще одно свойство чисел Фибоначчи.

Свойство 5. *Предел отношения* $\varphi_{n+1} : \varphi_n$ *при* $n \to \infty$ *равен числу Ф.*

Это свойство обнаружил еще в XVII веке немецкий астроном и математик И.Кеплер. Запишем формулу Бине в виде $\varphi_n = \left(\Phi^n - \widehat{\Phi}^n\right)/\sqrt{5}$. Из неравенств $\Phi > 1$, $\left|\widehat{\Phi}\right| < 1$ следует, что искомый предел равен пределу отношения $\Phi^{n+1} : \Phi^n = \Phi$.

Вернемся к соотношению (1). Перепишем его в общем виде $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ для произвольной последовательности $\{u_n\}$, каждая из которых определяется своими первыми элементами u_1 и u_2. Все они называются *обобщенными последовательностями Фибоначчи.* Нами рассмотрен случай $u_1 = u_2 = 1$. Приведем другие примеры: 1) при $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ получим последовательность чисел третьей строки таблицы (число всех пар кроликов); 2) при $u_1 = 2$, $u_2 = 1$ придем к последовательности 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, ... ; 3) при $u_1 = 1$, $u_2 = 3$ получим предыдущую последовательность, начиная со второго элемента. Ее члены называются *числами Люка.* Очевидно, формула общего члена для каждой из таких последовательностей имеет вид $u_n = c_1\Phi^n + c_2\widehat{\Phi}^n$, где c_1 и c_2 определяются по двум первым элементам.

Упражнение 3. Покажите, что для n-го числа Люка L_n выполняются равенства $L_n = \Phi^n + \widehat{\Phi}^n$ и $L_n = \varphi_{n+1} + \varphi_{n-1}$.

Пользуясь равенством (1), можно ввести числа Фибоначчи с отрицательными индексами: $\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1$, $\varphi_{-1} = \varphi_1 - \varphi_0$, $\varphi_{-2} = \varphi_0 - \varphi_{-1}$ и т.д. Выпишем несколько их значений:

$-n$	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9	−10
φ_{-n}	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Видим, что вновь возникает последовательность чисел Фибоначчи, только с чередующимися знаками.

Упражнение 4. Докажите равенство $\varphi_{-n} = (-1)^{n-1}\varphi_n$.

Числа Фибоначчи часто встречаются в природе: интересно, что ими выражаются количества спиралей, по которым располагаются семечки в подсолнухе, цветочки в соцветиях ромашки, чешуйки в еловых шишках и др. Применяются они и в практической деятельности, например при машинной сортировке и обработке информации. Используются числа Фибоначчи и в математике при генерировании случайных чисел, при нахождении экстремумов функций, производные которых неизвестны. В 1891 году Э.Люка с их помощью нашел 12-е совершенное число (число, равное сумме всех своих собственных делителей). Заметим, что это последнее совершенное число, найденное без использования ЭВМ.

Но самое замечательное приложение числа Фибоначчи нашли в XX веке. С их помощью советский математик Ю.В.Матиясевич решил (1970) десятую проблему Гильберта. Здесь надо сказать несколько слов о знаменитом докладе немецкого математика Д.Гильберта, сделанном им на Втором международном конгрессе математиков, состоявшемся в 1900 году в Париже. В этом докладе он обрисовал состояние математики на рубеже веков и поставил 23 проблемы, разрешение которых желательно было бы получить в новом веке. Среди них были и древние задачи, и совершенно новые, которые появились в результате последних исследований ученых, в том числе и самого Гильберта. Проблемы оказались столь актуальными, что практически вся математика XX века развивалась под знаком решения задач, поставленных Гильбертом. Под номером десять в докладе была сформулирована проблема разрешимости алгебраического уравнения с целыми коэффициентами во множестве целых чисел. Используя делимость чисел Фибоначчи, Матиясевич доказал, что не существует алгоритма, позволяющего определить, разрешимо ли такое уравнение во множестве целых чисел.

Упражнения

5. Докажите следующие свойства чисел Фибоначчи:

а) $\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n = \varphi_{n+2} - 1$;

б) $\varphi_1 + \varphi_3 + \ldots + \varphi_{2n-1} = \varphi_{2n}$;

в) $\varphi_2 + \varphi_4 + \ldots + \varphi_{2n} = \varphi_{2n+1} - 1$;

г) $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \ldots + \varphi_n^2 = \varphi_n\varphi_{n+1}$;

д) $\varphi_{n+1}^2 - \varphi_n^2 = \varphi_{n+2}\varphi_{n-1}$;

е) $\varphi_{n-1}\varphi_{n+1} - \varphi_n^2 = (-1)^n$ (результат Дж.Кассини, 1680);

ж) $\varphi_n^2 - \varphi_n\varphi_{n-1} - \varphi_{n-1}^2 = (-1)^{n-1}$;

з) $\varphi_1^3 + \varphi_2^3 + \ldots + \varphi_n^3 = \left(\varphi_{3n+2} + (-1)^{n-1}\cdot 6\varphi_{n-1} + 5\right)/10$.

6. Докажите формулу

$$\varphi_{n+m} = \varphi_m\varphi_{n-1} + \varphi_{m+1}\varphi_n$$

и получите из нее следующие равенства:

а) $\varphi_{n+1}^2 - \varphi_{n-1}^2 = \varphi_{2n}$;

б) $\varphi_n^2 + \varphi_{n+1}^2 = \varphi_{2n+1}$;

в) $\varphi_{n+1}^3 + \varphi_n^3 - \varphi_{n-1}^3 = \varphi_{3n}$;

г) $\text{НОД}(\varphi_\mathrm{m}, \varphi_n) = \varphi_{\text{НОД}(m,n)}$.

7. Докажите, что не существует треугольника, длины сторон которого выражаются различными числами Фибоначчи.

Университеты Италии

А.ВАСИЛЬЕВ

Университет Болоньи, основанный в 1088 году, считается старейшим университетом Европы. Именно тогда преподавание юриспруденции в Болонье начал основоположник школы глоссаторов [1] Ирнерий. В 1158 году император Священной Римской империи Фридрих I Барбаросса выдал *Болонскому университету* хартию, согласно которой студенты и профессора находились под его покровительством как в самом университете, так и на пути к нему. Этот документ, разумеется, имел важное значение в средневековой Европе, на дорогах которой в те времена встречались не только искатели вечных истин.

Вначале студенты школы глоссаторов образовывали корпорации по национальному признаку, опираясь на общность разговорного языка. Затем, в силу преподавания на общей для всех латыни, они стали осознавать свою общность – универсальность, откуда и пошло название высшей школы. В Болонском университете – Alma Mater Studiorum – были заложены основы самоуправления вузов. Студенты сами нанимали профессоров и избирали ректора. Деньги на оплату преподавателей также собирали со студентов. Профессора, собственно, не влияли на процесс приема и выдачи дипломов. Прием в университет проводили лучшие студенты. Лекции делились на обязательные и необязательные. Только на старших курсах, получая степень лиценциата, кандидат обязан был сдать экзамен преподавателю, а получая степень доктора, – пройти публичный экзамен в присутствии приемной комиссии, т.е. конвента. Полноправие студентов, впрочем, обернулось снижением качества образования, так что в 1219 году папа римский предписал, чтобы никто не мог получить докторского звания без согласия архиепископа Болонского. Вскоре после этого университет вновь стал лучшим учебным заведением, а его выпускники признавались обладателями высшего ученого звания в Италии.

Возникший как юридическое учебное заведение, Болонский университет в XIV веке открыл факультеты философии, медицины и теологии. К традиционным предметам – юриспруденции, риторике и грамматике – добавились философия, математика, физика, медицина и другие науки. Заметим, что по образу и подобию Болонского университета были образованы университеты Падуи, Модены, Пизы и Неаполя, а также Сорбонны и Кембриджа. Изначально университет почти не зависел от церкви и городских властей, однако со временем установился порядок, согласно которому жалованье преподавателям выплачивалось городскими властями. В дальнейшем университет все более терял автономию и подпадал под влияние католической церкви.

В конце XV века для изучения права в Болонский университет приехал Николай Коперник. Студенты тогда еще подразделялись по землячествам, и Коперник записался в «Германскую нацию». Наряду с изучением права он занимался астрономией под руководством болонского профессора Доменико Мария ди Новара. По отзывам современников, профессор был «...мужем, одаренным божественным разумом, человеком со свободным умом и духом, побуждавшим других к преобразованию астрономии словами и примером». Профессор не считал птолемеевское учение незыблемым и неприкосновенным, он сочинил свою теорию движения Луны, заслужившую впоследствии похвалы со стороны Кеплера. Вместе с Коперником они занимались астрономическими наблюдениями и, в частности, наблюдали затмение Луной звезды первой величины α Тельца Альдебарана.

Из других болонских профессоров того времени заслуживают упоминания Сципион дель Ферро, замечательный математик, открывший решение уравнений третьей степени, и Антоний Урцей, преподававший грамматику, риторику, поэтику и греческий язык. Последнему обучился и Коперник, так что мог читать Платона и других авторов в подлиннике.

В разные годы в Болонском университете обучались Данте Алигьери, Франческо Петрарка, Эразм Роттердамский, Торквато Тассо, Карло Гольдони, Альбрехт Дюрер.

С Болонским университетом связано также имя знаменитого астронома Джованни Доменико Кассини. В начале своей карьеры он работал в обсерватории маркиза Мальвазиа близ Болоньи, а затем в течение долгого времени был профессором математики и астрономии в Болонском университете. В 1669 году Кассини переехал во Францию, где руководил строительством Парижской обсерватории, которую возглавлял до конца жизни. Кассини выполнил многочисленные позиционные наблюдения Солнца с меридианным инструментом и на основании этих наблюдений составил новые солнечные таблицы. Он создал первую точную теорию атмосферной рефракции, начал наблюдения поверхности планет с помощью больших телескопов с высококачественной оптикой, составил таблицы движения спутников Юпитера, которые широко использовались астрономами и мореплавателями. Пользуясь этими таблицами, Оле Рёмер в 1675 году измерил скорость света. В 1675 году Кассини обнаружил, что кольцо Сатурна состоит из двух частей, разделенных темной полосой

[1] *Глоссы, первоначально заметки между строчками, стали затем заметками на полях.*

(деление Кассини), и предположил, что каждое кольцо состоит из большого количества небольших частиц. Совместно с Рише и Пикаром Кассини принимал участие в наблюдениях Марса во время противостояния 1672 года, в результате чего было получено первое приемлемое значение солнечного параллакса ($9,5''$). В историю науки Кассини вошел не только как выдающийся представитель наблюдательной астрономии, но и благодаря своему удивительному консерватизму. Он был противником теории всемирного тяготения, с сомнением относился к модели Коперника, предлагал заменить эллипсы Кеплера кривыми четвертого порядка (овалами Кассини) и, наконец, считал, что Рёмер неправильно объясняет наблюдаемую неравномерность движения спутников Юпитера конечностью скорости света.

Окончил Болонский университет и преподавал медицину в нем основоположник электрофизиологии Луиджи Гальвани. Он был уволен из университета незадолго до своей кончины из-за того, что отказался принести присягу Цизальпинской республике, образованной в 1797 году Наполеоном Бонапартом на территории Центральной и Северной Италии. Первые работы Гальвани были посвящены сравнительной анатомии. В 1771 году он начал опыты по изучению мышечного сокращения и вскоре открыл феномен сокращения мышц препарированной лягушки под действием электрического тока. В своих экспериментах Гальвани обнаружил, что мышцы сокращаются и в отсутствие внешнего источника тока, при простом наложении на них двух разных металлов, соединенных проводником. Гальвани объяснил это явление существованием «животного электричества», благодаря которому мышцы заряжаются подобно лейденской банке. Результаты своих наблюдений и теорию животного электричества Гальвани изложил в 1791 году в работе «Трактат о силах электричества при мышечном движении». Правильное объяснение его опытам дал Алессандро Вольта, что в дальнейшем способствовало изобретению нового источника тока – гальванического элемента.

Другим представителем классических университетов Италии является *Пизанский университет*, основанный в 1334 году эдиктом папы Климента VI. Изначально в нем были факультеты теологии, юриспруденции и медицины, однако славу ему принесли, прежде всего, великие физики – Галилео Галилей и Энрико Ферми. Каждому из них посвящена отдельная статья в «Кванте» (см., соответственно, «Квант» №4 за 2003 г. и №4 за 2000 г.), здесь же будет рассказано еще об одном великом питомце Пизы – нобелевском лауреате Карло Руббиа. Он обучался в Высшей нормальной школе при Пизанском университете и здесь же в 1958 году защитил диссертацию, посвященную экспериментальному исследованию космических лучей и разработке приборов для детектирования элементарных частиц, образующихся в ускорителях при столкновениях других частиц, разогнанных до высоких энергий.

Для пояснения сути сделанных Карло Руббиа совместно с Симоном ван дер Мером открытий напомним основные сведения о четырех существующих в природе фундаментальных взаимодействиях. Гравитационное взаимодействие ответственно за притяжение между массами, электромагнитное определяет взаимодействие электрически заряженных и/или магнитных тел, сильное взаимодействие не позволяет распасться ядру, а слабое обуславливает распад некоторых нестабильных атомов. Считается, что фундаментальные взаимодействия осуществляются путем обмена частицами – квантами силовых полей. Так, квантом электромагнитного излучения является фотон, и свет, тем самым, представляет собой поток дискретных частиц. Теория относительности Эйнштейна использует принцип эквивалентности массы и энергии, обеспечивая фундамент для анализа взаимодействий частиц с конечной массой и «безмассового» излучения.

В 1935 году Хидэки Юкава предсказал, что сильное взаимодействие внутри ядра осуществляется полями, квант которых обладает массой, и оценил эту массу. Предсказанная Юкавой частица была обнаружена в 1947 году в столкновениях высокоэнергичных космических лучей с ядром. Эту частицу назвали пи-мезоном, а ее масса оказалась примерно в 200 раз больше массы электрона. Позднее, уже в лабораторных условиях с использованием мощных ускорителей, было открыто множество других мезонов и субатомных частиц.

В 1960 году Шелдон Глэшоу предложил единую теорию электромагнитного и слабого взаимодействий (электрослабого взаимодействия), которая предполагала наличие трех ранее не наблюдавшихся частиц – положительного бозона W^+, отрицательного бозона W^-, нейтрального бозона Z^0. Вслед за этим Стивен Вайнберг и Абдус Салам независимо друг от друга предсказали, что бозоны Глэшоу должны иметь массу, на порядок бóльшую массы протона или нейтрона. Из-за большой массы этих бозонов для их рождения при столкновениях необходимы необычайно высокие энергии сталкивающихся частиц.

В 1969 году Руббиа занялся поиском бозонов в Фермиевской национальной ускорительной лаборатории (США). Через несколько лет его группа доложила о существовании нейтральных токов, ожидавшихся как следствие обмена Z^0 частицами. Располагая этими данными, Руббиа предпринял новые усилия для обнаружения заряженных W^+ и W^- бозонов. Для проведения такого эксперимента потребовалась переделка имевшегося в Европейском центре ядерных исследований (ЦЕРН) ускорителя в сверхмощный протонный синхротрон. Это необходимо для разгона до сверхвысоких энергий пучков протонов и антипротонов, циркулирующих по одному и тому же кольцу во встречных направлениях. Столкновение материи и антиматерии приводит к аннигиляции обеих масс с выделением энергии. Важнейшим пунктом реализации замысла была разработка детектора для обнаружения частиц, рождающихся при столкновениях. Работая в группе из более чем 100 человек, Руббиа и его коллеги построили

(Продолжение см. на с. 18)

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июня 2005 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №2–2005» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1946» или «Ф1953». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1946–М1950, Ф1953–Ф1957

М1946. Пусть ABC – равнобедренный треугольник ($AC = CB$), AH и CL – высоты, I – центр вписанного круга. Докажите, что проекция CH стороны AC на сторону BC равна стороне AB в точности если $IH \parallel AB$.

А.Полянский (ученик 10 кл.)

М1947. Квадрат натурального числа оканчивается на 3 одинаковые ненулевые цифры. Докажите, что предшествующая им цифра нечетна.

В.Сендеров

М1948. Окружности S_1, S_2, S_3 попарно касаются друг друга внешним образом. Окружности S_1 и S_2 имеют одинаковые радиусы и касаются в точке B. Окружности S_1 и S_3 касаются в точке A. Окружность S_2 касается S_3 в точке C. Прямая AB вторично пересекает S_2 в точке D. Прямая DC вторично пересекает S_3 в точке F. Прямая FA пересекает вторично S_1 в точке N. Прямая AC вторично пересекает S_2 в точке L. Докажите, что четырехугольник $DNAL$ является ромбом.

И.Рудаков

М1949. На координатной плоскости расположен правильный многоугольник M с центром $(0, 0)$ и одной из вершин $(1, 0)$.

а) Пусть $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ – множество проекций вершин многоугольника M на ось Ox. Докажите, что существует многочлен n-й степени с целыми коэффициентами, корнями которого являются числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

б) Пусть $\{\beta_1,\ldots,\beta_m\}$ – множество проекций вершин многоугольника M на ось Oy. Докажите, что существует многочлен m-й степени с целыми коэффициентами, корнями которого являются числа $\beta_1,\ldots,\beta_m$.

И.Дорофеев

М1950. Правильный восьмиугольник легко разрезать на параллелограммы. Докажите, что правильный восьмиугольник нельзя разрезать на параллелограммы равной площади.

В.Произволов

Ф1953. Пуля вылетает из ствола с уровня земли со скоростью 50 м/с и «втыкается» в землю, закончив свой полет. На каком максимальном расстоянии от точки выстрела она могла оказаться через 3 с после выстрела? Земля в тех местах плоская, сопротивлением воздуха можно пренебречь.

А.Простов

Ф1954. Верхний блок с закрепленной осью склеен из двух дисков, один из которых имеет вдвое больший диаметр, чем другой (рис.1). Легкая нерастяжимая нить намотана на диски и охватывает также нижний блок, причем нижний блок имеет такой диаметр, что свободные куски нити вертикальны. Найдите ускорения грузов. Блоки считать легкими.

А.Блоков

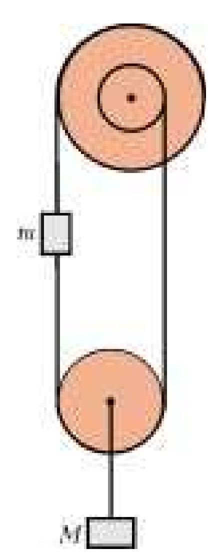


Рис. 1

Ф1955. В вакууме находятся два массивных одинаковых тела, их температуры вначале равны T и $3T$. Если привести тела в соприкосновение, то при выравнивании температур от горячего тела к холодному перетечет количество теплоты Q. Какую максимальную работу можно было бы получить, используя эти тела и тепловую машину? Других тел в нашем распоряжении нет.

Р.Повторов

Ф1956. Три большие параллельные пластины площадью $S = 2\ \text{м}^2$ каждая расположены в вакууме на одинаковых малых расстояниях $d = 1$ мм друг от друга. Заряд средней пластины $Q = 1$ мкКл, заряды двух других Q и $-2Q$. Между крайними пластинами включают резистор сопротивлением $R_1 = 30$ кОм, одновременно с ним еще один резистор сопротивлением $R_2 = 20$ кОм включают между средней пластиной и пластиной с зарядом $-2Q$. Какое количество теплоты выделится при этом в первом резисторе?

А.Зильберман

Ф1957. Цепь из катушки индуктивностью L и конденсатора емкостью C используют в качестве фильтра низких частот (рис.2). При увеличении частоты генератора начиная с некоторой частоты напряжение на нагрузке уменьшается и при дальнейшем увеличении частоты становится совсем малым.

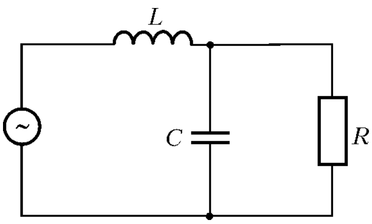


Рис. 2

При каком сопротивлении нагрузки R напряжение с увеличением частоты генератора будет меняться монотонно? (Если взять R достаточно большим, то будет явно выражен резонанс – при приближении к собственной частоте LC-контура напряжение нагрузки будет резко возрастать, и только потом – на еще больших частотах – будет уменьшаться).

З.Рафаилов

Решения задач М1921–М1930, Ф1938–Ф1942

М1921. *На наибольшей стороне AB треугольника ABC взяли точки M и N такие, что BC = BM и CA = = AN, а на сторонах CA и BC – точки P и Q такие, что PM параллелен BC и QN параллелен CA (рис.1). Докажите, что QC = CP.*

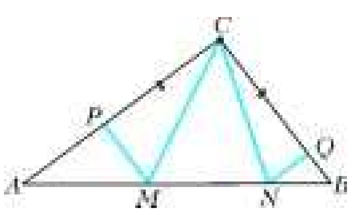


Рис. 1

Сразу обнаруживаем, что $\angle MPC = \angle CQN$. В самом деле, $\angle MPC = 180° - \angle ACB$, но и $\angle CQN = 180° - \angle ACB$.

Убедимся теперь, что MC является биссектрисой угла PMB. Действительно, с одной стороны, $\angle PMC = \angle BCM$, а с другой, $\angle BCM = \angle BMC$, ибо треугольник BCM равнобедренный. Аналогично убеждаемся, что NC является биссектрисой угла QNA.

Ввиду этого после симметричного отражения ΔPMC относительно MC получим точку P_1, образ точки P, лежащей на AB (рис.2). После симметричного отражения ΔQNC относительно NC получим точку Q_1, лежащую тоже на AB.

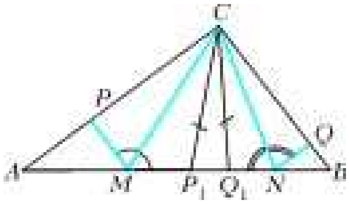


Рис. 2

Треугольник P_1Q_1C равнобедренный, так как $\angle MPC = \angle CQN$. Значит, $CP = QC$.

В.Произволов

М1922. *Бильярдный стол имеет форму многоугольника (не обязательно выпуклого), у которого соседние стороны перпендикулярны друг другу. Вершины этого многоугольника – лузы, при попадании в которые шар там и остается. Из вершины с (внутренним) углом 90° выпущен шар, который отражается от бортов (сторон многоугольника) по закону «угол падения равен углу отражения». Докажите, что шар в эту вершину никогда не вернется.*

Проведем доказательство от противного. Пусть шар вернулся в исходную точку. Обозначим начальную и конечную точку через A, а точки отражения через $A_1, \ldots, A_n$. Заметим, что угол (обычный, ненаправленный) между вертикальной прямой и отрезками пути шара постоянен (нетрудно проверить, что он не меняется при отражениях относительно как вертикальных, так и горизонтальных прямых). Можно считать, что он не равен 0° и 90°, иначе шар свалится в первую попавшуюся лузу. Так как A – вершина внутреннего угла, то существует лишь один луч с вершиной в A, образующий данный угол с вертикальной прямой и лежащий в той четверти, где расположен стол. Значит, шар вернулся в A по той же прямой, по которой и вылетел.

Таким образом, первый и последний отрезки пути шара совпадают. Рассмотрим два отражения шара от стенки в точке A_1 – первое и последнее. Учитывая закон отражения, получим, что шар в конце пути прилетел в точку A_1 по той же траектории, по которой вылетел из нее вначале. Поэтому второй и предпоследний отрезки пути шара также совпадают. Рассуждая аналогично, мы видим, что путь шара состоит из двух частей, вторая из которых получается из первой прохождением в обратном направлении. Значит, в некоторый момент времени шар, отразившись от стенки, пошел в противоположную сторону. Но тогда некоторый отрезок пути шара перпендикулярен стороне многоугольника, следовательно, образует с вертикальной прямой угол 0° или 90°. Противоречие получено.

А.Канель-Белов

М1923. *На плоскости отмечено N различных точек. Известно, что среди попарных расстояний между отмеченными точками встречаются не более n различных расстояний. Докажите, что* $N \le (n+1)^2$.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_N$ – отмеченные точки, и каждое из расстояний A_iA_j ($1 \le i < j \le N$) равно одному из n фиксированных чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Это означает, что для каждого i ($1 \le i \le N$) все отмеченные точки, кроме A_i, лежат на одной из n окружностей $O(A_i, r_1)$, $O(A_i, r_2), \ldots, O(A_i, r_n)$ (через $O(X, r)$ мы обозначаем окружность радиуса r с центром в точке X).

Введем на плоскости систему координат так, что оси координат не параллельны прямым A_iA_j ($1 \le i < j \le N$). Рассмотрим отмеченную точку с наименьшей абсциссой, пусть это точка A_1. Среди прямых $A_1A_2, A_1A_3, \ldots, A_1A_N$ найдем прямую (или одну из прямых) с наибольшим угловым коэффициентом, пусть это прямая A_1A_2. Точки $A_3, A_1, \ldots, A_N$ лежат в одной полуплоскости α относительно прямой A_1A_2.

По условию каждая из точек $A_3, A_1, \ldots, A_N$ является точкой пересечения окружностей $O(A_1, r_k)$ и $O(A_2, r_l)$ для некоторых $k, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Каждая из n^2 пар таких окружностей имеет не более одной точки пересечения, принадлежащей полуплоскости α. Следовательно, среди $N-2$ точек $A_3, A_1, \ldots, A_N$ имеется не более n^2 различных. Отсюда $N - 2 \le n^2$, и $N \le n^2 + 2 \le (n+1)^2$.

В.Дольников

М1924. *Три натуральных числа таковы, что произведение любых двух из них делится на сумму этих двух чисел. Докажите, что данные три числа имеют общий делитель, больший единицы.*

Обозначим эти числа a, b и c. Положим $x = \text{НОД}(b,c)$, $y = \text{НОД}(c,a)$ и $z = \text{НОД}(a,b)$. Предположим, что числа a, b и c не имеют общего делителя, большего единицы. Тогда числа x, y и z попарно взаимно просты. Поэтому можно положить $a = kyz$, $b = lxz$ и $c = mxy$, где k, l и m – некоторые натуральные числа. Из нашего предположения также следует, что $\text{НОД}(k,x) = \text{НОД}(l,y) = \text{НОД}(m,z) = 1$. А из определения наибольшего общего делителя заключаем, что числа k, l и m попарно взаимно просты. Следовательно, взаимно просты также и числа ky и lx. По условию $(kyz \cdot lxz) \vdots (kyz + lxz)$, значит, $(ky \cdot lx \cdot z) \vdots (ky + lx)$. Заметим, что $\text{НОД}(ky, ky+lx) = \text{НОД}(ky, lx) = 1$ и, аналогично, $\text{НОД}(lx, ky+lx) = 1$. Таким образом, $z \vdots (ky+lx)$. Стало быть, $z \ge ky + lx \ge x + y$. Рассуждая аналогично, получим, что $x \ge y + z$ и $y \ge x + z$. Но эти три неравенства не могут выполняться одновременно. Противоречие получено.

С.Берлов

М1925. *Мишень «бегущий кабан» находится в одном из n окошек, расположенных в ряд. Окошки закрыты занавесками так, что для стрелка мишень все время остается невидимой. Чтобы поразить мишень, достаточно выстрелить в окошко, в котором она в момент выстрела находится. Если мишень находится не в самом правом окошке, то сразу после выстрела она перемещается на одно окошко вправо; из самого правого окошка мишень никуда не перемещается. Какое наименьшее число выстрелов нужно сделать, чтобы наверняка поразить мишень?*

Ответ. $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$.

Занумеруем окошки слева направо числами от 1 до n, а через k_i обозначим номер окошка, в которое делается i-й по счету выстрел ($i = 1, 2, 3, \ldots$).

Серия из $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ выстрелов, определенная равенствами $k_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} = n$ и $k_i = 2i - 1$ для $i \le \left[\frac{n}{2}\right]$, гарантирует поражение мишени. (Легко проверить, что если вначале мишень находится в m-м окошке и $m \le \left[\frac{n}{2}\right]$, то результативным окажется m-й выстрел; если же $m > \left[\frac{n}{2}\right]$, то мишень будет поражена последним выстрелом.)

Покажем, что никакая серия из меньшего числа выстрелов требуемым свойством не обладает.

В самом деле, если произведено не более $\left[\frac{n}{2}\right]$ выстрелов, то для $m = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ условием поражения мишени, находившейся вначале в m-м окошке, является равенство $k_i = m + i - 1$ хотя бы для одного из значений i. Но каждый выстрел может обеспечить выполнение только одного из требующихся равенств.

Следовательно, найдется такое число $m_0 \le \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, что $k_i \ne m_0 + i - 1$ для $i = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$; это и означает, что для произвольной серии из $\left[\frac{n}{2}\right]$ (и, тем более, из меньшего числа) выстрелов существует начальное положение мишени, при котором она останется непораженной.

С.Токарев

М1926. *Найдите все простые числа p, q, r, s такие, что все числа* $p^s + s^q$, $q^s + s^r$, $r^s + s^p$ *– простые.*

Ответ: (2, 2, 2, 3), (3, 3, 3, 2).

Первый случай: s нечетно.

Тогда $p = q = r = 2$, $2^s + s^2$ – простое и $2^s \equiv 2 \pmod 3$. Если $s = 3k \pm 1$, то $s^2 \equiv 1 \pmod 3$, и $2^s + s^2$ делится на 3. Следовательно, $s = 3$.

Второй случай: s = 2.

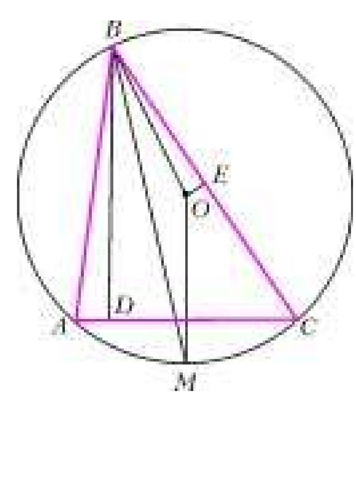
Тогда p, q, r нечетны, $p^2 + 2^q$ – простое и $2^q \equiv 2 \pmod 3$. Если $p = 3k \pm 1$, то $p^2 \equiv 1 \pmod 3$ и $p^2 + 2^p$ делится на 3. Следовательно, $p = 3$. Аналогично, $q = 3$, $r = 3$.

Б.Френкин, В.Сендеров

М1927. *Пусть ABC – неравносторонний треугольник; O и I – центры описанного и вписанного кругов, H – точка пересечения высот треугольника. Могут ли точки O, I и H быть вершинами равнобедренного треугольника?*

Ответ: Да.

Лемма 1. В любом треугольнике биссектриса делит пополам угол между высотой и радиусом описанного круга, проведенными в ту же вершину.



Доказательство. Пусть BM – биссектриса угла ABC, BD – высота (см. рисунок). Так как $OB = OM$, то $\angle OBM = \angle OMB$. Поскольку точка M – середина дуги AMC, то прямые OM и BD параллельны. Следовательно, $\angle DBM = \angle BMO$, отсюда $\angle OBM = \angle DBM$, что и требовалось доказать.

Лемма 2. В любом треугольнике ABC расстояние от центра описанного круга до стороны BC вдвое меньше расстояния от точки пересечения высот до вершины A. (Пусть H – точка пересечения высот, O – центр описанной окружности, E и F – середины сторон BC и AC соответственно. Для доказательства достаточно заметить, что треугольники AHB и EOF подобны.)

Лемма 3. Если ABC – неравносторонний треугольник, то никакие две из трех точек O, I, H не совпадают.

Решение задачи. Пусть $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$. Тогда $\angle OBC = \frac{\pi}{6}$, $OB = 2FO$, где F – середина отрезка BC. Отсюда по лемме 2 имеем $AH = OB = OA$. Докажем, что $IO = IH$. Если хотя бы одна из точек O и H лежит на прямой AI, то $\angle ABC = \angle ACB$, откуда ABC – правильный треугольник. Пусть O и H не лежат на AI. Из леммы 1 следует, что треугольники AIO и AIH равны, откуда $IO = IH$.

Заметим теперь, что точки O, I, H лежат на некоторой окружности.

Вследствие леммы 3 получаем отсюда: O, I и H – вершины равнобедренного треугольника.

Отметим, что в случае равнобедренного неравностороннего треугольника ABC равенство $IO = IH$ выполняться не может. Действительно, пусть $\angle ABC = \angle ACB$, $O \ne H$, $OI = IH$. Из леммы 1 следует, что медиана BI треугольника BOH является его биссектрисой, а значит, и высотой. Получили чушь: I лежит на BC.

Р.Будылин, А.Куликов, В.Сендеров

М1928. *Положительные числа $x_1, \ldots, x_n$, где $n \ge 2$, лежат на некотором отрезке Δ длины 2. Докажите, что*

$$x_1 + \ldots + x_n \le \sqrt{x_1x_2+1} + \ldots + \sqrt{x_nx_1+1} < x_1 + \ldots + x_n + n.$$

В каких случаях имеет место равенство?

Обозначим

$$A = x_1 + \ldots + x_n,$$

$$B = \sqrt{x_1x_2+1} + \ldots + \sqrt{x_nx_1+1}, \quad C = A + n.$$

Докажем неравенство $A \le B$. Пусть x и y – какие-либо два числа из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Тогда $|x-y| \le 2$, т.е. $x^2 - 2xy + y^2 \le 4$, или $x^2 + 2xy + y^2 \le 4(1+xy)$. Отсюда $x + y \le 2\sqrt{xy+1}$, так как x и y положительны. Следовательно,

$$x_1 + x_2 \le 2\sqrt{x_1x_2+1}, \ldots, x_n + x_1 \le 2\sqrt{x_nx_1+1}. \quad (1)$$

Сложив эти неравенства, получаем $2A \le 2B$.

Докажем неравенство $B < C$. Обозначим

$$y_1 = \min\{x_1, x_2\}, \ldots, y_n = \min\{x_n, x_1\}.$$

Имеем

$$\sqrt{x_1x_2+1} \le \sqrt{y_1(y_1+2)+1} = \sqrt{(y_1+1)^2} = y_1 + 1, \ldots, \sqrt{x_nx_1+1} \le y_n + 1. \quad (2)$$

Сложив неравенства (2), получаем

$$B \le y_1 + \ldots + y_n + n.$$

Отсюда, поскольку $y_i \le x_i$, $B \le C$. При этом если $y_i = x_i$ при всех i, то $x_1 = \ldots = x_n$, откуда в (2) все неравенства строгие. Получили $B < C$.

Найдем теперь условия равенства $A = B$. Все неравенства (1) являются равенствами в точности если $n = 2m$, $x_1, x_3, \ldots$ лежат на одном конце отрезка Δ, а $x_2, x_4, \ldots$ – на другом.

Заметим, что неравенство $B < C$ – точное: оно переходит в равенство, если все числа устремить к 0. Покажем, что при любом $n \ge 2$ точным является и неравенство $A \le B$. Предположим противное: существуют $n \ge 3$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $A + \varepsilon \le B$ при любом наборе $\{x_1, \ldots, x_n\}$ задачи. Тогда, в частности, $nk + \varepsilon \le n\sqrt{k^2+1}$ при любом натуральном k. Отсюда $2nk\varepsilon + \varepsilon^2 \le n^2$, что при $k \to \infty$ приводит к противоречию.

Н.Агаханов, В.Сендеров

М1929. *Докажите, что для любого натурального числа d существует делящееся на него натуральное число n, в десятичной записи которого можно вычеркнуть некоторую ненулевую цифру так, что получившееся число тоже будет делиться на d.*

Первое решение. Число n можно записать в виде $n = 10^k(10a+b)+c$, где $0 \le c < 10^k$, b – ненулевая цифра, которую вычеркиваем, a – число, образованное цифрами, стоящими левее b. Тогда после вычеркивания получится число $n_1 = 10^k a + c$. Их разность $n - n_1 = 10^k(9a+b)$. Чтобы выполнялось условие задачи, достаточно, чтобы числа $9a+b$ и $10^k a + c$ делились на d. Для этого подберем ненулевую цифру b так, чтобы число $d - b$ делилось на 9, и возьмем $a = \frac{d-b}{9}$. Тогда $d = 9a + b$. Пусть k – такое число, что $10^{k-1} > d$. Число $10^k a + 10^{k-1}$ разделим с остатком на d: $10^k a + 10^{k-1} = dq + r$, $0 \le r < d$. Положим $c = 10^{k-1} - r > 0$. Тогда $10^k a + c = dq$ делится на d.

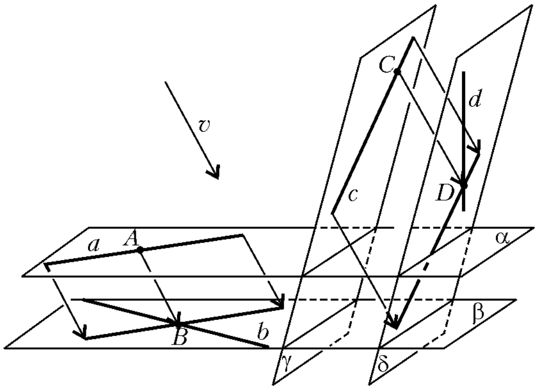
Второе решение (предложенное школьниками на олимпиаде). Рассмотрим для произвольного натурального k число $n_k = 10^k d - d$. Пусть l – количество знаков в десятичной записи числа d ($l = [\lg d] + 1$). Заметим, что при достаточно больших k (а именно, при $k > l$) десятичная запись числа n_k выглядит следующим образом: сначала идет десятичная запись числа $d - 1$, затем – серия девяток и, наконец – десятичная запись числа $10^l - d$. Таким образом, при $k > l$ число n_k можно получить из числа n_{k+1} путем вычеркивания одной из девяток в центральной части десятичной записи. Очевидно также, что все числа n_k делятся на d.

А.Галочкин

М1930. *Верно ли, что для любых четырех попарно скрещивающихся прямых можно так выбрать по одной точке на каждой из них, чтобы эти точки были вершинами а) трапеции; б) параллелограмма?*

а) **Ответ**: да, верно.

Пусть a, b, c, d – четыре попарно скрещивающиеся прямые. Построим такие плоскости $\alpha \supset a$ и $\beta \supset b$, что α параллельна β (см. рисунок). Аналогично, построим такие плоскости $\gamma \supset c$ и $\delta \supset d$, что γ параллельна



δ. Рассмотрим произвольное направление $\vec{v}$, не параллельное никакой из этих плоскостей. Спроецируем прямую a на плоскость β вдоль этого направления. Обозначим через B точку пересечения проекции и прямой b, а через $A \in a$ – ее прообраз при проекции. Тогда прямая AB параллельна направлению $\vec{v}$. Аналогично строятся точки $C \in c$ и $D \in d$, для которых прямая CD параллельна направлению $\vec{v}$. Тогда прямая AB параллельна CD. Поэтому либо точки A, B, C и D лежат на одной прямой, либо четырехугольник $ABCD$ – трапеция, либо четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм.

Для всех направлений $\vec{v}$, кроме конечного числа, точки A, B, C и D не лежат на одной прямой.

Чтобы исключить случай параллелограмма, достаточно обеспечить неравенство $AB \neq CD$. Заметим, что $AB = \dfrac{p}{\sin\varphi}$ и $CD = \dfrac{q}{\sin\psi}$, где p – расстояние между плоскостями α и β, q – расстояние между плоскостями γ и δ, φ – угол между направлением $\vec{v}$ и плоскостью α, ψ – угол между направлением $\vec{v}$ и плоскостью γ.

Если плоскости α и γ не параллельны, то найдется направление $\vec{v}$, для которого $\dfrac{\sin\varphi}{\sin\psi} < \dfrac{p}{q}$ (например, направление, почти параллельное плоскости α и перпендикулярное прямой пересечения плоскостей α и γ), и тогда $AB \neq CD$.

Если же все плоскости $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ параллельны, то $\varphi = \psi$ для любого направления $\vec{v}$, и для выполнения неравенства $AB \neq CD$ достаточно неравенства $p \neq q$, которого всегда можно добиться, переобозначив плоскости.

б) **Ответ**: нет, неверно.

Возьмем четыре параллельные плоскости, все попарные расстояния между которыми различны. В каждой из них проведем прямую таким образом, чтобы эти прямые попарно скрещивались. Докажем, что параллелограмма с вершинами на этих прямых не существует. Действительно, длины любых двух параллельных отрезков с концами на этих прямых пропорциональны расстояниям между соответствующими парами плоскостей, а значит, различны.

