на. В каждой деревне упорядочим борцов по убыванию силы и выберем десятого по силе борца. Покажем, что деревня, в которой живет слабейший из выбранных борцов, не может быть сильнее следующей за ней. Обозначим выбранных борцов в нашей и следующей деревнях через A и B соответственно. Тогда в нашей деревне 11 борцов не сильнее, чем A, а в следующей – 10 борцов хотя бы такой же силы, как B. Все поединки между этими борцами закончатся в пользу второй деревни, и этих поединков 110, т.е. поединков, в которых выиграл борец нашей деревни, не больше $20\cdot 20-110=290$.
Приведем пример, показывающий, что при $k\le 290$ описанная ситуация возможна. Пусть среди борцов есть 210 новичков и 190 мастеров (любой новичок слабее любого мастера). Пронумеруем деревни *против* часовой стрелки. Поместим в первую деревню одного слабейшего новичка и 19 слабейших мастеров; во вторую – двух новичков, слабейших из оставшихся, и 18 мастеров, слабейших из оставшихся; в третью – трех слабейших из оставшихся новичков и 17 мастеров, слабейших из оставшихся; ...; в последнюю деревню поместим 20 сильнейших новичков.
Покажем, что i-я деревня сильнее $(i-1)$-й при $i>1$. Действительно, мастера i-й деревни победят всех в $(i-1)$-й, а новички победят новичков, и всего побед будет $20(20-i)+$ $+\,i(i-1)=i^2-21i+400$. Вершина этой параболы находится в точке $i=10{,}5$, а ветви направлены вверх, поэтому минимальное значение в целой точке достигается при $i=10$, 11 и равно 290, т.е. каждая i-я деревня сильнее $(i-1)$-й при $k\le 290$. Кроме того, мастера первой деревни победят новичков 20-й, и здесь побед будет $20\cdot 19=380>290$.

17. 2 и 3 (например, выполнены равенства $2^2-1=2+1$, $(3-1)^2=3+1$). Предположим, что при некотором $a>3$ условие задачи выполнено:

$$A=\left(a^{m_1}-1\right)\ldots\left(a^{m_n}-1\right)=\left(a^{k_1}+1\right)\ldots\left(a^{k_l}+1\right).$$

Докажем сначала, что как любое m_i, так и число $a-1$ являются степенями двойки. Пусть γ – нечетный делитель числа m_i, а p – любой простой делитель числа $a^\gamma-1$. Тогда в правом произведении найдется множитель $a^{k_j}+1$, делящийся на p. Поэтому число

$$\left(\left(a^{k_j}\right)^\gamma+1\right)-\left(\left(a^\gamma\right)^{k_j}-1\right)=2$$

делится на p, т.е. все простые делители числа $a^\gamma-1$ – двойки и $a^\gamma-1=\left(a^{\gamma-1}+\ldots+a+1\right)(a-1)=2^n$. Поскольку $a>3$, то $n>1$. При этом γ нечетно, поэтому выражение в первой скобке – нечетный делитель числа 2^n. Значит, $\gamma=1$ и $a-1=2^n$. В частности, $a-1$ делится на 4 (ибо $a-1>2$), поэтому a^k+1 имеет остаток 2 при делении на 4.
Каждая скобка в левой части исходного равенства представляется в виде

$$a^{2^d}-1=(a-1)(a+1)\left(a^2+1\right)\left(a^4+1\right)\ldots\left(a^{2^{d-1}}+1\right)=$$
$$=2^n\cdot 2^d\cdot a_0\ldots a_{d-1},$$

где $a_i=\dfrac{a^{2^s}+1}{2}$ – нечетные числа. Заметим, что при $m>n$ число $a^{2^m}-1$ делится на $a^{2^n}+1$, поэтому НОД$(a_m,a_n)\le$ $\le\left(a^{2^m}+1\right)-\left(a^{2^m}-1\right)=2$; поскольку a_i нечетны, они попарно взаимно просты. Пусть q – максимальная степень двойки, входящая в m_i или k_j. Тогда A представляется в виде $A=2^N a_0^{N_0}\ldots a_q^{N_q}$, причем $N>N_0+\ldots+N_q$, так как аналогичное неравенство справедливо для каждого из $a^{2^d}-1$.
Поскольку любое число вида $a^{k_j}+1$ делится лишь на первую степень двойки, то их количество в представлении числа A не меньше N. Но каждое из них делится на одно из чисел a_i: если $k_j=2^r s$, где s нечетно, то $a^{k_j}+1$ делится на a_r. Поскольку $N>N_0+\ldots+N_q$, то на какое-то число a_i делится больше, чем N_i чисел $a^{k_j}+1$, а следовательно, A делится на большую степень a_i, чем N_i. Противоречие с тем, что a_i нечетны и попарно взаимно просты.

Избранные задачи Московской физической олимпиады

Первый теоретический тур

8 класс

1. На рисунке 12 изображены графики зависимости пройденного пути от времени для автобуса (ломаная линия) и для велосипедиста (две прямые линии). Скорость велосипедиста должна быть такой, чтобы на отметке «10 км» он находился в

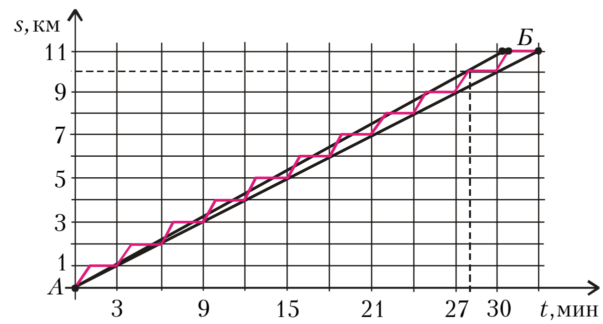

Рис. 12

период времени от 28 мин до 30 мин. Таким образом, скорость велосипедиста должна лежать в интервале от

$$v_1=10\ \text{км}/30\ \text{мин}=20\ \text{км/ч}$$

до

$$v_2=10\ \text{км}/28\ \text{мин}\approx 21{,}4\ \text{км/ч}.$$

2. $L=\dfrac{M}{\rho_\text{а}S}\dfrac{\rho_\text{а}-\rho_\text{в}}{\rho_\text{в}-\rho_\text{д}}=5$ м.

3. В сосуде будут находиться лед и вода массой

$$m_\text{л}=m-\frac{c\rho_\text{в}V\left(t_1-t_2\right)}{\lambda}=37\ \text{г}$$

и

$$m_\text{в}=\rho_\text{в}V+\frac{c\rho_\text{в}\left(t_1-t_2\right)}{\lambda}\approx 1063\ \text{г}$$

при температуре $t=0$ °С, при этом высота уровня воды в сосуде будет

$$H=\frac{V}{a^2}+\frac{m}{\rho_\text{в}a^2}=11\ \text{см}.$$

9 класс

1. Минимальное расстояние между кораблями было в полдень и составляло

$$L=100\sqrt{2}\ \text{мили}\approx 141{,}4\ \text{мили}.$$

2. Сразу после опускания льда перетечет $m_1=\rho_\text{в}V/4=25$ г воды, а в процессе таяния льда дополнительно перетечет $m_2=\rho_\text{л}V/2-\rho_\text{в}V/4=20$ г воды.