П.Бородин

Ф1938. *Автомобиль едет вверх по наклонной плоскости. Каким может быть максимальный угол наклона, если коэффициент трения между колесами и поверхностью $\mu = 0{,}6$? С каким максимальным ускорением может начать движение этот автомобиль на горизонтальном участке поверхности? У автомобиля четыре колеса, задние колеса – ведущие. Расстояние между передними и задними осями колес $L = 2$ м, центр масс автомобиля находится на высоте $h = 0{,}5$ м на равных расстояниях от осей колес.*

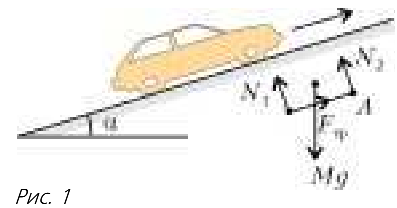


Рис. 1

При максимальном значении угла наклона α автомобиль едет вверх равномерно, сила трения равна максимальному своему значению $F_{тр} = \mu N_1$ (рис. 1). Силу нормального давления N_1 легко найти из уравнения моментов сил, записанных относительно точки A:

$$N_1 L = Mg\cos\alpha \cdot \frac{L}{2} + Mg\sin\alpha \cdot h\,,$$

откуда

$$N_1 = Mg\left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{h}{L}\sin\alpha\right).$$

Искомый угол найдем из условия равномерного движения автомобиля вдоль наклонной плоскости:

$$\mu N_1 - Mg\sin\alpha = 0\,,$$

и

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\mu/2}{1 - \mu h/L} \approx 20^\circ\,.$$

Вторую часть задачи проще всего решать в неинерциальной системе отсчета, относительно которой автомобиль (он едет с ускорением a) неподвижен. Нам придется добавить силу инерции, равную $-Ma$, приложив ее в центре масс (рис.2), тогда условия равновесия дадут нам необходимые уравнения.

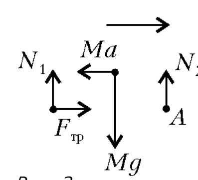


Рис. 2

Чтобы не вычислять силу N_2 (не нужна она нам!), запишем уравнение моментов сил относительно точки A:

$$N_1 L - Mg\frac{L}{2} - Mah = 0$$

и уравнение сил вдоль горизонтального направления:

$$F_{тр} - Ma = 0\,.$$

Учтем, что мы ищем максимальное ускорение, поэтому

$$F_{тр} = \mu N_1\,.$$

Отсюда легко получим

$$a = g\frac{\mu L}{2(L - \mu h)} \approx 3{,}5\ \text{м/с}^2\,.$$

А.Повторов

Ф1939. *Моль гелия в сосуде под поршнем получает тепло извне и расширяется. Теплоемкость этой порции газа в данном процессе постоянна и составляет C = 20 Дж/К. Какую работу совершит газ при увеличении его объема вдвое? Начальная температура T = 200 К, начальное давление p = 0,5 атм.*

Легко видеть, что молярная теплоемкость в данном процессе $C = 20$ Дж/(моль · К) практически совпадает с молярной теплоемкостью при постоянном давлении $C_p = 2{,}5R \approx 20{,}8$ Дж/(моль · К). Поэтому для упрощенного расчета работы можно принять $p = \text{const}$, тогда

$$A = p(2V - V) = pV = RT \approx 1{,}66 \text{ кДж}.$$

Можно оценить точность (вернее – неточность) нашего расчета:

$$C\Delta T = A + C_V \Delta T,$$

где $C_V = 1{,}5\,R$ – молярная теплоемкость при постоянном объеме, откуда

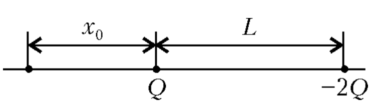
$$\Delta T = \frac{A}{C - C_V} \approx 220 \text{ К}.$$

Если считать, что $p = \text{const}$, то $T_{\text{кон}} = 200 \text{ К} \cdot 2 = 400$ К. Наша оценка дает $T^*_{\text{кон}} = 420$ К. Средняя температура отличается меньше чем на 3%, такой же результат получается и при точном расчете. Наш результат $A \approx 1{,}66$ кДж занижен примерно на 3%.

З.Рафаилов

Ф1940. *На расстоянии 1 м друг от друга закреплены точечные заряды 1 мкКл и −2 мкКл (заряд противоположного знака). В пространстве возникает электростатическое поле. Найдите максимальную разность потенциалов между точками, в которых напряженность этого поля не превышает по величине значения 1 В/м.*

Точки поля, где напряженность не превышает малую величину $E_0 = 1$ В/м, можно найти либо вдали от системы зарядов, либо там, где поля почти компенсируют друг друга.



Точка, в которой поле в точности равно нулю, находится на прямой, проходящей через заряды Q (здесь $Q = 1$ мкКл) и $-2Q$ (см. рисунок):

$$k\frac{Q}{x_0^2} + k\frac{-2Q}{(x_0 + L)^2} = 0,$$

откуда

$$x_0 = \frac{L}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1 \text{ м}}{\sqrt{2} - 1} \approx 2{,}4 \text{ м}.$$

Вдали от системы можно считать, что в этой точке находится точечный заряд $q = Q - 2Q = -Q$. Тогда запишем

$$k\frac{q}{y^2} = E_0, \text{ и } y = \sqrt{\left|\frac{kq}{E_0}\right|} \approx 100 \text{ м}$$

(это и в самом деле сильно превышает $L = 1$ м). Потенциал в такой точке равен

$$\varphi = k\frac{q}{y} = -\sqrt{kQE_0} \approx -95 \text{ В}.$$

Найдем теперь потенциал в точке x_0:

$$\varphi_0 = k\frac{Q}{x_0} + k\frac{-2Q}{x_0 + L} =$$

$$= k\frac{Q}{x_0}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = k\frac{Q}{L}\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 = -1544 \text{ В}.$$

Точки на прямой, в которых напряженность составляет ровно 1 В/м (по модулю), находятся совсем близко к «нулевой» точке (на расстоянии $l = 2{,}7$ мм в обе стороны; расчет несложный – его можно провести приближенно), разность потенциалов между любой из этих точек и «нулевой» точкой порядка $1 \cdot 10^{-3}$ В ($\Delta\varphi = E_{\text{ср}} l \approx \frac{E_0}{2} l \approx 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ В).

Итак, максимальной будет разность потенциалов между «нулевой» (почти!) и «бесконечно удаленной» точками:

$$\left|\Delta\varphi_{\max}\right| = 1544 \text{ В} - 0 = 1544 \text{ В}.$$

Р.Александров

Ф1941. *Конденсатор емкостью 1 мкФ и три одинаковые катушки индуктивностью 1 Гн каждая соединены параллельно и подключены к внешней цепи. Сопротивления проводов оказались немного разными, в результате установившиеся токи через катушки составили 1А, 2А и 4А. Внешнюю цепь отключают, и токи катушек начинают изменяться. Найдите максимальные значения каждого из токов. Найдите также максимальное значение заряда конденсатора. Элементы цепи считать идеальными. Сопротивление проводов очень мало.*

После отключения внешней цепи в схеме начинаются колебания. Интересующие нас максимальные значения токов имеют место в первом же периоде колебаний – за этот интервал времени потери энергии совсем малы. И еще – перед отключением внешней цепи токи катушек неизменны и заряд конденсатора практически нулевой. Изменения токов катушек после отключения внешней цепи одинаковы, а максимальный заряд конденсатора получится при условии

$$(I_1 + I) + (I_2 + I) + (I_3 + I) = 0,$$

$$\text{т.е. при токе } I = -\frac{7}{3} \text{ А}.$$

Энергия магнитного поля до отключения равна

$$W_{\text{нач}} = \frac{LI_1^2}{2} + \frac{LI_2^2}{2} + \frac{LI_3^2}{2} = 10{,}5 \text{ Дж},$$

а в рассматриваемый момент –

$$W = \frac{L(I_1 + I)^2}{2} + \frac{L(I_2 + I)^2}{2} + \frac{L(I_3 + I)^2}{2} = \frac{7}{3} \text{ Дж}.$$

Значит, энергия электрического поля в этот момент составляет

$$\frac{q_m^2}{2C} = W_{\text{нач}} - W,$$

откуда для максимального значения заряда конденсатора получаем $q_m \approx 4$ мКл.

Максимальные токи катушек получаются в тот момент, когда конденсатор разряжен (ЭДС индукции в этот момент обращаются в ноль). Тогда, в соответствии с законом сохранения энергии,

$$W^* = \frac{L\left(I_1+I^*\right)^2}{2} + \frac{L\left(I_2+I^*\right)^2}{2} + \frac{L\left(I_3+I^*\right)^2}{2} = W_{\text{нач}},$$

или

$$I_1^2 + 2I_1I^* + I^{*2} + I_2^2 + 2I_2I^* + I^{*2} + I_3^2 +$$
$$+\ 2I_3I^* + I^{*2} = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 .$$

Тут получаются два решения: либо $I^* = 0$, либо $I^* = 2I = -\frac{14}{3}$ А. Первое соответствует начальному моменту, второе – концу первой половины периода колебаний. В этот момент максимальный ток первой катушки будет равен

$$I_1 + I^* = -\frac{11}{3}\ \text{А},$$

второй катушки –

$$I_2 + I^* = -\frac{8}{3}\ \text{А},$$

третьей –

$$I_3 + I^* = -\frac{2}{3}\ \text{А},$$

что по модулю меньше начального тока, равного 4 А. Итак, максимальные величины токов составляют приблизительно 3,67 А, 2,67 А и 4 А.

А.Старов

Ф1942. *На главной оптической оси тонкой собирающей линзы диаметром 1 см с фокусным расстоянием 10 см находится точечный источник света. На какой максимальный угол линза может отклонить падающий на нее луч?*

Лучи, направленные в центральную часть линзы, отклоняются мало, а максимальный угол отклонения получается у «крайнего» луча. Легко записать формулу (рис.1)

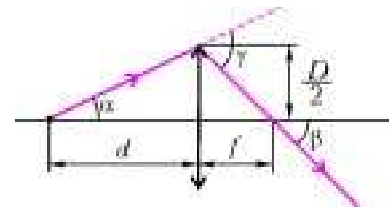


Рис. 1

$$\gamma = \alpha + \beta = \operatorname{arctg}\frac{D/2}{d} + \operatorname{arctg}\frac{D/2}{f}.$$

Если углы малы (при $d, f \gg D/2$), то

$$\gamma \approx \frac{D}{2}\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{f}\right) = \frac{D}{2F} \approx \frac{1}{20}\ \text{рад} \approx 2{,}9^\circ .$$

Получается один и тот же угол отклонения для разных точек линзы.

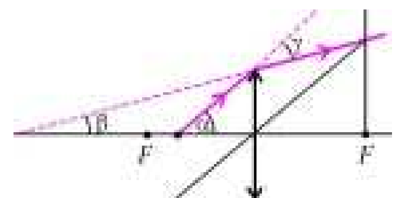


Рис. 2

А что будет для не слишком малых углов? Пусть $d < F$, тогда (рис.2)

$$\gamma = \alpha - \beta = \operatorname{arctg}\frac{D/2}{d} - \operatorname{arctg}\frac{D/2}{f}.$$

Дальше можно воспользоваться известным соотношением $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$, откуда $\arcsin\alpha > \alpha > \operatorname{arctg}\alpha$, и получить тот же ответ. А можно (и удобно) просто сделать расчет нескольких точек при помощи калькулятора.

А.Зильберман

Университеты Италии

(Начало см. на с. 10)

1200-тонную камеру для обнаружения примерно десяти типов предполагаемых новых частиц.

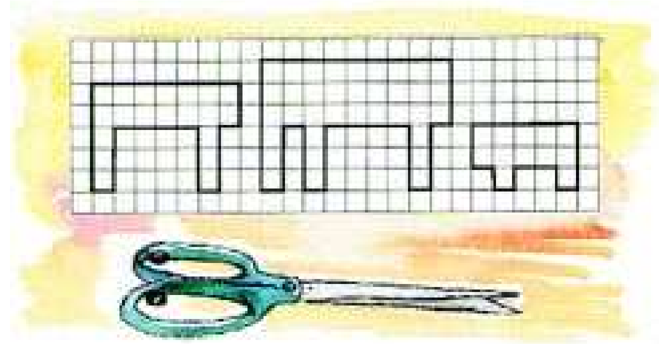
Проблема получения достаточного количества антипротонов была решена Симоном ван дер Мером. Его идея заключалась в том, что антипротоны, рождающиеся при бомбардировке медной мишени высокоэнергичными протонами, собирались в специальном накопительном кольце. Сложная система электродов фокусировала антипротоны, собирая их в компактные сгустки. Затем эти сгустки поступали в протонный синхротрон вместе со сгустками протонов, предварительно ускоренных аналогичным образом. После этого частицы и античастицы окончательно ускорялись до энергии в 300 млрд электронвольт. Поскольку частицы и античастицы имеют противоположные знаки зарядов, они вращаются по синхротронному кольцу в противоположных направлениях, сталкиваясь между собой лишь в точках, где установлены детекторы.

Эксперименты начались в 1982 году, и уже через месяц было объявлено об обнаружении пяти W частиц. Еще через год удалось также пронаблюдать Z^0 частицы. В 1984 году Карло Руббиа и Симон ван дер Мер были удостоены Нобелевской премии по физике «за решающий вклад в большой проект, который привел к открытию квантов поля, W и Z частиц, переносчиков слабого взаимодействия». Слабое взаимодействие оказалось слабым именно потому, что W и Z частицы такие тяжелые.

Задачи

1. Разрежьте каждую из трех фигур, изображенных на рисунке, на две равные части.

М.Ахмеджанова



2. Если звонить с обычного телефона на сотовый, то оплату разговора производит владелец сотового телефона. Если же звонить с обычного телефона на обычный, либо с сотового на любой, то за разговор платит тот, кто звонил.

Восемь бизнесменов в течение дня перезванивались между собой и сделали по три звонка каждый. При этом все владельцы сотовых телефонов уплатили за разное число разговоров.

У бизнесменов Иванова, Петрова, Сидорова и Кузнецова – сотовые телефоны, у Адамова и Давыдова – обычные. Какой телефон у бизнесмена Джапаридзе?

И.Акулич

3. Можно ли в клетки таблицы 4×4 вписать числа от 1 до 16 (каждое по одному разу) так, чтобы произведения всех чисел в каждом квадрате 3×3 были равны?

В.Каскевич

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

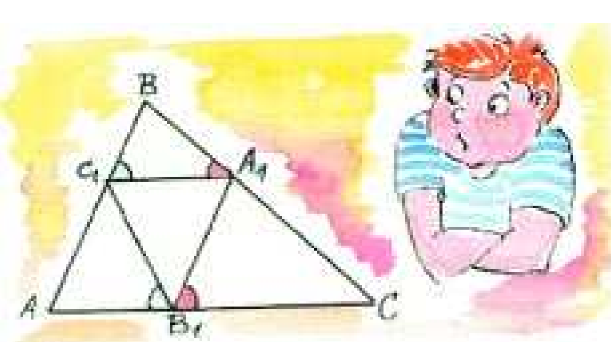
4. Профессор Мумбум-Плюмбум пытается подобрать 6 таких натуральных чисел, среди которых
ровно одно число делится на 6,
ровно два числа делятся на 5,
ровно три числа делятся на 4,

ровно четыре числа делятся на 3,
ровно пять чисел делятся на 2,
ровно шесть чисел делятся на 1.
Удастся ли ему это сделать?

Я.Камыш

5. В треугольник ABC вписан равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$ так, что $\angle BC_1A_1 = \angle C_1B_1A$, $\angle BA_1C_1 = \angle A_1B_1C$. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

В.Произволов



Заключительный этап конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Юбилейный, десятый по счету, финальный турнир соревнований заключительного этапа конкурса имени А.П.Савина состоялся в конце июня 2004 года в живописных окрестностях старинного города Судиславля Костромской области. Как и в прошлом году, его участники разместились в пансионате «Берендеевы поляны» на берегу пышнозеленого и задумчивого лесного озера Лель.

В организации юбилейного турнира кроме журнала «Квант» приняли участие Московский дворец детского (юношеского) творчества (председатель оргкомитета турнира В. Кондаков), Костромской центр дополнительного образования одаренных школьников, Фонд математического образования и просвещения, Образовательная программа «Дело». Турнир проводился при поддержке Департамента общего и профессионального образования Костромской области, Клуба жен политиков «Подруги», Научно-исследовательского института развития образования, Малого механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова и других организаций.

В составе методкомиссии работали опытные деятели олимпиадного движения А.Блинков, В.Сендеров, В.Гуровиц, Д.Калинин, С.Волчёнков, Б.Френкин, А.Хачатурян, Т.Караваева, Ю.Блинков, А.Малеев, Е.Иванова, Л.Иванов, Н.Чернятьев, Е.Горская, Е.Игнатенков, Г.Мерзон, И.Сидоров и другие. В работе жюри активное участие принимали руководители команд, многие из них входили в состав судейских бригад. Их силами организовывались факультативные соревнования для школьников «Математическая карусель», «Завалинка», «Что? Где? Когда?».

Специально для этого турнира предложили свои новые произведения известные композиторы математических задач В.Произволов, В.Сендеров, И.Акулич, Д.Калинин, А.Шаповалов, А.Канель-Белов, Б.Френкин, В.Гуровиц и многие другие. Примечательно, что одну из задач личной олимпиады предложил шестиклассник из города Снежинска Володя Брагин.

На турнир приехали команды городов: Костромы, Перми, Снежинска, Магнитогорска, а также специализированных школ города Москвы: школы 218, гимназии 1543, Московской государственной Пятьдесят седьмой школы, лицея «Вторая школа» и некоторых других.

Схема проведения турнира уже стала традиционной. Прежде всего была организована командная олимпиада, по результатам которой команды ранжировались по лигам. На X турнире были образованы три лиги: 6–7 классов (4 команды), 7–8 классов (12 команд), 8–9 классов (8 команд).

Основу турнира составляли командные математические бои и личная устная математическая олимпиада.

Призеры личной олимпиады

6 класс

Ефремов Дмитрий – Магнитогорск, Школа индивидуального образования одаренных школьников,
Кондакова Лиза – Москва, лицей «Вторая школа»,
Абрикосов Ефим – Москва, гимназия 1543,
Алексеев Иван – Москва, гимназия 1543,
Мошкин Виталий – Магнитогорск, Школа индивидуального образования одаренных школьников,
Толмачев Лев – Москва, гимназия 1543,
Федотов Алексей – Москва, лицей «Вторая школа»;

7 класс

Андреев Михаил – Москва, лицей «Вторая школа»,
Детянцев Павел – Пермь, ФМШ 9,
Марченко Денис – Пермь, ФМШ 9,
Зюзин Александр – Москва, лицей «Вторая школа»,
Кисловская Анна – Кострома, школа 7,
Котляров Никита – Магнитогорск, Школа индивидуального образования одаренных школьников,
Марченко Евгений – Москва, гимназия 1543,
Морозов Евгений – Москва, гимназия 1543,
Солдатова Екатерина – Москва, школа 1101,
Агапитов Артем – Магнитогорск, Школа индивидуального образования одаренных школьников,
Вершинин Сергей – Пермь, ФМШ 9,
Гладков Игорь – Пермь, ФМШ 9,
Погребнов Алексей – Москва, гимназия 1543,
Поносов Николай – Пермь, ФМШ 9,
Смирнов Александр – Москва, лицей «Вторая школа»,
Старков Арсений – Москва, лицей «Вторая школа»,
Хлыстов Григорий – Пермь, ФМШ 9;

8–9 классы

Илюхина Мария – Москва, лицей «Вторая школа»,
Малеев Андрей – Снежинск, гимназия 127,
Махлин Игорь – Москва, гимназия 1543,
Давыдов Алексей – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Устиновский Юрий – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Арутюнов Владимир – Москва, гимназия 1543,
Волков Федор – Москва, гимназия 1543,
Шанцев Алексей – Пермь, ФМШ 9,
Лаут Илья – Москва, лицей «Вторая школа»,
Лысов Михаил – Москва, лицей «Вторая школа»,
Поспелов Даниил – Москва, гимназия 1543,
Глубоковский Дмитрий – Кострома, лицей 34,
Чермонов Роман – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа.

Команды-призеры

7–8 классы

ФМШ 9, Пермь (руководитель Г.А.Одинцова),
гимназия 1543, Москва (руководитель Е.Я.Барский),
Кострома, (руководители Л.А.Виноградова, Н.Л.Чернятьев),
гимназия 1543, Москва (руководитель Р.В.Пальвелев);

8–9 классы

лицей «Вторая школа», Москва (руководители Е.Ю.Иванова, В.Шарич),
гимназия 1543, Москва (руководитель Т.Ю.Сысоева),
гимназия 127, Снежинск (руководитель А.А.Малеев),
Московская государственная Пятьдесят седьмая школа, (руководитель Е.Н.Игнатенков),
гимназия 1543, Москва (руководитель Е.Г.Гельфер).

Все победители награждены дипломами и книжными призами, предоставленными журналом «Квант» и Фондом математического образования и просвещения.

Задачи турнира

Командная олимпиада

1. Можно ли расставить по кругу все натуральные числа от 1 до 25 так, чтобы сумма любых двух соседних чисел равнялась квадрату какого-нибудь натурального числа?

И.Акулич, В.Сендеров

2. Две окружности касаются друг друга в точке C и прямой l в точках A и B. Прямая AC пересекает вторую окружность в точке D. Докажите, что угол ABD – прямой.

А.Заславский

3. Сколько существует прямоугольников с целочисленными сторонами, площадь каждого из которых на 2004 больше его периметра?

С.Иванов

4. Решите в целых числах уравнение $2^x = 3y^2 + 1$.

В.Сендеров

5. Пусть в неравностороннем треугольнике ABC точка, симметричная точке пересечения медиан относительно стороны BC, принадлежит описанной окружности. Докажите, что $\angle BAC < 60°$.

В.Сендеров

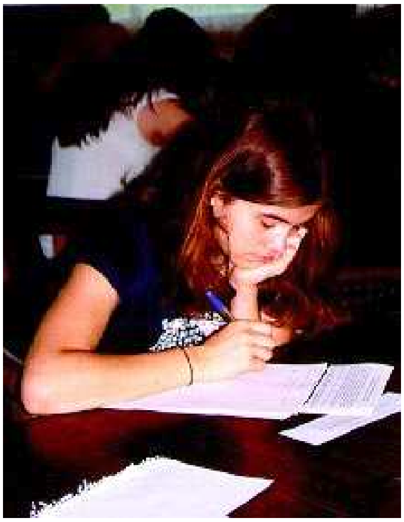
6. Положительные числа x, y, z, t таковы, что $x + y + z + t = 1$. Докажите, что

$$(1-x)(1-y)(1-z)(1-t) - xyzt \le \frac{5}{16}.$$

В.Сендеров

7. На кольцевой шнур нанизана связка колец разных размеров с номерами от 1 до N по порядку. Если номера колец отличаются на 2 или больше, их можно поменять местами, продев одно в другое. Кольца с соседними номерами так поменять нельзя. Докажите, что кольца можно расположить в любом порядке.

А.Шаповалов



Личная олимпиада

1 (6–7)[1]. Гриша купил на базаре 10 шариков: красных и синих. Если бы он купил 10 красных шариков, то потратил бы на 21 рубль меньше, а если бы купил 10 синих шариков, то – на 9 рублей больше. На сколько синий шарик дороже красного?

Д.Калинин

2 (6–7). Семь монет расположены по кругу. Известно, что какие-то четыре из них, идущие подряд, – фальшивые (легче настоящих). Объясните, как найти две фальшивые монеты с помощью одного взвешивания на чашечных весах без гирь.

А.Малеев

3 (6–7). Каких натуральных чисел от 1 до 1000000 включительно больше: четных с нечетной суммой цифр или нечетных с четной суммой цифр?

А.Зайчик

4 (6–7). Сколько существует таких групп из девяти последовательных четырехзначных чисел, что первое число делится на 10, второе делится на 9, третье — на 8, …, девятое — на 2?

В.Брагин

5 (6–7). Петя берет шахматную доску, окрашивает несколько ее клеток в красный цвет и отдает доску Васе. Тот выбирает линию (строку или столбец), в которой более половины клеток уже красные, и закрашивает в красный цвет остальные клетки этой линии. Затем Вася выбирает другую линию с таким же свойством, красит ее, и так далее, насколько это возможно. Какое наименьшее количество клеток может закрасить Петя, чтобы Вася смог сделать всю доску красной?

Д.Калинин

6 (6). Какое наибольшее количество черных шашек может съесть за один ход белая шашка на доске 8×8 (в дамку шашка не превращается)?

А.Канель-Белов

7 (8–9). Известно, что $a = x + y + \sqrt{xy}$, $b = y + z + \sqrt{yz}$, $c = z + x + \sqrt{zx}$, где $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Докажите, что $a + b + \sqrt{ab} > c$.

В.Сендеров

8 (8–9). Пусть $d(N)$ – количество натуральных делителей натурального числа N (включая единицу и само число). Известно, что в последовательности N, $d(N)$, $d(d(N))$, … нет точных квадратов. Найдите все такие N.

Б.Френкин

9 (8–9). Существует ли такое целое число n, которое можно представить в виде $a^2 + ab + b^2$, где a и b – целые неотрицательные числа, однако нельзя представить в виде $c^2 - cd + d^2$, где c и d – также целые неотрицательные числа?

А.Спивак

10 (8–9). Прямоугольный стол размером 1×2 требуется покрыть в два слоя пятью одинаковыми квадратными салфетками площади $4/5$. Как это сделать? (Салфетки разрешается перегибать.)

В.Произволов

Математические бои

1 (6–7). Ваня и Вова били в комнате комаров. Вова бил комаров дверью, причем каждым своим ударом он убивал 500 комаров, в это время в открытую дверь залетало 925 комаров. Ваня же бил комаров подушкой, одним ударом он убивал 323 комара. Известно, что они легли спать без комаров. Могло ли первоначально в комнате находиться 2004 комара?

Е.Иванова

2 (6–7). Число называется палиндромом, если оно одинаково читается слева направо и справа налево, например, 1991. Может ли получиться палиндром при сложении чисел ВОДА и СОДА?

А.Зайчик

3 (6–8). Существует ли восьмизначное число, являющееся полным квадратом, цифры которого идут в возрастающем порядке?

И.Комахин

4 (6–7). Сотрудники фирмы «Bank of New Vasyuki» расселись по кругу. Известно, что они хорошо знают друг друга, причем некоторые из них всегда говорят правду, а остальные всегда врут. У каждого спросили: «Сколько среди твоих соседей людей честных?» Только от одного был получен ответ «Один», остальные сказали, что среди их соседей честных нет. На другой вопрос: «Есть ли среди твоих соседей лжецы?» – все ответили утвердительно. Можно ли по этим ответам определить, кто из сотрудников фирмы честен, а кто — нет?

И.Гагуа

5 (7–8). В 10 мешках лежат 1000 орехов, причем во всех мешках количество орехов

[1] *Числа в скобках указывают классы, для которых соответствующая задача предлагалась.*

Ответы, указания, решения задач будут опубликованы позже.

разное. Далее многократно выполняется следующая операция: из мешка, в котором больше всего орехов, вынимается 9 орехов, которые раскладываются по одному ореху в каждый из остальных мешков. Докажите, что наступит момент, когда в каких-то двух мешках орехов станет поровну.

И.Акулич

6 (7–8). Пулеметчик — ладья, бьющая только в одну из четырех сторон. Какое наибольшее число пулеметчиков можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?

В.Трушков

7 (7–9). В квадрате $ABCD$ на стороне BC взята точка M, а на стороне CD – точка N так, что $\angle MAN = 45°$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника AMN, принадлежит диагонали AC.

В.Произволов

8 (7–9). На столе лежит стопка из n тетрадей ($n > 2$). Разрешается разделить стопку на 3 части: верхнюю, среднюю и нижнюю (каждая часть должна содержать хотя бы одну тетрадь), а затем поменять местами верхнюю и нижнюю стопки (не переворачивая их). При каких n с помощью нескольких таких операций можно расположить тетради в любом заранее указанном порядке?

И.Акулич

9 (7–8). Существует ли непрямоугольный треугольник, вписанный в окружность единичного радиуса, у которого сумма квадратов длин двух сторон равна 4?

В.Сендеров

10 (7–8). К натуральному числу $m > 2$ слева приписали число $m - 2$, а справа – число $m - 1$. В результате получилось число, равное $(m - 1)^{m+1}$. Чему равно m?

А.Жуков

11 (8–9). Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске, чтобы каждая из них угрожала нечетному количеству остальных?

И.Акулич

12 (8–9). Каждая грань куба разбита на 9 одинаковых квадратов (наподобие кубика Рубика). Назовем соседями квадраты, имеющие общую сторону или вершину. В каждом квадрате записали неотрицательное число. Оказалось, что для любого квадрата сумма чисел, стоящих в этом квадрате и во всех его соседях, одна и та же. Петя записал, сколько раз встретилось каждое из чисел. Насколько маленьким может оказаться самое большое из записанных им чисел?

И.Акулич

13 (8–9). Правильный шестиугольник со стороной 1 разрезан произвольным образом на равносторонние треугольники, в каждый из которых вписан круг. Найдите сумму площадей этих кругов.

В.Произволов

14 (8–9). Три положительных числа x, y и z таковы, что $x^2+y^2+z^2=3$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{xy+1}+\frac{1}{yz+1}+\frac{1}{zx+1} \geq \frac{3}{2}.$$

И.Воронович

15 (8–9). Даны числа $A = 9^{9^{\cdots^{9}}}$ и $B = 8^{8^{\cdots^{8}}}$, где количество девяток равно m, а количество восьмерок равно n. Найдите все такие m и n, для которых разность $A - B$ делится на 7.

Г.Гальперин

16 (8–9). Три девочки раскрашивают лист 2004×2004 клеток. Ходят по очереди: первой Надя, второй Аня, третьей Света, четвертой снова Надя и т.д. За один ход можно закрасить квадрат, сторона которого – неотрицательная степень двойки. Дважды закрашивать одну клетку нельзя. Выигрывает та девочка, которая закрасит последнюю клетку. Кто победит при правильной игре?

Д.Калинин

17 (8–9). Из точки B_1 на стороне AC треугольника ABC опустили перпендикуляры B_1E и B_1F на стороны AB и BC. Оказалось, что прямые EF и AC параллельны. Найдем аналогичные точки A_1 на стороне BC и C_1 на стороне AB. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

Д.Калинин

18 (8–9). Точки I и I' — центры вписанных окружностей треугольников ABC и $A'B'C'$. Следует ли из равенств $AI = A'I'$, $BI = B'I'$ и $CI = C'I'$ равенство треугольников ABC и $A'B'C'$?

В.Сендеров

19 (8–9). В клетках таблицы 5×5 расставлены все числа от 1 до 25. Для каждой пары чисел, стоящих в одной строке или одном столбце, подсчитана их сумма. Пусть A — наибольший, а B — наименьший из полученных результатов. Найдите наименьшее возможное значение разности $A - B$ по различным расстановкам чисел в таблице.

С.Волчёнков

20 (8–9). В области есть 102 дороги. Каждая дорога ведет из одного города в другой, при этом можно проехать из любого города в любой другой. Губернатор решил отремонтировать все дороги, организовав для этого N бригад. Он хочет, чтобы каждая бригада отремонтировала одно и то же количество дорог, причем по всем своим дорогам каждая бригада должна уметь передвигаться, не пользуясь чужими дорогами. При каких N это возможно для любой схемы имеющихся в области дорог?

С.Волчёнков

21 (7–9). Стрелки испорченных часов (часовая, минутная и секундная) движутся с правильными скоростями, но расположены так, что все три никогда не смогут совпасть. В произвольный момент времени рассматриваются углы между стрелками, не превосходящие 180°. Наибольший из них назовем расхождением. Докажите, что когда расхождение достигает минимума, то какие-то две стрелки совпадают.

И.Акулич

22 (8–9). В стране 2004 города, причем каждый из них соединен с каждым ровно одной дорогой, но ГИБДД все дороги перекрыло. Начальник Гриша хочет открыть как можно большее количество дорог, а начальник Ваня стремится ему помешать. Какое наибольшее количество дорог может оказаться открытым после очередного приказа Гриши, если он одним приказом может открыть пять любых дорог, а Ваня последующим приказом может закрыть все дороги, выходящие из одного города?

А.Чеботарев

23 (8–9). Решите в натуральных числах уравнение

$$(x+1)^x - x^{x+1} = 1 .$$

В.Сендеров

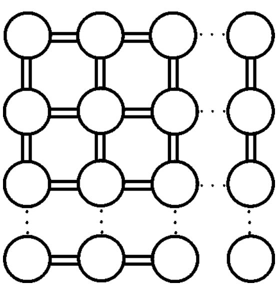
24 (8–9). Докажите неравенство

$$\frac{1}{8(n+1)} < \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} + \frac{1}{(2n+3)(2n+4)} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{(4n-1)4n} < \frac{1}{8n},$$

где n – натуральное число.

А.Заславский

25 (8–9). В подземелье графа Дракулы n^2 пещер, соединенных туннелями (план прилагается). Два вампира, Гриша и Миша, по очереди засыпают туннели землей. За один ход можно засыпать один или два туннеля так, чтобы из любой пещеры можно было добраться до любой другой. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Миша ходит первым. Кто выиграет при правильной игре?



Е.Иванова

26 (7–9). Можно ли при каком-либо натуральном n, большем 1, записать в строку все натуральные числа от 1 до n в некотором порядке так, чтобы сумма любых двух соседних чисел равнялась квадрату некоторого натурального числа?

И.Акулич

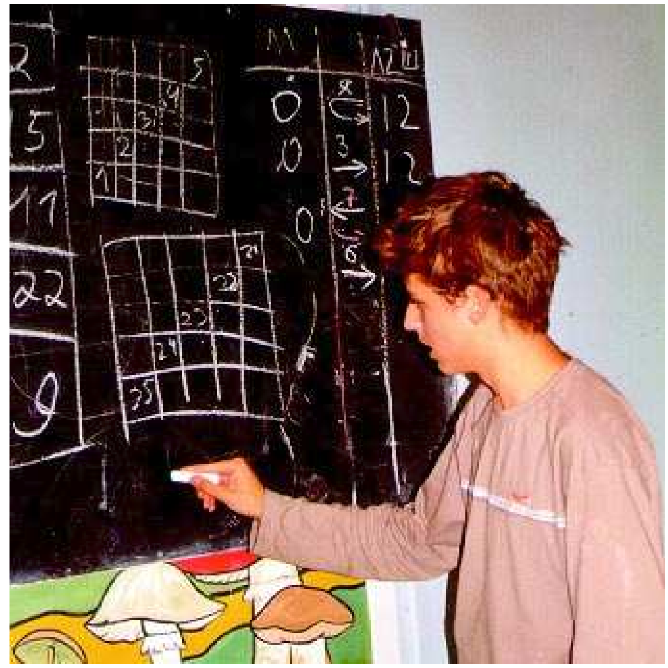
27(7–9). Натуральное число назовем липецким, если оно делится на любую свою ненулевую цифру. Например, число 2004 – липецкое. Какое наибольшее количество липецких чисел может идти подряд?

В.Замков

28 (7–9). В круговом турнире по шахматам участвовали 22 спортсмена. Каждый сыграл с каждым один раз (победа – 1 очко, поражение – 0, ничья – 1/2). Затем некоторые участники были дисквалифицированы, а результаты игр с ними были аннулированы. Все оставшиеся участники до этого имели различные результаты и теперь имеют различные, но последовательность их результатов изменилась на противоположную. Докажите, что дисквалифицировано не менее половины участников.

Б.Френкин, А.Максимов, Т.Караваева, В.Гуровиц

29 (7–8). На шахматной доске расставлены желтые, красные и синие ладьи – поровну каждого цвета. Известно, что ладьи разного цвета не угрожают друг другу. Найдите наибольшее возможное количество ладей при такой расстановке.



И.Акулич

30 (8–9). Пусть α, β, γ и α', β', γ' – величины углов треугольников ABC и $A'B'C'$ соответственно. Следует ли из равенства $\sin\alpha/\sin\alpha' = \cos\beta/\cos\beta' = \cos\gamma/\cos\gamma'$ подобие треугольников ABC и $A'B'C'$?

И.Богданов, В.Сендеров

31 (8–9). Числа x, y, z, t лежат в интервале (0;1). Докажите неравенство

$$\sqrt{x^2+(1-t)^2} + \sqrt{y^2+(1-x)^2} + \sqrt{z^2+(1-y)^2} +$$
$$+ \sqrt{t^2+(1-z)^2} < 4 .$$

С.Дворянинов

32 (8–9). Выписаны первые n строк треугольника Паскаля. Докажите, что существует n, для которого более чем 99 процентов всех выписанных чисел – четные.

А.Канель-Белов

Публикацию подготовил А.Жуков
Фотографии предоставила Е. Иванова

Информацию о журнале "Квант" и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала "Квант"
kvant.info
Московский центр непрерывного математического образования
kvant. mccme.ru
Московский детский клуб "Компьютер"
math.child.ru
Костромской центр дополнительного образования "Эврика"
ceemat.ru

Геометрические задачи на максимум и минимум

Э.ГОТМАН

Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений геометрических величин еще в глубокой древности привлекали внимание крупнейших математиков. Так, Евклид, живший около 300 года до н.э., в VI книге своих знаменитых «Начал» показал, что из всех прямоугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат.

Задачи на максимум и минимум (или, короче, задачи на экстремум) часто возникают в повседневной жизни, в технике, экономике, естествознании. Для решения существуют различные элементарные приемы и методы. Некоторые планиметрические задачи изящно решаются с помощью геометрических преобразований: осевой симметрии, параллельного переноса, поворота вокруг точки; другие – решаются аналитически и сводятся к исследованию квадратной функции. Аппарат дифференциального исчисления дает общий, единообразный метод отыскания экстремальных значений функций, рассматриваемых в задачах. Тем не менее, при решении стереометрических задач иногда к цели можно прийти быстрее и более коротким путем, используя неравенства и тригонометрические функции.

Из школьного курса математики хорошо известно неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух положительных чисел:

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}.$$

При решении ряда задач данной статьи может оказаться полезным неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим трех положительных чисел:

$$\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3},$$

а также некоторые другие. Например, из очевидного неравенства

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \ge 0$$

вытекает цепочка неравенств:

$$ab + bc + ca \le \frac{1}{3}(a+b+c)^2 \le a^2 + b^2 + c^2,$$

где равенство достигается тогда и только тогда, когда $a = b = c$.

Чтобы убедится в справедливости неравенства

$$\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3},$$

положим $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$. Тогда доказываемое неравенство приводится к виду

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \ge 0.$$

Многочлен, стоящий в левой части неравенства, разложим на множители:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y)^3 + z^3 - 3xy(x+y+z) =$$

$$= (x+y+z)\left(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx\right).$$

Из приведенного выше неравенства следует, что

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \ge 0.$$

Учитывая, что $x + y + z > 0$, получаем

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \ge 0.$$

Равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда $x = y = z$, что для исходного неравенства равносильно условию $a = b = c$.

Из неравенства $\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3}$ следует, что если $a + b + c = k$, где k – постоянное число, то $abc \le \left(\frac{k}{3}\right)^3$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a = b = c$. Другими словами, произведение нескольких (в приведенном случае – трех) положительных переменных сомножителей, сумма которых постоянна, имеет наибольшее значение при равенстве сомножителей.

Точно так же, сумма нескольких положительных переменных слагаемых, произведение которых постоянно, имеет наименьшее значение при равенстве слагаемых.

Пользуясь этими следствиями, можно получить экономные решения ряда геометрических задач на максимум и минимум.

Большинство стереометрических задач на отыскание наибольших и наименьших значений решаются аналитически. Обычно выбирают независимую переменную, обозначают ее через x, получают формулу, выражающую функцию, наибольшее или наименьшее значение которой требуется найти, и определяют границы изменения аргумента x. Полученная функция исследуется элементарными средствами или с помощью производной.

Приведем несколько примеров.

Задача 1. *Найдите длины сторон данного прямоугольника данного периметра 2p, при вращении которого вокруг одной из его сторон получится цилиндр наибольшего объема.*

Решение. Пусть прямоугольник $ABCD$ вращается вокруг стороны CD (рис.1). Согласно условию задачи, $AB + BC = p$. Введем независимую переменную $BC = x$. Тогда $AB = p - x$. Объем цилиндра, полученного при вращении прямоугольника вокруг стороны CD, выразится формулой

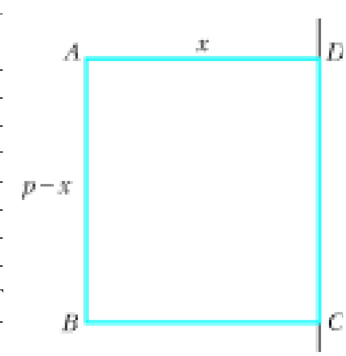


Рис. 1

$$V = \pi x^2 (p - x),\ 0 < x < p.$$

Наибольшее значение функции V можно найти без использования производной. Представим выражение V следующим образом:

$$V = \frac{1}{2}\pi x x (2p - 2x).$$

Так как сумма сомножителей, содержащих x, постоянна и равна $2p$, то из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом вытекает, что их произведение будет наибольшим при $x = 2p - 2x$, т.е. при $x = \frac{2}{3}p$. Высота пирамиды при этом будет $\frac{1}{3}p$, а максимальный объем – $V = \frac{4\pi}{27}p^3$.

Задача 2. *В сферу радиуса R вписан конус. При какой высоте конуса его объем будет наибольшим?*

Решение. Обозначим через r и h соответственно радиус основания и высоту конуса. Осевое сечение конуса – равнобедренный треугольник ABN, вписанный в окружность, диаметр которой MN равен $2R$ (рис.2).

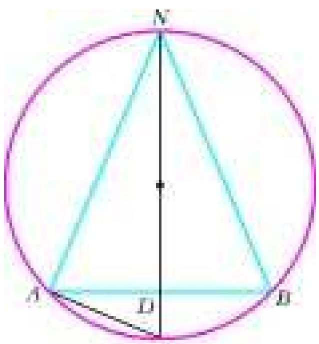


Рис. 2

Воспользуемся формулой объема конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

За независимую переменную удобно принять высоту ND конуса. Пусть $DN = h$. Так как $\angle MAN = 90°$, то треугольник MAN прямоугольный, и в силу известной теоремы планиметрии сразу получаем

$$AD^2 = MD \cdot DN, \text{ или } r^2 = (2R - h)h.$$

Таким образом,

$$V = \frac{1}{3}\pi(2R - h)h^2, \quad 0 < h < 2R.$$

Рассмотрим произведение

$$(4R - 2h) \cdot h \cdot h.$$

Сумма положительных сомножителей постоянна и равна $4R$, значит, вследствие неравенства о средних, их произведение будет наибольшим при $h = 4R - 2h$, откуда $h = \frac{4}{3}R$.

Итак, при $h = \frac{4}{3}R$ объем конуса наибольший, причем, как легко подсчитать, он равен $V_{\max} = \frac{32}{27}\pi R^3$.

Задача 3. *Около шара радиуса r описан конус. При каком угле наклона его бокового ребра к плоскости основания боковая поверхность конуса будет наименьшей?*

Решение. Обозначим угол наклона образующей конуса к плоскости его основания через $2x$ (рис.3). Выразим площадь $S_б$ боковой поверхности через радиус шара r и x:

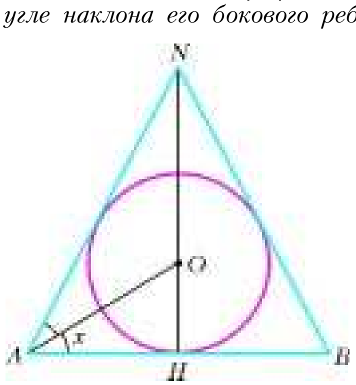


Рис. 3

$$S_б = \frac{\pi r^2 \operatorname{ctg}^2 x}{\cos 2x},$$
$$0° < 2x < 90°.$$

Наименьшее значение функции $y = \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\cos 2x}$ можно найти без применения производной. Выполнив несложные преобразования, получим

$$y = \frac{\cos^2 x}{\left(1 - \cos^2 x\right)\left(2\cos^2 x - 1\right)}.$$

Для краткости обозначим $\cos^2 x = z$, тогда выражение для y примет вид

$$y = \frac{1}{3 - \left(2z + \frac{1}{z}\right)}, \quad 0 < z < 1.$$

Применив теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом двух положительных чисел, получим

$$2z + \frac{1}{z} \geq 2\sqrt{2},$$

причем равенство имеет место только при $2z = \frac{1}{z}$, т.е. при $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Таким образом, $y_{\min} = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2}$ при $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Следовательно, боковая поверхность конуса будет наименьшей при $2x = \arccos\left(\sqrt{2} - 1\right)$ и равной $\pi\left(3 + 2\sqrt{2}\right)r^2$.

При решении геометрических задач на экстремум независимую переменную часто можно выбрать разными способами. Но желательно это сделать так, чтобы более коротким путем получить выражение искомой функции и чтобы это выражение было по возможности более простым. Иногда в качестве независимого переменного удобно взять величину некоторого угла и для нахождения наибольшего или наименьшего значения функции пользоваться тригонометрическими формулами.

Задача 4. *В сферу радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида, плоский угол при вершине которой равен γ. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды. При каком значении γ площадь будет наибольшей?*

Решение. Пусть $NABCD$ – правильная четырехугольная пирамида, вписанная в сферу (рис.4). Продолжим высоту NH пирамиды за точку H до встречи со сферой в точке M. Так как центр сферы лежит на прямой NH, то MN – диаметр сферы, $MN = 2R$ и $\angle MAN = 90°$.

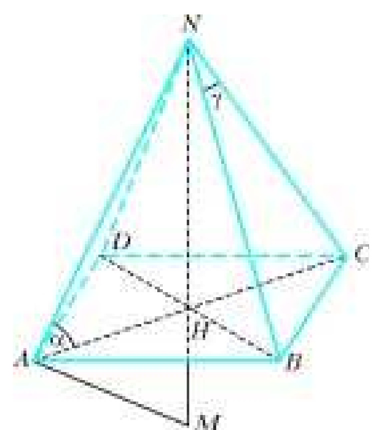


Рис. 4

Обозначим $AH = r$ и $\angle CAN = \alpha$. Тогда и $\angle AMN = \alpha$. Треугольник AMN прямоугольный и $AN = 2R\sin\alpha$, поэтому

$$S = 8R^2 \sin^2\alpha \sin\gamma.$$

Остается выразить $\sin\alpha$ через тригонометрическую функцию угла γ. Из прямоугольных треугольников BHN и KHN, где K – середина ребра BC, находим

$$BK = b\cos\alpha, \quad KH = b\sin\frac{\gamma}{2},$$

а так как $BH = \sqrt{2}KH$, то $\cos\alpha = \sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

Полученную выше формулу для S легко преобразовать следующим образом:

$$S = 8R^2\left(1 - \cos^2\alpha\right)\sin\gamma =$$
$$= 8R^2\left(1 - 2\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)\sin\gamma = 8R^2\cos\gamma\sin\gamma,$$

и окончательно получим

$$S = 4R^2\sin 2\gamma.$$

Значит, площадь боковой поверхности имеет наибольшее значение

$$S_{\max} = 4R^2 \text{ при } \gamma = 45°.$$

Задача 5. *Каковы должны быть размеры открытого бассейна с прямоугольным дном, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала?*

Если указано, что дно бассейна имеет форму квадрата, задача легко решается с помощью производной, а в таком более общем виде ее можно решить, применив теорему о среднем.

Решение. Пусть x, y, z – длина, ширина и высота бассейна, тогда площадь дна и стен бассейна равна

$$S = xy + 2xz + 2yz,$$

а объем составляет

$$V = xyz.$$

Применим неравенство между средними трех положительных чисел $a + b + c \ge 3\sqrt[3]{abc}$ и получим

$$S \ge 3\sqrt[3]{4x^2y^2z^2}, \text{ или } S \ge 3\sqrt[3]{4V^2},$$

при этом знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда

$$xy = 2xz = 2yz, \text{ или } x = y,\ x = 2z.$$

Итак, дно бассейна должно иметь форму квадрата, высота же должна быть вдвое меньше его длины.

Упражнения

Следующие задачи решите, используя элементарные приемы: неравенства, тригонометрические функции. Некоторые задачи полезно решить также с помощью производной и сравнить результаты.

1. Из всех прямоугольных параллелепипедов с данной диагональю найдите тот, который имеет наибольшую площадь полной поверхности.

2. Из всех прямоугольных параллелепипедов с данной диагональю найдите тот, который имеет наибольшую площадь боковой поверхности.

3. В правильную четырехугольную пирамиду впишите прямоугольный параллелепипед наибольшего объема так, чтобы одна грань параллелепипеда лежала в плоскости основания пирамиды, а вершины противоположной грани принадлежали боковым ребрам.

4. В данный конус впишите цилиндр наибольшего объема.

5. В сферу радиуса R вписана правильная шестиугольная пирамида. Какова должна быть высота пирамиды, чтобы объем ее был наибольшим?

6. Около шара радиуса R описан конус. При какой высоте конуса его объем будет наименьшим? Докажите, что

$$V \ge 2V_1,$$

где V – объем конуса, V_1 – объем шара.

7. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно b и составляет с плоскостью основания угол α. При каком значении α объем пирамиды будет наибольшим? Чему равен этот объем?

8. Длины двух противоположных ребер тетраэдра равны x, а все остальные имеют длину, равную 1. Выразите объем тетраэдра как функцию x. При каком значении x объем тетраэдра имеет наибольшее значение?

9. Длина одного бокового ребра четырехугольной пирамиды равна x, все остальные ребра имеют длину, равную 1. Выразите объем пирамиды как функцию x. При каком значении x объем пирамиды принимает наибольшее значение?

10. Из точка A, расположенной вне плоскости, проведены к ней перпендикуляр AO и наклонные AB и AC. Известно, что $BO = 1$, $CO = 2\sqrt{2}$ и $\angle BOC = 45°$. Найдите расстояние AO, при котором $\angle BAC = 45°$. Какое наибольшее значение может принимать этот угол?

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Зависимость периода колебаний маятника от амплитуды

И.ГОРБАТЫЙ

Во дворе вверх колесами, опираясь на седло и руль, стоял велосипед. Мальчик закончил ремонт колеса и теперь с сосредоточенным видом следил за его медленным вращением. Взгляд мальчика был прикован к ниппелю – небольшому отростку для подсоединения насоса. Вот ниппель поднялся вверх, перевалил через верхнюю точку и начал опускаться, ускоряя вращение колеса. Но через некоторое время на очередной оборот энергии уже не хватило, колесо на мгновение остановилось, немного не дотащив ниппель до верхней точки, и стало поворачиваться в противоположную сторону, постепенно набирая скорость. Вращение колеса сменилось его колебаниями. «Когда колебания прекратятся, ниппель внизу должен быть», – подумал мальчик, – «или я плохо почистил и смазал втулку».

Известно, что любое твердое тело, которое может качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси, является маятником (точнее – физическим маятником). Простейший маятник – это груз малых размеров, закрепленный на длинной легкой нити (или стержне). Если можно пренебречь массой нити по сравнению с массой груза, размерами груза по сравнению с длиной нити, а также деформацией нити, то такой маятник называют математическим. При *малых* углах α отклонения маятника от положения равновесия его колебания являются гармоническими, т.е. описываются формулой

$$\alpha = \alpha_m \sin(\omega t + \varphi_0), \qquad (1)$$

где α_m – максимальный угол отклонения от положения равновесия (угловая амплитуда), φ_0 – начальная фаза колебаний, $\omega = \sqrt{g/l}$ – циклическая частота, l – длина нити, g – ускорение свободного падения. Период малых колебаний математического маятника, равный

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,, \qquad (2)$$

не зависит от амплитуды колебаний α_m. Такое свойство колебаний – независимость периода от амплитуды – называют изохронностью колебаний.

Возникает вопрос: насколько малой должна быть амплитуда колебаний маятника, чтобы его колебания можно было считать изохронными? Например, угол 30° можно считать малым? А угол 15°? Применительно к математическому маятнику можно спросить и иначе: при каких амплитудах можно пользоваться формулой (2) для расчета периода колебаний?

Ответы на эти вопросы, конечно, зависят от того, какую точность мы имеем в виду при определении периода. Так, если нас устраивает погрешность в 2%, то колебания маятника можно считать изохронными, а формулу (2) справедливой при бóльших угловых амплитудах, чем, скажем, при погрешности в 0,1%.

Ясно, что для ответа на поставленные вопросы необходимо исследовать зависимость периода колебаний маятника от амплитуды при произвольных, не обязательно малых, ее значениях. Начнем с простого эксперимента, а затем проведем теоретические расчеты.

Эксперимент. Зависимость T от α_m желательно определить как можно в большем диапазоне изменений угловых амплитуд, а затухание колебаний в эксперименте должно быть достаточно малым: во всяком случае за один период колебаний амплитуда не должна заметно уменьшаться. Для этих целей в качестве маятника действительно удобно взять обычное велосипедное колесо. Хороший подшипник обеспечивает малое затухание колебаний, колебания происходят довольно медленно, а их амплитуду можно менять в широких пределах, вплоть до 180°. По спицам удобно отсчитывать углы отклонения от положения равновесия (на колесе моего велосипеда, например, имеется 36 спиц – отличный транспортир с ценой деления в 10°).

Колесо совершает колебания, если его центр тяжести несколько смещен относительно оси вращения. Обычно это происходит за счет не совсем точной центровки колеса, а также из-за наличия ниппеля. Но можно дополнительно сместить центр тяжести колеса, утяжелив обод в некотором месте. Для этого мы прикрепили скотчем к ободу колеса груз небольших размеров массой около одного килограмма. При этом возросла сила, возвращающая колесо к положению равновесия (точнее, момент силы), и период колебаний уменьшился. Одновременно уменьшилось и затухание колебаний (поскольку возросла инерционность колеса). Мы поняли, что имеет смысл прикрепить еще один груз почти такой же массы, как и первый, в диаметрально противоположном месте обода (рис.1). Затухание еще больше уменьшилось, а период колебаний увеличился, что было удобно для измерений.

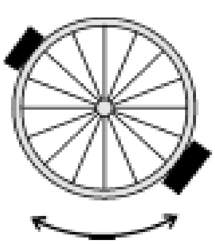


Рис.1. Велосипедное колесо – физический маятник

Время измерялось обычным секундомером с ценой деления 0,2 с. Результаты измерений приведены на рисунке 2. Видно, что период колебаний монотонно увеличивается с ростом угловой амплитуды. При малых амплитудах эта зависимость выражена слабо: так, при увеличении амплитуды от предельно малых углов до $\alpha_m = 60°$ период колебаний

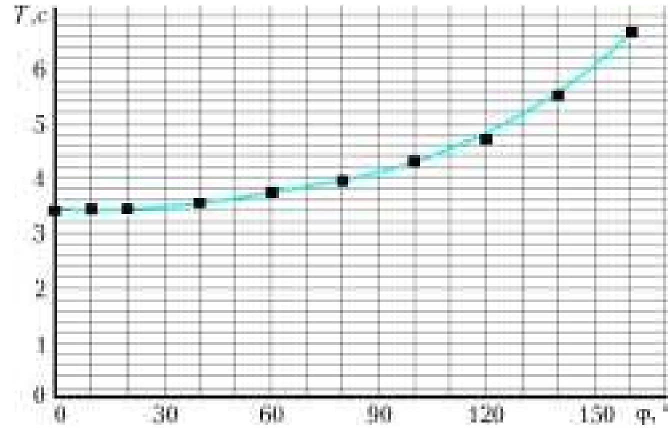


Рис.2. Зависимость периода колебаний от амплитуды (эксперимент)

увеличивается не более чем на 10%, а при 90° период колебаний увеличивается примерно на 20%. Резкое увеличение периода колебаний наблюдается при приближении угловой амплитуды к 180°. Например, при $\alpha_m = 160°$ период колебаний увеличился почти в 2 раза по сравнению с периодом малых колебаний.

Мы измерили зависимость периода колебаний от амплитуды для некоторого конкретного колеса-маятника с грузами-противовесами. Однако, полученные результаты могут быть представлены в таком виде, что они окажутся справедливыми для любого физического маятника.

Теория. Положение твердого тела (маятника), которое может качаться вокруг горизонтальной оси O, в каждый момент времени будем характеризовать углом его отклонения α от положения равновесия (рис.3). Каждая точка маятника движется по окружности с угловой скоростью $\omega = \alpha' = \dfrac{d\alpha}{dt}$. Линейные скорости различных точек маятника различны и определяются расстоянием r от оси вращения: $V = \omega r$. Поэтому кинетическая энергия маятника, вращающегося в данный момент с угловой скоростью ω, равна

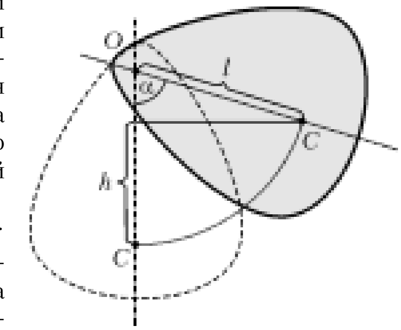


Рис.3. Колебания физического маятника

$$E_к = \sum \frac{\Delta m_i V_i^2}{2} = \sum \frac{\Delta m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}\sum \Delta m_i r_i^2\,,$$

где Δm_i – масса очень малого участка твердого тела, удаленного от оси вращения на расстояние r_i и имеющего линейную скорость V_i. Величина $\sum \Delta m_i r_i^2$ зависит от распределения масс в твердом теле и положения оси вращения, эту величину называют моментом инерции твердого тела относительно данной оси и обозначают буквой I.

Для потенциальной энергии маятника можно записать

$$E_п = mgh\,,$$

где h – высота поднятия центра масс C над самым нижним его положением. Из рисунка 3 видно, что $h = l(1 - \cos\alpha)$, где l – расстояние от оси вращения до центра масс маятника.

Если силами трения и сопротивления можно пренебречь, то полная механическая энергия маятника

$$E = \frac{I}{2}\alpha'^2 + mgl(1 - \cos\alpha) \qquad (3)$$

остается постоянной, следовательно, ее производная по времени равна нулю:

$$\frac{dE}{dt} = I\alpha'\alpha'' + mgl\alpha'\sin\alpha = 0 .$$

Отсюда получим дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции времени $\alpha = \alpha(t)$:

$$\alpha'' + \omega_0^2 \sin\alpha = 0 , \qquad (4)$$

где $\omega_0^2 = mgl/I$.

Если при малых углах отклонения считать $\sin\alpha \approx \alpha$, то уравнение (4) принимает вид

$$\alpha'' + \omega_0^2\alpha = 0 . \qquad (5)$$

Решением этого уравнения является функция $\alpha = \alpha_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$, в чем легко убедиться, вычислив вторую производную ($\alpha'' = -\omega_0^2\alpha_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -\omega_0^2\alpha$) и подставив ее в уравнение (5) – оно обратится в тождество. Таким образом, при достаточно малых амплитудах колебаний (когда $\sin\alpha \approx \alpha$) колебания маятника являются гармоническими, а период этих малых колебаний – обозначим его T_0 – не зависит от амплитуды и определяется формулой

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} . \qquad (6)$$

В частности, для математического маятника

$$I = ml^2 \text{ , и } T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} ,$$

а для шарнирно закрепленной за один конец однородной палочки массой m и длиной L

$$I = \frac{mL^2}{3} ,\ l = \frac{L}{2} ,\ T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} .$$

Для произвольных углов отклонения α выразить решение уравнения (4) в элементарных функциях не удается. Однако уравнение можно решить численно. Существуют различные алгоритмы решения. Самый простой алгоритм может быть осуществлен следующим образом. Зададим некоторые значения угла: $\alpha = \alpha_1$ и угловой скорости: $\alpha' = \omega_1$ в начальный момент времени. При помощи уравнения (4) вычислим угловое ускорение в этот начальный момент: $\beta_1 = \alpha'' = -\omega_0^2 \sin\alpha_1$ и рассчитаем угол α_2 и угловую скорость ω_2 через малый промежуток времени Δt:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \omega_1\Delta t + \frac{\beta_1\Delta t^2}{2} ,\ \omega_2 = \omega_1 + \beta\Delta t .$$

Далее вычислим угловое ускорение $\beta_2 = -\omega_0^2 \sin\alpha_2$ в момент $t = \Delta t$, а затем – угол и угловую скорость в следующий момент времени $t = 2\Delta t$:

$$\alpha_3 = \alpha_2 + \omega_2\Delta t + \frac{\beta_2\Delta t^2}{2} ,\ \omega_3 = \omega_2 + \beta\Delta t ,$$

и так далее. Приведенный алгоритм не очень эффективен, поскольку нужно брать очень малый временной шаг Δt, чтобы избежать накопления ошибок при многократных повторных вычислениях. Существуют и другие, более рациональные схемы решения дифференциальных уравнений, в которых ошибки, возникающие на каждом шаге, частично компенсируются.

На рисунке 4 приведены результаты численного решения уравнения (4) для нескольких значений угловой амплитуды α_m. Заметим, что форма колебаний остается близкой к синусоидальной даже при весьма больших амплитудах. Так, даже при $\alpha_m = 150°$ отклонения от синусоидальной формы весьма незначительны (штриховая кривая на рисунке 4

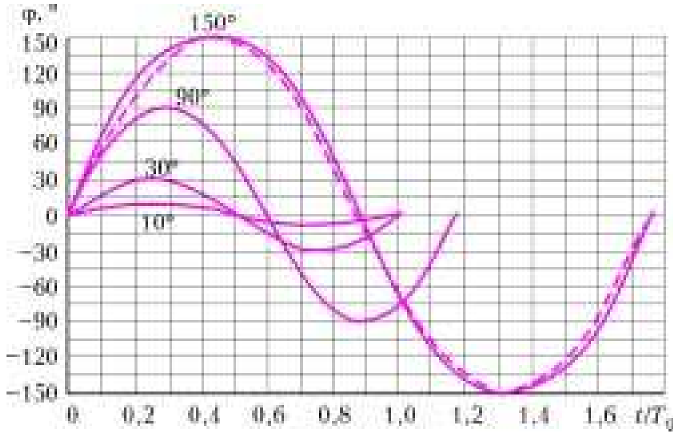


Рис.4. Зависимость угла отклонения физического маятника от времени при различных угловых амплитудах колебаний (теория)

рассчитана по формуле $\alpha = 150\sin(2\pi t/T)$), а при $\alpha_m = 90°$ отклонений от синусоидальной зависимости при выбранном масштабе вообще не заметно. Период колебаний, как видно, увеличивается с ростом угловой амплитуды.

Расчетная зависимость периода колебаний от амплитуды изображена на рисунке 5. По оси ординат отложены значения не самого периода колебаний T, а отношения T/T_0, где T_0 – период колебаний при предельно малых амплитудах. Такой переход к безразмерной переменной позволяет применять

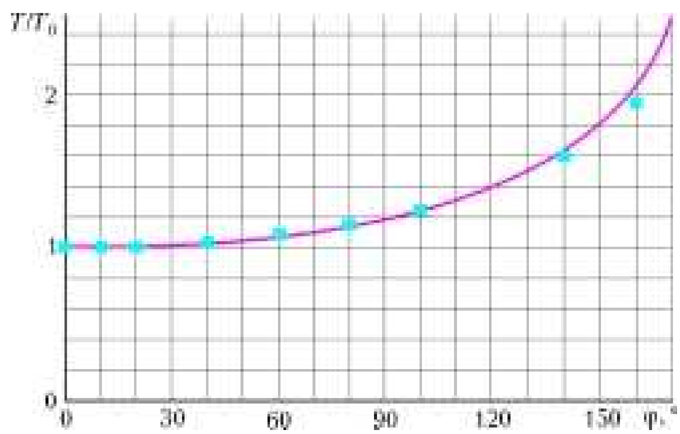


Рис.5. «Точки» – эксперимент, сплошная линия – теория

результаты наших расчетов к любому физическому маятнику. Иными словами, приведенные на рисунках 4 и 5 расчетные кривые будут выглядеть совершенно одинаково для всех физических маятников, а различаться будут лишь значения периодов малых колебаний T_0. На графике рисунка 5 нанесены также «точки», полученные по результатам наших экспериментов с колесом-маятником. Видно, что согласие эксперимента и теории удовлетворительное – расхождения находятся в пределах погрешностей эксперимента.

Итак, точное численное решение уравнения (4) показывает, что колебания маятника, строго говоря, не являются изохронными – период колебаний монотонно увеличивается с ростом амплитуды. Однако при малых угловых амплитудах зависимость периода от амплитуды выражена слабо. Так, например, при угловой амплитуде $\alpha_m = 30°$ период колебаний превышает период колебаний T_0 с предельно малой амплитудой не более чем на 2%, а для $\alpha_m = 90°$ превышение периода составляет примерно 20%. Если говорить о математическом маятнике, то именно такие погрешности будет давать формула (2) при вычислении периода с указанными выше амплитудами.

О динамике криволинейного движения

В.ПЛИС

Из школьного курса физики известно, что равномерное движение по окружности – так называют движение материальной точки по окружности с постоянной по величине скоростью – есть движение с ускорением. Это ускорение обусловлено равномерным изменением с течением времени направления скорости точки. В любой момент времени вектор ускорения направлен к центру окружности, а его величина постоянна и равна

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R ,$$

где v – линейная скорость точки, R – радиус окружности, ω – угловая скорость радиуса-вектора точки, T – период обращения. В этом случае ускорение называют центростремительным, или нормальным, или радиальным.

Очевидно, что возможно криволинейное движение не только по окружности и не обязательно равномерное. Поговорим немного о кинематике произвольного криволинейного движения. Тем более что в прошлом году в программу вступительных экзаменов по физике, например в МГУ им. М.В.Ломоносова, включили вопрос об ускорении материальной точки при произвольном движении по криволинейной траектории.

Рассмотрим сначала неравномерное движение материальной точки по окружности. При таком движении изменяется со временем не только направление вектора скорости $\vec{v}$, но и его величина. В этом случае приращение $\overrightarrow{\Delta v}$ вектора скорости за малое время от t до $t + \Delta t$ удобно представить в виде суммы:

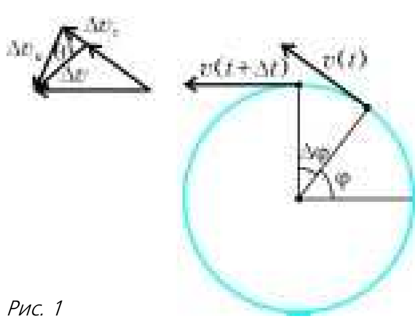


Рис. 1

$$\overrightarrow{\Delta v} = \overrightarrow{\Delta v}_\tau + \overrightarrow{\Delta v}_n$$

(рис.1). Здесь $\overrightarrow{\Delta v}_\tau$ – касательная тангенциальная составляющая приращения скорости, сонаправленная с вектором скорости и обусловленная приращением величины вектора скорости на $\Delta v_\tau = \left|\overrightarrow{\Delta v}\right| \cos\theta$, а $\overrightarrow{\Delta v}_n$ – нормальная составляющая, обусловленная (как и в случае равномерного движения по окружности) вращением вектора скорости. Тогда естественно и ускорение представить в виде суммы касательной (тангенциальной) и нормальной составляющих:

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}_\tau}{\Delta t} + \frac{\overrightarrow{\Delta v}_n}{\Delta t} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n .$$

Для проекций вектора ускорения на касательное и нормальное направления справедливы соотношения

$$a_\tau = \frac{\Delta v_\tau}{\Delta t}, \quad a_n = \frac{v^2}{R} .$$

Отметим, что касательная составляющая a_τ ускорения характеризует быстроту изменения величины скорости, а нормальная составляющая a_n характеризует быстроту изменения направления скорости. По теореме Пифагора,

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} .$$

В случае движения по произвольной криволинейной траектории все указанные соотношения также справедливы, при этом в формуле для нормального ускорения a_n под величиной R надо понимать радиус такой окружности, с элементарной дужкой которой совпадает участок криволинейной траектории в малой окрестности того места, где находится движущаяся материальная точка. Величину R называют радиусом кривизны траектории в данной точке.

Теперь рассмотрим несколько конкретных задач на криволинейное движение, предлагавшихся в последние годы на вступительных экзаменах и олимпиадах по физике в ведущих вузах страны.

Задача 1. *Камень брошен со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Найдите радиус R кривизны траектории в окрестности точки старта. Ускорение свободного падения g известно.*

Для ответа на вопрос задачи воспользуемся соотношением для нормального ускорения:

$$a_n = \frac{v^2}{R} .$$

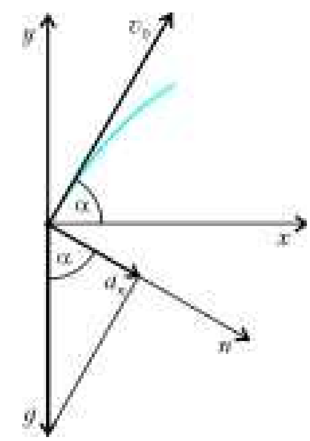


Рис. 2

В малой окрестности точки старта $v = v_0$ (рис.2). Нормальное ускорение a_n есть проекция ускорения свободного падения $\vec{g}$ на нормаль к траектории: $a_n = g\cos\alpha$. Это дает

$$R = \frac{v_0^2}{g\cos\alpha} .$$

Задача 2. *Определите вес P тела массой m на географической широте φ. Ускорение, сообщаемое силой тяжести, равно g. Землю считайте однородным шаром радиусом R.*

Напомним, что вес тела $\vec{P}$ – это сила, обусловленная тяготением, с которой тело действует на опору или подвес. Допустим, что тело лежит на поверхности вращающейся Земли. На него действуют сила тяжести $m\vec{g}$, направленная к центру Земли, и сила реакции опоры $\vec{N}$ (рис.3). По третьему закону Ньютона, $\vec{P} = -\vec{N}$. Поэтому для определения веса тела найдем силу реакции $\vec{N}$.

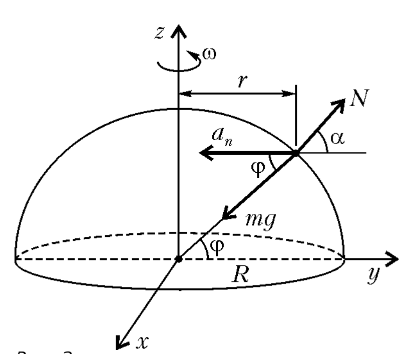


Рис. 3

В инерциальной системе отсчета, центр которой находится в центре Земли, тело равномерно движется по окружности радиусом $r = R\cos\varphi$ с периодом одни сутки, т.е. $T =$

$= 86400$ с, и циклической частотой

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7{,}3 \cdot 10^{-5}\ \text{с}^{-1}.$$

Ускорение тела по величине равно

$$a_n = \omega^2 r = \omega^2 R\cos\varphi$$

и направлено к оси вращения Земли. Из этого следует, что равнодействующая сил тяжести и реакции опоры тоже должна быть направлена к оси вращения Земли. Тогда при $0 < \varphi < \pi/2$ сила реакции образует с перпендикуляром к оси вращения некоторый угол $\alpha \neq \varphi$. По второму закону Ньютона,

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}.$$

Перейдем к проекциям сил и ускорения на радиальное направление:

$$m\omega^2 R\cos\varphi = mg\cos\varphi - N\cos\alpha$$

и на направление, перпендикулярное плоскости, в которой происходит движение:

$$0 = -mg\sin\varphi + N\sin\alpha.$$

Исключая α из двух последних соотношений, находим вес тела, покоящегося на вращающейся Земле:

$$P = N = \sqrt{(mg)^2 - m^2\omega^2 R\left(2g - \omega^2 R\right)\cos^2\varphi}.$$

Задача 3. *Расстояние от Земли до двойной звезды в созвездии Центавра равно $L = 2{,}62 \cdot 10^5$ а.е. Наблюдаемое угловое расстояние между звездами периодически изменяется с периодом $T = 80$ лет и достигает наибольшего значения $\varphi = 0{,}85 \cdot 10^{-5}$ рад. Определите суммарную массу M звезд. Постоянная всемирного тяготения $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ ($Н \cdot м^2/кг^2$), 1 а.е $= 1{,}5 \cdot 10^{11}$ м. Орбиты звезд считайте круговыми.*

Под действием гравитационных сил

$$F_1 = F_2 = G\frac{m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2}$$

звезды движутся равномерно с периодом T по окружностям радиусов r_1 и r_2 вокруг центра масс системы со скоростями v_1 и v_2 соответственно (рис.4). По второму закону Ньютона,

$$\frac{m_1 v_1^2}{r_1} = G\frac{m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2},$$

$$\frac{m_2 v_2^2}{r_2} = G\frac{m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2}.$$

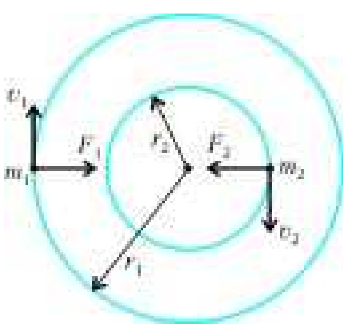


Рис. 4

Сложив эти равенства (после сокращения на m_1 и m_2 соответственно), получим

$$G\frac{m_1 + m_2}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{v_1^2}{r_1} + \frac{v_2^2}{r_2}.$$

Отсюда с учетом соотношений

$$r_1 + r_2 = L\varphi,\quad v_1 = \frac{2\pi r_1}{T},\quad v_2 = \frac{2\pi r_2}{T}$$

приходим к ответу

$$M = m_1 + m_2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{L^3\varphi^3}{G} \approx 3{,}5 \cdot 10^{27}\ \text{кг}.$$

Задача 4. *На горизонтальной платформе стоит сосуд с водой (рис.5). В сосуде закреплен тонкий стержень AB, наклоненный к горизонту под углом α. Однородный шарик радиусом R может скользить без трения вдоль стержня, проходящего через его центр. Плотность материала шарика ρ_0, плотность воды ρ, $\rho_0 < \rho$. При вращении системы с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси, проходящей через нижний конец A стержня, центр шарика устанавливается на расстоянии L от этого конца. С какой по величине силой F шарик действует на стержень? Какова угловая скорость ω вращения платформы? При какой минимальной угловой скорости $\omega_{\min}$ шарик «утонет», т.е. окажется у дна сосуда?*

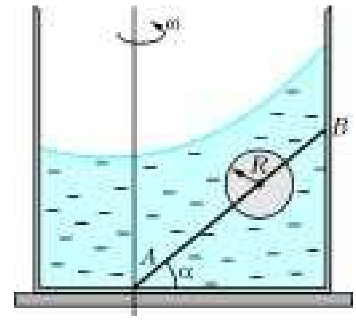


Рис. 5

Обозначим объем шарика V ($V = \frac{4}{3}\pi R^3$). На шарик будут действовать три силы: сила тяжести $\rho_0 V\vec{g}$, сила нормальной реакции $\vec{N}$ со стороны стержня (шарик действует на стержень с такой же по величине и противоположной по направлению силой) и сила Архимеда $\vec{F}_{\text{А}}$. Найдем архимедову силу.

Рассмотрим движение жидкости в отсутствие шарика. Любой элементарный объем воды равномерно движется по окружности радиусом r в горизонтальной плоскости. Следовательно, вертикальная составляющая суммы сил давления (силы Архимеда) уравновешивает силу тяжести, действующую на жидкость в рассматриваемом объеме, а горизонтальная составляющая сообщает этой жидкости центростремительное ускорение $a_n = \omega^2 r$. При замещении жидкости шариком эти составляющие не изменяются, а сила, действующая на водяной шарик со стороны тонкого стержня, равна нулю. Тогда вертикальная составляющая силы Архимеда по величине равна силе тяжести водяного шара:

$$F_{\text{А}z} = \rho V g,$$

а направленная к оси вращения составляющая силы Архимеда сообщает водяному шару центростремительное ускорение $a_n = \omega^2 L\cos\alpha$ и по величине равна

$$F_{\text{А}n} = \rho V\omega^2 L\cos\alpha.$$

Под действием приложенных сил шарик движется равномерно по окружности радиусом $L\cos\alpha$ в горизонтальной плоскости (рис.6). По второму закону Ньютона,

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{А}}.$$

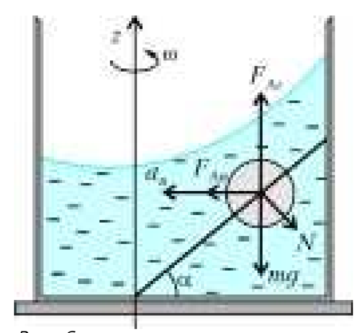


Рис. 6

Переходя к проекциям сил и ускорений на вертикальную ось, находим

$$\rho V g - \rho_0 V g - N\cos\alpha = 0.$$

Проектируя силы и ускорения в горизонтальной плоскости на радиальное направление, получаем

$$\rho_0 V L\omega^2\cos\alpha = \rho V L\omega^2\cos\alpha - N\sin\alpha.$$

Из двух последних соотношений определяем величину силы нормальной реакции стержня, а значит, и силу давления

(Продолжение см. на с. 34)

Треугольники и неравенства

Возможно, вам приходилось задумываться над такими вопросами. Какой треугольник имеет наибольшую площадь при данном периметре или наименьший периметр при заданной площади? Какова наибольшая площадь треугольника, вписанного в данный круг? Ответить на эти и многие другие вопросы часто помогают неравенства между элементами треугольника. Здесь мы приведем без доказательства несколько таких неравенств. Часть из них известна очень давно, другие обнаружены сравнительно недавно.

Большое количество геометрических задач на максимум и минимум собрано в книге Д.О.Шклярского, Н.Н.Ченцова, И.М.Яглома «Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум» (М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1970), а также во многих обстоятельных задачниках по геометрии.

Пусть дан треугольник ABC. Введем стандартные обозначения (рис.1): $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Обозначим через m_a, m_b, m_c медианы треугольника, l_A, l_B, l_C – биссектрисы, h_a, h_b, h_c – высоты, проведенные из соответствующих вершин. Пусть также R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей, а r_a, r_b, r_c – радиусы вневписанных окружностей, т.е. окружностей, касающихся соответствующих сторон и продолжений двух других сторон треугольника. Как всегда, S – площадь, а $P = 2p$ – соответственно, периметр и полупериметр.

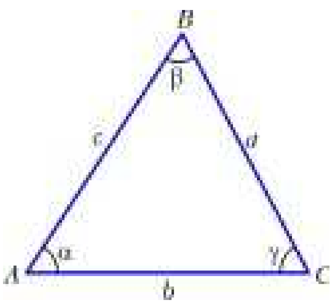


Рис. 1

Самые известные неравенства – это неравенства треугольника, знакомые любому школьнику:

1. $a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$.

Их можно записать и так (это часто бывает полезно при решении задач):

1′. $a > |b - c|$, $b > |a - c|$, $c > |a - b|$.

Из них можно получить такие два неравенства:

2. $m_a < \dfrac{b+c}{2}$.

3. $\dfrac{3}{2}p < m_a + m_b + m_c < 2p$.

Интересно отметить, что все эти неравенства не улучшаемы — в том смысле, что для любого $\dfrac{3}{2} < \lambda < 2$ найдется треугольник, для которого $m_a + m_b + m_c < \lambda p$, а также треугольник, в котором $m_a + m_b + m_c > \lambda p$.

Вообще же, почти все *строгие* неравенства, приведенные далее, – также не улучшаемы именно в этом смысле.

Любопытны такие неравенства:

4. $l_A < \dfrac{2bc}{b+c}$,

5. $4S\sqrt{3} \le a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc)$.

Здесь равенство возможно лишь для правильного треугольника, а строгое неравенство не улучшаемо. Заметив же, что

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right),$$

получим оценку суммы квадратов медиан:

5′. $6S\sqrt{3} \le 2\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right) < 3(ab + ac + bc)$.

Приведем еще несколько неравенств, теперь с участием радиусов r и R:

6. $R \ge 2r$,

причем равенство возможно лишь для правильного треугольника, откуда следует, что из всех треугольников, описанных около окружности радиуса r, наименьший радиус описанной окружности имеет правильный треугольник (для него $R = 2r$), и, наоборот, из всех треугольников, вписанных в окружность радиуса R, наибольший радиус вписанной окружности тоже у правильного треугольника (для него $r = R/2$),

7. $9r \le h_a + h_b + h_c \le l_A + l_B + l_C \le$

$$\le m_a + m_b + m_c \le \frac{9}{2}R,$$

8. $27r^2 \le h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \le l_A^2 + l_B^2 + l_C^2 \le p^2$,

9. $p^2 \le m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \le \dfrac{27}{4}R^2$.

А если вспомнить замечание к неравенству 5, получим

9′. $\dfrac{3}{4}p^2 \le a^2 + b^2 + c^2 \le \dfrac{81}{16}R^2$.

Равенства в любом из неравенств 7–9 достигаются только для правильных треугольников.

Следующие неравенства связаны с известными экстремальными задачами:

10. $r \le \dfrac{\sqrt{S\sqrt{3}}}{3} \le \dfrac{\sqrt{3}}{9}p \le \dfrac{1}{2}R$,

здесь как и раньше, равенства достигаются лишь для правильного треугольника, поэтому правильный треугольник имеет наибольшую площадь при данном периметре, наименьшие площадь и периметр при данном r, а при данном R — наибольшую площадь и наибольший периметр; среднее неравенство часто записывают в виде

10′. $S \le \dfrac{\sqrt{3}}{36}P^2$,

оно называется изопериметрическим неравенством для треугольника и может быть обобщено на произвольные n-угольники.

Интересна и оценка «среднего значения» угла треугольника:

11. $\dfrac{\pi}{3} \le \dfrac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c} < \dfrac{\pi}{2}$.

Вот еще несколько неравенств, в которых участвуют радиусы вневписанных окружностей:

12. $l_A + l_B + l_C \le \sqrt{r_a r_b} + \sqrt{r_a r_c} + \sqrt{r_b r_c} \le p\sqrt{3}$,

13. $\dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} \ge \dfrac{1}{m_a} + \dfrac{1}{m_b} + \dfrac{1}{m_c} \ge \dfrac{2}{R}$,

14. $\dfrac{r_a + r_b + r_c}{3} \le \dfrac{3}{2} R \le \sqrt{\dfrac{r_a^2 + r_b^2 + r_c^2}{3}}$.

Во всех неравенствах 12–14 равенства бывают только в случае равносторонних треугольников.

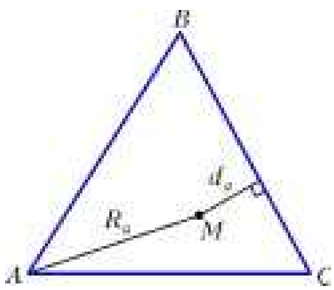


Рис. 2

Пусть внутри треугольника дана точка M. Обозначим через R_a, R_b, R_c расстояния от точки M до соответствующих вершин, а через d_a, d_b, d_c – расстояния до соответствующих сторон треугольника ABC (рис.2). С этими величинами также связаны весьма интересные неравенства:

15. $\min(h_a, h_b, h_c) \le d_a + d_b + d_c \le \max(h_a, h_b, h_c)$,

16. $d_a d_b d_c \le \dfrac{8S^3}{27abc}$,

причем равенство возможно лишь в том случае, когда $ad_a = bd_b = cd_c$,

17. $aR_a + bR_b + cR_c \ge 2(ad_a + bd_b + cd_c)$,

18. $d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 \ge 12\dfrac{r^4}{R^2}$,

здесь равенство достигается, когда треугольник ABC равносторонний, а точка M совпадает с его центром,

19. $R_a R_b R_c \ge 8 d_a d_b d_c$,

20 (неравенство Эрдеша–Морделла). $R_a + R_b + R_c \ge$ $\ge 2(d_a + d_b + d_c)$,

21. $\dfrac{1}{R_a} + \dfrac{1}{R_b} + \dfrac{1}{R_c} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{d_a} + \dfrac{1}{d_b} + \dfrac{1}{d_c}\right)$.

Неравенство 20 впервые было опубликовано в 1935 году венгерским математиком П.Эрдешем без доказательства. Английский математик Л.Д.Морделл опубликовал в том же году довольного сложное его доказательство. Позже к этому неравенству обращались разные авторы, пока не сделали его доказательство вполне элементарным.

Заметим еще, что равенство в неравенствах 18–21 достигается, когда треугольник ABC правильный, а точка M – его центр.

Еще несколько красивых неравенств связаны со сравнительно экзотическими объектами. Опишем около треугольника ABC окружность и в сегменты описанной окружности с хордами AB, BC и AC впишем окружности, касающиеся сторон треугольника в их серединах (рис.3). Пусть радиусы этих окружностей ρ_a, ρ_b и ρ_c. Тогда имеют место неравенства

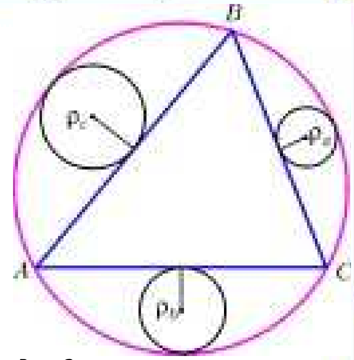


Рис. 3

22. $\dfrac{3}{2} r \le \rho_a + \rho_b +$ $+ \rho_c \le \dfrac{3}{4} R$.

И еще. Рассмотрим окружности, вписанные в углы треугольника и касающиеся его сторон и описанной окружности (рис.4). Обозначим их радиусы через P_a, P_b, P_c. Тогда

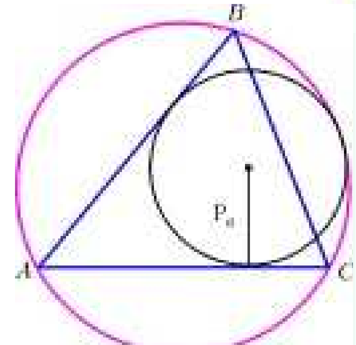


Рис. 4

23. $4r \le \mathrm{P}_a + \mathrm{P}_b +$ $+ \mathrm{P}_c \le 2R$.

Некоторые результаты из перечисленных выше могут быть перенесены на произвольные выпуклые многоугольники.

Назовем вписанной окружностью n-угольника окружность наибольшего радиуса, которую можно в него поместить. Пусть r – радиус этой окружности (для треугольника это определение совпадает с привычным). Пусть также R – радиус наименьшей окружности, содержащей данный многоугольник (для остроугольных и прямоугольных треугольников это определение совпадает с определением описанной окружности, а для тупоугольных– нет; см. рис.5). Пусть также S – площадь, а $2p$ – периметр n-угольника. Тогда

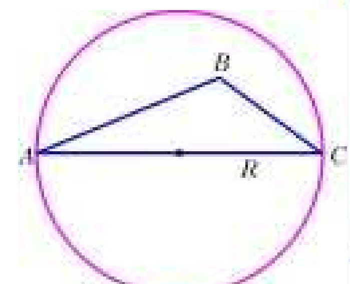


Рис. 5

24. $\dfrac{1}{2} nR^2 \sin\dfrac{2\pi}{n} \ge S \ge nr^2 \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}$,

25. $2nR\sin\dfrac{\pi}{n} \ge 2p \ge 2nr\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}$,

26. $(2p)^2 \ge 4nS\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}$.

Последнее неравенство называется изопериметрическим неравенством для n-угольника.

Равенства в неравенствах 24–26 достигаются для правильных n-угольников. Отсюда следует, что из всех n-угольников данного периметра наибольшую площадь имеет правильный, а из всех многоугольников данной площади наименьший периметр имеет правильный.

Доказательства большинства приведенных здесь неравенств содержатся в вышеупомянутой книге.

А.Егоров

(Начало см. на с. 30)

шарика на стержень:

$$F = N = \frac{(\rho - \rho_0)Vg}{\cos\alpha}$$

и угловую скорость:

$$\omega = \sqrt{\frac{g\,\mathrm{tg}\,\alpha}{L\cos\alpha}}\,.$$

Как видим, с ростом угловой скорости ω расстояние L уменьшается. В момент, когда шар приблизится ко дну, $L = \dfrac{R}{\sin\alpha}$, при этом

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{R}\,\mathrm{tg}\,\alpha}\,.$$

Задача 5. *Однородную цепочку длиной L поместили на гладкую сферическую поверхность радиусом R так, что один ее конец закреплен на вершине сферы. Верхний конец цепочки освобождают. С каким по величине ускорением a_τ будет двигаться сразу после освобождения каждый элемент цепочки? Масса единицы длины цепочки ρ. Ускорение свободного падения g.*

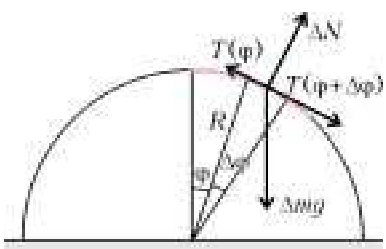


Рис. 7

Рассмотрим элементарный участок цепочки длиной $\Delta L = R\Delta\varphi$ (рис.7). Его масса равна $\Delta m = \rho\Delta L$. Силы, действующие на выделенный участок, показаны на рисунке. По второму закону Ньютона,

$$\Delta m\vec{a} = \vec{T}(\varphi + \Delta\varphi) + \vec{T}(\varphi) + \Delta m\vec{g} + \Delta\vec{N}\,.$$

Переходя к проекциям сил и ускорений на касательное направление, получаем

$$\Delta m a_\tau = T(\varphi + \Delta\varphi) - T(\varphi) + \Delta mg\sin\varphi\,.$$

Перепишем полученное соотношение в виде

$$\Delta T = \rho R\left(a_\tau - g\sin\varphi\right)\Delta\varphi\,.$$

Просуммируем приращения силы натяжения по всей длине цепочки:

$$\sum\Delta T = \rho R\sum\left(a_\tau - g\sin\varphi\right)\Delta\varphi\,.$$

Теперь учтем, что на свободных концах цепочки силы натяжения обращаются в ноль, т.е. $\sum\Delta T = 0$, что ускорение a_τ одинаково у всех элементарных фрагментов, $\sum\Delta\varphi = \dfrac{L}{R}$, $\Delta(\cos\varphi) = -\sin\varphi\,\Delta\varphi$, и получим

$$a_\tau = g\frac{R}{L}\left(1 - \cos\frac{L}{R}\right).$$

Задача 6. *Ведущие колеса паровоза соединены реечной передачей, одно звено которой представляет собой плоскую горизонтальную штангу, шарнирно прикрепленную к спицам соседних колес на расстоянии $R/2$ от оси, где R – радиус колеса. При осмотре паровоза механик поставил на эту штангу ящик и по рассеянности забыл его там. Паровоз трогается с места и очень медленно набирает скорость. Оцените скорость v_1 паровоза, при которой ящик начнет проскальзывать относительно штанги. Коэффициент трения скольжения ящика по штанге $\mu = 0{,}4$, радиус колеса $R = 0{,}8$ м, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.*

Перейдем в систему отсчета, связанную с паровозом (рис.8). Поскольку разгон происходит очень медленно, эту систему можно считать инерциальной. До начала проскальзывания ящик движется по окружности радиусом $r = R/2$. По второму закону Ньютона,

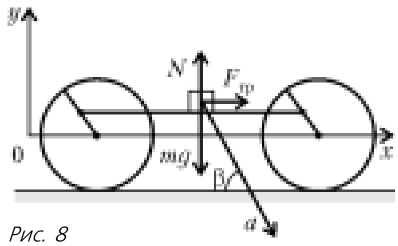


Рис. 8

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}\,.$$

Вектор ускорения ящика направлен к центру окружности и по величине равен $a = \omega^2 r$, где ω – угловая скорость вращения колес паровоза. Обозначим угол, который вектор ускорения образует в данный момент времени с горизонтом, буквой β. Переходя к проекциям сил и ускорения на горизонтальную и вертикальную оси, с учетом того, что $F_{\text{тр}} \le \mu N$, получаем

$$m\omega^2 r\cos\beta \le \mu N\,,$$

$$m\omega^2 r\sin\beta = mg - N\,.$$

Исключив отсюда силу реакции опоры, приходим к неравенству

$$\omega^2 r\left(\cos\beta + \mu\sin\beta\right) \le \mu g\,.$$

Наибольшее значение выражения

$$\cos\beta + \mu\sin\beta = \sqrt{1+\mu^2}\cos(\beta - \alpha)\,,$$

где угол α таков, что $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$ и $\sin\alpha = \dfrac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$, достигается при $\beta = \alpha$ и равно $\sqrt{1+\mu^2}$. Движение груза будет происходить без проскальзывания до тех пор, пока угловая скорость вращения колес паровоза будет удовлетворять неравенству

$$\omega \le \sqrt{\frac{\mu g}{r\sqrt{1+\mu^2}}}\,.$$

Отсюда для искомой скорости паровоза v_1 получаем

$$v_1 = \omega R = \sqrt{\frac{2\mu gR}{\sqrt{1+\mu^2}}} \approx 2{,}4 \text{ м/с}\,.$$

Задача 7. *Гладкий желоб состоит из горизонтальной части AB и дуги окружности BD радиусом $R = 5$ м (рис.9). Шайба скользит по горизонтальной части со скоростью $v_0 = 10$ м/с. Определите величину ускорения шайбы в точке C и угол β, который вектор $\vec{a}$ ускорения шайбы в этот момент составляет с нитью. Радиус OC образует с вертикалью угол $\alpha = 60°$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.*

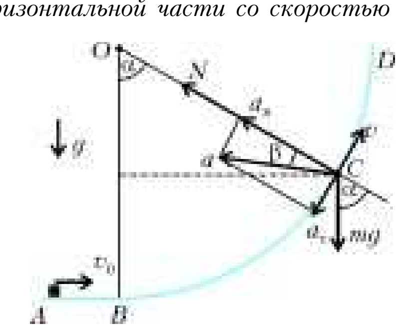


Рис. 9

Для нахождения ускорения шайбы в точке C найдем тангенциальную a_τ и нормальную a_n величины составляющих ускорения в этой точке.

На тело, движущееся в вертикальной плоскости по дуге BD, в любой точке действуют силы тяжести $m\vec{g}$ и реакции опоры $\vec{N}$. По второму закону Ньютона,

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}.$$

Перейдем к проекциям сил и ускорения на тангенциальное направление:

$$ma_\tau = -mg\sin\alpha, \text{ откуда } a_\tau = -g\sin\alpha \approx -8{,}7 \text{ м/с}^2.$$

Для определения нормальной составляющей ускорения найдем величину v скорости шайбы в точке C (поскольку $a_n = v^2/R$). Обратимся к энергетическим соображениям. Потенциальную энергию шайбы на горизонтальной части желоба будем считать равной нулю. Тогда, по закону сохранения полной механической энергии,

$$m\frac{v_0^2}{2} = m\frac{v^2}{2} + mgR(1-\cos\alpha),$$

откуда

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{v_0^2}{R} - 2g(1-\cos\alpha) = 10 \text{ м/с}^2.$$

Величину ускорения шайбы в точке C найдем по теореме Пифагора:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \approx 13{,}2 \text{ м/с}^2.$$

В точке C вектор ускорения $\vec{a}$ образует с нитью угол β такой, что

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a_\tau}{a_n} \approx 0{,}87, \text{ откуда } \beta \approx 41°.$$

Задача 8. *По гладкой проволочной винтовой линии радиусом R с шагом h, ось которой вертикальна, скользит с нулевой начальной скоростью бусинка массой m. За какое время T бусинка опустится по вертикали на H? С какой по величине F силой бусинка действует на проволоку в этот момент? Ускорение свободного падения g.*

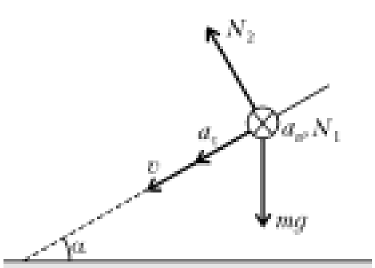


Рис. 10

На бусинку действуют силы тяжести $m\vec{g}$ и нормальной реакции $\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2$, где $\vec{N}_1$ направлена горизонтально (перпендикулярно плоскости рисунка 10), а $\vec{N}_2$ лежит в одной плоскости с векторами $m\vec{g}$ и $\vec{v}$.

Для ответа на вопросы задачи найдем касательную и нормальную составляющие ускорения. По второму закону Ньютона,

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2.$$

Переходя к проекциям сил и ускорения на касательное направление, находим

$$a_\tau = g\sin\alpha.$$

Здесь α – угол наклона вектора скорости к горизонту такой, что

$$\sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{4\pi^2R^2 + h^2}}.$$

По закону сохранения энергии,

$$m\frac{v^2}{2} = mgH, \text{ и } v = \sqrt{2gH}.$$

Касательная составляющая ускорения постоянна, начальная скорость равна нулю, следовательно, модуль вектора скорости растет со временем по линейному закону. Отсюда для искомого времени получаем

$$T = \frac{v}{a_\tau} = \frac{\sqrt{2gH}}{g\sin\alpha} = \sqrt{\frac{2H\left(4\pi^2R^2 + h^2\right)}{gh^2}}.$$

Для определения нормальной составляющей ускорения перейдем в подвижную систему отсчета, поступательно движущуюся относительно лаборатории по вертикали вниз со скоростью $v\sin\alpha$. В этой системе бусинка ускоренно движется по окружности радиусом R со скоростью $v\cos\alpha$, при этом нормальная составляющая ускорения бусинки по величине равна $a_n = (v\cos\alpha)^2/R$. Так как ускорение подвижной системы сонаправлено с $\vec{g}$, нормальная составляющая ускорения бусинки при переходе в лабораторную систему отсчета не изменится (это следует из правила сложения ускорений).

Из второго закона Ньютона находим составляющие силы, с которой проволока действует на бусинку:

$$N_1 = m\frac{(v\cos\alpha)^2}{R} = mg\frac{2H}{R}\cos^2\alpha, \quad N_2 = mg\cos\alpha,$$

$$\text{где } \cos\alpha = \frac{2\pi R}{\sqrt{4\pi^2R^2 + h^2}}.$$

По третьему закону Ньютона бусинка действует на проволоку силой $\vec{F} = -\left(\vec{N}_1 + \vec{N}_2\right)$, величина (модуль) которой равна

$$F = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = mg\frac{2\pi R}{4\pi^2R^2 + h^2}\sqrt{4\pi^2R^2 + h^2 + 16\pi^2H^2}.$$

Упражнения

1. Сферический воздушный шар радиусом R = 5 м удерживается вертикальной веревкой, его центр находится на высоте H = = 6 м над горизонтальной поверхностью. С этой поверхности бросают камень так, что он перелетает шар, почти касаясь его в верхней точке. С какой минимальной скоростью v_0 следует бросать камень и на каком расстоянии s от центра шара будет находиться в этом случае точка бросания?

Указание: ускорение свободного падения у поверхности Земли в этой и последующих задачах равно $g = 10$ м/с^2.

2. Известно, что спутник, находящийся на орбите, высота которой $h = 3{,}6 \cdot 10^4$ км, обращается вокруг Земли за одни сутки и может «висеть» над одной и той же точкой экватора. Допустим, что обсуждается вопрос о запуске на такую же высоту спутника, который будет «висеть» над Санкт-Петербургом. Какую по величине и направлению силу тяги $\vec{F}$ должен развивать двигатель спутника, чтобы удерживать его на заданной орбите? Масса спутника $m = 10^3$ кг, Санкт-Петербург находится на широте $\varphi = 60°$, радиус Земли $R = 6{,}4 \cdot 10^3$ км.

3. По гладкому столу движутся два тела с массами m_1 и m_2, соединенные легкой нерастяжимой нитью длиной L. В некоторый момент первое тело останавливается, а скорость второго равна v и перпендикулярна нити. Найдите силу T натяжения нити.

4. Однородную цепочку массой m и длиной L поместили на гладкую сферическую поверхность радиусом R = 4L так, что один ее конец закреплен на вершине сферы. Верхний конец цепочки освобождают. Найдите наибольшую величину T_{max} силы натяжения цепочки сразу после ее освобождения. *Указание*: для рассматриваемых в задаче углов считайте $\sin\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha \approx 1 - \alpha^2/2$.

5. В задаче 6 из текста статьи найдите скорость v_2, при которой ящик начнет подпрыгивать.

6. Для экономии места въезд на один из высочайших в Японии мостов устроен в виде винтовой линии, обвивающей цилиндр радиусом R. При движении по такой дороге вектор скорости автомобиля составляет угол α с горизонтальной плоскостью. Найдите направление и величину суммы сил, действующих на автомобиль массой m, движущийся по такой дороге с постоянной по величине скоростью v. Ось винтовой линии вертикальна.

Материалы вступительных экзаменов 2004 года

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ РФ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Красная Шапочка собрала ягоды для своей бабушки: чернику и землянику. Оказалось, что черники было в 3 раза больше, чем земляники. По дороге к бабушке Красная Шапочка повстречала волка. Волк съел часть земляники, а чернику есть не стал. Бабушка, поблагодарив Красную Шапочку, заметила, что земляники в корзине осталось только 10% от общего количества ягод. Сколько процентов собранной земляники съел волк?

2. Найдите все значения параметра d, при которых многочлен

$$2x^2 + x\sqrt{16d^2 - 30d - 46} + 4d^2 - 8d - 11$$

имеет корни. Среди этих значений параметра d найдите такие, для которых произведение корней многочлена принимает наибольшее и наименьшее значение.

3. Решите неравенство

$$\lg\left(4x - x^2\right) - \lg\left(x^2 - 2x\right) \geq \lg\left(x^2 - 10x + 24\right).$$

4. Решите уравнение

$$\frac{2}{1 + \sin(6x + \pi/2)} + 1 = 2\sin(x + \pi/6).$$

5. Точки M и N являются серединами боковых сторон AC и CB равнобедренного треугольника ABC. Точка L расположена на медиане BM так, что $BL : BM = 4 : 9$. Окружность с центром в точке L касается прямой MN и пересекает прямую AB в точках Q и T. Найдите периметр треугольника MNC, если $QT = 2$, $AB = 8$.

6. Решите уравнение

$$\sqrt{5}\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{x}}\sqrt{15x - 6x^2 - x^3}\right) - \sqrt{5}\sin\left(\frac{\pi}{x}\sqrt{15x^2 - 6x^3 - x^4}\right) = \sqrt{10}.$$

Вариант 2

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3\cdot 2^x + y = 13, \\ 2^{2x+1} + 3y = 35. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$12\operatorname{arctg}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \pi\left(3\pi + 5\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

3. Решите неравенство

$$\log_3\left(3^x - 1\right)\log_9\left(9^{x+2} - 6\cdot 3^{x+3} + 81\right) < 3.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{2 + 3\cos x}{2\sin x - \sqrt{5}\cos x} = 1.$$

5. Антикварный магазин приобрел два предмета, а затем продал их на общую сумму 39900 рублей, при этом прибыль составила 40%. За сколько магазин купил каждый предмет, если при продаже первого предмета прибыль составила 30%, а при продаже второго − 55%?

6. В треугольнике ABC даны длины сторон $AB = 3$, $BC = 5$ и $AC = \sqrt{19}$. Точка O является центром вписанной в треугольник окружности. Найдите угол AOC.

Вариант 3

(олимпиада-2004, все факультеты)

1. Сравните с нулем следующее число:

$$\sqrt{\frac{23 + \sqrt{205}}{2}} - \sqrt{\frac{23 - \sqrt{205}}{2}} - \sqrt{5}.$$

2. Решите уравнение

$$3^{\frac{2x+10}{6x-15}} - 4\cdot 3^{\frac{10x-40}{6x-15}} = 5.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{\left|x^2 + 14x + 47\right| - 1} = |x + 7| - 1.$$

4. Найдите все решения уравнения

$$\operatorname{tg} 12x - \operatorname{tg} 4x = \frac{1}{\sin 16x},$$

принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$.

5. Вокруг равнобедренной трапеции $ABCD$ с большим основанием AD описана окружность радиуса 4. Биссектриса угла B проходит через центр описанной окружности и пересекает ее в точке E. Найдите площадь треугольника ACE, если известно, что диагональ трапеции делит площадь трапеции в отношении 3 : 2.

6. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 4\sin^2 x + 2\sin x\cdot\lg\left(y^2 + 9\right) + \lg^2\left(y^2 + 9\right) + \\ + 7\sin x + 2\lg\left(y^2 + 9\right) = -\frac{1}{2}, \\ 2\cos^2 x + \sin x\cdot\lg\left(y^2 + 9\right) + 3\sin x + \\ + 3\lg\left(y^2 + 9\right) = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

7. Имеется два сосуда объемом 9 л и 15 л. В первом из них находится 8 л 2%-го раствора соли, во втором – 14 л 3%-го раствора соли. Допускается переливать раствор из одного сосуда в другой, наполняя последний до краев. Докажите, что при любом числе переливаний ни в одном из сосудов не получится раствора с содержанием соли 2,5%.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Камень, брошенный с поверхности земли под некоторым углом к горизонту, достиг наибольшей высоты $H = 20$ м. Найдите время подъема t в высшую точку траектории. Считать $g = 10$ м/с^2.

2. Луна движется вокруг Земли с периодом $T = 27{,}3$ суток по орбите, которую можно считать круговой. Радиус Земли $R_З = 6400$ км. Ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 9{,}8$ м/с^2. Определите по этим данным радиус лунной орбиты R.

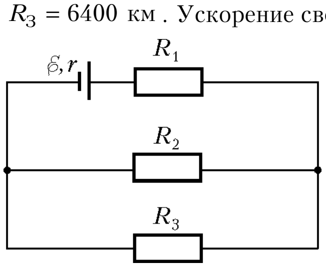


Рис. 1

3. Электрическая цепь состоит из источника с ЭДС $\mathcal{E} = 150$ В и внутренним сопротивлением $r = 8$ Ом и трех резисторов сопротивлениями $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 30$ Ом (рис.1). Найдите силу тока I_3, текущего через резистор сопротивлением R_3.

4. Газ массой $m = 0{,}012$ кг при температуре $T_1 = 450$ К занимает объем $V_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ м^3. Определите температуру T_2, при которой плотность этого газа будет равна $\rho = 6$ кг/м^3, если количество вещества и давление останутся неизменными.

5. Расстояние от предмета до линзы на $l = 3$ см отличается от расстояния между линзой и действительным изображением этого предмета, создаваемым линзой с увеличением $\Gamma = 2$. Определите фокусное расстояние линзы F.

Вариант 2

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Камень, брошенный с поверхности земли с начальной скоростью v_0 под некоторым углом к горизонту, достиг наибольшей высоты H над Землей. Определите угол α, под которым была направлена скорость камня к горизонту в момент броска.

2. Пуля массой $M_1 = 0{,}01$ кг, летевшая горизонтально со скоростью $v_1 = 600$ м/с, ударилась в подвешенный на длинной нити деревянный брусок массой $M_2 = 0{,}5$ кг и застряла в нем, углубившись на $s = 10$ см. Найдите силу F сопротивления дерева движению пули. Силу сопротивления считать постоянной; время взаимодействия мало.

3. К батарее с ЭДС $\mathcal{E}$ последовательно подключены амперметр и вольтметр. Сопротивления приборов и внутреннее сопротивление батареи неизвестны. Если параллельно вольтметру подключить резистор, сопротивление которого также неизвестно, то показание амперметра вдвое увеличивается, а показание вольтметра вдвое уменьшается по сравнению с первоначальными. Найдите показание вольтметра U после подключения сопротивления.

4. Плотность первого газа равна $\rho_1 = 1{,}6$ кг/м^3 при давлении $p_1 = 4 \cdot 10^5$ Па. Второй газ массой $m_2 = 2$ кг занимает объем $V_2 = 10$ м^3 при давлении $p_2 = 2 \cdot 10^5$ Па. Во сколько раз η средняя квадратичная скорость молекул второго газа больше, чем первого?

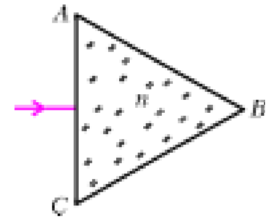


Рис. 2

5. Основание стеклянной прямой призмы имеет форму равностороннего треугольника ABC (рис.2). Луч света падает из воздуха нормально на одну из боковых граней призмы. Найдите угол φ между лучом, выходящим из призмы, и продолжением падающего луча. Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$.

Вариант 3

(олимпиада-2004, все факультеты)

1. Катер, переправляясь через реку шириной $L = 800$ м, двигался со скоростью $v_1 = 4$ м/с перпендикулярно течению реки в системе отсчета, связанной с водой. На какое расстояние s будет снесен катер течением, если скорость течения реки $v_2 = 1{,}5$ м/с?

2. К бруску массой m, лежащему на горизонтальной шероховатой плоскости, приложена сила, направленная вверх под углом α к горизонту. При каком значении силы F движение бруска будет равномерным? Коэффициент трения скольжения между бруском и плоскостью μ.

3. Монета скользит по наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α и имеет в точке C скорость v_0 (рис.3). Через некоторое время монета оказалась в точке D наклонной плоскости, пройдя путь s и поднявшись по вертикали на H. Коэффициент трения скольжения между монетой и наклонной плоскостью μ. Найдите скорость монеты v в точке D.

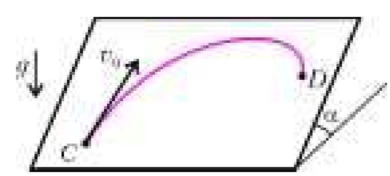


Рис. 3

4. Два одинаковых теплоизолированных сосуда соединены тонкой трубкой. Система наполнена газом под давлением p_0. Во сколько раз n нужно изменить температуру газа в одном из сосудов, чтобы давление во всей системе стало p_1? Начальные температуры газа в обоих сосудах одинаковые.

5. Какое количество теплоты Q выделится в схеме, показанной на рисунке 4, после одновременного переключения обоих ключей K из положения *1* в положение *2*? ЭДС источников тока $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, емкость каждого конденсатора C.

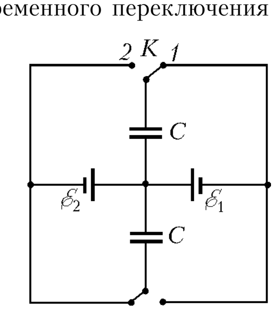


Рис. 4

6. С помощью рассеивающей линзы получено изображение спички, расположенной перпендикулярно главной оптической оси, с увеличением $\Gamma_1 = 1/2$. По другую сторону линзы на расстоянии $a = 9$ см от нее перпендикулярно главной оптической оси установили плоское зеркало. Изображение спички в системе линза–зеркало получилось с увеличением $\Gamma_2 = 1/4$. Определите фокусное расстояние линзы F.

Публикацию подготовили А.Леденев, А.Пичкур

Московский государственный институт электронной техники (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\left|2 - x - 2x^2\right| = 0,25^{-1}.$$

2. Найдите $\cos 2\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{4}$.

3. Решите уравнение

$$4^{1+\log_{x^2} 4} - 2^{\log_x 4} = 12.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{2x-6}{2x^2+3x-9} \ge 1.$$

5. Решите уравнение

$$1 - x - \sqrt{9 - 2x - x^2} = 0.$$

6. Куб с диагональю основания, равной 6, вписан в конус так, что основание куба лежит на основании конуса. Найдите объем конуса, если его высота равна $4\sqrt{2}$.

7. Решите уравнение

$$\cos(4\sin x) = \cos(4\cos x).$$

8. Из пункта A по направлению к пункту B выехал мотоциклист. Одновременно с ним из пункта B в том же направлении выехал велосипедист, а навстречу мотоциклисту – автомобиль. Автомобиль встретил мотоциклиста в пункте C, доехал до пункта A и сразу же повернул назад, вернувшись в пункт B в тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста. Найдите отношение скоростей мотоциклиста и велосипедиста, если известно, что расстояние от пункта C до пункта B в 1,5 раза больше, чем от пункта C до пункта A.

9. Найдите сумму корней уравнения

$$\cos\left(\frac{x+3\pi}{4}\right)\cdot\left(\operatorname{ctg}^2\left(\frac{x-2\pi}{3}\right)+4\right) = 0,$$

принадлежащих промежутку $[\pi; 80\pi]$.

10. Решите уравнение

$$\left(x^2+4x-2\right)^2 + 4\left(x^2+4x-2\right) - 2 = x.$$

11. Две окружности радиусов 2 и 3 проходят через вершину A треугольника ABC и касаются стороны BC в точках B и C соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$x^3 - 5x\sqrt{x} = 6.$$

2. Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 25^{2x}\right)^3 = 0,04.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{x-1}{x^2-7x+10} < -1.$$

4. Сумма четвертого и десятого членов арифметической прогрессии равна 14, а сумма квадратов шестого и восьмого ее членов равна 116. Найдите произведение третьего и одиннадцатого членов этой прогрессии.

5. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 3, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 60°. Найдите объем пирамиды.

6. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \sin 2x \sin x.$$

7. Решите неравенство

$$\sqrt{-2x^2-7x-3} \ge x^2+2x-3.$$

8. Решите уравнение

$$\log_2(-\sin x) + \log_2(\cos x) = -2.$$

9. По круговому маршруту из одного и того же места одновременно в разных направлениях выехали велосипедист и мотоциклист. До момента их первой встречи расстояние в 5 км, измеряемое по меньшей из дуг маршрута, было между ними дважды: в первый раз, когда велосипедист проехал одну двенадцатую часть маршрута, второй раз, когда мотоциклист проехал половину маршрута. Найдите скорость велосипедиста, если мотоциклист ехал со скоростью 40 км/ч.

10. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса 2. Найдите сторону AB, если $AD = 2$, $\angle BCD = 105°$.

11. При каких значениях a для любого b найдется хотя бы одно c такое, что система уравнений

$$\begin{cases} bx + y = ac^2, \\ 2x + (b+1)y = ac + 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Два камня брошены из одной точки под различными углами к горизонту со скоростями v_1 и v_2, как показано на рисунке 1. Во сколько раз отличаются горизонтальные дальности их полета? Сопротивлением воздуха пренебречь.

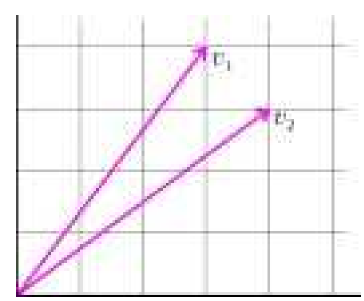


Рис. 1

2. Каким должен быть коэффициент трения между бруском и тележкой, чтобы система, изображенная на рисунке 2, оставалась в покое? Нить параллельна наклонной плоскости и составляет угол α = = 30° с горизонтом. Масса бруска m_1 = 2 кг, масса тележки m_2 = 1 кг. Трением между тележкой и наклонной плоскостью пренебречь.

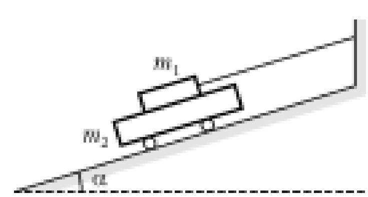


Рис. 2

3. Две шайбы в результате столкновения на гладком горизонтальном столе разлетелись в противоположных направлениях, как показано на рисунке 3. Во сколько раз отличались скорости шайб перед столкновением, если их массы m_1 = 100 г и m_2 = = 200 г?

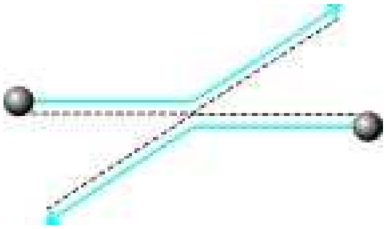


Рис. 3

4. В баллон, содержащий воздух с относительной влажностью φ, закачали некоторое количество сухого воздуха. Как изменилась при этом относительная влажность воздуха в сосуде при неизменной температуре? Ответ обоснуйте.

5. На рисунке 4 приведен график зависимости объема газа V от его температуры T в циклическом процессе *1–2–3–1*. а) Изобразите график зависимости давления газа p от его объема V в данном процессе. б) Считая газ одноатомным, определите КПД данного цикла, если при изобарном расширении газ совершает работу A_1, а при изотермическом сжатии над газом совершается работа A_2.

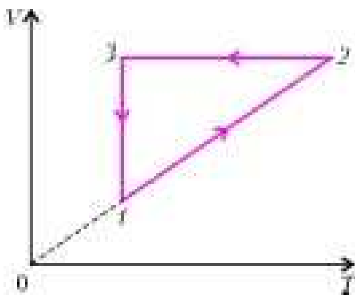


Рис. 4

6. Незаряженные конденсаторы емкостями C и $2C$, источник напряжения U и ключ соединили в электрическую цепь, изображенную на рисунке 5. Сначала ключ находится в положении *1*. а) Определите напряжение на конденсаторе емкостью C. б) Определите напряжение, которое установится на конденсаторе емкостью C после того, как ключ переведут в положение *2*, а затем через некоторое время (достаточное для перезарядки конденсатора) вновь вернут в положение *1*.

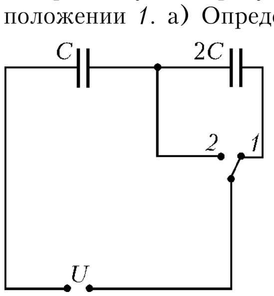


Рис. 5

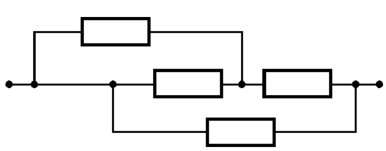


Рис. 6

7. Определите сопротивление цепи, изображенной на рисунке 6. Сопротивление каждого резистора R = 50 Ом.

8. Треугольный проволочный контур помещен в однородное магнитное поле с индукцией, равной B = 0,01 Тл и параллельной стороне c треугольника (рис.7). При протекании в контуре тока I = 1 А на проводник a со стороны магнитного поля действует сила F_a = 1 мН. Определите: а) высоту h треугольника; б) силы F_b и F_c, действующие со стороны магнитного поля на проводники b и c. На рисунке укажите направления этих сил.

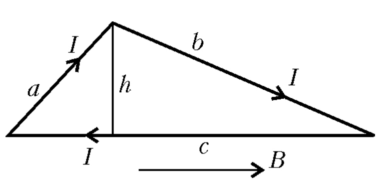


Рис. 7

9. Преломленная на границе раздела двух прозрачных сред световая волна распространяется со скоростью в k = 1,4 раза большей, чем отраженная волна. Определите предельный угол полного внутреннего отражения для данной границы.

10. При исследовании фотоэффекта металлический катод облучают светом с длиной волны λ = 0,4 мкм. При разности потенциалов между катодом и анодом $U_1 = 1{,}0$ В ток фотоэлектронов регистрируется, а при разности потенциалов U_2 = 1,4 В ток в цепи отсутствует. По результатам этих измерений укажите, в каком диапазоне $A_1 < A < A_2$ лежит значение работы выхода A для материала катода. Постоянная Планка $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, элементарный заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Вариант 2

(олимпиада-2004)

1. Для тренировки космонавтов самолет, летящий горизонтально, начинает снижаться по некоторой траектории, а затем вновь выходит на горизонтальный полет. На какой максимальный непрерывный промежуток времени возможно создание в самолете невесомости, если во время полета ускорение космонавтов относительно земли не должно превышать $a = 2g = 20$ м/с^2, а перепад высот при полете составляет Δh = 6750 м?

2. Анатолий и Борис несут бревно, медленно поднимаясь по лестнице. Анатолий идет первым, прикладывая к верхнему концу бревна минимально возможную для его удержания силу. Во сколько раз большую силу должен прикладывать Борис к нижнему концу бревна? Бревно однородное и составляет угол α = 30° с горизонтом.

3. Шайба массой m_1, двигаясь поступательно по гладкой горизонтальной поверхности, налетает на неподвижную шайбу массой m_2 и после удара скользит с вдвое меньшей скоростью в направлении, перпендикулярном первоначальному. При каких значениях отношения m_1/m_2 возможно такое движение? Ответ дайте в виде неравенства.

4. Температура идеального газа t = 27 °С. Во сколько раз уменьшится плотность газа при изобарном нагреве на Δt = = 30 °С?

5. На рисунке 8 изображена одна из линий напряженности электрического поля двух неподвижных точечных зарядов q_1 и q_2. Известно, что q_1 = 1 нКл. Определите q_2.

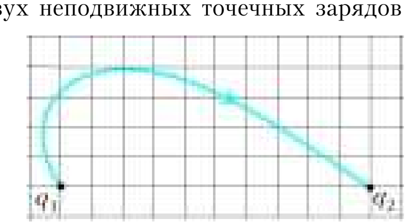


Рис. 8

6. На длинный соленоид вблизи его середины намотана короткая катушка из N = 100 витков радиусом r = 2 см, выводы которой подключены к конденсатору. По обмотке соленоида течет постоянный ток, создающий внутри него практически однородное магнитное поле с индукцией, параллельной оси соленоида. После быстрого выключения тока напряжение на конденсаторе начинает периодически меняться с частотой ω = = 10^4 с$^{-1}$ и амплитудой U_m = = 10 В. Определите индукцию магнитного поля B. Сопротивлением катушки пренебречь.

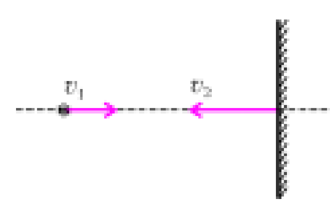


Рис. 9

7. Точечный источник света и плоское зеркало движутся навстречу друг к другу со скоростями, перпендикулярными поверхности зеркала и равными v_1 = 5 см/с и v_2 = = 10 см/с соответственно (рис.9). Определите скорость движения изображения источника. Все скорости определены относительно неподвижной системы отсчета.

Публикацию подготовили А.Берестов, И.Горбатый, С.Кальней, А.Клюшин, С.Куклин, Т.Соколова, Ю.Тыжнов

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Укажите все значения n, при которых сумма n последовательных членов арифметической прогрессии 31, 28, 25,…, начиная с первого, не меньше 84.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{2}\cos x + \sqrt{1+\sin x} = 0 .$$

3. Решите уравнение

$$\log_4(10x - 34) = 1 + \log_2(10 - x) .$$

4. Решите неравенство

$$\frac{x^2-9}{x^3+27} < \frac{2}{2x-9} .$$

5. Найдите угол между касательными к графику функции $y = x^2/12$, проходящими через точку $M\left(2\sqrt{3}; -3\right)$.

6. Определите все значения a, при которых уравнение $(x+2)^2 = a\left(2|x|+1\right)$ имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений a.

7. Основанием пирамиды $TABC$ служит равносторонний треугольник ABC, а ее высота совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через медиану TD боковой грани TAB и параллельной медиане AM боковой грани TAC, если расстояние между AM и секущей плоскостью равно 1, а сторона основания пирамиды равна $\sqrt{14}$.

Вариант 2

1. Два поезда вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B. Встретившись на промежуточной станции, поезда продолжили движение, и первый из них прибыл в пункт B через 4 ч, а второй в пункт A – через 9 ч после встречи. За какое время первый поезд проходит расстояние от A до B?

2. Решите уравнение $\sqrt{2}\cos^2 x = \sin x$. Найдите его корни, лежащие в промежутке $[-3\pi/2; \pi/2]$.

3. Решите уравнение

$$2^{-x} = 1 + 3\cdot 2^{2+x} .$$

4. Решите неравенство

$$1 + \log_x(9 - 8x) < 0 .$$

5. Найдите площадь треугольника, одна сторона которого лежит на касательной к графику функции $y = 0{,}25x^2 - x + 4$ в точке с абсциссой $x_0 = 4$, а две стороны – на касательных к этому графику, проходящих через точку $A(5; 3)$.

6. Укажите все значения параметра p, при которых система уравнений

$$y^2 - 6y + 10 = 5\frac{|x|}{x}, \quad y + 1 - p = (x-p)^2$$

имеет ровно два различных решения. Найдите эти решения при указанных p.

7. Найдите площадь сечения правильной четырехугольной пирамиды $TABCD$ с высотой, равной 4, и стороной основания, равной 8, плоскостью, параллельной апофеме TL боковой грани TBC и медиане AM боковой грани TAB и проходящей через середину бокового ребра TA.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Напишите формулировку закона преломления света. Что называется предельным углом полного отражения? Чему равен этот угол? Ответ поясните рисунком.

2. Третья часть однородной линейки, имеющей массу m и длину L, выступает за край стола (рис.1). Найдите минимальную работу, которую необходимо совершить, чтобы переместить всю линейку на стол, сдвигая ее силой, направленной вдоль длинной стороны. Коэффициент трения между линейкой и столом μ.

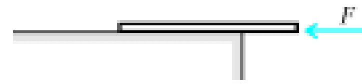


Рис. 1

3. Конденсатор емкостью C_1 зарядили до напряжения $U_1 = 500$ В. При параллельном подключении этого конденсатора к незаряженному конденсатору емкостью $C_2 = 4$ мкФ вольтметр, подключенный к батарее конденсаторов, показал напряжение $U_2 = 100$ В. Найдите емкость C_1.

4. При фотоэффекте максимальный импульс, передаваемый поверхности вольфрамовой пластинки при вылете каждого электрона, равен $p = 3{,}45\cdot 10^{-25}$ кг · м/с. Найдите энергию квантов применяемого облучения. Работа выхода для вольфрама равна $A = 4{,}5$ эВ.

5. Сосуд объемом $V = 20$ дм^3 разделен тонкой подвижной перегородкой на две части. В левую часть помещена вода в количестве $\nu_в = 1$ моль, в правую – азот в количестве $\nu_а = 0{,}5$ моль. Температура поддерживается равной $t = 100$ °С. Определите объем правой части сосуда.

6. По двум гладким медным шинам, установленным под углом α к горизонту, скользит под действием силы тяжести медная перемычка массой m (рис.2). Шины замкнуты на сопротивление R. Расстояние между шинами L. Система находится в однородном магнитном поле с индукцией B, перпендикулярной плоскости, в которой перемещается перемычка. Сопротивления шин, перемычки и скользящих контактов, а также самоиндукция контура пренебрежимо малы. Найдите установившуюся скорость перемычки.

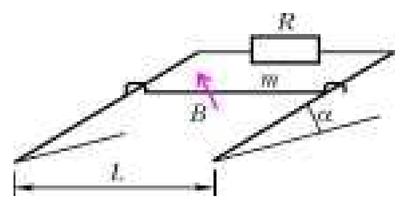


Рис. 2

7. Стержень длиной L совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O (рис.3). Середина стержня подвешена на пружине жесткостью k. На стержне закреплены два маленьких груза массами m и $2m$, положения которых показаны на рисунке. Найдите период колебаний стержня, если в положении равновесия он расположен горизонтально. Массами пружины, стержня, а также силами трения пренебречь.

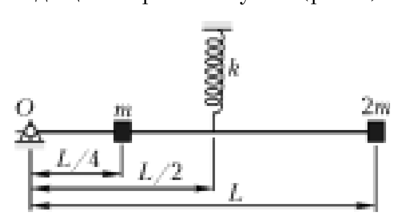


Рис. 3

Вариант 2

1. Напишите формулировку закона всемирного тяготения и его аналитическое выражение. Укажите единицы измерения входящих в него физических величин. Напишите формулу для вычисления ускорения свободного падения тела,

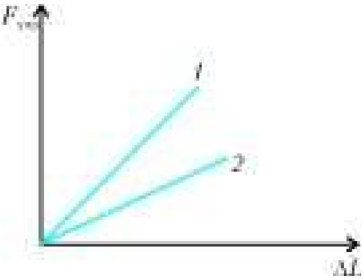


Рис. 4

удаленного от поверхности Земли на расстояние, равное ее радиусу.

2. Два пружинных маятника имеют одинаковые массы грузов. На рисунке 4 показана зависимость сил упругости пружин этих маятников $F_{упр}$ от растяжения ΔL. Период колебаний какого маятника больше?

3. В цилиндре под поршнем находится идеальный газ. Объем, температуру и давление газа можно изменять. Изменения состояния газа при некотором круговом процессе *1–2–3–1* показаны на графике зависимости объема газа от абсолютной температуры (рис.5). Изобразите этот цикл на графике зависимости давления газа от объема. Укажите, на каких участках графика газ получает тепло извне.

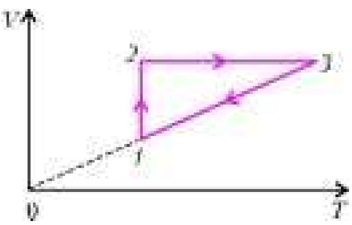


Рис. 5

4. Чему равно отношение количества распавшихся ядер некоторого элемента к начальному количеству радиоактивных ядер этого элемента за время, равное половине периода его полураспада?

5. Небольшое тело начинает соскальзывать без начальной скорости из верхней точки неподвижной полусферы радиусом R (рис.6). На какую высоту оно подскочит после удара о горизонтальную поверхность, на которой находится полусфера? Удар считать абсолютно упругим, полусфера жестко закреплена на плоскости.

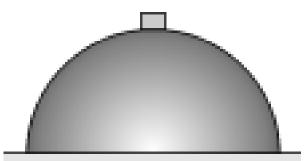


Рис. 6

6. На тонком закрепленном кольце радиусом R равномерно распределен положительный заряд q. Какова наименьшая скорость, которую нужно сообщить находящейся в центре кольца частице массой m с отрицательным зарядом $-q$, равным по модулю заряду кольца, чтобы она могла удалиться от кольца в бесконечность?

7. Цилиндрический сосуд с жидкостью плотностью ρ вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси OO_1 (рис.7). Внутри сосуда к оси в точке A прикреплен тонкий горизонтальный стержень AB, по которому без трения может скользить муфта в виде шара радиусом r. Шар связан с концом стержня в точке A пружиной жесткостью k, длина которой в нерастянутом состоянии L_0. Определите расстояние центра шара от оси вращения, если плотность материала шара в четыре раза больше плотности жидкости.

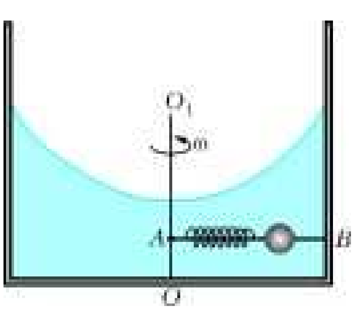


Рис. 7

Публикацию подготовили
Л.Паршев, Ю.Струков

Московский инженерно-физический институт

(олимпиада Министерства по Атомной энергии РФ)

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$3\cos 2x - \left(2 + 3\sqrt{3}\right)\cos x + 3 + \sqrt{3} = 0 .$$

2. Решите уравнение

$$\log_2\left((x-2)(x-4)\right) + \log_2\frac{x-2}{x-4} + \log_2\left(\frac{x-7}{13}\right)^2 = 2 .$$

3. На кольцевой автодороге общей протяженностью 80 км курсируют две патрульные автомашины с постоянными скоростями. Машины выезжают на дежурство с одного поста: первая – в 0^{00} часов, вторая через 10 минут после первой в том же направлении, а заканчивают дежурство одновременно в 9^{00} утра того же дня. Скорость первой автомашины 60 км/ч, а второй – 80 км/ч. Найдите промежутки времени, когда автомашины находятся друг от друга на расстоянии, не превосходящем 1 км. (Здесь расстояние между машинами отсчитывается по автодороге.)

4. Решите при всех вещественных значениях параметра a систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} \le 0, \\ (x-3a)(x-a+1) \le 0, \\ \dfrac{2x-3}{x}\sqrt{\dfrac{\sin\pi(x+a)}{\sin\pi(x-a)}} \le 0. \end{cases}$$

5. Основанием пирамиды $SABC$ является ΔABC, стороны которого $AC = \sqrt{13}$, $BC = 7$, а высота основания, проведенная из вершины A, равна 2. Проекция вершины S на основание совпадает с точкой A, угол наклона бокового ребра SB к плоскости основания равен $\operatorname{arctg} 0,5$. Вычислите объем пирамиды. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину A и перпендикулярной ребру SB.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$4^x - 8\cdot 2^x + 15 = 0 .$$

2. Решите уравнение

$$|\cos x| = -2\sin x .$$

3. Имеется два водных раствора серной кислоты объемом 10 л и 15 л. При их смешивании получается раствор, в котором 78 % воды. Если же смешать 5 л первого раствора, 10 л второго раствора, а затем испарить 2,5 л воды, то получится раствор с отношением объемов воды и кислоты 19:6. Найдите процентное содержание кислоты в растворах.

4. Найдите сумму положительных корней уравнения

$$x^4 - 2\left(a^2 + 10a + 28\right)x^2 + 4 = 0 .$$

При каких значениях параметра a, удовлетворяющих неравенству $(a+7)(-3-a) \ge 0$, эта сумма принимает наибольшее значение?

5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ длина ребра основания равна 8, а боковая грань SBC наклонена к плоскости основания под углом $\beta = \operatorname{arctg} 2\sqrt{11}$. Точки D и

E взяты на боковом ребре SB и ребре основания AB соответственно так, что $BD : BE = 2$, а точка F лежит на ребре SA, причем $AF : FS = 2 : 1$. Чему равна площадь треугольника ABF? Найдите объем пирамиды $FEDC$ при условии, что он максимально возможный.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. Два точечных заряда q и $-q$ расположены в вакууме на расстоянии l друг от друга. Найдите напряженность электрического поля в точке, расположенной на прямой, проходящей через заряды, на расстояниях $3l/2$ от заряда q и $l/2$ от заряда $-q$.

2. Тело, двигаясь равноускоренно из состояния покоя, прошло расстояние s за время τ. Какую скорость имело тело в тот момент, когда оно прошло расстояние s/n?

3. В вертикальном цилиндрическом сосуде под массивным поршнем находится идеальный газ. Чтобы уменьшить объем газа в $n = 2$ раза, на поршень надо положить груз массой $m = 1$ кг. Какой еще груз надо положить на поршень, чтобы уменьшить объем газа еще в $k = 3$ раза? Температура газа поддерживается постоянной.

4. На передний край тележки массой M, движущейся со скоростью v_0 по гладкой горизонтальной поверхности, кладут брусок массой m (рис.1). Начальная скорость бруска относительно земли равна нулю. Какой должна быть длина тележки, чтобы брусок в дальнейшем не упал с нее? Коэффициент трения между бруском и тележкой μ.

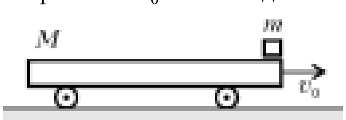


Рис. 1

5. Вырезанный из листа фанеры прямоугольный треугольник с меньшим острым углом α расположен на шероховатой горизонтальной поверхности (рис.2). Чтобы повернуть треугольник относительно закрепленной вертикальной оси, проходящей через вершину угла α, к треугольнику необходимо приложить минимальную горизонтальную силу F_1, а чтобы повернуть его относительно закрепленной вертикальной оси, проходящей через вершину другого острого угла – минимальную горизонтальную силу F_2. Какую минимальную горизонтальную силу необходимо приложить к треугольнику, чтобы повернуть его относительно закрепленной вертикальной оси, проходящей через вершину прямого угла?

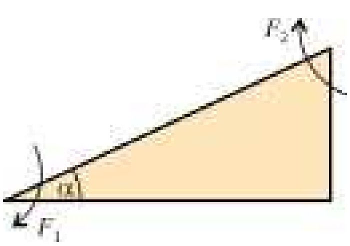


Рис. 2

Вариант 2

1. Точечный предмет расположили перед передним фокусом тонкой собирающей линзы на расстоянии $l = 10$ см от него на главной оптической оси (рис.3). Фокусное расстояние линзы $F = 20$ см. На каком расстоянии от заднего фокуса линзы находится изображение предмета?

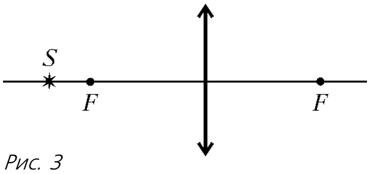


Рис. 3

2. Баллон, содержащий некоторое количество кислорода, разрывается при испытаниях при температуре $t_1 = 727\,°\mathrm{C}$. Такой же баллон, содержащий смесь вдвое меньшего количества кислорода и вчетверо меньшего (по массе) количества неизвестного газа, разрывается при температуре $t_2 = 127\,°\mathrm{C}$. Найдите молярную массу неизвестного газа. Молярная масса кислорода $M_к = 32$ г/моль.

3. Три металлические концентрические сферы имеют радиусы R, $2R$ и $3R$. Меньшую сферу заряжают зарядом Q, большую – зарядом $3Q$, а среднюю заземляют с помощью длинного и тонкого проводника. Найдите потенциал меньшей сферы. Емкостью проводника пренебречь.

4. Тело, находящееся на наклонной плоскости с углом наклона α, бросили под углом β к горизонту с начальной скоростью v_0 (рис.4). Найдите расстояние между точкой бросания и точкой падения тела на плоскость.

5. Тонкая трубка изогнута в виде дуги окружности AB, опирающейся на угол α ($\alpha < \pi/2$), и закреплена в вертикальной плоскости так, как показано на рисунке 5: точка O – центр окружности, радиус OA перпендикулярен поверхности земли. Внутри трубки удерживают гибкую нерастяжимую веревку. Длина веревки равна длине трубки. Веревку отпускают, и она начинает двигаться. Найдите ускорение веревки в этот момент. Трение отсутствует.

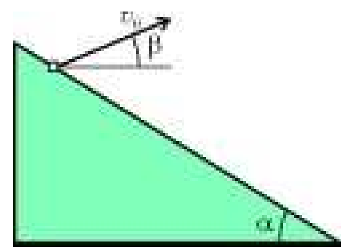


Рис. 4

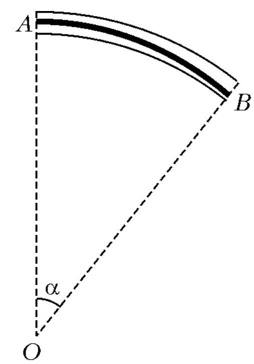


Рис. 5

Публикацию подготовили С.Муравьев, О.Нагорнов

Новосибирский государственный университет

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Физический факультет и факультет информационных технологий

Каждый вариант состоял из задач трех типов. Первые три задачи – расчетные, различной степени трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения ориентироваться в непривычной или усложненной ситуации. Четвертая задача – задача-оценка. Для ее решения необходимо разобраться в рассматриваемом физическом явлении, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивается, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения. Пятая задача – задача-демонстрация, при решении которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Среди различных факторов, влияющих на процесс, необходимо выделить главный.

Вариант 1

1. Тело толкнули вверх вдоль шероховатой наклонной плоскости. При подъеме величина ускорения была равна a_1,

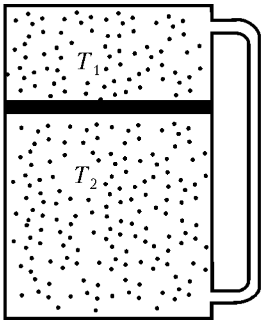


Рис. 1

при спуске – a_2. Найдите угол наклона плоскости к горизонтали. Ускорение свободного падения равно g.

2. Вертикально стоящий цилиндр с газом разделен поршнем массой m и сечением S на два отсека (рис.1). Под действием собственного веса поршень медленно опускается. При этом давления в отсеках остаются неизменными, что обеспечивается перетеканием газа по трубке пренебрежимо малого объема. Температуры газа в отсеках поддерживаются постоянными: выше поршня T_1, ниже T_2 ($T_2 > T_1$). Найдите давления газа в отсеках. Ускорение свободного падения равно g, трением поршня о стенки пренебречь.

3. Три параллельные проводящие пластины площадью S каждая, подключены к источнику с напряжением U, как показано на рисунке 2. Расстояния от внешних пластин до средней равны d_1 и d_2 соответственно. Найдите электрическую силу, действующую на среднюю пластину, если расстояния между пластинами много меньше их размеров.

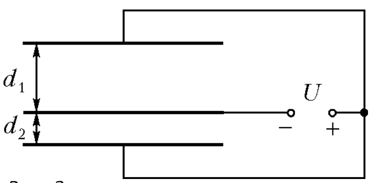


Рис. 2

4. Оцените среднюю мощность, развиваемую силой давления пороховых газов, действующей на пулю при выстреле.

5. Сосуд со сливным отверстием вблизи дна заполняется водой (рис.3). Из отверстия начинает бить струя воды, вначале попадающая в горловину стоящего на столе сосуда. По мере вытекания струя перестает попадать в горловину, и колба остается незаполненной. Если сосуд с водой закрыть пробкой с трубкой, открытой сверху и погруженной снизу в воду, то струя не уходит от горловины и наполняет колбу доверху. Объясните демонстрируемое явление.

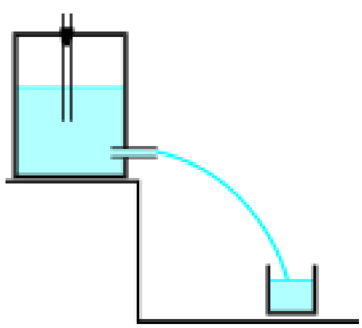


Рис. 3

Вариант 2

1. В цилиндре сечением S под невесомым поршнем находится воздух и резиновый шарик объемом V с давлением воздуха в нем p. На сколько поднимется поршень, если шарик лопнет? Трения нет, атмосферное давление равно p_0, температура остается неизменной.

2. По плоскости с углом наклона α движется с постоянной скоростью тело, которое тянут вдоль плоскости горизонтальной силой F (рис.4). При этом скорость тела направлена под углом β к направлению силы. Найдите массу тела и коэффициент трения между телом и плоскостью. Ускорение свободного падения равно g.

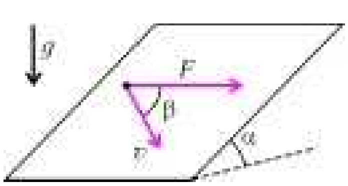


Рис. 4

3. Две металлические пластины, массой m каждая, образуют разомкнутый плоский конденсатор емкостью C, заряженный до напряжения U (рис.5). Сначала отпускают верхнюю пластину, а в момент, когда расстояние между пластинами сокращается от начального D до d, отпускают и нижнюю. Найдите скорость пластин после абсолютно неупругого удара. Сила тяжести отсутствует.

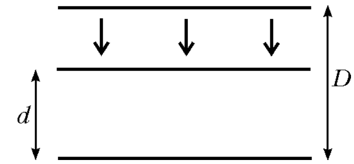


Рис. 5

4. Спортсмен подпрыгивает со скакалкой так, что за один прыжок происходят два полных оборота скакалки. Оцените среднюю скорость середины шнура скакалки.

5. См. задачу 5 варианта 1.

Вариант 3

1. На трех сопротивлениях (1, 2 и 3) при подаче на них одного и того же напряжения выделяются мощности P, $P/2$ и $P/3$ соответственно. Какая мощность выделится при подаче этого же напряжения на цепь, в которой сопротивления соединены по указанной на рисунке 6 схеме?

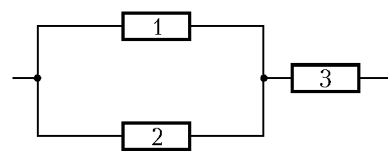


Рис. 6

2. На расстоянии h от середины спицы и на расстоянии R от ее концов закреплен заряд q (рис.7). На левый конец спицы надевают бусинку с таким же зарядом q и массой m. Бусинку толкают вдоль спицы. Найдите начальную скорость бусинки v, если ее скорость при прохождении середины спицы равна v_1, а при достижении правого конца равна v_2. Коэффициент трения всюду вдоль спицы один и тот же.

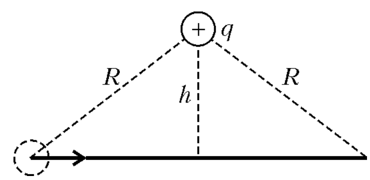


Рис. 7

3. К верхнему концу стержня, закрепленного на широкой подставке, привязан на нерастяжимой нити груз массой m (рис.8). Масса подставки со стержнем M. Нить с грузом отклонили на 90° от вертикали и отпустили. Найдите коэффициент трения между подставкой и горизонтальной поверхностью стола, если подставка начала сдвигаться в тот момент, когда нить образует угол α с вертикалью.

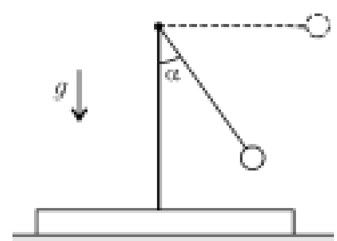


Рис. 8

4. Оцените силу давления каскадера на мотоцикл при приземлении после прыжка на мотоцикле через автобус.

5. Демонстратор держится за провод, подсоединенный к электроскопу, и подпрыгивает. При этом стрелка электроскопа отклоняется и возвращается назад после приземления. Объясните наблюдаемое явление.

Публикацию подготовили
Е.Балдин, И.Воробьев, Г.Меледин

Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Для каждого натурального числа n определена функция

$$f_n(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^4-2nx^2+n^2}}.$$

а) Найдите области определения этих функций.

б) Нарисуйте график функции $g(x)=\left|f_4(x)\right|$.

в) При каких значениях c уравнение $\left|g(x)-3\right|=c$ имеет не менее двух действительных корней? (Укажите количество действительных корней в зависимости от разных значений c.)

2. Решите неравенство

$$\frac{\log_7 12}{\log_7\left(x^2-9\right)}<\frac{\log_5\left(x^2+8x+12\right)}{\log_5\left(x^2-9\right)}.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$2-6^{1/2+\log_6\sin x}=2^{1/2+\log_2(-\cos x)}.$$

4. Длина средней линии равнобочной трапеции равна 5 см. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия делит трапецию на две части, отношение площадей которых равно 7 : 13. Найдите длину высоты трапеции.

5. Дан тетраэдр $ABCD$. Треугольник ABC прямоугольный ($\angle C=90°$). Прямая CD перпендикулярна плоскости этого треугольника. Найдите расстояние от точки D до прямой AB и расстояние от точки A до плоскости BCD, если $CD=9$ см, $BC=24$ см, $\angle ABC=30°$.

Вариант 2

1. Для каждого натурального числа n определена функция

$$f_n(x)=\frac{n+x}{n-\sqrt{-nx}}.$$

а) Найдите области определения этих функций.

б) Нарисуйте график функции $g(x)$, если

$$g(x)=f_4\left(-x^2\right).$$

в) При каких значениях a уравнение $\left|g(x)-3\right|=a$ имеет один действительный корень?

2. Решите неравенство

$$\log_4(x+1)+8\log_{x+1}2-\log_2 8>0{,}5\log_{\sqrt{3}}3.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{x+\sin x}=\sqrt{x-\sin 2x}.$$

4. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной 4 см проведена медиана к боковой стороне. Найдите длину основания треугольника, если длина медианы равна 3 см.

5. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом 60°. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Определите объем пирамиды, если радиус вписанного в ромб круга равен $\sqrt{3}$.

Публикацию подготовили
Н.Подходова, О.Корсакова

Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского (МАТИ)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$|2x-3|=x+5.$$

2. Решите уравнение

$$3\sin 2x+7=7\sin x+7\cos x.$$

3. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x,y)=8x^2+2y^2-4xy+4x+2y+3.$$

4. Решите неравенство

$$(49x)^{3\left(\log_{x^3}2+1\right)}\le 49x.$$

5. В треугольнике ABC длины сторон AB и AC относятся как 7 : 5. Медиана BD и биссектриса AE этого треугольника пересекаются в точке O. Найдите отношение площадей треугольников FBE и FBO, где точка F является пересечением стороны AB и прямой, проходящей через точки C и O.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\sqrt{2x+1}=x-1.$$

2. Решите уравнение

$$\cos 7x+\sqrt{3}\sin 7x=2\cos 5x.$$

3. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x,y)=\frac{1}{2x^2+8y^2-4xy-2x-4y+5}.$$

4. Решите неравенство

$$\left(\frac{x}{8}\right)^{2\left(\log_{x^2}3-1\right)}\le\frac{x}{8}.$$

5. В треугольнике ABC длины сторон AB и AC относятся как 2 : 3. Медиана BD и биссектриса AE этого треугольника пересекаются в точке O. Найдите отношение площадей треугольников FBE и AFO, где точка F является пересечением стороны AB и прямой, проходящей через точки C и O.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

Выберите правильный ответ

1. Начав движение с места, за первые t секунд автомобиль прошел путь s. Какую скорость набрал автомобиль, если он двигался равноускоренно?

1) s/t; 2) $1{,}2s/t$; 3) $1{,}5s/t$; 4) $2s/t$; 5) $2{,}5s/t$.

2. За снегоходом на тросе тянут груз массой 500 кг. Найдите наибольшую силу натяжения троса, если максимальное ускорение снегохода 2 м/с^2. Коэффициент трения груза о снег 0,1. Трос натянут горизонтально.

1) 500 Н; 2) 750 Н; 3) 1000 Н; 4) 1250 Н; 5) 1500 Н.

3. Два пластилиновых шара движутся навстречу друг другу по одной прямой. Кинетическая энергия первого шара 1,2 Дж. Какой кинетической энергией должен обладать второй шар, чтобы после удара шары остановились? Масса второго шара в 2 раза больше, чем масса первого шара.

1) 0,3 Дж; 2) 0,4 Дж; 3) 0,6 Дж; 4) 1,2 Дж; 5) 2,4 Дж.

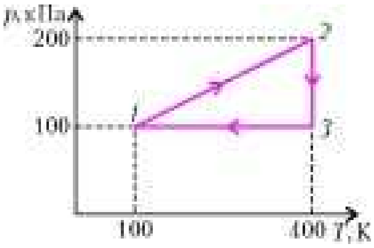


Рис. 1

4. Известно, что в ходе процесса *1–2–3–1* (рис. 1) минимальный объем газа был 5 л. Найдите объем газа в состоянии *2*. График процесса изображен в координатах p (давление) – T (температура).

1) 5 л; 2) 10 л; 3) 15 л; 4) 20 л; 5) 40 л.

5. Одноатомный идеальный газ в ходе изобарного процесса совершает работу 200 Дж. Найдите изменение внутренней энергии газа.

1) −200 Дж; 2) 200 Дж; 3) 300 Дж; 4) 400 Дж; 5) 500 Дж.

6. Электрическое поле создано двумя одинаковыми точечными зарядами $+q$. Что можно сказать о напряженности E и потенциале φ электрического поля в середине отрезка, соединяющего заряды?

1) $E = 0$, $\varphi = 0$; 2) $E = 0$, $\varphi > 0$; 3) $E = 0$, $\varphi < 0$; 4) $E \neq 0$, $\varphi = 0$; 5) $E \neq 0$, $\varphi \neq 0$.

7. Два резистора соединены последовательно. Сопротивление первого 5 Ом, напряжение на нем 2,5 В; сопротивление второго 15 Ом, напряжение на нем 7,5 В. Найдите силу тока на этом участке цепи.

1) 0,25 А; 2) 0,5 А; 3) 1 А; 4) 2 А; 5) 4 А.

8. В некоторой области пространства создано однородное электрическое поле. Электрон влетает в эту область так, что его начальная скорость направлена перпендикулярно силовым линиям. Как будет дальше двигаться электрон?

1) По прямой, равномерно; 2) по прямой, с постоянным ускорением; 3) по окружности; 4) по спирали; 5) по параболе.

9. В контуре происходят гармонические колебания. Сравните энергию электрического поля конденсатора W_C с энергией магнитного поля катушки W_L в тот момент, когда напряжение на конденсаторе равно половине максимального значения.

1) $W_L = W_C$; 2) W_L больше W_C в 2 раза; 3) W_L больше W_C в 3 раза; 4) W_L больше W_C в 4 раза; 5) энергии электрического и магнитного полей нельзя сравнивать.

10. Квант света с энергией $4{,}42 \cdot 10^{-19}$ Дж переходит из вакуума в среду с показателем преломления $n = 1{,}5$. Найдите длину волны света в вакууме λ_0 и длину волны света в среде λ.

1) $\lambda_0 = 4{,}5 \cdot 10^{-7}$ м, $\lambda = 3 \cdot 10^{-7}$ м;

2) $\lambda_0 = 4{,}5 \cdot 10^{-7}$ м, $\lambda = 6{,}75 \cdot 10^{-7}$ м;

3) $\lambda_0 = \lambda = 4{,}5 \cdot 10^{-7}$ м;

4) $\lambda_0 = \lambda = 3 \cdot 10^{-7}$ м;

5) $\lambda_0 = 6 \cdot 10^{-7}$ м, $\lambda = 4 \cdot 10^{-7}$ м.

Физические постоянные

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2

Постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с

Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с

Вариант 2

Выберите правильный ответ

1. Из лука выпускают две стрелы вертикально вверх; начальные скорости стрел отличаются в 2 раза. Во сколько раз отличаются максимальные высоты, на которые поднимутся стрелы? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1) В $\sqrt{2}$ раз; 2) в 2 раза; 3) в 4 раза; 4) в 8 раз; 5) для ответа недостаточно данных.

2. Груз массой 50 кг опускают на веревке. За первую секунду он опустился на 4 м. Найдите силу натяжения веревки, если груз двигался равноускоренно. Начальная скорость груза равна нулю, сопротивлением воздуха пренебречь.

1) 100 Н; 2) 200 Н; 3) 250 Н; 4) 400 Н; 5) 500 Н.

3. Снаряд в верхней точке траектории разрывается на 2 осколка. Первый осколок, масса которого составляет 40% от массы снаряда, полетел в прежнем направлении со скоростью 400 м/с. Найдите скорость и направление, в котором полетел второй осколок, если скорость снаряда перед взрывом была 100 м/с.

1) Назад, 300 м/с; 2) назад, 100 м/с; 3) вперед, 100 м/с; 4) вперед, 200 м/с; 5) вперед, 300 м/с.

4. Температура газа в баллоне возросла с 7 °С до 14 °С, при этом давление в баллоне не изменилось. Какая масса газа вышла из баллона, если первоначально в нем было 120 г газа?

1) 1 г; 2) 3 г; 3) 5 г; 4) 30 г; 5) 60 г.

5. Рассчитайте работу, которую совершил 1 моль идеального газа в процессе *1–2* (рис.2). График процесса изображен в координатах V (объем) – T (температура).

1) 30 Дж; 2) 80 Дж; 3) 830 Дж; 4) 1660 Дж; 5) 0.

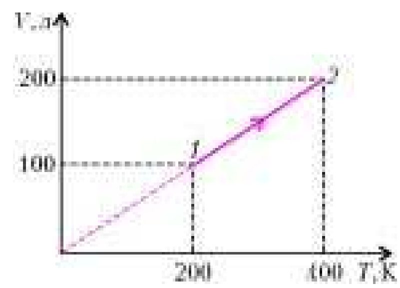


Рис. 2

6. Электрическое поле создано равномерно заряженной сферой. Сравните величины напряженности электрического поля в точках O, A и C (рис.3).

1) $E_O > E_A > E_C$; 2) $E_O < E_A < E_C$; 3) $E_O = E_A = E_C \neq 0$; 4) $E_O = 0$, $E_A = E_C \neq 0$; 5) во всех точках напряженности равны нулю.

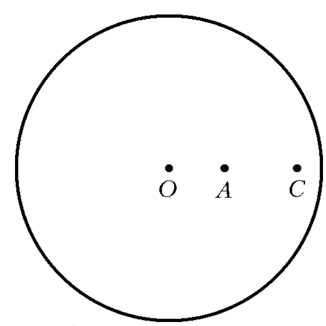


Рис. 3

7. Три резистора соединены последовательно. Общее напряжение на этом участке цепи 20 В, при этом напряжение на третьем резисторе 8 В. Найдите силу тока в этой цепи, если $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 6$ Ом.

1) 0,8 А; 2) 1,2 А; 3) 1,33 А; 4) 2 А; 5) 5 А.

8. Протон движется в однородном электрическом поле против направления силовых линий; начальная скорость протона 10^5 м/с. Какую разность потенциалов пройдет протон до остановки? Заряд протона $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса протона $1{,}6 \cdot 10^{-27}$ кг.

1) 5 В; 2) 10 В; 3) 20 В; 4) 50 В; 5) 100 В.

9. Заряженный конденсатор емкостью C замыкают на катушку индуктивностью L. Через какое минимальное время энергия конденсатора станет равна первоначальной? Омическим сопротивлением контура пренебречь.

1) $2\pi\sqrt{LC}$; 2) $\pi\sqrt{LC}$; 3) $\frac{\pi}{2}\sqrt{LC}$; 4) $\frac{\pi}{4}\sqrt{LC}$; 5) $\frac{\pi}{8}\sqrt{LC}$.

10. Найдите показатель преломления среды, в которой свет с частотой $5 \cdot 10^{14}$ Гц имеет длину волны $4 \cdot 10^{-7}$ м.
1) 0,8; 2) 1,25; 3) 1,5; 4) 2; 5) 2,5.

Физические постоянные

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2

Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль · К)

Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с

Публикацию подготовили М.Кузьмин, Т.Медина, А.Миронов, В.Мирошкин, Л.Муравей, Г.Никулин

Российский государственный университет нефти и газа им.И.М.Губкина

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение и вычислите при $x = 3{,}56$ и $y = 1{,}02$:

$$\left(\frac{2\sqrt[3]{2}xy}{x^2y^2 - \sqrt[3]{4}} + \frac{xy - \sqrt[3]{2}}{2xy + 2\sqrt[3]{2}}\right)\frac{2xy}{xy + \sqrt[3]{2}} - \frac{xy}{xy - \sqrt[3]{2}} + 0{,}1 .$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{0{,}5\left(x^2 + 11x + 32\right)} = -x - 6 .$$

3. Произведение восемнадцатого и тридцатого членов геометрической прогрессии равно 0,49. Найдите двадцать четвертый член этой прогрессии, если известно, что он положителен.

4. Найдите наименьшее целое положительное решение неравенства

$$|x - 2{,}5| > 8 .$$

5. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{x-5}}{4^{x-5}} > \frac{3\sqrt{3}}{64} .$$

6. Вычислите

$$\log_3 10 \lg 27 .$$

7. Вычислите

$$\frac{2\sin^2 70° - 1}{2\operatorname{ctg} 115° \cos^2 155°} .$$

8. Найдите в градусах наибольший отрицательный корень уравнения

$$\cos(\pi/3)\sin 2x + \sin(\pi/3)\cos 2x = 1/2 .$$

9. Найдите наименьшее возможное значение, которое может принимать сумма квадратов корней трехчлена $y = x^2 + px + q$, если известно, что вершина параболы, являющаяся графиком этого трехчлена, лежит на кривой $y = 1/(4x)$.

10. Найдите меньший корень уравнения

$$\frac{x}{54} = 2^{\log_x 108} .$$

11. $ABCD$ – равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC, в которой $\cos\angle BAD = 0{,}76$. Окружность касается стороны AD, стороны AB в точке B и стороны CD в точке C. Около трапеции описана окружность радиуса 7. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

12. В шар вписаны конус и цилиндр, имеющий с конусом общее нижнее основание и одинаковый объем. Площадь поверхности шара равна $5\sqrt{10}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

Вариант 2

1. Упростите и вычислите при $a = 4/21$ и $c = \sqrt{5} + 1$:

$$\left(\frac{\sqrt[3]{4}c^2}{\sqrt[3]{2}ac - a^2} - \frac{a}{\sqrt[3]{2}c - a}\right)\frac{a}{a + \sqrt[3]{2}c} .$$

2. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\sqrt{6(2x - 3)} > 4(x - 3) .$$

3. Сумма седьмого и девятнадцатого членов арифметической прогрессии равна 14. Найдите тринадцатый член этой прогрессии.

4. Решите уравнение

$$0{,}8|x - 0{,}4| = x^2 + 0{,}48 .$$

5. Решите уравнение

$$\left(\sqrt{10}\right)^{x-5} : 9^{x-5} = \frac{10}{81} .$$

6. Вычислите

$$\log_{\left(6^7\sqrt{6}\right)} \sqrt[4]{216} .$$

7. Вычислите

$$\frac{\cos^2 5° - \sin^2 185°}{4\cos 10°} .$$

8. Найдите в градусах наименьший положительный корень уравнения

$$\frac{\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg}(\pi/4)}{1 - \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg}(\pi/4)} = \sqrt{3} .$$

9. Найдите наибольшее целое значение параметра a, при котором графики функций $y = 5x + 8$ и $y = \dfrac{a}{x^2}$ имеют три общие точки.

10. Найдите 4^x, где x – меньший корень уравнения

$$4^x \cdot 2{,}5^{\frac{x}{x-1}} = 100 .$$

11. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) медиана AM продолжена до пересечения с описанной около треугольника ABC окружностью в точке P, а высота AH – до пересечения с той же окружностью в точке K. Известно, что $AM : MP = 11 : 3$. Найдите отношение $AH : HK$.

12. Объем правильной треугольной пирамиды равен $162\sqrt{3}$, а перпендикуляр, опущенный из центра основания пирамиды на ее боковую грань, попадает в центр окружности, вписанной в боковую грань. Найдите сторону основания пирамиды.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Внимание! Если единицы не указаны, выразите ответ в единицах СИ. Ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2.

Вариант 1

1. С высоты 12 м брошен мяч вертикально вверх со скоростью 2 м/с. На какой высоте окажется мяч через 1 с?

2. Стальная пуля массой 4 г, летящая горизонтально со скоростью 400 м/с, попадает в центр боковой грани неподвижного стального бруска, масса которого 2 кг. После столкновения пуля отскакивает в противоположную сторону со скоростью 350 м/с. Чему равна скорость бруска после столкновения (в см/с)?

3. На сколько изменится потенциальная энергия бруска массой 150 кг, если его перевести из горизонтального положения в вертикальное? Брусок имеет квадратное сечение со стороной 20 см и длину 1 м.

4. В баллоне находится газ массой 2,5 кг при температуре 27 °С и давлении $5 \cdot 10^5$ Па. Когда часть газа была выпущена, а оставшаяся часть нагрета до 177 °С , давление возросло до $6 \cdot 10^5$ Па. Какова плотность оставшейся части газа, если объем баллона 1 $м^3$?

5. К воздушному конденсатору, заряженному до напряжения 180 В, подсоединили параллельно такой же конденсатор, но не заряженный и заполненный диэлектриком из стекла с диэлектрической проницаемостью 3. Чему будет равно напряжение на зажимах этой системы конденсаторов?

6. Два сопротивления 15 Ом и 35 Ом, соединенные параллельно, подключены к аккумулятору, ЭДС которого 24 В. Ток в общей цепи равен 2 А. Найдите ток короткого замыкания.

7. Электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов 125 В, влетел в однородное магнитное поле с индукцией 0,25 мТл перпендикулярно линиям поля. Найдите радиус кривизны траектории электрона (в мм). Заряд электрона $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $9 \cdot 10^{-31}$ кг.

8. Пары некоторого металла в разрядной трубке начинают излучать свет при напряжении на электродах 3,3 В. Чему равна длина волны возникающего излучения (в нм)? Постоянная Планка $6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, заряд электрона $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, скорость света $3 \cdot 10^8$ м/с .

9. Маленький брусок находится на вершине наклонной плоскости длиной 26 м и высотой 10 м. Коэффициент трения между бруском и плоскостью равен 0,45. Какую минимальную начальную скорость надо сообщить бруску, чтобы он достиг основания плоскости?

10. Два одинаковых шара, радиусом 9 см и массой 10 кг каждый, положили в вертикальный открытый с обеих сторон тонкостенный цилиндр радиусом 15 см. Пренебрегая трением, найдите, при какой минимальной массе цилиндра шары его не опрокидывают.

11. Давление идеального одноатомного газа изохорно увеличивают в 4 раза, затем объем газа увеличивают в 2,5 раза так, что давление линейно зависит от объема и возрастает в 2 раза, после чего газ возвращают в исходное состояние в процессе, в котором давление линейно зависит от объема. Найдите КПД (в процентах) такого цикла.

12. Невесомый стержень длиной 2,5 м согнули посередине под углом 120°, прикрепили к его концам одинаковые грузики и повесили местом сгиба на тонкий гвоздь, вбитый в стену. Пренебрегая трением, найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия.

Вариант 2

1. Невесомый стержень вращается в горизонтальной плоскости с угловой скоростью 30 $с^{-1}$. На расстояниях 0,4 м и 0,3 м от оси вращения закреплены грузы, имеющие массы 0,2 кг и 0,1 кг соответственно. Какая горизонтальная сила действует на ось вращения, если ось находится между грузами?

2. Из орудия массой 2 т вылетает в горизонтальном направлении снаряд массой 20 кг со скоростью 250 м/с. Какую скорость (по абсолютной величине) получит орудие при отдаче? Ответ дайте в см/с .

3. На одной чашке равноплечных рычажных весов находится груз весом 2,2 Н, на другой – весом 2,4 Н. На каком расстоянии от центра коромысла весов надо подвесить гирьку весом 1,2 Н, чтобы весы были в равновесии? Длина коромысла 30 см. Ответ дать в мм.

4. В сосуде находится газ под давлением 50 атм. Какое установится давление (в атм), если из сосуда выпустить 30% содержащегося там газа? Температуру считать постоянной.

5. Три конденсатора емкостями 1 мкФ, 2 мкФ и 3 мкФ соединены последовательно и присоединены к источнику тока с ЭДС 220 В. Определите заряд каждого конденсатора (в мкКл).

6. Два проводника сопротивлениями 8 Ом и 5 Ом соединяют параллельно и подключают к источнику тока. В первом проводнике выделилось 300 Дж тепла. Какое количество теплоты выделилось во втором проводнике за то же время?

7. Электрон движется с постоянной скоростью по окружности в однородном магнитном поле. Индукцию магнитного поля увеличили в 3 раза. Во сколько раз уменьшился при этом период обращения электрона?

8. Предмет находится на расстоянии 6 см от двояковыпуклой линзы с оптической силой 10 дптр. На каком расстоянии (в см) от линзы находится мнимое изображение этого предмета?

9. Из некоторой точки горы с углом наклона к горизонту 30° бросают горизонтально мяч с начальной скоростью 30 м/с. На каком расстоянии от точки бросания вдоль наклонной плоскости упадет мяч?

10. Съехав с горы высотой 5 м, санки останавливаются, пройдя по горизонтали путь, равный длине ската горы. Найдите этот путь, если коэффициент трения на всем пути равен 0,2.

11. Давление идеального одноатомного газа изохорно увеличивают в 1,6 раза, затем объем газа изобарно увеличивают в 1,4 раза, после чего давление газа изохорно уменьшают на 25% и, наконец, газ возвращают в исходное состояние в процессе, в котором давление линейно зависит от объема. Найдите КПД (в процентах) такого цикла.

12. Стержень длиной 90 см, скользивший со скоростью 1 м/с вдоль своей длины по гладкой горизонтальной плоскости, начинает заезжать на шероховатую поверхность с коэффициентом трения 0,25. Через какое время (в мс) скорость стержня уменьшится вдвое? Принять $\pi = 3{,}14$.

Публикацию подготовили
Б.Писаревский, А.Черноуцан

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(физико-механический факультет)

1. Упростите выражение

$$\frac{x-1}{x-\sqrt{x}+1} : \frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}+1} - 2\sqrt{x} .$$

2. Найдите сумму корней уравнения

$$2x^{-2} - 9x^{-1} - 45 = 0 .$$

3. Вычислите

$$2\log_5 20 \lg^2 5 + 2\lg^2 2 .$$

4. Найдите значение выражения

$$\frac{2-\sqrt{12}\operatorname{ctg}15^\circ}{\sqrt{3}+\operatorname{ctg}15^\circ} .$$

5. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1}{1+\sqrt{6}+\sqrt{7}}$.

6. Сколько существует двузначных натуральных чисел n, не превосходящих 75, для которых число n^3+3n-2 делится на 6 без остатка?

7. Решите неравенство

$$x^2-1\le\frac{4(x-1)}{x+1}.$$

8. Решите уравнение

$$2^{2-x}-3=-2^{x-1}.$$

9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}36y=(x+5)^2,\\36x=(y+5)^2.\end{cases}$$

10. Решите уравнение

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^x-\left(\sqrt{2}+1\right)^x=2.$$

11. Решите неравенство

$$|x-2|<8(2+x)^{-1}.$$

12. Решите уравнение

$$\sqrt{\cos 2x}=\cos x-\sin x.$$

13. Решите уравнение

$$\frac{8\sqrt{x}}{\sqrt{x+8}-\sqrt{x}}=x+3.$$

14. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{2x^2}{x^4+1}.$$

15. Найдите корни уравнения

$$\operatorname{tg}4x\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$$

на промежутке $[\pi;2\pi]$.

16. При каких действительных значениях a неравенство

$$\left|x^2+2ax+3\right|\le 6$$

выполняется при всех $x\in[-1;2]$?

17. Парабола с уравнением $y=x^2+px+q$ касается оси абсцисс и прямой с уравнением $y=-4x-12$. Найдите расстояние между точками касания.

18. В треугольнике ABC на сторонах $AB=3$ и $AC=9$ выбраны точки M и N соответственно так, что площадь треугольника AMN составляет треть площади треугольника ABC. При какой длине отрезка AM отрезок MN имеет наименьшую длину?

19. Решите уравнение

$$\sin 2x\cdot(\sin x-\cos x)=\sqrt{2}.$$

20. В пирамиде $ABCD$ даны стороны $AB=4$, $BC=5$, $CA=7$, а длина каждого бокового ребра равна 7. Найдите косинус острого угла между прямыми AD и BC.

Вариант 2

(физико-технический факультет)

1. Найдите квадрат числа

$$\left(\frac{1}{2+\sqrt{5}}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right):\left(1+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right).$$

Убедитесь, что этот квадрат является целым числом.

2. Решите уравнение

$$|x-1|(x+3)=5.$$

3. Какое число больше: $a=-\log_2 24$ или $b=-2-\sqrt{5}$?

4. Решите уравнение

$$\frac{3\sqrt{1-x}}{\sqrt{5+x}}=1-x.$$

5. Сколько существует натуральных чисел n, для которых $5/n$ является несократимой дробью и принадлежит промежутку $[1/5;\ 1/2]$?

6. Решите неравенство

$$\frac{1}{3-\sqrt{x+4}}>1.$$

7. Вычислите

$$\frac{\log_2 7}{\log_3 7-\log_2 6\log_3 7}.$$

8. Найдите сумму всех двузначных натуральных чисел, которые при делении на 6 дают остаток 4.

9. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x=-3\operatorname{ctg}\left(x+\frac{3\pi}{4}\right).$$

10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x-y-xy=7,\\x^2+y^2-3xy=19.\end{cases}$$

11. Решите уравнение

$$5^{-4-2x}-4^{-5-2x}=4^{-4-2x}.$$

12. Найдите $\operatorname{ctg}((2\alpha+\pi)/4)$, если $\cos\alpha=3/5$ и $\alpha\in(0;\pi)$.

13. Составьте уравнение общей касательной графиков функций $y=-\dfrac{1}{x}-1$ и $y=2\sqrt{x}$.

14. Решите уравнение

$$\log_5 x^2+3\sqrt[3]{\log_5 x}=5.$$

15. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{3x^{-1}-x^{-2}}\cdot\operatorname{ctg}\left(\pi x^{-1}\right).$$

16. Решите уравнение

$$\operatorname{ctg}^2x+3=-4\sin 6x+2\cos 2x.$$

17. Косинусы двух углов треугольника равны $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$ и $\dfrac{1}{2\sqrt{7}}$ соответственно. Найдите третий угол треугольника.

18. Найдите $\cos^4x+\sin^4x$, зная, что $6\sin((4x+5\pi)/4)=\sqrt{2}$.

19. Основание пирамиды $ABCDS$ является прямоугольником, ее боковая грань ABS перпендикулярна основанию и является правильным треугольником. В пирамиду вписан шар радиуса 2. Найдите объем пирамиды.

20. При каких действительных значениях a отрезок $[-3;-2]$ не пересекается с множеством решений неравенства $2x+2a<-5\sqrt{ax}$?

Публикацию подготовили
И.Комарчев, А.Моисеев, С.Преображенский

XLV Международная математическая олимпиада

XLV Международная математическая олимпиада (ММО) проходила с 4 по 18 июля 2004 года в Афинах за месяц до летних Олимпийских игр и начиналась в дни, когда вся Греция праздновала победу своей сборной на чемпионате Европы по футболу. Организаторы ММО подготовили участникам олимпиады – 486 школьникам из 85 стран мира – интересную культурную программу: экскурсии в Акрополь, Микены, на Коринфский канал, в первую столицу современной Греции город Нафплион...

В команду России на ММО были включены:

Андрей Бадзян – ФМЛ 31, Челябинск,
Михаил Дубашинский – ФМЛ 239, Санкт-Петербург,
Михаил Исаев – гимназия 42, Барнаул,
Дмитрий Пермяков – гимназия 127, Снежинск Челябинской обл.,
Надежда Петухова – ФТШ, Санкт-Петербург,
Игорь Шнурников – гимназия 36, Краснодар.
Запасным был *Юрий Мешин* – ФМЛ, Киров.

Участникам ММО в каждом из двух туров было предложено по 3 задачи, оценивавшихся в 7 баллов каждая. В неофициальном командном зачете (по сумме баллов, набранных всеми участниками) наша команда заняла третье место, но выступление школьников России в этом году следует признать очень успешным. Лишь четырем участникам удалось показать на олимпиаде абсолютный результат (42 балла), и среди них наши А.Бадзян и М.Дубашинский, завоевавшие, соответственно, свои третью и вторую золотые медали на международных олимпиадах. Кроме того, в десятку лучших вошел М.Исаев, а Н.Петухова оказалась в первой двадцатке.

Итоги выступления наших школьников на ММО приведены в таблице:

	1	2	3	4	5	6	Сумма баллов	Медаль
А.Бадзян	7	7	7	7	7	7	42	золотая
М.Дубашинский	7	7	7	7	7	7	42	золотая
М.Исаев	7	6	4	7	7	7	38	золотая
Н.Петухова	7	5	3	7	7	6	35	золотая
И.Шнурников	7	7	0	7	4	0	25	серебряная
Д.Пермяков	7	2	4	7	3	0	23	бронзовая

Команду России к ММО-2004 подготовили тренеры Г.Челноков (Москва), С.Берлов, Д.Карпов, М.Пратусевич (все – Санкт-Петербург), А.Поярков (Рыбинск), А.Глазырин (Челябинск), А. Гарбер, В.Дольников (оба – Ярославль), И.Богданов, Р.Карасев, П.Кожевников, О.Подлипский, Д.Терешин (все – Долгопрудный).

Практически не меняется в последние годы список сильнейших команд на ММО. В неофициальном командном зачете лучшими стали следующие страны:

№	Страна	Золотая медаль	Серебрянная медаль	Бронзовая медаль	Сумма баллов
1.	Китай	6	0	0	220
2.	США	5	1	0	212
3.	Россия	4	1	1	205
4.	Вьетнам	4	2	0	196
5.	Болгария	3	3	0	194
6.	Тайвань	3	3	0	190
7.	Венгрия	2	3	1	187
8.	Япония	2	4	0	182
9.	Иран	1	5	0	178
10.	Румыния	1	4	1	176
11.	Украина	1	5	0	174
12.	Корея	2	2	2	166
13.	Белоруссия	0	4	2	154
14.	Индия	0	4	2	151
15.	Израиль	1	1	4	147
16.	Польша	2	1	1	142
17.	Молдавия	2	0	4	140
18.	Сингапур	0	3	3	139
19.	Монголия	0	3	2	135
20.	Великобритания	1	1	4	134
21.	Казахстан	2	0	2	132

В рамках подготовки к ММО-2005 команда России, в которую вошли девятиклассник А.Магазинов (Ярославль) и десятиклассники А.Ефимов (Москва), А.Подхалюзин (Санкт-Петербург), А.Гаврилюк (Долгопрудный), П.Козлов (Ростов), В.Астахов (Саратов), в мае 2004 года приняла участие в Болгарской математической олимпиаде. Эта олимпиада проводится по схеме международных, когда всем школьникам предлагаются единые задания независимо от класса, в котором они обучаются. Несмотря на то, что участниками олимпиады были и все члены команды Болгарии на ММО-2004, наши школьники показали высокие результаты, заняв, соответственно, 1, 3, 4, 8, 11 и 20 места в общем зачете.

Хочется выразить большую благодарность стипендиальному фонду Владимира Потанина, компаниям «Спортмастер» и «1С» за поддержку олимпиадного движения и помощь в подготовке национальной команды России к международным математическим олимпиадам.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Пусть ABC – остроугольный треугольник, в котором $AB \neq AC$. Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Обозначим через O середину стороны BC. Биссектрисы углов BAC и MON пересекаются в точке R. Докажите, что окружности, описанные около треугольников BMR и CNR, имеют общую точку, лежащую на стороне BC.

(Румыния)

2. Найдите все многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами, удовлетворяющие равенству

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$$

для любых действительных чисел a, b, c таких, что $ab+bc+ca=0$.

(Южная Корея)

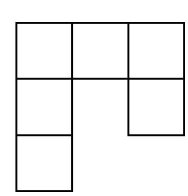


Рис. 1

3. Назовем *крюком* фигуру, состоящую из шести клеток, как показано на рисунке 1, а также любую фигуру, которую можно получить из нее с помощью поворотов и переворотов. Найдите все прямоугольники $m \times n$, которые можно замостить крюками.

(Эстония)

4. Пусть $n \ge 3$ – натуральное число. Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – положительные действительные числа такие, что

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \ldots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \ldots + \frac{1}{t_n}\right).$$

Докажите, что t_i, t_j, t_k являются сторонами треугольника при всех i, j, k таких, что $1 \le i < j < k \le n$.

(Южная Корея)

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагональ BD не является биссектрисой ни угла ABC, ни угла CDA. Точка P, лежащая внутри четырехугольника $ABCD$, удовлетворяет условиям: $\angle PBC = \angle DBA$, $\angle PDC = \angle BDA$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда $AP = CP$.

(Польша)

6. Назовем натуральное число *полосатым*, если любые две соседние цифры в его десятичной записи имеют разную четность. Найдите все натуральные n, для каждого из которых существует полосатое число, делящееся на n.

(Иран)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

По традиции, мы приводим решения задач олимпиады, предложенные нашими школьниками.

1 (И.Шнурников). Пусть AL – биссектриса треугольника ABC (рис.2). Докажем, что окружности, описанные около треугольников BMR и CNR, пересекаются в точке L.

Заметим, что O – центр окружности, проходящей через B, M, N, C. Значит, треугольник MON равнобедренный ($OM = ON$), и биссектриса угла MON является серединным перпендикуляром к отрезку MN.

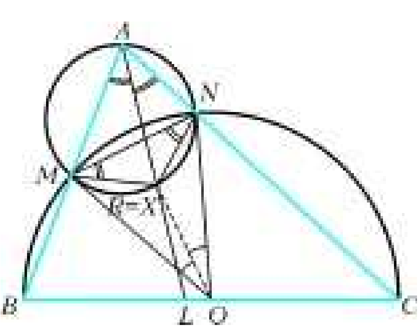


Рис. 2

Опишем окружность около треугольника AMN и обозначим за X середину той дуги MN, которая не содержит точку A. Отрезки MX и NX равны как хорды, стягивающие равные дуги, следовательно, X лежит на серединном перпендикуляре к отрезку MN. С другой стороны, из равенства дуг MX и NX следует равенство вписанных углов MAX и NAX, поэтому X лежит на биссектрисе AL. Итак, мы получаем, что X лежит одновременно и на биссектрисе угла BAC, и на биссектрисе угла MON, т.е. X совпадает с R.

Из вписанности четырехугольников $BMNC$ и $AMRN$ следуют равенства $\angle BMN + \angle BCN = 180°$ и $\angle NMR = \angle NAR = \frac{1}{2}\angle BAC$. Отсюда

$$\angle BMR + \angle BLR = (\angle BMN - \angle NMR) + (\angle CAL + \angle ACL) =$$
$$= \left(\angle BMN - \frac{1}{2}\angle BAC\right) + \left(\frac{1}{2}\angle BAC + \angle BCN\right) = 180°.$$

Полученное равенство означает, что точки B, M, R, L лежат на одной окружности. Аналогично, точки C, N, R, L лежат на одной окружности.

2 (М.Дубашинский). *Ответ*: $P(x) = \alpha x^4 + \beta x^2$, где α и β – произвольные действительные числа.

В решении будет использоваться следующая несложная лемма: если многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что $P(t) = Q(t)$ для любого действительного t, то P и Q совпадают как многочлены (т.е. у них равны коэффициенты при соответствующих степенях x).

Для доказательства рассмотрим разность $R(x) = P(x) - Q(x)$. Если бы многочлен $R(x)$ имел хотя бы один ненулевой коэффициент, то он бы имел конечное число корней, но равенству $R(t) = P(t) - Q(t)$ удовлетворяет любое действительное t. Лемма доказана.

Многочлен $P(x) = 0$, очевидно, удовлетворяет условию. Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ($a_n \ne 0$) – ненулевой многочлен, удовлетворяющий условию. Подставим $a = t$, $b = c = 0$ в исходное равенство (для таких a, b, c выполнено $ab + bc + ca = 0$). При $t = 0$ имеем: $3P(0) = 2P(0)$, откуда $P(0) = a_0 = 0$. При любом действительном t получаем $P(t) + P(0) + P(-t) = 2P(t) \Rightarrow P(t) = P(-t)$. Согласно лемме, отсюда следует, что все коэффициенты $P(x)$ при нечетных степенях x равны 0, в частности, n четно.

Далее, подставим $a = 3t$, $b = 6t$, $c = -2t$ (при этом $ab + bc + ca = (18 - 12 - 6)t^2 = 0$), получаем $P(-3t) + P(8t) + P(-5t) = 2P(7t)$. Согласно лемме, имеем равенство $P(-3x) + P(8x) + P(-5x) = 2P(7x)$ многочленов от переменной x. Приравняем коэффициенты при старшем члене x^n левой и правой части: $a_n(-3)^n + a_n 8^n + a_n(-5)^n = 2a_n 7^n$, и с учетом четности n получаем $3^n + 8^n + 5^n = 2 \cdot 7^n$, или $\left(\frac{3}{7}\right)^n + \left(\frac{8}{7}\right)^n + \left(\frac{5}{7}\right)^n = 2$. При $n \ge 8$ левая часть последнего равенства больше чем $\left(\frac{8}{7}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{7}\right)^n = 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{7} + \ldots > 1 + \frac{n}{7} > 2$. (Здесь было использовано разложение $\left(1 + \frac{1}{7}\right)^n$ по биному Ньютона.) При $n = 6$ равенство $3^n + 8^n + 5^n = 2 \cdot 7^n$ неверно, в чем можно убедиться и не прибегая к вычислениям, заметив, что $3^6, 8^6, 5^6$ дают остаток 1 при делении на 7 (это следует, например, из малой теоремы Ферма), поэтому $3^6 + 8^6 + 5^6$ дает остаток 3 при делении на 7.

Итак, остается случай $n \le 4$, который приводит (ввиду $a_0 = 0$, $a_1 = a_3 = 0$) к многочлену вида $P(x) = \alpha x^4 + \beta x^2$.

Остается проверить ответ. Рассмотрим

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) - 2P(a+b+c) =$$
$$= \beta\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 - 2(a+b+c)^2\right) +$$
$$+ \alpha\left((a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4 - 2(a+b+c)^4\right).$$

Первая скобка равна $-4(ab + bc + ca) = 0$. Преобразуем вторую скобку с учетом $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$:

$$(a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4 - 2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 =$$
$$= \left(a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4\right) +$$
$$+ \left(b^4 - 4b^3c + 6b^2c^2 - 4bc^3 + c^4\right) +$$
$$+ \left(c^4 - 4c^3a + 6c^2a^2 - 4ca^3 + a^4\right) -$$
$$- 2\left(a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2\right) =$$
$$= 2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) - 4ab\left(a^2 + b^2\right) -$$
$$- 4bc\left(b^2 + c^2\right) - 4ca\left(c^2 + a^2\right) =$$
$$= 2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2a^2bc + 2b^2ca + 2c^2ab\right) -$$

$$-\ 4ab\left(a^2+b^2+c^2\right)-4bc\left(a^2+b^2+c^2\right)-4ca\left(a^2+b^2+c^2\right)=$$
$$=\ 2\left(ab+bc+ca\right)^2-4\left(ab+bc+ca\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)=0\ .$$

3 (А.Бадзян). *Ответ*: это прямоугольники, для которых $m \,\vdots\, 3$, $n \,\vdots\, 4$ (или $n \,\vdots\, 3$, $m \,\vdots\, 4$), и прямоугольники, для которых $m \,\vdots\, 12$, $n \neq 1,2,5$ (или $n \,\vdots\, 12$, $m \neq 1,2,5$).

Пусть прямоугольник $m \times n$ замощен крюками. Для каждого крюка *А* рассмотрим клетку, граничащую по стороне с тремя клетками крюка (рис.3). Назовем такую клетку *выделенной* клеткой крюка *А*. Она покрыта каким-то другим крюком *Б*. Так как крюк *Б* не пересекается с крюком *А*, возможны 3 варианта его расположения (рис.4), причем третий вариант отпадает, так как на доске остается непокрытая клетка. В оставшихся вариантах крюк *А* покрывает выделенную клетку крюка *Б*. Следовательно, все крюки разбиваются на пары крюков, покрывающих выделенные клетки друг друга. Каждая такая пара крюков образует фигуру из 12 клеток одного из двух видов – «кирпич» 4×3 или «зигзаг» (рис.5). Итак, прямоугольник $m \times n$ разбит на кирпичи и зигзаги из 12 клеток. В частности, отсюда следует, что mn делится на 12. Одно из чисел m, n делится на 3, пусть для определенности $m \,\vdots\, 3$. Имеются следующие возможности:

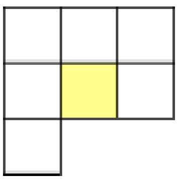


Рис. 3

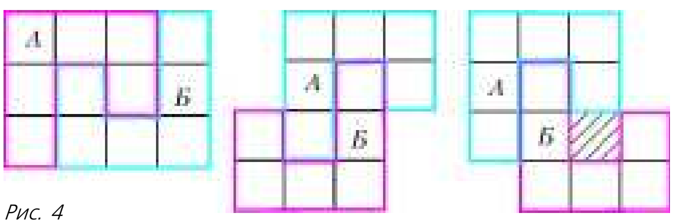
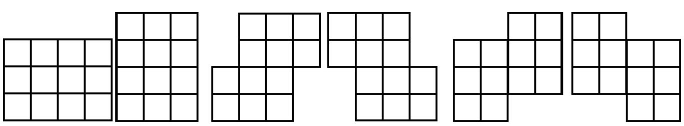


Рис. 4



Кирпичи *Зигзаги*

Рис. 5

1) m и n четны, но не делятся на 4;
2) $n \,\vdots\, 4$;
3) $m \,\vdots\, 4$.

Рассмотрим отдельно эти случаи.

1) Предположим, что m и n четны, но не делятся на 4. Тогда общее количество (равное $mn/12$) кирпичей и зигзагов нечетно.

Кирпич может быть ориентирован двумя способами – горизонтально и вертикально, зигзаг может быть ориентирован четырьмя способами – два вертикальных и два горизонтальных (см. рис.5).

Покрасим в прямоугольнике $m \times n$ каждую четвертую вертикальную полосу красным, а остальную часть прямоугольника – синим (рис.6). Общее количество красных клеток четно, так как в каждой полосе их n – четное число. Заметим, что в каждом вертикальном кирпиче и горизонтальном зигзаге 0, 2 или 4 красные клетки, значит, все вертикальные кирпичи и горизонтальные зигзаги накрывают четное число красных клеток. Таким образом, все горизонтальные кирпичи и вертикальные зигзаги накрывают четное число красных клеток. Но в каждом горизонтальном кирпиче или вертикальном зигзаге ровно 3 красные клетки, поэтому суммарное количество горизонтальных кирпичей и вертикальных зигзагов четно.

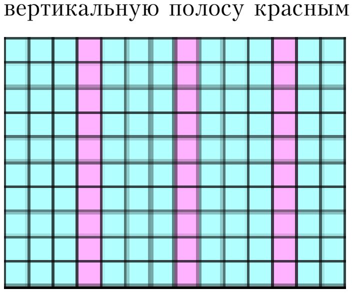


Рис. 6

Рассматривая аналогичную раскраску горизонтальными полосами, докажем, что суммарное количество вертикальных кирпичей и горизонтальных зигзагов четно.

Итак, мы получаем, что общее количество кирпичей и зигзагов четно – противоречие.

2) Если $m \,\vdots\, 3$ и $n \,\vdots\, 4$, то прямоугольник $m \times n$ разбивается на кирпичи (а каждый кирпич разбивается на 2 крюка).

3) Если $m \,\vdots\, 3$ и $m \,\vdots\, 4$, то $m \,\vdots\, 12$, т.е. $m = 12l$. Если n можно представить в виде $n = 3x + 4y$ с целыми неотрицательными x и y, то прямоугольник $m \times n$ разбивается на x прямоугольников $12l \times 3$ и y прямоугольников $12l \times 4$, каждый из которых разбивается на кирпичи. Представим в виде $n = 3x + 4y$ все $n \neq 1$, 2, 5: $3 = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0$, $4 = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1$, $8 = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2$; все оставшиеся n получаются из чисел 3, 4, 8 прибавлением нескольких троек. Итак, если $n \neq 1$, 2, 5, то разбиение на крюки возможно.

В прямоугольники $m \times 1$, $m \times 2$ невозможно поместить ни одного крюка. Наконец, предположим, что прямоугольник $m \times 5$ удалось замостить фигурами «кирпич» и «зигзаг». Но тогда легко видеть, что две фигуры, покрывающие две угловые клетки в строке длины 5, обязательно перекрываются – противоречие.

4 (Д.Пермяков). Предположим противное: пусть при некоторых $1 \le i < j < k \le n$ числа t_i, t_j, t_k не являются длинами сторон треугольника. Обозначим тройку t_i, t_j, t_k как a, b, c, где $a + b \le c$.

Докажем для чисел $x \ge y \ge z > 0$ вспомогательное неравенство $\dfrac{x}{z} + \dfrac{z}{x} \ge \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{y}$. Сделаем эквивалентные преобразования: $\dfrac{x}{z} - \dfrac{y}{z} \ge \dfrac{z}{y} - \dfrac{z}{x}$, $\dfrac{x-y}{z} \ge \dfrac{z(x-y)}{xy}$. Домножая на общий знаменатель, получаем $xy(x-y) \ge z^2(x-y)$ – верное равенство. Из доказанного неравенства, в частности, следует, что $\dfrac{c}{a} + \dfrac{a}{c} \ge \dfrac{a+b}{a} + \dfrac{a}{a+b}$ и $\dfrac{c}{b} + \dfrac{b}{c} \ge \dfrac{a+b}{b} + \dfrac{b}{a+b}$.

Как частный случай доказанного при $z = y$, получим известное неравенство $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \ge 2$ для положительных x и y.

Сделаем оценку:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\ge$$
$$\ge\ 2+\left(\frac{a+b}{b}+\frac{b}{a+b}\right)+\left(\frac{a+b}{a}+\frac{a}{a+b}\right)=$$
$$=\ 2+\left(\frac{a+b}{b}+\frac{a+b}{a}\right)+\left(\frac{b}{a+b}+\frac{a}{a+b}\right)=$$
$$=\ 2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)+\frac{a+b}{a+b}\ge 7\ .$$

(Фактически, мы решили задачу для $n = 3$.)

При раскрытии скобок $\left(t_1+t_2+\ldots+t_n\right)\left(\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}+\ldots+\dfrac{1}{t_n}\right)$ получается n слагаемых вида $t_i \cdot \dfrac{1}{t_1} = 1$ и $\dfrac{n(n-1)}{2}$ слагаемых вида $\left(\dfrac{t_k}{t_l}+\dfrac{t_l}{t_k}\right)$ для всевозможных $1 \le k < l \le n$. Каждое слагаемое $\left(\frac{t_k}{t_l}+\frac{t_l}{t_k}\right)$ не меньше 2, а кроме того, сумма трех слагаемых $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$ не меньше $7=2\cdot 3+1$. Значит, сумма всех слагаемых вида $\left(\frac{t_k}{t_l}+\frac{t_l}{t_k}\right)$ не меньше, чем удвоенное количество слагаемых плюс 1. Итак,

$$(t_1+t_2+\ldots+t_n)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\ldots+\frac{1}{t_n}\right)\ge$$

$$\ge n+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}+1=n^2+1,$$

что противоречит условию.

5 (Н.Петухова). Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность (рис.7). Продлим отрезки BP и DP до пересечения с окружностью в точках D' и B' соответственно. Так как равные вписанные углы опираются на равные дуги, дуги AB и CB' равны, а также дуги AD и CD' равны. Следовательно, точки B и B', а также точки D и D' симметричны относительно серединного перпендикуляра l к отрезку AC. Значит, отрезки BD' и $B'D$ симметричны относительно l, поэтому их точка пересечения P лежит на l, т.е. равноудалена от A и C.

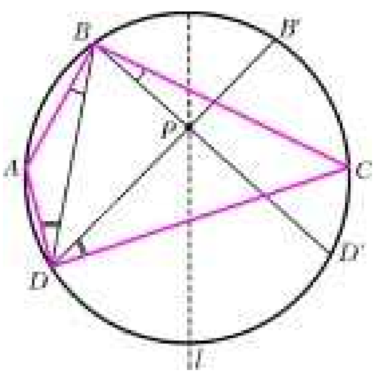


Рис. 7

Наоборот, пусть теперь дано, что $AP=CP$, т.е. P лежит на серединном перпендикуляре l к отрезку AC (рис.8). Предположим, что четырехугольник $ABCD$ не является вписанным. Тогда окружности S_B и S_D, описанные около треугольников ABC и ADC соответственно, различны. Пусть прямая BD пересекает окружность S_B в точках B и D_1, а окружность S_D – в точках D и B_1.

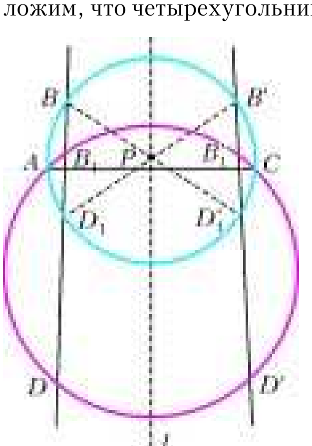


Рис. 8

Обозначим за B', D', B_1', D_1' образы точек B, D, B_1, D_1 соответственно при симметрии относительно l. Очевидно, что B', D', B_1', D_1' лежат на одной прямой, B' и D_1' лежат на окружности S_B, а B_1' и D' лежат на окружности S_D. Из симметрии следует, что дуги AD_1 и CD_1' окружности S_B равны, поэтому равны вписанные углы ABD_1 и CBD_1'. Но по условию $\angle ABD_1=\angle CBP$, поэтому, BD_1' тоже проходит через точку P. В силу симметрии, $B'D_1$ проходит через точку P. Аналогично доказываем, что и прямые DB_1' и $D'B_1$ проходят через P. Отметим, что по условию прямые BP и BD различны, поэтому прямые BD и $B'D'$ не проходят через P.

Пусть $\angle ABC+\angle ADC<180^\circ$. Так как $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, то отрезок BD пересекается с отрезком AC. Отсюда следует, что точки B и B_1 лежат по одну сторону от AC, а D и D_1 – по другую. Заметим, что $\angle AD_1C>\angle ADC$, поэтому точка D_1 – внутри окружности S_D. Отсюда следует, что точка D_1 лежит на прямой BD между точками B и D. Аналогично, точка B_1 лежит между точками B и D. Итак, порядок следования точек на прямой – B, B_1, D_1, D, в частности, D_1 лежит на отрезке B_1D. В силу симметрии D_1' лежит на отрезке $B_1'D'$.

Углы B_1PD и $B_1'PD'$ в симметричных относительно l треугольниках B_1PD и $B_1'PD'$ либо вертикальные (если P лежит на отрезке DB_1'), либо совпадают (если P лежит на продолжении отрезка DB_1') (рис.9). Так как D_1 лежит на

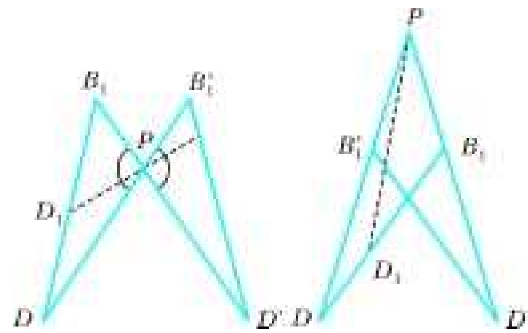


Рис. 9

отрезке DB_1, то в любом случае прямая PD_1 пересекает отрезок $D'B_1'$ (а не его продолжение). Получаем, что B' лежит на отрезке $D'B_1'$ – противоречие.

Случай $\angle ABC+\angle ADC>180^\circ$ разбирается аналогично – лишь точки B и B_1, D и D_1, B' и B_1', D' и D_1' поменяются ролями.

6 (М.Исаев). *Ответ*: все числа, не кратные 20.

Любое число, делящееся на 20, имеет последнюю цифру 0 и четную предпоследнюю цифру. Следовательно, полосатое число не может делиться на число n, кратное 20.

Докажем по шагам, что все остальные числа подходят.

Шаг 1. Существует нечетное k-значное полосатое число X_k (в качестве первой четной цифры допускается 0), делящееся на 5^k.

Докажем индукцией по k. База: положим $X_1=5$. Докажем переход. Пусть имеется k-значное полосатое число $X_k=5^k m$. Чтобы получить число X_{k+1}, подберем подходящую цифру a и припишем ее слева к X_k, т.е. будем искать X_{k+1} в виде $\overline{aX_k}=10^k a+X_k=5^k\left(2^k a+m\right)$. Нам нужно, чтобы $S_a=2^k a+m$ делилось на 5. Кроме того, если k нечетно, то цифру a выберем четной (чтобы X_{k+1} было полосатым). Покажем, что это возможно. Числа 0, 2, 4, 6, 8 дают различные остатки от деления на 5, поэтому 5 чисел S_0, S_2, S_4, S_6, S_8 дают различные остатки от деления на 5 (значит, среди этих остатков есть 0). В самом деле, если бы какие-то S_i и S_j ($i\ne j$) давали одинаковый остаток от деления на 5, то их разность $S_i-S_j=2^k(i-j)$ должна была делиться на 5, но это не так. Если же k четно, то искомую цифру a выберем нечетной. Аналогично доказываем, что это возможно, используя то, что числа 1, 3, 5, 7, 9 дают различные остатки от деления на 5.

Шаг 2. Существует k-значное полосатое число Y_k, делящееся на 2^k, причем если k четно, то Y_k делится на 2^{k+1}, а если k нечетно, то Y_k не делится на 2^{k+1}.

Докажем это индукцией по k. База: $Y_1=2$. Докажем переход. Пусть имеется k-значное число Y_k, удовлетворяющее данным условиям. Определим Y_{k+1}.

Пусть k нечетно, $k=2t-1$ для некоторого натурального t. Тогда $Y_{2t-1}=2^{2t-1}m$, где m нечетно. Получим полосатое число $Y_{2t}=\overline{aY_{2t-1}}$, подобрав нечетную цифру a. Запишем $Y_{2t}=10^{2t-1}a+Y_{2t-1}=2^{2t-1}\left(5^{2t-1}a+m\right)$. Для доказательства индукционного перехода нам требуется, чтобы $5^{2t-1}a+m$ делилось на 4. Заметим, что 5 в любой степени дает остаток 1 от деления на 4, поэтому если m дает остаток 1 от деления на 4, положим a = 3, а если m дает остаток 3 от деления на 4, положим a = 1.

Пусть k четно, $k = 2t$. Тогда $Y_{2t} = 2^{2t+1}m$. Получим полосатое число $Y_{2t+1}\overline{aY_{2t}}$, подобрав четную цифру $a = 2b$. Имеем $Y_{2t+1} = 10^{2t}a + Y_{2t} = 2^{2t+1}\left(5^{2t}b + m\right)$. Нам нужно, чтобы $5^{2t}b + m$ не делилось на 2. Для этого положим $b = 1$ (т.е. $a = 2$), если m нечетно, и $b = 2$ (т.е. $a = 4$), если m четно.

Шаг 3. Существует нечетное полосатое число, делящееся на $5^k p$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, где $\text{НОД}(p, 10) = 1$.

Пусть X – нечетное полосатое число из четного количества цифр (возможно, с первой цифрой 0), делящееся на 5^k (если $k = 0$, то положим $X = 01$, если k четно, то пусть $X = X_k$ из первого шага, если же k нечетно, то пусть $X = X_{k+1}$ из первого шага). Нужное полосатое число Z, делящееся на $5^k p$, найдем в виде $Z = \underbrace{\overline{XX\ldots X}}_{l+1} = X\left(1 + 10^k + 10^{2k} + \ldots + 10^{lk}\right)$, где k – количество цифр в числе X. Достаточно доказать утверждение: найдется такое l, что $S_l = 1 + 10^k + 10^{2k} + \ldots + 10^{lk} = \dfrac{10^{(l+1)k} - 1}{10^k - 1}$ делится на p. Для доказательства воспользуемся теоремой Эйлера: если $\text{НОД}(a, b) = 1$, то $a^{\varphi(b)} - 1$ делится на b, где $\varphi(b)$ – количество натуральных чисел, меньших b и взаимно простых с b. Положим $l + 1 = \varphi\left(\left(10^k - 1\right)p\right)$, тогда $10^{(l+1)k} - 1$ делится на $10^{l+1} - 1$, а $10^{l+1} - 1$ в силу теоремы Эйлера делится на $\left(10^k - 1\right)p$. (Утверждение можно доказать и без помощи теоремы Эйлера: заметим, что найдутся такие различные $l_1 > l_2$, что S_{l_1} и S_{l_2} дают один и тот же остаток при делении на p. Тогда $S_{l_1} - S_{l_2} = 10^{(l_2+1)k}S_{l_1-l_2}$ делится на p, т.е. $S_{l_1-l_2}$ делится на p.)

Шаг 4. Существует полосатое число, делящееся на $2^k p$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, где $\text{НОД}(p, 10) = 1$.

Доказательство аналогично третьему шагу с использованием построенного на втором шаге полосатого числа, делящегося на 2^k.

Шаг 5. Существует полосатое число, делящееся на $2 \cdot 5^k p$, где $\text{НОД}(p, 10) = 1$.

Достаточно приписать 0 в конце нечетного полосатого числа, делящегося на 5^k, полученного на третьем шаге.

Публикацию подготовили
Н.Агаханов, П.Кожевников, Д.Терешин

XXXV Международная физическая олимпиада

С 15 по 23 июля 2004 года в Южной Корее в городе Поханг проходила очередная международная физическая олимпиада школьников. В олимпиаде приняли участие команды из 73 стран, в том числе – команда Франции, которая 25 лет не участвовала в олимпиаде. Япония, ранее не принимавшая участие в олимпиаде, прислала своего наблюдателя; это означает, что Япония имеет намерение в следующем году присоединиться к олимпиадному движению. Общее число участников олимпиады составило 332 школьника.

Как и в предыдущие годы, подготовка сборной команды России проводилась на базе Московского физико-технического института. Кандидаты в сборную были отобраны по результатам двух всероссийских олимпиад, а также одного квалификационного и двух учебно-тренировочных сборов. Во время проведения сборов с ребятами работали преподаватели кафедры общей физики, а также студенты Физтеха – победители международных олимпиад прошлых лет. В общей сложности продолжительность всех сборов составила четыре с половиной недели.

В сборную команду России на XXXV Международную физическую олимпиаду школьников были включены:

Глазырин Семен – гимназия 127, Снежинск Челябинской обл. (учитель физики – Е.М.Елькина),

Речистов Григорий – Многопрофильный лицей, Вологда (учителя – Л.Н.Суханов и А.Г.Дрижук),

Оферкин Игорь – школа 18, Новочебоксарск (учителя – Л.Н.Турковская и В.Д.Кочаков),

Лесничий Яков – лицей 3, Кропоткин Краснодарского кр. (учитель – Н.Г.Черная),

Андреев Иван – экспериментальная школа 82, Черноголовка Московской обл. (учителя – В.Г.Егоров и Г.В.Любимова).

Команду России возглавили профессор МФТИ С.М.Козел и доцент МФТИ В.П.Слободянин. В качестве наблюдателя от России на олимпиаде присутствовал Заслуженный учитель России (ФМЛ 31, Челябинск) И.А.Иоголевич, ученики которого на предыдущих международных олимпиадах завоевали четыре золотые медали.

Участникам олимпиады были предложены три теоретических задания, каждое из которых оценивалось в 10 баллов, и одно экспериментальное задание – 20 баллов. Таким образом, каждый из участников олимпиады мог набрать 50 баллов. Как теоретические, так и экспериментальные задания для большинства участников олимпиады оказались очень трудными. Средний балл за решение первого теоретического задания составил 5,0; второго задания – 4,9; третьего – 3,3; а средний балл за выполнение экспериментального задания был равен 9,1. Аналогичные баллы, полученные нашими ребятами, составили 7,7; 7,8; 8,2 и 11,6 соответственно. Эти результаты показывают, что ребята хорошо справились с заданиями теоретического тура (79%) и значительно хуже – с экспериментом (58%).

По итогам выступления на XXXV Международной физической олимпиаде были отмечены 215 участников. Золотые медали получил 31 ученик, серебряные – 35 и бронзовые – 68. Кроме того, 81 участник был награжден грамотами.

Члены сборной России показали следующие результаты: Глазырин Семен – 38,5 балла, Оферкин Игорь – 36,8 балла, Андреев Иван – 35,6 балла, Речистов Григорий – 34,3 балла (все они получили серебряные медали), Лесничий Яков – 31,0 балл (бронзовая медаль).

Сравнительные неофициальные результаты выступления на олимпиаде 13 лучших команд приведены в таблице:

№	Страна	Золотые медали	Серебряные медали	Бронзовые медали	Грамоты	Сумма баллов
1.	Китай	5				222,1
2.	Иран	3	1	1		196,7
3.	Корея	4		1		193,9
4.	Белоруссия	2	2	1		184,6
5.	Украина	2	1	2		182,3
6.	США	2	2	1		181,0
7.	Венгрия	2	2		1	177,0
8.	Россия		4	1		176,2
9.	Тайвань	1	3	1		174,5
10.	Индия	1	3	1		172,0
11.	Тайланд	1	1	3		171,4
12.	Румыния	1	2	2		170,7
13.	Вьетнам		3	2		169,9

Как видно из таблицы, конкуренция между командами лидирующей группы стран была исключительно острой (исключение составила команда Китая, которая в последние годы оказывается вне конкуренции). В этих условиях решающим фактором в борьбе за более высокое место становятся различные «мелочи»: аккуратная запись результатов, указание размерностей измеренных величин, правильно выбранный масштаб графиков, четко выполненный рисунок или схема, грамотно оцененная ошибка измерений и т.д.

Результаты, полученные нашими ребятами, следует признать удовлетворительными, но они могли быть значительно выше. Посредственное выступление на экспериментальном туре в значительной мере отражает общее ослабление экспериментальной подготовки российских школьников. На начальном этапе подготовки многие из кандидатов в сборную команду вообще не имели никаких экспериментальных навыков. Руководители сборной команды многие годы безуспешно пытаются доказать необходимость создания специализированной, хорошо оснащенной современными приборами физической лаборатории для подготовки сборной команды в области эксперимента. Такие лаборатории в рамках целевых программ подготовки национальных сборных команд созданы во многих странах, лидирующих на олимпиаде (Китай, США, Иран, Корея, Тайвань, Румыния, Индия и др.). Наша же команда проходит экспериментальную подготовку на базе физических лабораторий Московского физико-технического института, которые ориентированы на студентов 1 – 3 курсов, а не на выпускников средней школы.

Как и в прежние годы, успешно выступили на олимпиаде команды стран азиатского региона. Это не удивительно. В этих странах разработаны специальные государственные программы работы с одаренными детьми. Успешное выступление команды на олимпиаде школьников по физике правительствами этих стран рассматривается как дело государственного престижа. Созданы все условия для подготовки сборных команд (организационно-технические и финансовые). На период подготовки команды к олимпиаде ребята освобождаются от всех других занятий и экзаменов. К сожалению, подготовка сборной команды России проходит в более жестких условиях – без значительной финансовой поддержки со стороны государства и спонсоров и в более короткие сроки. Достаточно сказать, что у государства не нашлось валюты, чтобы вовремя оплатить поездку команды в Корею, и руководителям сборной пришлось «добывать» деньги у знакомых. Подготовка нашей сборной к участию в международной олимпиаде опирается главным образом на энтузиазм школьных учителей и небольшой группы преподавателей Московского физико-технического института.

Условия теоретических задач (и ответы к ним) приведены ниже. Здесь же кратко расскажем об экспериментальном задании, в котором учащимся предлагалось исследовать механический «черный ящик», состоящий из длинной трубки, к торцам которой с помощью пружин разной жесткости был прикреплен металлический шар. При горизонтальном положении трубки равновесное положение шара не совпадало с серединой трубки. Конструкция «черного ящика» в общих чертах была описана в задании. Ребятам нужно было выполнить ряд экспериментов для того, чтобы определить параметры ящика: равновесное положение шарика относительно середины трубки, его массу, жесткости пружин. Для выполнения этой работы участникам олимпиады выдали прецизионные измерители скорости, электронные секундомеры с оптическим запуском, электронные весы и некоторые другие механические устройства и приспособления. Успех выполнения задания зависел от аккуратного выполнения длинной серии нескольких экспериментов, обработки экспериментальных данных, аккуратного построения графиков в правильно выбранных координатах и получения из этих графиков нужных параметров. Другими словами – требовалась значительная «черновая» работа, при которой творческий элемент отходил на второй план. Именно в этой части задания наши ребята проявили поспешность и даже небрежность (особенно при построении графиков).

В один из свободных дней олимпиады был проведен неофициальный креативный конкурс, в котором приняли участие 84 команды по 5 человек в каждой, из них 19 – корейские команды, сформированные из школьников города Поханг. Участникам конкурса предлагалось, используя только выданные материалы (воздушные шарики, картон, бумагу, теннисные мячи, скотч), построить «летательный аппарат, который был бы как можно тяжелее и как можно дольше продержался бы в воздухе». Наши ребята проявили чудеса изобретательности. Построенный ими аппарат оказался лучшим, и российская команда заняла первое место, а все ее участники получили по цифровой фотокамере.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

Задача 1. Сопротивление «Пинг-понг»

Конденсатор состоит из двух параллельных пластин в форме кругов радиусом R, расположенных на расстоянии d ($d \ll R$) друг от друга (рис.1,*а*). Верхняя пластина присоединена к источнику постоянного напряжения с потенциалом U, а нижняя пластина заземлена. Затем тонкий маленький диск массой m, радиусом r ($r \ll R, d$) и пренебрежимо малой толщиной δ ($\delta \ll r$) помещают в центр нижней пластины (рис.1,*б*).

Пластины и диск, изготовленные из хорошо проводящего материала, находятся в вакууме. Всеми электростатическими краевыми эффектами и индуцированными зарядами, а также индуктивностью всей цепи и связанными с ней эффектами можно пренебречь. Диэлектрическая постоянная ε_0 считается известной.

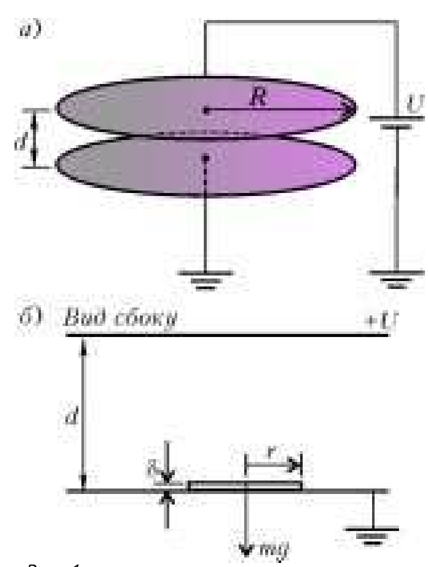


Рис. 1

a) Рассчитайте электростатическую силу F взаимодействия между пластинами, находящимися на расстоянии d, до помещения диска между ними. (1,2 балла)

b) Когда диск помещен на нижнюю пластину, он приобретает заряд q, пропорциональный напряжению U на конденсаторе: $q = \chi U$. Выразите χ через r, d и ε_0. (0,8 б.)

c) Параллельные пластины конденсатора расположены перпендикулярно гравитационному полю $\vec{g}$. Чтобы диск в первый раз поднялся вверх из исходного положения, необходимо приложить напряжение, превышающее пороговое значение U^*. Выразите U^* через m, g, d и χ. (0,5 б.)

d) При $U > U^*$ диск движется вверх-вниз между пластинами. (Предполагается, что диск движется строго вертикально, без качания.) Столкновения между диском и каждой пластиной неупругие с коэффициентом восстановления $\eta = v_2/v_1$, где v_1 и v_2 – скорости диска до и после столкновения соответственно. Пластины закреплены неподвижно. После большого количества столкновений скорость диска сразу после очередного столкновения с нижней пластиной стремится к значению, которое назовем «скоростью в установившемся режиме» $v_у$. Величина $v_у$ зависит от U по формуле

$$v_у = \sqrt{\alpha U^2 + \beta}\,.$$

Выразите коэффициенты α и β через m, g, χ, d и η. Предполагается, что диск касается пластины одновременно всей поверхностью, так что полная перезарядка происходит мгновенно при каждом столкновении. (2,3 б.)

e) В установившемся режиме средний по времени ток I через обкладки конденсатора при условии $qU \gg mgd$ может быть представлен в виде $I = \gamma U^2$. Выразите коэффициент γ через m, χ, d и η. (2,2 б.)

f) При очень медленном уменьшении приложенного напряжения U существует критическое значение напряжения $U_к$, ниже которого ток скачком прекращает течь. Выразите $U_к$ и соответствующий ему ток $I_к$ через m, g, χ, d и η. Сравнив $U_к$ с пороговым значением U^*, определенным в пункте c), приближенно изобразите зависимости I от U при увеличении и при уменьшении U в пределах от 0 до $3U^*$. (3 б.)

Задача 2. Поднимающийся шар

Резиновый шар, наполненный гелием, поднимается в небо. Давление и температура атмосферного воздуха уменьшаются с высотой. В дальнейшем будем предполагать, что сферическая форма шара сохраняется, несмотря на прикрепленный к нему груз, и пренебрежем объемом самой оболочки и груза. Будем также предполагать, что температура гелия внутри шара совпадает с температурой окружающего воздуха, и считать гелий и воздух идеальными газами. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К), молярные массы гелия и воздуха $M_г = 4{,}00 \cdot 10^{-3}$ кг/моль и $M_в = 28{,}9 \cdot 10^{-3}$ кг/моль соответственно, ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

Часть A

a) Предположим, что окружающий воздух имеет давление p и температуру T. Давление внутри шара выше наружного из-за упругих свойств оболочки. Пусть шар содержит n молей гелия и давление внутри него равно $p + \Delta p$. Определите выталкивающую силу F, действующую на шар, как функцию от p и Δp. (1,5 б.)

b) В Корее в один из летних дней было обнаружено, что температура T воздуха на высоте z над уровнем моря задается соотношением

$$T(z) = T_0 (1 - z/z_0)$$

в диапазоне $0 < z < 15$ км, где $z_0 = 49$ км и $T_0 = 303$ К. Давление и плотность воздуха на уровне моря равны $p_0 = 1$ атм $= 1{,}01 \cdot 10^5$ Па и $\rho_0 = 1{,}16$ кг/м^3 соответственно. В указанном диапазоне высот давление изменяется с высотой по закону

$$p(z) = p_0 (1 - z/z_0)^{\eta}\,.$$

Выразите постоянную η через величины z_0, ρ_0, p_0, g и определите ее значение с точностью до двух значащих цифр. Считайте ускорение свободного падения g постоянным, не зависящим от высоты. (2 б.)

Часть B

Когда резиновый шар (с радиусом r_0 в нерастянутом состоянии) раздувается до сферы радиусом r ($\geq r_0$), его оболочка из-за растяжения приобретает упругую энергию. В упрощенной теории упругая энергия U надутой сферической оболочки при постоянной температуре T описывается выражением

$$U = 4\pi r_0^2 kRT\left(2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3\right),$$

где $\lambda = r/r_0$ (≥ 1) – коэффициент растяжения (по радиусу), а k – некоторая константа, выраженная в моль/м^2.

c) Выразите Δp через параметры, входящие в выражение для U, и изобразите графически зависимость Δp от λ. (2 б.)

d) Постоянная величина k может быть определена через количество молей гелия, необходимых для надувания шара. При $T_0 = 303$ К и $p_0 = 1{,}0$ атм нерастянутый шар (при $r = r_0$) содержит $n_0 = 12{,}5$ моль гелия. Для раздувания шара до значения $\lambda = 1{,}5$ при неизменных температуре T_0 и внешнем давлении p_0 в нем должно находиться в общей сложности $n = 3{,}6 n_0 = 45$ моль гелия. Выразите параметр a оболочки, определяемый как $a = k/k_0$, где $k_0 = \dfrac{r_0 p_0}{4RT_0}$, через n, n_0 и λ. Вычислите его значение с точностью до двух значащих цифр. (1,5 б.)

Часть C

Шар накачали на уровне моря, как в пункте d) (коэффициент растяжения по радиусу $\lambda = 1{,}5$, число молей гелия внутри $n = 3{,}6 n_0 = 45$ моль), при температуре $T_0 = 303$ К и давлении $p_0 = 1{,}0$ атм $= 1{,}01 \cdot 10^5$ Па. Общая масса шара, включая газ, оболочку и груз, равна $M = 1{,}12$ кг. Такой шар начинает подниматься от уровня моря.

e) Пусть этот шар поднялся до такой высоты z^*, на которой выталкивающая сила уравновешивается суммарной силой тяжести. Определите z^* и коэффициент растяжения λ^* на этой высоте. Рассчитайте их числовые значения с точностью до двух значащих цифр. Утечкой газа и боковым смещением из-за ветра пренебрегите. (3 б.)

Задача 3. Атомный зондирующий микроскоп

Атомный зондирующий микроскоп (АЗМ) является мощным исследовательским инструментом в области нанофизики. Движение датчика АЗМ регистрируется с помощью фотодетектора, принимающего отраженный луч лазера, как показано на рисунке 2. Датчик закреплен на упругой горизонтальной пластинке и может колебаться только в вертикальном направлении. Его смещение z, зависящее от времени t, описывается уравнением

$$m\frac{d^2 z}{dt^2} + b\frac{dz}{dt} + kz = F\,,$$

где m – масса датчика, $k = m\omega_0^2$ – коэффициент упругости пластинки, b – малый коэффициент затухания, удовлетворяющий условию $\omega_0 \gg (b/m) > 0$, F – внешняя сила, действующая на датчик со стороны пьезоэлемента.

Часть А

a) Если $F = F_0 \sin \omega t$, то зависимость $z(t)$, удовлетворяющая заданному уравнению, имеет вид $z(t) = A \sin(\omega t - \varphi)$, где $A > 0$ и $0 \le \varphi \le \pi$. Получите выражения для амплитуды A и тангенса фазы $\operatorname{tg} \varphi$ через параметры F_0, m, ω, ω_0 и b. Найдите значения амплитуды A и фазы φ на резонансной частоте $\omega = \omega_0$. (1,5 б.)

b) Электронное устройство, показанное на рисунке 2, перемножает входной и опорный сигналы и выделяет в качестве выходного сигнала только постоянную составляющую произведения обоих сигналов. Допустим, входной сигнал задается формулой $U_1 = U_{10} \sin(\omega_1 t - \varphi_1)$, а опорный — формулой $U_2 = U_{20} \sin \omega t$, где U_{10}, U_{20}, ω_1 и φ_1 являются заданными положительными константами. Найдите условие для $\omega\ (> 0)$, при котором на выходе появляется отличный от нуля сигнал. Получите выражение для величины выходного сигнала (постоянной составляющей произведения) на заданной частоте ω. (1 б.)

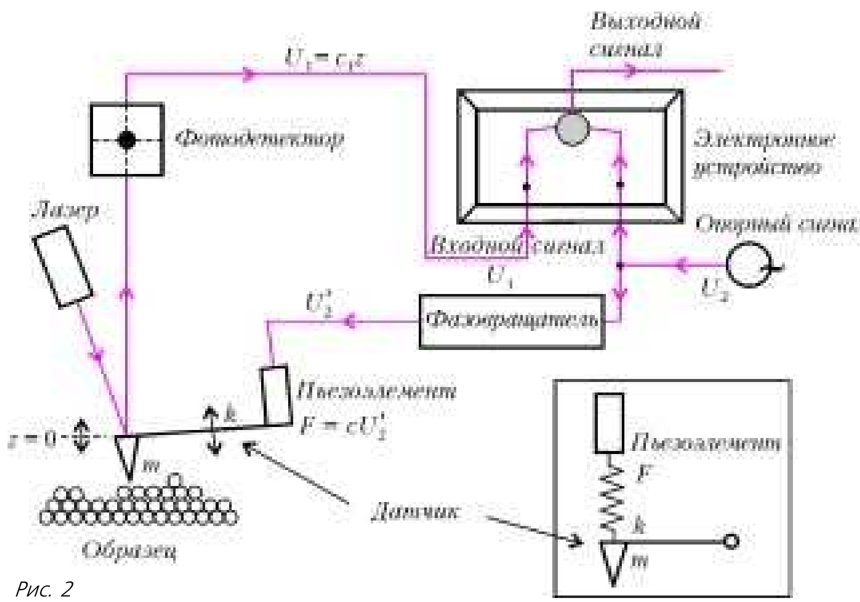


Рис. 2

c) Пройдя через фазовращатель, опорный сигнал, напряжение которого зависит от времени по закону $U_2 = U_{20} \sin \omega t$, приобретает вид $U_2' = U_{20} \sin(\omega t + \pi/2)$. Это напряжение U_2' подается на пьезоэлемент, который создает силу $F = cU_2'$, приложенную к датчику. Затем фотодетектор преобразует смещение датчика z в напряжение $U_1 = c_1 z$. В этих соотношениях c и c_1 – известные константы, U_1 – входной сигнал. Получите выражение для постоянной составляющей выходного сигнала при частоте опорного сигнала $\omega = \omega_0$. (1,5 б.)

d) Малое изменение массы датчика Δm приводит к сдвигу его резонансной частоты на величину $\Delta\omega_0$, в результате чего фаза входного сигнала φ на первоначальной резонансной частоте ω_0 испытывает сдвиг на величину $\Delta\varphi$. Найдите изменение массы датчика Δm, при котором сдвиг фазы оказывается равным $\Delta\varphi = \pi/1800$, что типично для фазовых измерений. Значения физических параметров датчика следующие: $m = 1{,}0 \cdot 10^{-12}$ кг, $k = 1{,}0$ Н/м и $b/m = 1{,}0 \cdot 10^3\ \text{с}^{-1}$. Используйте следующие приближенные формулы: $(1+x)^a \approx 1 + ax$ и $\operatorname{tg}(\pi/2 + x) \approx -1/x$ (при $|x| \ll 1$). (2 б.)

Часть В

Далее рассмотрите поведение устройства, включая все силы, действующие на датчик, описанные в части A, а также дополнительную силу со стороны образца, рассмотренную ниже.

e) Считайте, что дополнительная сила $f(h)$, действующая на датчик со стороны поверхности образца, зависит только от расстояния h между концом датчика и поверхностью образца. Зная эту силу, можно найти новое положение равновесия датчика h_0. Вблизи этого положения h_0 можно приблизительно записать $f(h) \approx f(h_0) + c_2(h - h_0)$, где c_2 – коэффициент, не зависящий от h. Найдите новую резонансную частоту колебаний датчика ω_0' и выразите ее через величины ω_0, m и c_2. (1,5 б.)

f) Острие датчика, несущее электрический заряд $Q = 6e$, движется горизонтально над поверхностью и проходит над электроном с зарядом $q = e$, расположенным (локализованным в пространстве) на некотором расстоянии под поверхностью образца. В ходе сканирования вблизи электрона максимальный сдвиг резонансной частоты $\Delta\omega_0\ (= \omega_0' - \omega_0)$ оказывается значительно меньше ω_0. Получите выражение для расстояния d_0 от острия датчика до локализованного электрона, при котором сдвиг частоты будет максимальным. Выразите это расстояние через параметры m, q, Q, ω_0, $\Delta\omega_0$ и постоянную закона Кулона k_e. Рассчитайте расстояние d_0 в нанометрах ($1\ \text{нм} = 1 \cdot 10^{-9}$ м) для сдвига частоты $\Delta\omega_0 = 20\ \text{с}^{-1}$. Параметры датчика следующие: $m = 1{,}0 \cdot 10^{-12}$ кг, $k = 1{,}0$ Н/м. Любыми поляризационными эффектами как для датчика, так и для образца, следует пренебречь. Физические постоянные равны: $k_e = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9{,}0 \cdot 10^9\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2$, $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. (2,5 б.)

Публикацию подготовили
С.Козел, В.Слободянин, И.Иоголевич

Московская студенческая олимпиада по физике

23 мая 2004 года в Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э Баумана прошел московский региональный тур Всероссийской олимпиады по физике среди студентов технических вузов. К участию в олимпиаде были приглашены все ведущие технические вузы Москвы. Состав каждой команды – 10 студентов до 3 курса включительно. Командный зачет проводится по 5 лучшим результатам членов команды.

Участникам олимпиады был предложен вариант из 9 задач (в зависимости от сложности задачи оценивались от 5 до 10 баллов) и разрешалось пользоваться любой литературой.

По результатам олимпиады в командном зачете первое место заняла команда МГТУ им. Н.Э.Баумана (89 баллов), второе место – команда Московского государственного института стали и сплавов (МИСиС) (86 б.) , третье место – команда Московского института электронной техники (65 б.).

В личном зачете первое место завоевал *Е.Кожанов* (Московский государственный университет путей сообщения, 26 баллов), второе место – *А.Иванов* (МГТУ им.Н.Э.Баумана, 25 б.), третье место – *Г.Беланов* (МИСиС, 22 б.), четвертое место – *А.Шотанов* (МИСиС, 20 б.), пятое место – *М.Канцеров* (МГТУ им.Н.Э.Баумана, 20 б.).

Задачи олимпиады

1. Частица массой m и зарядом q движется в среде в поперечном магнитном поле с индукцией B с начальной скоростью v_0. Сила сопротивления равна $F_c = -kv^2$. Определите величину и направление вектора перемещения от начального момента до конечной точки траектории, если в начальный момент сила трения много меньше силы Лоренца.

2. Космический зонд находится на стационарной круговой орбите радиусом $17R$ у исследуемой планеты, радиус которой R. Скорость его движения по этой орбите равна v_0. Запас топлива может обеспечить изменение скорости зонда не более чем на $2v_0$. Для возвращения на Землю зонд должен оторваться от планеты и приобрести при этом максимально возможную скорость. Определите величину этой максимальной скорости и опишите маневр, который при этом необходимо совершить.

3. Малое тело массой m висит на тонкой нерастяжимой нити, пропущенной через отверстие в потолке. Тело раскачивается в одной плоскости с угловой амплитудой α_0, расстояние от тела до отверстия l. В момент, когда отклонение тела от вертикали максимально, нить случайно отпускают, и поймать ее удается только тогда, когда длина свешивающейся части нити становится равной $2l$. Какова будет амплитуда малых колебаний маятника?

4. Жесткий невесомый обруч стоит на поверхности стола. В верхней точке обруча закреплено маленькое тело массой m. В начальный момент времени телу придали легкий толчок в горизонтальном направлении. Определите, на какой угол повернется обруч до начала проскальзывания, если коэффициент трения между столом и обручем равен $1/3$.

5. В длинной теплоизолированной трубке находится одноатомный газ, заключенный между двумя поршнями, расстояние между которыми постоянно. Давление газа p, температура T и плотность ρ. В начальный момент времени поршни начинают двигаться со скоростью v_0 в одном направлении. Определите, на сколько изменится температура газа после завершения переходных процессов.

6. Цилиндрический сосуд объемом V разделен на две части невесомым теплоизолированным поршнем, который может перемещаться без трения. Температуры в обеих частях сосуда различны, а давления одинаковы и равны p_0. Идеальная тепловая машина использует газ с высокой температурой как нагреватель, а с низкой – как холодильник. Какую работу совершит тепловая машина, если после выравнивания температур в обеих частях сосуда давление станет равным p?

7. Два параллельных металлических цилиндра радиусом R заряжены с линейной плотностью λ зарядами противоположных знаков. Расстояние между осями цилиндров $3R$. Определите силу взаимодействия между цилиндрами, приходящуюся на единицу длины.

8. Расстояние между четырьмя параллельными пластинами длиной l и шириной a равно d ($l \gg a \gg d$). С одной стороны все четыре пластины замкнуты между собой, с другой стороны пластины *1* и *3* замкнуты на вывод A, а пластины *2* и *4* – на вывод $Б$. Определите индуктивность между выводами A и $Б$.

9. Фазовая пластинка, выполненная из стекла с показателем преломления n, перекрывает 10 зон Френеля с 10-й по 19-ю. Толщина пластинки в пределах каждой четной зоны меняется при увеличении радиуса от $\lambda/(2(n-1))$ до $\lambda/(n-1)$, в пределах каждой нечетной зоны – наоборот, от $\lambda/(n-1)$ до $\lambda/(2(n-1))$. Определите интенсивность света в точке наблюдения, если интенсивность падающей плоской световой волны равна I_0.

Публикацию подготовили М.Яковлев, В.Голубев

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

Задачи

(см. «Квант» №1)

1. Такое может случиться. Пример: Петя купил 50 г чая по цене 10 коп. за грамм, 30 г – по цене 20 коп. за грамм, 10 г – по цене 30 коп. за грамм.

2. а) Нельзя. В самом деле, если число имеет не больше 3 цифр, то его квадрат – не больше 6 цифр, в итоге одна цифра останется незадействованной. Если же число имеет не меньше 4 цифр, то его квадрат – не меньше 7 цифр, а это в сумме дает 11 цифр – опять никуда не годится.

б) Можно. С помощью 10 различных цифр записываются квадрат и куб числа 69 – эти числа равны 4761 и 328509 соответственно.

3. Петя не ошибся. Если в соревновании участвовало N спортсменов, то Вася составляет $\frac{1}{N}$-ю их часть. С другой стороны,

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1},$$

откуда

$$N = \frac{n(n-1)}{n^2-3n+1} = 1 + \frac{2n-1}{n^2-3n+1}.$$

При $n = 3$ получаем $N = 6$. При $n > 3$ в правой части стоит дробное выражение (при $n = 4$ в этом можно убедиться непосредственно, а при $n \geq 5$ знаменатель дроби $n^2-3n+1 = (2n-1)\left(\frac{n}{2}-\frac{5}{4}\right)-\frac{1}{4}$ больше числителя $2n-1$).

Итак, Васю обошли всего $\frac{1}{n}\cdot N = \frac{1}{3}\cdot 6 = 2$ спортсмена, так что Вася действительно занял призовое третье место.

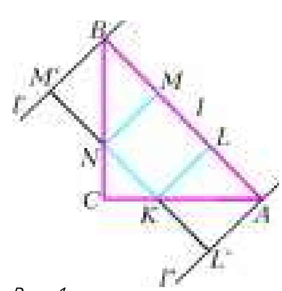


Рис. 1

4. Отразим прямую l, на которой лежит гипотенуза AB треугольника ABC, симметрично относительно прямых BC и AC – получим две параллельные прямые l' и l'' (рис.1). Траектория шара $MNKL$

1	2	1	1	1	2	1	1	0
2	2	2	2	2	2	2	2	1
1	2	2	2	2	2	2	2	1
1	1	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	2	2	2	2	2	1
2	2	2	2	2	2	2	2	1
1	2	2	2	2	2	2	2	1
1	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	1	2	1	1	1	2	1

Рис. 2

при этом перейдет в отрезок $M'L'$, перпендикулярный прямым l' и l''. Поскольку все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой, то длина пути, пройденного шариком, не зависит от точки старта.

5. Нет. Например, по числам, указанным на рисунке 2, нельзя однозначно восстановить расположение мин – см. рисунок 3.

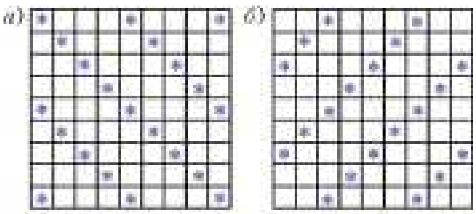


Рис. 3

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №5 за 2004 г.)

6. Поскольку $\sqrt{x} \geq 0$, то из первого уравнения следует $y \leq 1$. Тогда из второго уравнения $z \geq 4$, а из третьего $x \leq 0$. Но x не может быть отрицательным числом, поэтому $x = 0$. Далее легко находятся остальные неизвестные.

Ответ: $x = 0$, $y = 1$, $z = 4$.

7. Очевидно, $k \geq 3$.

Если $k = 3$, то турнир возможен. В самом деле, пусть первая команда победила вторую, вторая – третью, а третья – первую; такие результаты удовлетворяют условию.

Если $k = 4$, то турнир невозможен. Убедимся в этом. Пусть некоторая команда победила другую. Присвоим им номера 1 и 2 (соответственно). Тогда, согласно условию, среди оставшихся двух команд есть такая (присвоим ей номер 3), что команда 2 победила команду 3, а команда 3 – команду 1. Последней команде присвоим номер 4. Из условия следует, что каждая команда кому-то непременно проиграла. Пусть команда 4 проиграла, для определенности, команде 1. Тогда она должна выиграть у какой-то команды, победившей команду 1. Но команду 1 победила только команда 3 (а команда 2 команде 1 поиграла). Поэтому команда 4 победила команду 3. Что ж, как видим, выяснены отношения между всеми командами, кроме команд 2 и 4. И здесь-то оказывается, что любой исход их встречи противоречит условию. В самом деле, если команда 2 выиграла у команды 4, то команда 4 должна выиграть у какой-то из команд, победившей команду 2. Но команда 4 выиграла только у команды 3, которая проиграла команде 2, – противоречие. Если же команда 4 выиграла у команды 2, то команда 2 должна победить какую-то из команд, одолевших команду 4. Но команда 2 победила только команду 3, которая проиграла команде 4, – опять противоречие.

Для $k = 5$ и 6 турнир возможен. Описывать его словами – чрезмерно громоздко, поэтому просто приведем итоговые таблицы этих турниров (рис.4). Здесь знаком «+» обозначена победа, а знаком «–» – поражение.

	1	2	3	4	5
1		+	+	–	–
2	–		+	+	–
3	–	–		+	+
4	+	–	–		+
5	+	+	–	–	

	1	2	3	4	5	6
1		+	–	–	+	+
2	–		+	+	–	+
3	+	–		+	+	–
4	+	–	–		–	+
5	–	+	–	+		–
6	–	–	+	–	+	

Рис. 4

Докажем теперь, что для всех $k \geq 7$ турнир также возможен. Применим индукцию по k, но k будем менять с шагом 2. Тогда из того, что турнир возможен для $k = 5$, будет следовать, что он возможен для $k = 7$, 9, 11 и т.д., а из возможности турнира для $k = 6$ будет следовать его возможность для $k = 8$, 10, 12 и т.д.

Допустим, что для некоторого k турнир возможен. Назовем k команд этого турнира *старыми*. Добавим к ним еще две *новые* команды P и Q. Пусть в турнире с этими $k + 2$ командами все старые команды сыграют между собой так же, как и прежде. Что же касается новых команд, то пусть команда P победила команду Q, команда Q победила все старые команды, а все старые команды победили команду P.

Нетрудно убедиться, что такой турнир удовлетворяет условию.

Итак, турнир возможен при $k = 3$, а также для всех $k \geq 5$.

8. В качестве N возьмем число $N = \underbrace{99\ldots99}_{2004\ \text{девятки}}$. Умножить N на k – это то же самое, что произвести вычитание $k\underbrace{00\ldots00}_{2004\ \text{нуля}} - k$. Сделаем это вычитание в столбик, представив число k в виде $k = \overline{a_1a_2\ldots a_{2004}}$ (допуская запись цифры 0 в старших разрядах:

$$\begin{array}{cccccccc}
a_1 & a_2 & \ldots & a_{2004} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
- & & & & a_1 & a_2 & \ldots & a_{2003} & a_{2004} \\
a_1 & a_2 & \ldots & (a_{2004}-1) & (9-a_1) & (9-a_2) & \ldots & (9-a_{2003}) & (10-a_{2004})
\end{array}$$

Мы видим, что сумма цифр числа kN равна $2004 \cdot 9$, т.е. равна сумме цифр числа N.

9. В результате каждого преобразования получается параллелограмм с тем же центром симметрии, что и у исходного квадрата. Задача, таким образом, сводится к доказательству того, что площадь общей части двух единичных квадратов с совпадающими центрами больше 0,8.

Оценим площадь одного из четырех равных прямоугольных треугольников, пронумерованных на рисунке 5.

Пусть вершина прямого угла треугольника (совпадающая с

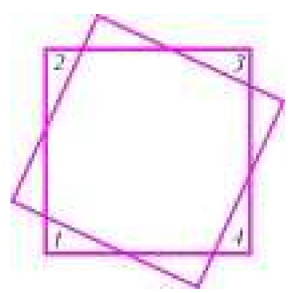


Рис. 5

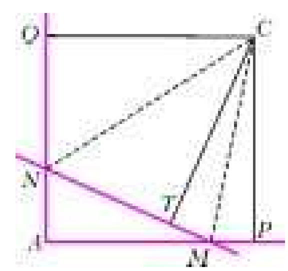


Рис. 6

вершиной одного из квадратов) находится в точке A, а сторона второго квадрата пересекает стороны первого в точках M и N (рис. 6). Обозначим также общий центр квадратов через C и опустим из точки C перпендикуляры CP и CQ на стороны первого квадрата, а также перпендикуляр $CTKMN$. Имеем $CP = CQ = CT = AP = AQ = \frac{1}{2}$. Прямоугольные треугольники CMP и CMT равны по катету и гипотенузе. Поэтому $MP = MT$. Аналогично, $NQ = NT$.

Положим $MP = MT = x$, $NQ = NT = y$. Тогда $MN = x + y$, $AM = \frac{1}{2} - x$, $AN = \frac{1}{2} - y$. По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника AMN

$$\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - y\right)^2 = (x + y)^2, \text{ откуда } y = \frac{1 - 2x}{2(2x + 1)}.$$

Тогда площадь треугольника AMN равна

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} - y\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1-2x}{2(2x+1)}\right) = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2x+1}\right).$$

Максимальное значение S достигается при минимальном значении выражения в скобках. Но в скобках расположена сумма двух положительных слагаемых, произведение которых равно 1. Эта сумма не меньше 2. Следовательно,

$$S \le \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot 2 = \frac{3-2\sqrt{2}}{4} < \frac{3-2\cdot 1{,}4}{4} = 0{,}05.$$

Следовательно, суммарная площадь четырех треугольников меньше 0,2, а площадь общей части квадратов больше 0,8.

10. Пусть для определенности d – наименьшее из чисел a, b, c, d. Если хотя бы одно из чисел a и b равно d, то другое равно c, и тогда $a + b = c + d$.

Если же $a > d$ и $b > d$, то при $c = d$ имеем неравенство $2^a + 2^b > 2^c + 2^d$, а при $c > d$ левая часть делится на 2^{d+1}, а правая – не делится. Значит, такая ситуация невозможна.

О ДИНАМИКЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ

1. $v_0 = \sqrt{g(2H+3R)} \approx 13$ м/с; $s = \sqrt{2(H+R)R + H^2} \approx 12$ м.

2. Сила тяги равна $F = mg\dfrac{R^2}{(R+h)^2}\sin\varphi \approx 0{,}02mg = 200$ Н и перпендикулярна плоскости движения спутника.

3. $T = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\dfrac{v^2}{L}$. **4.** $T_{\max} = \dfrac{mg}{80}$. **5.** $v_2 = \sqrt{2gR} = 4$ м/с.

6. Сумма сил равна $F = \dfrac{mv^2\cos^2\alpha}{R}$ и направлена по горизонтали к оси винтовой линии.

ИНСТИТУТ КРИПТОГРАФИИ, СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ АКАДЕМИИ ФСБ РФ

Математика

Вариант 1

1. $\dfrac{200}{3}\%$. **2.** Корни существуют при $d \in \left[\dfrac{23}{8}; 3\right]$. Произведение корней максимально при $d = 3$ и минимально при $d = \dfrac{23}{8}$.

3. $2 < x \le 4 - \sqrt{3}$. **4.** $\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **5.** $4 + 12\sqrt{3}$.

6. $\dfrac{\sqrt{335}-12}{4}$; $\dfrac{\sqrt{159}-12}{4}$.

Вариант 2

1. $(2; 1); \left(-1; \dfrac{23}{2}\right)$. **2.** $-2\sqrt{3}$. **3.** $\log_3 28 - 3 < x < \log_3 4$.

4. $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **5.** 17100 и 11400 рублей. **6.** $\dfrac{2\pi}{3}$.

Вариант 3

1. Данное число равно нулю.

2. 4. **3.** $-9; -8; -6; -5$. **4.** $\dfrac{\pi}{40} + \dfrac{\pi n}{20}$, $n \in \{-2; -1; 0; 1\}$.

5. $5\sqrt{15}$. **6.** $\begin{cases} x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}, \\ y = \pm 1. \end{cases}$

Физика

Вариант 1

1. $t = \sqrt{\dfrac{2H}{g}} = 2c$. **2.** $R = \sqrt[3]{\dfrac{gR_3^2T^2}{4\pi^2}} \approx 3{,}8\cdot 10^8$ м.

3. $I_3 = \dfrac{\mathcal{E}R_2}{(R_1+r)(R_2+R_3)+R_2R_3} = 2$ А.

4. $T_2 = \dfrac{mT_1}{\rho V_1} = 225$ К. **5.** $F = \dfrac{\Gamma l}{\Gamma^2 - 1} = 2$ см.

Вариант 2

1. $\alpha = \arcsin\dfrac{\sqrt{2gH}}{v_0}$. **2.** $F = \dfrac{M_1M_2v_1^2}{2s(M_1+M_2)} \approx 1{,}8\cdot 10^4$ Н.

3. $U = \dfrac{\mathcal{E}}{3}$. **4.** $\eta = \sqrt{\dfrac{p_2V_2\rho_1}{p_2m_2}} = 2$. **5.** $\varphi = 60°$.

Вариант 3

1. $s = \dfrac{Lv_2}{v_1} = 300$ м. **2.** $F = \dfrac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$.

3. $v = \sqrt{v_0^2 - 2g(H + \mu s\cos\alpha)}$. **4.** $n = \dfrac{p_1}{2p_0 - p_1}$.

5. $Q = C(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)^2$. **6.** $F = 2a\dfrac{\Gamma_2}{\Gamma_1 - 3\Gamma_2/2} = 4a = 36$ см.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕХНИКИ (ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Математика

Вариант 1

1. -2; $3/2$. **2.** $-15/17$. **3.** 2. **4.** $(-3; -3/2] \cup [1; 3/2)$. **5.** -2.

6. $192\pi\sqrt{2}$. **7.** $\pm\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **8.** 4:1. **9.** 574π.

10. $\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$; $\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$. **11.** $\sqrt{6}$.

Вариант 2

1. $6^{2/3}$. **2.** $-1/24$. **3.** $(2; 3) \cup (3; 5)$. **4.** -95. **5.** $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

6. $\dfrac{4}{3\sqrt{3}}$. **7.** $[-3; -1/2]$. **8.** $-\dfrac{\pi}{12} + 2\pi n$, $-\dfrac{5\pi}{12} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

9. 20 км/ч; 40/3 км/ч. **10.** $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

11. $(-\infty; -8] \cup [4; +\infty)$.

Физика

Вариант 1

1. $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{4}{5}$. **2.** $\mu \ge \dfrac{m_2}{m_1}\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0{,}29$. **3.** $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{m_2}{m_1} = 2$.

4. Не изменилась.

5. а) См. рис.7;

б) $\eta = \dfrac{2(A_1 - A_2)}{5A_1}$.

6. а) $U_1 = \dfrac{2}{3}U$; б) $U_2 = \dfrac{7}{9}U$.

7. $R_0 = \dfrac{3}{5}R = 30$ Ом.

8. а) $h = \dfrac{F_a}{IB} = 10$ см;

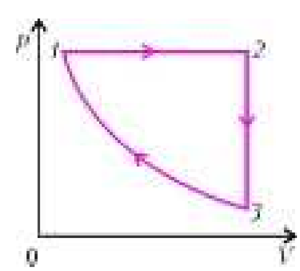


Рис. 7

б) $F_b = F_a = 1$ мН, $F_c = 0$.

9. $\alpha_{\text{пр}} = \arcsin\frac{1}{k} \approx 45°$. **10.** $A_1 = \frac{hc}{\lambda} - eU_2 \approx 2{,}7\cdot10^{-19}$ Дж, $A_2 = \frac{hc}{\lambda} - eU_1 \approx 3{,}4\cdot10^{-19}$ Дж.

Вариант 2

1. $\tau = \sqrt{\frac{2\Delta h}{g\left(1+g/a\right)}} = 30$ с. **2.** $\frac{F_Б}{F_A} = \sqrt{\frac{4}{\cos^2\alpha} - 3} \approx 1{,}5$.

3. $\frac{m_1}{m_2} \le \frac{1-\delta}{1+\delta} = \frac{3}{5}$, где $\delta = \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

4. $n = 1 + \frac{\Delta t}{t+273} = 1{,}1$.

5. $q_2 = -q_1\left(r_2/r_1\right)^3 = -8$ нКл, где r_1 и r_2 – расстояния от зарядов до точки, в которой касательная к линии поля параллельна прямой, проходящей через заряды.

6. $B = \frac{U_m}{\pi r^2 N\omega} \approx 8$ мТл. **7.** $v = v_1 + 2v_2 = 25$ см/с.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ.Н.Э.БАУМАНА

Математика

Вариант 1

1. $3 \le n \le 18$, $n \in \boldsymbol{N}$. **2.** $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $\frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$.

3. 7. **4.** $(-\infty; -3) \cup (-3; 1) \cup (4{,}5; +\infty)$. **5.** 90°.

6. $x_{1,2} = -a - 2 \pm \sqrt{a^2 + 5a}$ при $a \in (0; 3)$;

$x_1 = a - 2 + \sqrt{a^2 - 3a}$, $x_2 = -a - 2 - \sqrt{a^2 + 5a}$ при $a \in (4; +\infty)$.

7. Выполним параллельный перенос медианы AM в направлении медианы основания CD на величину половины ее длины (рис.8), при этом точка A перейдет в точку L, а M – в точку N – середину медианы TD боковой грани TAB. Через точки L и D проведем прямую, которая пересекает сторону BC в точке F. Треугольник TDF – искомое сечение. Докажем, что точка F делит сторону BC в отношении 1:2. Дополнив треугольник BDC до прямоугольника $BDCE$ (рис.9), заметим, что DS и BH – медианы треугольника BDE, которые при пересечении делятся в отношении 2:1. Отсюда $BF = 2BH/3 = \sqrt{14}/3$ и $DF = \frac{2}{3}DS = \frac{7\sqrt{2}}{6}$. Проведем $AK \perp FL$, тогда $TK \perp FL$, т.е. TK – высота треугольника TDF. Для ее вычисления проведем $AP \perp TK$. Длина AP равна заданному в условии задачи расстоянию между медианой AM и секущей плоскостью. В ΔDAL $DL = \frac{7\sqrt{2}}{4}$ и $AK = \frac{AD\cdot AL}{DL} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

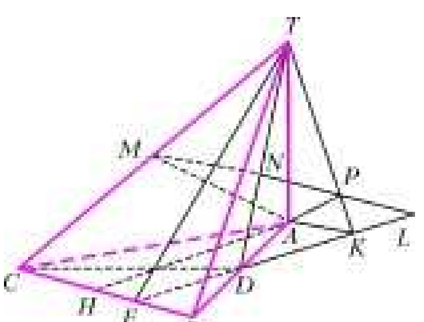


Рис. 8

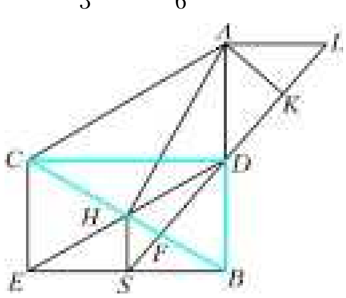


Рис. 9

Из треугольника TAK находим $PK = \sqrt{AK^2 - AP^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $TK = \frac{AK^2}{PK} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Площадь сечения $S_{\Delta TDF} = \frac{1}{2}DF\cdot TK = \frac{7}{4}$.

Вариант 2

1. 10 ч. **2.** $-\frac{5\pi}{4}; \frac{\pi}{4}$. **3.** -2. **4.** $(1/8; 1) \cup (1; 9/8)$. **5.** 3.

6. $x_1 = p + \sqrt{6-p}$, $y_1 = 5$ и $x_2 = p + \sqrt{2-p}$, $y_2 = 1$ при $-2 < p \le 1$; $x_1 = 4$, $y_1 = 5$ и $x_2 = 2$, $y_2 = 1$ при $p = 2$; $x_{1,2} = p \pm \sqrt{6-p}$, $y_{1,2} = 5$ при $2 < p < 6$. **7.** $\frac{21}{2}\sqrt{2}$.

Физика

Вариант 1

2. $A = \frac{1}{3}\mu mgL$. **3.** $C_1 = \frac{C_2U_2}{U_1 - U_2} = 1$ мкФ.

4. $\varepsilon = A + \frac{p^2}{2m} = 4{,}5\cdot1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж $+ \frac{\left(3{,}45\cdot10^{-25}\right)^2}{2\cdot9{,}1\cdot10^{-31}}$ Дж $= 7{,}85\cdot10^{-19}$ Дж.

5. $V_\text{а} = \frac{\nu_\text{а}RT}{p_0} = 15{,}3$ дм^3. *Указание.* При температуре 100 °С насыщенный пар воды имеет давление $p_0 = 10^5$ Па. Один моль газа при таком давлении и температуре 0 °С занимает объем $22{,}4$ дм^3, а при температуре 100 °С – еще больший объем. Объем всего сосуда по условию задачи равен $V = 20$ дм^3; следовательно, вся вода испариться не может. Наряду с остатком воды в левой части сосуда будет ее насыщенный пар, давление которого равно p_0. Таким же будет и давление азота в правой части сосуда.

6. $v = \frac{mgR\sin\alpha}{B^2L^2}$. *Указание.* При постоянной скорости перемещения перемычки мощность силы тяжести, действующей на перемычку, равна электрической мощности, выделяющейся на сопротивлении.

7. $T = \pi\sqrt{\frac{33m}{k}}$.

Вариант 2

2. $T_2 > T_1$. **3.** Газ получает тепло на участках *1–2* и *2–3*.

4. $\frac{\Delta N}{N_0} = 1 - 2^{-\frac{t}{T}} = 0{,}29$. **5.** $h = \frac{23}{27}R$.

6. $v = \frac{q}{\sqrt{2\pi\varepsilon_0 Rm}}$. **7.** $l = \frac{k\left(L_0 + r\right)}{k - 4\pi r^3\omega^2\rho}$.

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Математика

Вариант 1

1. $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $\pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** $\frac{9 \pm \sqrt{129}}{2}$.

3. $t \in \left[0^{00}; 0^{01}\right] \cup \left[0^{37}; 0^{43}\right] \cup \left[4^{37}; 4^{43}\right] \cup \left[8^{37}; 8^{43}\right]$.

4. Нет решений при

$a \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right) \cup \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$; $-a - 1$ при $a \in \left[-\frac{1}{4}; 0\right)$;

$\{-a\} \cup (a; 3a]$ при $a \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$;

$\{-a\} \cup (a; 1-a]$ при $a \in \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$;

$\{-a\} \cup [1-a;\ a)$ при $a \in \left(\dfrac{1}{2};\ 1\right)$;

$(0;\ 1)$ при $a = 1$; $\quad (a-1;\ 2-a]$ при $a \in \left(1;\ \dfrac{3}{2}\right)$.

5. $\dfrac{7\sqrt{5}}{3}$, $\dfrac{7\sqrt{26}}{3}$; $\sqrt{5}$, $\dfrac{91\sqrt{5}}{150}$.

Вариант 2

1. $\log_2 3;\ \log_2 5$. **2.** $(-1)^{n+1}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

3. 40%, 10%. **4.** $\sqrt{2\left(a^2+10a+30\right)}$; -7; -3. **5.** $\sqrt{15}$; $\dfrac{32}{3}\sqrt{11}$.

Физика

Вариант 1

1. $E = \dfrac{8q}{9\pi\varepsilon_0 l^2}$. **2.** $v = \dfrac{2s}{\tau\sqrt{n}}$. **3.** $m_1 = \dfrac{mn(k-1)}{n-1} = 4$ кг.

4. $l \ge \dfrac{v_0^2 M}{2\mu g(m+M)}$. **5.** $F_3 = F_1\dfrac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha} + F_2\cos^2\alpha$.

Вариант 2

1. $l_1 = \dfrac{F^2}{l} = 40$ см.

2. $\mathrm{M} = \dfrac{\mathrm{M}_{\text{к}}}{2(2T_1/T_2 - 1)} = 4$ г/моль (это – гелий).

3. $\varphi = \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}$. **4.** $l = \dfrac{2v_0^2\sin(\alpha+\beta)\cos\beta}{g\cos^2\alpha}$.

5. $a = \dfrac{(1-\cos\alpha)g}{\alpha}$ (здесь α – в радианах).

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физика

Вариант 1

1. Пусть μ – коэффициент трения между бруском и наклонной плоскостью, а α – угол наклона плоскости к горизонту. Тогда из второго закона Ньютона получаем

$$a_1 = g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha,\quad a_2 = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha.$$

Отсюда

$$\alpha = \arcsin\frac{a_1 + a_2}{2g}.$$

2. Пусть p_1 – давление в верхнем отсеке, а p_2 – в нижнем, тогда из условия равновесия поршня получаем

$$p_2 - p_1 = \frac{mg}{S}.$$

Воспользуемся тем фактом, что полное число молекул газа в обоих отсеках сосуда сохраняется. Пусть в какой-то момент времени объемы были равны V_1 и V_2 для верхнего и нижнего отсеков соответственно, а сдвинувшийся в результате процесса поршень увеличил (уменьшил) объем верхнего (нижнего) отсека на ΔV. Тогда на основании обобщенного газового закона имеем

$$\frac{p_1V_1}{T_1} + \frac{p_2V_2}{T_2} = \frac{p_1(V_1+\Delta V)}{T_1} + \frac{p_2(V_2-\Delta V)}{T_2}, \text{ или } \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Окончательно получаем

$$p_1 = \frac{mg}{S}\frac{T_1}{T_2 - T_1},\quad p_2 = \frac{mg}{S}\frac{T_2}{T_2 - T_1}.$$

3. Разобьем среднюю пластину на две – получатся два конденсатора емкостью C_1 и C_2 с распределениями зарядов, как показано на рисунке 10. Емкости конденсаторов определяются по формуле плоского конденсатора $C_i = \varepsilon_0 S/d_i$, электрические поля, создаваемые в конденсаторах, равны $E_i = U/d_i$, а заряды на пластинах составляют $q_i = C_iU$, где i = 1, 2. Сила, действующая на пластину конденсатора, равна $F_i = \dfrac{1}{2}q_iE_i$ (множитель $1/2$ появился потому, что для определения силы требуется учесть только внешнее поле по отношению к пластине, которое равно половине от поля в конденсаторе). Итак, сила, действующая на среднюю пластину, равна

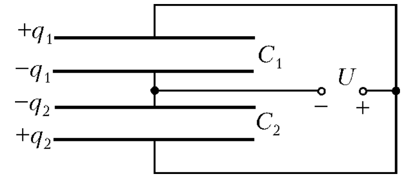


Рис. 10

$$F = F_1 - F_2 = \frac{q_1E_1}{2} - \frac{q_2E_2}{2} = \frac{C_1U^2}{2d_1} - \frac{C_2U^2}{2d_2} = \frac{\varepsilon_0 SU^2}{2}\left(\frac{1}{d_1^2} - \frac{1}{d_2^2}\right).$$

4. Для начала вспомним, какие величины известны: масса пули $m \approx 10$ г, скорость вылета пули из ствола ружья $v \approx 1$ км/с (точнее, 800 м/с), длина ствола $l \approx 1$ м. Получившаяся мощность должна зависеть от этих величин.
Мы точно не знаем, как ведет себя пуля при выстреле в стволе, но не сильно ошибемся в случае определения средних величин, если предположим, что пуля движется равноускоренно. Тогда время разгона пули в стволе равно $t = 2l/v$, а мощность составляет

$$N = \frac{mv^2}{2t} = \frac{mv^3}{4l} \approx 2{,}5\cdot 10^6 \text{ Вт} \sim 1 \text{ МВт}.$$

5. Очевидно, чем больше перепад давлений воды в сосуде, тем больше скорость воды в струе. Чем больше скорость воды в струе, тем дальше она «бьет». В первом случае перепад давлений соответствует высоте столба жидкости, которая с течением времени уменьшается.
Во втором случае для формирования струи необходимо, чтобы воздух заполнил верхнюю трубочку и пробулькивался через нее, так как вода несжимаема. Значит, в нижнем конце трубки устанавливается атмосферное давление и воду «разгоняет» столб жидкости, высота которого не меняется до тех пор, пока уровень жидкости выше нижнего конца трубки. Следовательно, не меняется скорость на выходе, и струя воды все время попадает в емкость на столе, наполняя ее полностью.

Вариант 2

1. $\Delta h = \dfrac{V}{S}\left(\dfrac{p}{p_0} - 1\right)$.

2. На рисунке 11 изображены силы, которые действуют на тело вдоль плоскости. Сила трения направлена против движения и равна $F_{\text{тр}} = \mu mg\cos\alpha$. Так как тело движется с постоянной скоростью, сумма всех сил, действующих на него, должна быть равна нулю. Отсюда получаем

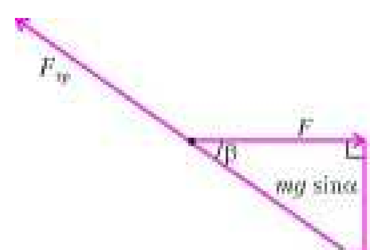


Рис. 11

$$m = \frac{F\operatorname{tg}\beta}{g\sin\alpha},\quad \mu = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\beta}.$$

3. Пусть v – скорость пластин после неупругого удара, v' – скорость верхней пластины в момент, когда отпустили нижнюю, C' – емкость конденсатора в этот момент. Ясно, что $C/C' = d/D$. Обозначим заряд конденсатора через q и запишем законы сохранения энергии и импульса:

$$\frac{q^2}{2C} = \frac{mv'^2}{2} + \frac{q^2}{2C'}, \quad mv' = 2mv .$$

В итоге получаем

$$v = \sqrt{\frac{CU^2\left(1 - d/D\right)}{4m}} .$$

4. Пусть спортсмен подпрыгивает на высоту h, тогда длительность прыжка составляет $t = 2\sqrt{2h/g}$. Следовательно, средняя скорость центра скакалки равна $v = 2 \cdot 2\pi\left(l/2\right)/t$, где l – длина скакалки. Если $h \sim 20$ см, а $l \sim 2$ м, то

$$v = \pi l\sqrt{\frac{g}{2h}} \sim 30 \text{ м/с} .$$

Вариант 3

1. $P_0 = \frac{3}{11}P$.

2. Очевидно, что работа $A_{\text{тр}}$ силы трения на первой половине пути бусинки та же, что и на второй. Из закона сохранения энергии получаем

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kq^2}{R} = \frac{mv_1^2}{2} + A_{\text{тр}} + \frac{kq^2}{h}, \quad \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + 2A_{\text{тр}},$$

откуда находим скорость бусинки:

$$v = \sqrt{2v_1^2 - v_2^2 + 4\frac{kq^2}{m}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{R}\right)} .$$

3. Запишем закон сохранения энергии и второй закон Ньютона для проекций сил вдоль нити:

$$\frac{mv^2}{2} = mgR\cos\alpha, \quad T = \frac{mv^2}{R} + mg\cos\alpha .$$

Отсюда для силы натяжения нити получаем

$$T = 3mg\cos\alpha .$$

В момент, когда подставка сдвинется с места, горизонтальная проекция силы натяжения нити, равная $T\sin\alpha$, должна сравняться с величиной силы трения скольжения, равной $\mu\left(Mg + T\cos\alpha\right)$. Следовательно,

$$\mu = \frac{T\sin\alpha}{Mg + T\cos\alpha} = \frac{3m\sin\alpha\cos\alpha}{M + 3m\cos^2\alpha} .$$

4. При большой горизонтальной скорости верхняя точка траектории незначительно превышает высоту автобуса $H \sim 4$ м, поэтому для вертикальной скорости внизу v имеем

$$\frac{mv^2}{2} = mgH .$$

Вертикальная скорость мотоциклиста гасится на пути h, равном деформации амортизаторов порядка 0,3 м плюс 0,4–0,5 м за счет приседания каскадера, который в момент приземления стоит почти выпрямившись. Тогда, если F – сила давления каскадера на мотоцикл при приземлении, из закона сохранения энергии получаем

$$\frac{mv^2}{2} = Fh .$$

Таким образом,

$$F = \frac{mgH}{h} \approx \frac{60 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot 4 \text{ м}}{0{,}8 \text{ м}} = 3000 \text{ Н} .$$

5. В области соприкосновения подошв и пола имеются небольшая контактная разность потенциалов и заряды противоположных знаков. Эти заряды возникают из-за трения подошв ботинок о пол во время ходьбы. При увеличении зазора напряжение многократно возрастает, соответственно возрастает и заряд электроскопа. При приземлении исходная ситуация восстанавливается.

Еще один вариант объяснения: системы человек–пол и электроскоп–пол можно представить как два параллельных конденсатора. Емкость первого многократно превышает емкость второго, и поэтому весь имеющийся заряд сконцентрирован на подошве. При уменьшении емкости конденсатора человек–пол (человек подпрыгивает) заряды в системе перераспределяются. При восстановлении начальной ситуации (человек приземляется) все приходит в начальное состояние.

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ.А.И.ГЕРЦЕНА

Математика

Вариант 1

1. а) $\left(-\infty; -\sqrt{n}\right) \cup \left(-\sqrt{n}; \sqrt{n}\right) \cup \left(\sqrt{n}; +\infty\right)$;

б) $g(x) = |x+2|^{-1}$, $x \neq 2$ (рис.12);

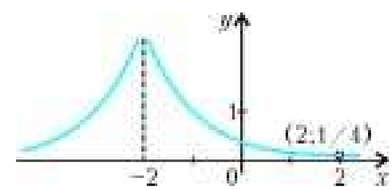


Рис. 12

в) $c \geq 0$; 2 корня, если $c = 0$ или $c \geq 3$; 3 корня, если $c = 2{,}75$, и 4 корня, если $0 < c < 2{,}75$ или $2{,}75 < c < 3$. *Указание.* Нарисуйте график функции $\left|g(x) - 3\right|$.

2. $\left(-\infty; -8\right) \cup \left(\sqrt{10}; +\infty\right)$.

3. $-\frac{13\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

4. 4 см.

5. 15 см и $8\sqrt{3}$ см.

Вариант 2

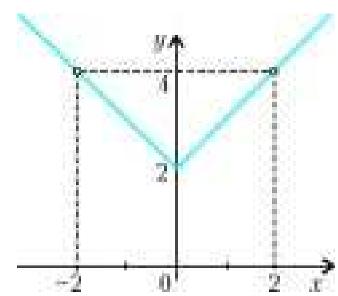


Рис. 13

1. а) $\left(-\infty; -n\right) \cup \left(-n; 0\right]$;

б) $g(x) = 2 - x$, если $x \leq 0$ и $x \neq -2$, $g(x) = x + 2$, если $x > 0$ и $x \neq 2$ (рис.13);

в) $a = 1$. *Указание.* Нарисуйте график функции $\left|g(x) - 3\right|$.

2. $(0; 15) \cup (15; +\infty)$.

3. πk, $k = 0, 1, 2, \ldots$; $-\frac{2}{3}\pi + 2\pi n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$; $\frac{2}{3}\pi + 2\pi m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$

4. $\sqrt{10}$ см. **5.** $8\sqrt{3}$.

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К.Э.ЦИОЛКОВСКОГО (МАТИ)

Математика

Вариант 1

1. 8; $-\frac{2}{3}$. **2.** $(-1)^n\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi n$, $(-1)^n \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** 1. **4.** $\left(0; \frac{1}{49}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$. **5.** $\frac{19}{12}$.

Вариант 2

1. 4. **2.** $\frac{\pi}{36} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** $\frac{1}{3}$.

4. $\left(1; \sqrt[3]{3}\right] \cup \left[8; +\infty\right)$. **5.** $\frac{14}{15}$.

Физика

Вариант 1

1. 4). **2.** 5). **3.** 3). **4.** 2). **5.** 3). **6.** 2). **7.** 2). **8.** 5). **9.** 3). **10.** 1).

Вариант 2

1. 3). **2.** 1). **3.** 2). **4.** 2). **5.** 4). **6.** 5). **7.** 2). **8.** 4). **9.** 2). **10.** 3).

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НЕФТИ И ГАЗА ИМ.И.М.ГУБКИНА

Математика

Вариант 1

1. 0,1. **2.** −8. **3.** 0,7. **4.** 11. **5.** 7. **6.** 3.
7. −1. **8.** −15.
9. 1,5. *Указание.* Вершина параболы имеет координаты $M\left(-\frac{p}{2}; q-\frac{p^2}{4}\right)$, эти координаты связаны между собой равенством $q-\frac{p^2}{4}=-\frac{1}{2p}$, откуда $q=\frac{p^2}{4}-\frac{1}{2p}$. Если x_1, x_2 – корни трехчлена, то по теореме Виета $S=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=p^2-2q$, и подстановка сюда полученного выше выражения для q дает $S(p)=\frac{p^2}{2}+\frac{1}{p}$. Осталось с помощью производной выяснить, при каком значении переменной p достигается наименьшее значение этой функции.
10. 0,5. *Указание.* Прологарифмируйте обе части уравнения по основанию 54, выполните замену $y=\log_{54}x$ и решите полученное уравнение. При этом удобно еще ввести обозначение $a=\log_{54}2$.
11. 5. *Указание.* Пусть O и Q – центры первой и второй окружностей соответственно, $AB=CD=a$, $\angle A=\alpha$, M – середина стороны CD. Точки O и Q лежат на оси симметрии трапеции и являются точками пересечения с этой осью перпендикуляров к CD в точках C и M. Поэтому $OQ=\frac{a}{2\sin\alpha}$. Величину a без труда находим из треугольника ABD, ибо $R=\frac{BD}{2\sin\alpha}$.
12. 6. *Указание.* Пусть высота цилиндра равна h, тогда высота конуса равна $3h$, а диаметр шара равен $2R=5h$, т.е. $h=\frac{2R}{5}$.

Вариант 2

1. 1. **2.** 2. **3.** 7. **4.** −0,4. **5.** 7. **6.** 0,1. **7.** 0,25. **8.** 5.
9. 3. *Указание.* При $x\neq 0$ постройте график функции $y=5x^3+8x^2$ и выясните, при каких значениях параметра a этот график имеет три точки пересечения с горизонтальной прямой $y=a$.
10. 10. **11.** 4. *Указание.* Пусть $BM=a$, $\angle BCA=\alpha$, $AM=11x$, $MP=3x$. Тогда $33x^2=a^2$, откуда $AM=a\sqrt{\frac{11}{3}}$. Кроме того, $AC=4a\cos\alpha$. Из треугольника AMC находим по теореме косинусов, что $\cos^2\alpha=\frac{1}{3}$, после чего выражаем через a длины отрезков AH, HC, BH и $HK=\frac{BH\cdot HC}{AH}$.
12. 18. *Указание.* Пусть $SABC$ – данная пирамида, M – центр вписанной окружности треугольника SBC, K – середина стороны BC, O – центр основания пирамиды, $BC=a$, β – величина двугранного угла при ребре AC. Выразите через a и β отрезки SM, SC, MK и CK и из пропорции $\frac{SM}{SC}=\frac{MK}{CK}$ (CM – биссектриса угла SCK) найдите $\operatorname{tg}\beta$.

Физика

Вариант 1

1. $h=9$ м. **2.** $v=150$ см/с. **3.** $\Delta E=600$ Дж. **4.** $\rho=2$ кг/м^3. **5.** $U=45$ В. **6.** $I=16$ А. **7.** $R=150$ мм. **8.** $\lambda=375$ нм. **9.** $v=4$ м/с. **10.** $M=8$ кг.
11. Работа за цикл равна площади треугольника (рис.14):

$$A=\frac{1}{2}(p_2-p_1)(V_3-V_2)=$$
$$=\frac{1}{2}(4p_1-p_1)(2{,}5V_1-V_1)=2{,}25\nu RT_1.$$

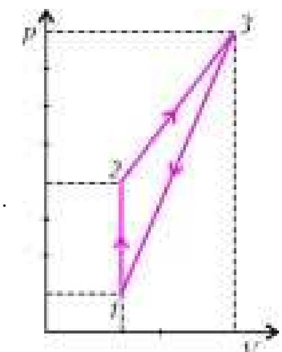


Рис. 14

Газ получает тепло на участках *1–2* и *2–3*. Полученное количество теплоты равно

$$Q=Q_{13}=(U_3-U_1)+A_{13}=$$
$$=\frac{3}{2}\nu R(T_3-T_1)+\frac{1}{2}(p_2+p_3)(V_1-V_2)=$$
$$=\frac{3}{2}\nu R(2\cdot 2{,}5\cdot 4T_1-T_1)+\frac{1}{2}(4p_1+4\cdot 2p_1)(2{,}5V_1-V_1)=37{,}5\nu RT_1.$$

Получаем, что КПД цикла равен

$$\eta=\frac{A}{Q}=0{,}06, \text{ т.е. } 6\%.$$

12. Обозначим через x малое смещение грузиков от положения равновесия при малом повороте системы на угол φ:

$$x=\varphi\frac{l}{2},$$

где l – длина стержня. Используем энергетический метод определения частоты колебаний. Для этого выразим через x и $v=x'$ потенциальную и кинетическую энергии системы. Потенциальная энергия определяется изменением высоты Δh центра масс, который в положении равновесия находится под осью вращения (гвоздем) на расстоянии $l/4$ от него:

$$E_p=2mg\Delta h=2mg\frac{l}{4}(1-\cos\varphi)=$$
$$=mg\frac{l}{2}\cdot 2\sin^2\frac{\varphi}{2}=mg\frac{l}{2}\frac{\varphi^2}{2}=\frac{2mg}{l}\frac{x^2}{2}.$$

Поскольку $E_p=\frac{k_0x^2}{2}$, то $k_0=\frac{2mg}{l}$.
Кинетическая энергия системы равна

$$E_k=2m\frac{x'^2}{2}=m_0\frac{x'^2}{2}, \text{ т.е. } m_0=2m.$$

Получаем окончательно

$$\omega=\sqrt{\frac{k_0}{m_0}}=\sqrt{\frac{2mg/l}{2m}}=\sqrt{\frac{g}{l}}=2\ \text{с}^{-1}.$$

Вариант 2

1. $F=45$ Н. **2.** $v=250$ см/с. **3.** $l=25$ мм. **4.** $p=35$ атм. **5.** $q=120$ мкКл. **6.** $Q=480$ Дж. **7.** $k=3$. **8.** $f=15$ см. **9.** $l=120$ м. **10.** $l=13$ м. **11.** $\eta=8\%$.
12. Обозначим через x длину части стержня, заехавшей на шероховатую поверхность в момент времени t, через m_1 – массу этого куска: $m_1=mx/l$. Действующая на стержень в этот момент сила трения равна

$$F_{\text{тр}}=\mu m_1 g=\mu\frac{m}{l}xg.$$

Уравнение движения стержня имеет вид

$$mx'' = -\frac{\mu mg}{l}x.$$

Это уравнение совпадает с уравнением движения груза массой m на пружине жесткостью $k_0 = \frac{\mu mg}{l}$. Период колебаний такого маятника равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_0}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\mu g}}.$$

С учетом того, что в начальный момент $x = 0$ (движение «маятника» начинается из положения равновесия), получим

$$x = A\sin\frac{2\pi}{T}t,$$

где A – «амплитуда колебаний», т.е. максимальное смещение стержня. Скорость стержня изменяется по закону

$$v = x' = A\cdot\frac{2\pi}{T}\cos\frac{2\pi}{T}t = v_0\cos\frac{2\pi}{T}t.$$

Для момента времени, когда $v = v_0/2$, получаем

$$t = \frac{T}{6} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{l}{\mu g}} = 0{,}628 \text{ с} = 628 \text{ мс}.$$

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Математика

Вариант 1

1. $x+1$. **2.** $-1/5$. **3.** 2. **4.** -2. **5.** $\left(6+\sqrt{6}-\sqrt{42}\right)/12$. **6.** 22.
7. $[-3;-1)\cup\{1\}$. **8.** 1; 2. **9.** (1; 1), (25; 25). **10.** -1.
11. $\left(-2;\sqrt{12}\right)$. **12.** $2\pi n$, $\pi/4+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **13.** 1. **14.** 3.
15. $13\pi/12$, $17\pi/12$. **16.** $[-1;-1/4]$. **17.** $2\sqrt{5}$. **18.** 3.
19. $-\pi/4+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **20.** 33/70.

Вариант 2

1. 3. **2.** 2. **3.** $a<b$. **4.** -2; 1. **5.** 12. **6.** (0; 5). **7.** -1. **8.** 780.
9. $-\pi/4+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **10.** (1; -3), (3; -1). **11.** $-5/2$.
12. 1/3. **13.** $y = 1+x$. **14.** 5. **15.** $(1/3;1/2)\cup(1/2;1)\cup(1;+\infty)$.
16. $\pi/4+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **17.** $\pi/6$. **18.** 49/81. **19.** $64\sqrt{3}$.
20. $[-8;-3/4]\cup(0;+\infty)$.

XXXV МЕЖДУНАРОДНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Задача 1

a) $F = \frac{\varepsilon_0\pi R^2U^2}{2d^2}$; b) $\chi = -\frac{\varepsilon_0\pi r^2}{d}$; c) $U^* = \sqrt{\frac{2mgd}{|\chi|}}$;

d) $\alpha = \frac{2|\chi|}{m}\frac{\eta^2}{1-\eta^2}$, $\beta = 2gd\frac{\eta^2}{1+\eta^2}$; e) $\gamma = \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}\frac{|\chi|^3}{2md^2}}$;

f) $U_к = \sqrt{\frac{1-\eta^2}{1+\eta^2}\frac{mgd}{|\chi|}} < U^*$, $I_к = \frac{2\eta g}{(1+\eta)\left(1+\eta^2\right)}\sqrt{|\chi|m\left(1-\eta^2\right)}$.

Задача 2

a) $F = nM_вg\frac{p}{p+\Delta p}$; b) $\eta = \frac{M_вgz_0}{RT_0}\approx 5{,}5$;

c) $\Delta p = \frac{4kRT}{r_0}\left(\lambda^{-1}-\lambda^{-7}\right)$; d) $a = \frac{n/\left(n_0\lambda^3\right)-1}{\lambda^{-1}-\lambda^{-7}}\approx 0{,}11$;

e) $\lambda^* \approx \sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\lambda}\right)\left(1-\frac{M}{nM_в}\right)\lambda^3}\approx 2{,}14$, $z^*\approx 11$ км.

Задача 3

a) $A = \frac{F_0}{\sqrt{b^2\omega^2+m^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b\omega}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}$; при резонансе $A = \frac{F_0}{b\omega_0}$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$;

b) $\omega = \omega_1$, $U_{вых} = \frac{1}{2}U_{10}U_{20}\cos\varphi_1$; c) $U = \frac{cc_1}{2}\frac{U_{20}^2}{b\omega_0}$;

d) $\Delta m \approx \frac{b}{\sqrt{k/m}}\Delta\varphi \approx 1{,}75\cdot 10^{-18}$ кг; e) $\omega_0' = \sqrt{\omega_0^2-\frac{c_2}{m}}$;

f) $d_0 = \sqrt[3]{\frac{k_eqQ}{m\omega_0\Delta\omega_0}}\approx 41$ нм.

МОСКОВСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКЕ

1. Вектор перемещения перпендикулярен начальной скорости и равен $\Delta r = \frac{mv_0}{qB}$.

2. $v = \sqrt{15}v_0$. **3.** $A = \alpha_0 l\sqrt{2}$. **4.** $\varphi = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

5. $\Delta T = T\frac{\rho v_0^2}{3p}$. **6.** $A = \frac{3}{2}V\left(p_0-p\right)$. **7.** $F = \frac{\lambda^2}{4{,}46\pi\varepsilon_0R}$.

8. $L = \frac{2\mu_0 ld}{3a}$. **9.** $I = 25\pi^2I_0$.

Журнал Квант ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»;
тел.: 930-56-48;
e-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Диапозитивы изготовлены ООО «Европолиграфик»

Заказ №
Отпечатано на ГУ РПП, г. Ржев, ул. Урицкого, 91

При участии ЗАО «РИЦ «Техносфера», тел.: (095) 234-01-10

САГА О БРИССАГО

В сентябре-октябре 2004 года в швейцарском городе Бриссаго состоялся матч на первенство мира по шахматам (с классическим контролем времени) между чемпионом мира россиянином Владимиром Крамником и претендентом на корону венгерским гроссмейстером Петером Леко. Матч закончился со счетом 7:7, и по регламенту (и по старинной традиции!) Крамник сохранил свой титул.

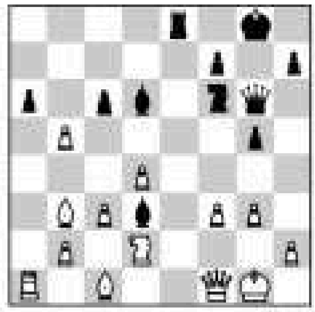
Первую партию выиграл Крамник – его соперник, возможно из-за стартового волнения, в ничейном эндшпиле действовал слишком неуверенно. В следующих трех партиях особой борьбы не получилось. Шахматные болельщики были разочарованы – какая скука! В пятой встрече Крамник уже в дебюте перешел в окончание без пешки, которое считалось почти ничейным. Но Леко сумел реализовать материальный перевес. Счет сравнялся. В шестой партии претендент тоже получил дебютный перевес, но к всеобщему удивлению уже на 20-м ходу предложил ничью. Бесцветно протекала и следующая партия. А вот в восьмой Леко создал настоящий шедевр и вышел вперед.

Крамник – Леко

Испанская партия

1.e4 e5 2. ♘f3 ♘c6 3. ♗b5 a6 4. ♗a4 ♘f6 5. 0-0 ♗e7 6. ♖e1 b5 7. ♗b3 0-0. 8. c3 d5 9. ed ♘:d5 10. ♘:e5 ♘:e5 11. ♖:e5 c6 12. d4 ♗d6 13. ♖e1 ♕h4 14. g3 ♕h3 15. ♖e4 g5. Разыгран острейший вариант «испанки» – контратака Маршалла, в которой черные жертвуют пешку за инициативу. **16. ♕f1 ♕h5.** До сих пор здесь обычно происходил размен на f1, и черные добивались ничьей. Однако матовых угроз уже нет, и с лишней пешкой Крамник собирался поиграть на выигрыш. **17. ♘d2 ♗f5 18. f3.** Можно считать новинкой, но ход очевиден: принимать жертву качества, создавая белым мощный пешечный центр, нет никакого смысла. **18... ♘f6 19. ♖e1 ♖ae8 20. ♖:e8 ♖:e8 21. a4 ♕g6 22. ab ♗d3.**

23. ♕f2?? На доске динамическое равновесие, и сейчас после 23. ♕d1 ♗c2 24. ♕c2 ♗d3 25. ♕d1 партнеры могли разойтись с миром. Вместо этого белые отдают ферзя, но жертва оказывается некорректной! А после матча чемпион мира сделал удивительное признание: позиция на диаграмме и даже последний ход ферзем изучались



им при подготовке к партии. Получается, что Крамник проиграл партию дома, не сделав ни одного своего хода. Поразительный случай для матча на первенство мира! А все дело в том, что данную позицию Крамник с помощниками доверили проанализировать сильному компьютеру, и он не обнаружил за белых никаких опасностей.

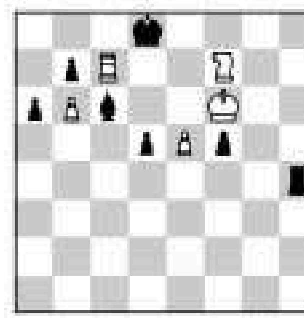
23... ♖e2! 24. ♕:e2. Плохо и 24. ba ♖:f2 25. ♔:f2 ♕h6 26. ♔g2 g4! 27. fg ♕e3! с неотразимыми угрозами. **24... ♗:e2 25. ba.** С пешкой «а», видимо, и были связаны все надежды чемпиона. Но последовало... **25... ♕d3!** Неожиданное вторжение ферзя – настоящая катастрофа для белых. **26. ♔f2.** Плохо также 26. a7 ♕e3+ 27. ♔g2 ♗:f3+! 28. ♘:f3 ♕e2+ 29. ♔g1 ♘g4! 30. a8♕+ ♔g7. **26... ♗:f3! 27. ♘:f3 ♘e4+ 28. ♔e1 ♘:c3! 29. bc ♕:c3+ 30. ♔f2 ♕:a1.** Крайняя пешка белых остановлена. **31. a7 h6 32. h4 g4. Белые сдались.** Лучшее достижение Леко в матче.

В девятой партии оба соперника приходили в себя после бурной схватки, мирным исходом завершились и две следующие встречи. Похоже, венгерский гроссмейстер, ведя в счете, решил добраться до финиша на ничьих. Это подтвердила и 12-я партия – в ней претендент отразил все угрозы соперника, добился большого перевеса и вместо того, чтобы попытаться закрепить успех, опять согласился на ничью. В 13-й партии претендент чудом спасся, но в 14-й уже не смог устоять. В критический момент дрогнул, нервы его не выдержали, а чемпион мира, наоборот, проявил характер.

Крамник – Леко

Защита Каро-Канн

1. e4 c6 2. d4 d5 3. e5 ♗f5 4. h4 h6 5. g4 ♗d7 6. ♘d2. Редкий случай в наши дни: новинка применяется уже на шестом ходу. А ведь эта позиция встречалась еще в 1961 году в матче-реванше Таль–Ботвинник. Таль играл 6. h5, и белые ничего не добились. **6...c5 7. dc e6 8. ♘b3 ♗:c5 9. ♘:c5 ♕a5+ 10. c3 ♕:c5 11. ♘f3 ♘e7 12. ♗d3 ♘bc6 13. ♗e3.** Препятствуя d5–d4. **13... ♕a5 14. ♕d2.** Возникла расстановка фигур, характерная для французской защиты. У белых преимущество двух слонов и некоторое давление на королевском фланге, но пока еще ничего опасного для черных нет. **14... ♘g6 15. ♗d4.** Пешка e5 в опасности, и белые вынуждены идти на размен ферзей. **15... ♘:d4 16. cd ♕:d2+ 17. ♔:d2 ♘f4 18. ♖ac1 h5 19. ♖hg1 ♗c6 20. gh ♘:h5 21. b4!** Шансы белых связаны с владением линией «с», и Крамник искусно использует их. **21... a6 22. a4 ♔d8?** Пассивная игра ведет к драматическому концу. Необходимо было 22... ♗:a4 23. ♖c7 ♗b5!, и черные благополучно держались. **23. ♘g5 ♖e7 24. b5 ♘f4.** Решающий промах. **25. b6! ♘:d3 26. ♔:d3 ♖c8 27. ♖:c8+ ♔:c8 28. ♖c1 ♗c6 29. ♘:f7 ♖:h4 30. ♘d6 ♔d8 31. ♖g1!** Ладья вторгается по линии «g», и на этом борьба заканчивается. **31... ♖b3+ 32. ♔e2 ♖a3 33. ♖:g7 ♖:a4 34. f4!** Решающий марш пешки «f». **34... ♖a2+ 35. ♔f3 ♖a3+ 36. ♔g4 ♖d3 37. f5 ♖:d4+ 38. ♔g5 ef 39. ♔f6 ♖g4 40. ♖c7 ♖h4 41. ♘f7+.**



Крамник объявил шах конем, и Леко поздравил его с победой в партии и в матче ввиду 41... ♔e8 42. ♖c8+ ♔d7 43. ♖d8×. Редкий случай, когда поединок за шахматную корону завершается матом!

Да, в заключительной встрече Крамник повторил спортивный подвиг Каспарова: в матче с Карповым в Севилье в1987 году, отставая на очко, тот элегантно выиграл решающую партию, сравнял счет и отстоял свой титул.

Итак, Крамник, чемпион мира по классике, остался на троне, а его предшественнику Гарри Каспарову в 2005 году предстоит сыграть матч с чемпионом мира ФИДЕ Рустамом Касымжановым. Если планы не сорвутся, то победитель встретится в объединительном матче с Крамником, и останется только один шахматный король. Скорее всего, в «финал» выйдет 13-й чемпион мира, и значит, нас ждет долгожданный матч-реванш Крамник–Каспаров.

Е. Гик

Индексы:
70465 – по каталогу "Роспечать"
26040 – по каталогу "Пресса России"

Университеты мира на монетах и банкнотах

Из нескольких десятков классических итальянских университетов только университеты Болоньи и Пизы удостоились появления на нумизматических памятниках.

В 1988 году 900-летие основания Болонского университета отмечено выпуском юбилейной серии из трех монет достоинством 100, 200 и 500 лир. На аверсе каждой из них изображен вдумчивый школяр, а на реверсе – сцены из университетской жизни. В 1993 году к 650-летию основания Пизанского университета выпущены две монеты достоинством 500 и 5000 лир, на реверсе последней представлен физический прибор – маятник Фуко.